

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

**Analisi del raffreddamento
evaporativo per la condensazione di
Bose-Einstein di una miscela atomica**

Relatore:
Prof. Francesco Minardi

Presentata da:
Daniel Caproni

Correlatore:
Prof.ssa Elisa Ercolessi

Anno Accademico 2017-2018

Indice

1	Gas di bosoni non interagenti	5
1.1	Condizioni per la formazione del condensato di Bose-Einstein .	6
1.2	Profilo di densità e distribuzione di velocità	9
1.2.1	La distribuzione semi-classica	12
1.3	Espansione libera	14
2	Trappole ottiche e magnetiche per atomi freddi	17
2.1	Raffreddamento atomi	17
2.2	Trappole magnetiche	18
2.2.1	Trappola di quadrupolo	19
2.2.2	Teorema adiabatico	21
2.3	Trappole ottiche	23
2.4	Raffreddamento per evaporazione	24
3	Evaporazione di una miscela di Rubidio e Potassio	29
3.1	Vita media degli atomi di ^{41}K	30
3.2	Fenomeni fisici	38
3.3	Evoluzione della temperatura	43
3.4	Conclusioni	45

Introduzione

All'inizio del XX secolo il fisico tedesco Max Planck formulò la legge di radiazione del corpo nero, detta anche 'legge di Planck' in suo onore, secondo la quale l'energia associata a una radiazione elettromagnetica è trasmessa in pacchetti discreti chiamati "quanti", ciascuno dei quali è associato ad un singolo fotone. Nel 1924, il fisico S.N. Bose della Dacca University in India inviò ad Einstein un articolo nel quale mostrava come fosse possibile ricavare la legge di Planck tramite argomentazioni puramente statistiche, senza usufruire dei concetti legati all'elettrodinamica classica. Einstein ne rimase impressionato e tradusse il manoscritto dall'inglese al tedesco (all'epoca lingua più utilizzata nell'ambito scientifico). Capendo la portata di tale risultato Einstein ampliò l'idea di Bose alle particelle massive. L'esito di tale lavoro fu il concetto di un cosiddetto gas di Bose, governato dalla statistica di Bose-Einstein, la quale descrive la distribuzione statistica di particelle identiche con spin intero che attualmente chiamiamo "bosoni". Einstein ipotizzò che, ammettendo la conservazione del numero di particelle, anche un sistema non interagente di particelle esibisce una brusca transizione di fase a temperature sufficientemente basse. Tale transizione è definita come condensazione di Bose-Einstein. Questa è caratterizzata da un'occupazione macroscopica dello stato energetico più basso a temperatura finita per un sistema costituito da molte particelle. Ne conseguiva che un sistema costituito da particelle quantomeccaniche avrebbe dovuto comportarsi come un unico corpo quantomeccanico su scala macroscopica. Nel 1938 Fritz London propose la condensazione di Bose-Einstein come meccanismo responsabile per

il fenomeno della superfluidità (verificatasi sperimentalmente all'epoca per l'elio-4 ^4He) e della superconduttività. Dopo lo sviluppo del raffreddamento laser e delle prime trappole ottiche negli anni '60 e '70, crebbe l'interesse nella realizzazione del condensato di Bose-Einstein in un sistema diluito di atomi gassosi. Fu così che il 5 giugno 1995 il team di ricercatori guidato da Eric Cornell e Carl Wieman nel laboratorio NIST-JILA dell'università del Colorado creò il primo condensato di Bose-Einstein composto da atomi di Rubidio, raggiungendo una temperatura pari a 170 nK. Poco dopo anche il gruppo di ricerca del fisico Wolfgang Ketterle al MIT raggiunse la condensazione, dimostrando importanti proprietà di un condensato. Nel 2001 Cornell, Wieman e Ketterle ricevettero il premio Nobel per la fisica grazie agli straordinari risultati ottenuti.

Questa tesi ha lo scopo di esporre alcuni risultati di ricerca riguardanti un esperimento svoltosi nel laboratorio LENS dell'Università di Firenze, dove si studia la condensazione di Bose-Einstein per una miscela di gas composta da Rubidio-87 (^{87}Rb) e Potassio-41 (^{41}K).

Nel capitolo 1 verranno esposti alcuni concetti matematici necessari per la descrizione della BEC. Verranno ricavate le condizioni necessarie affinché possa verificarsi la condensazione attraverso un approccio semi-classico.

Nel capitolo 2 verrà curato un aspetto più sperimentale, ovvero le trappole magnetiche ed ottiche impiegate per l'intrappolamento degli atomi. Verrà esposto il processo di raffreddamento ponendo particolare attenzione al processo di evaporazione (processo ultimo di raffreddamento).

Nel capitolo 3 saranno riportati i dati sperimentali ed i calcoli effettuati su di essi. Verrà studiato il raffreddamento simpatetico attraverso le equazioni di rate delle popolazioni presenti nel condensato. Infine si riporterà il procedimento per la formulazione di un'equazione per la temperatura dentro la trappola durante il processo di evaporazione.

Capitolo 1

Gas di bosoni non interagenti

In questo primo capitolo si andrà a studiare le condizioni necessarie affinché sia possibile il fenomeno della condensazione di Bose-Einstein in tre dimensioni, ponendo particolare attenzione al caso in cui sia presente un potenziale armonico anisotropo poiché quest'ultimo viene utilizzato negli esperimenti in modo da poter creare una trappola per i bosoni che andranno poi a formare il condensato.

Verrà calcolata successivamente la temperatura massima a cui si verifica la condensazione di Bose, detta temperatura di transizione, sia nel caso di potenziale armonico che in assenza di potenziale.

In seguito si parlerà del profilo di densità e della distribuzione di velocità poiché, essendo fattori misurabili, permettono lo studio indiretto del condensato.

Sperimentalmente, dopo la formazione del condensato avviene una parte di espansione libera grazie allo spegnimento della trappola armonica. Si vedrà quindi, infine, come varia la densità in seguito all'espansione della nube di particelle confrontandola con il caso classico dell'espansione libera di un gas a temperature molto più elevate rispetto alla temperatura di transizione.

1.1 Condizioni per la formazione del condensato di Bose-Einstein

In questa prima sezione analizzeremo, da un punto di vista matematico, quali sono le condizioni necessarie affinché vi possa essere la formazione di un condensato di Bose-Einstein. Trascureremo i gradi di libertà interni delle particelle, in questo caso specifico lo spin degli atomi [12]. Per tutta questa trattazione, inoltre, ci poniamo nel limite termodinamico (LT), ovvero nel limite $N \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$ e $\frac{N}{V} < \infty$.

Sappiamo che i bosoni sono particelle aventi spin intero e funzione d'onda simmetrica; ciò comporta che un numero arbitrario di particelle di questo tipo possano occupare lo stesso stato quantico. La funzione di occupazione per i bosoni assume la seguente forma:

$$f(\epsilon_\alpha) = \frac{1}{e^{(\epsilon_\alpha - \mu)/k_B T} - 1} \quad (1.1)$$

dove ϵ_α sono i livelli energetici, μ il potenziale chimico (parametro dovuto al vincolo di conservazione del numero totale di particelle), mentre $k_B T$ il prodotto tra la costante di Boltzmann e la temperatura che d'ora in avanti indicheremo come $1/\beta$. La popolazione di un certo livello α è data dalla relazione:

$$n_\alpha = \frac{g_\alpha}{e^{\beta(\epsilon_\alpha - \mu)} - 1} \quad (1.2)$$

con g_α molteplicità del livello energetico α . Il numero totale di bosoni N perciò risulta semplicemente:

$$N = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{g_\alpha}{e^{\beta(\epsilon_\alpha - \mu)} - 1} = n_0(T) \left[1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{g_\alpha}{g_0} e^{-\beta\epsilon_\alpha} \frac{1 - e^{\beta\mu}}{1 - e^{\beta(\epsilon_\alpha - \mu)}} \right] \quad (1.3)$$

da cui si nota che $\lim_{T \rightarrow 0} n_0 = N$ ovvero, tutti i bosoni finiscono allo stato fondamentale per $T \rightarrow 0$ dato che $\mu \leq 0$.

Supponiamo ora di fare il limite del continuo (LC) prima di fare il limite per $T \rightarrow 0$. Partendo dalla densità di stati $g(\epsilon)$ definiamo $\hat{g}(\epsilon) \equiv g(\epsilon)/N$, funzione invariante nel limite termodinamico. In tal caso, la frazione di bosoni con energia minore di un certo valore Δ sarà data da:

$$\begin{aligned}\rho(T, \Delta) &= \int_0^\Delta \frac{\hat{g}(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} d\epsilon \leq \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_\xi^\Delta \frac{\hat{g}(\epsilon)}{e^{\beta\epsilon} - 1} d\epsilon \\ &\leq k_B T \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_\xi^\Delta \frac{\hat{g}(\epsilon)}{\epsilon} d\epsilon = k_B T \lim_{\xi \rightarrow 0} f(\Delta, \xi)\end{aligned}\quad (1.4)$$

Inoltre

$$1 = \int_0^\infty \frac{\hat{g}(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} d\epsilon \quad (1.5)$$

Tali disuguaglianze seguono dal fatto che $\mu \leq 0$ ed $e^{\beta\epsilon} - 1 \geq \epsilon$ per $\epsilon \geq 0$. Si nota che, nel caso in cui

$$f(\Delta, 0) < \infty \quad (1.6)$$

le disuguaglianze precedenti portano al risultato $\lim_{T \rightarrow 0} \rho(T, \Delta) = 0$ per ogni Δ : ciò significherebbe che i bosoni a $T = 0$ spariscono, un fatto fisicamente impossibile. Tale risultato porta alla conclusione che, nel limite del continuo, non si prende in considerazione lo stato fondamentale, il quale può contenere un numero arbitrario di bosoni seppur la sua molteplicità g_0 sia finita. Se si considera inoltre la funzione

$$F(\beta) = \int_0^\infty \frac{\hat{g}(\epsilon)}{e^{\beta\epsilon} - 1} d\epsilon \quad (1.7)$$

si verifica che essa assume valori finiti per ogni β reale e positivo. Per di più $F(\beta)$ risulta monotona decrescente ed assume i valori $\lim_{\beta \rightarrow 0} F(\beta) = \infty$ e $\lim_{\beta \rightarrow \infty} F(\beta) = 0$. Ne segue che esiste un unico valore β_C tale che $F(\beta_C) = 1$. Confrontando tale risultato con la relazione (1.5) si trova che $\mu(T_C) = 0$ e, sapendo che $\mu \leq 0$ e $\frac{\partial \mu}{\partial T} \leq 0$, si ha anche che $\mu(T) = 0$ per ogni $T < T_C$. Avviene quindi una transizione brusca in corrispondenza della temperatura T_C da $\mu < 0$ per $T > T_C$ a $\mu = 0$ per $T < T_C$: questo processo critico viene nominato Condensazione di Bose-Einstein. La temperatura T_C viene detta temperatura di transizione e corrisponde alla massima temperatura alla quale esiste il condensato. Concludiamo quindi che la condizione (1.6) risulta essere necessaria e sufficiente per la formazione del condensato di Bose-Einstein.

L'informazione sullo stato di energia minima, ignorata dalla condizione (1.4), può essere recuperata introducendo la popolazione dello stato fondamentale come elemento aggiuntivo. Scriveremo quindi:

$$N = n_0 + N \int_0^\infty \frac{\hat{g}(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} d\epsilon \quad (1.8)$$

dove

$$n_0 = \rho_0 N = \frac{g_0}{e^{-\beta\mu} - 1} \quad (1.9)$$

poiché si ha in buona approssimazione che $\epsilon_0 = 0$. Quest'ultima relazione mostra che, per $\mu < 0$, ovvero quando $T > T_C$, n_0 assume un valore finito, il quale, nel LT ($N \rightarrow \infty$), tende a 0. La relazione (1.8) diventa quindi un'equazione in μ :

$$\rho_0 = 0; \quad 1 = \int_0^\infty \frac{\hat{g}(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} d\epsilon \quad (1.10)$$

Mentre, quando $\mu = 0$, per $T \leq T_C$, la popolazione del condensato diverge estensivamente e si ottiene un'equazione per ρ_0 :

$$\mu = 0; \quad \rho_0 = 1 - \int_0^\infty \frac{\hat{g}(\epsilon)}{e^{\beta\epsilon} - 1} d\epsilon \quad (1.11)$$

Vogliamo ora calcolare la temperatura di transizione e la frazione del condensato nel caso tridimensionale. Distinguiamo due casi:

- particella libera confinata in un volume V . In tal caso la densità di stati risulta essere

$$g(\epsilon) = \frac{Vm^{3/2}}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3}\epsilon^{1/2} \quad (1.12)$$

In generale, nel caso d dimensionale si ha $g(\epsilon) \propto \epsilon^{\frac{d}{2}-1}$.

