

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

## Teorie di gauge ed equazioni di Wong

**Relatore:**  
Prof. Fiorenzo Bastianelli

**Presentata da:**  
Luca Chiese

Anno Accademico 2017/2018

# Abstract

In questa tesi si vuole studiare la teoria elettromagnetica nella sua formulazione covariante e la sua interpretazione come teoria di *gauge abeliana*, a partire dalla quale si costruiranno le teorie di *gauge non abeliane*, dette anche teorie di *Yang-Mills*.

Inizialmente si introducono alcuni concetti di relatività ristretta che saranno utilizzati nella formulazione covariante della teoria elettromagnetica, in particolare verranno scritte le equazioni di Maxwell in un formalismo che le rende invarianti in forma rispetto alle trasformazioni di Lorentz.

Si ricavano le equazioni della meccanica relativistica attraverso il principio di minima azione dopo aver costruito una lagrangiana per la particella relativistica. Vengono analizzati il caso della particella libera e della particella in un campo elettromagnetico esterno.

Infine vengono trattate le teorie di gauge e si vedrà come la teoria elettromagnetica sviluppata può essere interpretata come una teoria di gauge abeliana. Si ricaveranno le equazioni del moto per i campi e l'equazione di Dirac, per la quale si studieranno alcune proprietà. Si estenderanno questi risultati per la formulazione di teorie di gauge non abeliane e si ricaveranno le equazioni di Wong, equazioni che generalizzano le equazioni del moto di una particella carica in un campo elettromagnetico e soggetta alla forza di Lorentz al caso di una particella accoppiata ad un campo di gauge non abeliano.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>4</b>
<b>1 Relatività ristretta</b>	<b>6</b>
1.1 Principio di relatività di Einstein . . . . .	6
1.1.1 Esempio di trasformazione di Lorentz . . . . .	7
1.2 Spazio-tempo di Minkowski e trasformazioni di Lorentz . . . . .	8
1.3 Formalismo tensoriale . . . . .	9
1.4 Quadri-vettori posizione, velocità e accelerazione . . . . .	10
<b>2 Elettromagnetismo in forma covariante</b>	<b>12</b>
2.1 Equazioni di Maxwell . . . . .	12
2.2 Equazioni di Maxwell in forma tensoriale . . . . .	14
2.3 Quadri-corrente e conservazione della carica elettrica . . . . .	17
2.3.1 Carica puntiforme . . . . .	18
2.4 Trasformazioni di Lorentz del campo elettromagnetico . . . . .	19
2.5 Invarianti del campo elettromagnetico . . . . .	20
2.6 Invarianza di gauge . . . . .	21
2.7 Lagrangiana di Maxwell . . . . .	22
<b>3 Meccanica relativistica</b>	<b>25</b>
3.1 Principio di minima azione . . . . .	25
3.2 Particella libera relativistica . . . . .	26
3.3 Moto in un campo elettromagnetico esterno . . . . .	28
3.4 Meccanica relativistica . . . . .	30
3.4.1 Forza di Lorentz . . . . .	31
<b>4 Teorie di gauge</b>	<b>33</b>
4.1 Gruppi di Lie e algebra di Lie . . . . .	33
4.1.1 Gruppo di Lorentz . . . . .	35
4.2 Equazioni d'onda relativistiche . . . . .	37
4.2.1 Equazione di Schrödinger . . . . .	38

4.2.2	Equazioni di Klein-Gordon e Dirac . . . . .	39
4.3	Teoria di gauge abeliana . . . . .	43
4.4	Teorie di gauge non abeliane . . . . .	46
4.5	Equazioni di Wong . . . . .	51
<b>Conclusioni</b>		<b>55</b>
<b>Bibliografia</b>		<b>56</b>

# Introduzione

I fenomeni elettrici e magnetici trovano un'inquadratura teorica con la formulazione delle equazioni di Maxwell nel 1873. Queste equazioni sono soltanto il punto di arrivo di un processo conoscitivo iniziato circa cento anni prima con l'osservazione dei fenomeni elettrici e magnetici dei quali non erano ancora chiare l'origine e le proprietà. In un primo momento si riteneva che elettricità e magnetismo fossero due branche della fisica distinte e non avessero alcun aspetto in comune, ma lavori sperimentali come quelli di Ørsted e Faraday mostrarono come effettivamente esistesse una correlazione tra le due cose. Nel lavoro di Maxwell il campo elettrico e il campo magnetico vengono riuniti nel concetto di campo elettromagnetico, ovvero l'elettricità e il magnetismo sono due aspetti di un'unica interazione fondamentale legata all'esistenza della carica elettrica. Una caratteristica delle equazioni di Maxwell è che da queste è possibile ricavare un'equazione delle onde che descrive la propagazione di onde elettromagnetiche nel vuoto alla velocità della luce; l'esistenza delle onde elettromagnetiche fu verificata sperimentalmente da Hertz nel 1888 e questo permise di spiegare la natura della luce. Tale velocità costituisce il limite massimo a cui può viaggiare un segnale fisico. Questo risultato è in netto contrasto con la meccanica newtoniana, che costituisce l'altra grande teoria fisica presente agli inizi del Novecento sviluppata molto prima della teoria elettromagnetica, la quale non ammette un limite superiore per la velocità. Un altro elemento di contrasto tra le due teorie è presentato dalle leggi di trasformazione delle equazioni tra sistemi di riferimento inerziali: infatti le equazioni della meccanica newtoniana sono invarianti in forma per trasformazioni galileiane, mentre le equazioni di Maxwell lo sono per trasformazioni di Lorentz, formulate già prima della teoria della relatività ristretta. Le trasformazioni di Lorentz infatti ammettono la velocità della luce come velocità massima alla quale un segnale fisico può viaggiare. La teoria della relatività ristretta chiarisce quali sono le corrette leggi di trasformazione tra sistemi inerziali, cioè quelle di Lorentz, e riformula la meccanica newtoniana per renderla compatibile con queste leggi.

La teoria di Maxwell costituisce un esempio di teoria dei campi e il campo elettromagnetico è il primo ad essere stato quantizzato, cioè per il quale è stata formulata una teoria di campo quantizzata chiamata *elettrodinamica quantistica*. Oltre a questa, le teorie quantistiche dei campi che hanno avuto più successo nella descrizione dei fenomeni fisici sono le teorie di gauge non abeliane, teorie basate su un principio di *gauge invarian-*

za più generale della semplice invarianza di gauge  $U(1)$  dell'elettrodinamica quantistica. Queste teorie condividono con l'elettrodinamica l'interessante caratteristica che l'esistenza e alcune delle proprietà dei campi di gauge derivano da un principio di invarianza per trasformazioni di simmetria locali (trasformazioni di gauge). Nel lavoro originale del 1954 [1], Yang e Mills analizzarono il gruppo di gauge non abeliano  $SU(2)$  e successivamente queste teorie vennero generalizzate a qualsiasi gruppo di gauge non abeliano.

La rilevanza fisica di queste teorie fu compresa solo a partire dalla fine degli anni Sessanta. Le teorie di Yang-Mills costituiscono la base del Modello Standard, la teoria fisica che descrive tre delle quattro interazioni fondamentali: le interazioni elettromagnetica, debole e forte e tutte le particelle elementari a loro collegate.

# Capitolo 1

## Relatività ristretta

In questo primo capitolo si vogliono illustrare alcuni degli aspetti più importanti della teoria della relatività ristretta. In particolare il principio di relatività einsteiniano, lo spazio-tempo di Minkowski e le trasformazioni di Lorentz. Inoltre si introdurranno alcuni elementi del formalismo tensoriale che sarà usato abbondantemente nei capitoli successivi. Chiaramente qui si farà una trattazione sintetica dato che mostreremo solo i risultati che serviranno per lo sviluppo degli argomenti successivi. Una trattazione completa può essere trovata in [2] o [3].

### 1.1 Principio di relatività di Einstein

La relatività ristretta nasce dalla necessità di trovare una soluzione ad alcuni problemi di incompatibilità presenti tra la meccanica newtoniana e la teoria elettromagnetica. In particolare non erano chiare quali fossero le corrette leggi di trasformazione delle equazioni che collegano *due sistemi di riferimento inerziali*. Con sistema di riferimento si intende l'insieme di un sistema di coordinate utile a determinare la posizione di una particella nello spazio, e di un orologio per indicare il tempo legato al sistema stesso [3]; possiamo indicare un tale sistema come  $S = \{\mathbf{x}, t\}$ . Con inerziale si intende un sistema in cui il moto libero dei corpi, cioè il moto di corpi su cui non agiscono forze esterne, avviene a velocità costante.

Secondo il *principio di relatività* le leggi della natura sono identiche in tutti i sistemi di riferimento inerziali, per cui le equazioni che descrivono i fenomeni fisici sono invarianti rispetto a trasformazioni delle coordinate e del tempo, corrispondenti ad un cambiamento di sistema inerziale. Questo vuol dire che le equazioni devono avere la stessa forma in tutti i sistemi inerziali.

Le equazioni della meccanica classica sono invarianti per trasformazioni galileiane, mentre le equazioni dell'elettrodinamica classica non sono invarianti per queste trasformazioni, ma lo sono per *trasformazioni di Lorentz*.

Einsten comprese che queste ultime erano le corrette leggi di trasformazione ed era necessario riformulare la meccanica newtoniana per renderla compatibile con le trasformazioni di Lorentz.

La teoria della relatività ristretta si basa su due postulati:

1. **Postulato di relatività:** le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali.
2. **Postulato di costanza della velocità della luce:** la velocità della luce nel vuoto è la stessa (in modulo) in tutti i sistemi di riferimento inerziali, e vale

$$c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}.$$

I due postulati esposti costituiscono il *principio di relatività di Einstein*, da questo derivano le corrette leggi di trasformazione che saranno diverse dalle trasformazioni di Galilei, alle quali però dovranno ridursi nel limite di basse velocità  $v \ll c$ .

### 1.1.1 Esempio di trasformazione di Lorentz

Consideriamo due sistemi di riferimento inerziali  $S = \{\mathbf{x}, t\}$  e  $S' = \{\mathbf{x}', t'\}$ , con il secondo in moto relativo rispetto al primo con velocità costante  $v$  che per semplicità consideriamo diretta lungo l'asse  $x$ . Le trasformazioni di Lorentz che collegano le coordinate e il tempo di questi due sistemi sono

$$\begin{aligned} x' &= (x - vt)\gamma \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \left(t - \frac{\beta}{c}x\right)\gamma \end{aligned} \tag{1.1}$$

dove  $\beta = \frac{v}{c}$ , e  $\gamma$  è il fattore relativistico di Lorentz

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \tag{1.2}$$

Dalle trasformazioni (1.1) osserviamo che il tempo non è più lo stesso per i due sistemi di riferimento considerati. Questa è una conseguenza del principio di relatività di Einstein che porta ad una riformulazione del concetto stesso di tempo, il quale non è più assoluto come nella meccanica newtoniana, al fine di garantire la costanza della velocità della luce in tutti i sistemi inerziali. Un'altra considerazione da fare riguarda il fatto che le coordinate lungo le direzioni ortogonali alla direzione di moto relativo tra i due sistemi restano invariate, come nel caso delle trasformazioni galileiane. È facile verificare che queste ultime si ottengono dalle (1.1) per velocità piccole rispetto a quella della luce,  $v \ll c$ .

## 1.2 Spazio-tempo di Minkowski e trasformazioni di Lorentz

Le trasformazioni (1.1) possono essere scritte in forma matriciale nel seguente modo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

o in forma compatta

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu=1}^4 \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (1.4)$$

in cui abbiamo utilizzato la convenzione di Einstein, secondo cui gli indici ripetuti due volte, uno in alto ed uno in basso, sono considerati sommati su tutti i loro possibili valori; questa operazione è detta contrazione degli indici.  $\Lambda^{\mu}_{\nu}$  sono le componenti della matrice  $\Lambda$  che identifica la trasformazione di Lorentz, e  $x^{\mu}$  è il *quadrivettore posizione* le cui coordinate identificano un "evento" nello *spazio-tempo di Minkowski*. Osserviamo che nella relatività ristretta il tempo, più precisamente la quantità  $ct$ , diventa una vera e propria coordinata.

Gli indici indicati con lettere greche minuscole variano da 1 a 4, dove  $x^4 = ct$  corrisponde alla coordinata temporale, mentre quelli rappresentati con lettere latine minuscole variano da 1 a 3 e corrispondono alle coordinate spaziali.

Nello spazio-tempo di Minkowski si può definire il modulo-quadro di un quadrivettore

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2, \quad (1.5)$$

in cui il quadrato della coordinata temporale entra con il segno negativo. Introducendo la matrice  $\eta$

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

chiamata *metrica di Minkowski*, il modulo-quadro di un quadrivettore si può riscrivere nella forma compatta

$$s^2 = x_{\mu} x^{\mu} = \eta_{\mu\nu} x^{\nu} x^{\mu}, \quad (1.7)$$

osserviamo che la metrica di Minkowski ci permette di alzare o abbassare gli indici dei quadrivettori, questo porta ad un cambiamento di segno della componente temporale di un tensore, ed è simmetrica, quindi vale  $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$ .

La quantità (1.7), detta anche *distanza minkowskiana*, è invariante per trasformazioni di Lorentz. In generale le trasformazioni di Lorentz sono per definizione tutte quelle che lasciano invariata la distanza minkowskiana, cioè  $s^2 = s'^2$ . Per cui si ha

$$s'^2 = \eta_{\mu\nu} x'^{\mu} x'^{\nu} = \eta_{\mu\nu} (\Lambda^{\mu}_{\alpha} x^{\alpha}) (\Lambda^{\nu}_{\beta} x^{\beta}) = \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} x^{\alpha} x^{\beta} = \eta_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta} = s^2 \quad (1.8)$$

dunque tutte le trasformazioni di Lorentz possibili sono quelle definite da matrici  $\Lambda$  tali che

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta}. \quad (1.9)$$

Nello spazio-tempo di Minkowski il modulo-quadro di un quadrivettore non è una quantità definita positiva. Un quadrivettore è detto

- di *tipo tempo* se  $s^2 = x_{\mu} x^{\mu} < 0$ ,
- di *tipo spazio* se  $s^2 = x_{\mu} x^{\mu} > 0$ ,
- di *tipo luce* se  $s^2 = x_{\mu} x^{\mu} = 0$ .

dato che la distanza minkowskiana è un invariante di Lorentz, questa classificazione è indipendente dalla scelta del sistema di riferimento.

### 1.3 Formalismo tensoriale

L'oggetto  $x^{\mu}$  è definito un *quadrivettore controvariante*. In generale si chiama quadrivettore un oggetto che si trasforma seguendo la regola di trasformazione

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}. \quad (1.10)$$

La forma *covariante* di un quadrivettore si ottiene operando con la metrica di Minkowski nel seguente modo

$$x_{\mu} = \eta_{\mu\nu} x^{\nu}, \quad (1.11)$$

i quadrivettori covarianti si trasformano nel seguente modo

$$x'_{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} x_{\nu}, \quad (1.12)$$

dove  $(\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu}$  sono le componenti della matrice inversa della trasformazione di Lorentz. Equivalentemente si può scrivere

$$x'_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\nu} x_{\nu}, \quad \Lambda_{\mu}^{\nu} = \eta_{\mu\alpha} \Lambda^{\alpha}_{\beta} \eta^{\beta\nu} = (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu}. \quad (1.13)$$

Il prodotto scalare tra due quadrivettori si ottiene contraendo gli indici covarianti dell'uno con quelli controvarianti dell'altro ed è uno scalare, invariante per trasformazioni di Lorentz (come ad esempio la distanza minkowskiana (1.7)).

