Alma Mater Studiorum-Universitá di Bologna

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA

Corso di Laurea in Astronomia

Dinamica dei Fluidi

Tesi di laurea

Candidato:
Simonte Marco

Relatore:
Chiar.mo prof. Dallacasa Daniele

Anno Accademico 2017/2018
II sessione

Sommario

L'obiettivo di tale elaborato è fornire i tratti essenziali dello studio della fluidodinamica. A causa dell'enorme vastità dell'argomento non si è considerata la presenza di viscosità, soffermandosi solo su fluidi ideali. È strutturato in modo da descrivere i principali formalismi della Dinamica dei Fluidi, per poi utilizzarli in esempi astrofisici rilevanti e si è spesso fatto uso dei testi indicati nella bibliografia. L'elaborato presenta un'introduzione in cui vengono forniti alcuni concetti, tra cui la definizione di elemento di fluido, e vengono presentate le diverse possibilità di studio di un fluido, per poi concludere con un fondamentale teorema della fluidodinamica. Da questo si apre la strada per la derivazione di alcune delle leggi fondamentali della Dinamica dei Fluidi. Su questo tema si trovano una molteplicità di libri, ognuno dei quali le presenta in modo differente, di conseguenza si è preferito utilizzare punti di vista affrontati a lezione, al fine da mantenere una coerenza formale. In concluisione si presentano due applicazioni astrofisiche: il collasso gravitazionale e la formazione di shock nei fluidi. Mentre per il primo argomento si sono presi spunti dal libro di Chandrasekhar, per la derivazione dell'equazione di Hugoniot-Rankine, invece, si è utilizzata la visione proposta da Clarke e Carswell.

Indice

Capitolo 1

Introduzione

La fluidodinamica è una disciplina piuttosto antica che ha come obiettivo lo studio delle proprietà dei fluidi in moto. Il campo di applicazione delle equazioni che la governano è alquanto ampio, anche perché non è semplice fornire fisicamente una definizione rigorosa di fluido, il cui termine copre una vastitá di materiali, dai liquidi ai gas. Lo studio viene fatto mediante l'approccio della meccanica dei continui, considerando il fluido come un corpo continuo nonostante a livello macroscopico presenti un'enormità di particelle. Le proprietà del fluido (densità,velocità ecc..) vengono mediate su un determinato volume chiamato *elemento di fluido* il quale deve possedere definite caratteristiche:

- deve essere abbastanza piccolo in modo che non siano presenti grandi variazioni delle proprietà che possono essere definite in tale volume: se si considera l come la dimesione della regione considerata e L come la lunghezza di scala,tale richiesta si traduce come $l << L \sim \frac{f}{\nabla f}$ dove f è una funzione che descrive una proprietà del fluido. L può essere considerata come la lunghezza entro la quale si ha una variazione significativa della proprietà f.
- deve essere abbastanza grande da contenere un numero sufficiente di particelle in modo che si possano ignorare le fluttuazioni causate dalla discretizzazione del fluido nei componenti fondamentali. Se il numero di particelle per unità di volume è n si richiede $nl^3 >> 1$. Questo garantisce che lo studio mediante la meccanica dei continui sia valida.

Nel caso in cui fluido sia collisionale è necessario un'ulteriore requisito: l'elemento di fluido deve essere grande abbastanza affinché le particelle costituenti conoscano le condizioni termodinamiche locali e si scambino l'informazione attraverso gli urti. Sarà quindi richiesto $\lambda << l$ dove λ è il libero cammino medio delle particelle. Un fluido collisionale è un fluido nel quale le particelle, attraverso le mutue interazioni, creano una distribuzione di velocità e dunque una termodinamica interna. Ciò permette di scrivere un'equazione di stato per il fluido.

1.1 Descrizione euleriana e lagrangiana

Si consideri ora un fluido in moto. È possibile definire un campo di velocitá macroscopico (ovvero relativo ad un dato elemento di fluido) $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ dipendente dalle 3 coordinate spaziali e dal tempo. Da questo campo è possibile ottenere la traiettoria di un corpo continuo attraverso due linee:

- path lines: sono le linee che descrivono il percorso effettivamente seguito da un elemento di fluido.

- stream lines: sono le linee tangenti al campo di velocità in ogni loro punto e le si ottengono congelando il tempo.

In caso di stazionarietà le due linee sono identiche.
Per concludere questa introduzione si fa presente che lo studio di un fluido in moto può essere svolto mediante due tipi di descrizione; quella euleriana considera un elemento di volume ad una posizione fissata. In questo modo il fluido che attraversa il volume considerato avrà delle proprietà espresse tramite una funzione che dipende dal tempo e dalla posizione fissata, in cui è collocato il volume. La variazione nel tempo della funzione a posizione fissata è la derivata parziale nel tempo $\frac{\partial}{\partial t}$ calcolata nella posizione dell'elemento di fluido.
La descrizione può essere svolta anche mediante il formalismo lagrangiano; in questo caso viene scelto un particolare elemento di fluido di cui si studiano le variazioni delle proprietà interne seguendolo nel suo moto. La variabile relativa alla posizione non è più fissata ed è un label per quel dato elemento di fluido. Tutto ciò fa si che la derivata nel tempo presenti come primo termine la derivata parziale nel tempo ed un secondo termine *non lineare* il quale rappresenta la variazione della proprietà causata dal moto dell'elemento del fluido. Tale derivata totalenel tempo è chiamata **derivata materiale** la quale può essere scritta in forma compatta come segue