- particella soggetta ad un potenziale armonico anisotropo. Avremo

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(K_1x^2 + K_2y^2 + K_3z^2) \quad (1.13)$$

che chiameremo trappola armonica. K_i sono tre forze costanti, in generale diverse fra di loro. Le corrispettive frequenze di oscillazione classica saranno legate da $\omega_i^2 = K_i/m$. Questo ci permette di riscrivere il potenziale come

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m(\omega_1^2x^2 + \omega_2^2y^2 + \omega_3^2z^2) \quad (1.14)$$

a cui corrispondono i livelli energetici

$$\epsilon(n_1, n_2, n_3) = (n_1 + \frac{1}{2})\hbar\omega_1 + (n_2 + \frac{1}{2})\hbar\omega_2 + (n_3 + \frac{1}{2})\hbar\omega_3 \quad (1.15)$$

con n_i numeri quantici interi non negativi. Sotto l'azione del potenziale armonico la densità di stati diventa

$$g(\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{2\hbar^3\omega_1\omega_2\omega_3} \quad (1.16)$$

Notiamo che in generale la densità di stati assume un andamento

$$g(\epsilon) = C_\alpha \epsilon^{\alpha-1}$$

dove $\alpha = 3/2, 3$ rispettivamente al primo e secondo caso elencati sopra. In entrambe le situazioni si ha che la condizione (1.6) risulta soddisfatta, ammettendo quindi la formazione del condensato. Partendo dall'equazione (1.5) calcolata in $T = T_C$, quindi con $\mu = 0$, si trova in generale che:

$$k_B T_C = \left(\frac{N}{C_\alpha \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha)} \right)^{1/\alpha} \quad (1.17)$$

dove $\Gamma(\alpha)$ è la funzione gamma di Eulero e $\zeta(\alpha)$ è la funzione zeta di Riemann. Inoltre, si ha che la frazione di bosoni nel condensato risulta

$$\rho_0 = 1 - \left(\frac{T}{T_C} \right)^\alpha, \quad T \leq T_C \quad (1.18)$$

1.2 Profilo di densità e distribuzione di velocità

Sperimentalmente risulta difficoltoso studiare la nube fredda di atomi a temperature così basse a causa del piccolo numero di particelle presenti (circa $10^4 - 10^8$ atomi), della condizione metastabile del sistema che quindi non può portarsi all'equilibrio con altri corpi, e della breve durata di questa configurazione che può variare da qualche secondo a qualche minuto di vita. Tuttavia

alcune quantità misurabili sono il profilo di densità e la distribuzione di velocità.

Un modo per studiare il profilo di densità è attraverso l'assorbimento di una luce risonante dopo lo spegnimento della trappola armonica; a questo procedimento si aggiunge un altro metodo, il quale si basa sul fenomeno della rifrazione della luce che, attraversando il mezzo (la nube), intraprende un percorso diverso rispetto ad un raggio di riferimento creando quindi un fenomeno di interferenza. Questo approccio permette anche di studiare l'evoluzione temporale usando sempre una singola nube.

Nel livello fondamentale, tutti gli atomi del condensato si trovano al livello energetico più basso, quindi la distribuzione di densità sarà data dalla forma della funzione d'onda $\phi_0(\mathbf{r})$ allo stato fondamentale di una particella all'interno della trappola armonica [18].

$$n(\mathbf{r}) = N|\phi_0(\mathbf{r})|^2 \quad (1.19)$$

Nel caso di un oscillatore armonico anisotropo la funzione d'onda dello stato fondamentale risulta

$$\phi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi^{3/4}(a_x a_y a_z)^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{2a_x^2}} e^{-\frac{y^2}{2a_y^2}} e^{-\frac{z^2}{2a_z^2}} \quad (1.20)$$

dove

$$a_i^2 = \frac{\hbar}{m\omega_i} \quad i = x, y, z$$

La distribuzione delle particelle dopo la rimozione del vincolo non dipende solo dalla distribuzione di densità iniziale, ma anche dalla distribuzione di velocità iniziale delle particelle. È importante quindi conoscere la funzione d'onda corrispondente nello spazio degli impulsi, ottenibile facendo la trasformata di Fourier alla funzione (1.20).

$$\phi_0(\mathbf{p}) = \frac{1}{\pi^{3/4}(c_x c_y c_z)^{1/2}} e^{-\frac{p_x^2}{2c_x^2}} e^{-\frac{p_y^2}{2c_y^2}} e^{-\frac{p_z^2}{2c_z^2}} \quad (1.21)$$

dove

$$c_i = \hbar/a_i = \sqrt{m\hbar\omega_i}$$

Possiamo quindi scrivere la densità nello spazio degli impulsi

$$n(\mathbf{p}) = N|\phi_0(\mathbf{p})|^2 = \frac{N}{\pi^{3/2}c_x c_y c_z} e^{-\frac{p_x^2}{c_x^2}} e^{-\frac{p_y^2}{c_y^2}} e^{-\frac{p_z^2}{c_z^2}} \quad (1.22)$$

la quale assume la forma di una distribuzione Maxwelliana con diverse "temperature" $T_i = \hbar\omega_i/2k_B$ per le tre direzioni. Poiché la distribuzione spaziale è anisotropa, anche la distribuzione degli impulsi dipenderà dalla direzione. Per il principio di indeterminazione di Heisenberg se la nuvola spaziale è molto stretta, quella degli impulsi risulterà molto larga e viceversa.

Possiamo confrontare tale risultato con il caso di un gas che segue una statistica classica, ovvero quando la temperatura risulta nettamente al di sopra della temperatura di transizione T_C . La distribuzione di densità sarà proporzionale a $e^{-V(\mathbf{r})/k_B T}$ ed uguale a

$$n(\mathbf{r}) = \frac{N}{\pi^{3/2}R_x R_y R_z} e^{-\frac{x^2}{R_x^2}} e^{-\frac{y^2}{R_y^2}} e^{-\frac{z^2}{R_z^2}} \quad (1.23)$$

con

$$R_i^2 = \frac{2k_B T}{m\omega_i^2}$$

Si nota che in questo caso vi è una dipendenza dalla temperatura, a differenza dalla relazione (1.20). Inoltre si verifica, sotto condizioni sperimentali tipiche, che

$$\frac{R_i}{a_i} = \left(\frac{2k_B T}{\hbar\omega_i} \right)^{1/2} \gg 1 \quad (1.24)$$

Possiamo quindi concludere che la nuvola termica è molto più larga del condensato, il quale, sotto la temperatura di transizione, appare come un picco molto stretto nella distribuzione spaziale.

Sopra la temperatura T_C la densità $n(\mathbf{p})$ nello spazio degli impulsi assume la forma

$$n(\mathbf{p}) = C e^{-\frac{p^2}{2mk_B T}} \quad (1.25)$$

con C costante indipendente da \mathbf{p} . Tale densità risulta quindi isotropa all'equilibrio poiché determinata univocamente dalla temperatura e dalla massa delle particelle. Notiamo che la larghezza della distribuzione degli impulsi è

dell'ordine di $(mk_B T)^{1/2}$ che è circa $(k_B T/\hbar\omega_i)^{1/2}$ volte $c_i = (m\hbar\omega_i)^{1/2}$. Per $T \sim T_C$, $k_B T \sim N^{1/3}\hbar\omega_i$ quindi $(k_B T/\hbar\omega_i)^{1/2}$ sarà $\propto N^{1/6}$. Concludiamo quindi che anche la distribuzione della velocità della nuvola termica risulta molto più larga di quella del condensato. Nei primi esperimenti fu proprio l'anisotropia della nube dopo l'espansione a provare l'esistenza del condensato di Bose-Einstein.

Le dimensioni del condensato possono essere influenzate anche dall'interazione reciproca fra gli atomi portando un fattore correttivo che dipende dal potenziale interatomico (attrattivo o repulsivo) e dal numero di particelle presenti. Al di fuori del condensato, per temperature superiori alla temperatura di transizione, la nube è meno densa per cui queste interazioni non influenzano significativamente le dimensioni di quest'ultima.

1.2.1 La distribuzione semi-classica

Da un punto di vista quanto-meccanico, la densità di bosoni non interagenti è data da

$$n(\mathbf{r}) = \sum_{\nu} f_{\nu} |\phi_{\nu}(\mathbf{r})|^2 \quad (1.26)$$

dove f_{ν} è la funzione di occupazione per lo stato ν , al quale corrisponde la funzione d'onda $\phi_{\nu}(\mathbf{r})$. Tuttavia, questa descrizione risulta svantaggiosa poichè necessita della conoscenza delle funzioni d'onda per la trappola di potenziale usata. Si fa uso quindi di un approccio semi-classico, il quale richiede però come condizione che la lunghezza d'onda di De Broglie della particelle sia piccola rispetto alla scala di lunghezza per la quale il potenziale varia in modo significativo. In tal caso si prende in considerazione la funzione di distribuzione semi-classica $f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ la quale rappresenta l'occupazione media di un stato quantico.

$$f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})-\mu)} - 1}, \quad (1.27)$$

(questa formula è valida all'equilibrio).

L'energia delle particelle in questo caso è quella di una particella libera

classica nel punto \mathbf{r}

$$\epsilon_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \quad (1.28)$$

dove $V(\mathbf{r})$ è il potenziale esterno. Nel caso semi-classico, il numero di stati quantici contenuti in un volumetto $d\mathbf{p}d\mathbf{r}$ dello spazio delle fasi è dato da $f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})d\mathbf{p}d\mathbf{r}/(2\pi\hbar)^3$. Questa descrizione, tuttavia, non risulta appropriata per le particelle allo stato fondamentale, mentre risulta adeguata per le particelle negli stati eccitati. Consideriamo quindi, ora, la densità di particelle al di fuori del condensato.

$$n_{ex}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{d\mathbf{p}}{e^{\beta(\epsilon_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})-\mu)} - 1} \quad (1.29)$$

Tale integrale può essere risolto tramite il cambio di variabile $x = p^2/2mk_B T$ e definendo la quantità

$$z(\mathbf{r}) = e^{\beta[\mu-V(\mathbf{r})]} \quad (1.30)$$

Espandendo in serie di potenze di z si trova che l'integrale converge a $\Gamma(\gamma)g_\gamma(z)$ con

$$g_\gamma(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\gamma} \quad (1.31)$$

Si nota che per $z = 1$, $g_\gamma(1) = \zeta(\gamma)$ in accordo con quanto già visto in precedenza: si ritrova cioè il caso del condensato.

In conclusione quindi, in questo caso specifico con $\gamma = 3/2$, otteniamo che

$$n_{ex}(\mathbf{r}) = \frac{g_{3/2}(z(\mathbf{r}))}{\lambda_T^3} \quad (1.32)$$

dove viene esplicitata la dipendenza dalla lunghezza d'onda termica di De Broglie convenzionalmente definita come

$$\lambda_T = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T} \right)^{1/2} \quad (1.33)$$

Infine si nota anche che, fermandosi al primo termine dell'espansione in serie, viene recuperato anche il caso classico della distribuzione di Boltzmann.

1.3 Espansione libera

Come già detto in precedenza, l'anisotropia della nube dopo l'espansione fu un'evidenza dell'esistenza del condensato di Bose-Einstein. Analizziamo quindi l'espansione libera di una nube di bosoni non interagenti inizialmente intrappolati in un potenziale armonico anisotropo.