Un quadrivettore che incontreremo spesso è il *quadrivettore gradiente*  $\partial_\mu$  definito come

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \nabla, \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad (1.14)$$

che si comporta come un quadrivettore covariante, infatti per un cambio di coordinate  $x^\mu \rightarrow x'^\mu(x)$ , questo si trasforma come

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \quad (1.15)$$

dove  $\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}$  è l'inverso della matrice Jacobiana della trasformazione, che nel nostro caso corrisponde ad una trasformazione di Lorentz, per cui

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu. \quad (1.16)$$

Si definisce *tensore quadridimensionale di rango 2 controvariante* l'oggetto  $F^{\mu\nu}$  che ha sedici componenti e si trasforma seguendo la regola di trasformazione tensoriale

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}. \quad (1.17)$$

La forma covariante di questo tensore si ottiene utilizzando la metrica di Minkowski nel seguente modo

$$F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} F^{\alpha\beta}. \quad (1.18)$$

Il tensore  $F^{\mu\nu}$  si dice simmetrico se  $F^{\mu\nu} = F^{\nu\mu}$ , antisimmetrico se  $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ ; la contrazione di una coppia di indici simmetrici con una di indici antisimmetrici è sempre identicamente nulla.

Risulta facile a questo punto estendere questo ragionamento per costruire tensori di ordine superiore. Equazioni tensoriali sono equazioni che eguagliano tensori dello stesso rango e quindi con le stesse regole di trasformazione.

Il formalismo tensoriale introdotto risulta essere il più adatto per scrivere equazioni relativistiche. Il primo postulato implica che le equazioni che descrivono fenomeni fisici devono essere *covarianti*, cioè invarianti in forma, per trasformazioni di Lorentz.

## 1.4 Quadrivettori posizione, velocità e accelerazione

Introduciamo alcune grandezze cinematiche.

La traiettoria di una particella nello spazio-tempo di Minkowski è descritta dal quadrivettore posizione  $x^\mu = x^\mu(\tilde{t}) = (\mathbf{x}(\tilde{t}), ct(\tilde{t}))$ , dove  $\tilde{t}$  è un generico parametro temporale che parametrizza la traiettoria. La traiettoria può essere parametrizzata in modo invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz usando il *tempo proprio*  $\tau$  della particella. Per ogni oggetto, il tempo proprio è quello misurato nel sistema di riferimento in cui

l'oggetto stesso è in quiete. Il tempo proprio infinitesimo  $d\tau$  di una particella nel sistema di riferimento  $S'$  nel quale è in quiete è

$$d\tau = dt' = \frac{dt}{\gamma} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}} = \sqrt{-\frac{ds^2}{c^2}} \quad (1.19)$$

dove  $ds^2 = dx^\mu dx_\mu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  è la distanza minkowskiana infinitesima, negativa per distanze di tipo tempo e invariante per trasformazioni di Lorentz. Risulta allora che il tempo proprio è un invariante relativistico.

Definiamo il *quadrivettore velocità* come la derivata del quadrivettore posizione rispetto al tempo proprio, cioè

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt}(\mathbf{x}, ct) = (\gamma\mathbf{v}, \gamma c). \quad (1.20)$$

Nel sistema di riferimento solidale con la particella  $\mathbf{v} = 0$  e  $\gamma = 1$ , per cui le sue componenti sono  $u^\mu = (0, c)$ ; in questo sistema è facile valutare il suo modulo quadro

$$u^\mu u_\mu = -c^2, \quad (1.21)$$

questa quantità è invariante per trasformazioni di Lorentz. Quindi la quadri-velocità è un quadrivettore di tipo tempo indipendentemente dal sistema di riferimento scelto.

Derivando la quadri-velocità rispetto al tempo proprio otteniamo il *quadrivettore accelerazione*

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt}(\gamma\mathbf{v}, \gamma c) = \left( \gamma \frac{d}{dt}(\gamma\mathbf{v}), \gamma c \frac{d\gamma}{dt} \right). \quad (1.22)$$

I quadrivettori velocità e accelerazione sono ortogonali tra loro (rispetto alla metrica di Minkowski), infatti derivando rispetto al tempo proprio la (1.21) si ottiene

$$u^\mu \frac{du_\mu}{d\tau} + u_\mu \frac{du^\mu}{d\tau} = 2u^\mu a_\mu = 0, \quad (1.23)$$

dalla quale concludiamo che la quadri-accellerazione è un quadrivettore di tipo spazio. Infatti nel sistema in cui la particella è in quiete le sue componenti sono  $a^\mu = \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}, 0\right)$ , poichè solo le componenti spaziali sono non nulle risulta che il suo modulo quadro è maggiore di zero.

Altre grandezze saranno definite nei capitoli successivi.

# Capitolo 2

## Elettromagnetismo in forma covariante

In questo capitolo, partendo dalla teoria elettromagnetica di Maxwell e utilizzando il formalismo tensoriale introdotto nel capitolo precedente, si riscriveranno le equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo in una forma nella quale risulti esplicita la loro compatibilità con il principio di relatività einsteiniano. Inoltre vedremo come ottenere le equazioni di Maxwell attraverso il principio di minima azione, dopo aver costruito la lagrangiana del campo elettromagnetico.

### 2.1 Equazioni di Maxwell

Le equazioni che governano i fenomeni elettromagnetici sono le equazioni di Maxwell.

Nel sistema di unità Gaussiane CGS non razionalizzato, nel quale le dimensioni del campo elettrico  $\mathbf{E}$  e del campo magnetico  $\mathbf{B}$  sono le stesse <sup>1</sup>, le equazioni di Maxwell, nel vuoto, assumono la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

dove  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  sono, rispettivamente, il campo elettrico e il campo magnetico generati da una distribuzione di carica elettrica descritta da una densità di carica  $\rho$  e una densità di

---

<sup>1</sup> $[E] = [B] = M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-1}$

corrente  $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$ , con  $\mathbf{v}$  campo di velocità che descrive il moto delle cariche nello spazio tridimensionale; inoltre  $c$  è la velocità della luce nel vuoto.

La densità di carica  $\rho$  e la corrente  $\mathbf{J}$  sono legate dall'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (2.5)$$

Il significato fisico dell'equazione di continuità è quello di conservazione della carica elettrica ed è deducibile direttamente dalle equazioni di Maxwell stesse.

Le equazioni di Maxwell sono un sistema di equazioni alle derivate parziali del primo ordine che legano le varie componenti dei campi elettrico e magnetico. In situazioni semplici esse possono essere risolte così come sono. È però spesso conveniente introdurre dei potenziali che risolvono identicamente alcune delle equazioni di Maxwell per ottenere un numero minore di equazioni del secondo ordine [4].

Dall'equazione (2.2) vediamo che  $\mathbf{B}$  è un campo vettoriale a divergenza nulla. Tutti i vettori a divergenza nulla si possono scrivere come rotore di un altro vettore opportuno. Possiamo definire  $\mathbf{B}$  in termini di un potenziale vettore  $\mathbf{A}$  come

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.6)$$

Sostituendo la (2.6) nella (2.3) otteniamo

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (2.7)$$

Questo significa che la quantità a rotore nullo all'interno delle parentesi si può scrivere come gradiente di una funzione scalare  $\phi$

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \quad (2.8)$$

oppure

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (2.9)$$

Le (2.6) e (2.9) esprimono i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  in termini dei potenziali  $\mathbf{A}$  e  $\phi$ . Anche le dimensioni di  $\mathbf{A}$  e  $\phi$  sono le stesse<sup>2</sup>, nel sistema di unità di misura scelto.

I potenziali determinano in modo univoco i campi, ma i campi non determinano univocamente i potenziali. Dati i potenziali  $\mathbf{A}$  e  $\phi$  da cui si ottengono i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , possiamo ottenere gli stessi campi da altri potenziali  $\mathbf{A}'$  e  $\phi'$ , che sono legati dalle relazioni

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (2.10)$$

---

<sup>2</sup> $[A] = [\phi] = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f, \quad (2.11)$$

dove  $f$  è una arbitraria funzione scalare. Una trasformazione dei potenziali che non cambia i campi è chiamata *trasformazione di gauge* e i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  sono *gauge invarianti*.

Sostituendo le relazioni (2.6) e (2.9) nelle (2.1) e (2.4) otteniamo le seguenti due equazioni differenziali del secondo ordine accoppiate

$$\nabla^2 \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -4\pi\rho, \quad (2.12)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (2.13)$$

Le (2.10) e (2.11) ci permettono di scegliere dei potenziali  $\mathbf{A}$  e  $\phi$  in modo da soddisfare la *condizione di Lorenz*

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad (2.14)$$

questa scelta disaccoppia le due equazioni (2.12) e (2.13) e ci permette di ottenere due equazioni d'onda non omogenee, una per  $\mathbf{A}$  e una per  $\phi$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \quad (2.15)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (2.16)$$

Le (2.15), (2.16), (2.14) costituiscono un insieme di equazioni equivalente sotto ogni aspetto alle equazioni di Maxwell nel vuoto.

## 2.2 Equazioni di Maxwell in forma tensoriale

Per poter applicare il formalismo tensoriale che ci permette di scrivere le equazioni di Maxwell in forma covariante, in modo tale che queste siano invarianti in forma rispetto alle trasformazioni di Lorentz, è necessario associare un opportuno oggetto tensoriale al campo elettromagnetico. Questo dovrà essere un tensore di rango due antisimmetrico. Infatti un tensore di questo tipo ha solo sei componenti indipendenti e la condizione di antisimmetria impone che le componenti lungo la diagonale siano nulle, mentre quelle “al di sopra” della diagonale siano uguali e di segno contrario a quelle poste “al di sotto” della diagonale. Questo tensore è rappresentato da una matrice  $4 \times 4$  in cui la parte spaziale è occupata dalle componenti del campo magnetico e la parte temporale dalle componenti

del campo elettrico. Questo tensore prende il nome di *tensore del campo elettromagnetico*  $F_{\mu\nu}$  e in forma covariante lo rappresentiamo come

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & E_3 \\ -E_1 & -E_2 & -E_3 & 0 \end{pmatrix} = -F_{\nu\mu}. \quad (2.17)$$

Separando esplicitamente le componenti magnetiche e elettriche possiamo scrivere

$$F_{ij} = \epsilon_{ijk} B^k, \quad F_{i4} = E_i, \quad (2.18)$$

dove  $\epsilon_{ijk}$  è il simbolo di Levi-Civita completamente antisimmetrico, normalizzato con la convenzione  $\epsilon_{123} = +1$ , e definito da:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & ijk \text{ permutazione pari di } 123, \\ -1, & ijk \text{ permutazione dispari di } 123, \\ 0, & \text{due indici uguali.} \end{cases}$$

La forma controvariante del tensore del campo elettromagnetico si ottiene utilizzando la metrica di Minkowski (1.6) nel seguente modo:

$$F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \quad (2.19)$$

Scrivendo esplicitamente le componenti vediamo che

$$F^{ij} = F_{ij}, \quad F^{i4} = -F_{i4}, \quad (2.20)$$

da cui osserviamo che operando con la metrica di Minkowski si ottiene un cambio di segno nelle componenti temporali del tensore, mentre le componenti spaziali restano invariate.

Come visto nella sezione precedente possiamo esprimere i campi  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{E}$  in funzione del potenziale vettore  $\mathbf{A}$  e del potenziale scalare  $\phi$ , come espresso nelle equazioni (2.6) e (2.9). Combinando  $\phi$  con le tre componenti di  $\mathbf{A}$  costruiamo il *quadrivettore potenziale*

$$A^\mu = (\mathbf{A}, \phi), \quad (2.21)$$

si può verificare che le relazioni tra campi e potenziali assumono la seguente forma tensoriale compatta

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.22)$$

dove  $\partial_\mu$  è il quadrivettore gradiente (1.14).

Nelle equazioni di Maxwell le sorgenti del campo elettrico e del campo magnetico sono rappresentate dalla densità di carica  $\rho$  e dalla densità di corrente  $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$ . Combinandoli costruiamo il *quadrivettore densità di corrente*<sup>3</sup>

$$J^\mu = (\mathbf{J}, \rho c). \quad (2.23)$$

L'equazione di continuità (2.5) che lega la densità di carica  $\rho$  e la densità di corrente  $\mathbf{J}$  ed implica la conservazione della carica elettrica può essere scritta in forma tensoriale compatta come

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (2.24)$$

A questo punto abbiamo a disposizione tutti gli elementi per poter scrivere le equazioni di Maxwell in forma tensoriale. Le equazioni di Maxwell (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) contengono in tutto 8 condizioni indipendenti, essendo due di tipo vettoriale e due di tipo scalare. Nel formalismo tensoriale possono essere riscritte con due equazioni tra quadrivettori, ciascuna delle quali contiene 4 componenti indipendenti. Le due equazioni contenenti le sorgenti assumono la forma

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\mu, \quad (2.25)$$

mentre le altre due senza sorgenti le scriviamo come

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu F_{\alpha\beta} = 0, \quad (2.26)$$

dove  $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$  è il tensore completamente antisimmetrico che estende allo spazio-tempo di Minkowski il simbolo di Levi-Civita, definito come segue:

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = \begin{cases} +1, & \mu\nu\alpha\beta \text{ permutazione pari di } 1234, \\ -1, & \mu\nu\alpha\beta \text{ permutazione dispari di } 1234, \\ 0, & \text{due indici uguali.} \end{cases} \quad (2.27)$$

con la normalizzazione

$$\epsilon^{1234} = 1, \quad \epsilon_{1234} = -1.$$

È facile verificare che queste due equazioni riproducono esattamente le equazioni di Maxwell.

---

<sup>3</sup>Mentre la carica elettrica è una quantità scalare, invariante per trasformazioni di Lorentz, la densità di carica  $\rho$  non lo è, in quanto dipende dal volume spaziale che non rimane invariato per trasformazioni di Lorentz. È proprio questo che conferisce a  $J^\mu$  le proprietà di trasformazione di un quadrivettore.

## 2.3 Quadri-corrente e conservazione della carica elettrica

Nella sezione precedente abbiamo introdotto il quadrivettore densità di corrente (2.23) per una distribuzione di carica di densità  $\rho$ , che in generale è una funzione delle coordinate e del tempo. L'integrale di  $\rho$  in un certo volume corrisponde alla carica contenuta in questo volume.

La carica di una particella è uno scalare, ovvero è invariante per trasformazioni di Lorentz, a differenza della densità di carica che non lo è; tuttavia il prodotto  $dq = \rho d^3x$  è uno scalare. Se moltiplichiamo entrambi i membri di questa uguaglianza per  $dx^\mu$  si ha

$$dq dx^\mu = \rho d^3x dx^\mu = \rho d^3x dt \frac{dx^\mu}{dt} = \frac{1}{c} d^4x J^\mu, \quad (2.28)$$

il primo membro di questa equazione è un quadrivettore, il quadri-volume infinitesimo  $d^4x$  è un invariante di Lorentz, di conseguenza  $J^\mu$  deve essere un quadrivettore, e si trasformerà come tale sotto trasformazioni di Lorentz.

La carica contenuta nel volume  $V$  è data dal seguente integrale scritto in forma quadrimensionale

$$\int_V \rho d^3x = \frac{1}{c} \int_V J^4 d^3x = \frac{1}{c} \int_\Sigma J^\mu dS_\mu, \quad (2.29)$$

dove  $\Sigma$  è la porzione di spazio-tempo quadrimensionale all'interno della quale è contenuta la carica, ovvero un iperpiano perpendicolare alla coordinata  $ct$  a  $t = \text{costante}$ , e il quadrivettore  $dS_\mu$  rappresenta l'elemento infinitesimo di spazio-tempo.

