

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

Emissione di Compton inverso e applicazioni astrofisiche

Tesi di laurea

Presentata da:
Alessandro Cotellucci

Relatore:
Chiar.mo Prof. Daniele
Dallacasa

Appello II
Anno Accademico 2017/2018

Sommario

L'emissione di Compton inverso è uno dei principali processi di radiazione in astrofisica. Non è un'emissione intrinseca in quanto è legata all'interazione di elettroni relativistici con un campo di radiazione già esistente, che per alcune sorgenti può essere prodotto dai medesimi elettroni. Ripetute interazioni Compton possono portare alla modifica dello spettro di radiazione esterna, questo fenomeno è detto comptonizzazione. La comptonizzazione è alla base dell'effetto Sunyaev-Zeldovich che avviene negli ammassi di galassie con la radiazione cosmica di fondo (CMB) e che ha importanza sia per lo studio degli ammassi e della CMB sia per fini cosmologici, quale la stima della costante di Hubble citata in questo elaborato. L'elaborato si conclude con la spiegazione dell'emissione del vento della Crab pulsar attraverso l'emissione di Compton inverso.

Indice

1	Emissione di Compton inverso	1
1.1	Compton inverso di un singolo elettrone	1
1.2	Potenza emessa da una nube di elettroni	2
1.3	Compton inverso da una sorgente di sincrotrone	3
1.4	Comptonizzazione	5
1.5	L'equazione di Kompaneets	7
2	Applicazioni astrofisiche	8
2.1	L'effetto Sunyaev-Zeldovich	8
2.1.1	Utilizzo dell'effetto S-Z per ottenere informazioni sull'ammasso	11
2.1.2	Stima della costante di Hubble attraverso l'effetto S-Z	12
2.2	Emissione di Compton inverso nel vento delle pulsar	14

Capitolo 1

Emissione di Compton inverso

L'emissione di Compton inverso è uno dei principali processi di radiazione in astrofisica. Non è un'emissione intrinseca in quanto è legata all'interazione di elettroni relativistici con un campo di radiazione già esistente, che per alcune sorgenti può essere prodotto dagli stessi elettroni.

1.1 Compton inverso di un singolo elettrone

Fisicamente il processo corrisponde all'interazione di radiazione elettromagnetica con elettroni relativistici. Per comprendere il fenomeno chiameremo K il sistema di riferimento del laboratorio e K' il sistema di riferimento dell'elettrone (ovvero quello in cui esso è a riposo).

$$\nu' = \nu\gamma \left(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c}\right) \quad (1.1)$$

La formula (1.1) ci dà la legge dell'effetto doppler relativistico (ottenuta imponendo l'invarianza della fase di un'onda tra i due sistemi di riferimento K e K') dove ν è la frequenza nel sistema di riferimento del laboratorio, ν' è la frequenza nel sistema di riferimento dell'elettrone ed \vec{n} è il vettore d'onda nel sistema di riferimento del laboratorio.

Il fotone interagisce con l'elettrone relativistico, come espresso in figura 1.1 nel sistema di riferimento K' il fotone ha subito l'effetto doppler e di conseguenza ha una frequenza data da (1.1). Nel sistema di riferimento K' l'elettrone ha velocità nulla e di conseguenza possiamo trattare l'interazione tra elettrone e fotone come un normale processo di scattering Compton in cui la frequenza varia secondo la formula (1.2).

$$\nu'_f = \frac{\nu'_i}{1 + \frac{h\nu'_i}{mc^2}(1 - \cos\Theta)} \quad (1.2)$$

Nel limite in cui $h\nu'_i \ll mc^2$ la formula (1.2) può essere approssimata alla formula (1.3a).

$$\nu'_f \approx \nu'_i \left(1 - \frac{h\nu'_i}{mc^2}(1 - \cos\Theta)\right) \quad (1.3a)$$

$$\cos\Theta = \cos\theta'_i \cos\theta'_f + \sin\theta'_i \sin\theta'_f \cos(\phi'_i - \phi'_f) \quad (1.3b)$$

Dove ϕ'_f e ϕ'_i sono gli angoli azimutali del fotone. Tornando quindi al sistema di riferimento del laboratorio K, la radiazione subisce un altro effetto doppler che ne modifica la frequenza portando al risultato (1.4).

$$\nu'_i = \nu_i \gamma (1 - \beta \cos \theta_i) \quad (1.4a)$$

$$\nu_f = \nu'_f \gamma (1 + \beta \cos \theta'_f) \quad (1.4b)$$

Il fotone emesso dall'elettrone nel sistema di riferimento K' visto dal sistema di riferimento K è soggetto al fenomeno del beaming relativistico che concentra l'emissione, in caso di alti fattori di Lorentz, in un cono di semi apertura $1/\gamma$. Possiamo vedere che, nel caso ottimale (ovvero $\theta_i = \pi$ e $\theta'_f = 0$) e trascurando le perdite energetiche del fotone che è una cosa comune nei regimi astrofisici, la frequenza del fotone nello stato finale sarà: $\nu_f = 4\gamma^2 \nu_i$. Quindi il processo porta ad un aumento qualitativo della frequenza di un fattore γ^2 , questo lo rende un processo molto efficiente per incrementare l'energia della radiazione.