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \tag{1.1}$$

1.2 Teorema del trasporto

Prima di trattare le equazioni che governano la fluidodinamica é necessario menzionare un fondamentale teorema che sta alla base della costruzione di tutte le equazioni che verranno discusse in seguito. Oltre al campo di velocità si è detto che è possibile descrivere alcune proprietà dell'elemento di fluido attraverso delle funzioni; in particolare si é interessati alla variazione di tali quantità. Si considerino dunque una porzione di fluido Ω_0 che può variare nel tempo, il campo di velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}$,t) e la funzione f($\mathbf{x}$,t) (vettoriale o scalare) che descrive la proprietà in esame. Ogni particella contenuta nella regione seguirà la propria pathline, in modo che ad un generico tempo t la porzione di fluido iniziale si sia modificata in una certa $\Omega(t)$. La variazione di f($\mathbf{x}$,t) (mediata sull'elemento di fluido) nel tempo è data da $\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} f\, d^3\mathbf{x}$, dove l'integranda è in forma euleriana. La difficoltà del problema sta nel fatto che la porzione di fluido cambia nel tempo e non è dunque possibile portare all'interno dell'integrale la derivata. Con un opportuno passaggio tra descrizione euleriana e lagrangiana (per poi ritornare al formalismo euleriano) però si dimostra che

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} f\, d^3x = \int_{\Omega(t)} \left(\frac{Df}{Dt} + f\, \nabla \cdot\ \mathbf{v}\right)\ d^3\mathbf{x} \tag{1.2}$$

Ricordando l'identità $\nabla \cdot (f\mathbf{v}) = f\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla f$ è possibile riscrivere l'espressione precedente come segue

$$\int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f\mathbf{v})\right)\ d^3\mathbf{x} \tag{1.3}$$

Capitolo 2

Le equazioni della fluidodinamica

Le equazione che valgono per i fluidi si rifanno alla meccanica newtoniana. In questo capitolo le leggi della meccanica verranno opportunamente riscritte e modificate affinché siano adattabili un fluido.

2.1 L'equazione di continuità

L'equazione di continuitá della massa deriva da un principio primo della fisica classica: la conservazione della massa. È chiaro che tale principio debba valere anche per un fluido. Si consideri dunque il teorema del trasporto, in particolare l'equazione (1.2). Si supponga che la proprietà che si vuole studiare sia la densità della porzione di fluido considerata, ovvero $f(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t)$. L'integrale nel membro di sinistra dell'equazione non è altro che la massa totale della regione considerata $\Omega(t)$. Si ottiene dunque la derivata nel tempo della massa, la quale si è detto essere pari a zero. L'equazione (1.2) si riduce dunque a

$$\int_{\Omega(t)} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right) d^3\mathbf{x} = 0 \tag{2.1}$$

poiché la relazione vale per ogni elemento di fluido (anche per volumetti infinitesimi che abbiano le caratteristiche descritte nel primo capitolo), utilizzando il teorema della permanenza del segno si può affermare che anche l'integranda è nulla.

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{2.2}$$

Si notino due cose. Innanzitutto l'equazione è vera nel caso in cui non siano presenti pozzi o sorgenti. Se così non fosse non sarebbe vero il primo ragionamento fatto, ovvero $\frac{dM}{dt} = 0$, in quanto si avrebbe un rifornimento o una perdita di materia. Inoltre è possibile seguire il percorso dell'elemento di fluido (adottando quindi una descrizione lagrangiana) e calcolare dunque le quantità lungo la pathline da esso seguita. Questo permette un'ulteriore osservazione. Nel caso di fluidi incompressibili si ha $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, il che semplifica nuovamente l'equazione di continuità, ottenendo $\frac{D\rho}{Dt} = 0$. Da notare che ciò non significa densità costante su tutto il fluido, ma lungo una data pathline; spostandosi invece da una pathline all'altra non è detto che la relazione rimanga.
Chiaramente é possibile darne anche una descrizione euleriana utilizzando l'identità del primo capitolo e ottenendo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{2.3}$$

Anche questa descrizione fornisce un qualcosa di interessante. Si consideri un certo volume *fisso* all'interno del fluido. È intuitivo pensare che quanta più materia entri o e esca dal volume, maggiore sia la variazione della massa della regione che occupa il volume considerato. Poiché il volume rimane costante, ciò che varia è la densità e si può affermare che se il flusso di massa che esce dal volume eguaglia quello che entra la densità rimane costante. Formalmente questa legge può essere ricavata integrando su un volume Ω_0 l'equazione (2.3) ottenendo

$$\int_{\Omega_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d^3\mathbf{x} + \int_{\Omega_0} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})\, d^3\mathbf{x} = 0 \tag{2.4}$$

Poiché il dominio è fisso è possibile portare fuori dal segno di integrale la derivata, mentre per quanto riguarda il secondo termine utilizzando il teorema di Gauss si ottiene

$$\frac{dM}{dt} + \int_{\partial\Omega_0} \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d^2\mathbf{x} = 0 \tag{2.5}$$

Il termine $\rho\mathbf{v}$ rappresenta la densità di flusso. La sua direzione è quella del moto del fluido e il suo modulo è uguale alla massa dello stesso che attraversa nell'unità di tempo la superficie unitaria normale alla direzione della velocità. La legge esprime esattamente la formulazione data in precedenza.

