

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Calcolo della variazione di gravità causata dal terremoto in Emilia del 20 Maggio 2012

Relatore:
Prof. Maria Elina Belardinelli
Correlatore:
Dott. Massimo Nespoli

Presentata da:
Manuel Stocchi

Anno Accademico 2017/2018

Indice

1	Dislocazioni e variazioni di gravità	3
1.1	Dislocazioni in semispazi elastici	3
1.1.1	Tensore di deformazione	3
1.1.2	Tensore di sforzo	4
1.1.3	Relazioni costitutive per i mezzi elastici isotropi	4
1.1.4	L'equazione di equilibrio e il tensore di Somigliana	5
1.1.5	Dislocazioni descritte tramite forze equivalenti	6
1.1.6	Proprietà del momento di dislocazione	8
1.2	Geometria delle superfici di dislocazione	9
1.3	Le variazioni di gravità alla superficie	12
2	Calcolo di spostamento e variazioni di gravità del terremoto dell'Emilia	17
2.1	Il terremoto dell'Emilia	17
2.2	La classe MOMENT di LibHalfSpace	18
2.3	La classe MOMENTEXT	20
2.4	Il programma Faultdivide	21
2.4.1	La classe Squari	21
2.4.2	La classe Mij	24
2.4.3	L'algoritmo e i dati generati	24
2.4.4	Il programma Map	24
3	Risultati	26
3.1	Risultati ottenuti	26
3.1.1	Tensore momento	26
3.1.2	Spostamento e variazione di gravità	27
3.2	Analisi dei risultati e conclusioni	28

Introduzione

I processi deformativi all'interno della crosta terrestre associati a eventi sismici causano variazioni di gravità a livello superficiale. Tali variazioni di gravità possono essere calcolate a partire dalla rappresentazione del movimento sulla superficie di faglia che ha prodotto l'evento sismico tramite le formule presentate nel capitolo 1. In questa tesi è stata calcolata la variazione di gravità causata dall'evento sismico principale del 20 Maggio 2012 in Emilia. Per elaborare i dati è stata usata la libreria C++ `LibHalfSpace` (Ferrari, Bonafede e Belardinelli 2016), ideata per studiare le deformazioni in un semispazio elastico. Si è utilizzato un modello di superficie di faglia rettangolare con slip uniforme immersa in un semispazio elastico. Di base, `LibHalfSpace` utilizza un modello di faglia puntiforme, approssimazione valida solo a distanze maggiori delle dimensioni della faglia. A tal proposito è stata aggiunta alla libreria la classe `MOMENTEXT`, che consente di trattare la superficie di dislocazione come estesa, e quindi di ottenere risultati consistenti anche nel campo vicino. Sono stati inoltre creati due ulteriori programmi, `FaultDivide` e `Map`, il primo per generare i dati da utilizzare con `LibHalfSpace`, e il secondo per elaborare i dati ottenuti da `LibHalfSpace`. È stato inoltre utilizzato `MatLab` per creare le mappe di spostamento e variazione di gravità superficiali a partire dai dati elaborati. Infine, si sono confrontati i dati sullo spostamento generati con quelli raccolti tramite misurazioni GPS da Serpelloni et al. 2012, mentre i dati di variazioni di gravità sono stati confrontati con quelli raccolti da Tanaka et al. 2001.

Capitolo 1

Dislocazioni e variazioni di gravità

1.1 Dislocazioni in semispazi elastici

1.1.1 Tensore di deformazione

Consideriamo due punti di posizione \mathbf{x} e $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ in un semispazio omogeneo tridimensionale all'istante $t = t_0$, e sia dS_0 la loro distanza. In $t = t_1$ assumono posizione \mathbf{y} e $\mathbf{y} + d\mathbf{y}$, e distanza dS .

Si ha che

$$dS_0^2 = \sum_{k=1}^3 dx_k dx_k \quad \mathbf{e} \quad dS^2 = \sum_{k=1}^3 dy_k dy_k$$

Dato che gli y_i sono funzione di \mathbf{x} , si ha che

$$dS^2 = \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{dy_k}{dx_i} dx_i \right) \left(\sum_{j=1}^3 \frac{dy_k}{dx_j} dx_j \right) \quad (1.1)$$

da cui

$$dS^2 - dS_0^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} - \delta_{ij} \right) dx_i dx_j = 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 E_{ij} dx_i dx_j \quad (1.2)$$

dove abbiamo posto

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} - \delta_{ij} \quad (1.3)$$

δ_{ij} è la delta di Kronecker, e E_{ij} è detto *tensore di deformazione*.

Definendo il *vettore spostamento* $\mathbf{u} = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{x}$ possiamo riscrivere la (1.3) come

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \delta_{ik} \right) \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \delta_{jk} \right) - \delta_{ij} \right] = \frac{1}{2} \left(\sum_k^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (1.4)$$

Se $d\mathbf{u}$ è infinitesimo rispetto $d\mathbf{x}$ possiamo trascurare i termini quadratici nella (1.4) per ottenere il *tensore di deformazione infinitesimo* ϵ_{ij} :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (1.5)$$

1.1.2 Tensore di sforzo

Studiamo un corpo a un istante t . Poniamo al suo interno una superficie chiusa S e consideriamone una porzione infinitesima ΔS . Definiamo su ΔS un versore normale \mathbf{n} che distingue una faccia positiva e una negativa. Il materiale sulla faccia positiva esercita una forza $\Delta \mathbf{F}$ sul materiale della faccia negativa di ΔS . Tale forza dipende dall'orientazione e dell'area di ΔS . Supponiamo che il rapporto $\frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S}$ tenda ad un limite finito $\frac{d\mathbf{F}}{dS}$ al tendere di ΔS a 0, e che il momento totale delle forze su dS sia nullo. Tale limite

$$T_i(\mathbf{n}) = \frac{dF_i}{dS} \quad (1.6)$$

prende il nome di *trazione*.

Supponiamo ora che una superficie ΔS_k sia parallela ad uno dei piani coordinati e che la normale a ΔS_k sia nella direzione positiva \mathbf{e}_k dell'asse coordinato x_k . La trazione su ΔS_k sarà quindi il vettore

$$\mathbf{T}(\mathbf{e}_k) = (T_1(\mathbf{e}_k), T_2(\mathbf{e}_k), T_3(\mathbf{e}_k))$$

Introduciamo la notazione

$$\tau_{jk} = T_k(\mathbf{e}_j) \quad (1.7)$$

Indicheremo quindi con τ_{jk} la componente k -esima della trazione agente sulla j -esima faccia coordinata. Tale trazione è considerata esercitata dal materiale sulla faccia positiva di ΔS su quello posto sulla faccia negativa. Per esempio se τ_{11} è positivo il materiale sulla faccia positiva di ΔS tira verso l'esterno il materiale sulla faccia negativa. τ_{jk} è detto *tensore di sforzo*, gli elementi diagonali del tensore di sforzo $\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}$ sono detti *sforzi normali*, mentre gli elementi τ_{jk} con $j \neq k$ sono detti *sforzi di taglio*.

1.1.3 Relazioni costitutive per i mezzi elastici isotropi

La relazione fra il tensore di sforzo (1.7) e il tensore di deformazione (1.5) è data dall'*equazione di Duhamel-Neumann*

$$\tau_{ij} = \rho \left(\frac{\partial F(T, \epsilon_{ij})}{\partial \epsilon_{ij}} \right)_T = C_{ijkl} \epsilon_{kl} + \beta_{ij} \Delta T \quad (1.8)$$

dove F è l'energia libera di Helmholtz, ΔT è la variazione di temperatura rispetto allo stato di riferimento che è indeformato e ρ è la densità del mezzo, e i tensori C_{ijkl} e β_{ij} sono

$$C_{ijkl} = \rho \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} \right); \quad \beta_{ij} = \rho \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \epsilon_{ij} \partial T} \right) \quad (1.9)$$

In un processo di deformazione isoterma ($\Delta T = 0$) dalla (1.8) si ottiene la *legge di Hooke generalizzata*

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (1.10)$$

Nel caso di un materiale isotropo si può dimostrare che la (1.8) assume la forma

$$\tau_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} - \beta \Delta T \delta_{ij} \quad (1.11)$$

dove

$$\mu = \rho \frac{\partial F}{\partial (\epsilon_{ij} \epsilon_{ij})} \quad \lambda = \rho \frac{\partial^2 F}{\partial \epsilon_{kk}^2} \quad \beta = \rho \frac{\partial^2 F}{\partial \epsilon_{kk} \partial T} \quad (1.12)$$

dove le derivate sono calcolate nello stato di riferimento.

I coefficienti λ e μ sono detti *parametri di Lamè isotermi*, e, dato che per piccole deformazioni $\rho \approx \text{const}$, possono considerarsi costanti. Invertendo la (1.11) si può ottenere la deformazione ϵ_{ij} in funzione di uno sforzo τ_{ij} .

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\tau_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \tau_{kk} \right) + \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \beta \Delta T \delta_{ij} \quad (1.13)$$

1.1.4 L'equazione di equilibrio e il tensore di Somigliana

Le equazioni che descrivono l'equilibrio di un solido elastico sono l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (1.14)$$

la legge del moto

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (1.15)$$

(con f_i componente i -esima del vettore delle forze di volume esterne) e la relazione costitutiva elastica $\tau_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$.