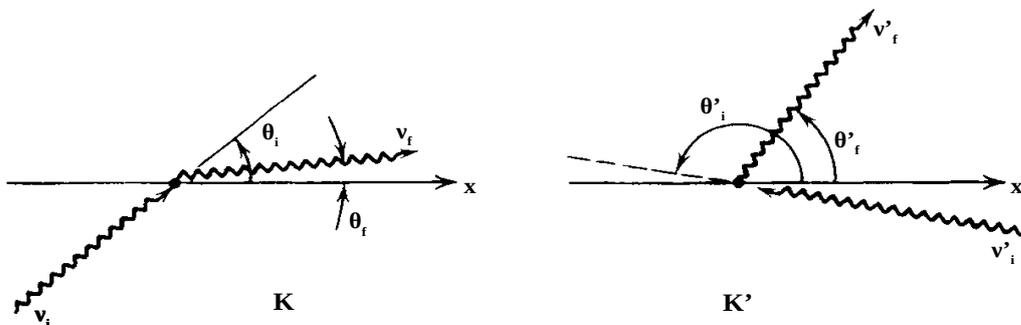


Figura 1.1: Compton inverso da un singolo elettrone (Rybicki e Lightman, Radiative processes in astrophysics, p.198)

Il processo diventa meno efficace ad alte energie dove non è più valida la sezione d'urto Thompson σ_T , che è ottenuta con metodi classici, e bisogna utilizzare la sezione d'urto di Klein-Nishina ottenuta dall'elettrodinamica quantistica descritta dalla formula:

$$\sigma_{KN} = \sigma_T \frac{3}{4} \left[\frac{1+x}{x^3} \left\{ \frac{2x(1+x)}{1+2x} - \ln(1+2x) \right\} + \frac{1}{2x} \ln(1+2x) - \frac{1+3x}{(1+2x)^2} \right], \quad (1.5)$$

con $x \equiv h\nu/mc^2$. Per gli scopi astrofisici generalmente è sufficiente l'utilizzo della sezione d'urto Thompson.

1.2 Potenza emessa da una nube di elettroni

Consideriamo ora la funzione di distribuzione dei fotoni nello spazio delle fasi $n(p)$, che è un invariante di Lorenz. Se $v d\epsilon$ è la densità di fotoni nell'intervallo $d\epsilon$ allora v ed n sono legate da:

$$v d\epsilon = n d^3 p. \quad (1.6)$$

Sappiamo che la quantità $v d\epsilon/\epsilon$ è un invariante di Lorentz e di conseguenza è la medesima in K ed in K' . La potenza emessa in K' (1.7) è anch'essa un invariante di Lorentz, possiamo calcolarla considerando trascurabili le perdite energetiche dei fotoni in K' rispetto ai guadagni nel sistema del laboratorio K , ipotizzando quindi che $\epsilon'_f = \epsilon'_i$.

$$\frac{dE_f}{dt} = \frac{dE'_f}{dt'} = c\sigma_T \int \epsilon'_f v' d\epsilon' = c\sigma_T \int \epsilon'^2 \frac{v' d\epsilon'}{\epsilon'} = c\sigma_T \int \epsilon'^2 \frac{v d\epsilon}{\epsilon} \quad (1.7)$$

In base alla (1.4a) otteniamo la (1.8).

$$\frac{dE_f}{dt} = c\sigma_T \gamma^2 \int (1 - \beta \cos\theta_i)^2 \epsilon v d\epsilon = c\sigma_T \gamma^2 \left(1 + \frac{1}{3}\beta^2\right) U_{ph} \quad (1.8)$$