2.2 L'equazione di Eulero

L'equazione di Eulero è una riscrittura della seconda legge di Newton: la variazione della quantità di moto nel tempo di un qualsiasi corpo è uguale alla somma delle forze agenti sul corpo stesso. Preso dunque un elemento di fluido che occupi una regione Ω dipendente dal tempo, la variazione della componente i-esima della quantitá di moto può essere espressa come $\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \rho v_i\, d^3\mathbf{x}$. Utilizzando ora un lemma, derivante dal teorema del trasporto, l'espressione precedente è equivalente a $\int_{\Omega(t)} \rho \frac{Dv_i}{Dt}\, d^3\mathbf{x}$. Non rimane che da scrivere le forze agenti sull'elemento di fluido con integrali di volume in modo poi da eguagliare i due termini. Le forze che agiscono su un fluido possono essere divise in due categorie. Le forze di volume (forza di gravità, elettromagnetica ecc..) agenti sono date da $\int_{\Omega(t)} \rho f_i\, d^3\mathbf{x}$, dove f_i è la componente i-esima delle forze agenti per unitá di massa. Le forze di superificie vengono formalizzate mediante il **tensore degli sforzi** $\tau_{i,j}$ il quale indica con che forza viene sollecitato ogni punto della superficie dell'elemento di fluido ed è simmetrico. Per quanto riguarda gli scopi di tale testo, ci si limiterà a considerare come unica forza di superficie la pressione, in questo modo $\tau_{i,j} = -p\delta_{i,j}$. Si faccia presente però che esiste un secondo termine, dato da un secondo tensore σ chiamato **tensore di deformazione** legato fortemente a fluidi viscosi (che non saranno trattati). In tale tensore compaiono i due coefficienti di viscosità μ e λ denominati rispettivamente primo e secondo coefficiente di viscosità. Pertanto la forma definitiva del tensore degli sforzi è la seguente

$$\tau_{i,j} = -p\delta_{i,j} + \sigma_{i,j} \tag{2.6}$$

con $\sigma_{i,j} = \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \lambda\nabla\cdot\mathbf{v}\,\delta_{i,j}$ nel caso di fluidi newtoniani.
Chiusa questa parentesi sul tensore degli sforzi è possibile dare una formulazione anche delle forze di superficie nel seguente modo $\int_{\partial\Omega(t)} \tau_{i,j} n_j \, d^2\mathbf{x}$, dove con n_j si indica la componente j-esima del vettore normale alla superficie. È possibile ora eguagliare i due termini per ottenere la seconda legge di Newton per un fluido,

$$\int_{\Omega(t)} \rho \frac{Dv_i}{Dt} \, d^3\mathbf{x} = \int_{\Omega(t)} \rho f_i \, d^3\mathbf{x} + \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \tau_{i,j}}{\partial x_j} \, d^3\mathbf{x} \tag{2.7}$$

utilizzando il teorema della divergenza nel passaggio tra integrale di supericie e di volume. Poiché la relazione trovata vale per ogni volume è possibile non considerare l'integrale. Eulero considerò due ulteriori ipotesi: fluido inviscido($\lambda = \mu = 0$) e soggetto a forze conservative. Come conseguenza si ottiene che il tensore τ è dato solo dal termine di pressione e che le forze di volume sono esprimibili come il gradiente di un potenziale ϕ. Si ottiene così la seguente equazione.

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\rho\nabla\phi - \nabla p \tag{2.8}$$

L'equazione, si ripete, è valida per fluidi inviscidi soggetti a forze conservative. È possibile uno studio di fluidi reali e dunque viscosi, il che porta a considerare anche gli altri termini del tensore di deformazione e dunque all'uso delle equazioni di Navier-Stokes, che non saranno però menzionate.

2.3 L'equazione dell'energia

Se si considera un sistema meccanico in esso vale sempre il teorema delle forze vive che lega la variaizone di energia di cinetica con il lavoro compiuto sul sistema $L = \Delta K$. Se però si osserva un fluido, esperimenti nel passato hanno dimostrato che ciò non è più vero. Questo perché in fluidodinamica quando si vuole esaminare l'energia totale si deve considerare anche la termodinamica del sistema. Nel passato, infatti, i grandi fisici riuscirono a comprendere che mancava qualcosa. Se oltre al lavoro e all'energia cinetica si tenesse conto anche di altre quantità, i conti tornerebbero e ciò è confermato da numerosi esperimenti. Le due nuove proprietà fisiche sono l'energia interna U e un altro modo di fare lavoro, chiamato calore indicato con Q. Il bilancio tra queste 4 quantità è dato dal primo principio della termodinamica $\Delta(K + U) = L + Q$ (ovviamente con i segni corretti in base alle convenzioni scelte). L'obiettivo di questo paragrafo è quello di fornire un'equazione che descriva la variazione nel tempo dell'energia, in seguito al lavoro compiuto sul o dal fluido.
Si consideri dunque un elemento di fluido; la variazione dell'energia è riassunta mediante l'equazione