Unendo queste tre equazioni e trascurando i termini di secondo ordine otteniamo l'equazione di Cauchy-Navier

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{f} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1.16)$$

Trascurando il termine inerziale al primo membro della precedente otteniamo l'equazione di equilibrio

$$\mathbf{f} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} = 0 \quad (1.17)$$

La soluzione dell'equazione di equilibrio per lo spostamento in un generico punto \mathbf{x} dovuto a una forza applicata in \mathbf{x}' è detta funzione di Green dell'elastostatica. Utilizzando le relazioni costitutive per un mezzo elastico, omogeneo e isotropo la funzione di Green è rappresentata attraverso *il tensore di Somigliana* $G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ che esprime la componente i -esima dello spostamento in \mathbf{x} dovuto a una forza unitaria applicata in \mathbf{x}' in direzione dell'asse j -esimo

$$G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} + \frac{(x_j-x'_j)(x_i-x'_i)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} \right] \quad (1.18)$$

Possiamo utilizzare G_{ij} per calcolare lo spostamento dovuto ad una distribuzione di forze di volume $f_i(\mathbf{x}')$

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_V G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') f_j(\mathbf{x}') dV' \quad (1.19)$$

1.1.5 Dislocazioni descritte tramite forze equivalenti

Consideriamo una superficie di dislocazione Σ di area A_Σ orientata secondo una normale \mathbf{n} . Su Σ definiamo la discontinuità del campo di spostamento \mathbf{b} :

$$b_i = u_i^{(+)} - u_i^{-} \quad (1.20)$$

in cui $u_i^{(+)}$, $u_i^{(-)}$ denotano i vettori spostamento calcolati rispettivamente sulla faccia positiva e negativa di Σ . E' possibile associare a questo spostamento discontinuo una deformazione singolare ϵ_{ij}^s

$$\epsilon_{ij}^s = \frac{1}{2} (n_i b_j + n_j b_i) \delta(\zeta) \chi_\Sigma(\mathbf{x}) \quad (1.21)$$

dove $\zeta = 0$ è l'equazione di Σ e χ è la funzione caratteristica di Σ

$$\chi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{x} \in \Sigma \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \notin \Sigma \end{cases}$$

Il vettore u_i^s , che passando da $\zeta = 0^-$ a $\zeta = 0^+$ subisce un salto b_i , lo possiamo scrivere come

$$u_i^s = b_i H(\zeta) \chi_\Sigma(\mathbf{x})$$

dove $H(\zeta)$ è la funzione gradino di Heaviside

$$H(\zeta) = \begin{cases} 1 & \text{se } \zeta > 0 \\ 0 & \text{se } \zeta < 0 \end{cases}$$

Lo spostamento discontinuo e la deformazione singolare non sono accompagnate da uno sforzo, dato che la dislocazione implica una rottura dei legami molecolari, e questo non consente, in particolare, di utilizzare l'equazione di equilibrio (1.17) per ricavare lo spostamento. Tuttavia, se vogliamo trattare il mezzo fratturato "come se" fosse un continuo elastico, possiamo farlo, a patto di rimuovere lo sforzo singolare indebitamente introdotto. Questo risultato può essere ottenuto introducendo nelle equazioni di equilibrio

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0$$

una forza di volume fittizia f^s localizzata sulla superficie di dislocazione Σ e tale da eliminare gli sforzi singolari

$$f_i^s = -\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = -C_{ijkl} \frac{\partial \epsilon_{kl}^s}{\partial x_j} \quad (1.22)$$

Il vantaggio dell'utilizzo di queste forze fittizie, dette *forze di volume equivalenti alla dislocazione*, consiste nel fatto che una volta introdotte è possibile studiare lo spostamento nel mezzo dislocato come dovuto ad una distribuzione di forze descritta da (1.22), e quindi localizzata sulla superficie di dislocazione ma agente in un mezzo continuo. Possiamo quindi, nota la funzione di Green del sistema, risolvere il problema dislocativo inserendo la (1.22) nella (1.19):

$$u_i^s(\mathbf{x}) = \int_V f_i^s(\mathbf{x}') G_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV' \quad (1.23)$$

L'integrale può essere esteso su tutta la terra ($f_i^s(\mathbf{x}') = 0$ per $\mathbf{x}' \notin \Sigma$). Inserendo la (1.22) nella (1.23) otteniamo

$$u_i(\mathbf{x}) = - \int_V G_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') C_{jklm} \frac{\partial}{\partial x'_k} \epsilon_{lm}^s(\mathbf{x}') dV'$$

che dopo alcune manipolazioni porta a

$$u_i(\mathbf{x}) = C_{jklm} b_l \int_{\Sigma} n_m \frac{\partial}{\partial x_k} G_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\Sigma$$

Per una superficie di dislocazione infinitesima o puntiforme (o meglio, a distanze dalla superficie Σ molto maggiori delle dimensioni di $\sqrt{A_{\Sigma}}$) possiamo approssimare il precedente risultato a

$$u_i(\mathbf{x}) = C_{jklm} b_l n_m A_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial x_k} G_{ij}(\mathbf{x}) = M_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k} G_{ij}(\mathbf{x}) \quad (1.24)$$

dove

$$M_{jk} = C_{jklm} b_l n_m A_{\Sigma} \quad (1.25)$$

è detto *momento della dislocazione*.

1.1.6 Proprietà del momento di dislocazione

Riprendiamo la definizione (1.26). Dato che per la simmetria del tensore di sforzo $C_{ijkl} = C_{jikl}$, si ha che $M_{ij} = M_{ji}$. In un mezzo isotropo il tensore delle costanti elastiche assume la forma

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

quindi il tensore momento della dislocazione possiamo scriverlo

$$M_{ij} = [\lambda b_k n_k \delta_{ij} + \mu(b_i n_j + b_j n_i)] A_\Sigma$$

In una dislocazione di taglio, come quella associata a un terremoto, in cui \mathbf{b} e \mathbf{n} sono ortogonali, si ha che $b_k n_k = 0$, e possiamo quindi scrivere il momento della dislocazione come

$$M_{ij} = \mu(b_i n_j + b_j n_i) A_\Sigma \quad (1.26)$$

Si vede quindi che nel caso di una dislocazione di taglio la traccia del tensore $M_{kk} = 0$. Anche il determinante è nullo, e dato che è invariante per rotazioni, possiamo vederlo ponendoci in un sistema di riferimento in cui \mathbf{b} è parallelo all'asse x_1 e $\hat{\mathbf{n}}$ è parallelo all'asse x_2 :

$$M_{ij} = \mu b A_\Sigma \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Detti M_1 , M_2 e M_3 gli autovalori di M_{ij} in ordine crescente si ha che $M_1 + M_2 + M_3 = 0$ e $M_1 M_2 M_3 = 0$, da cui vediamo che un autovalore deve essere nullo e gli altri due devono essere opposti, ovvero $M_2 = 0$ e $M_1 = -M_3$. Si può verificare che gli autovettori relativi agli autovalori *max* e *min* sono diretti lungo le bisettrici dei quadranti individuati da \mathbf{b} e $\hat{\mathbf{n}}$ e quello relativo all'autovalore nullo è lungo il piano Σ , in direzione ortogonale a \mathbf{b} .

In una dislocazione tensile si ha che \mathbf{b} è parallelo a $\hat{\mathbf{n}}$, quindi $b_i = b n_i$. Otteniamo quindi

$$M_{ij} = (\lambda b \delta_{ij} + 2\mu b n_i n_j) A_\Sigma$$

Orientando l'asse x_2 lungo $\hat{\mathbf{n}}$ abbiamo

$$M_{ij} = b A_\Sigma \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

Il tensore momento è quindi diagonale nel sistema di riferimento costituito da 2 assi paralleli e uno ortogonale alla superficie di dislocazione. In una dislocazione tensile, né la traccia né il determinante di M_{ij} sono nulli; la traccia fornisce il prodotto $3K\Delta V$ dell'incompressibilità $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ per l'incremento di volume $\Delta V = b A_\Sigma$.

Si dimostra che la distribuzione di forze equivalenti alla dislocazione ha risultante e momento risultante nullo. Nel caso di una dislocazione di taglio è equivalente a una

distribuzione di doppie coppie di forze. Ogni doppia coppia ha momento risultante nullo. Ogni coppia in una singola doppia coppia ha momento pari a M_{ij} , $i \neq j$. Nel caso di una dislocazione tensile la distribuzione è equivalente alla somma di tre dipoli di forze orientate lungo i tre assi in cui il momento tensore è diagonale.

Se superficie di faglia Σ è rettangolare con bordi (margini) superiore e inferiore paralleli alla traccia, la sua area A_Σ può essere calcolata attraverso il prodotto $L \times W$ dove L è l'estensione della superficie di faglia lungo la direzione della traccia (y' in fig 1.2) e W è l'estensione lungo la direzione di massima pendenza (x' in fig 1.2).

1.2 Geometria delle superfici di dislocazione

Definiamo come superficie di dislocazione una superficie Σ rettangolare immersa in un semispazio tridimensionale omogeneo.

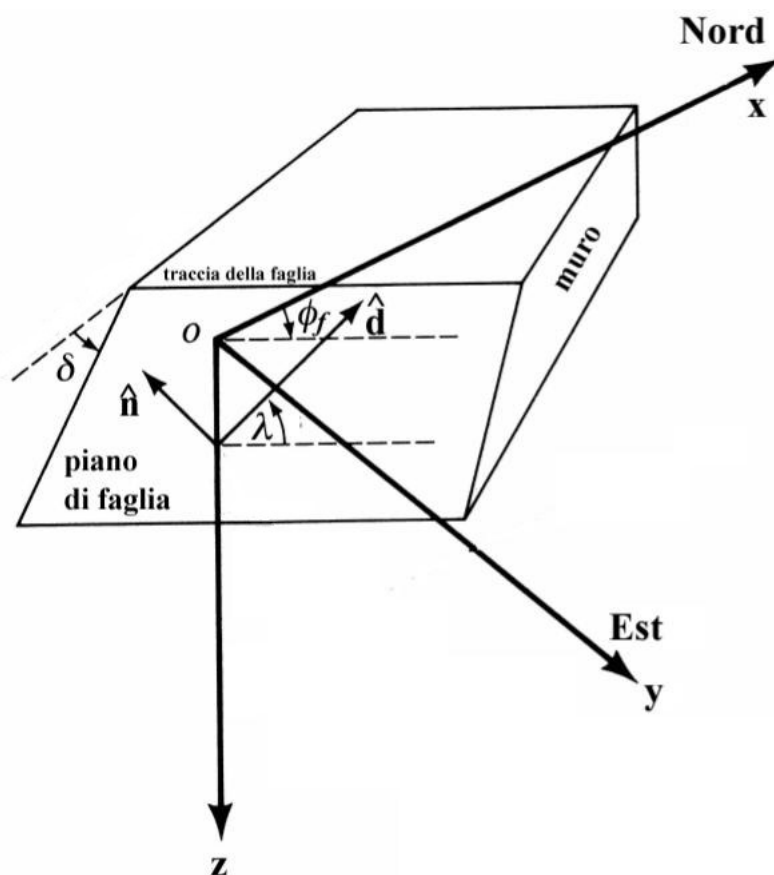


Figura 1.1: Rappresentazione schematica della superficie di faglia, il cui sono rappresentati gli angoli ϕ , δ e λ .