Per un'emissione isotropa possiamo assumere $\langle(1 - \beta \cos\theta_i)^2\rangle = 1 + \frac{1}{3}\beta^2$, inoltre definiamo la densità di energia iniziale dei fotoni:

$$U_{ph} \equiv \int \epsilon v d\epsilon. \quad (1.9)$$

Considerando ora il tasso di diminuzione dell'energia totale iniziale dei fotoni abbiamo:

$$\frac{dE_f}{dt} = -c\sigma_T U_{ph}. \quad (1.10)$$

Andando infine a sommare i due contributi otteniamo come risultato l'energia convertita in radiazione:

$$P_{IC} = \frac{4}{3} \sigma_T c \gamma^2 \beta^2 U_{PH}. \quad (1.11)$$

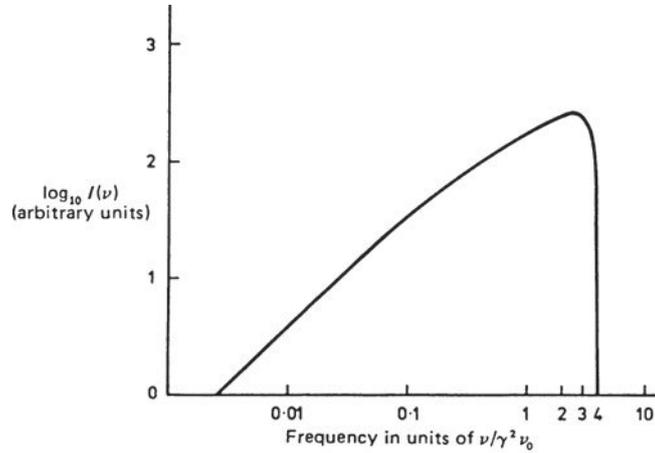


Figura 1.2: Spettro dell'emissione di Compton inverso con radiazione incidente isotropa e monocromatica alla frequenza ν_0 (Longair, High Energy Astrophysics, p.242)

1.3 Compton inverso da una sorgente di sincrotrone

In una sorgente di sincrotrone è possibile che gli stessi elettroni responsabili della radiazione emettano per Compton inverso in presenza di una sorgente di radiazione.

La potenza emessa per Compton inverso è simile a quella emessa da una sorgente di sincrotrone (1.12).

$$P_{SINC} = \frac{4}{3}\sigma_T c \gamma^2 \beta^2 U_H. \quad (1.12)$$

La ragione di questa similitudine è che la perdita energetica dipende dal campo elettrico che accelera l'elettrone nel suo sistema di riferimento, senza considerare l'origine di tale campo. Nel caso del sincrotrone, il campo è dato da $\vec{v} \times \vec{H}$ dovuto al moto dell'elettrone attorno alle linee del campo magnetico. Nel caso del Compton inverso, il campo è dato dalla somma dei campi elettrici della radiazione elettromagnetica incidente.

Questa similitudine permette di definire il rapporto tra le due potenze emesse η (1.13). Misurando i flussi della medesima sorgente nella banda radio (generalmente dovuto all'emissione di sincrotrone) e nella banda X (generalmente dovuta al Compton inverso) e ipotizzando come fotoni utili per l'emissione di Compton inverso quelli della CMB la formula (1.13) ci permette di stimare il campo magnetico della sorgente.

$$\eta = \frac{P_{IC}}{P_{SINC}} = \frac{U_{PH}}{U_H} \quad (1.13)$$

La coesistenza di questi due fenomeni radiativi diminuisce il tempo di vita medio degli elettroni della sorgente che sarà:

$$t_{S+IC} \approx \frac{1}{\langle \epsilon_e \rangle (H^2 + 8\pi U_{ph})} \quad (1.14)$$

Nel caso di una sorgente compatta gli elettroni possono fare Compton inverso con gli stessi fotoni emessi per sincrotrone portandoli ad alte energie. Prendiamo per semplicità una sorgente sferica compatta di raggio R a distanza d dall'osservatore con dimensioni angolari $\Omega = r^2/d^2$. Dato che l'emissione è auto-assorbita quindi $T_e = T_B$ (la temperatura degli elettroni è uguale alla temperatura di brillanza $\gamma m_e c^2 = 3kT_e = 3kT_B$) allora possiamo utilizzare l'approssimazione di Rayleigh-Jeans, quindi la luminosità sarà:

$$L(\nu) = 4\pi d^2 S(\nu) = 4\pi d^2 \frac{2kT_B \nu^2}{c^2} \Omega = \frac{8\pi r^2 kT_B \nu^2}{c^2}. \quad (1.15)$$

Approssimando la luminosità bolometrica a $L_T = L(\nu)\nu$ la densità di energia dei fotoni sarà:

$$U_{PH} = \frac{L_T}{4\pi c^2 r^2} = \frac{2kT_B \nu^3}{c^3}. \quad (1.16)$$

L'efficienza di Compton inverso sarà:

$$\eta = \frac{U_{PH}}{U_H} = \frac{2kT_B \nu^3 / c^3}{H^2 / 8\pi} = \frac{16\pi kT_B \nu^3}{H^2 c^3}. \quad (1.17)$$