Il quadrivettore densità di corrente soddisfa anche l'equazione di continuità (2.24). Questa equazione implica che l'integrale precedente è uguale per qualunque iperpiano di integrazione a  $t = \text{costante}$ . Infatti possiamo considerare due integrali di questo tipo calcolati su due iperpiani  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ , a  $t$  diverso. La differenza tra i due integrali può essere scritta come

$$\int_{\Sigma_2} J^\mu dS_\mu - \int_{\Sigma_1} J^\mu dS_\mu = \oint_{\partial\Omega} J^\mu dS_\mu, \quad (2.30)$$

con  $\partial\Omega$  ipersuperficie chiusa che delimita il volume di spazio-tempo tra i due iperpiani. Usando il teorema di Gauss questo integrale è trasformato nell'integrale della quadri-divergenza di  $J^\mu$  calcolato sulla porzione di volume di spazio-tempo  $\Omega$  compresa tra i due iperpiani, inoltre, assumendo che le cariche siano localizzate a distanza finita dall'origine, cioè che  $J^\mu \rightarrow 0$  in modo sufficientemente rapido per  $x \rightarrow \pm\infty$ , otteniamo

$$\oint_{\partial\Omega} J^\mu dS_\mu = \int \partial_\mu J^\mu d^4x = 0. \quad (2.31)$$

Quanto detto risulta valido anche per due integrali calcolati su due ipersuperfici arbitrarie infinite che racchiudono tutto lo spazio tridimensionale; per cui i due integrali avranno lo stesso valore, uguale alla carica elettrica contenuta in tale spazio.

### 2.3.1 Carica puntiforme

Nel caso di una particella puntiforme di carica  $e$ , la densità  $\rho$  è non nulla solo nel punto in cui è localizzata la carica, quindi è della forma

$$\rho(\mathbf{x}, t) = e\delta^3(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(t)), \quad (2.32)$$

dove  $\boldsymbol{\xi}(t)$  rappresenta il vettore posizione della particella lungo la traiettoria nello spazio tridimensionale, la quale è parametrizzata attraverso il parametro temporale  $t$ , e il simbolo  $\delta^3$  indica la distribuzione delta di Dirac. Dalla proprietà della delta di Dirac<sup>4</sup> risulta

$$\int \rho(x)d^3x = e, \quad (2.33)$$

dove l'integrale è calcolato su tutto lo spazio tridimensionale e il risultato ci dice che la carica totale è pari a  $e$ . Il quadrivettore densità di corrente è allora

$$J^\mu(\mathbf{x}, t) = e\delta^3(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(t)) \frac{d\xi^\mu}{dt}, \quad (2.34)$$

dove  $\xi^\mu = (\boldsymbol{\xi}, ct)$ . Sfruttando le proprietà della delta di Dirac<sup>5</sup> e introducendo la sua estensione allo spazio-tempo di Minkowski,  $\delta^4(x) = \delta^3(x)\delta(ct)$ , possiamo riscrivere  $J^\mu$  come

$$J^\mu(\mathbf{x}, t) = ec \int dt' \delta^4(x - \xi(t')) \frac{d\xi^\mu}{dt'}. \quad (2.35)$$

Cambiando variabile di integrazione, passando dal generico parametro temporale  $t'$  al tempo proprio della carica  $\tau$  che parametrizza la traiettoria in modo covariante, si ottiene infine

$$J^\mu(x) = ec \int d\tau \delta^4(x - \xi(\tau)) u^\mu, \quad (2.36)$$

dove  $u^\mu = \frac{d\xi^\mu}{d\tau}$  è la quadri-velocità, il tempo proprio  $\tau$  è uno scalare, la distribuzione  $\delta^4(x)$  è anche essa uno scalare per trasformazioni di Loretz e quindi quest'ultima equazione definisce correttamente il quadrivettore densità di corrente in forma esplicitamente covariante. Una densità di corrente di questa forma soddisfa l'equazione di continuità.

---

<sup>4</sup>  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$ .

<sup>5</sup> Infatti vale:

$$J^\mu(\mathbf{x}, t) = \int dt' \delta(t-t') J^\mu(\mathbf{x}, t') = e \int dt' \delta(t-t') \delta^3(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(t')) \frac{d\xi^\mu}{dt'}$$

e

$$\delta(ct) = \frac{\delta(t)}{c}.$$

## 2.4 Trasformazioni di Lorentz del campo elettromagnetico

Le equazioni dell'elettrodinamica sono invarianti per trasformazioni di Lorentz. Consideriamo un'arbitraria trasformazione di Lorentz che collega due sistemi di riferimento inerziali  $S$  e  $S'$  e vediamo come si trasformano le equazioni di Maxwell (2.25) e (2.26).

Il tensore del campo elettromagnetico  $F_{\mu\nu}$  si trasforma da un sistema di riferimento inerziale all'altro seguendo la regola di trasformazione tensoriale

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta}. \quad (2.37)$$

Partendo dall'equazione (2.25) avremo

$$\begin{aligned} \partial'_\nu F'^{\mu\nu} &= (\Lambda^{-1})^\gamma_\nu \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \partial_\gamma F^{\alpha\beta} \\ &= \Lambda^\mu_\alpha (\Lambda^{-1})^\gamma_\nu \Lambda^\nu_\beta \partial_\gamma F^{\alpha\beta} \\ &= \Lambda^\mu_\alpha \delta^\gamma_\beta \partial_\gamma F^{\alpha\beta} \\ &= \Lambda^\mu_\alpha \partial_\beta F^{\alpha\beta} \\ &= \Lambda^\mu_\alpha \frac{4\pi}{c} J^\alpha = \frac{4\pi}{c} J'^\mu. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Questo risultato mostra che l'equazione di Maxwell (2.25) conserva, nel sistema  $S'$ , la stessa forma che aveva nel sistema  $S$ .

Consideriamo l'equazione (2.26), una proprietà tipica dei tensori ci permette di mostrare che questa equazione assume la stessa forma nei sistemi  $S$  e  $S'$ , infatti se un tensore è nullo in un sistema sarà nullo in tutti gli altri. In questo modo è dimostrata la covarianza delle equazioni di Maxwell (2.25), (2.26).

Dalla legge di trasformazione del tensore del campo elettromagnetico (2.37) possiamo determinare le leggi di trasformazione del campo elettrico e magnetico

$$E'^i = F'^{4i} = \Lambda^4_\alpha \Lambda^i_\beta F^{\alpha\beta}, \quad (2.39)$$

per il campo elettrico, e

$$F'^{ij} = \Lambda^i_\alpha \Lambda^j_\beta F^{\alpha\beta}, \quad (2.40)$$

per le componenti spaziali, dalle quali si ottengono le regole di trasformazione del campo magnetico definito da

$$B'_k = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F'^{ij}. \quad (2.41)$$

Vediamo che una generica trasformazione di Lorentz “mescola” tra loro le componenti dei campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ .

Come esempio possiamo considerare la trasformazione di Lorentz (1.3), dalle relazioni viste ricaviamo le trasformazioni delle componenti dei campi. Per il campo elettrico abbiamo

$$E'_1 = E_1; \quad (2.42)$$

$$E'_2 = \gamma \left( E_2 - \frac{v}{c} B_3 \right); \quad (2.43)$$

$$E'_3 = \gamma \left( E_3 + \frac{v}{c} B_2 \right). \quad (2.44)$$

Per il campo magnetico invece

$$B'_1 = B_1; \quad (2.45)$$

$$B'_2 = \gamma \left( B_2 + \frac{v}{c} E_3 \right); \quad (2.46)$$

$$B'_3 = \gamma \left( B_3 - \frac{v}{c} E_2 \right). \quad (2.47)$$

Da questo semplice esempio si osserva che le componenti dei campi restano invariate lungo la direzione di moto relativo dei due sistemi, invece, lungo le direzioni ortogonali al moto risultano dilatate dal fattore di Lorentz  $\gamma$  e mescolate con le componenti dell'altro campo. Questo vale per una qualunque trasformazione di Lorentz, per cui le componenti dei campi  $E$  e  $B$  si trasformano secondo la seguente legge di trasformazione generale:

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel}, \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma \left( \mathbf{E}_{\perp} + \frac{v}{c} \times \mathbf{B} \right), \quad (2.48)$$

$$B'_{\parallel} = B_{\parallel}, \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma \left( \mathbf{B}_{\perp} - \frac{v}{c} \times \mathbf{E} \right). \quad (2.49)$$

Da quanto visto possiamo concludere che il campo elettrico e magnetico sono due grandezze relative: le loro proprietà dipendono dal sistema di riferimento. In particolare possono essere nulli in un sistema e non nulli in un altro.

## 2.5 Invarianti del campo elettromagnetico

Il tensore  $F^{\mu\nu}$  permette di costruire grandezze invarianti per trasformazioni di Lorentz, in particolare le seguenti due

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \text{invariante}, \quad (2.50)$$

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} = \text{invariante}. \quad (2.51)$$

Esprimendo le componenti del tensore del campo elettromagnetico in termini del campo elettrico e del campo magnetico i due invarianti in forma vettoriale assumono la

forma

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) = \textit{invariante}, \quad (2.52)$$

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu} = 8\mathbf{B} \cdot \mathbf{E} = \textit{invariante}. \quad (2.53)$$

La prima di queste grandezze è uno scalare, mentre la seconda è uno *pseudoscalare*, cioè cambia segno per inversione spaziale (trasformazione di parità), mentre il vero scalare è la quantità  $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{E})^2$ .

Dall'invarianza di queste due espressioni deduciamo che se i due campi sono mutuamente ortogonali in un sistema di riferimento, cioè  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{E} = 0$ , allora lo saranno in qualsiasi sistema inerziale. Inoltre se il loro modulo quadro è uguale in un sistema, cioè  $\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2 = 0$ , lo sarà in tutti i sistemi inerziali.

Le trasformazioni di Lorentz possono modificare i valori di  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{E}$  in modo tale che le condizioni precedenti abbiano valori prefissati.

Se si ha la condizione  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{E} = 0$  ma il primo invariante è non nullo, si può trovare un sistema di riferimento in cui  $\mathbf{E} = 0$  (campo puramente magnetico) oppure  $\mathbf{B} = 0$  (campo puramente elettrico), a seconda che  $\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2$  sia maggiore o minore di zero; se invece  $\mathbf{E} = 0$  oppure  $\mathbf{B} = 0$ , i campi saranno ortogonali in un qualsiasi sistema di riferimento.

Escluso il caso in cui i due invarianti sono entrambi nulli, si può trovare un sistema di riferimento in cui i due campi sono paralleli in un dato punto.

## 2.6 Invarianza di gauge

Le equazioni (2.10) e (2.11) costituiscono una trasformazione di gauge che lascia invariati i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ . Nel formalismo tensoriale una trasformazione di questo tipo si esprime come

$$A_\mu \longrightarrow \tilde{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu f(x). \quad (2.54)$$

Possiamo verificare che una trasformazione di questo tipo non modifica il tensore del campo elettromagnetico sostituendo la (2.54) nella (2.22):

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \tilde{A}_\nu - \partial_\nu \tilde{A}_\mu \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \partial_\mu \partial_\nu f - \partial_\nu \partial_\mu f \\ &\equiv F_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.55)$$

i due termini con le derivate parziali si cancellano poichè le derivate parziali commutano e quindi  $\partial_\mu \partial_\nu f$  è un tensore simmetrico per cui vale  $\partial_\mu \partial_\nu f = \partial_\nu \partial_\mu f$ . Questa proprietà di invarianza ci permette di ottenere delle equazioni più semplici quando queste vengono espresse in termini dei potenziali.

L'equazione di Maxwell (2.26) è soddisfatta per qualsiasi quadrivettore potenziale. Questo deriva dalla definizione del tensore del campo elettromagnetico in termini del potenziale vettore (Eq.(2.22)) e dalla simmetria del tensore  $\partial_\mu \partial_\nu$ .

Consideriamo l'equazione di Maxwell in presenza di sorgenti (2.25) e inseriamo la (2.22) ottenendo

$$\partial_\nu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \frac{4\pi}{c} J^\mu. \quad (2.56)$$

Se il potenziale soddisfa la condizione di quadri-divergenza nulla

$$\partial_\nu A^\nu = 0, \quad (2.57)$$

detta *condizione di Lorenz* o *gauge di Lorenz*, l'Eq.(2.56) assume la semplice forma

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu \equiv \square A^\mu = -\frac{4\pi}{c} J^\mu, \quad (2.58)$$

dove

$$\square \equiv \partial_\nu \partial^\nu = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (2.59)$$

è l'operatore di D'Alambert.

L'invarianza di gauge delle equazioni ci permette di sostituire un qualsiasi potenziale che non soddisfa la condizione di Lorenz con un nuovo potenziale che la soddisfa; infatti basta effettuare una trasformazione di gauge del tipo (2.54) con una funzione scalare  $f$  che soddisfa la condizione

$$\square f = -\partial_\mu A^\mu. \quad (2.60)$$

In questo modo il nuovo potenziale sarà a quadri-divergenza nulla, indipendentemente dal potenziale di partenza.

L'invarianza di gauge permette di ridurre le componenti indipendenti del quadri-vettore potenziale, per un campo elettromagnetico libero che si propaga nel vuoto, da 4 a 2, e queste possono sempre essere orientate nel piano ortogonale alla direzione di propagazione.

## 2.7 Lagrangiana di Maxwell

Ricaviamo le equazioni di Maxwell (2.25), (2.26) attraverso il principio di azione partendo da un'opportuna densità di lagrangiana.

Le equazioni del moto di un sistema meccanico, dette equazioni di Eulero-Lagrange, si ottengono richiedendo la stazionarietà dell'azione per una variazione infinitesima delle coordinate generalizzate. Nel nostro caso le coordinate generalizzate sono sostituite da campi continui,  $\psi$ , e le velocità generalizzate dai quadri-gradienti dei campi,  $\partial_\mu \psi$ . L'integrale d'azione è allora

$$\mathcal{S} = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi, x) \quad (2.61)$$

dove  $d^4x$  rappresenta un elemento di volume infinitesimo nello spazio-tempo di Minkowski e l'integrale è calcolato sul dominio spazio-temporale  $\Omega$ .

Le equazioni del moto per il campo  $\psi$  si ottengono imponendo la stazionarietà dell'azione ( $\delta\mathcal{S} = 0$ ) rispetto a variazioni infinitesime del campo effettuate a  $x$  costante con la condizione di annullamento sul bordo  $\partial\Omega$  della regione di integrazione:

$$\psi(x) \longrightarrow \psi(x) + \delta\psi, \quad (2.62)$$

$$\delta\psi|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.63)$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange per il campo  $\psi$  sono

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}. \quad (2.64)$$

Ritornando al caso del campo elettromagnetico il campo  $\psi$  corrisponde al quadrivettore potenziale  $A^\mu$ . Inoltre, per quanto riguarda la densità di lagrangiana da inserire nell'azione (2.61) e nelle equazioni (2.64), vogliamo che questa sia *Lorentz invariante* e *gauge invariante* e che sia quadratica nelle “velocità”, cioè nelle derivate prime del potenziale. La caratteristica di *Lorentz invarianza* della lagrangiana assicura lo stesso tipo di invarianza all'azione, e si ha solo se  $\mathcal{L}$  è uno scalare (perchè l'elemento di volume quadridimensionale  $d^4x$  è un invariante).