Mettiamo a confronto il comportamento di un condensato puro con quello di un gas classico a temperature molto superiori alla temperatura di transizione. In quest'ultimo caso limite si ha come funzione di distribuzione all'equilibrio

$$f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = e^{\beta(\mu - \epsilon_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}))} \quad (1.34)$$

Prima che il potenziale venga spento, l'energia è data quindi da

$$\epsilon_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2) \quad (1.35)$$

Quando il gas è libero di espandersi, le particelle seguono le equazioni del moto

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{p}/m; \quad \dot{\mathbf{p}} = 0 \quad (1.36)$$

dove il punto rappresenta una derivata rispetto al tempo. Considerando come $t = 0$ il momento in cui il potenziale viene spento, la distribuzione a tempi successivi è determinata dalla relazione

$$f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) = e^{\beta\mu} e^{-\beta[p^2/2m + V(\mathbf{r} - \mathbf{p}t/m)]} \quad (1.37)$$

dalla quale si ottiene la densità integrando sugli impulsi

$$n(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) \quad (1.38)$$

il quale risulta essere il prodotto di integrali gaussiani

$$n(\mathbf{r}, t) = e^{\beta\mu} \frac{1}{\lambda_T^3} \prod_i (1 + \omega_i^2 t^2)^{-1/2} e^{-m\omega_i^2 r_i^2 / 2k_B T (1 + \omega_i^2 t^2)} \quad (1.39)$$

con $i = x, y, z$ corrispondente ai tre assi cartesiani. Si può notare come l'anisotropia della distribuzione iniziale sia determinata dalla frequenza dell'oscillatore, mentre a tempi molto più grandi di $1/\omega_i$ la densità diviene isotropa

con la larghezza determinata dal prodotto fra la velocità termica ed il tempo $(2k_B T/m)^{1/2}t$.

Consideriamo ora il caso dell'espansione di un condensato di Bose-Einstein. La funzione d'onda della singola particella al tempo $t = 0$ è data dalla relazione (1.21). Agli istanti successivi l'evoluzione temporale della funzione d'onda è determinata dall'equazione di Schrödinger per una particella libera, il che comporta l'aggiunta di un fattore moltiplicativo $e^{-ip^2 t/2m\hbar}$ alla funzione d'onda iniziale (1.21). La funzione d'onda $\phi(\mathbf{r}, t)$ quindi si otterrà facendo

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \phi_0(\mathbf{p}) e^{-ip^2 t/2m\hbar} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \quad (1.40)$$

che risulta essere

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\pi^{3/4}} \prod_i a_i^{-1/2} (1 + i\omega_i t)^{-1/2} e^{-r_i^2/[2a_i^2(1+i\omega_i t)]} \quad (1.41)$$

L'anisotropia della densità è proporzionale a $|\phi(\mathbf{r}, t)|^2$, da cui, quindi, si può vedere il drastico cambiamento dopo l'espansione. A $t = 0$ la larghezza della nuvola nella i -esima direzione è data dal termine $a_i = (\hbar/m\omega_i)^{1/2}$, mentre per un tempo sufficientemente grande, la larghezza nella medesima direzione è data dal fattore $a_i\omega_i t = (\hbar\omega_i/m)^{1/2}t$. Il condensato quindi si espande al trascorrere del tempo.

Capitolo 2

Trappole ottiche e magnetiche per atomi freddi

In questo capitolo vedremo come possono essere intrappolati atomi freddi attraverso l'uso di campi magnetici e campi laser. Tratteremo, in un primo momento, il processo di raffreddamento in maniera riassuntiva per poi analizzare con più accuratezza le trappole magnetiche, in particolare le trappole di quadrupolo. Affronteremo in seguito il fenomeno del raffreddamento in condizioni di adiabaticità e le conseguenze della rottura di tale condizione. Verranno trattate anche le trappole ottiche, create con un campo laser. Infine verrà descritto brevemente anche il processo di evaporazione, step finale del raffreddamento necessario per raggiungere le temperature tipiche per la condensazione di Bose-Einstein.

2.1 Raffreddamento atomi

Tipicamente, in un esperimento per la formazione di un condensato di Bose-Einstein, si parte da un vapore atomico la cui temperatura dipende dal tipo di atomo. Il primo passo del raffreddamento avviene tramite l'uso di laser, anche in combinazione con campi magnetici come nella trappola magneto-ottica. Le temperature sorprendentemente basse raggiunte con il

raffreddamento laser, dell'ordine di decine di microkelvin, tuttavia non sono sufficienti per poter creare un condensato. Una seconda tecnica quindi necessaria è l'evaporazione. Tale metodo sfrutta il fenomeno per cui le particelle ad energia più alta fuoriescono dal potenziale confinante, proprio come avviene in una tazza di tè. Abbassando, perciò, in maniera controllata la profondità della trappola si riesce a rimuovere le particelle con energia maggiore diminuendo in questo modo l'energia media delle particelle intrappolate, ovvero abbassando la temperatura fino a valori inferiori a 1 microkelvin.

2.2 Trappole magnetiche

L'intrappolamento magnetico di atomi neutri avviene grazie all'effetto Zeeman ¹ [11]: poichè l'energia di un determinato stato atomico dipende dal campo magnetico esterno, un atomo immerso in un campo magnetico non uniforme risente di un potenziale variabile nello spazio. Assumiamo che fra l'energia di uno stato e il campo magnetico applicato vi sia una dipendenza lineare (ipotesi vera in alcuni casi, mentre, in altri, risulta essere comunque una buona approssimazione). Scriveremo allora come equazione per l'energia di un atomo nello stato i -esimo:

$$E_i = C_i + \mu_i B \quad (2.1)$$

dove C_i è una costante e μ_i il momento magnetico dello stato. Il potenziale generato dal campo B risulta essere $-\mu_i B$: se il momento magnetico è positivo, allora l'atomo risente di una forza che lo spinge nella zona di potenziale maggiore (*high-field seekers*) mentre, se il momento magnetico risulta negativo, allora l'atomo sarà spinto verso le zone di minimo del campo (*low-field seekers*). La profondità della buca di potenziale è data da $\mu_i B$ e, poichè i campi magnetici in laboratorio sono minori di 1 tesla e i momenti magnetici

¹L'effetto Zeeman consiste nella separazione delle linee spettrali a causa di un campo magnetico esterno che interagisce con i momenti angolari e di spin dell'atomo stesso. La separazione in energia dovuta al campo esterno è data dalla semplice equazione $\Delta E = g_F m_F \mu_B B$, dove g_F è il fattore di Landè e μ_B il magnetone di Bohr.

dell'atomo sono dell'ordine del magnetone di Bohr, si ha che la profondità della trappola è molto più piccola del grado kelvin, motivo per il quale gli atomi devono essere raffreddati prima di riuscire ad essere intrappolati in una trappola magnetica. Come detto in precedenza, gli atomi in presenza del campo B risentiranno di una forza che tende a portarli nelle zone di massimo o di minimo del campo. Tuttavia, si può dimostrare che non si possono avere massimi locali di B nelle regioni in cui non ci sono correnti elettriche. Ne segue che, in una regione lontana da correnti elettriche, si possono avere trappole solo per atomi *low-field seekers*. Possiamo infine dividere in due classi le configurazioni di campo con un minimo in B :

- configurazione con minimo di campo in zero (esp. trappola di quadrupolo)
- configurazione con minimo di campo diverso da zero (esp. trappola di Ioffe-Pritchard)

Affrontiamo ora in maniera più dettagliata il primo di questi casi.

2.2.1 Trappola di quadrupolo

Come anticipato, un esempio piuttosto semplice di una configurazione del campo magnetico con $B = 0$ in un certo punto è proprio la trappola di quadrupolo. Tale campo si ottiene grazie a due bobine poste ad una determinata distanza una dall'altra e percorse da corrente in senso reciprocamente opposto (bobine di Helmholtz). In questo caso si ha che il campo magnetico varia linearmente al variare della distanza in tutte le direzioni.

Consideriamo l'asse z come asse di simmetria. Se indichiamo con B' il gradiente del campo lungo x e y , allora, per l'equazione di Maxwell $\nabla \mathbf{B} = 0$, avremo che la componente lungo z dovrà essere pari a $-2B'$. In prossimità dell'origine, che scegliamo essere il punto di minimo del campo, avremo

$$\mathbf{B} = B'(x, y, -2z) \tag{2.2}$$

Il modulo del campo magnetico $B = B'(x^2 + y^2 + 4z^2)^{1/2}$ varia linearmente con la distanza dal punto di minimo ma la pendenza dipende dalla direzione. Il potenziale creato dal campo magnetico sarà dato da

$$U = \mu B = \mu B' \sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2} \quad (2.3)$$

dove μ è il momento di dipolo magnetico dell'atomo, che supponiamo essere allineato al campo \mathbf{B} ovunque.

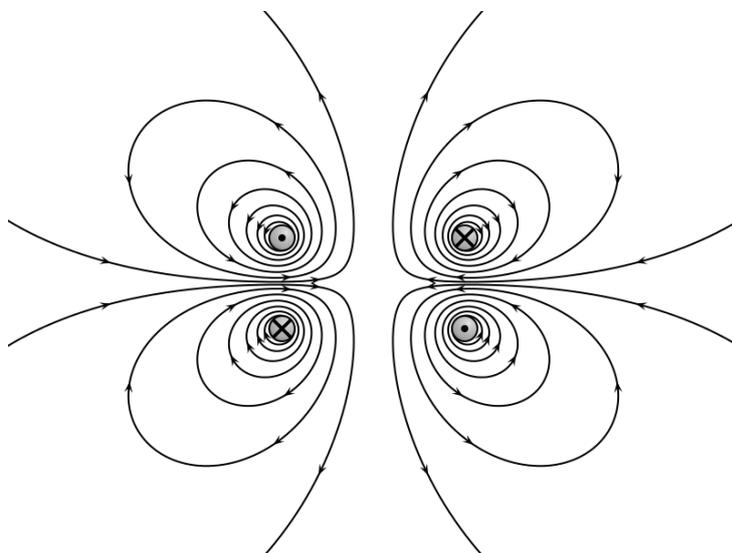


Figura 2.1: *Linee di campo generate da due bobine di Helmholtz percorse da correnti in verso opposto (tratta da [1]).*

Vale la pena sottolineare il punto debole di questa configurazione che approfondiremo più in dettaglio in un paragrafo a parte. Tutte le considerazioni fatte in precedenza sono state fatte ipotizzando che lo stato dell'atomo rimanesse invariato. Ciò è vero solo nel caso in cui il campo di cui risente l'atomo vari "lentamente" nel tempo: si dice che l'atomo segue il campo magnetico *adiabaticamente*. Nel caso in cui questa condizione non fosse soddisfatta le particelle potrebbero compiere transizioni verso stati Zeeman non intrappolati. Queste transizioni avvengono principalmente intorno al minimo della trappola, dove il campo magnetico si annulla.

Tale cambiamento di stato Zeeman, detto spin-flip di Majorana, può causare la perdita di particelle dalla trappola magnetica. Questo problema, tuttavia, può essere ovviato in diversi modi, uno dei quali è quello di usare un campo laser (attrattivo o repulsivo) che vada a "tappare questo buco" che si ha nell'origine, come fatto inizialmente da Ketterle e collaboratori quando crearono un condensato di Bose-Einstein.

Introduciamo di seguito il teorema adiabatico [16] che ci permetterà di comprendere meglio il fenomeno dello spin-flip di Majorana. Consideriamo un atomo immerso in un campo magnetico variabile. Il momento di dipolo magnetico dell'atomo interagisce con il campo esterno, allineandosi, se possibile, a quest'ultimo. Se le variazioni del campo magnetico sono sufficientemente lente, l'atomo è in grado di adattarsi a tali variazioni, tuttavia, se le variazioni sono repentine, l'atomo non ha sufficiente tempo per modificare il proprio stato, di conseguenza non risulta possibile intrappolarlo con il campo magnetico applicato.