Utilizzando la teoria del sincrotrone auto-assorbito possiamo ricavare il campo magnetico della sorgente:

$$H = \frac{2\pi m_e}{e} \left(\frac{m_e c^2}{3kT_B} \right)^2 \nu. \quad (1.18)$$

Inserito nella formula (1.16) si ha:

$$\eta = \frac{U_{PH}}{U_H} = \frac{324e^2 k^5}{\pi m_e^6 c^{11}} \nu T_B^5. \quad (1.19)$$

Come possiamo vedere da questo risultato l'efficienza di Compton inverso è fortemente dipendente dalla temperatura di brillanza della sorgente. Inoltre ponendo $\eta = 1$ possiamo trovare la temperatura di brillanza critica per una radiosorgente:

$$T_B = T_e = 10^{12} \left(\frac{1 \text{GHz}}{\nu} \right)^{1/5} K. \quad (1.20)$$

Questo limite stabilisce che le radiosorgenti compatte con temperatura di brillanza superiore a $T_B \approx 10^{12} K$ vanno in contro a forti perdite per Compton inverso a frequenze elevate. Queste perdite dominano rispetto all'emissione di sincrotrone rendendo la radiosorgente una forte sorgente in banda X, diminuendo sensibilmente la vita media degli elettroni e di conseguenza della sorgente. Questo fenomeno è noto con il nome di catastrofe Compton.

1.4 Comptonizzazione

Lo spettro di una sorgente può essere modificato, nell'interagire con una nube di plasma, da continui scattering Compton e Compton inverso, questo fenomeno è detto comptonizzazione. Affinché il fenomeno avvenga c'è bisogno che il gas sia rarefatto così che altri processi, come per esempio l'emissione di bremsstrahlung, non aggiungano fotoni al sistema. Tanto più il gas sarà caldo tanto maggiore sarà l'energia scambiata nelle interazioni e tanto maggiore sarà la modifica allo spettro.

Per semplicità considereremo un regime non relativistico quindi in cui $kT_e \ll m_e c^2$ e $h\nu \ll m_e c^2$. L'energia media ceduta dai fotoni agli elettroni negli urti è:

$$\left\langle \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon} \right\rangle = \frac{h\nu}{m_e c^2}, \quad (1.21)$$

mentre l'energia media ceduta dagli elettroni ai fotoni è ricavabile dalla formula (1.11) considerando il numero di fotoni scatterati al secondo uguale a $\sigma_T N_{PH} c = \sigma_T U_{PH} c / h\nu$ e il valore medio del quadrato della velocità degli elettroni uguale a $\langle v^2 \rangle = 3kT_e / m_e$ (in quanto stiamo considerando elettroni termici) e prendiamo $\gamma \approx 1$. Così facendo otteniamo:

$$\left\langle \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon} \right\rangle = \frac{4kT_e}{m_e c^2}. \quad (1.22)$$

L'energia media totale scambiata tra elettroni e fotoni sarà quindi uguale a:

$$\left\langle \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon} \right\rangle = \frac{4kT_e - h\nu}{m_e c^2}. \quad (1.23)$$

Non vi è trasferimento di energia se $h\nu = 4kT_e$ mentre vi è trasferimento di energia dai fotoni agli elettroni se $h\nu > 4kT_e$ e vi è trasferimento di energia dagli elettroni ai fotoni nel caso in cui $h\nu < 4kT_e$. Consideriamo $h\nu \ll 4kT_e$, in questo caso l'energia ceduta dai fotoni è trascurabile ed ad ogni interazione l'energia media guadagnata dai fotoni sarà (1.22). Per stimare il numero totale di collisioni consideriamo d le dimensioni della regione e $l = 1/n_e \sigma_T$ il libero cammino medio dei fotoni, N sarà il numero totale di collisioni nella regione (che avvengono con un tempo medio di collisione $t_{coll} \approx 1/n_e \sigma_T c$):

$$N = \left(\frac{d}{l} \right)^2 = \tau_e^2 \quad (1.24)$$

dove τ_e è la profondità ottica. L'energia acquistata da un fotone in un intervallo di tempo dt sarà:

$$\left\langle \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon} \right\rangle = \frac{4kT_e}{m_e c^2} N_{diff} dt = \frac{4kT_e}{m_e c^2} dN \quad (1.25)$$

dove $N_{diff} = n_e \sigma_{TC}$ è il numero di collisioni nell'intervallo di tempo. Al tempo t l'energia dei fotoni sarà:

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 e^{\frac{4kT_e}{m_e c^2} N_{diff} t} = \epsilon_0 e^{\frac{4kT_e}{m_e c^2} N} = \epsilon_0 e^{4y}, \quad (1.26)$$

definiamo quindi il parametro di comptonizzazione¹ :

$$y = \frac{kT_e}{m_e c^2} N = \frac{kT_e}{m_e c^2} \sigma_T n_e t = \frac{kT_e}{m_e c^2} \tau_e^2. \quad (1.27)$$

L'energia dei fotoni aumenterà finché non sarà raggiunto l'equilibrio termodinamico (quindi $\epsilon = h\nu = 4kT_e$) quindi si ha la condizione:

$$y = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{4kT_e}{h\nu} \right) \quad (1.28)$$

che per la profondità ottica sarà:

$$\tau_e = \left[\ln \left(\frac{kT_e}{h\nu} \right) \frac{m_e c^2}{4kT_e} \right]^{1/2}. \quad (1.29)$$

Se la condizione dell'equilibrio termico è rispettata allora lo spettro modificato dei fotoni deve seguire la distribuzione di Bose-Einstein:

$$u(\nu) d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{(h\nu/kT_e)+\mu} - 1} d\nu, \quad (1.30)$$

nel caso della distribuzione di Planck $\mu = 0$. Se non c'è corrispondenza tra la densità numerica di fotoni e la densità di energia della radiazione allora μ è finito e diverso da 0. Nel caso in cui $e^{h\nu/kT_e+\mu} \gg 1$ abbiamo il profilo di Wien modificato dal potenziale chimico:

$$u(\nu) d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-(h\nu/kT_e+\mu)} d\nu, \quad (1.31)$$

come mostrato in figura 1.2.

La comptonizzazione è un processo fondamentale in astrofisica che si applica a svariati fenomeni quali: l'interazione della CMB con il gas caldo negli ammassi di galassie, l'emissione di radiazione successiva a fenomeni di accrescimento.

¹La definizione completa del parametro di comptonizzazione è:

$$y = \frac{kT_e}{m_e c^2} \max(\tau_e, \tau_e^2)$$

per i nostri calcoli consideriamo $\tau_e \gg 1$ di conseguenza compare τ_e^2 , ma per altri calcoli utilizzeremo τ_e .

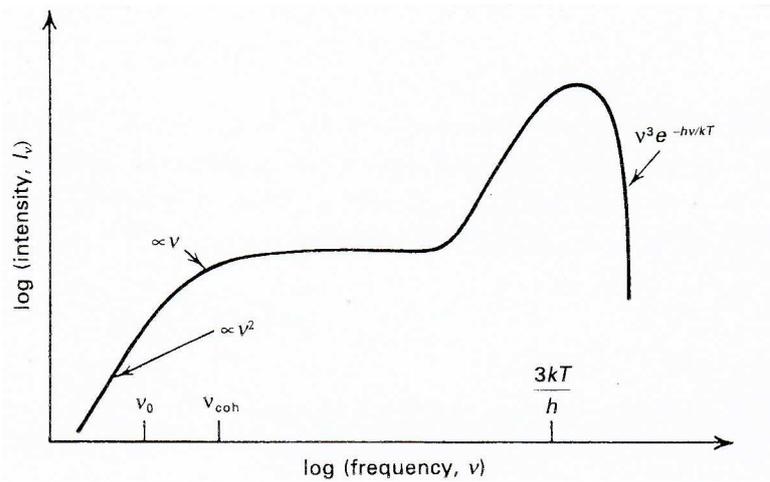


Figura 1.3: Comptomizzazione di uno spettro di bremsstrahlung termica (Rybicki e Lightman, Radiative processes in astrophysics, p.220)

1.5 L'equazione di Kompaneets

Per calcolare il valore del parametro y per valori intermedi bisogna risolvere l'equazione di Kompaneets che descrive l'evoluzione del numero di occupazione n dei fotoni soggetti ad effetto Compton. L'equazione è derivabile partendo dall'equazione di Boltzman, necessaria per descrivere l'evoluzione del numero di occupazione dei fotoni, considerando gli elettroni all'equilibrio termico, quindi soggetti alla distribuzione di Maxwell, e che il numero di fotoni si conservi nel processo. Il risultato finale è:

$$\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^4 \left(n + n^2 + \frac{\partial n}{\partial x} \right) \right], \quad (1.32)$$

con $x = h\nu/kT_e$. Il termine $\partial n/\partial x$ (diffusion term) rappresenta la diffusione, il termine n rappresenta il raffreddamento Compton dovuto al rinculo subito dai fotoni e dagli elettroni, mentre il termine (non lineare) n^2 rappresenta l'emissione indotta.