Introduciamo, allora, una densità di lagrangiana, detta *lagrangiana di Maxwell* della forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{J^\nu}{c} A_\nu \quad (2.65)$$

Il primo termine di  $\mathcal{L}$  rappresenta la lagrangiana libera che descrive il moto di un campo elettromagnetico libero che si propaga nel vuoto; questo termine è uno scalare ed è *gauge invariante* poichè lo è il tensore  $F_{\mu\nu}$ . Il secondo invece è il termine di interazione che descrive il moto di una particella carica in un campo elettromagnetico esterno e la sua interazione con questo campo. Questo termine è uno scalare ed è anche gauge invariante, come si può facilmente verificare prendendo una trasformazione di gauge del tipo (2.54). Con questa trasformazione il secondo termine diventa  $J^\nu \tilde{A}_\nu$ , e la differenza è

$$J^\nu(\tilde{A}_\nu - A_\nu) = J^\nu(\partial_\nu f) = -(\partial_\nu J^\nu)f + \partial_\nu(J^\nu f), \quad (2.66)$$

il primo termine è nullo per la proprietà di quadri-divergenza nulla del quadrivettore densità di corrente che esprime la conservazione della carica elettrica. Per quanto riguarda il secondo termine, il suo integrale sul dominio  $\Omega$  di spazio-tempo è nullo; infatti è nullo l'integrale di superficie, che si ottiene applicando il teorema della divergenza, quando la superficie tende all'infinito. Per cui la lagrangiana (2.65), e di conseguenza l'azione costruita a partire da questa, sono invarianti per trasformazioni di Lorentz e di gauge.

Ricaviamo le equazioni di Eulero-Lagrange per la lagrangiana di Maxwell:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \frac{J^\nu}{c}, \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= -\frac{1}{16\pi} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} (2\partial_\mu A_\nu F^{\mu\nu} + 2F^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu) \\ &= -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

dalle quali otteniamo l'equazione

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} J^\nu, \quad (2.69)$$

che corrisponde all'equazione di Maxwell in presenza di sorgenti, (2.25), scambiando gli indici  $\mu, \nu$  e sfruttando l'antisimmetria del tensore  $F^{\mu\nu}$ .

La lagrangiana di Maxwell fornisce le equazioni di Maxwell non omogenee, ma non quelle omogenee. Questo deriva dal fatto che la definizione del tensore del campo elettromagnetico  $F^{\mu\nu}$  in termini del quadripotenziale  $A^\mu$ , (2.22), è stata fatta in modo tale che le equazioni omogenee fossero soddisfatte direttamente.

# Capitolo 3

## Meccanica relativistica

In questo capitolo mostriamo come riformulare la meccanica newtoniana per renderla compatibile con il principio di relatività einsteiniano. Ricaviamo le equazioni del moto per una particella relativistica analizzando il caso del moto libero e quello del moto in un campo elettromagnetico. Da quest'ultimo caso si ricaverà l'espressione relativistica della forza di Lorentz.

### 3.1 Principio di minima azione

Il *principio di minima azione* permette una formulazione più generale delle leggi del moto dei sistemi meccanici. Secondo questo principio, ogni sistema meccanico è descritto da una funzione chiamata lagrangiana  $\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t)$  che dipende solamente dalle coordinate generalizzate  $q(t)$ , dalle velocità generalizzate  $\dot{q}(t) = \frac{dq(t)}{dt}$  e esplicitamente dal tempo. Ciò è dovuto al fatto che lo stato meccanico di un sistema è interamente definito dalle sue coordinate e dalle sue velocità. Facciamo l'ipotesi che il nostro sistema occupi posizioni determinate negli istanti di tempo  $t_1$  e  $t_2$  e definiamo il seguente integrale detto *azione*

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) dt, \quad (3.1)$$

in cui utilizziamo il tempo per parametrizzare la traiettoria della particella.

Il principio di minima azione afferma che il moto di un sistema meccanico avviene in modo tale da minimizzare l'azione.

Per mostrare questo consideriamo una variazione infinitesima della traiettoria  $q(t) \rightarrow q(t) + \delta q(t)$ , mantenendo gli estremi fissi, cioè  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ , ed imponiamo la stazionarietà dell'azione, data dalla condizione  $\delta \mathcal{S} = 0$ , rispetto a questa variazione. Si ottiene che la condizione  $\delta \mathcal{S} = 0$  è soddisfatta se valgono le equazioni

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}, \quad (3.2)$$

dette *equazioni di Eulero-Lagrange* e rappresentano le equazioni del moto del nostro sistema.

Per un sistema meccanico con  $n$  gradi di libertà le equazioni di Eulero-Lagrange costituiscono un insieme di  $n$  equazioni differenziali del secondo ordine. Per determinare la soluzione è necessario conoscere le  $2n$  condizioni iniziali che caratterizzano lo stato meccanico del sistema in un dato istante, cioè occorre conoscere i valori iniziali delle coordinate e delle velocità.

Una proprietà della lagrangiana è che questa è determinata a meno di una derivata totale additiva di una funzione qualsiasi delle coordinate e del tempo, questo vuol dire che le equazioni del moto non cambiano se si effettua una trasformazione del tipo  $\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) \rightarrow \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) + \frac{d}{dt}f(q(t), t)$ .

## 3.2 Particella libera relativistica

Ricaviamo le equazioni del moto per una particella relativistica libera attraverso il principio di minima azione applicato ad un'azione *Lorentz invariante*. Un'azione con questa proprietà deve essere l'integrale di uno scalare.

Una particella in moto descrive una traiettoria nello spazio-tempo e l'azione che descrive il moto della particella è proporzionale alla *lunghezza propria* di questa traiettoria, valutata tra due estremi fissi dati  $a$  e  $b$ ; per cui è della forma

$$\mathcal{S} = \int_a^b \alpha ds = \int_a^b \alpha \sqrt{-dx_\mu dx^\mu}, \quad (3.3)$$

con  $dx_\mu$  distanza infinitesima tra due punti della traiettoria e  $\alpha$  è una costante che caratterizza la particella. Il segno meno sotto radice deriva dal fatto che per traiettorie di tipo tempo la quantità  $dx_\mu dx^\mu$  è negativa.

Se per parametrizzare la traiettoria usiamo la coordinata temporale  $t$ , abbiamo

$$-dx_\mu dx^\mu = c^2 dt^2 - |d\mathbf{x}|^2, \quad (3.4)$$

per cui l'azione (3.3) diventa

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt, \quad (3.5)$$

da cui vediamo che la lagrangiana per la particella relativistica libera è della forma

$$\mathcal{L} = \alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (3.6)$$

Come detto,  $\alpha$  è una costante che caratterizza la particella. Troviamo il suo esatto valore richiedendo che  $\mathcal{L}$  riproduca l'espressione classica della lagrangiana della particella libera,

$\frac{1}{2}mv^2$ , nel limite non relativistico  $v \ll c$ . Sviluppando  $\mathcal{L}$  in serie di potenze di  $\frac{v}{c}$  abbiamo

$$\mathcal{L} = \alpha c \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots\right) = \alpha c - \frac{1}{2} \frac{\alpha v^2}{c} + \dots, \quad (3.7)$$

da cui otteniamo  $\alpha = -mc$ . La costante  $-mc^2$  non ha alcun effetto sulla dinamica dato che non entra nelle equazioni del moto.

Per cui la lagrangiana della particella relativistica libera è

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (3.8)$$

Effettuando una trasformazione di Legendre otteniamo l'hamiltoniana della particella libera. Quest'ultima può essere ottenuta dalla lagrangiana attraverso la seguente relazione:

$$\mathcal{H} = p_i \dot{x}^i - \mathcal{L}, \quad (3.9)$$

dove  $p_i$  è l'impulso canonico associato alla lagrangiana, e nel nostro caso vale

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} = m \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} v_i, \quad (3.10)$$

che identifichiamo con il vettore *impulso relativistico*

$$\mathbf{p} = m\gamma \mathbf{v}. \quad (3.11)$$

A partire dalla lagrangiana della particella libera relativistica e dalla definizione di impulso relativistico, otteniamo l'hamiltoniana della particella libera relativistica

$$\mathcal{H} = m\gamma v^2 + mc^2 \gamma^{-1} = m\gamma \left[ v^2 + c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \right] = m\gamma c^2. \quad (3.12)$$

Questa hamiltoniana rappresenta l'energia  $\mathcal{E}$  posseduta dalla particella

$$\mathcal{E} = m\gamma c^2. \quad (3.13)$$

Per velocità basse,  $v \ll c$ , sviluppando in serie di potenze di  $\frac{v}{c}$  otteniamo

$$\mathcal{E} = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots, \quad (3.14)$$

in cui appare il termine cinetico classico  $\frac{1}{2}mv^2$  e il termine costante  $mc^2$  che rappresenta l'*energia di riposo* della particella. In particolare, si definisce energia cinetica relativistica la quantità

$$K = \mathcal{E} - mc^2. \quad (3.15)$$

Se parametrizziamo la traiettoria della particella nello spazio-tempo con un parametro arbitrario  $\tau$  che si comporti come uno scalare rispetto alle trasformazioni di Lorentz, l'azione diventa

$$\mathcal{S} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{L} d\tau, \quad (3.16)$$

dove

$$\mathcal{L} = -mc\sqrt{-\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu} \quad (3.17)$$

con  $\dot{x}_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}$ . Questa lagrangiana, a differenza della (3.8), è invariante per trasformazioni di Lorentz; infatti è costituita dalle costanti  $m$  e  $c$  e dallo scalare  $\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu$ .

Le equazioni di Eulero-Lagrange per la particella relativistica libera, in forma esplicitamente covariante, sono

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{mc \dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}_\nu \dot{x}^\nu}} \right) = 0. \quad (3.18)$$

Come caso particolare possiamo considerare quello in cui il parametro  $\tau$  corrisponde al tempo proprio della particella. In questo caso  $\dot{x}_\mu$  coincide con la quadri-velocità  $u_\mu$  per cui vale la condizione 1.21 e l'equazione del moto sarà

$$\frac{d}{d\tau} m u^\mu = \frac{d}{d\tau} p^\mu = 0, \quad (3.19)$$

in cui abbiamo introdotto la definizione del quadri-impulso relativistico  $p_\mu$ . Le equazioni ottenute esprimono la legge di conservazione del quadri-impulso per una particella relativistica libera.

Dalla lagrangiana (3.17) ricaviamo l'hamiltoniana

$$\mathcal{H} = p_\mu \dot{x}^\mu - \mathcal{L} = \frac{mc}{\sqrt{-\dot{x}_\nu \dot{x}^\nu}} \dot{x}_\mu \dot{x}^\mu + mc\sqrt{-\dot{x}_\nu \dot{x}^\nu} = 0. \quad (3.20)$$

Osserviamo che, nel formalismo canonico covariante, la particella libera è descritta da un'hamiltoniana nulla, e questo vale per qualunque scelta del parametro temporale. Questo risultato è una conseguenza della proprietà dell'azione (3.16) di essere invariante per riparametrizzazioni temporali, cioè per trasformazioni del tipo  $\tau \rightarrow \tau' = \tau'(\tau)$ , in questo modo possiamo scegliere la coordinata temporale più conveniente per parametrizzare la traiettoria della particella.

### 3.3 Moto in un campo elettromagnetico esterno

Consideriamo il moto di una particella puntiforme di massa  $m$  e carica  $e$  in un campo elettromagnetico esterno. Questo è un esempio di moto relativistico non libero.

Le equazioni del moto si ottengono applicando il principio di minima azione ad un'azione opportuna. L'azione per una particella in moto in un campo elettromagnetico esterno è composta da due termini: un termine di particella libera e un termine che descrive l'interazione della particella con il campo, descritto dal quadrivettore potenziale  $A^\mu$  definito dalla (2.21). Le proprietà di interazione della particella con il campo sono descritte da un unico parametro, cioè la carica elettrica della particella. La carica elettrica e il quadrivettore potenziale entrano nell'azione tramite il termine

$$\frac{e}{c} \int_a^b A_\mu dx^\mu, \quad (3.21)$$

il quadrivettore  $dx^\mu$  rappresenta lo spostamento infinitesimo della particella lungo la traiettoria del moto, mentre  $a$  e  $b$  sono due estremi fissi.

Nell'ipotesi di poter trascurare il campo prodotto dalla carica stessa rispetto al campo esterno applicato, parametrizzando la traiettoria con il parametro scalare  $\tau$ , con  $dx_\mu = \dot{x}^\mu d\tau$ , il termine di interazione diventa

$$\frac{e}{c} \int_{\tau_1}^{\tau_2} A_\mu \dot{x}^\mu d\tau. \quad (3.22)$$

Mettendo insieme il termine di interazione e il termine della particella libera, otteniamo l'azione per una carica in un campo elettromagnetico esterno

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( -mc \sqrt{-\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu} + \frac{e}{c} A_\mu \dot{x}^\mu \right) d\tau \quad (3.23)$$

dalla quale ricaviamo la lagrangiana per una particella carica in un campo elettromagnetico

$$\mathcal{L} = -mc \sqrt{-\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu} + \frac{e}{c} A_\mu \dot{x}^\mu. \quad (3.24)$$

Il principio di minima azione applicato all'azione (3.23) ci fornisce le equazioni di Eulero-Lagrange in forma covariante che scriviamo come

$$\frac{d}{d\tau} P_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}, \quad (3.25)$$

in cui abbiamo introdotto l'impulso canonico associato alla lagrangiana (3.24)

$$P_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{mc \dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}_\nu \dot{x}^\nu}} + \frac{e}{c} A_\mu. \quad (3.26)$$

Identificando il parametro  $\tau$  con il tempo proprio della particella, il quadri-impulso diventa

$$P_\mu = m u_\mu + \frac{e}{c} A_\mu = p_\mu + \frac{e}{c} A_\mu, \quad (3.27)$$

in cui abbiamo fatto uso della definizione del quadri-impulso canonico della particella libera. Ricordando che  $A_\mu = A_\mu(x(\tau))$ , la derivata rispetto al tempo proprio del quadri-impulso diventa

$$\frac{d}{d\tau} P_\mu = \frac{dp_\mu}{d\tau} + \frac{e}{c} u^\nu \partial_\nu A_\mu. \quad (3.28)$$

Il termine a destra della (3.25) ci da

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \partial_\mu \left( \frac{e}{c} A_\nu u^\nu \right) = \frac{e}{c} u^\nu \partial_\mu A_\nu. \quad (3.29)$$

Uguagliando i due risultati e portando al membro destro i termini contenenti il potenziale, si ottiene

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{e}{c} u^\nu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu), \quad (3.30)$$

ovvero, ricordando la definizione del tensore del campo elettromagnetico (2.22)

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu. \quad (3.31)$$

Questa equazione descrive il moto di una particella puntiforme carica in un campo elettromagnetico. Come commenteremo dettagliatamente in seguito, il lato destro costituisce la quadri-forza di Lorentz.

### 3.4 Meccanica relativistica

Nella (3.19) abbiamo introdotto il quadri-impulso relativistico  $p_\mu$ , che per una particella di massa  $m$  e velocità  $\mathbf{v}$  è definito come

$$p^\mu = m u^\mu = (m\gamma\mathbf{v}, m\gamma c). \quad (3.32)$$

Ricordando la definizione di impulso relativistico  $\mathbf{p}$ , (3.11), e dell'energia (3.13), possiamo esprimerlo come

$$p^\mu = \left( \mathbf{p}, \frac{\mathcal{E}}{c} \right), \quad (3.33)$$

il suo modulo quadro ci fornisce la relazione

$$p_\mu p^\mu = m^2 u^\mu u_\mu = -m^2 c^2 = |\mathbf{p}|^2 - \frac{\mathcal{E}^2}{c^2}, \quad (3.34)$$

dove abbiamo introdotto la condizione *mass-shell*  $p_\mu p^\mu = -m^2 c^2$ , e da cui otteniamo la relazione relativistica tra energia, massa e impulso

$$\mathcal{E} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (3.35)$$

Introduciamo il quadrivettore forza definito nel seguente modo:

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{p^\mu}{dt} = \left( \gamma \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \frac{\gamma}{c} \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right). \quad (3.36)$$

Introducendo il vettore *forza relativistica*  $\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ , possiamo riscrivere la definizione del quadrivettore forza nel seguente modo

$$F^\mu = \left( \gamma \mathbf{f}, \frac{\gamma}{c} \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right). \quad (3.37)$$

Il quadrivettore forza è proporzionale alla quadri-accelerazione<sup>1</sup>,  $F^\mu = ma^\mu$ , ma la forza relativistica in generale non è proporzionale al vettore accelerazione, come possiamo facilmente mostrare

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\gamma \mathbf{a} + m\mathbf{v} \frac{d\gamma}{dt}. \quad (3.38)$$

Il quadrivettore forza è ortogonale (rispetto alla metrica di Minkowski) al quadri-impulso. Questo deriva dal fatto che i quadrivettori velocità e accelerazione sono ortogonali tra loro, come mostrato nella (1.23). Abbiamo allora

$$F^\mu u_\mu = \gamma^2 \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \gamma^2 \frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0, \quad (3.39)$$

da cui otteniamo

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \frac{d\mathcal{E}}{dt}, \quad (3.40)$$

che ci permette di esprimere la quadri-forza in termini del vettore forza relativistica

$$F^\mu = \left( \gamma \mathbf{f}, \frac{\gamma}{c} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \right). \quad (3.41)$$

Ricordando la definizione dell'energia (3.13) e usando la (3.40), la (3.38) può essere riscritta come

$$\mathbf{f} = m\gamma \mathbf{a} + \mathbf{v} \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}}{c^2}, \quad (3.42)$$

da cui vediamo che i vettori forza e accelerazione sono proporzionali solo nel caso in cui i vettori forza e velocità sono ortogonali.