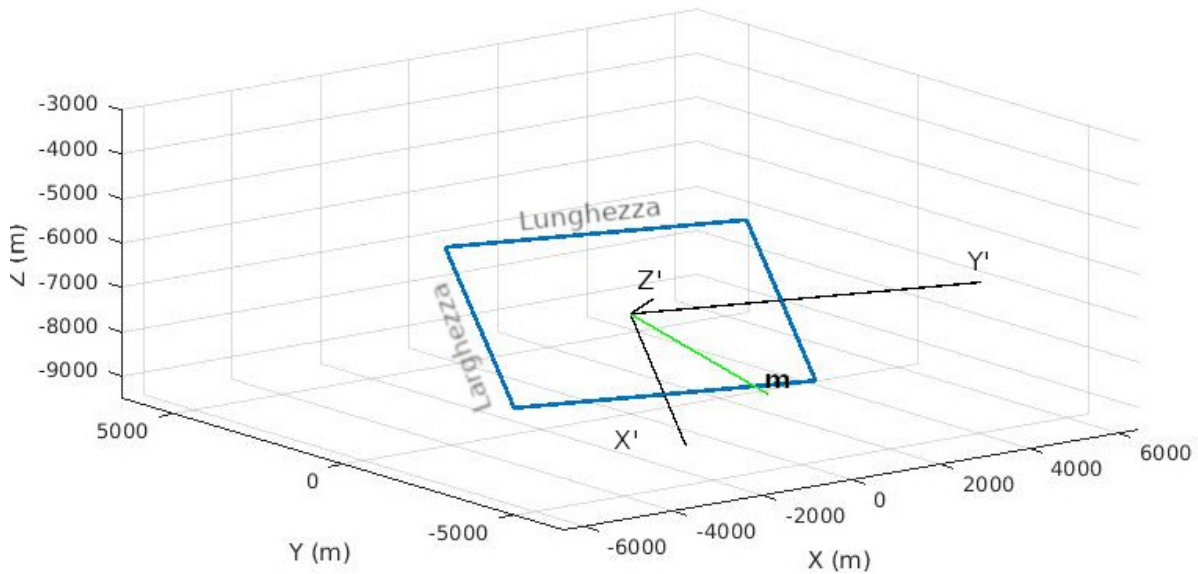


Figura 1.2: Geometria della superficie Σ . Si sono utilizzati i dati INGV1 per l'evento del 20 Maggio presentati in Serpelloni et al. 2012. La terna cartesiana (x', y', z') rappresenta il sistema di riferimento S' definito su Σ , mentre la terna (x, y, z) rappresenta il sistema di riferimento S con centro nella proiezione del centro di Σ sulla superficie, asse x rivolto verso Est, asse y rivolto verso Nord e asse z rivolto verso l'alto. \mathbf{m} indica la direzione di massima pendenza.

Per identificare univocamente la geometria di un determinato piano di faglia si è soliti utilizzare due angoli, l'angolo che definisce la direzione della traccia di faglia (fig. 1.1) *strike* ϕ e l'angolo di inclinazione (fig. 1.1) *dip* δ , e l'angolo di *rake* λ , che individua la direzione del movimento relativo dei blocchi delimitati dal piano di faglia stesso. La faglia separa il blocco che costituisce il tetto (*hanging wall block*), la porzione di semispazio nella direzione di massima pendenza, da quello che rappresenta il muro (*foot wall block*), la porzione di semispazio in direzione opposta. L'angolo di strike ϕ è definito come l'angolo destrogiro tra la direzione del Nord geografico e quella della traccia del piano di faglia in superficie (v. fig. 1.1), mentre l'angolo di dip δ è l'angolo di inclinazione del piano di faglia rispetto ad un piano orizzontale (v. fig. 1.1). Mentre il primo può variare su tutto il campo dei 360° il secondo è sempre compreso tra 0° e 90° . Il rake λ infine è determinato sul piano di faglia come l'angolo (sinistrogiro) tra la direzione della traccia della faglia e la direzione di scorrimento $\hat{\mathbf{d}}$ (*slip vector*) del tetto rispetto al muro (v. fig. 1.1). Se non si definisce un verso per la direzione della traccia di faglia esiste un'ambiguità di 180° nella indicazione di ϕ . Questa ambiguità viene risolta scegliendo come verso per la direzione della traccia quello che consentirebbe a un osservatore posto sulla traccia di avere il tetto alla sua destra.

Il versore *direzione di scorrimento* $\hat{\mathbf{d}}$ e la normale al piano di faglia $\hat{\mathbf{n}}$ possono essere definiti in un sistema di riferimento cartesiano con asse x in direzione Nord, asse y in

direzione Est e asse z verso il basso nel modo seguente:

$$\begin{aligned}n_x &= -\sin \delta \sin \phi \\n_y &= \sin \delta \cos \phi \\n_z &= \cos \delta\end{aligned}\tag{1.28}$$

$$\begin{aligned}d_x &= \cos \lambda \cos \phi + \cos \delta \sin \lambda \sin \phi \\d_y &= \cos \lambda \sin \phi - \cos \delta \sin \lambda \cos \phi \\d_z &= -\sin \delta \sin \lambda\end{aligned}\tag{1.29}$$

1.3 Le variazioni di gravità alla superficie

Consideriamo un sistema di riferimento con assi x e y in direzione orizzontale e asse z rivolto verso il basso, e punto P posto in $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, 0)$ sulla superficie libera ($z = 0$) di un semispazio all'istante t_0 . A un istante t_1 , a seguito di un processo deformativo, l'accelerazione di gravità misurata in P può essere diversa rispetto a quella misurata all'istante t_0 . La principale causa di variazione dell'accelerazione di gravità è dovuta al fatto che in t_1 P si trova in $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, e generalmente $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}_1$. Le variazioni di gravità orizzontali generalmente sono trascurabili, e l'unico contributo significativo è quello della componente verticale.

Si applica quindi su tale componente la *correzione d'aria libera* :

$$\frac{\Delta g_{free}}{\Delta z} \sim -2 \frac{g_0}{R} \sim -308 \mu Gal/m \quad (1.30)$$

con R raggio della Terra, g_0 gravità normale in P all'istante t_0 e Δz lo spostamento verticale. La restante variazione di gravità è dovuta unicamente alla redistribuzione di densità.

Integrando l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \rho \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho - \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (1.31)$$

si ottiene, fissato un punto \mathbf{r} nello spazio,

$$\Delta \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho \quad (1.32)$$

dove $\mathbf{u} = \mathbf{v} \Delta t$ è lo spostamento dalla configurazione iniziale al tempo t_0 alla configurazione finale t_1 e $\nabla \cdot \mathbf{u} = \epsilon_{kk}$ è la traccia del tensore di deformazione ϵ_{ij} .

La variazione del potenziale gravitazionale ΔU e la differenza di accelerazione di gravità $\Delta \mathbf{g}$ nel punto \mathbf{r} dovuto alla variazione di densità $\Delta \rho$ in un generico punto \mathbf{r}' possono essere scritti

$$\Delta U = -G \int_V \frac{\Delta \rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

$$\Delta \mathbf{G} = -\nabla(\Delta U) = -G \int_V \Delta \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

dove V è il dominio in cui $\Delta \rho \neq 0$ e dV' denota che l'integrazione viene fatta su \mathbf{r}' . Dato che $\Delta g \ll g$ solo la componente verticale z contribuisce significativamente al primo ordine alla variazione di accelerazione di gravità.

$$\Delta g = \Delta g_z = -G \frac{\partial}{\partial z} \int_V \Delta \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (1.33)$$

Come si può vedere dalla (1.32) i contributi alla variazione di gravità dovuti alla variazione di densità sono due.

Il contributo Δg_B Il contributo Δg_B è dovuto allo spostamento normale rispetto ai confini delle regioni a densità costante. In un semispazio omogeneo questo contributo è localizzato sopra la superficie del suolo dove $\Delta\rho = \pm\rho$ (positivo in caso di sollevamento e negativo in caso di subsidenza). È un contributo importante dal momento che il valore di $\Delta\rho$ è grande anche se il dominio di integrazione è piccolo, essendo confinato tra $z = 0$ e $z = u_z$ (spostamento della superficie terrestre).

Secondo il teorema di Gauss

$$\oint_{\partial V} \Delta \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} ds = -4\pi G \Delta M_{int} \quad (1.34)$$

dove ΔM_{int} è la variazione di massa racchiusa in ∂V . Scegliendo come ∂V una superficie cilindrica di altezza infinitesima pari a u_z e superficie delle basi A , con base superiore in $z < 0$ e base inferiore in $z > 0$ possiamo calcolare l'integrale e ottenere

$$-2A|\Delta g| = 4\pi G\rho_0 A u_z$$

da cui

$$\Delta g_{B0} = -2\pi G\rho_0 u_z \quad (1.35)$$

Il contributo Δg_ϵ Questo contributo è dovuto alla dilatazione (se $\epsilon_{kk} > 0$) o contrazione (se $\epsilon_{kk} < 0$) del mezzo, ed è importante per ragioni opposte a Δg_B : $\nabla \cdot \mathbf{u}$ è tipicamente piccolo, ma il dominio di integrazione è l'intero semispazio. Per il teorema di Helmholtz possiamo scrivere \mathbf{u} come la somma del gradiente di un campo scalare Θ e del rotore di un campo vettoriale Ψ .

$$\mathbf{u} = \nabla\Theta + \nabla \times \Psi \quad (1.36)$$

Utilizzandolo in $\Delta\rho = -\rho_0\nabla \cdot \mathbf{u}$ otteniamo $\Delta\rho = -\rho_0\nabla^2\Theta$. Riscriviamo quindi la (1.33):

$$\Delta g_\epsilon = -G\rho_0 \frac{\partial}{\partial z} \int_V \nabla'^2 \Theta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (1.37)$$

Ponendo $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ e utilizzando la seconda identità di Green otteniamo

$$\begin{aligned} & \int_V \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla'^2 \Theta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \\ &= \int_V \Theta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla'^2 \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' + \oint_{\partial V} \left(\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Theta}{\partial n'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \Theta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi}{\partial n'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right) dS' \end{aligned} \quad (1.38)$$

dato che Θ è definito a meno di un campo scalare Θ_0 tale che $\nabla^2\Theta_0 = 0$, possiamo prendere Θ_0 in modo che $\Theta^* = \Theta + \Theta_0$ sia nullo su ∂V . Dato inoltre che $\nabla^2\Psi = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ si ha che

$$\int_V \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla'^2 \Theta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' = -4\pi \int_V \Theta^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' + \oint_{\partial V} \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Theta^*}{\partial n'} dS' \quad (1.39)$$

L'integrale di volume a destra dell'uguale si annulla per $\mathbf{r} \notin V$, mentre l'integrale di superficie può essere considerato come esteso alla superficie $z' = 0$ e ad un emisfero di raggio infinito. Dal momento che $\Psi \rightarrow 0$ per $r_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty$ dobbiamo calcolare l'integrale di superficie solo in $z' = 0$. Ne viene quindi che

$$\oint_{\partial V} \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Theta^*}{\partial n'} dS' = - \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \left(\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Theta^*}{\partial z'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right)$$

da cui si arriva a

$$\Delta g_\epsilon(x, y, z = 0^-) = 2\pi G \rho_0 \frac{\partial \Theta^*}{\partial z}(x, y, 0) \quad (1.40)$$