$$\int_{\Omega(t)} \rho \left(\frac{||\mathbf{v}||^2}{2} + e\right) \, d^3\mathbf{x} \tag{2.9}$$

dove e esprime l'energia interna per unità di massa. Rimane da trovare la potenza delle forze agenti e la variazione nel tempo del calore. Per quanto riguarda il primo termine si deve considerare il lavoro fatto da entrambe le forze, quelle di superificie e volume, cioé

$$L = \int_{\Omega(t)} \rho f_i u_i \, d^3\mathbf{x} + \int_{\Omega(t)} \frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{i,j} u_i) \, d^3\mathbf{x} \tag{2.10}$$

Il termine relativo al calore non viene invece approfondito ed è dunque formulato semplicemente come $\int_{\Omega(t)} \dot{Q} \, d^3\mathbf{x}$, il quale comprende sia la densità di calore fornita o sottratta al sistema sia il calore trasmesso per conduzione.

Come nei casi precedenti l'ugluglianza vale per ogni volumetto considerato. Si ottiene dunque l'equazione che descrive come cambia l'energia di una regione di fluido nel tempo a causa dell'azione di forze esterne e del calore. Compiendo alcuni semplici calcoli si ottiene

$$\rho \frac{De}{Dt} = \tau_{i,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dot{Q} \tag{2.11}$$

Una cosa fondamentale da sottolineare è la scomparsa dell'energia cinetica e delle forze di volume. Le forze di volume non cambiano la termodinamica del sistema (energia interna) ma agiscono solo sulla componente cinetica. Le forze invece che creano delle variazioni dell'energia interna sono le forze di superficie.

Queste equazioni, brevemente spiegate, sono la base per costruire dei modelli per lo studio delle situazioni più disparate. Nel prossimo e ultimo capitolo si studieranno alcuni fenomeni astrofisici in cui interviene pesantemente la fluidodinamica.

Capitolo 3

La fluidodinamica in astrofisica

Come precedentemente anticipato non esiste una vera e propria definizione di fluido. Questo fa si che anche oggetti astrofisici quali getti, venti stellari, mezzo interstellare, mezzo intergalattico ecc.. siano considerati tali. In questo capitolo si vogliono utilizzare le leggi della fluidodinamica per definire modelli che possano spiegare alcuni fenomeni astrofici, quali la nascita delle stelle o la formazione di shock.
Quando un fluido viene perturbato, ad esempio mediante una sua compressione, esso reagisce all'azione esterna producendo delle perturbazioni al suo interno allo scopo di ritrovare nuovamente l'equilibrio. Non è affatto detto, però che ciò sia abbastanza. È possibile infatti che tali perturbazioni non riescano a contrastare l'instabiltà creatasi, facendo si che il sistema non possa riarrangiarsi. Un esempio del primo caso (di ritorno all'equilibrio) sono le onde sonore, le quali giocano un ruolo fondamentale in astrofisica in quanto rappresentano il principale meccanismo con cui si propagano le perturbazioni nei fluidi. Per quanto riguarda il secondo caso un esempio è l'instabilità gravitazionale che si crea all'interno del mezzo interstellare, il che da il via alla formazione stellare. In questo paragrafo si vuole studiare quest'ultimo caso, facendo notare che se non si considerasse l'intervento della gravità ciò che si otterrebbe sarebbe la propagazione di onde sonore in un mezzo.

3.1 Instabilità di Jeans

Un semplice esempio di instabilità gravitazionale fu scoperta da Jeans. Si consideri un fluido non viscoso, barotropico (pressione che dipende solamente dalla densità) e autogravitante. Le equazioni che descrivono il fluido sono l'equazione di continuità, l'equazione di Eulero e l'equazione di Poisson per la gravitazione.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \rho \dfrac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\rho \nabla \phi - \nabla p \\ \nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \end{cases}$$

Per semplicità si consideri il fluido con velocità iniziale nulla. Lo stato iniziale è definito una volta definiti i parametri iniziali quali densità, velocità e potenziale ($\rho_0 = costante, v_0 = 0, \phi_0 = costante$). Si noti che tale situazione non è fisicamente reale in quanto affinché lo stato considerato sia soluzione la densità iniziale (per la terza equazione) deve essere nulla, il che porta ad un assurdo. Se si volesse affrontare il problema in modo rigoroso si dovrebbe prima trovare la distribuzione della densitá e il potenziale gravitazionale ed in seguito applicare la teoria delle perturbazioni. In questa trattazione si seguirà però ciò che è stato fatto da Jeans nel 1902, ovvero considerare la terza equazione del sistema solo una volta che si sono già introdotte le perturbazioni. Tale metodo è anche chiamato Jeans swindle. Negli anni si sono sviluppate nuove idee per sfuggire a questa assurdità, come ad esempio l'introduzione della costante cosmologica nell'equazione di Poisson, modello concorde con un universo in espansione. Trascurando questi dettagli si consideri una perturbazione piccola allo stato iniziale