2.2.2 Teorema adiabatico

Il teorema adiabatico afferma che un sistema fisico rimane nel suo autostato istantaneo se su di esso agisce una perturbazione in maniera sufficientemente lenta e tale che, per ogni $n \neq m$, $\langle \psi_m | \dot{H} | \psi_n \rangle \ll E_n - E_m$. In altre parole, un sistema quantomeccanico soggetto ad un cambiamento graduale dovuto a condizioni esterne, adatta la propria forma funzionale gradualmente; al contrario, quando è soggetto a una variazione rapida il sistema non ha tempo sufficiente per adattarsi alla variazione e quindi la sua densità di probabilità spaziale rimane invariata.

Supponiamo quindi che l'hamiltoniana vari gradualmente da H^i a H^f . Se la particella si trova inizialmente nell' n -esimo autostato di H^i allora essa verrà portata, secondo l'equazione di *Schrödinger*, all' n -esimo stato di H^f . Nel caso in cui la variazione sia rapida, lo stato finale in cui si trova la particella risulterà in una combinazione lineare (sovrapposizione) di tutti gli autostati

possibili di H^f .

Cerchiamo ora di derivare le condizioni di diabaticità o adiabaticità. Il vettore che rappresenta lo stato di un sistema al tempo t può essere scritto nel seguente modo:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n^A(t) e^{-iE_n t/\hbar} |\phi_n\rangle \quad (2.4)$$

per il quale si ha $\psi(x, t) = \langle x|\psi(t)\rangle$.

Consideriamo un sistema hamiltoniano sottoposto a una variazione continua da un valore iniziale \hat{H}_0 al tempo t_0 fino ad un valore finale \hat{H}_1 al tempo t_1 e chiamiamo $\tau = t_1 - t_0$. L'evoluzione del sistema può essere descritta nella rappresentazione di *Schrödinger* dell'operatore evoluzione definito dalla relazione

$$\hat{U}(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}(t') \hat{U}(t', t_0) dt' \quad (2.5)$$

che è equivalente all'equazione di *Schrödinger*

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t, t_0) = \hat{H}(t) \hat{U}(t, t_0) \quad (2.6)$$

con condizione iniziale $\hat{U}(t_0, t_0) = 1$. Nota la funzione d'onda al tempo t_0 , l'evoluzione del sistema ad un tempo successivo t è determinata dall'equazione.

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (2.7)$$

Il problema della determinazione dell'adiabaticità di un certo processo risulta quindi equivalente a determinare la dipendenza di $\hat{U}(t, t_0)$ da τ . Per verificare la validità dell'approssimazione adiabatica di un certo processo possiamo calcolare la probabilità che il sistema si trovi in uno stato diverso rispetto a quello iniziale al tempo t_1 . Tale probabilità è data da:

$$\zeta = \langle 0|\hat{U}^\dagger(t_1, t_0)\hat{U}(t_1, t_0)|0\rangle - \langle 0|\hat{U}^\dagger(t_1, t_0)|0\rangle\langle 0|\hat{U}(t_1, t_0)|0\rangle \quad (2.8)$$

la quale risulta essere, all'ordine perturbativo più basso, uguale a [16]

$$\zeta = \frac{\tau^2 \Delta \bar{H}^2}{\hbar^2} \quad (2.9)$$

con $\Delta \bar{H}$ scarto quadratico medio $\Delta \bar{H} = \sqrt{\frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} [\hat{H}(t)]^2 dt}$.

Notiamo che nel caso di variazione rapida si ha che $\zeta \ll 1$ e

$$\tau \ll \frac{\hbar}{\Delta \bar{H}} \quad (2.10)$$

la quale risulta essere proprio la relazione di indeterminazione energia-tempo di Heisenberg.

Distinguiamo quindi il caso adiabatico dove si ha il limite $\tau \rightarrow 0$ per il quale

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \hat{U}(t_1, t_0) = 1 \quad (2.11)$$

e

$$|\langle x | \psi(t_1) \rangle|^2 = |\langle x | \psi(t_0) \rangle|^2 \quad (2.12)$$

La validità di tale approssimazione è caratterizzata dalla probabilità che il sistema si trovi nello stato stato iniziale $P_D = 1 - \zeta$.

2.3 Trappole ottiche

Sappiamo che focalizzando un fascio laser è possibile creare un campo di radiazione con un massimo di intensità nello spazio. Se la frequenza del laser è inferiore a tutte le transizioni atomiche, l'energia del livello fondamentale subisce una variazione negativa per effetto Stark dinamico [22] proporzionale all'intensità del laser. Quando l'intensità varia nello spazio, la variazione in energia dipende dalla posizione dell'atomo e rappresenta un potenziale di tipo conservativo con un minimo dove l'intensità è massima. Il potenziale e la corrispondente forza vengono detti "di dipolo" [18]:

$$F_{dipole} = -\nabla V(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \text{Re} \alpha(\omega) \nabla \langle \varepsilon(\mathbf{r}, t)^2 \rangle_t \quad (2.13)$$

dove $\alpha(\omega)$ è la polarizzabilità data dal rapporto fra il momento di dipolo (elettrico) e il campo elettrico e rappresenta la tendenza di una distribuzione di carica a modificare la sua posizione originaria per effetto del campo. Tale grandezza dipende dalla frequenza di oscillazione ω del momento di dipolo. A basse frequenze, la polarizzabilità risulta essere positiva e il momento di dipolo ed il campo elettrico risultano allineati. Tuttavia, a frequenze maggiori di quelle che contribuiscono in maniera significativa alla polarizzabilità, il momento di dipolo indotto risulta essere nella direzione opposta. Se consideriamo una frequenza, invece, vicina alla risonanza notiamo che, per valori al di sotto della risonanza, la forza agisce verso le zone di maggior campo elettrico mentre per quelle al di sopra della risonanza, la forza agisce verso le zone di minor campo elettrico.

Un vantaggio che offrono le trappole ottiche è che il potenziale di cui risente un atomo alcalino nel suo stato fondamentale è indipendente dai suoi sottostati magnetici. Tutto cambia nel caso di una trappola magnetica poichè, a questo punto, il potenziale dipende strettamente dai sottostati magnetici degli atomi. Con una trappola magnetica risulta difficile studiare l'influenza dell'energia d'interazione sui gradi di libertà di spin della nube atomica poichè l'energia è dominata dal termine di Zeeman.

Per ridurre il riscaldamento degli atomi prodotto dall'assorbimento di fotoni e dalla successiva emissione spontanea, la frequenza del laser in una trappola ottica deve essere selezionata lontana dalle frequenze di risonanza degli atomi. Poichè la profondità delle trappole ottiche risultano essere molto piccole (dell'ordine di 10 microkelvin), è necessario un preraffreddamento prima di poter intrappolare gli atomi solamente con il campo laser.

2.4 Raffreddamento per evaporazione

Sebbene le temperature raggiunte con il raffreddamento laser siano sorprendentemente basse, non sono sufficienti per osservare la formazione di un condensato di Bose-Einstein. La tecnica quindi usata per raffreddare ulte-

riormente gli atomi è l'evaporazione, la quale si basa sul principio per cui gli atomi con energia al di sopra di una certa soglia sfuggono alla trappola, lasciando all'interno quelli con energia minore e quindi abbassando l'energia media per particella, ovvero la temperatura.

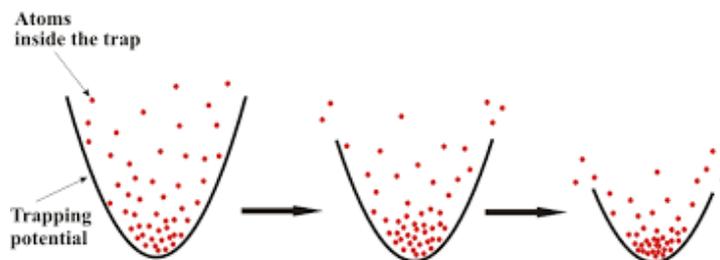


Figura 2.2: *Rappresentazione grafica dell'evaporazione: gli atomi con energia superiore al massimo della buca di potenziale escono da quest'ultima. Nella trappola rimangono solo gli atomi più freddi. Abbassando la soglia di energia massima possiamo raffreddare gli atomi rimanenti fino a temperature dell'ordine del nK (tratta da [2]).*

Per creare tale soglia viene usata una radio-frequenza (rf), la quale inverte lo stato di spin degli atomi. Questo fa in modo che l'atomo non sia più un *low-field seeker* bensì un *high-field seeker* sfuggendo così alla trappola. Gli atomi che fuoriescono dalla buca di potenziale sono quelli in risonanza con la rf applicata. Regolando quindi la frequenza della radiazione rf è possibile scegliere l'energia della soglia.

Vediamo ora di creare un modello sufficientemente semplice in grado di descrivere come variano le grandezze in gioco durante il processo di evaporazione.

Innanzitutto, il processo di evaporazione avviene su scala esponenziale, quindi le grandezze caratteristiche di tale processo saranno derivate logaritmiche come la seguente [18]:

$$\alpha = \frac{d(\ln T)}{d(\ln N)} = \frac{\dot{T}/T}{\dot{N}/N} \quad (2.14)$$

Nel caso in cui $\alpha = \text{costante}$ durante l'evaporazione, la temperatura varierà secondo la relazione

$$\frac{T(t)}{T(0)} = \left[\frac{N(t)}{N(0)} \right]^\alpha \quad (2.15)$$

con $T(0)$ e $N(0)$ condizioni iniziali. Consideriamo ora il caso di un potenziale nella forma $U \propto r^{\frac{d}{\delta}}$ dove d sta ad indicare la dimensionalità del potenziale (ad esempio, $d = 3$ per un potenziale 3D). In queste condizioni, tutte le grandezze rilevanti variano come $[N(t)/N(0)]^x$ durante l'evaporazione, con $x = x(\delta, \alpha)$. δ è un parametro definito in modo tale che il volume vari proporzionalmente a T^δ e nei seguenti casi può assumere i valori:

- $\delta = 3$ per potenziale lineare 3D;
- $\delta = \frac{3}{2}$ per potenziale armonico 3D (generalmente anisotropo);
- $\delta = 0$ per una scatola di potenziale (potential box).

Il parametro chiave quindi per la descrizione del processo di evaporazione è proprio α : esso esprime la variazione in temperatura al variare del numero di particelle perse. Come già detto, l'evaporazione è controllata regolando la profondità della buca di potenziale che risulta essere pari a $\eta k_B T$. In generale, l'energia media degli atomi che escono dalla trappola è data da $(\eta + \kappa)k_B T$ con κ numero compreso nell'intervallo $[0,1]$. Per semplificare, quando η risulta essere grande possiamo trascurare κ , riconducendoci, in tal caso, alla distribuzione energetica degli atomi intrappolati simile alla distribuzione di Boltzmann con energia media determinata da $(\delta + 3/2)k_B T$ (assumendo un moto in 3 dimensioni). Vi è una relazione semplice fra l'energia media di un atomo uscente dalla trappola ed il parametro α [14]:

$$\alpha = \frac{\eta + \kappa}{\delta + 3/2} - 1 \quad (2.16)$$

Tale relazione ci fornisce un'informazione semplice ma importante: α , parametro adimensionale, ci indica quanta energia viene rimossa, rispetto all'energia media $(\delta + 3/2)k_B T$, da un atomo evaporato.