Il problema si riduce quindi a determinare Θ dall'equazione $\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla^2 \Theta$ dove \mathbf{u} è il campo di spostamento prodotto da una doppia coppia di forze in un semispazio elastico. A tal fine è possibile utilizzare l'espressione dello spostamento fornita da Mindlin 1936. A seguito di questo si determina Θ_0 , che soddisfa il seguente problema alle derivate parziali

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Theta_0 &= 0 \\ \Theta_0 &= 0, & r_0 \rightarrow \infty \\ \Theta_0 &= -\Theta, & z = 0 \end{aligned}$$

Questo è stato fatto da Pintori 2014/2015 per le componenti di dipolo del tensore momento. Le formule relative alle componenti di doppia coppia sono invece riportate in Belardinelli et al. (in preparazione) dove si è verificato anche che ogni contributo di dipolo o doppia coppia è in accordo con la formule per la variazione di gravità dovute a sorgenti dislocative in semispazio elastico fornite da Okubo 1991 seguendo un altro metodo. Tutte le formule per le variazioni di gravità compaiono nella classe `MOMENT` modificata di `LibHalfSpace` e sono di seguito riportate.

$$u_i = M_{jk} G_{jk,i} \quad (1.41)$$

con

$$\begin{aligned}
\text{se } j = k \text{ e } i \neq 3, j \neq 3 \quad G_{jj,i} &= \frac{X_i}{4\pi\mu} \left(\frac{1}{R^3} - \frac{3X_j^2}{R^5} - (1-2\nu)(1-\delta_{ij}\eta - \alpha X_j^2) \right) \\
\text{se } j = k \text{ e } i = 3, j \neq 3 \quad G_{jj,3} &= \frac{1}{4\pi\mu} \left(\frac{X_3}{R^3} - \frac{3X_j^2 X_3}{R^5} - (1-2\nu)(\zeta - \beta X_j^2) \right) \\
\text{se } j = k = 3 \text{ e } i \neq 3 \quad G_{33,i} &= \frac{X_i}{4\pi\mu} \left(\frac{3X_3^2}{R^5} - \frac{2\nu}{R^3} \right) \\
\text{se } j = k = i = 3 \quad G_{33,3} &= \frac{X_3}{4\pi\mu} \left(\frac{-3X_3^2}{R^5} - \frac{2\nu}{R^3} \right) \\
\text{se } j = 1, k = 2 \text{ e } i \neq 3 \quad G_{12,i} &= \frac{X_2(1-\delta_{i2}) + X_1(1-\delta_{i1})}{2\pi\mu} \left(\frac{3X_i^2}{R^5} + (1-2\nu)(\eta - \alpha X_i^2) \right) \\
\text{se } j = 1, k = 2, i = 3 \quad G_{12,3} &= \frac{X_1 X_2}{2\pi\mu} \frac{3X_3}{R^5} \\
\text{se } j \neq 3, k = 3 \text{ e } i \neq 3 \quad G_{j3,i} &= -\frac{3X_3}{R^5} \frac{X_j X_i}{2\pi\mu} \\
\text{se } i = k = 3 \text{ e } j \neq 3 \quad G_{j3,3} &= \frac{X_j X_3}{2\pi\mu} \frac{3X_3}{R^5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta g_{B,11} &= -\frac{G\rho_0 M_{11}}{2\mu} \left[\left(\frac{X_3}{R^3} - \frac{1-2\nu}{R(R+X_3)} \right) - X_1^2 \left(\frac{3X_3}{R^5} - \frac{1-2\nu}{(R+X_3)^2 R^2} - \frac{1-2\nu}{R^3(R+X_3)} \right) \right] \\
\Delta g_{B,22} &= -\frac{G\rho_0 M_{22}}{2\mu} \left[\left(\frac{X_3}{R^3} - \frac{1-2\nu}{R(R+X_3)} \right) - X_2^2 \left(\frac{3X_3}{R^5} - \frac{1-2\nu}{(R+X_3)^2 R^2} - \frac{1-2\nu}{R^3(R+X_3)} \right) \right] \\
\Delta g_{B,33} &= -G\rho_0 M_{33} \frac{x_3}{2\mu} \left(\frac{-2\nu}{R^3} + \frac{3X_3^2}{R^5} \right) \\
\Delta g_{B,12} &= G\rho M_{12} \frac{X_1 X_2}{\mu R^2} \left[\frac{3X_3}{R^3} - (1-2\nu) \left(\frac{1}{(R+X_3)^2} + \frac{1}{R(R+X_3)^2} \right) \right] \\
\Delta g_{B,13} &= -G\rho_0 \frac{M_{13}}{\mu} \frac{X_1 X_3^2}{R^5} \\
\Delta g_{B,23} &= -G\rho_0 \frac{M_{23}}{\mu} \frac{X_2 X_3^2}{R^5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta g_{\epsilon,11} &= G\rho_0 M_{11} \frac{1-2\nu}{2\mu} \left[-\frac{1}{(X_3+R)R} + \frac{X_1^2}{(X_3+R)^2 R^2} + \frac{X_1^2}{(X_3+R)R^3} \right] \\
\Delta g_{\epsilon,22} &= G\rho_0 M_{22} \frac{1-2\nu}{2\mu} \left[-\frac{1}{(X_3+R)R} + \frac{X_2^2}{(X_3+R)^2 R^2} + \frac{X_2^2}{(X_3+R)R^3} \right] \\
\Delta g_{\epsilon,33} &= -G\rho_0 M_{33} (1-2\nu) \frac{X_3}{2\mu R^3} \\
\Delta g_{\epsilon,12} &= G\rho_0 M_{12} \frac{1-2\nu}{2\mu} \frac{X_1 X_2}{R^2} \left[\frac{1}{(R+X_3)^2} + \frac{1}{R(R+X_3)} \right] \\
\Delta g_{\epsilon,13} &= 0 \\
\Delta g_{\epsilon,23} &= 0 \\
\Delta g_B &= \Delta g_{B,11} + \Delta g_{B,22} + \Delta g_{B,33} + \Delta g_{B,12} + \Delta g_{B,13} + \Delta g_{B,23} \\
\Delta g_\epsilon &= \Delta g_{\epsilon,11} + \Delta g_{\epsilon,22} + \Delta g_{\epsilon,33} + \Delta g_{\epsilon,12} + \Delta g_{\epsilon,13} + \Delta g_{\epsilon,23} \\
\Delta g &= \Delta g_B + \Delta g_\epsilon
\end{aligned}$$

Dove abbiamo posto $X_i = x_i - x_i^{(c)}$, $\mathbf{x}^{(c)}$ coordinate del centro, $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, $\alpha = (3R + X_3)/R^3(R + X_3)^3$, $\beta = (2R + X_3)/R^3(R + X_3)^2$, $\eta = 1/R(R + X_3)^2$ e $\zeta = 1/R(R + X_3)$.

Capitolo 2

Calcolo di spostamento e variazioni di gravità del terremoto dell'Emilia

2.1 Il terremoto dell'Emilia

Nel periodo di maggio-giugno 2012 una sequenza sismica ha colpito la regione della pianura Padana, con due eventi sismici di magnitudo momento $M_W > 6$. Il primo, di magnitudo momento $M_W 6.1$ e magnitudo locale $M_L 5.9$, è avvenuto nei pressi di Finale Emilia (a circa 30 km ad Ovest di Ferrara) il 20 maggio 2012 alle 02 : 03 : 53 (UTC), e il secondo, di magnitudo $M_W = 6.0$ e $M_L = 5.8$, è avvenuto il 29 maggio 2012 alle 07 : 00 : 03 (UTC) presso Mirandola, a circa 12 km a sud-ovest dell'evento del 20 (Serpelloni et al. 2012). La sequenza sismica ha coinvolto una regione che si estende in direzione Est-Ovest per più di 50 km, presentando sette eventi di magnitudo $M_L > 5.0$ e più di 2300 eventi di magnitudo $M_L > 1.5$. I meccanismi focali degli eventi principali hanno mostrato cinematiche di compressione con piani nodali inversi orientati in direzione Est-Ovest, ciò significa che i terremoti sono avvenuti su faglie inverse con tracce orientate circa in direzione Est-Ovest. La regione della Pianura Padana considerata è caratterizzata da un lento tasso di deformazione, a causa del movimento in direzione Nord della fascia appenninica settentrionale, sepolta dallo strato sedimentario della pianura padana. Misure GPS antecedenti agli eventi sismici hanno rilevato in questa parte della Pianura Padana un restringimento in direzione SO-NE di 2 mm/anno.

Diversi modelli di faglia sono stati proposti per l'evento del 20 maggio. In questo lavoro è stato utilizzato il modello proposto da Serpelloni et al. 2012, ottenuto dall'inversione dei dati GPS e considerando una dislocazione rettangolare con slip uniforme immersa in un semispazio elastico uniforme.

Length (km)	8.7	Width (km)	6.5
D. top (km)	5.2	D. bottom (km)	9.3
Dip (°)	38.8	Strike (°)	106
CF Lon (° E)	11.293	CF Lat (° N)	44.866
Slip (cm)	116	Rake (°)	85.7
M_W	6.12	//	//

Tabella 2.1: Parametri di faglia stimati da Serpelloni et al. 2012, soluzione INGV1. Con "D. top" e "D. bottom" si indicano rispettivamente la profondità del margine superiore e inferiore della superficie di faglia. Con "CF Lon" e "CF Lat" si indicano le coordinate geografiche della proiezione sulla superficie del centro della faglia.

Questi parametri sono stati utilizzati per calcolare lo spostamento e la variazione di gravità con LibHalfSpace.

2.2 La classe MOMENT di LibHalfSpace

LibHalfSpace (Ferrari, Bonafede e Belardinelli 2016) è una libreria per C++ che segue il modello della programmazione a oggetti. LibHalfSpace è uno strumento adatto e versatile per lo studio di deformazioni e sforzi in un semispazio elastico. Nella libreria vi sono implementate classi rappresentanti i modelli di sorgente comunemente usati in letteratura. Per lo svolgimento del lavoro qui presentato è stata implementata la classe MOMENTEXT e utilizzata una classe MOMENT modificata che oltre allo spostamento calcola le variazioni di gravità prodotte da una sorgente di dislocazione puntiforme rappresentata da un tensore momento.