Capitolo 2

Applicazioni astrofisiche

L'importanza dell'emissione di Compton inverso è visibile dalle molteplici applicazioni astrofisiche. La prima trattata è l'effetto Sunyaev-Zeldovich che avviene negli ammassi di galassie e che risulta utile sia per studiare le condizioni fisiche dell'ammasso, in particolare lo studio del rapporto tra massa del gas e massa gravitazionale, che per stimare i parametri cosmologici come la costante di Hubble.

La seconda applicazione esposta è un modello volto a spiegare l'emissione γ della Crab pulsar attraverso l'emissione di Compton inverso.

2.1 L'effetto Sunyaev-Zeldovich

Una delle più importanti applicazioni astrofisiche della comptonizzazione riguarda l'effetto Sunyaev-Zeldovich che consiste nella distorsione dello spettro della radiazione cosmica di fondo ad opera di regioni di gas caldo ionizzato in cui $T_e \gg T_{CMB}$, il fenomeno è principalmente visibile nel gas degli ammassi di galassie. La distorsione si ha se non ci sono sorgenti esterne di fotoni che vadano a ripopolare la distribuzione di Planck. Queste condizioni si verificano sia prima che dopo l'epoca della ricombinazione dal Big Bang. Se c'è stata iniezione di energia termica nel gas prima dell'epoca della ricombinazione ($z \approx 1000$) e il numero di fotoni si è conservato, allora i fotoni raggiungono l'equilibrio e lo spettro segue la distribuzione di Bose-Einstein (1.30). Se il riscaldamento ha luogo dopo l'epoca della ricombinazione allora non vi è tempo per raggiungere l'equilibrio e per descrivere lo spettro bisogna risolvere l'equazione di Kompaneets senza i termini di raffreddamento dei fotoni:

$$\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^4 \frac{\partial n}{\partial x} \right), \quad (2.1)$$

con $x = h\nu/kT_{CMB}$. Sunyaev e Zeldovich proposero come soluzione $n = (e^x - 1)^{-1}$, ipotizzando le distorsioni piccole, e ottennero come risultato:

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{\Delta I(\nu)}{I(\nu)} = y \frac{x e^x}{e^x - 1} \left(x \frac{e^x + 1}{e^x - 1} - 4 \right), \quad (2.2)$$

con il parametro di comptonizzazione y :

$$y = \int \frac{kT_e}{m_e c^2} \sigma_T n_e dl, \quad (2.3)$$

al centro di un ammasso ricco di galassie lungo la linea di vista il parametro di compotonizzazione vale $y \approx 10^{-4}$. Lo spettro viene spostato ad energie maggiori, per cui si ha una prima fase dove il flusso di fotoni è minore rispetto a quello del normale spettro di corpo nero della CMB, mentre dopo $\nu = 271 \text{ GHz}$ si ha un'inversione di tendenza e il flusso risulta maggiore, come mostrato in figura 2.1.

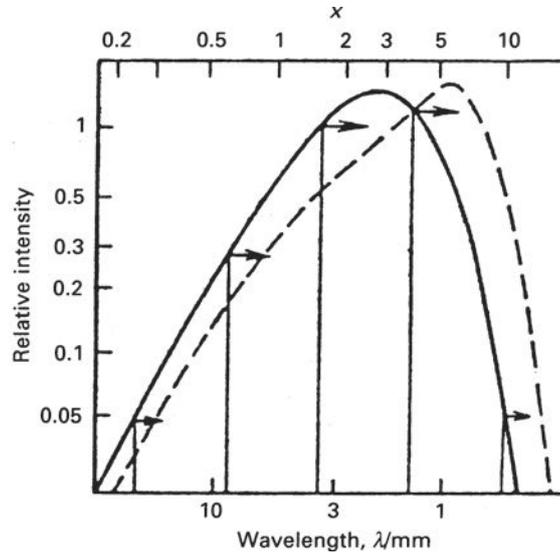


Figura 2.1: Spettro di CMB e spettro di CMB soggetto all'effetto SZ (Longair, High Energy Astrophysic, p.258)

L'effetto è ben mostrato dalla figura 2.2 dove sono presenti delle rilevazioni a diverse frequenze dell'ammasso di Abell 2319, come è possibile vedere per frequenze inferiori a 217 GHz l'effetto è negativo mentre per frequenze superiore l'effetto è positivo.