### 3.4.1 Forza di Lorentz

L'Eq.(3.31) rappresenta l'estensione allo spazio-tempo di Minkovski della forza di Lorentz che subisce una carica in moto in un campo elettromagnetico esterno.

<sup>1</sup>Stiamo considerando sistemi fisici con massa a riposo costante, per i quali  $\frac{dm}{dt} = 0$ .

Infatti separando le componenti spaziali e temporali otteniamo

$$\frac{dp^i}{d\tau} = \gamma \frac{dp^i}{dt} = \frac{e}{c} F^{i\nu} u_\nu = \frac{e}{c} (F^{ij} u_j + F^{i4} u_4) = \frac{e}{c} \gamma (\epsilon^{ijk} v_j B_k + cE^i), \quad (3.43)$$

per la parte spaziale, oppure in forma vettoriale

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = e(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}). \quad (3.44)$$

Al membro destro di questa equazione si riconosce l'espressione nota della forza di Lorentz; il membro sinistro invece contiene le correzioni relativistiche dovute alla definizione dell'impulso relativistico (3.11) contenente il fattore di Lorentz  $\gamma$ .

La parte temporale ci da

$$\frac{dp^4}{d\tau} = \gamma \frac{dp^4}{dt} = \frac{e}{c} F^{4i} u_i = \frac{e}{c} \gamma E^i v_i, \quad (3.45)$$

che, usando le relazioni (3.33) e (3.40) riscriviamo come

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}. \quad (3.46)$$

Quest'ultima espressione rappresenta il lavoro effettuato dal campo sulla particella (nell'unità di tempo). Osserviamo che solo il campo elettrico compie un lavoro sulla particella carica, il campo magnetico non compie alcun lavoro poichè la forza con la quale agisce sulla particella è sempre perpendicolare alla sua velocità.

# Capitolo 4

## Teorie di gauge

In questo ultimo capitolo illustriamo la struttura generale delle *teorie di gauge*, sia abeliane che non abeliane. Prima di addentrarci in questo argomento è necessaria un'introduzione alla teoria dei gruppi e alle equazioni d'onda.

Per quanto riguarda la teoria dei gruppi un'attenzione particolare sarà rivolta ai gruppi di Lie, i quali vengono usati nella descrizione delle interazioni fondamentali, per le quali le teorie di gauge, in particolare le teorie di gauge *non abeliane*, costituiscono il migliore esempio di teoria quantistica dei campi. Pertanto nella prima parte del capitolo verranno mostrate le proprietà principali della teoria dei gruppi di Lie proponendo i risultati contenuti in [5].

Per quanto riguarda le equazioni d'onda, siamo interessati soprattutto all'equazione di Dirac, per cui, seguendo un approccio simile a quello presentato in [6], vedremo come passare da una formulazione non relativistica a una relativistica, con tutte le complicazioni che ne conseguono. Nel fare questo non ci soffermeremo ad esaminare l'apparato matematico della meccanica quantistica e le sue diverse possibili formulazioni, dato che non è l'obiettivo di questo lavoro, ma ci limiteremo ad esporre i suoi principi fondamentali.

Successivamente si passerà alle teorie di gauge partendo da una teoria *abeliana*, adatta a descrivere l'interazione elettromagnetica, che verrà poi generalizzata al caso *non abeliano* con proprietà più generali rispetto alla prima.

Per concludere il capitolo mostriamo come ricavare le *equazioni di Wong* espresse in [7], che generalizzano al caso non abeliano le equazioni del moto con la forza di Lorentz di una particella carica e l'equazione di conservazione della carica elettrica.

### 4.1 Gruppi di Lie e algebra di Lie

Sia  $G$  un gruppo, inteso come un insieme di elementi  $g$  che soddisfano le seguenti proprietà:

1. esiste una legge di composizione: presi  $g_1, g_2 \in G$  allora  $g_1 \cdot g_2 = g_3 \in G$ ,

2. esiste l'elemento identità:  $\exists e \in G$  tale che  $g \cdot e = e \cdot g = g$ ,
3. esiste l'elemento inverso: se  $g \in G$  allora  $\exists g^{-1} \in G$  tale che  $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$ ,
4. vale la proprietà associativa:  $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$ .

Un *gruppo di Lie* è un gruppo di trasformazioni che dipendono in modo continuo da alcuni parametri. Studiando le trasformazioni infinitesime generate dal gruppo si ottiene l'*algebra di Lie* del gruppo, che ne riassume le informazioni essenziali. In generale un elemento  $g(\alpha)$  di un gruppo di Lie connesso all'identità si può parametrizzare come

$$g(\alpha) = e^{i\alpha_a T^a} \quad a = 1, \dots, \dim G \quad (4.1)$$

gli  $\alpha_a$  sono dei numeri reali che parametrizzano i vari elementi del gruppo, mentre i  $T^a$  sono i generatori del gruppo.

Nella *rappresentazione definente*, o *fondamentale*, gli elementi di un gruppo sono matrici che agiscono su vettori appartenenti ad uno spazio vettoriale. Se tale spazio vettoriale ha dimensione  $N$ , allora diciamo che la rappresentazione è  $N$ -dimensionale. In parole semplici possiamo dire che per *rappresentazione* di un gruppo si intende un'applicazione che associa ad ogni elemento del gruppo una matrice quadrata. In tal caso la legge di composizione corrisponde al prodotto matriciale e le proprietà delle matrici soddisfano tutte le proprietà che definiscono un gruppo. Se gli elementi del gruppo sono matrici  $N \times N$ , anche i generatori saranno delle matrici  $N \times N$  che generano trasformazioni infinitesime quando  $\alpha_a \ll 1$

$$g = e + i\alpha_a T^a + \dots \quad (4.2)$$

L'algebra di Lie del gruppo è definita come

$$[T^a, T^b] = i f^ab_c T^c, \quad (4.3)$$

le costanti  $f^ab_c$  sono chiamate *costanti di struttura* del gruppo. Se le costanti di struttura sono non nulle, il gruppo si dice *non abeliano*, altrimenti si dirà *abeliano*. Ad esempio,  $U(1)$  e  $SO(2)$  sono gruppi abeliani poichè hanno un solo generatore che ovviamente commuta con se stesso, mentre  $SO(N)$ , con  $N > 3$ , è non abeliano. Gruppi diversi ma con la stessa algebra di Lie differiscono per le loro proprietà topologiche, ma localmente sono simili.

Elenchiamo di seguito altre proprietà generali di un generico gruppo di Lie

1.  $Tr(T^a T^b) = \frac{1}{2} \gamma^{ab}$
2.  $[[T^a, T^b], T^c] + [[T^b, T^c], T^a] + [[T^c, T^a], T^b] = 0$   
 $\Rightarrow f^ab_d f^dc_e + f^bc_d f^da_e + f^ca_d f^db_e = 0$
3.  $f^{abc} = f^ab_d \gamma^{dc}$

La 1 definisce la metrica  $\gamma^{ab}$  detta *metrica di Killing*, tale metrica è definita positiva solo per gruppi di Lie compatti.

La 2 è l'*identità di Jacobi*.

Nella 3 viene usata la metrica di Killing per alzare un indice nelle costanti di struttura, queste sono completamente antisimmetriche in tutti gli indici.

Una rappresentazione è detta *reale* se possiamo trovare una trasformazione unitaria  $T^a \rightarrow U^{-1}T^aU$  tale che  $-(T^a)^* = T^a$  per ogni  $a$ , dove  $(T^a)^*$  è la matrice complessa coniugata. Se una trasformazione di questo tipo non esiste, definiamo la rappresentazione *pseudoreale* se esiste una matrice unitaria  $V \neq \mathbb{1}$  ( $\mathbb{1}$  è la matrice identità) tale che  $-(T^a)^* = V^{-1}T^aV$ , per ogni  $a$ . Se una matrice tale non esiste, allora la rappresentazione è detta *complessa*. Per  $SU(N)$  con  $N \geq 3$  la rappresentazione fondamentale è complessa, mentre per  $SU(2)$  la rappresentazione fondamentale è pseudoreale. Per  $SO(N)$  la rappresentazione definita è reale, perchè i generatori sono matrici antisimmetriche e ogni matrice hermitiana antisimmetrica è uguale alla sua complessa coniugata cambiata di segno [8].

Una rappresentazione è detta *riducibile* se esiste una trasformazione unitaria che rende le matrici  $T^a$  diagonali a blocchi, per ogni  $a$ , altrimenti è *irriducibile*. Lo spazio vettoriale su cui agiscono le matrici di una rappresentazione riducibile può essere decomposto nella somma diretta degli spazi vettoriali su cui operano le matrici delle rappresentazioni irriducibili nelle quali può essere scomposta.

Una importante rappresentazione per i gruppi non-abeliani compatti è la *rappresentazione aggiunta*, data da

$$(T^a)^{bc} = -if^{abc}, \quad (4.4)$$

poichè le costanti di struttura sono reali e completamente antisimmetriche, allora  $T^a$  è hermitiana. Si dimostra che la rappresentazione aggiunta è una rappresentazione dell'algebra di Lie di un gruppo usando l'identità di Jacobi.

### 4.1.1 Gruppo di Lorentz

Le trasformazioni di Lorentz viste nel primo capitolo formano un gruppo di trasformazioni chiamato *gruppo di Lorentz* e indicato con  $O(3, 1)$

$$O(3, 1) = \{ \Lambda, \text{matrici reali } 4 \times 4 \mid \Lambda^T \eta \Lambda = \eta \}. \quad (4.5)$$

Verifichiamo facilmente che sono soddisfatte le proprietà che definiscono un gruppo

1. La composizione di due trasformazioni di Lorentz  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$  è ancora una trasformazione di Lorentz

$$(\Lambda_1 \Lambda_2)^T \eta (\Lambda_1 \Lambda_2) = \Lambda_2^T (\Lambda_1^T \eta \Lambda_1) \Lambda_2 = \Lambda_2^T \eta \Lambda_2 = \eta \quad (4.6)$$

2. Esiste l'elemento neutro che corrisponde alla matrice identità  $\mathbb{1}$

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

che appartiene al gruppo dato che  $\mathbb{1}^T \eta \mathbb{1} = \eta$

3. Esiste l'elemento inverso  $\Lambda^{-1}$  poichè  $\det \Lambda \neq 0$ , quindi le matrici sono invertibili con  $\Lambda^{-1} \Lambda = \mathbb{1}$  e inoltre la trasformazione inversa appartiene al gruppo

$$(\Lambda^T)^{-1} \eta \Lambda^{-1} = (\Lambda^{-1})^T \eta \Lambda^{-1} = \eta \quad (4.8)$$

4. Vale la proprietà associativa poichè il prodotto matriciale la soddisfa.

Possiamo vedere alcune proprietà che caratterizzano le matrici di questo gruppo. Prendendo il determinante della relazione  $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$  vediamo che

$$\det(\Lambda^T \eta \Lambda) = \det \Lambda^T \det \eta \det \Lambda = (\det \Lambda)^2 \det \eta = \det \eta, \quad (4.9)$$

da cui

$$\det \Lambda = \pm 1. \quad (4.10)$$

Nella relazione (1.9) prendiamo  $\alpha = \beta = 4$  ottenendo la condizione

$$(\Lambda^4_4)^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_4)^2 \geq 1$$

che implica

$$\Lambda^4_4 \geq 1 \quad \text{oppure} \quad \Lambda^4_4 \leq -1. \quad (4.11)$$

Le condizioni sul determinante e sulle componenti  $\Lambda^4_4$  permettono di classificare le trasformazioni di Lorentz. Le trasformazioni con  $\det \Lambda = +1$  formano il sottogruppo di Lorentz *proprio*, mentre quelle con  $\Lambda^4_4 \geq 1$  sono dette *ortocrone*, queste insieme formano il sottogruppo *proprio e ortocrono*, detto gruppo di Lorentz *ristretto*, costituito dalle matrici  $\Lambda$  tali che

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta, \quad \det \Lambda = +1, \quad \Lambda^4_4 \geq 1. \quad (4.12)$$

Le trasformazioni di questo gruppo sono connesse in modo continuo alla trasformazione identica. Per invarianza relativistica solitamente si intende l'invarianza rispetto a trasformazioni appartenenti a questo gruppo.

Se oltre alla possibilità di cambiare sistema di riferimento con le trasformazioni di Lorentz, si ha la possibilità di scegliere l'origine del sistema di riferimento, ovvero

operare tre traslazioni spaziali e una temporale, si ottiene un gruppo di trasformazioni a dieci parametri detto *gruppo di Poincarè*. Un elemento di questo gruppo trasforma un quadrivettore nel seguente modo

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}, \quad (4.13)$$

$a^{\mu}$  contiene i quattro parametri che definiscono una traslazione spazio-temporale, che vanno ad aggiungersi ai sei che caratterizzano una trasformazione di Lorentz. Trasformazioni di questo tipo rappresentano le più generali trasformazioni di coordinate che lasciano invariata la distanza minkowskiana tra due quadrivettori,  $s^2 = (y^{\mu} - x^{\mu})(y_{\mu} - x_{\mu})$ .

Ricaviamo l'algebra di Lie del gruppo di Lorentz. Una trasformazione infinitesima è data da

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}_{\nu}, \quad (4.14)$$

imponendo la condizione (1.9) che definisce una trasformazione di Lorentz si ottiene che  $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ , per cui le  $\omega_{\mu\nu}$  sono antisimmetriche e contengono sei parametri indipendenti. In forma matriciale una trasformazione infinitesima è scritta come

$$\Lambda = \mathbb{1} + \frac{i}{2} \omega_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta}, \quad (4.15)$$

dove  $M^{\alpha\beta}$ , con  $\alpha < \beta$ , sono i generatori del gruppo, antisimmetrici e nella rappresentazione fondamentale sono dati da

$$(M^{\alpha\beta})^{\mu}_{\nu} = -i (\eta^{\alpha\mu} \delta^{\beta}_{\nu} - \eta^{\beta\mu} \delta^{\alpha}_{\nu}). \quad (4.16)$$

L'algebra di Lie del gruppo è data da

$$[M^{\mu\nu}, M^{\alpha\beta}] = -i \eta^{\nu\alpha} M^{\mu\beta} + i \eta^{\mu\alpha} M^{\nu\beta} + i \eta^{\nu\beta} M^{\mu\alpha} - i \eta^{\mu\beta} M^{\nu\alpha}. \quad (4.17)$$

## 4.2 Equazioni d'onda relativistiche

Un'equazione d'onda relativistica deve soddisfare i principi della meccanica quantistica e deve essere relativisticamente invariante.