La classe MOMENT modificata permette il calcolo dello spostamento $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ e delle variazioni di gravità $\Delta g_\epsilon(\mathbf{x})$ e $\Delta g_B(\mathbf{x})$ dovuti a una sorgente puntiforme rappresentata da un tensore *momento della dislocazione* M_{ij} . Tale dislocazione è localizzata su un punto \mathbf{x}_c di un semispazio elastico omogeneo. Dato questo tipo di sorgente, LibHalfSpace consente di calcolare lo spostamento $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ e la variazione di gravità $\Delta g(\mathbf{x})$ in una griglia di punti sulla superficie.

I valori di output sono calcolati su una griglia di punti \mathbf{x} sulla superficie e vengono salvati in un file di testo `.dat`. Tali valori sono le coordinate (x, y) del punto \mathbf{x} , le tre componenti (u_x, u_y, u_z) del vettore spostamento $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ e i valori di $\Delta g_B(\mathbf{x})$, $\Delta g_\epsilon(\mathbf{x})$, $\Delta g(\mathbf{x}) = \Delta g_\epsilon(\mathbf{x}) + \Delta g_B(\mathbf{x})$. Nella pagina seguente viene mostrato un esempio di parte del datafile generato dal metodo GRAVITY per una sorgente puntiforme che descrive l'evento del 20 Maggio 2012 del terremoto dell'Emilia.

Datafile creation: Wed Sep 5 23:39:18 2018

Parameters of the datafile:

N_1 = +100 ,N_2 = +100

DX_1 = +4.50000e+04 m, DX_2 = +4.50000e+04 m

my moment - Main features

#

Position of source center at:

x0 = +0.00000e+00 km

y0 = +0.00000e+00 km

z0 = -7.25000e+00 km

The elastic parameter of the medium are:

mu = +3.00000e+10

nu = +2.50000e-01

#

#	x (m)	y (m)	Ux (m)	Uy (m)	Uz (m)
	dG(m/s ²)		dG_rho(m/s ²)	dG_Uz(m/s ²)	
-2.25000e+04	-2.25000e+04		+3.13875e-03	+4.03460e-03	-6.56985e-04
	-1.38196e-09	-6.93623e-10	-6.88337e-10		
-2.25000e+04	-2.20500e+04		+3.19141e-03	+4.04173e-03	-6.82496e-04
	-1.40654e-09	-6.91473e-10	-7.15065e-10		
-2.25000e+04	-2.16000e+04		+3.24310e-03	+4.04583e-03	-7.08437e-04
	-1.43078e-09	-6.88535e-10	-7.42244e-10		
-2.25000e+04	-2.11500e+04		+3.29359e-03	+4.04671e-03	-7.34772e-04
	-1.45460e-09	-6.84760e-10	-7.69836e-10		
-2.25000e+04	-2.07000e+04		+3.34267e-03	+4.04422e-03	-7.61460e-04
	-1.47790e-09	-6.80097e-10	-7.97798e-10		
-2.25000e+04	-2.02500e+04		+3.39009e-03	+4.03817e-03	-7.88457e-04
	-1.50058e-09	-6.74496e-10	-8.26083e-10		
-2.25000e+04	-1.98000e+04		+3.43558e-03	+4.02840e-03	-8.15709e-04
	-1.52254e-09	-6.67905e-10	-8.54636e-10		
-2.25000e+04	-1.93500e+04		+3.47888e-03	+4.01475e-03	-8.43161e-04
	-1.54367e-09	-6.60268e-10	-8.83398e-10		
-2.25000e+04	-1.89000e+04		+3.51968e-03	+3.99706e-03	-8.70750e-04
	-1.56384e-09	-6.51535e-10	-9.12304e-10		

2.3 La classe MOMENTEXT

La classe MOMENTEXT è stata ideata in questa tesi per calcolare lo spostamento $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ e la variazione di gravità $\Delta g(\mathbf{x})$ generati da una faglia estesa, descritta attraverso una superficie piana orientata nello spazio e da una distribuzione uniforme di momento sismico M_{ij} . Questa rappresentazione è necessaria se si vogliono studiare spostamenti e variazioni di gravità a una distanza dal piano di faglia confrontabile o minore delle dimensioni della stessa faglia. In questo caso infatti l'approssimazione di sorgente puntiforme non è valida (v. sez. 1.1.5).

La superficie di dislocazione viene divisa in una griglia di $n \times m$ punti tramite il programma `faultdivide`, presentato in seguito.

MOMENTEXT riceve in input le coordinate di questi punti, e considera ognuno di essi come sorgente puntiforme, istanziando un oggetto di tipo MOMENT per ognuno. La classe funziona unicamente tramite il costruttore, dichiarato

```
MOMENTEXT (string Input, string outFile, int lines,  
double moment [6], MEDIUM med )
```

in cui

- `Input` è il nome del file contenente i dati della faglia;
- `outFile` è il nome che verrà dato al file di output generato;
- `lines` è il numero di linee del file di input;
- `moment` è un array contenente le componenti indipendenti del tensore M_{ij} , ($M_{11}, M_{22}, M_{33}, M_{12}, M_{13}, M_{23}$);
- `med` è un oggetto di tipo MEDIUM contenente le informazioni sui moduli elastici e sulla densità del semispazio.

Il file di input deve contenere le coordinate x, y, z degli $n \times m$ punti, un punto per riga, come mostrato in seguito nel caso di tre punti:

```
-4880.62 3696.5 -5026.78  
-3780.38 3317.65 -5026.78  
-2680.14 2938.81 -5026.78
```

MOMENTEXT crea un oggetto di tipo MOMENT per ognuno di questi punti, e per ognuno di essi produce in output un file di testo contenente le coordinate del punto $\mathbf{x}^{(s)}$ sulla superficie, le tre componenti del vettore $\mathbf{u}(\mathbf{x}^{(s)})$ e le variazioni di gravità $\Delta g_B(\mathbf{x}^{(s)})$, $\Delta g_e(\mathbf{x}^{(s)})$ e $\Delta g(\mathbf{x}^{(s)})$, come mostrato precedentemente. Gli $n \times m$ file generati possono

essere elaborati con il programma `Map`. `Map` somma per ogni punto sulla superficie il contributo allo spostamento e alla variazione di accelerazione di gravità generato da ognuno degli $n \times m$ punti, in modo da ottenere un unico file di testo che riporti per ogni punto della superficie libera lo spostamento e la variazione di gravità complessivi.

2.4 Il programma `Faultdivide`

`Faultdivide` è un programma che consente di discretizzare una superficie di faglia Σ piana e rettangolare immersa in un semispazio in una griglia di $n \times m$ punti e di calcolare il tensore M_{ij} a partire dalle proprietà geometriche della superficie e dagli angoli δ , ϕ e λ (v. sez. 1.2). Il programma è stato ideato per discretizzare una faglia estesa in un insieme di punti in modo da poterlo utilizzare per generare i dati di input per la classe `MOMENTEXT` di `LibHalfSpace`. `Faultdivide` utilizza tre classi:

- `Fault`, classe ideata per fornire le informazioni geometriche e meccaniche della superficie di faglia (lunghezza L , larghezza W e profondità *bottom* e *top* espresse in metri, angoli di strike, dip e rake espressi in gradi)
- `Squari`, classe ideata per discretizzare la superficie di faglia
- `Mij`, classe ideata per calcolare il tensore M_{ij} .

2.4.1 La classe `Squari`

La classe `Squari` crea una griglia di punti equidistanti su una superficie di faglia rettangolare a partire dai dati forniti da `fault` e due parametri di tipo intero, n e m , per rappresentare il tasso di discretizzazione. Definiamo su Σ un sistema di riferimento S' con l'asse x' in direzione della larghezza, rivolto verso le profondità crescenti, l'asse y' in direzione della lunghezza e l'asse z' in direzione normale alla superficie (v. fig. 2.1). Poniamo O' l'origine del sistema di riferimento al centro di Σ . Chiamiamo con L la lunghezza e con W la larghezza di Σ , e definiamo i parametri l , w e i numeri interi \tilde{n} , \tilde{m} :

$$\begin{aligned}
 l &= \frac{L}{n} \\
 w &= \frac{W}{m} \\
 \tilde{n} &= \frac{n-1}{2} \\
 \tilde{m} &= \frac{m-1}{2}
 \end{aligned}$$

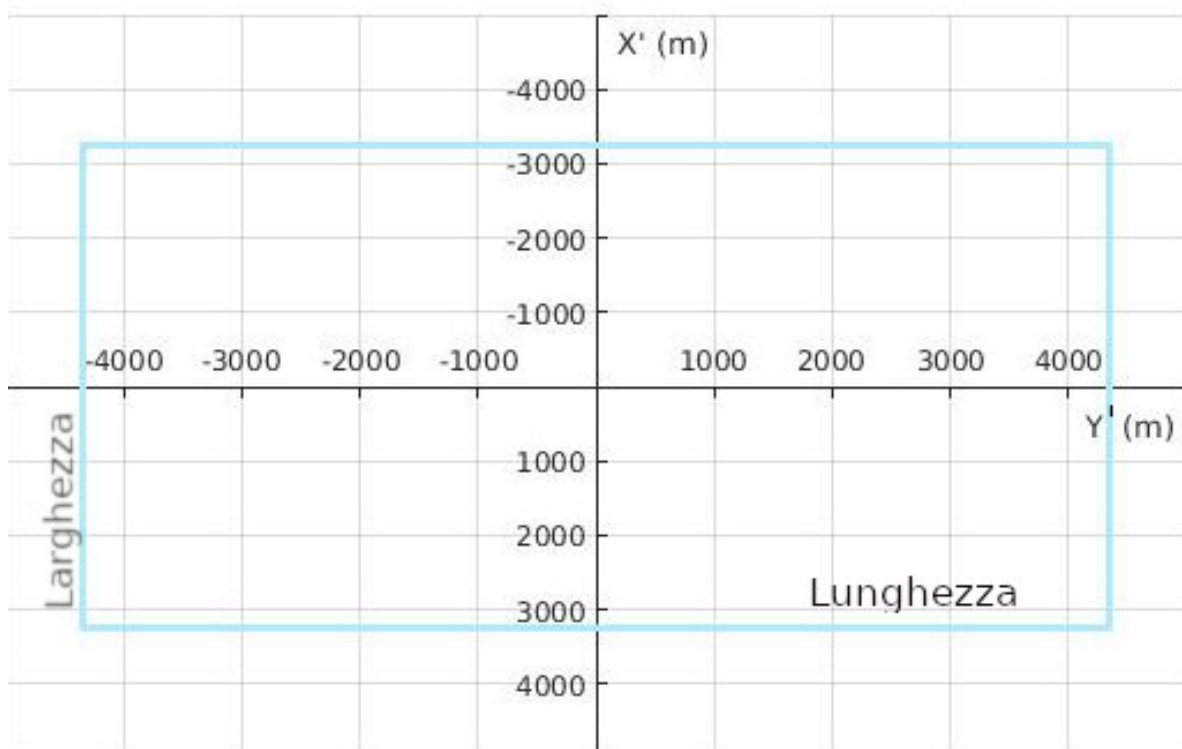


Figura 2.1: Sistema di riferimento S' definito su Σ , con x' in direzione della massima pendenza (si noti il verso), y' in direzione della traccia e z' normale alla superficie.