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho \tag{3.1}$$

$$\mathbf{v} = \delta\mathbf{v} \tag{3.2}$$

$$p = p_0 + \delta p \tag{3.3}$$

$$\phi = \phi_0 + \delta\phi \tag{3.4}$$

con δf generico molto minore di f_0. Sostituendo le nuove quantità nel sistema precedente e trascurando i termini quadratici o di ordine superiore si ottiene il seguente sistema linearizzato

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \rho_0\nabla\cdot\delta\mathbf{v} = 0 \\ \rho_0\dfrac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial t} = -\rho\nabla\delta\phi - p'(\rho_0)\nabla\delta\rho \\ \nabla^2\delta\phi = 4\pi G\delta\rho \end{cases}$$

Si applichi ora l'operatore divergenza alla seconda equazione ottenendo in questo modo la seguente espressione

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0\nabla\cdot\delta\mathbf{v}\right) = -\rho_0\nabla^2\delta\phi - p'(\rho_0)\nabla^2\delta\rho \tag{3.5}$$

L'argomento della derivata temporale non è altro che (per la prima equazione del sistema) $-\frac{\partial\delta\rho}{\partial t}$. Riarrangiando i termini si ottiene

$$\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2} - p'(\rho_0)\nabla^2\delta\rho = \rho_0\nabla^2\delta\phi = \rho_0 4\pi G\delta\rho \tag{3.6}$$

dove nell'ultima uguaglianza si è fatto uso dell'equazione di Poisson. Si ponga inoltre $p'(\rho_0) = c_s^2$. Questa è la velocità con cui si propagano le onde sonore all'interno del fluido (la quale sarà meglio definita nel prossimo paragrafo).
Tale equazione presenta soluzioni della seguente forma

$$\delta\rho = \rho_1 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \tag{3.7}$$

che denuncia un comportamento oscillatorio (sinonimo di stabilità in questo caso) se ω è reale. Al contrario se ω è un numero complesso ciò rende la perturbazione instabile. Lo studio deve dunque essere compiuto su ω mediante un'equazione che ci possa fornire la sua natura. Sostituendo infatti la soluzione all'interno dell'equazione differenziale si ottiene la cosiddetta equazione di dispersione

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 - 4\pi G\rho_0 \tag{3.8}$$

Vi sono a questo punto due casi possibili

- $c_s^2k^2 - 4\pi G\rho_0 > 0$, allora ω è reale e si ha una perturbazione stabile con la creazione di queste onde chiamate gravitosoniche che presentano il modulo della velocità di fase reale $v_f = \frac{\omega}{k}$
- $c_s^2k^2 - 4\pi G\rho_0 < 0$, quindi ω è un numero complesso e la perturbazione iniziale risulta instabile.

Jeans scelse di discriminare tra i due casi possibili mediante il numero d'onda k. Definì così il numero d'onda critico di Jeans che è ottenibile ponendo ω uguale a zero nella relazione di dispersione

$$k_j = \sqrt{\frac{4\pi G\rho}{c_s^2}} \tag{3.9}$$

In questo modo l'equazione precedente può essere riscritta come

$$\omega^2 = c_s^2(k - k_j) \tag{3.10}$$

Si ottiene dunque il criterio di Jeans per la stabilità o instabilità della nube: se $k > k_j$ allora la soluzione è stabile ed è compatibile con la formazione di onde gravitosoniche, altrimenti la soluzione risulta instabile e porta all'insorgenza del collasso gravitazionale. Un ulteriore criterio è offerto dalla definizione di lunghezza d'onda di Jeans definita come $\frac{2\pi}{k_j}$. In questo modo la richiesta per il collasso gravitazionale della nube è data da

$$\lambda > \lambda_j = \sqrt{\frac{\pi c_s^2}{G\rho}} \tag{3.11}$$

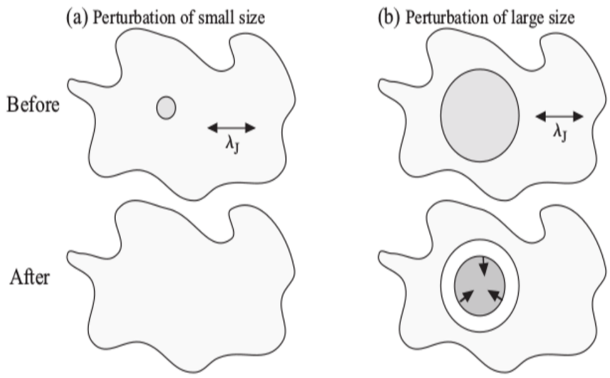

Figura 3.1: (a) Nube in cui si genera una perturbazione di dimensioni inferiori alla lunghezza d'onda di Jeans. (b) La stessa nube in cui si genera una perturbazione di dimensioni superiori alla lunghezza d'onda di Jeans.