Si può dire che, storicamente, la teoria quantistica dei campi nasce, in parte, proprio dallo studio delle equazioni d'onda relativistiche, come le equazioni di Klein-Gordon e di Dirac.

Mostriamo brevemente i passaggi che hanno portato alla formulazione di una tale equazione passando prima per una formulazione non relativistica (equazione di Schrödinger) e poi per una formulazione relativistica che non ammette un'interpretazione probabilistica come richiesto dai principi della meccanica quantistica (equazione di Klein-Gordon).

## 4.2.1 Equazione di Schrödinger

La prima equazione d'onda proposta è stata l'*equazione di Schrödinger* che descrive la meccanica quantistica di particelle non relativistiche. Schrödinger propose questa formulazione non relativistica poichè da questa si ottenevano dei risultati per l'atomo di idrogeno in accordo con i dati sperimentali, mentre una formulazione relativistica portava a dei risultati apparentemente insoddisfacenti.

In maniera molto semplice possiamo costruire l'equazione di Schrödinger per una particella libera non relativistica partendo dalla relazione classica tra energia e impulso  $E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$  e sostituendo a  $E$  e  $\mathbf{p}$  i rispettivi operatori differenziali

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \\ \mathbf{p} &\longrightarrow -i\hbar\nabla, \end{aligned} \quad (4.18)$$

questi operatori differenziali agiscono su una funzione d'onda  $\psi(\mathbf{x}, t)$  che descrive lo stato della particella. In questo modo otteniamo l'equazione

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{x}, t), \quad (4.19)$$

che può essere riscritta nella forma

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x}, t) = \mathcal{H}\psi(\mathbf{x}, t), \quad (4.20)$$

in cui  $\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$  è l'operatore hamiltoniano per una particella libera non relativistica. Espressa in questa forma l'equazione ha una validità universale per la descrizione di qualsiasi sistema quantistico.

Questa equazione ha soluzioni finite in tutto lo spazio per qualunque valore positivo dell'energia. Le soluzioni sono autofunzioni dell'operatore impulso e hanno la forma

$$\psi(\mathbf{x}, t) \sim e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - Et)}, \quad (4.21)$$

cioè sono delle onde piane di frequenza  $\nu = \frac{E}{\hbar}$  e vettore d'onda  $\mathbf{k} = \frac{\mathbf{p}}{\hbar}$ , la lunghezza d'onda corrispondente  $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{|\mathbf{p}|}$  è detta *lunghezza d'onda di de Broglie*. Queste soluzioni descrivono stati in cui la particella ha energia  $E$  e impulso  $\mathbf{p}$  determinati.

In generale la funzione d'onda ammette un'interpretazione probabilistica, infatti il suo modulo quadro,  $|\psi(\mathbf{x}, t)|^2$ , si può interpretare come la densità di probabilità,  $\rho(\mathbf{x}, t)$ , di trovare la particella nel punto  $\mathbf{x}$  all'istante di tempo  $t$ . In particolare la funzione d'onda deve essere normalizzata in modo tale che  $\int |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x} = 1$ , dove l'integrale è calcolato su tutto lo spazio tridimensionale. Integrando la densità di probabilità  $\rho(\mathbf{x}, t)$

su un volume finito  $V$  si ottiene la probabilità di trovare la particella in questo volume. È interessante calcolare la sua derivata rispetto al tempo

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} &= \int_V \left( \psi \frac{\partial}{\partial t} \bar{\psi} + \bar{\psi} \frac{\partial}{\partial t} \psi \right) d\mathbf{x} \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \int_V (\psi \nabla^2 \bar{\psi} - \bar{\psi} \nabla^2 \psi) d\mathbf{x},\end{aligned}\tag{4.22}$$

utilizzando l'identità  $\psi \nabla^2 \bar{\psi} - \bar{\psi} \nabla^2 \psi = \nabla \cdot (\psi \nabla \bar{\psi} - \bar{\psi} \nabla \psi)$ , si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} &= \frac{i\hbar}{2m} \int_V \nabla \cdot (\psi \nabla \bar{\psi} - \bar{\psi} \nabla \psi) d\mathbf{x} \\ &= - \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} d\mathbf{x},\end{aligned}\tag{4.23}$$

in cui abbiamo definito la densità di corrente

$$\mathbf{J} = \frac{\hbar}{i2m} (\psi \nabla \bar{\psi} - \bar{\psi} \nabla \psi).\tag{4.24}$$

Osserviamo che  $\mathbf{J}$  e  $\rho$  soddisfano l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0\tag{4.25}$$

che interpretiamo come un'equazione di conservazione della probabilità di trovare la particella da qualche parte in ogni istante di tempo.

## 4.2.2 Equazioni di Klein-Gordon e Dirac

Per costruire un'equazione d'onda relativistica si può pensare di ripetere un procedimento analogo a quanto fatto per ottenere l'equazione di Schrödinger partendo dalla relazione relativistica tra energia e impulso (3.35), prendendo il quadrato di tale relazione e operando le sostituzioni (4.18); in questo modo si ottiene *l'equazione di Klein-Gordon*

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi(\mathbf{x}, t) = 0,\tag{4.26}$$

che riscriviamo in notazioni relativistiche come

$$(\square - \mu^2) \psi(x) = 0,\tag{4.27}$$

con  $\square$  operatore di D'Alembert definito nella (2.59) e  $\mu = \frac{mc}{\hbar}$ .

Soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon sono le onde piane della forma

$$\psi(x) \sim e^{\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu},\tag{4.28}$$

con il quadri-impulso  $p_\mu$  che deve soddisfare la condizione di *mass-shell*  $p_\mu p^\mu = -m^2 c^2$ . Soluzioni di questa equazione possono essere onde piane con energia positiva, che descrivono particelle scalari di spin nullo, oppure onde piane di energia negativa, la cui interpretazione fisica non è immediata, ma che non possono essere trascurate. Queste soluzioni descrivono antiparticelle con energia positiva. Quindi in generale le soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon sono indicizzate dal valore dell'impulso spaziale  $\mathbf{p}$  e dal segno dell'energia,  $E = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$ .

Dall'equazione di Klein-Gordon si può ricavare un'equazione di continuità. Questa si ricava moltiplicando l'equazione stessa per il campo complesso coniugato  $\bar{\psi}$  e sottraendovi l'equazione complessa coniugata moltiplicata per  $\psi$ . Si ottiene

$$\partial_\mu (\bar{\psi} \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \bar{\psi}) = 0, \quad (4.29)$$

definendo la corrente

$$J^\mu = \frac{1}{i2m} (\bar{\psi} \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \bar{\psi}), \quad (4.30)$$

assume la forma

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (4.31)$$

L'equazione ottenuta ha la forma di un'equazione di continuità ma non è interpretabile come dovuta alla conservazione di una probabilità, infatti la componente temporale della corrente  $J^\mu$ , anche se reale, non è definita positiva e di conseguenza non può rappresentare una probabilità.

Nonostante non ammetta un'interpretazione probabilistica, l'equazione di Klein-Gordon, tenendo conto della corretta relazione relativistica tra energia e impulso, presenta tutte le caratteristiche tipiche di un'equazione d'onda relativistica come le soluzioni ad energia negativa interpretabili come dovute ad antiparticelle con energia positiva.

La ricerca di un'equazione d'onda relativistica che ammettesse un'interpretazione probabilistica ha portato alla formulazione dell'*equazione di Dirac*. Anzichè considerare la relazione quadratica tra energie ad impulso, Dirac propose una relazione lineare della forma

$$E = c\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\alpha} + mc^2 \beta, \quad (4.32)$$

e quindi un'equazione d'onda con derivate del primo ordine nel tempo che rappresenta l'equazione di Dirac in forma "hamiltoniana"

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i\hbar c \nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + mc^2 \beta) \psi = 0, \quad (4.33)$$

dove  $\psi$  è una funzione d'onda vettoriale,  $\boldsymbol{\alpha}$  e  $\beta$  sono matrici hermitiane che garantiscono l'hermiticità dell'hamiltoniana e sono tali da rendere consistente questa relazione lineare con la relazione quadratica  $E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4$ . Nel costruire l'equazione occorre tenere conto dei seguenti punti:

1. Le componenti di  $\psi$  devono soddisfare l'equazione di Klein-Gordon, in modo tale che un'onda piana con energia  $E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^2$  sia una soluzione.
2. Deve esistere un quadrivettore densità di corrente che è conservato e la cui quarta componente è positiva.
3. L'equazione ottenuta deve essere covariante sotto trasformazioni di Lorentz.

Elevando al quadrato la relazione (4.32), la consistenza con la relazione quadratica tra energia e impulso si ha se le matrici  $\alpha$  e  $\beta$  soddisfano le relazioni

$$\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i = 2\delta^{ij} \mathbb{1}, \quad \alpha^i \beta + \beta \alpha^i = 0, \quad (\alpha^i)^2 = \beta^2 = \mathbb{1}, \quad (4.34)$$

cioè tutte le matrici  $\alpha$  e  $\beta$  anticommutano tra loro, e i loro quadrati sono uguali alla matrice identità. Queste relazioni sono note come *algebra di Clifford*.

Moltiplicando l'equazione precedente per la matrice invertibile  $\frac{1}{\hbar c} \beta$  e definendo le matrici

$$\gamma^i = -i\beta\alpha^i, \quad \gamma^4 = -i\beta, \quad (4.35)$$

che soddisfano la relazione di anticommutazione

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}, \quad (4.36)$$

otteniamo l'equazione di Dirac in forma covariante

$$\left( \gamma^\mu \partial_\mu + \frac{mc}{\hbar} \right) \psi = 0. \quad (4.37)$$

Nella rappresentazione di Dirac le matrici gamma assumono la forma

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^i \\ i\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^4 = -i \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

dove  $\sigma^i$  sono le matrici di Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.39)$$

Le  $\gamma^\mu$  sono matrici  $4 \times 4$  a traccia nulla,  $Tr \gamma^\mu = 0$ . La funzione d'onda vettoriale  $\psi(x)$  ha quattro componenti complesse che non sono da intendersi come componenti di un quadri-vettore, pertanto per indicarle usiamo gli indici  $a, b, \dots = 1, 2, 3, 4$ , ed è chiamata *spinore*. Mentre per indicare le componenti di un quadri-vettore continuiamo ad usare le lettere greche minuscole. L'equazione (4.37) può essere scritta in modo più esplicito come

$$\left( (\gamma^\mu)_a^b \partial_\mu + \frac{mc}{\hbar} \delta_a^b \right) \psi_b(x) = 0, \quad (4.40)$$

la quale contiene quattro equazioni distinte.

Moltiplicando la (4.37) per  $(\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar})$  si ottiene l'equazione di Klein-Gordon, pertanto il primo punto del precedente elenco è verificato e ne consegue che esistono soluzioni con energia positiva e con energia negativa.

Abbiamo detto che la ragione principale che ha portato alla formulazione dell'equazione di Dirac era ottenere un'equazione che avesse un'interpretazione probabilistica che l'equazione di Klein-Gordon non possedeva. Vediamo ora come ricavare un'equazione di continuità e una quadri-corrente conservata la cui quarta componente sia definita positiva. Moltiplicando la (4.37) per  $\psi^\dagger \gamma^4$  da sinistra e sottraendo l'equazione hermitiano-coniugata  $(\gamma^{\mu\dagger} \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}) \psi^\dagger = 0$  moltiplicata per  $\gamma^{4\dagger} \psi$  da destra si ottiene

$$\psi^\dagger \gamma^4 \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - (\partial_\mu \psi^\dagger) \gamma^{\mu\dagger} \gamma^{4\dagger} \psi + \frac{mc}{\hbar} (\psi^\dagger \gamma^4 \psi + \psi^\dagger \gamma^{4\dagger} \psi) = 0 \quad (4.41)$$

sfruttando le proprietà delle matrici  $\gamma$

$$\gamma^{i\dagger} = \gamma^i, \quad (4.42)$$

$$\gamma^{4\dagger} = -\gamma^4, \quad (4.43)$$

$$(4.44)$$

oppure in forma compatta

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^4 \gamma^\mu \gamma^4, \quad (4.45)$$

il termine tra parentesi è nullo e si ha

$$\psi^\dagger \gamma^4 \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) + (\partial_\mu \psi^\dagger) \gamma^4 \gamma^\mu \psi = \partial_\mu (\psi^\dagger \gamma^4 \gamma^\mu \psi) = 0, \quad (4.46)$$

definendo lo spinore  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \beta$ , detto coniugato di Dirac dello spinore  $\psi$ , e la quadri-corrente

$$J^\mu = i \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = (\psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \psi, \psi^\dagger \psi), \quad (4.47)$$

otteniamo l'equazione di continuità

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (4.48)$$

Osserviamo che la quarta componente della quadri-corrente,  $\psi^\dagger \psi$ , è definita positiva ma non è una quantità scalare.

Mostriamo la covarianza dell'equazione di Dirac per trasformazioni del gruppo di Lorentz proprio e ortocrono. Per prima cosa occorre determinare la legge di trasformazione dello spinore  $\psi(x)$ . Questo segue la seguente regola di trasformazione lineare

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x') = S(\Lambda) \psi(x), \quad (4.49)$$

dove le matrici  $S(\Lambda)$  costituiscono una rappresentazione spinoriale del gruppo di Lorentz. Occorre mostrare che l'equazione di Dirac si trasforma nel seguente modo:

$$\left(\gamma^\mu \partial_\mu + \frac{mc}{\hbar}\right) \psi(x) = 0 \longrightarrow \left(\gamma^\mu \partial'_\mu + \frac{mc}{\hbar}\right) \psi'(x') = 0. \quad (4.50)$$

Eseguendo la trasformazione  $S(\Lambda)$  che collega il secondo sistema di riferimento al primo, e moltiplicando per  $S^{-1}(\Lambda)$ , risulta che l'invarianza in forma si ha se è soddisfatta la condizione

$$S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) \Lambda_\mu{}^\nu = \gamma^\nu, \quad (4.51)$$

o anche

$$\Lambda^\mu{}_\nu S(\Lambda) \gamma^\nu S^{-1}(\Lambda) = \gamma^\mu, \quad (4.52)$$

che interpretiamo come una trasformazione che lascia invariate le matrici  $\gamma^\mu$ . Con questa proprietà si dimostra facilmente la covarianza dell'equazione di Dirac.

Matrici  $S(\Lambda)$  siffatte esistono e sono costruite a partire dalle matrici  $\gamma^\mu$ , per vederlo basta considerare una trasformazione infinitesima

$$S(\Lambda) = \mathbb{1} + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu}, \quad (4.53)$$

dove  $\Sigma^{\mu\nu}$  sono sei matrici  $4 \times 4$  antisimmetriche e costituiscono i generatori del gruppo di Lorentz nella rappresentazione spinoriale, e sono dati da

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad (4.54)$$

e danno l'algebra del gruppo di Lorentz (4.17).

### 4.3 Teoria di gauge abeliana

Nella sezione 2.6 abbiamo introdotto la trasformazione di gauge (2.54) che lascia invariato il tensore del campo elettromagnetico  $F_{\mu\nu}$ , come mostrato nella (2.55).

Una *trasformazione di gauge* è una trasformazione di simmetria locale (simmetria di gauge) della lagrangiana, ovvero una trasformazione che dipende dal punto dello spazio-tempo. Trasformazioni che non dipendono dal punto dello spazio-tempo sono dette *simmetrie globali*.

La teoria elettromagnetica sviluppata precedentemente può essere vista come una teoria di gauge abeliana in cui le trasformazioni di gauge sono trasformazioni di simmetria appartenenti al gruppo  $U(1)$ .