Come si può vedere dalle definizioni di \tilde{n} e \tilde{m} occorre che n e m siano numeri dispari. Il punto \mathbf{x}_i ha in S' coordinate

$$\begin{aligned}x_i(j, k) &= jl \\y_i(j, k) &= kw \\z_i(j, k) &= 0\end{aligned}$$

Dove j e k sono interi che sono compresi rispettivamente negli intervalli da $-\tilde{n}$ a \tilde{n} e da $-\tilde{m}$ a \tilde{m} .

Definiamo ora un sistema di riferimento S con asse x rivolto verso Est, asse y rivolto verso Nord, asse z rivolto verso l'alto e origine O nella proiezione di O' sulla superficie del semispazio. Per passare da S' a S il sistema di riferimento subisce una rotazione oraria di δ attorno all'asse y' , per porsi nel sistema di riferimento S^* , e poi una rotazione antioraria di ϕ attorno all'asse z^* , per porsi nel sistema di riferimento S^{**} . Da qui i vettori di S^{**} vengono traslati di d (profondità del centro di Σ) in direzione di z^{**} verso l'alto per ottenere il sistema di riferimento S . La matrice di rotazione $A(\delta, \phi)$ è quindi data da

$$\begin{aligned}A(\delta, \phi) &= \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos -\delta & 0 & -\sin -\delta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin -\delta & 0 & \cos -\delta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \delta & 0 & \sin \delta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \delta & 0 & \cos \delta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \delta \cos \phi & \sin \phi & -\sin \delta \cos \phi \\ -\cos \delta \sin \phi & \cos \phi & -\sin \delta \sin \phi \\ \sin \delta & 0 & \cos \delta \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{2.1}$$

Il punto \mathbf{x}_i (in S) sarà quindi legato a \mathbf{x}'_i (in S') dalla relazione

$$\mathbf{x}'_i = A(\delta, \phi)\mathbf{x} + \mathbf{d}\tag{2.2}$$

dove $\mathbf{d} = (0, 0, -d)$.

Le coordinate di $\mathbf{x}^{(i)}$ sono quindi

$$\begin{aligned}x^{(i)} &= x'^{(i)} \cos \delta \cos \phi + y'^{(i)} \sin \phi \\y^{(i)} &= -x'^{(i)} \cos \delta \sin \phi + y'^{(i)} \cos \phi \\z^{(i)} &= -x'^{(i)} \sin \delta - d\end{aligned}$$

I due parametri j e k presentati in precedenza sono rappresentati all'interno della classe da due variabili statiche, ovvero comuni ad ogni oggetto di tipo `Squari`, che vengono adeguatamente modificate ad ogni istanziazione.

2.4.2 La classe Mij

La classe `Mij` di `Faultdivide` calcola le sei componenti indipendenti del tensore M_{ij} . Il calcolo viene effettuato utilizzando le formule presentate in (1.29), (1.28) e (1.26), dato che `LibHalfSpace` lavora in un sistema di riferimento con l'asse x rivolta verso Est, l'asse y rivolta verso Nord e l'asse z rivolta verso l'alto, è necessario ruotare $\hat{\mathbf{d}}$ ((1.29)) e $\hat{\mathbf{n}}$ ((1.28)) per riportarli in tale sistema di riferimento. Viene effettuata una rotazione in senso antiorario lungo l'asse y di $\alpha = 180^\circ$, e in seguito una rotazione di $\beta = 90^\circ$ attorno al nuovo asse z' . La matrice di rotazione A è

$$A = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

da cui

$$\hat{\mathbf{n}}' = A\hat{\mathbf{n}} = (n_2, n_1, n_3) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{b}' = A\mathbf{b} = (b_2, b_1, b_3) \quad (2.4)$$

dove $\mathbf{b} = b\hat{\mathbf{d}}$ e b è il valore di slip riportato in tab 2.1. Le sei componenti indipendenti di M_{ij} vengono quindi calcolate inserendo $\hat{\mathbf{n}}'$ e \mathbf{b}' in (1.26) :

$$M_{ij} = A_{\Sigma^{(p)}} b \mu (d'_i n'_j + d'_j n'_i) \quad (2.5)$$

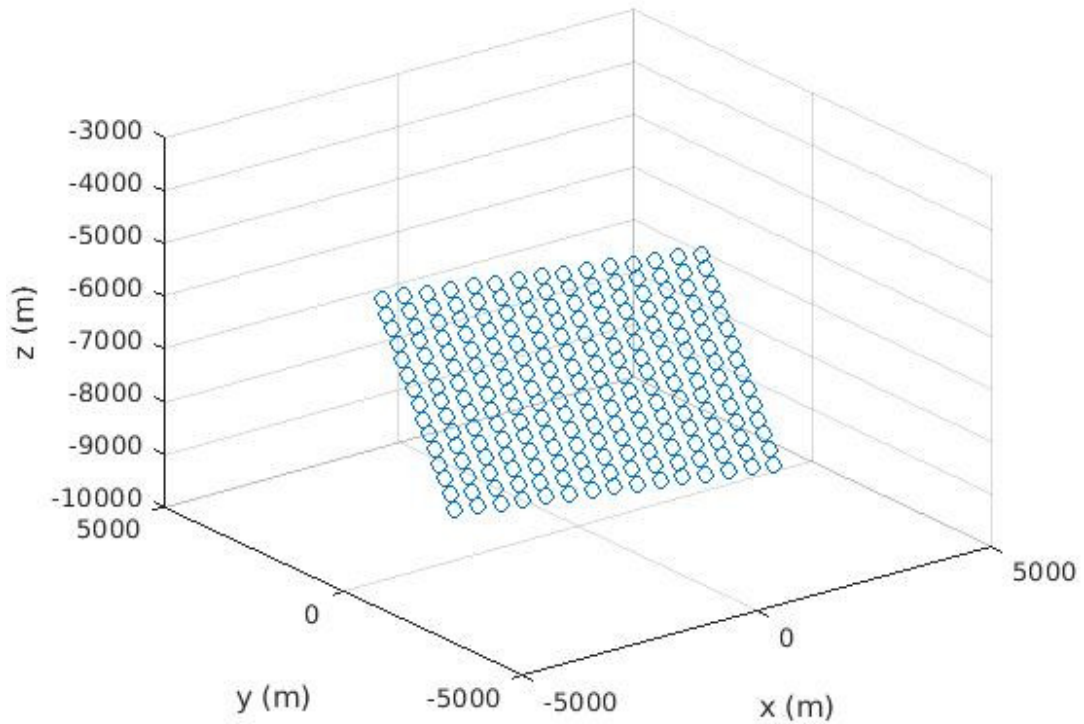
dove $\Sigma^{(p)} = lw$. I dati così generati sono stampati in output su un file di testo.

2.4.3 L'algoritmo e i dati generati

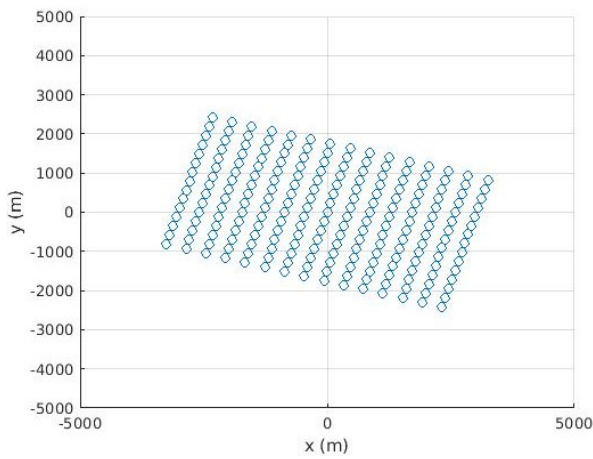
`Datacreate` crea $n \times m$ oggetti di tipo `Squari`, utilizzando le informazioni sulla geometria di Σ contenute in un oggetto di tipo `Fault` e stampa su un file di testo le coordinate nel sistema S dei punti generati, in modo che possano essere utilizzati da un oggetto della classe `MOMENTEXT`. In seguito calcola tramite `Moment` le componenti indipendenti del tensore momento della dislocazione, stampandole in output su un altro file di testo. Di seguito è mostrato la superficie di faglia dell'evento sismico del 20 maggio discretizzata tramite `Faultdivide`. Si sono utilizzati i dati presentati in tabella 2.1 ed è stata utilizzata una discretizzazione 15×15 . I dati sono stati elaborati graficamente con `MATLAB`.

2.4.4 Il programma Map

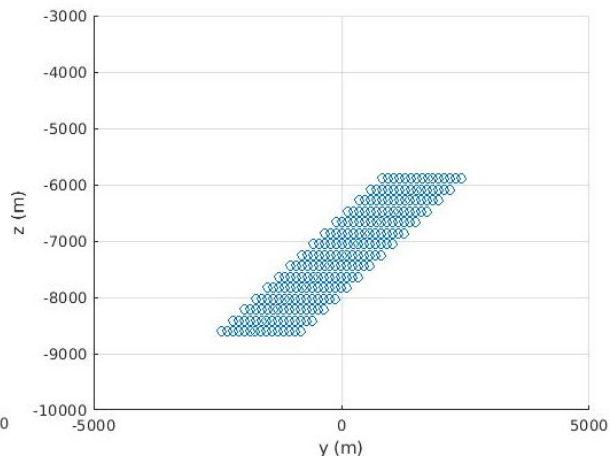
Il programma `Map` analizza tutti i file generati con `LibHalfSpace`, e calcola su ogni punto \mathbf{x} della superficie del semispazio i valori delle coordinate di $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ e di $\Delta g_b(\mathbf{x})$, $\Delta g_\epsilon(\mathbf{x})$ e $\Delta g(\mathbf{x})$ sommando i contributi dati da ogni porzione $\Sigma^{(p)}$ di Σ . Ad ogni punto viene inoltre aggiunta la correzione d'aria libera (1.30). I dati così elaborati vengono stampati in output e sono utilizzati per creare grafici con `MATLAB`.