Fino ad ora abbiamo visto come si comporta la temperatura in funzione della popolazione N all'interno della trappola. Vogliamo ora studiare la velocità di evaporazione introducendo, quindi, necessariamente, il parametro tempo. Consideriamo η costante, condizione soddisfatta piuttosto bene a livello sperimentale. Questo ci garantisce che la distribuzione in energia viene semplicemente riscalata durante il processo di evaporazione senza cambiare la sua forma. Per ottenere un'espressione analitica di rate della popolazione consideriamo le particelle in una scatola di potenziale con densità n_0 e assumiamo, inoltre, che η sia grande. L'equazione per \dot{N} può essere ottenuta nel seguente modo: in una distribuzione di Maxwell-Boltzmann, quasi tutte le collisioni che coinvolgono gli atomi nella coda della distribuzione, ovvero quelli con energia più alta, rimuovono gli atomi stessi dalla coda. Questa lacuna viene colmata dopo un certo intervallo di tempo grazie alle collisioni elastiche, le quali producono atomi con energia maggiore di $\eta k_B T$ ad una velocità pari al numero di atomi con energia superiore a $\eta k_B T$ diviso per il loro tempo di collisione. Nel caso in cui η risulta essere grande, la velocità di evaporazione in una distribuzione di Boltzmann troncata è identica alla velocità di produzione di atomi con energia maggiore di $\eta k_B T$ in una distribuzione non troncata. La velocità degli atomi con energia $\eta k_B T$ è $\sqrt{2\eta k_B T/m} = \sqrt{\pi}\bar{v}/2$ dove

$$\bar{v} = \frac{\int_0^\infty v^3 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv}{\int_0^\infty v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv} = \left(\frac{8k_B T}{\pi m} \right)^{1/2} \quad (2.17)$$

è la velocità termica media. Per valori grandi di η la frazione di atomi con energia superiore a $\eta k_B T$ tende a $2e^{-\eta} \sqrt{\eta/\pi}$ da cui ne risulta che l'equazione di rate per la popolazione diventa

$$\dot{N} = -Nn_0\sigma\bar{v}\eta e^{-\eta} = -\frac{N}{\tau_{ev}} \quad (2.18)$$

dove è stata introdotta la sezione d'urto σ per le collisioni elastiche e la costante temporale di evaporazione τ_{ev} .

Capitolo 3

Evaporazione di una miscela di Rubidio e Potassio

In quest'ultimo capitolo studieremo il raffreddamento di una miscela di gas composta dagli elementi Rubidio 87 (^{87}Rb) e Potassio 41 (^{41}K). Nell'esperimento svoltosi, è stato raffreddato il rubidio tramite i vari passi descritti nei precedenti capitoli, mentre gli atomi di potassio sono stati raffreddati per termalizzazione poiché in diretto contatto con gli atomi di rubidio. La miscela d'atomi si trovava, inizialmente, in una trappola ibrida (erano presenti sia un campo magnetico che un campo laser). Si prevedeva la conservazione del numero di atomi di potassio all'interno della trappola poiché quest'ultimi non sono attivamente rimossi, tuttavia ciò non avviene. Parallellamente, è stata rilevata la presenza di atomi di rubidio nello stato $|F = 2, m_F = 1\rangle$, in seguito indicati come Rb(2,1), all'interno della miscela, i quali, si ipotizza, possano causare la perdita di alcuni atomi di potassio grazie a collisioni anelastiche di *spin-exchange* (di cui diremo più avanti). Partendo dalle vite medie degli atomi di potassio misurate sperimentalmente, cercheremo, tramite simulazioni al computer, di trovare i valori della popolazione di Rb(2,1) che riproducono al meglio le vite medie del potassio. Per comprendere da quali processi hanno origine gli atomi di Rb(2,1) risulta necessario simulare il processo di evaporazione. A tale scopo, diventa essenziale conoscere l'equa-

zione di rate per la temperatura, ovvero come varia T in funzione del tempo. Cercheremo, quindi, di trovare come evolve la temperatura studiando tutti i fenomeni fisici correlati che si verificano all'interno della trappola. Tali fenomeni sono: (i) le collisioni anelastiche dipolari; (ii) le collisioni anelastiche di spin-exchange; (iii) gli spin-flip di Majorana e l'evaporazione stessa.

3.1 Vita media degli atomi di ^{41}K

In questo esperimento è stato creato un condensato di Bose-Einstein di una miscela di gas composta da ^{87}Rb e ^{41}K tramite il raffreddamento simpatico: gli atomi di rubidio, raffreddati tramite procedure standard, collidevano con gli atomi di potassio, i quali, quindi, perdevano parte della loro energia cinetica, ovvero si raffreddavano. Durante il processo di evaporazione, come detto in precedenza, viene applicata una radiofrequenza che modifica lo stato di certi atomi all'interno della trappola causandone la fuoriuscita di quelli con energia più alta. All'inizio dell'evaporazione entrambi gli elementi si trovano nel loro stato iperfine $|F, m_F\rangle = |2, 2\rangle$. Per il livello iperfine $F = 2$ gli atomi sono *low-field seekers* negli stati Zeeman a $m_F > 0$, mentre sono *high-field seekers* per $m_F < 0$. Per il livello iperfino $F = 1$ invece avviene il contrario. Il ruolo quindi della radiofrequenza è quello di portare alcuni atomi dallo stato $|F = 2, m_F = 2\rangle$ allo stato $|F = 1, m_F = 1\rangle$ grazie a transizioni energetiche; in questo modo gli atomi interessati vengono respinti dal potenziale e fuoriescono dalla trappola. Tale procedura viene applicata per gli atomi di rubidio i quali, poi, termalizzano con gli atomi di potassio. Affinché la termalizzazione non arresti il raffreddamento, la popolazione di rubidio deve essere molto maggiore rispetto alla popolazione di potassio. L'ordine di grandezza della popolazione di rubidio è intorno a $10^8 - 10^9$ atomi mentre la popolazione del potassio è composta all'incirca da $10^6 - 10^7$ atomi.

Teoricamente, secondo le considerazioni fatte fino a questo momento, il numero di atomi di potassio nella trappola dovrebbe rimanere pressoché costante dato che questi non sono rimossi attivamente dall'uso della radiofre-

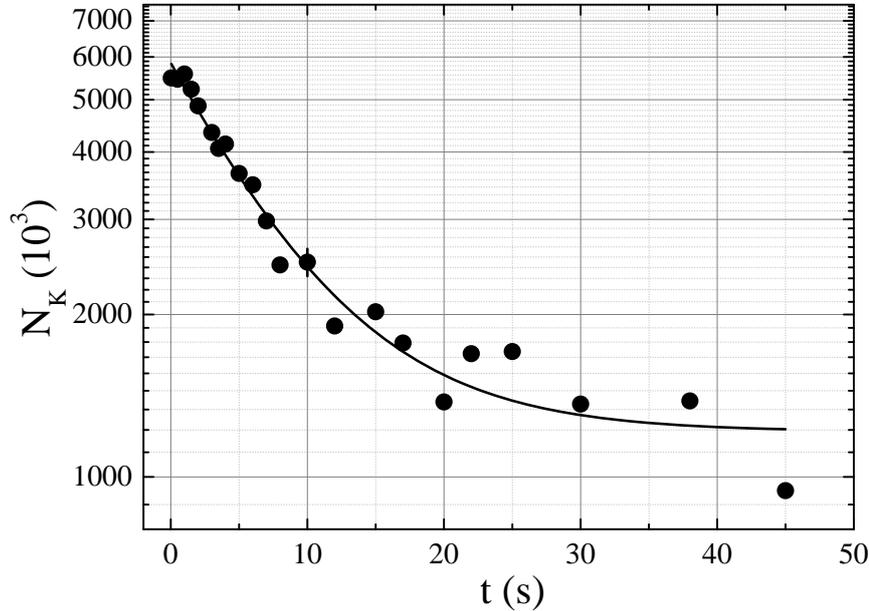


Figura 3.1: Si riporta il grafico della popolazione N_K in scala semilogaritmica in funzione del tempo. Tale valori sono stati rilevati alla temperatura fissata di $T = 164.1\mu K$ a cui corrisponde la vita media $\tau_K = 7.58s$. I dati sono stati ottenuti dall'esperienza BEC3 presso il Laboratorio Europeo di Spettroscopia Nonlineare di Sesto Fiorentino [8].

quenza. Questa condizione, tuttavia, non è verificata, specialmente a temperatura $T < 50\mu K$. Per capire la causa della perdita degli atomi di ^{41}K misuriamo la vita media del campione di potassio (e anche di Rb) in diversi punti lungo il corso del raffreddamento. Sperimentalmente, interrompiamo l'evaporazione in un dato punto, ad una determinata temperatura T_1 della miscela, spegnendo la radiofrequenza ed osserviamo, a partire da tale istante, a cui associamo il tempo $t = 0$ s, come varia il numero di atomi di potassio, N_K , nel tempo. In altre parole, misuriamo la variabile N_K per diversi istanti $t > 0$; grafichiamo N_K in funzione di t e fittiamo i dati ottenuti con una

funzione esponenziale come in Fig. 3.1.

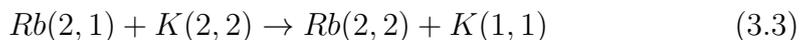
$$N_K = Ae^{-\frac{t}{\tau_K}} \quad (3.1)$$

Tale relazione si ricava dalla generica equazione di rate per la popolazione

$$\dot{N} = -\frac{N}{\tau} \quad (3.2)$$

dove τ viene chiamato vita media e \dot{N} indica la derivata di N rispetto al tempo. Tali valori di vita media sono stati misurati sperimentalmente. Si noti che ogni punto a $t > 0$ graficato è ottenuto ripetendo l'esperimento, poiché la misura di N_K è distruttiva. Si ricorda anche che la radiofrequenza usata nell'evaporazione è spenta a $t = 0$ e rimane spenta per tutta la durata della misurazione in cui $t > 0$ e si suppone, in buona approssimazione, che la temperatura rimanga invariata durante la misurazione dei valori di N_K . Il valore di τ_K così ottenuto dipende da T_1 , ovvero corrisponde ad un fisso valore di temperatura. Per avere più valori di vita media del potassio dobbiamo ripetere l'esperimento, interrompendo l'evaporazione ogni volta ad una diversa temperatura. Sono stati raccolti otto valori di temperatura corrispondenti ad otto valori di τ_K riportati in Tabella 3.1. I dati sono stati ottenuti dall'esperimento BEC3, in corso al LENS - Laboratorio Europeo di Spettroscopia Nonlineare di Sesto Fiorentino. Nell'esperimento BEC3 la trappola magnetica di quadrupolo ha un gradiente di $B' = 0.77$ T/m nella direzione trasversa (x, y) e la trappola ottica, di profondità pari a $30\mu\text{K}$ è ottenuta con due fasci laser a 1064 nm di potenza 3 W e 150 mW [8].

Un primo passo di questa analisi è quello di riuscire a riprodurre al calcolatore le vite medie di ^{41}K misurate, tenendo in considerazione tutti i fattori che potrebbero influenzare le popolazioni degli atomi intrappolati. In particolare si nota che già all'inizio del processo di evaporazione sono presenti, in piccola percentuale, atomi di rubidio nello stato $|F, m_F\rangle = |2, 1\rangle$. Tali particelle aumentano la perdita di atomi di potassio a causa di collisioni anelastiche, dette di *spin-exchange*, secondo lo schema [21]:

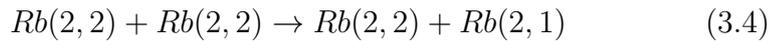


Temp. (μK)	N_{0Rb}	N_{0K}	$\tau_{Ksperim}$ (s)
422 ± 9	1.08×10^6	1.65×10^4	41 ± 2
250 ± 6	5.39×10^5	8.66×10^3	28.5 ± 0.7
164 ± 3	2.96×10^5	4.59×10^3	7.3 ± 0.4
164.1 ± 1.5	3.18×10^5	4.64×10^3	7.6 ± 0.7
123.7 ± 1.2	2.25×10^5	3.36×10^3	3.2 ± 0.3
86.8 ± 1.0	1.40×10^5	2.99×10^3	1.77 ± 0.08
51.8 ± 1.1	6.95×10^4	2.59×10^3	1.05 ± 0.14
24.6 ± 0.8	2.20×10^4	1.55×10^3	0.54 ± 0.02

Tabella 3.1: *In tabella sono riportati rispettivamente i valori sperimentali di temperatura, popolazioni iniziali e vita media del potassio.*

Queste sono collisioni veloci durante le quali non viene conservato lo spin della particella, ma solo la proiezione del momento angolare totale lungo l'asse di quantizzazione definito dal campo magnetico, ovvero $m_F(K) + m_F(Rb)$. In questo tipo di collisione il potassio cambia il proprio stato portandosi alla configurazione $|1, 1\rangle$ dopo l'urto. Il potenziale risentito dall'atomo di potassio in tale stato è repulsivo, quindi l'atomo fuoriesce dalla trappola ottica. Dobbiamo quindi, innanzitutto, per ogni valore di temperatura, cercare il numero di atomi iniziale, a $t = 0$, di Rb(2,1) che riproduca il corrispondente τ_K . Per fare ciò usufruiamo di simulazioni effettuate al computer. Si riportano le equazioni di rate per le popolazioni utilizzate in questo modello. Sono vari i processi che causano la variazione di particelle all'interno della trappola, quali:

- Collisioni dipolari tra atomi di rubidio.
Sono interazioni della forma [6]:



Queste sono collisioni lente dovute ad interazioni poco intense fra gli atomi. Esse però sono responsabili per la formazione di atomi di rubidio

nello stato $|F, m_F\rangle = |2, 1\rangle$. Avremo quindi come equazioni di rate correlate a questo processo

$$\dot{N}_{2dipolar} = -\gamma_{D22}N_2N_2; \quad \dot{N}_{1dipolar} = +\gamma_{D22}N_2N_2 \quad (3.5)$$

dove, in generale, $\gamma = 1/\tau$. Dalla relazione (3.4) e (3.5) si vede come la perdita di un atomo di Rb(2,2) in questo tipo di collisione corrisponde alla creazione di un atomo di Rb(2,1).