Come è possibile notare dall'immagine se avviene una fluttuazione della densità in una regione con dimesione minore della lunghezza d'onda critica di jeans il comportamento della perturbazione è di tipo oscillatorio e non viene dunque sostenuta. Il sistema si ritrova dunque in una condizione di equilibrio. Nel secondo caso le regioni

compresse presentano dimensioni tali da soddisfare il criterio di Jeans e la regione inizia a collassare dando il via alla formazione stellare.
Infine un ultimo criterio ch permette lo studio della stabilità o non della nube passa attraverso la definizione di massa di Jeans: $M_J = \frac{4}{3}\pi(\frac{\lambda}{2})^3$. In questo modo una condizione per l'insorgenza della instabilità è

$$M > M_J \tag{3.12}$$

la quale afferma che se la regione in cui si genera la perturbazione ha una massa maggiore di una certa soglia detta *massa critica di Jeans* si ha l'insorgenza dell'instabilità e il collasso della nube.

3.2 Le onde sonore

Si osservi ora un fluido barotropico, compressibile, con velocità nulla e non si tenga conto, in questo caso, della gravità. Allora il sistema di equazioni che descrive il fluido è dato da

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \rho \dfrac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p \end{cases}$$

Si considerino nuovamente delle perturbazioni allo stato stazionario ($\rho_0 = costante, \mathbf{v}_0 = 0$).

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho \tag{3.13}$$
$$\mathbf{v} = \delta\mathbf{v} \tag{3.14}$$
$$p = p_0 + \delta p \tag{3.15}$$

È possibile ripetere i calcoli precedenti in modo totalmente analogo. È comunque intuitivo che l'equazione differenziale è uguale a quella della trattazione precedente a meno del termine gravitazionale, dunque

$$\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} - p'(\rho_0)\nabla^2 \delta\rho = 0 \tag{3.16}$$

Questa è l'equazione tipica delle onde. In seguito alla compressione si formano così delle onde di densità che si propagano nel mezzo, con velocità $c_s = \pm\sqrt{p'(\rho_0)}$ chiamata velocità del suono e tali onde sono dette onde sonore. Queste sono longitudinali (come anche le gravitosoniche), ovvero l'oscillazione avviene lungo la direzione di propagazione. L'equazione di dispersione risulta essere la seguente

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 \tag{3.17}$$

il che implica che c_s sia esattamente la velocità di fase dell'onda. Si noti che nel caso in cui fluido fosse in moto non cambierebbe nulla, solo si otterrebbe un velocità di fase dell'onda pari a $v_f = c_s + v$, dove v è la velocità del fluido.
La velocità delle onde sonore, nel caso di fluidi barotropici, è determinata dall'equazione di stato del fluido. In particolare è possibile darne un'espressione precisa in due casi

- caso adiabatico: $p \propto p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\Gamma}$, in tal modo

$$c_s = \sqrt{\frac{\Gamma p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\Gamma K_B T}{\mu}} \tag{3.18}$$

con K_B costante di Boltzmann, μ massa media delle particelle facenti parte del gas e Γ indice di espandione adibatico dato da $\Gamma = \frac{c_p}{c_V}$

- caso isotermo: $pV = costante$ e la velocità del suono è

$$c_s = \sqrt{\frac{p}{\rho}} = \sqrt{\frac{K_B T}{\mu}} \tag{3.19}$$

Si noti che in entrambi i casi c_s aumenta all'aumentare della temperatura.
Si vuole concludere questa sezione con una definizione. Si consideri un fluido in cui la velocità del suono sia un certo valore c_s e si supponga che un altro fluido si stia muovendo all'interno del primo con velocità v. È possibile definire il numero di Mach come $M = \frac{v}{c_s}$. Il moto si dice subsonico se $M < 1$ e supersonico se $M > 1$. Nel caso in cui si manifesti quest'ultimo caso si hanno diverse conseguenze, sia in astrofisica che in altri ambiti come l'ingegneria.

3.3 Moti supersonici

Si sono fino ad adesso studiati casi in cui le perturbazioni fossero piccole. Ci si può chiedere però cosa succede se, ad esempio, un fluido viene accelerato a velocità maggiori di quella del suono. Il risultato è la formazione di uno shock. Si noti che non è questa accelerazione a creare lo shock; è solo in seguito, quando questo fluido viene a contatto con un secondo fluido, che si produce il fenomeno dello shock. Matematicamente esso è descritto da una superficie di discontinuità. Una superfie è di discontinuità se, considerata una certa proprietà del fluido (densità ad esempio), essa è continua su tutto il fluido ma il suo salto lungo la superficie è diverso da zero. Il salto è la differenza del valore della quantità in questione prima e dopo l 'urto. Ad esempio, nel caso della densità

$$[\rho] = \rho_1 - \rho_2 \tag{3.20}$$

È chiaro dunque che si crei una discontinuità lungo la superficie che prima non era presente.
Come si origina lo shock? Si consideri un fluido che si muove all'interno di un altro (in quiete) in regime supersonico. Se si genera una perturbazione a monte dello shock diventa impossibile propagare un segnale nella direzione dello stesso. In questo modo il fluido rimane indisturbato finché non è raggiunto dal fluido in moto supersonico. Si crea così una disontunità nei parametri dei due fluidi e si ha la formazione di uno shock.
Per comprendere le conseguenze di questo fenomeno si deve considerare il flusso del fluido attraverso lo shock. Per semplicità è bene mettersi nel sistema di riferimento di quest'ultimo. In questo modo se lo schock ha velocità v_{sh} allora esso vedrà