(a) *Vista tridimensionale della superficie*



(b) *Proiezione sul piano XY della superficie*



(c) *Proiezione sul piano YZ della superficie*

Figura 2.2: Superficie di faglia dell' evento sismico del 20 maggio, discretizzata con Faultdivide (discretizzazione 15×15), da diverse prospettive. La superficie di faglia è stata suddivisa in porzioni rettangolari di uguale area. Ogni circolo rappresenta il punto dove è stata applicata una sorgente puntiforme collocata al centro della relativa porzione del piano di faglia.

Capitolo 3

Risultati

3.1 Risultati ottenuti

In questa sezione verranno presentati i risultati ottenuti seguendo la procedura descritta nel capitolo 2.2 per l'evento del 20 maggio 2012. I parametri di faglia sono quelli stimati da Serpelloni et al. 2012. I parametri elastici del mezzo, in entrambi i casi, sono stati $\mu = 30$ GPa, $\nu = 0,25$ e $\rho = 2500$ kg m⁻³ e corrispondono ai valori comunemente usati per il calcolo dello spostamento generato da una dislocazione in un mezzo omogeneo. La superficie di dislocazione è stata rappresentata attraverso una distribuzione di sorgenti puntiformi utilizzando il programma `Faultdivide` per generare la superficie di dislocazione presentato in sez. 2.4.3 (v. fig. 2.2).

3.1.1 Tensore momento

Le sei componenti indipendenti del tensore momento della dislocazione M_{ij} sono state calcolate con la classe `Mij` (v. sez. 2.4.2). In seguito è presentato il tensore momento $M_{ij}^{(p)}$ relativo ad una singola porzione di superficie $\Sigma^{(p)}$ in cui è stata suddivisa la superficie di faglia Σ .

$$M_{ij}^{(20)} = \begin{bmatrix} -7.45641 & -22.4612 & -8.68552 \\ -22.4612 & -65.9774 & -14.3056 \\ -8.68552 & -14.3056 & 73.4338 \end{bmatrix} \times 10^{14} \text{ N m} \quad (3.1)$$

Il tensore momento M_{ij}^{tot} relativo all'intera superficie Σ si ottiene sommando i contributi di tutte le porzioni del piano di faglia e quindi moltiplicando $M_{ij}^{(p)}$ per $n \times m = 15 \times 15 = 225$

$$M_{ij}^{tot} = 225 M_{ij}^{(p)}$$

3.1.2 Spostamento e variazione di gravità

I risultati generati da LibHalfSpace ed elaborati da `map` sono stati utilizzati per creare mappe cromatiche che mostrano l'andamento dello spostamento e della variazione di gravità in un'area quadrata di lato 50 km. Il centro della faglia è stato posto in $(x, y) = (0, 0)$, ed è stato posto l'asse x in direzione Est e l'asse y in direzione Nord.

In seguito sono mostrati lo spostamento, i contributi della variazione di gravità Δg_B e Δg_e e la variazione di gravità totale con e senza correzione d'aria libera per il modello di superficie di faglia puntiforme (calcolato con la classe `MOMENT`) e per il modello di faglia estesa (calcolato con la classe `MOMENTEXT`).

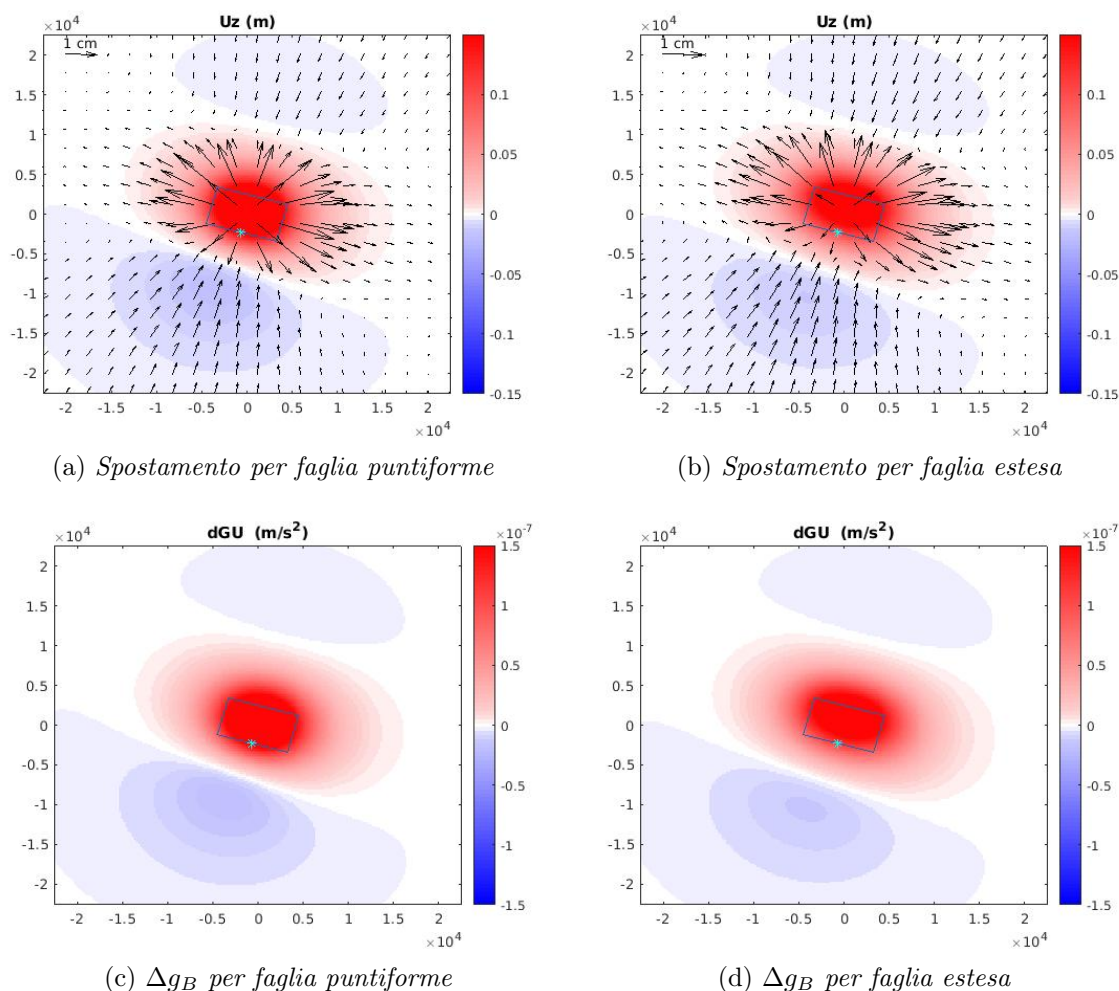


Figura 3.1: Spostamento e variazione di gravità Δg_B per l'evento del 20 Maggio. Il rettangolo rappresenta la proiezione della faglia in superficie. Il punto rappresenta la stazione di misura GPS MO05 di Finale Emilia (MO).

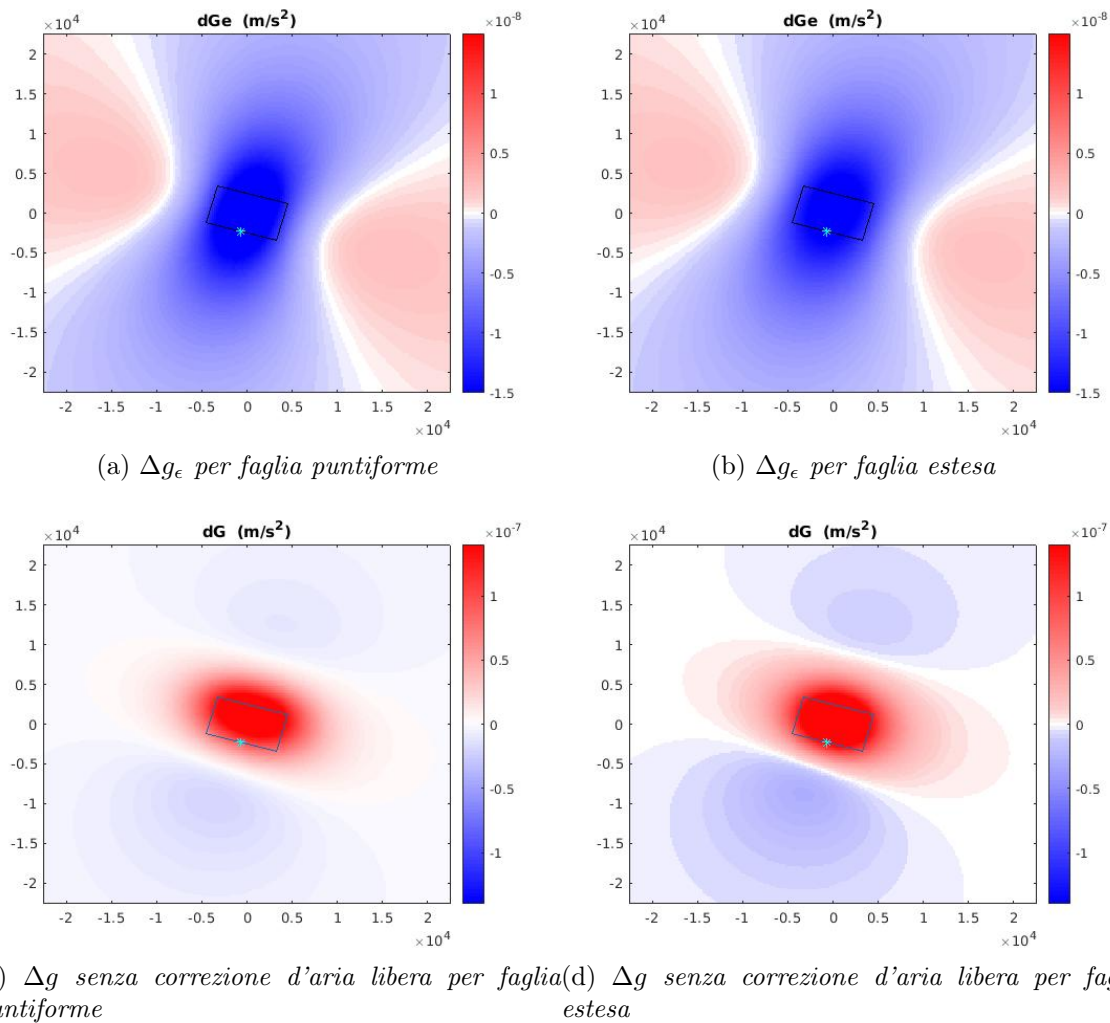
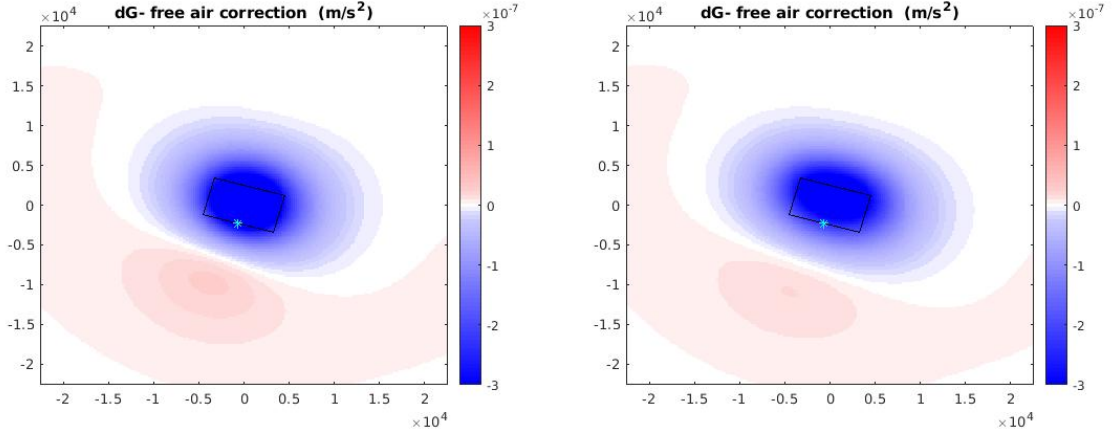