Il gruppo  $U(1)$  è il gruppo delle fasi,  $U(1) = \{e^{i\alpha} \mid \alpha \in [0, 2\pi]\}$ . Da trasformazioni infinitesime

$$e^{i\alpha} = 1 + i\alpha \dots \quad (4.55)$$

estraiamo il generatore nella rappresentazione definita  $T = 1$  (che possiamo pensare come ad una matrice  $1 \times 1$ ). Il generatore produce l'algebra di Lie abeliana del gruppo  $U(1)$

$$[T, T] = 0. \quad (4.56)$$

Nella rappresentazione di carica  $q$  il generatore è  $T = q$ , con  $q$  numero intero, e produce la stessa algebra di Lie, mentre l'elemento  $e^{i\alpha}$  è sostituito da  $e^{iq\alpha}$ . Le rappresentazioni irriducibili del gruppo  $U(1)$  sono tutte uno-dimensionali complesse, pertanto sono dei numeri interi positivi o negativi.

Se consideriamo un campo d'onda, come ad esempio un campo di Klein-Gordon complesso, oppure la funzione d'onda di una particella non relativistica, un elemento del gruppo  $U(1)$  agirà come

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha}\psi(x), \quad (4.57)$$

questa è una trasformazione globale poichè il parametro  $\alpha$  è costante.

Una trasformazione di simmetria locale (simmetria di gauge) è espressa come

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x), \quad (4.58)$$

in cui il parametro  $\alpha(x)$  dipende dal punto  $x$  dello spazio-tempo e con  $e^{i\alpha(x)}$  che può essere visto come una matrice unitaria  $1 \times 1$ .

La trasformazione (4.58) può essere una simmetria della lagrangiana solo se si introduce un *potenziale di gauge*,  $A_\mu(x)$ , che identifichiamo con il potenziale del campo elettromagnetico, e sostituiamo la derivata ordinaria  $\partial_\mu$  con la *derivata covariante* definita come

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu(x), \quad (4.59)$$

in cui  $e$  è la carica dell'elettrone e rappresenta una costante di accoppiamento. La derivata covariante ha la proprietà di non distruggere il carattere tensoriale dell'oggetto su cui agisce: trasforma tensori in tensori.

La richiesta che la derivata covariante di un "tensore" segua la semplice legge di trasformazione

$$D_\mu\psi(x) \longrightarrow D'_\mu\psi'(x) = e^{i\alpha}D_\mu\psi(x), \quad (4.60)$$

dove  $D'_\mu = \partial_\mu - ieA'_\mu$ , ci porta a concludere che il potenziale di gauge deve trasformarsi nel seguente modo

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \quad (4.61)$$

che corrisponde alla legge di trasformazione (2.54) in cui il parametro  $\alpha(x)$  sostituisce la funzione scalare  $f(x)$  ed è moltiplicato dall'inverso della costante di accoppiamento.

La relazione (2.22), che esprime il tensore del campo elettromagnetico in termini del potenziale di gauge, può essere riscritta come

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{e}[D_\mu, D_\nu]. \quad (4.62)$$

Notiamo che le derivate covarianti non commutano, ma generano il tensore del campo elettromagnetico  $F_{\mu\nu}$ , che può essere interpretato come la curvatura di un opportuno oggetto geometrico, in analogia con formule simili sulle derivate covarianti della geometria differenziale di varietà riemanniane.

A questo punto usando come mattone fondamentale il tensore  $F_{\mu\nu}$  costruiamo una lagrangiana che descriva la propagazione libera del campo  $A_\mu$ , richiedendo che sia invariante per trasformazioni di gauge e per trasformazioni di Lorentz. Questa lagrangiana corrisponde al primo termine di quella definita dall'eq.(2.65), che riscriviamo usando una normalizzazione standard

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (4.63)$$

In questo modo abbiamo mostrato che la teoria elettromagnetica sviluppata è effettivamente una teoria di gauge abeliana.

In QED il campo d'onda da cui si parte è un campo spinoriale di massa  $m$ , descritto dalla lagrangiana libera di Dirac

$$\mathcal{L}_{Dirac} = -\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi, \quad (4.64)$$

la quale è invariante per la trasformazione globale (4.57), ma non lo è per la trasformazione locale (4.58), come possiamo facilmente mostrare. Il termine di massa è invariante, infatti

$$m\bar{\psi}\psi \longrightarrow m\bar{\psi}'\psi' = m\bar{\psi}e^{-i\alpha(x)}e^{i\alpha(x)}\psi = m\bar{\psi}\psi. \quad (4.65)$$

L'altro termine invece

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \longrightarrow \bar{\psi}'\gamma^\mu\partial_\mu\psi' = \bar{\psi}e^{-i\alpha(x)}\gamma^\mu\partial_\mu e^{i\alpha(x)}\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha(x), \quad (4.66)$$

non è invariante a causa del termine  $i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha(x)$  che si annulla solo quando  $\alpha(x)$  è costante. Osserviamo però che sostituendo la derivata ordinaria  $\partial_\mu$  con la derivata covariante  $D_\mu$  definita nella (4.59) e tenendo conto della regola di trasformazione del potenziale di gauge  $A_\mu$  (4.61), si ottiene una lagrangiana invariante per trasformazioni locali del gruppo  $U(1)$ . È facile quindi ottenere l'estensione *gauge invariante* della lagrangiana di Dirac semplicemente sostituendo la derivata ordinaria con la derivata covariante

$$\mathcal{L}_{Dirac} = -\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi. \quad (4.67)$$

Sommando quest'ultima alla (4.63) otteniamo la lagrangiana dell'elettrodinamica quantistica

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \bar{\psi}(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi + ieA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (4.68)$$

Il primo termine descrive la propagazione libera del campo  $A_\mu$ , ovvero dei fotoni (quanti del campo elettromagnetico), il secondo termine descrive la propagazione libera del

campo  $\psi$  (cioè degli elettroni e relative antiparticelle), il terzo termine descrive l'interazione tra fotoni ed elettroni. Inoltre riconosciano più facilmente il ruolo di  $e$  vista come costante d'accoppiamento.

Le equazioni del moto, ottenute come equazioni di Eulero-Lagrange, sono

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -ie\bar{\psi}\gamma^\nu\psi, \quad (4.69)$$

$$(\gamma^\mu D_\mu + m)\psi = 0. \quad (4.70)$$

La prima di queste due non è altro che l'equazione di Maxwell in presenza di sorgenti (2.25) in cui identifichiamo il membro destro con la quadri-corrente  $J^\nu = ie\bar{\psi}\gamma^\nu\psi$ , la quale soddisfa l'equazione di conservazione

$$D_\mu J^\mu = 0, \quad (4.71)$$

come conseguenza della proprietà

$$D_\nu D_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (4.72)$$

soddisfatta dal tensore del campo elettromagnetico. La seconda, invece, corrisponde all'equazione d'onda relativistica di Dirac, già discussa nella sezione precedente, in cui la derivata ordinaria è sostituita dalla derivata covariante.

Le equazioni ottenute sono invarianti per trasformazioni di Lorentz, intendendo trasformazioni appartenenti al gruppo di Lorentz ristretto, e per trasformazioni di gauge del gruppo  $U(1)$ .

## 4.4 Teorie di gauge non abeliane

Dopo aver descritto i tratti salienti delle equazioni d'onda non relativistiche e relativistiche usate nelle teorie di gauge abeliane e aver dato una descrizione anche di queste ultime, passiamo a descrivere la loro generalizzazione non abeliana. Consideriamo  $N$  campi liberi con masse identiche  $m$  e assembliamoli nel vettore colonna

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi^N \end{pmatrix} \quad (4.73)$$

Una lagrangiana libera di questi campi è invariante per trasformazioni di simmetria

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = U\psi(x), \quad (4.74)$$

dove  $U$  è una matrice  $N \times N$  speciale (cioè con determinante uguale ad uno) e unitaria ( $U^\dagger = U^{-1}$ ) nel caso di  $SU(N)$ , oppure una matrice  $N \times N$  speciale ortogonale nel caso di  $SO(N)$ .

Questa è una trasformazione di simmetria globale, poichè i parametri  $\alpha_a$ , che compaiono in  $U = e^{i\alpha_a T^a}$ , sono costanti, cioè non dipendono dal punto nello spazio-tempo, e di conseguenza lo è anche la matrice.

Vogliamo generalizzare la costruzione della teoria di gauge  $U(1)$  a  $SU(N)$  o  $SO(N)$ . Consideriamo il caso di  $SU(N)$ , nel fare questo introduciamo la derivata covariante definita come

$$D_\mu = \partial_\mu - igW_\mu(x), \quad (4.75)$$

dove  $W_\mu(x)$  è il *potenziale di gauge* e  $g$  è una costante di accoppiamento che nel caso della teoria  $U(1)$  abbiamo identificato rispettivamente con il potenziale del campo elettromagnetico  $A_\mu(x)$  e con la carica elettrica  $e$ .

Il potenziale può essere sviluppato in termini dei generatori dell'algebra di Lie del gruppo

$$W_\mu(x) = W_\mu^a(x)T^a, \quad (4.76)$$

questa relazione definisce i campi  $W_\mu^a(x)$ . Dalla richiesta di covarianza

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = U(x)\psi(x) \quad (4.77)$$

$$D_\mu\psi(x) \longrightarrow D'_\mu\psi'(x) = U(x)D_\mu\psi(x) \quad (4.78)$$

otteniamo la legge di trasformazione del potenziale di gauge

$$W_\mu \longrightarrow W'_\mu(x) = U(x)W_\mu(x)U^{-1}(x) - \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^{-1}(x). \quad (4.79)$$

Osserviamo che nel caso  $U(1)$  ricaviamo la legge di trasformazione (4.61).

Le derivate covarianti in generale non commutano. Questo ci permette di definire il tensore *campo di forza* nel seguente modo

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu], \quad (4.80)$$

da cui

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu - ig[W_\mu, W_\nu] \quad (4.81)$$

dove il commutatore non si annulla come nella teoria di gauge  $U(1)$ , poichè  $W_\mu$  è una matrice. Il tensore del campo di forza si trasforma invece come

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow F'_{\mu\nu} = U(x)F_{\mu\nu}U^{-1}(x). \quad (4.82)$$

Costruiamo una lagrangiana che descriva la dinamica del campo  $W_\mu(x)$ . Il termine più semplice che possiamo costruire è il seguente

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\text{Tr}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) \quad (4.83)$$

che è gauge invariante e può servire come termine cinetico per un campo di gauge  $SU(N)$ . Notiamo che il campo di forza stesso non è gauge invariante a differenza di quanto si ha nella teoria di gauge  $U(1)$  dove abbiamo mostrato la gauge-invarianza del tensore del campo elettromagnetico.

Espandendo il potenziale e il campo di forza in termini dei generatori del gruppo

$$W_\mu(x) = W_\mu^a(x)T^a, \quad (4.84)$$

$$F_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}^a(x)T^a, \quad (4.85)$$

otteniamo

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + gf^{abc}W_\mu^b W_\nu^c. \quad (4.86)$$

I generatori possono essere normalizzati in modo tale da obbedire alla condizione

$$\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}, \quad (4.87)$$

per cui, da quest'ultima proprietà e dalla (4.85), riscriviamo la lagrangiana come

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{a\mu\nu}F_{\mu\nu}^a. \quad (4.88)$$

Notiamo che questa lagrangiana include le interazioni tra i potenziali di gauge. Una teoria di questo tipo, con costanti di struttura non nulle, è chiamata *teoria di gauge non abeliana* o *teoria di Yang-Mills*.

Quanto visto per  $SU(N)$  vale anche per  $SO(N)$  con le uniche sostituzioni di matrici unitarie e a traccia nulla con matrici ortogonali e simmetriche.

Ricaviamo le equazioni del moto attraverso il principio di minima azione applicato alla *lagrangiana di Yang-Mills* (4.88). Le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu W_\nu^a)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W_\nu^a} \quad (4.89)$$

dal termine sinistro otteniamo

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu W_\nu^a)} = -\partial_\mu F^{a\mu\nu}, \quad (4.90)$$

dalla quello di destra

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W_\nu^a} = gf^{abc}W_\mu^b F^{c\mu\nu}, \quad (4.91)$$

da cui l'equazione

$$\partial_\mu F^{a\mu\nu} = -gf^{abc}W_\mu^b F^{c\mu\nu}. \quad (4.92)$$

Nel calcolare questa equazione si è fatto uso della derivata ordinaria e non di quella covariante che garantisce la *gauge invarianza* delle equazioni. Possiamo riscriverla in termini della derivata covariante nel seguente modo

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{a\mu\nu} + gf^{abc}W_\mu^b F^{c\mu\nu} &= \\ \partial_\mu F^{a\mu\nu} - igW_\mu^b (T^b)^{ac} F^{c\mu\nu} &= \\ D_\mu F^{a\mu\nu} &= 0, \end{aligned} \quad (4.93)$$

in cui abbiamo usato la relazione  $(T^a)^{bc} = -if^{abc}$  valida per i generatori nella rappresentazione aggiunta.

Il tensore del campo di forza  $F_{\mu\nu}^a$  soddisfa l'*identità di Bianchi*

$$D_\mu F_{\nu\rho}^a + D_\nu F_{\rho\mu}^a + D_\rho F_{\mu\nu}^a = 0. \quad (4.94)$$

Alla lagrangiana di Yang-Mills può essere aggiunto un termine della forma

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1(\psi, D_\mu\psi), \quad (4.95)$$

che descrive i campi  $\psi$ , ottenendo

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{a\mu\nu}F_{\mu\nu}^a + \mathcal{L}_1(\psi, D_\mu\psi). \quad (4.96)$$

Questa è la forma generale della lagrangiana del Modello Standard che descrive le interazioni elettromagnetica, debole e forte. Ricaviamo le equazioni del moto come equazioni di Eulero-Lagrange

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu W_\nu^a)} = -\partial_\mu F^{a\mu\nu}, \quad (4.97)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W_\nu^a} = gf^{abc}W_\mu^b F^{c\mu\nu} + ig \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial (D_\mu W_\nu^a)} T^a \psi, \quad (4.98)$$

e uguagliando i due termini

$$D_\mu F^{a\mu\nu} = -ig \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial (D_\mu W_\nu^a)} T^a \psi. \quad (4.99)$$

Introducendo la corrente

$$J^{a\nu} = ig \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial (D_\mu W_\nu^a)} T^a \psi, \quad (4.100)$$

riscriviamo l'equazione precedente come

$$D_\mu F^{a\mu\nu} = -J^{a\nu}, \quad (4.101)$$

che interpretiamo come una generalizzazione dell'equazione di Maxwell in presenza di sorgenti al caso non abeliano. La generalizzazione dell'equazione in assenza di sorgenti deriva dall'identità di Bianchi che soddisfa il tensore del campo di forza.

La corrente  $j^{a\nu}$  soddisfa la legge di conservazione

$$D_\nu J^{a\nu} = 0, \quad (4.102)$$

conseguenza della proprietà

$$D_\nu D_\mu F^{a\mu\nu} = 0, \quad (4.103)$$

in analogia con quanto visto per il campo elettromagnetico.

Gli  $N$  campi liberi di massa  $m$  sono descritti dalla lagrangiana di Dirac

$$\mathcal{L}_{Dirac} = -\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi, \quad (4.104)$$

dove  $\psi$  è il vettore colonna (4.73) e  $\bar{\psi}$  è il vettore riga

$$\bar{\psi} = (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_N), \quad (4.105)$$

che si trasforma come

$$\bar{\psi}(x) \longrightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)U^\dagger = \bar{\psi}(x)U^{-1}, \quad (4.106)$$

dato che per matrici unitarie del gruppo  $SU(N)$  vale la proprietà  $U^\dagger = U^{-1}$ .