avvicinarsi il fluido non shockato con velocità $v_1' = -v_{sh}$ mentre il fluido shockato viene lasciato indietro con velocità $v_2' = v_2 - v_{sh}$. Si vogliono utilizzare le equazioni trovate nel secondo capitolo. Si noti però che ora si ha a che fare con paramentri che sono discontinui e che quindi non possono essere soluzione di un'equazione differenziale. Nonostate ciò non vi è alcun motivo per cui pensare che non possa valere un'equazione di bilancio, anche attraverso la superficie. Una generale legge di Bilancio è possibile esprimerla nella seguente forma

$$\frac{d}{dt}\int_{P(t)} \psi(\mathbf{x},t)\, d^3\mathbf{x} = -\int_{\partial P(t)} \mathbf{J}_\psi(\mathbf{x},t)\cdot \mathbf{n}\, d^2\mathbf{x} + \int_{P(t)} r_\psi(\mathbf{x},t)\, d^3\mathbf{x} \tag{3.21}$$

dove P(t) è una data porzione di fluido. La legge esprime come varia una certa quantita ψ in seguito ad flusso legato ad essa (espresso mediante il vettore **J**) e ad un supply di tipo sorgente o pozzo (indicato con r). Si osservi che leggi della fluidodinamica enunciate nel secondo capitolo non sono altro che delle leggi di bilancio ed esprimono dunque la stessa legge. In questo caso però è possibile utilizzare le funzioni densità,pressione ecc.. anche nel caso in cui presentino qualche tipo di discontinuità.
Si prenda dunque la normale allo shock lungo l'asse x e si consideri l'equazione di continuità (2.3) integrandola lungo un certo strato dx attorno allo shock. Si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{P(t)} \rho\, dx + \rho v_x|_{\frac{dx}{2}} - \rho v_x|_{-\frac{dx}{2}} = 0 \tag{3.22}$$

Per uno strato infinetismo dx il flusso di massa entrante è uguale a quello uscente (non c'è un accumulo di massa nello strato), così $\frac{\partial}{\partial t}\int_{P(t)} \rho\, dx = 0$ ottenendo

$$\rho_2 v_{x2} - \rho_1 v_{x1} = 0 \tag{3.23}$$

dove il pedice 2 indica la quantità dopo l'urto mentre il pedice 1 prima dell'urto.
Si tenga presente ora l'equzione di Eulero (2.8). Facendo dei passaggi identici a quelli appena svolti e ricordando che il potenziale gravitazionale è continuo si ottiene l'equazione che descrive come cambia il momento attraverso la superficie di discontinuità.

$$\rho_1 v_{x1}^2 + p_1 = \rho_2 v_{x2}^2 + p_2 \tag{3.24}$$

Le altre due componenti della velocità v_y v_z non cambiano lungo lo shock. Infatti dall'equazione del momento si ottiene che $\rho u_x u_z$ e $\rho u_x u_y$ sono costanti lungo la superficie, mentre l'equazione di continuità fornisce $\rho u_x = costante$. In questo modo anche u_z e u_y sono costanti.
L'equazione dell'energia si ottiene in modo similare alle prime due. L'unico commento che si vuole fare riguarda la natura del termine $\dot{Q}$ del gas shockato: si fa l'ipotesi che il gas non possa raffreddarsi e si trovi dunque in regime adiabatico ($\dot{Q} = 0$). Per uno shock adiabtico il risultato dell'equazione dell'energia è che $(E+p)\rho$ è lo stesso sia a destra che a sinistra dello shock.

$$\frac{1}{2}v_1^2 + e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{1}{2}v_2^2 + e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \tag{3.25}$$

Queste 3 condizioni sono chiamate relazioni di Rankine-Hugoniot. La prima equazione è semplicemente la conservazione della massa, la seconda rappresenta la conversione della ram pressure (ρu^2) nella pressione termica, mentre la terza la conversione dell'energia cinetica in entalpia. Qualitativamente, quindi, uno shock trasforma un fluido freddo ordinato in uno disordinato e più caldo. È bene sottolineare che, sebbene le equazioni di Rankine-Hugoniot siano reversebili, cioé permettano il processo inverso (da gas caldo a freddo), ciò è impedito dalla seconda legge della termodinamica.
È conveniente riscrivere l'energia interna in funzione delle altre variabili termodinamiche. Poiché il fluido viene compresso adiabaticamente l'energia interna immagazzinata a seguito dell'urto, per il primo principio dell termodinamica, è data dal lavoro fatto per comprimere il gas (poiché la perdita di calore è nulla). Nel caso di una trasformazione adiabatica $p = K\rho^\Gamma$ (K costante) e il lavoro è semplicemente $K\rho^\Gamma d(1/\rho)$ che può essere riscritto come $\frac{1}{\Gamma-1}\frac{p}{\rho} = e$. Nonostante si sia calcolata l'energia interna nel caso adiabatico, questa apppena trovata è una legge generale. Inoltre poiché $c_s^2 = \Gamma\frac{p}{\rho}$ l'equazione dell'energia, considerando Γ costante lungo la superficie, si modifica in questo modo:

$$\frac{1}{2}v_1^2 + \frac{c_1^2}{\Gamma - 1} = \frac{1}{2}v_2^2 + \frac{c_2^2}{\Gamma - 1} \tag{3.26}$$