Figura 3.2: Variazione di gravità Δg_ϵ e variazione di gravità totale senza correzione d'aria libera Δg per l' evento del 20 Maggio. Il rettangolo rappresenta la proiezione della faglia in superficie. Il punto rappresenta la stazione di misura GPS MO05 di Finale Emilia (MO).

3.2 Analisi dei risultati e conclusioni

Nel caso di una faglia estesa in prossimità della proiezione della superficie di faglia vi sono gli spostamenti e le variazioni di gravità maggiori (v. figure 3.1, 3.2, 3.3). Lo spostamento è caratterizzato da un andamento orizzontale divergente, con massimi di spostamento di 6,61 cm in direzione Est e di 5,87 cm in direzione Nord, e da un sollevamento fino ad un massimo di 20,02 cm. Il contributo Δg_B segue lo stesso andamento, con aumento



(a) Δg_{tot} con correzione d'aria libera per faglia puntiiforme (b) Δg_{tot} con correzione d'aria libera per faglia estesa

Figura 3.3: Variazione di gravità Δg_{tot} con correzione d'aria libera per l'evento del 20 Maggio. Il rettangolo rappresenta la proiezione della faglia in superficie. Il punto rappresenta la stazione di misura GPS MO05 di Finale Emilia (MO).

di accelerazione di gravità massimo di $21,29 \mu\text{gal}$ ($1 \text{ gal} = 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$). L'andamento della componente Δg_ϵ invece sembra seguire quello dello spostamento orizzontale, e in prossimità della superficie di faglia causa diminuzioni fino a $-1,77 \mu\text{gal}$. In prossimità della faglia il contributo Δg_B è in valore assoluto più grande di un ordine di grandezza rispetto Δg_ϵ , come si nota dal fatto che l'andamento di $\Delta g = \Delta g_B + \Delta g_\epsilon$, prima dell'applicazione della correzione in aria libera, appare seguire quello di Δg_u . In prossimità della faglia Δg ha un massimo pari a $19,52 \mu\text{gal}$. A seguito della correzione d'aria libera e quindi considerando tutti i possibili contributi alla variazione dell'accelerazione di gravità l'andamento si inverte, mostrando una complessiva diminuzione di gravità fino a $\Delta g_{tot} = -43,05 \mu\text{gal}$ in prossimità della faglia.

Nel caso di una faglia puntiiforme lo spostamento e la variazione di accelerazione di gravità seguono circa lo stesso andamento del caso di faglia estesa (v. figure 3.1, 3.2, 3.3), ma in generale sono maggiori in valore assoluto ($u_x^{(max)} = 10 \text{ cm}$, $u_y^{(max)} = 7,5 \text{ cm}$, $u_z^{(max)} = 27,41 \text{ cm}$, $\Delta g_B^{(max)} = 28,72 \mu\text{gal}$, $\Delta g_\epsilon^{(min)} = -2,18 \mu\text{gal}$, $\Delta g^{(max)} = 26,65 \mu\text{gal}$, $\Delta g_{tot}^{(min)} = -57,76 \mu\text{gal}$) e più localizzate sulla proiezione in superficie del piano di faglia.

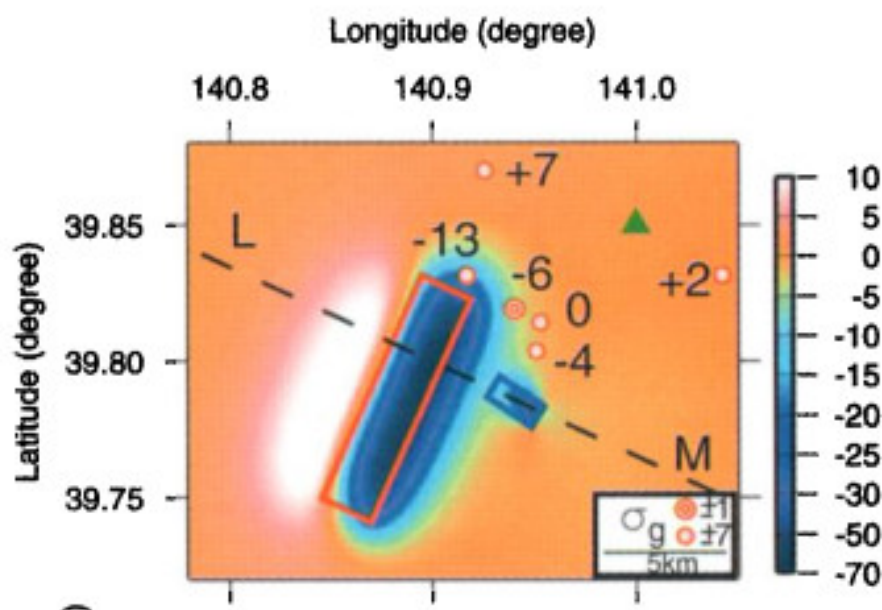


Figura 3.4: Variazione di gravità calcolata (colori, in $SI\mu gal$) e misurata (punti, in μgal) da Tanaka et al. 2001

Confronto con i dati misurati Nella zona interessata dagli eventi sismici sono presenti diverse stazioni di misura GPS, i cui dati raccolti sono stati utilizzati da Serpelloni et al. 2012 per elaborare le soluzioni di faglia. La stazione MO05 (v. fig. 3.1b) nei pressi di Finale Emilia ha misurato il maggior valore dello spostamento verticale per l'evento del 20 maggio, pari a 72,4871 mm (Serpelloni et al. 2012, *Supplementary material*). I risultati ottenuti in questo lavoro sono di 147,8 mm nel caso di una faglia puntiforme (v. fig. 3.1a) e di 97,77 mm nel caso di una faglia estesa (v. fig. 3.1b, confermando quanto affermato in sez. 2.3).

Confronto con il terremoto del 3 settembre 1998 in Giappone In seguito ad un evento sismico di magnitudo $M \sim 6.1$ avvenuto il 3 settembre 1998 a circa 8 km dalla vetta del monte Iwate, Giappone si è verificata una variazione di gravità che è stata misurata in particolare da un gravimetro assoluto collocato a circa 3 km di distanza dall'epicentro. Anche in questo caso il modello di faglia utilizzato da Tanaka et al. 2001 è quello di due superfici di faglia rettangolari (di cui una molto più piccola dell'altra, v. fig. 3.4) con slip uniforme immerse in un semispazio elastico omogeneo. Tanaka et al. 2001 hanno calcolato utilizzando formule diverse (Okubo 1991) da quelle presentati nella versione modificata di MOMENT presente in LibHalfSpace qui adottata. I dati misurati si sono dimostrati in accordo con quelli calcolati (Tanaka et al. 2001).

Come si può notare confrontando fig. 3.3 e fig. 3.4 l'andamento della variazione di Δg_{tot}

presentato da Tanaka et al. 2001 e quello presentato in questo lavoro sono simili: vi è una complessiva diminuzione dell'accelerazione di gravità in prossimità della superficie di faglia, in direzione del muro, con massimi fino a $\Delta g_{tot} \approx -70 \mu\text{gal}$.

Tuttavia la faglia del terremoto del Giappone è più superficiale di quella del terremoto dell'Emilia. Quindi l'effetto di sorgente estesa sull'andamento della variazione di gravità è più evidente. Infatti la superficie terrestre può essere considerata più vicina alla sorgente nel caso del terremoto del Giappone.

Nel caso del terremoto dell'Emilia il gravimetro di Medicina non ha misurato la variazione di gravità perchè collocato a una distanza dalla sorgente tra i 50 e 60 km. Dalla Figura 3.3 si evince che le variazioni di gravità a tale distanza sono trascurabili.

Bibliografia

- Ferrari, Claudio, Maurizio Bonafede e Maria Elina Belardinelli (2016). «LibHalfSpace: A C++ object-oriented library to study deformation and stress in elastic half-spaces». In: *Computer and Geosciences* 96, pp. 136–146.
- Mindlin, R. D. (1936). «Force at a point in the interior of a semi-infinite solid». In: *physics* 7, pp. 195–202.
- Okubo, Shuhei (1991). «Potential and gravity changes rised by point dislocation». In: *Geophysical Journal International* 105, pp. 573–586.
- Pintori, Francesco (2014/2015). «Variazioni di gravità generate da processi deformativi in un semispazio elastico». Tesi di dott. Università di Bologna, scuola di Scienze, corso di laurea magistrale in Fisica del Sistema Terra.
- Serpelloni, E. et al. (2012). «GPS observations of coseismic deformation following the May 20 and 29, 2012, Emilia seismic events (northern Italy): data, analysis and preliminary models». In: *Annals of Geophysics* 55, pp. 759,766.
- Tanaka, Yoshiyuki et al. (2001). «First detection of absolute gravity change caused by earthquake». In: *Geophysical Research Letters* 28, pp. 2979–2981.