- Collisioni anelatiche di spin-exchange.

Già menzionate in precedenza, queste collisioni sono responsabili per la variazione delle popolazioni di N_1 e N_K secondo le leggi

$$\dot{N}_{1se} = -\gamma_{1Kse}N_KN_1; \quad \dot{N}_{Kse} = -\gamma_{1Kse}N_KN_1 \quad (3.6)$$

Le due equazioni sono uguali poichè, in accordo con la (3.3), ogni atomo di Rb(2,1) e K(2,2) coinvolto in queste collisioni viene perso.

- Spin-flip di Majorana [7].

Tale processo consiste nella variazione dello spin di una particella immersa in un campo magnetico quando si ritrova in un punto della trappola per cui $B = 0$. La particella, cambiando lo spin, diventa un *high-field seeker* e quindi tende ad uscire dalla trappola a sua volta.

A questo fenomeno sono correlate le equazioni di rate

$$\dot{N}_{2M} = -\frac{N_2}{\tau_2} = -N_2\gamma_{M2} \quad (3.7)$$

$$\dot{N}_{KM} = -\gamma_{MK}N_K \quad (3.8)$$

$$\dot{N}_{1M} = -\gamma_{M1}N_1 + \gamma_{M2}N_2\Gamma \quad (3.9)$$

dove il fattore Γ corrisponde alla frazione di atomi che compiono la transizione $Rb(2,2) \rightarrow Rb(2,1)$ a causa dello spin-flip di Majorana. Nel caso specifico di questa simulazione $\Gamma = 100\%$.

Il tasso di perdita γ_M degli spin-flip di Majorana per un gas confinato in una trappola di quadrupolo a temperatura T è dato da

$$\gamma_M = \chi \frac{\hbar}{M} \left(\frac{\mu B'_z}{k_B T} \right)^2 \quad (3.10)$$

con χ fattore geometrico adimensionale con valore intorno a 0.16.

- Collisioni di background.

Sono collisioni che avvengono fra atomi della miscela e atomi di gas residui presenti nella camera da vuoto. L'energia trasferita agli atomi della miscela in queste collisioni è tale da impedire che gli atomi di potassio (o rubidio) possano rimanere intrappolati. È importante sottolineare che queste collisioni variano l'energia totale del sistema secondo la relazione

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{E}{\tau_{bg}} \quad (3.11)$$

dove il valore sperimentale di τ_{bg} risulta essere 62 s, ma non influenzano la temperatura poichè l'energia media delle particelle perse è pari all'energia media per particella di quelle intrappolate.

Le equazioni di rate per questo processo risultano essere semplicemente:

$$\dot{N}_{2bg} = -\frac{N_2}{\tau_{bg}}; \quad \dot{N}_{1bg} = -\frac{N_1}{\tau_{bg}}; \quad \dot{N}_{Kbg} = -\frac{N_K}{\tau_{bg}}; \quad (3.12)$$

Per ottenere le equazioni di rate totali basta sommare i vari contributi apportati dai processi sopra elencati.

Si riportano in una prima tabella le misure sperimentali, mentre nella seconda tabella sono elencati i dati ottenuti dalla simulazione.

Le simulazioni effettuate al calcolatore sono state realizzate tramite l'utilizzo del software Matlab (in appendice si riporta una parte del codice sorgente). Il programma creato era strutturato, principalmente, in 6 funzioni, alcune delle quali avevano il ruolo semplicemente di impostare alcuni parametri (corrente passante nelle bobine, tempo di integrazione, ecc.).

$\tau_{Kcalc}(s)$	% Rb(2,1)
35.27 ± 0.01	0 ± 0.01
18.34 ± 0.01	0 ± 0.01
7.32 ± 0.01	1.26 ± 0.01
7.59 ± 0.01	0.84 ± 0.01
3.17 ± 0.01	2.40 ± 0.01
1.78 ± 0.01	3.21 ± 0.01
1.06 ± 0.01	3.18 ± 0.01
0.40 ± 0.01	0 ± 0.01

Tabella 3.2: *In tabella sono riportati rispettivamente i valori ottenuti dalla simulazione al calcolatore della vita media del potassio e della percentuale della popolazione di rubidio nello stato (2,1) che riproducono al meglio i $\tau_{Ksperim}$.*

La funzione *'function ovlp = overlapN(t, species, temp)'* permetteva il calcolo, tramite integrazione numerica, degli integrali di sovrapposizione (termini che introdurremo successivamente). Si è fatto uso anche della funzione *'odefun(...)*', già presente nelle librerie di Matlab, per l'impostazione delle equazioni differenziali, in questo caso specifico, per le equazioni di rate. Tali equazioni sono state risolte numericamente tramite la funzione *'function[sol, lifetimes] = sympasQ(tmax, choice, depump, flag)'* la quale aveva come output un array di valori contenenti le soluzioni numeriche delle equazioni differenziali e un array con le vite medie delle tre popolazioni. Con i dati contenuti nella variabile *'sol'* è stato possibile creare i grafici che simulano la variazione delle popolazioni all'interno della trappola come in Figura 3.2.

In Tabella 3.2 si riportano i risultati delle simulazioni. La colonna più a destra rappresenta la percentuale di atomi di rubidio che si trovano nello stato $|2, 1\rangle$ i quali sono responsabili, in parte, per la perdita degli atomi di potassio e quindi influiscono nella vita media di quest'ultimi. Aumentando tale parametro la vita media del potassio diminuisce poiché vi è una maggiore probabilità di collisione mentre diminuendolo, la vita media del

potassio aumenta. In Figura 3.2 grafichiamo come variano le tre popolazioni al trascorrere del tempo. Tale simulazione corrisponde al decadimento in Figura 3.1, ottenuto con i dati sperimentali.

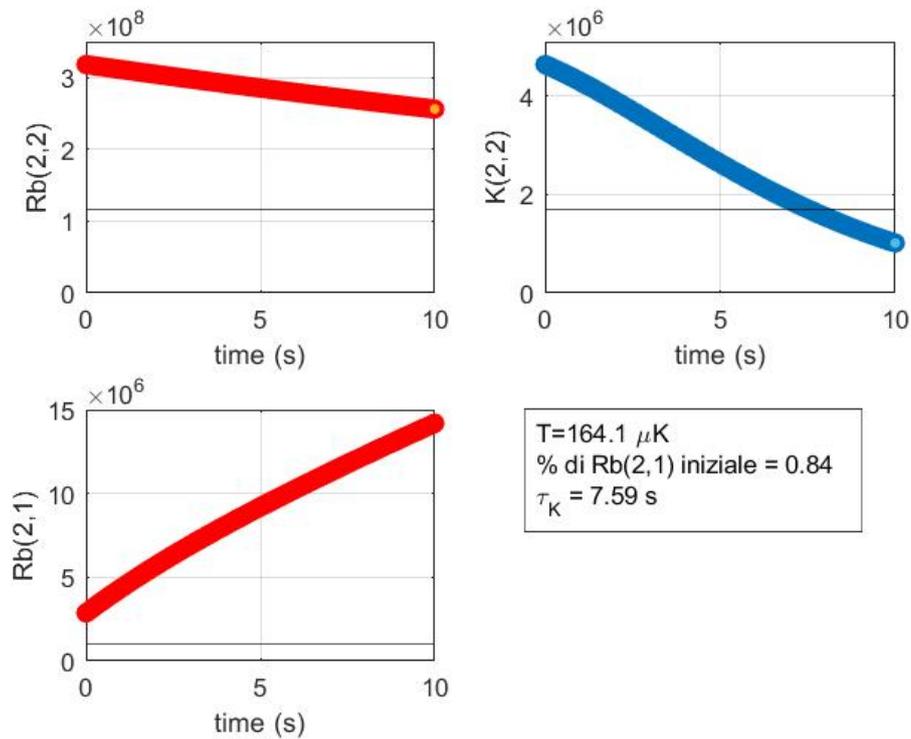


Figura 3.2: I tre grafici mostrano come variano le tre popolazioni all'interno della trappola al trascorrere del tempo dopo lo spegnimento della radiofrequenza. Sono riportati anche i valori di temperatura, vita media del potassio e percentuale degli atomi di Rb(2,1) a $t = 0 \text{ s}$. Si nota dal grafico di color blu come la popolazione del potassio non abbia un andamento lineare, proprio come atteso.

Vogliamo ora capire quale sia l'andamento della popolazione di atomi di Rb(2,1) durante l'evaporazione. Per ricreare i diversi valori di $N_{Rb(2,1)}$ ottenuti ai vari tempi $t = 0$ occorre simulare il processo di evaporazione fino al punto in cui è stata interrotta. Si presenta, quindi, a questo punto, la necessità di conoscere una relazione che mostri come varia la temperatura della miscela, durante l'evaporazione, in funzione del tempo.

3.2 Fenomeni fisici

Per riprodurre i valori di $N_{Rb(2,1)}$ a $t = 0$ usiamo un modello con equazioni di rate che tengano conto di:

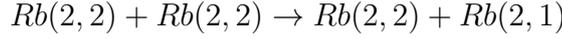
- Collisioni dipolari tra atomi di rubidio;
- Collisioni anelatiche di spin-exchange tra atomi di rubidio e potassio;
- Spin-flip di Majorana;
- Evaporazione;
- Collisioni con il background.

Questi processi sono di particolare interesse perchè determinano come varia la temperatura all'interno della trappola (ad eccezione delle collisioni di background). Per ricavare un'equazione della temperatura del tipo $T = T(t)$ dobbiamo prima trovare l'equazione di rate per T , ovvero trovare un'equazione differenziale della temperatura nel tempo, per poi ricavarne la soluzione tramite integrazione numerica. Per ogni processo descritto in precedenza, sfruttiamo i legami fra energia e temperatura. Cercheremo quindi delle equazioni di rate dell'energia per ogni processo coinvolto per poi sommarle ed eguagliare tutto alla derivata rispetto al tempo dell'energia totale del sistema, ovvero:

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_j \left(\frac{3}{2} + \delta \right) N_j k_B T \right] \quad (3.13)$$

dove δ dipende dal tipo di potenziale a cui è soggetto il sistema. Vediamo ora i singoli contributi dei vari processi.