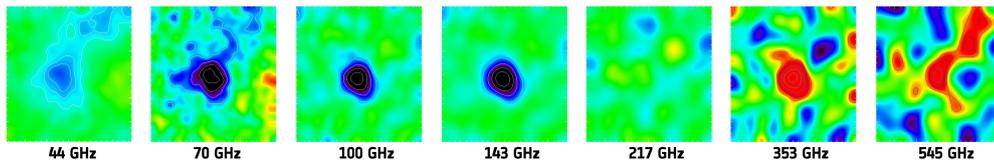


Figura 2.2: Osservazione in multi-banda (44, 70, 100, 143, 217, 353, 545 GHz) dell'ammasso di Abell 2319 ad opera del telescopio spaziale Planck, ogni frame corrisponde ad un quadrato di circa 2 gradi, la scala di colori rappresenta l'intensità del segnale in scala crescente dal blu al rosso (<http://sci.esa.int/planck/47697-multi-band-observations-of-the-galaxy-cluster-abel-2319/>, 2010)

Espandendo la (2.2) per $x \ll 1$ si ottiene come decremento relativo:

$$\frac{\Delta I_{ter}(\nu)}{I(\nu)} = -2y. \quad (2.4)$$

L'aumento di energia della radiazione a discapito di quella degli elettroni del gas è data da:

$$\frac{\Delta \epsilon}{\epsilon} = e^{4y}. \quad (2.5)$$

Questo effetto si concretizza in una variazione della temperatura della radiazione nella regione di Rayleigh-Jeans (per cui $I \propto T$) dello spettro:

$$\frac{\Delta T_{CMB}}{T_{CMB}} = -2y. \quad (2.6)$$

All'effetto termico va aggiunto un effetto cinematico indotto dal moto peculiare dell'ammasso nel sistema di riferimento della CMB, in quanto i fotoni diffusi dall'ammasso sono soggetti all'effetto doppler (lavoro svolto sempre da Sunyaev e Zeldovich nel 1980). Nel sistema di riferimento del gas lo spettro di CMB appare anisotropo e l'effetto della comptonizzazione è di rendere leggermente di nuovo isotropa la radiazione. Tornando nel sistema di riferimento dell'osservatore la radiazione non sarà più isotropa. Calcolato nel limite non relativistico l'effetto è:

$$\Delta I_{cin}(\nu) = -\frac{2(kT_{cmb})^3}{(hc)^2} \tau_e \beta_c \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2}, \quad (2.7)$$

dove $\tau_e = \sigma_T \int n_e dl$ è la profondità ottica e $\beta_c = v_r/c$, dove v_r è la componente lungo la linea di vista della velocità peculiare dell'ammasso. L'effetto sulla temperatura della radiazione è:

$$\frac{\Delta T_{CMB}}{T_{CMB}} = -\tau_e \beta_c \quad (2.8)$$

L'aspetto interessante dell'effetto cinematico è che permette di misurare una delle componenti della velocità peculiare di oggetti a grandi distanze.

La frequenza a cui avviene l'inversione¹, andando ad ordini superiori, presenta una dipendenza dalla temperatura dell'ammasso come dimostrato da Shimon e Rephaeli (2004) attraverso la stima numerica:

$$x_0 = 3.830016(1 + 1.120594\Theta + 2.078258\Theta^2 - 80.748072\Theta^3), \quad (2.9)$$

con $\Theta = kT_e/m_e c^2$.

La trattazione finora esposta trascura gli effetti relativistici che diventano rilevanti con l'aumentare di Θ e di β_c , quindi all'aumentare della temperatura dell'ammasso e all'aumentare della velocità peculiare dello stesso. Il calcolo relativistico di ΔI per entrambi gli effetti non porta ad un'espressione analitica semplice e per ottenerne una forma analitica bisogna espandere l'espressione in potenze di β , Θ e τ_e , uno studio su questa formulazione è stato pubblicato da Shimon e Rephaeli nel 2004, ed è stato calcolato con un errore del 2% per energie $kT_e < 50 keV$. In figura 2.3 sono mostrati gli effetti relativistici e il limite non relativistico a differenti temperature dell'ammasso ($kT_e = 5, 10, 15 keV$). Come è possibile vedere dalla figura 2.3 l'espressione relativistica diviene rilevante per altri valori di x mentre vicino alla frequenza di inversione le due trattazioni sono sovrapponibili. L'utilizzo della trattazione relativistica diviene fondamentale per $\nu \gg 30 GHz$ in particolare se le misurazioni sono utilizzate per la stima dei parametri cosmologici.

L'utilizzo della trattazione esatta è divenuto necessario con l'arrivo dei dati ottenuti dai telescopi SuZIE e MITO (1996) che hanno dato osservazioni a $x \approx 6.2$, mentre per precedenti osservazioni a $x \approx 0.5$ era sufficiente l'utilizzo della formulazione non relativistica.