Come nel caso della teoria di gauge abeliana, questa lagrangiana è invariante per trasformazioni di simmetria globali del gruppo  $SU(N)$ , ma non per trasformazioni locali. Per costruire una lagrangiana gauge invariante basta sostituire la derivata ordinaria con la derivata covariante (4.75), ottenendo il termine

$$\mathcal{L}_1 = -\bar{\psi}(\gamma^\mu D_\mu + m)\psi, \quad (4.107)$$

che dipende anche dal potenziale di gauge  $W_\mu(x)$  contenuto in  $D_\mu$ . La lagrangiana totale è

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{a\mu\nu}F_{\mu\nu}^a - \bar{\psi}(\gamma^\mu D_\mu + m)\psi = -\frac{1}{4}F^{a\mu\nu}F_{\mu\nu}^a - \bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - igW_\mu^a T^a)\psi - m\bar{\psi}\psi, \quad (4.108)$$

il primo termine descrive la propagazione libera dei campi di gauge  $W_\mu^a$ . Il secondo termine descrive l'interazione dei campi  $\psi$  con i campi di gauge e il terzo termine descrive la propagazione libera dei campi  $\psi$ . Dalla lagrangiana ottenuta ricaviamo le equazioni per i campi

$$\begin{aligned} D_\mu F^{a\mu\nu} &= -ig\bar{\psi}\gamma^\nu T^a\psi = -J^{a\nu}, \\ (\gamma^\mu D_\mu + m)\psi &= 0. \end{aligned} \quad (4.109)$$

La prima equazione costituisce una generalizzazione al caso non abeliano delle equazioni di Maxwell in presenza di sorgenti, come già detto in precedenza. La seconda, invece, rappresenta la generalizzazione dell'equazione di Dirac, un'equazione d'onda relativistica per particelle di spin 1/2 con cariche non abeliane.

## 4.5 Equazioni di Wong

Usiamo ora le equazioni precedenti per estrarre le cosiddette equazioni di Wong, che descrivono equazioni classiche del moto di una particella puntiforme con carica non abeliana in presenza del corrispondente campo di gauge. Queste equazioni contengono la generalizzazione della forza di Lorentz. Nel lavoro originale [7] queste equazioni vennero formulate per il gruppo non abeliano  $SU(2)$ , ma le considerazioni che permettono di ricavarle possono essere facilmente generalizzate a qualsiasi gruppo di Lie  $SU(N)$ . Per estrarre queste equazioni classiche, studieremo l'hamiltoniana di Dirac vista come quantizzazione di una particella classica, estraendone il corrispondente modello classico.

Consideriamo l'interazione tra i campi di Yang-Mills  $W_\mu(x)$  e un campo di Dirac  $\psi(x)$  che si trasforma sotto una rappresentazione irriducibile di  $SU(N)$  in cui  $T^a$  sono i generatori del gruppo nella rappresentazione corrispondente.

Consideriamo la seconda delle equazioni (4.109) in cui sostituiamo la definizione di derivata covariante e introduciamo le costanti  $\hbar$  e  $c$  che per semplicità si erano poste uguali ad uno

$$\left( \gamma^\mu (\partial_\mu - igW_\mu^a T^a) + \frac{mc}{\hbar} \right) \psi(x) = 0. \quad (4.110)$$

Riscrivendo questa equazione in forma hamiltoniana, in modo analogo all'eq. (4.33), vediamo che l'hamiltoniana corrispondente accoppiata al campo non abeliano  $W_\mu^a$  risulta essere data da

$$\mathcal{H} = c\alpha_i (p_i - gW_i^a q^a) + mc^2\beta - gcW_4^a q^a, \quad (4.111)$$

in cui abbiamo introdotto i generatori  $q^a = \hbar T^a$  che soddisfano la relazione di commutazione

$$[q^a, q^b] = i\hbar f^{ab}_c q^c. \quad (4.112)$$

Nella rappresentazione di Heisenberg si ottengono le seguenti equazioni del moto

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}, x_i] = c\alpha_i, \quad (4.113)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}, p_i] = gc (\alpha_j \partial_i W_j^a + W_4^a) q^a, \quad (4.114)$$

$$\frac{dq^a}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}, q^a] = -gf^{abc} (W_i^b \dot{x}^i + cW_4^b) q^c = -gf^{abc} W_\mu^b q^c \dot{x}^\mu. \quad (4.115)$$

Introducendo il momento covariante

$$\pi_i = p_i - gW_i^a q^a, \quad (4.116)$$

troviamo l'equazione

$$\frac{d\pi_i}{dt} = g (F_{ij}^a \dot{x}^j + cF_{i4}^a) q^a = gF_{i\nu}^a \dot{x}^\nu q^a, \quad (4.117)$$

interpretabile ora anche classicamente. Questa equazione si può confrontare con l'equazione che descrive il moto di una particella carica in un campo elettromagnetico esterno. L'equazione che descrive il moto della particella nello-spazio tempo è

$$m\ddot{x}^\mu(\tau) = gF^{\mu\nu a}\dot{x}_\nu q^a(\tau), \quad (4.118)$$

in cui utilizziamo il tempo proprio  $\tau$  per parametrizzare la traiettoria della particella, e con il punto indichiamo una derivata rispetto al tempo proprio. Dal confronto di questa equazione con la (3.31) si osserva che il termine a destra rappresenta una generalizzazione della forza di Lorentz. Possiamo interpretare  $g$  come la costante d'accoppiamento e  $q^a$  come la carica non abeliana posseduta dalla particella. Nel caso elettromagnetico queste quantità si riducono a  $eq$ , con  $e$  costante d'accoppiamento (carica dell'elettrone) e  $q$  carica della particella in unità della carica dell'elettrone. Abbiamo descritto la carica  $q$  come numero intero (quantizzato) corrispondente ad una rappresentazione irriducibile di  $U(1)$ , e nel limite di  $q$  molto grande possiamo pensarlo come una carica macroscopica.

Dalla terza delle equazioni del moto ricavate in precedenza si ottiene

$$\dot{q}^a + gf^{abc}W_\mu^b q^c(\tau)\dot{x}^\mu = 0, \quad (4.119)$$

la quale mostra che una particella è descritta da un vettore di carica interno di componenti  $q^a$ , detto vettore di *isospin* nel caso di  $SU(2)$  o *carica di colore* per  $SU(3)$ , oltre che dalle coordinate spazio-temporali. Questa carica non abeliana non è costante, ma covariantemente costante

$$\dot{q}^a + gf^{abc}W_\mu^b q^c(\tau)\dot{x}^\mu = \dot{q}^a - ig\dot{x}^\mu W_\mu^b (T^b)^{ac} q^c(\tau) \equiv \frac{D}{d\tau} q^a = 0. \quad (4.120)$$

Questa equazione costituisce la generalizzazione al caso non abeliano dell'equazione di conservazione della carica elettrica nell'elettrodinamica  $\frac{d}{dt}e = 0$ . Quindi interpretiamo questa carica non abeliana come una rappresentazione irriducibile del gruppo  $SU(N)$ , che per grandi numeri quantici produce un vettore di isospin classico (non quantizzato, proprio come un momento angolare macroscopico).

Queste equazioni sono chiamate *equazioni di Wong*, che per completezza riscriviamo congiuntamente

$$m\ddot{x}^\mu(\tau) = gF^{\mu\nu a}\dot{x}_\nu q^a(\tau) \quad (4.121)$$

$$\frac{D}{d\tau} q^a = 0, \quad (4.122)$$

descrivono il moto di una particella relativistica con coordinate  $x^\mu$  e carica non abeliana di  $SU(N)$  definita dal vettore  $q^a$  quando sottoposta ad un campo di gauge non abeliano  $SU(N)$  descritto dal potenziale di gauge esterno  $W_\mu^a$  e relativo campo di forza  $F_{\mu\nu}^a$ . Queste equazioni generalizzano al caso non abeliano l'equazione del moto di una particella carica in campo elettromagnetico, con quest'ultimo che produce l'usuale forza di Lorentz.

Possiamo associare una densità di corrente al vettore di carica  $q^a$ , per una particella puntiforme, analoga alla densità di corrente elettrica (2.36)

$$J^{a\mu} = g \int q^a(\tau) \dot{\xi}^\mu \delta^4(x - \xi(\tau)) d\tau, \quad (4.123)$$

dove  $\xi(\tau)$  indica la traiettoria della particella parametrizzata dal tempo proprio e il punto indica una derivata rispetto al tempo proprio. Aver introdotto questa corrente ci permette di dedurre il limite classico anche della prima delle equazioni (4.109), che prendono la forma

$$D_\mu F^{a\mu\nu} = -J^{a\nu}, \quad (4.124)$$

dove la sorgente è data dalla carica non abeliana. Come conseguenza della (4.103) si ha

$$D_\nu J^{a\mu} = 0, \quad (4.125)$$

che mostra come anche la densità di corrente sia *covariantemente conservata*. Le equazioni di Wong congiunte alla (4.124) costituiscono un sistema di equazioni differenziali che descrive l'interazione tra i campi di Yang-Mills e una particella provvista di una carica non abeliana classica (l'isospin classico, ovvero l'isospin nel limite in cui i suoi numeri quantici siano grandi, proprio come nel limite classico del momento angolare).

Per concludere mostriamo come ricavare le equazioni di Wong tramite il principio di minima azione applicato ad una azione opportuna, come mostrato in [9], in cui si trovano maggiori dettagli sull'argomento.

Assumiamo che la particella sia descritta, oltre che dalle sue coordinate spaziotemporali  $x^\mu(\tau)$ , da un vettore di carica non abeliana  $q^a(\tau)$  (una carica di colore o un vettore di isospin) che interpretiamo come una rappresentazione irriducibile del gruppo, dipendente dal parametro  $\tau$  che parametrizza la traiettoria della particella e che identifichiamo con il tempo proprio. Consideriamo la seguente azione

$$\mathcal{S} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left( -m\sqrt{-\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu} + g\dot{x}^\mu q^a(\tau) W_\mu^a(x(\tau)) \right), \quad (4.126)$$

dove il punto rappresenta una derivata rispetto al tempo proprio e in cui sono presenti due termini: un termine di particella libera e un termine di interazione che descrive l'accoppiamento tra la carica non abeliana e il campo di gauge  $W_\mu(x(\tau))$ . Introducendo la corrente (4.123) il termine di interazione si può riscrivere come

$$\int d^4x \text{Tr}(J^\mu W_\mu). \quad (4.127)$$

Per una trasformazione di gauge infinitesima

$$\delta W_\mu^a = \partial_\mu \alpha^a + g f^{abc} W_\mu^b \alpha_c = \partial_\mu \alpha^a - ig W_\mu^b (T^b)^{ac} \alpha^c = (D_\mu \alpha)^a, \quad (4.128)$$

si ha

$$\delta \int d^4x \text{Tr} \{J^\mu W_\mu\} = \int d^4x \text{Tr} \{J^\mu D_\mu \alpha\} = - \int d^4x \text{Tr} \{(D_\mu J^\mu) \alpha\}. \quad (4.129)$$

Quindi, affinché l'azione sia gauge invariante è necessario che la corrente sia *covariantemente conservata*, cioè

$$(D_\mu J^\mu)^a = \int d\tau \frac{Dq^a}{d\tau} \delta^4(x - \xi(\tau)) = 0, \quad (4.130)$$

che è soddisfatta se

$$\frac{Dq^a}{d\tau} \equiv \dot{q}^a + g f^{abc} W_\mu^b q^c \dot{x}^\mu = 0. \quad (4.131)$$

Quindi  $J^\mu$  è covariantemente conservata se lo è la corrispondente carica non abeliana  $q^a(\tau)$ .

Le equazioni del moto, ottenute come equazioni di Eulero-Lagrange, ci danno

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = m \dot{x}_\mu + g q^a(\tau) W_\mu^a(x(\tau)), \quad (4.132)$$

che corrisponde al momento coniugato associato alla lagrangiana,

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = m \ddot{x}_\mu + g \dot{q}^a(\tau) W_\mu^a(x(\tau)) + g q^a(\tau) \dot{x}^\nu \partial_\nu W_\mu^a(x(\tau)), \quad (4.133)$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = g \dot{x}^\nu q^a(\tau) \partial_\mu W_\nu^a(x(\tau)). \quad (4.134)$$

Uguagliando le ultime due equazioni trovate, portando i termini contenenti il potenziale di gauge allo stesso membro, usando la (4.131) per riscrivere  $\dot{q}^a$  e ricordando la (4.86), si ottiene l'equazione

$$m \ddot{x}^\mu = g F^{\mu\nu a} \dot{x}_\nu q^a(\tau). \quad (4.135)$$

Le equazioni (4.135) e (4.131) sono le equazioni cercate, per cui valgono tutte le considerazioni fatte in precedenza e per costruzione sono invarianti per trasformazioni di gauge infinitesime.

# Conclusioni

Abbiamo visto l'importanza che ha avuto l'interazione elettromagnetica nella costruzione di teorie che fossero in grado di descrivere fenomeni fisici apparentemente diversi o addirittura apparentemente incompatibili. Il primo esempio di questo è stata la formulazione della teoria della relatività ristretta e, successivamente, la teoria quantistica, che dopo la sua formulazione fu testata sul campo elettromagnetico, ed in particolare nella teoria della QED. Dall'interpretazione della teoria elettromagnetica come teoria di gauge abeliana si è passati alla formulazione di teorie di gauge non abeliane che hanno permesso di descrivere teoricamente le interazioni debole e forte (cromodinamica quantistica (QCD)). Le teorie di gauge non abeliane, in particolare le teorie di Yang-Mills, hanno permesso la costruzione di teorie in grado di unificare queste interazioni fondamentali: la teoria elettrodebole, che unifica le interazioni elettromagnetica e debole, secondo la quale tali interazioni sono due aspetti di un'unica interazione fondamentale, l'interazione elettrodebole, costruita sulle teorie di Yang-Mills con gruppo di gauge non abeliano  $U(1) \times SU(2)$ , e, infine, il Modello Standard, comprendente anche la QCD, costruito utilizzando le teorie di Yang-Mills con gruppo di gauge  $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ .

Infine abbiamo visto come ricavare le equazioni del moto classiche per una particella puntiforme provvista di carica non abeliana e interagente con i campi di Yang-Mills. Queste equazioni, dette equazioni di Wong, costituiscono la generalizzazione, per gruppi non abeliani, dell'equazione della forza di Lorentz e dell'equazione di conservazione della carica elettrica dell'elettrodinamica, e mostrano come tutti i risultati e le leggi fisiche che hanno portato alla formulazione della teoria elettromagnetica restano validi ed emergono in maniera naturale dalla sua reinterpretazione come teoria di gauge, essendo questa un caso particolare di una teoria con proprietà più generali.

# Bibliografia

- [1] C. N. Yang, R. L. Mills, *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*, Phys. Rev. **96**, 191 (1954).
- [2] Maurizio Gasperini, *Manuale di Relatività Ristretta*, Springer-Verlag Italia 2010.
- [3] Lev D. Landau, Evgenij M. Lifšits, *Teoria dei campi*, Editori Riuniti Edizioni Mir, 1976.
- [4] John David Jackson, *Elettrodinamica Classica*, Zanichelli, 2001.
- [5] Fiorenzo Bastianelli, *Brevi Appunti sulla Teoria dei gruppi, per il corso di Fisica Nucleare e Subnucleare*, Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Bologna, 2016.
- [6] Fiorenzo Bastianelli, *Teorie di gauge, Appunti per il corso di Teoria dei Campi*, Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Bologna, 2010.
- [7] S. K. Wong, *Field and Particle Equations for the Classical Yang-Mills Field and Particles with Isotopic Spin*, Institute for Theoretical Physics State University of New York - Stony Brook. N. Y., 1970.
- [8] Mark Srednicki, *Quantum Field Theory*, <http://web.physics.ucsb.edu/~mark/qft.html>.
- [9] Herbert Balasin, Daniel Blaschke, François Gieres, Manfred Schweda, *Wong's Equations and Charge Relativistic Particles in Non-Commutative Space*, <https://arxiv.org/pdf/1403.0255.pdf>.