1. **Collisioni dipolari.** Tali collisioni sono urti della forma :



Vogliamo quindi trovare un'equazione che metta in relazione \dot{E} e \dot{T} . Sappiamo che la densità di bosoni all'interno della trappola non è uniforme, tuttavia se consideriamo un volumetto infinitesimo dV possiamo considerare il gas omogeneo, per cui avremo che

$$\frac{d}{dt}(n_2 dV) = -\langle \sigma v \rangle_{dip} n_2 (n_2 dV) \quad (3.14)$$

dove con n_2 indichiamo la densità della popolazione di $Rb(2,2)$ e con $n_2 dV$ il numero di atomi presenti all'interno del volumetto dV . Tale equazione esprime, perciò, la variazione infinitesima della popolazione dN_2 rispetto al tempo. Trascurando la dipendenza della sezione d'urto σ_{dip} dall'energia, potremo scrivere

$$\langle \sigma_{dip} v \rangle = \sigma_{dip} \sqrt{\frac{16 k_B T}{\pi m_2}} \quad (3.15)$$

dove con le parentesi angolari intendiamo un valore medio della grandezza al suo interno, in particolare, la velocità indicata, è la velocità termica delle particelle. Per ogni urto si ha una variazione dell'energia totale pari a

$$\Delta E = \frac{1}{2} \mu_0 B(\mathbf{r}) \quad (3.16)$$

Tale variazione è dovuto al passaggio dallo stato $|2, 2\rangle$ allo stato $|2, 1\rangle$, possibile grazie allo splitting dei livelli energetici causato dell'effetto Zeeman. Se vogliamo, quindi, calcolare la variazione di energia nel tempo, avremo che $\frac{1}{2} \mu_0 B(\mathbf{r}) \langle \sigma_{dip} v \rangle n_2 n_2$ sarà pari alla variazione di energia

nel tempo in un volume infinitesimo, onde per cui risulterà necessario integrare sul volume.

$$\frac{dE}{dt} = \dot{E} = \frac{1}{2}\mu_0\langle\sigma_{dip}v\rangle \int B(\mathbf{r})n_2n_2dV \quad (3.17)$$

Quest'ultimo integrale è un integrale di sovrapposizione e può essere calcolato sia numericamente che analiticamente nel caso in cui il potenziale, in questo caso il potenziale magnetico, sia sufficientemente semplice. Per risolvere tale integrale possiamo definire $n_2(\mathbf{r}) \equiv N_2f_2(\mathbf{r})$ dove si ha che la funzione $f_2(\mathbf{r})$ è proprio la funzione di partizione canonica nel limite del continuo, data dalla relazione

$$f_2(\mathbf{r}) = \frac{e^{-U(\mathbf{r})/k_B T}}{\int e^{-U(\mathbf{r})/k_B T} d^3r} \quad (3.18)$$

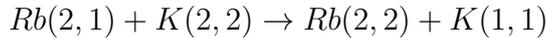
Come già visto nel capitolo 2, nel caso della trappola di quadrupolo (utilizzata in questo esperimento), il potenziale è dato da

$$U_i = \mu_i|B(\mathbf{r})| = \mu_i B' \sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2} \quad (3.19)$$

Potremmo riscrivere la (3.8) alternativamente nel seguente modo:

$$\dot{E} = \frac{1}{2}\mu_0\langle\sigma_{dip}v\rangle \int B(\mathbf{r})n_2n_2dV = \langle\sigma_{dip}v\rangle \int U_{magn}n_2n_2d^3r = \langle\sigma_{dip}v\rangle\xi_2 \quad (3.20)$$

2. **Collisioni anelatiche di spin-exchange.** Questi sono gli urti fra particelle di rubidio e potassio del tipo:



Tali collisioni sono cosiddette veloci ed i "prodotti" di questi urti vengono espulsi dal condensato. Similmente alle collisioni dipolari, avremo una variazione dell'energia totale ad ogni urto pari a

$$\Delta E = \Delta E_{Rb(2,1)} + \Delta E_{K(2,2)} \quad (3.21)$$

da cui quindi otteniamo, integrando sul volume, l'espressione

$$\frac{dE}{dt} = -\langle \sigma_{se} v \rangle \left[3k_B T \int n_1 n_K d^3 r + \int (U_1 + U_K) n_1 n_K d^3 r \right] \quad (3.22)$$

$$\dot{E} = -\langle \sigma_{se} v \rangle [3k_B T \xi + \xi_{1K}]$$

con ξ e ξ_{1K} integrali di sovrapposizione.

3. Spin-flip di Majorana.

Alcuni atomi escono dalla buca di potenziale a causa della variazione del loro stato spinoriale. Ciò può avvenire quando il potenziale risulta nullo in modulo, in accordo con quanto afferma il teorema adiabatico (enunciato nel precedente capitolo). Tale fenomeno viene chiamato spin-flip ed è stato ipotizzato per primo da Majorana. Dato che tale variazione di stato causa la diminuzione di bosoni intrappolati, ne consegue una variazione in energia del sistema e quindi anche della sua temperatura. L'energia media persa per ogni atomo di Rb(2,2) uscente dalla trappola a causa di tale fenomeno è pari a [10]

$$\bar{\epsilon}_p = \frac{5}{2} k_B T \quad (3.23)$$

per cui, l'energia totale persa in un certo intervallo di tempo dt , sarà determinata dal numero di atomi persi dN in quello stesso intervallo:

$$\dot{E} = \frac{dE}{dt} = \bar{\epsilon}_p \frac{dN_2}{dt} = \frac{5}{2} k_B T \dot{N}_{2M} \quad (3.24)$$

dove \dot{N}_{2M} è data dall'equazione (3.7).

4. **Evaporazione.** Il processo di evaporazione è stato discusso in maniera più ampia alla fine del capitolo 2. Possiamo, perciò, partire dalla relazione (2.19), ovvero

$$\dot{N}_{2evap} = -N_2 n_{0_2} \sigma \bar{v} \eta e^{-\eta} = -\frac{N_2^2}{V_{e_2}} \sigma \bar{v} \eta e^{-\eta} = -\frac{N_2^2}{V_{e_2}} \sigma \bar{v} \left(\frac{E_{cut}}{k_B T} \right) e^{-\frac{E_{cut}}{k_B T}}$$

dove E_{cut} , ovvero l'energia di soglia, dipende dalla frequenza della micro-onda, la quale, a sua volta, è una funzione del tempo. Ne consegue che il termine fra parentesi non è costante, bensì una funzione del tempo. Il parametro V_e viene detto volume efficace ed è definito in generale come

$$V_e = \frac{N}{n_0} \quad (3.25)$$

dove N sono gli atomi intrappolati ed n_0 la densità di popolazione [15]. Si nota che il volume efficace può essere calcolato equivalentemente secondo la relazione

$$V_e = \lambda_T^3 \zeta = \frac{\lambda_T^3}{(2\pi\hbar)^3} \int e^{-(p^2/2m+U(\mathbf{r}))/k_B T} d^3 r d^3 p \quad (3.26)$$

con λ_T lunghezza d'onda termica di De-Broglie definita dalla relazione (1.33) e ζ funzione di partizione canonica per la singola particella. L'integrazione viene fatta su un volume dello spazio della fasi per il quale $p^2/2m + U(\mathbf{r}) \leq \epsilon_t$, perciò potremo calcolare l'integrale come

$$\zeta = \int_0^{\epsilon_t} d\epsilon \rho(\epsilon) e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}} \quad (3.27)$$

dove $\rho(\epsilon)$ rappresenta la densità di probabilità canonica.

Per quanto riguarda la sezione d'urto e velocità termica media facciamo riferimento a quanto riportato al punto 1. Avremo quindi:

$$\begin{aligned} \sigma &= 8\pi a^2; \quad a = 98a_0 \\ \bar{v} &= \left(\frac{16k_B T}{\pi m} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.28)$$

dove a_0 è il raggio di Bohr.

Infine, avremo come equazione di rate per l'energia

$$\dot{E} = -\dot{N}_{2_{evap}} k_B T (\eta + \kappa) \simeq -\dot{N}_{2_{evap}} E_{cut}(t) \quad (3.29)$$

3.3 Evoluzione della temperatura

Come ultimo passo, vogliamo trovare un'equazione che descriva come varia la temperatura durante il processo di evaporazione. Questa relazione risulta utile per poter riprodurre le popolazioni di Rb(2,1) ottenute dal fit dei dati riguardanti la vita media della popolazione di potassio. Sappiamo che l'energia totale del sistema è data da

$$E = \sum_j \left(\frac{3}{2} + \delta \right) N_j k_B T \quad (3.30)$$

Abbiamo inoltre visto in precedenza come i singoli processi che avvengono all'interno del condensato influenzano l'energia del sistema. Per trovare l'equazione differenziale in $T(t)$ dovremo derivare l'equazione soprastante ed eguagliarla alla somma dei termini (3.11), (3.13), (3.15) e (3.22).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\sum_j \left(\frac{3}{2} + \delta \right) N_j k_B T \right] &= \langle \sigma_{dip} v \rangle \xi_2 - \langle \sigma_{se} v \rangle [3k_B T \xi + \xi_{1K}] \\ &+ \frac{5}{2} k_B T \dot{N}_{2_M} - \dot{N}_{2_{evap}} E_{cut}(t) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Distinguiamo ora due casi: il primo in cui consideriamo il fattore δ costante e pari al valore 3; nel secondo caso approssimiamo δ a una funzione lineare della temperatura $f(T) = MT + Q$.

- $\delta = 3$.

In questa situazione, l'equazione (3.23) diventa

$$E = \sum_{j=1,2,K} \frac{9}{2} N_j k_B T = \frac{9}{2} N_{tot} k_B T \quad (3.32)$$

Derivandola rispetto al tempo otteniamo

$$\dot{E} = \frac{9}{2} N_{tot} k_B T \left(\frac{\dot{N}_{tot}}{N_{tot}} + \frac{\dot{T}}{T} \right) \quad (3.33)$$

ed inserendola nella (3.24), si ricava l'equazione differenziale non lineare in $T(t)$

$$\begin{aligned} \dot{T} \left(\frac{9}{2} k_B N_{tot} \right) + T \left(\frac{9}{2} k_B \dot{N}_{tot} - \frac{5}{2} k_B \dot{N}_{2M} + 3 \langle \sigma_{se} v \rangle k_B \xi \right) \\ - \frac{N_2^2}{V_{e2}} \sigma \bar{v} \frac{E_{cut}^2}{k_B T} e^{-E_{cut}/k_B T} + \langle \sigma_{se} v \rangle \xi_{1K} - \langle \sigma_{dip} v \rangle \xi_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

- $\delta = MT + Q$.

In questa approssimazione, riscriviamo la (3.23) nel seguente modo

$$E = \sum_{j=1,2,K} \left(\frac{3}{2} + Q + MT \right) N_j k_B T = \phi(T) N_{tot} k_B T \quad (3.35)$$

dove è stato effettuato, per alleggerire la notazione, il cambio di variabile $\frac{3}{2} + Q + MT = \phi$. Derivando la (3.28) rispetto al tempo e sostituendola nell'equazione (3.24) si ricava

$$\begin{aligned} \dot{T} [\phi(T) N_{tot} k_B + M k_B N_{tot} T] + T \left[\phi(T) \dot{N}_{tot} k_B - \frac{5}{2} k_B \dot{N}_{2M} + 3 \langle \sigma_{se} v \rangle k_B \xi \right] \\ - \frac{N_2^2}{V_{e2}} \sigma \bar{v} \frac{E_{cut}^2}{k_B T} e^{-E_{cut}/k_B T} + \langle \sigma_{se} v \rangle \xi_{1K} - \langle \sigma_{dip} v \rangle \xi_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

Dalle equazioni differenziali non lineari (3.36) e (3.34) risulta possibile ricavare le equazioni di rate della temperatura tramite integrazione numerica. Si tenga presente che gli integrali di overlap, rappresentati dai parametri ξ_i , devono essere ricalcolati ad ogni valore di temperatura diverso. Questo passo finale di integrazione delle equazioni è ancora in svolgimento.