Quest'equazione però non permette di trarre informazioni fisiche sul fluido. Per ottenere un'espressione che sia utile servono alcuni passaggi algebrici. Qui sarà riportato un metodo ma è bene chiarire che non è l'unico.
Ponendo $j = \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$ le altre due relazioni diventano

$$p_1 + \frac{j^2}{\rho_1} = p_2 + \frac{j^2}{\rho_2} \tag{3.27}$$

per l'equazione di Eulero e

$$\frac{1}{2}\frac{j^2}{\rho_1^2} + \frac{\Gamma}{\Gamma - 1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{1}{2}\frac{j^2}{\rho_2^2} + \frac{\Gamma}{\Gamma - 1}\frac{p_2}{\rho_2} \tag{3.28}$$

per l'equazione dell'energia. Dalla (3.27) si ha che

$$j^2 = \frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}} \tag{3.29}$$

sostituendo ora tale espressione nella (3.28) e facendo un po' di algebra si ottiene alla fine

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\Gamma + 1)p_2 + (\Gamma - 1)p_1}{(\Gamma + 1)p_1 + (\Gamma - 1)p_2} \quad \left(= \frac{v_1}{v_2}\right) \tag{3.30}$$

Su questa equazione è bene soffermarsi su alcune considerazioni. Nel limite di uno schock forte, $p_2 >> p_1$ e si ha

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \to \frac{\Gamma+1}{\Gamma-1} \tag{3.31}$$

quindi se $\Gamma = \frac{5}{3}$ si ottiene un limite massimo per la densità finale $\rho_2 = 4\rho_1$ nel caso di un gas monoatomico. Nel caso di shock debole la densità finale risulta minore.
È possibile, mediante altri calcoli piuttosto tediosi, trovare delle espressioni pulite tipo quella per la densità anche per altre quantità del fluido come la temperatura e la pressione . Nel caso di uno shock forte si ottiene infatti che

$$\frac{p_2}{p_1} \to \frac{2\Gamma}{\Gamma+1} M^2 \tag{3.32}$$

$$\frac{T_2}{T_1} \to \frac{2\Gamma(\Gamma-1)}{(\Gamma+1)^2} M^2 \tag{3.33}$$

Mentre la denistà finale può essere al massimo pari a 4 volte la densità iniziale, il rapporto tra le temperature prima e dopo l'urto è proporzionale al numero di Mach al quadrato. Nei casi in cui quindi in cui sia $M >> 1$ il gas è riscaldato moltissimo, questo perché,come detto, lo shock trasforma l'energia cinetica in energia interna del gas o meglio in entalpia. Infatti, supponendo che $\rho_2 = 4\rho_1$ si ottiene che $v_2' = v_1'/4 = -v_{sh}/4$. Un osservatore esterno troverebbe dunque che il gas shockato ha velocità $v_2 = v_2' + v_{sh} = 3v_{sh}/4$, da cui si deduce che l'energia cinetica è diminuita. Nonostante per semplicità si sia considerato un caso adiabatico, il più delle volte il gas compresso e riscaldato perde energia mediante processi radiativi. I casi astrofisici in cui è possibile apprezzare il fenomeno sono parecchi. Due esempi classici sono le superonovae e gli Herbig-Haro. Nel primo caso il gas espulso dalla stella ormai collassata raggiunge velocità dell'ordine di $10^3 - 10^4 km/s$, in confronto ai $1 - 10 km/s$ della velocità del suono nel mezzo interstellare. Si crea dunque un'onda d'urto che comprime e ionizza il gas. L'emissione avviene a diverse lunghezze d'onda, ma una caratteristica fondamentale dei resti di supernova è l'emissione da sincrotrone, prova effettiva che vi siano elettroni relativistici che, orbitando lungo le linee di campo magnetico, emettono nel radio. Gli oggetti Herbig-Haro invece sono una categoria di nebulose a emissione che si trovano nelle zone limitrofe alle regioni di formazione stellare. La protostella accresce gas creando un disco attorno a sè. Questo gas però non finisce tutto sulla stella in quanto, per la conservazione del momento angolare, se la massa aumenta allora la stella dovrebbe iniziare a ruotare più velocemente fino ad arrivare ad un velocità centrifuga tale da garantire lo smembramento della stessa. Il gas viene allora espulso (anche grazie all'intervento del campo magnetico che permea la regione) attraverso due getti che si propagano lungo i poli. Essi si muovono a velocità supersoniche ($100 - 1000 km/s$) generando così degli shock. Il gas viene dunque compresso e scaldato e tende a raffreddarsi mediante processi in riga.

Bibliografia

[1] C.J.Clarke,R.F.Carswell,*Principle of Astrophysical Fluid Dynamics*, Cambridge University Press,2007

[2] S.Chandrasekhar,*Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford university Press,1961

[3] Appunti dal corso di "*Processi di Radiazione e MHD*", Prof. Daniele Dallacasa

[4] Appunti dal corso di "*Meccanica dei Continui*", Prof. Franca Franchi