3.4 Conclusioni

L'esperimento svoltosi era finalizzato allo studio della formazione di un condensato di Bose-Einstein di una miscela di gas composta da atomi di Rubidio 87 e Potassio 41 attraverso il raffreddamento simpatetico: gli atomi di potassio termalizzano con gli atomi di rubidio, i quali sono raffreddati tramite impiego di laser e campi magnetici. In particolare, in questa analisi, è stata posta particolare attenzione alle equazioni di rate delle popolazioni ed alle equazioni di rate della temperatura. Gli atomi della miscela si trovano inizialmente nello stato iperfine $|F, m_F\rangle = |2, 2\rangle$. Tuttavia è stata trovata una piccola percentuale di atomi di rubidio nello stato $|2, 1\rangle$ la cui presenza è dovuta, si ipotizza, alle collisioni dipolari tra atomi di rubidio. Questi atomi di Rb(2,1) possono urtare a loro volta gli atomi di potassio portandoli nello stato $|1, 1\rangle$, nel quale risentono di un potenziale repulsivo e quindi fuoriescono dalla trappola. Partendo dai dati sperimentali riguardo alla popolazione del potassio all'interno della trappola, sono state effettuate alcune simulazioni per stimare la popolazione di Rb(2,1) che interpolasse meglio i valori delle vite medie degli atomi di potassio. I dati sperimentali e i dati ottenuti dalle simulazioni sono riportati nella Tabella 3.1 e Tabella 3.2. Successivamente è stata ricavata l'equazione differenziale per la temperatura (3.27) e (3.29) con lo scopo di studiare come quest'ultima vari all'interno del campione durante l'evaporazione, processo ultimo di raffreddamento. Conoscendo l'equazione della temperatura è possibile sostituirla nelle equazioni di rate della popolazione di Rb(2,1) per cercare di ricreare i valori ottenuti dalle simulazioni. Quest'ultimo passo dell'analisi è ancora in fase di verifica.

Appendice

Si riporta il codice utilizzato per la simulazione con il software Matlab2017b.

```
1 function [sol , lifetimes] = sympa3sQ(tmax, choice ,  
    depump, flag)  
2 %% Input arguments  
3 global hbar mu0 kB amu g T2  
4 global evPar  
5 global gammaM2 gammaM1 gammaMK gamma1K gammaD22  
    gammaD2K  
6 %% load fundamental constants  
7 phc=fundamentalPhysicalConstantsFromNIST ;  
8 hbar = phc.Planck_constant.value / (2*pi);  
9 mu0 = phc.Bohr_magneton.value ;  
10 kB = phc.Boltzmann_constant.value ;  
11 amu = phc.atomic_mass_constant.value ;  
12 a0 = phc.Bohr_radius.value ;  
13 g = 9.8 ;  
14 lifetimes = [0 70 0];  
15 tau_K =  
    [41.0793201943583,28.5279851206661,7.31525197529652 ,  
16 7.58165323613588,3.16741809389673,1.77322351142776 ,  
17 1.0519176983448,0.536235624036158];  
18  
19 while lifetimes(2) > tau_K(4)  
20 disp ([ 'depump = ',num2str(depump)]);  
21 %% Data  
22 initTemp  
    =[421.7;250.2;163.8;164.1;123.7;86.8;51.78;24.62]*1e  
    {-6};
```

```

23 NORb = [1084465.52857547; 538929.159471911;
          295978.076173576; 318025.574153028;224642.016985616;
          139953.877888187; 69454.4372215240;
          22044.1529737857]*1e3;
24 NOK =
          [16494.9442427848;8656.73531831730;4594.70111966098;
25 4636.29631627388;3359.66540212825;2993.87827498290;
26 2585.46764837064;1546.27753474818]*1e3;
27 initN = [NORb NOK NORb*depump];
28 sigmaV1K = [16e-17 16e-17 16e-17 16e-17 18e-17 14e-17 7
              e-17 5e-17];
29 T2 = initTemp(choice);
30 Nini = initN(choice,:);
31 evPar = evapParameters(0);
32 %% overlap integrals
33 switch (flag)
34     case 'a'
35 o22 = overlapIntegral(3,[87 87 2 2], T2);
36 o2K = overlapIntegral(3,[87 41 2 2], T2);
37 o1K = overlapIntegral(3,[87 41 1 2], T2);
38     case 'n'
39 o22 = overlapN(3,[87 87 2 2], T2);
40 o2K = overlapN(3,[87 41 2 2], T2);
41 o1K = overlapN(3,[87 41 1 2], T2);
42 end
43 %% Majorana rates
44 gammaM2 = 0.16 * (hbar/87/amu)*(mu0 * evPar.quadCurrent
          * 1.14e-2/ kB / T2)^2 ;
45 gammaM1 = gammaM2 * 0.25;
46 gammaMK = gammaM2 * (87/41);
47 %% collisional rates

```

```

48 gamma1K = o1K(choice) * sigmaV1K(choice);
49 gammaD22 = 1e-20 * o22(choice);
50 %% Integration
51 timestep = 1e-3;
52 opt1=odeset('InitialStep',timestep, 'MaxStep', timestep
             *10);
53 opt2=odeset('Events',@myEvents);
54 opts=odeset(opt1,opt2);
55 sol = ode23s(@odefun,[0 tmax],Nini,opt1);
56 [ym im]=min(abs(sol.y'-Nini*exp(-1)));
57 lifetimes = sol.x(im);
58 depump = depump + 0.0001;
59 disp(['lifetimes Rb(2,2)/K/Rb(2,1) = ', num2str(
        lifetimes(1)), '; ', num2str(lifetimes(2)), '; ',
        num2str(lifetimes(3)), 's ']);
60 end
61 %% Plots
62 figure1=figure(20+choice);
63 clf
64 subplot(2,2,1)
65 plot(sol.x, sol.y(1,:), '-r', 'MarkerFaceColor',[1 0.7
        0.13],...
66      'Marker','o', 'LineWidth',2, 'Color',[1 0 0])
67 hold; plot([sol.x(1) sol.x(end)],[1 1]*Nini(1)*exp(-1),
        '-k'); hold
68 ylim([0 Nini(1)]*1.1);
69 ylabel('Rb(2,2)'); xlabel('time (s)');
70 grid on
71 %
72 subplot(2,2,2)

```

```

73 plot(sol.x, sol.y(2,:), '-.', 'MarkerFaceColor',[0.3
    0.75 0.9],...
74     'Marker','o','LineWidth',2)
75 hold; plot([sol.x(1) sol.x(end)],[1 1]*Nini(2)*exp(-1),
    '-k'); hold
76 ylim([0 Nini(2)]*1.1);
77 ylabel('K(2,2)'); xlabel('time (s)');
78 grid on
79 subplot(2,2,3)
80 plot(sol.x, sol.y(3,:), 'o-r', 'Marker','o','LineWidth'
    ,2,'Color',[1 0 0]);
81 hold; plot([sol.x(1) sol.x(end)],[1 1]*Nini(3)*exp(-1),
    '-k'); hold
82 ylabel('Rb(2,1)'); xlabel('time (s)');
83 grid on
84 annotation('textbox',[0.55 0.2 0.4 0.25],...
85     'String',{['T=','num2str(T2*1e6),' \muK'],[
    % di Rb(2,1) iniziale = ','num2str(depump
    *100)],...
86     ['\tau_{K} = ','num2str(lifetimes(2))',' s'
    ]}],
87     'FitBoxToText','on');
88 end
89 function dy = odefun(t, y)
90 global gammaM2 gammaM1 gammaMK gamma1K gammaD22
    gammaD2K
91 N2 = y(1); NK = y(2); N1 = y(3);
92 %% Background
93 tauBG = 62.;
94 dN2dt = -N2/tauBG; dN1dt = -N1/tauBG; dNKdt = -NK/tauBG
    ;

```

```

95 %% Majorana losses
96 dN2dt = dN2dt - gammaM2 * N2;
97 dN1dt = dN1dt - gammaM1 * N1 + gammaM2 * N2;
98 dNKdt = dNKdt - gammaMK * NK ;
99 %% inelastic spin-exchange collisions
100 dN1dt = dN1dt - gamma1K * NK * N1;
101 dNKdt = dNKdt - gamma1K * NK * N1;
102 %% inelastic dipolar collisions
103 dN2dt = dN2dt - gammaD22 * N2 * N2;
104 dN1dt = dN1dt + gammaD22 * N2 * N2;
105
106 dy = [dN2dt; dNKdt; dN1dt];
107
108 end
109
110 function ovlp = overlapIntegral(t, species, temp)
111 ...
112 end
113
114 function ovlp = overlapN(t, species, temp)
115 ...
116 end
117
118 function [value, isterminal, direction] = myEvents(t, y)
119 ...
120 end
121
122 function evap = evapParameters(t)
123 ...
124 end
125

```

```
126 function p = pd2pwr(x)
127 ...
128 end
```


Bibliografia

- [1] Anti-helmholtz coil. URL:https://commons.wikimedia.org/wiki/File:VFpt_anti-helmholtz_coil_thumb1.svg.
- [2] Evaporation. URL:<https://cold-atoms.physics.lsa.umich.edu/projects/bec/evaporation.html>.
- [3] M. Anderlini, E. Courtade, M. Cristiani, D. Cossart, D. Ciampini, C. Sias, O. Morsch, and E. Arimondo. Sympathetic cooling and collisional properties of a Rb-Cs mixture. *Physical Review A*, 71(6):061401, 2005.
- [4] M. Anderlini and D. Guery-Odelin. Thermalization in mixtures of ultracold gases. *Physical Review A*, 73(3):032706, 2006.
- [5] J. F. Annett. *Superconductivity, superfluids and condensates*. Oxford University Press, 2004.
- [6] H. M. J. M. Boesten, A. J. Moerdijk, and B. J. Verhaar. Dipolar decay in two recent Bose-Einstein condensation experiments. *Physical Review A*, 54(1):R29–R32, 1996.
- [7] D. M. Brink and C. V. Sukumar. Majorana spin-flip transitions in a magnetic trap. *Physical Review A*, 74(3):035401, 2006.
- [8] A. Burchianti, C. D’Errico, C. Fort, and F. Minardi. comunicazione privata.

- [9] B. J. DeSalvo, K. Patel, J. Johansen, and C. Chin. Observation of a degenerate fermi gas trapped by a Bose-Einstein condensate. *Physical Review Letters*, 119(23):233401, 2017.
- [10] R. Dubessy, K. Merloti, L. Longchambon, P. E. Pottie, T. Liennard, Aurélien Perrin, V. Lorent, and H. Perrin. Rubidium-87 Bose-Einstein condensate in an optically plugged quadrupole trap. *Physical Review A*, 85(1):013643, 2012.
- [11] Robert Eisberg and Robert Resnick. Quantum physics of atoms. *Molecules, Solids, Nuclei and Particles*, pages 107–110, 1974.
- [12] L. Ferrari. *Elementi di Termodinamica Statistica*. 2015.
- [13] R. Grimm, M. Weidemüller, and Y. B. Ovchinnikov. Optical dipole traps for neutral atoms. In *Advances in atomic, molecular, and optical physics*, volume 42, pages 95–170. Elsevier, 2000.
- [14] W. Ketterle and N. J. Van Druten. Evaporative cooling of trapped atoms. *Advances in atomic, molecular, and optical physics*, 37:181, 1996.
- [15] O. J. Luiten, M. W. Reynolds, and J. T. M. Walraven. Kinetic theory of the evaporative cooling of a trapped gas. *Physical Review A*, 53(1):381, 1996.
- [16] A. Messiah. *Quantum Mechanics 2 Volumes*. Dover Publications Inc., New York, 2003.
- [17] A. Mosk, S. Kraft, M. Mudrich, K. Singer, W. Wohlleben, R. Grimm, and M. Weidemüller. Mixture of ultracold lithium and cesium atoms in an optical dipole trap. *Applied Physics B*, 73(8):791–799, 2001.
- [18] C. J. Pethick and H. Smith. *Bose-Einstein condensation in dilute gases*. Cambridge university press, 2002.

- [19] P. W. H. Pinkse, A. Mosk, M. Weidemüller, M. W. Reynolds, T. W. Hijmans, and J. T. M. Walraven. Adiabatically changing the phase-space density of a trapped Bose gas. *Physical Review Letters*, 78(6):990, 1997.
- [20] N. C. Semprini. *Lezioni di Fisica Nucleare e Subnucleare*. 2017-2018.
- [21] H.T.C. Stoof, J. M. V. A. Koelman, and B. J. Verhaar. Spin-exchange and dipole relaxation rates in atomic hydrogen: Rigorous and simplified calculations. *Physical Review B*, 38(7):4688, 1988.
- [22] R. Zucchini. *Quantum mechanics: lecture notes*. 2017.