¹Detta frequenza di crossover

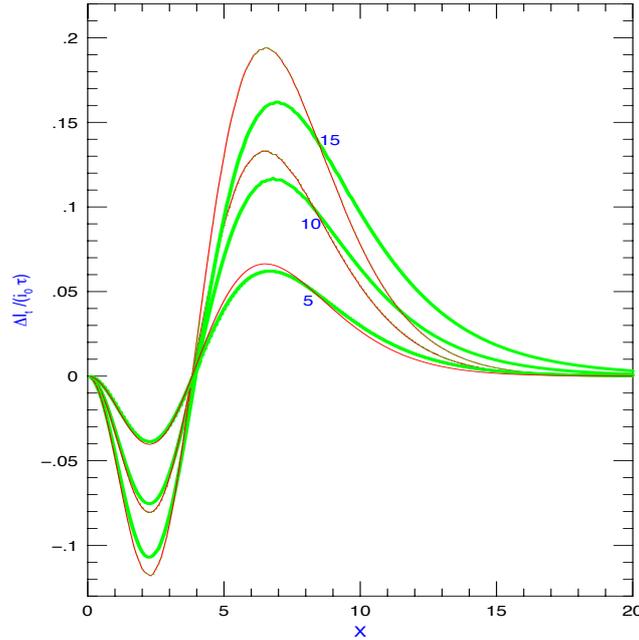


Figura 2.3: Distribuzione spettrale di $\Delta I_{ter}(hc)^2/\tau_e 2(kT)^3$. In verde la distribuzione relativistica e in rosso quella non relativistica a differenti energie dell'ammasso $kT_e = 5, 10, 15 \text{ keV}$ (Y. Rephaeli, S. Sadeh e M. Shimon, 2005, p. 4)

2.1.1 Utilizzo dell'effetto S-Z per ottenere informazioni sull'ammasso

Un'applicazione diretta dell'effetto S-Z per studiare le condizioni fisiche dell'ammasso è lo studio della massa di gas contenuta nel fascio del telescopio. Per un modello isoterma la densità superficiale di massa del gas lungo la linea di vista è:

$$\Sigma_g = \int n_e(r) \mu_e dl, \quad (2.10)$$

dove μ_e è la massa di gas per elettrone. Sapendo che l'effetto S-Z termico a basse frequenze è proporzionale al parametro di Comptonizzazione, possiamo legare la densità superficiale di massa al parametro y se la temperatura del gas è costante:

$$\Sigma_g = \mu_e \left(\frac{m_e c^2}{kT_e} \right) \frac{y}{\sigma_T}. \quad (2.11)$$

Per ammassi con una ricca popolazione, con archi dovuti alla lente gravitazionale e un forte effetto S-Z (come Abell 2218) la stima (2.11) della densità superficiale di massa può essere comparata direttamente alla stima della massa ottenuta dallo studio dell'effetto di lente gravitazionale. L'effetto S-Z è particolarmente indicato per questo problema perché dovrebbe essere meno suscettibile ad errori di interpretazione, permettendo così di stimare il rapporto tra materia barionica e materia totale entro gli archi.

In uno studio ad opera di Myers, condotto sugli ammassi: A478, A2142 e A2256, è stato stimato il rapporto tra massa barionica e la massa gravitante totale degli ammassi.

Nello studio l'informazione sulla massa totale è derivata dallo studio dinamico degli ammassi e non dall'effetto di lente gravitazionale mentre l'informazione sulla massa del gas è stata stimata dall'effetto S-Z. Il risultato ottenuto è compreso tra $0.06h_{100}^{-1}$ e $0.17h_{100}^{-1}$ (con $h = H_0/[100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}]$ e compreso tra 0.5 ed 1).

2.1.2 Stima della costante di Hubble attraverso l'effetto S-Z

L'importanza dell'effetto S-Z a livello cosmologico è la sua indipendenza dal redshift che viene utilizzata per stimare le distanze degli ammassi e di conseguenza per stimare la costante di Hubble. Un esempio di questo metodo è quello usato per la stima delle distanze di due ammassi *MS0451.6-0305* e *Cl0016+16* (entrambi di redshift $z \approx 0.55$) in un articolo del 2000. Nella figura 2.4 sono esposti sia l'emissione X che l'effetto S-Z dei due ammassi.

Il metodo utilizzato dal gruppo di ricercatori si basa sull'utilizzo combinato dell'emissione in banda X degli ammassi e dell'effetto di S-Z. Per modellare l'ammasso è stato utilizzato il modello sferico isoterma β di Cavaliere e Femiano:

$$n_e(r) = n_{e0} \left(1 + \frac{r^2}{r_e^2}\right)^{-3\beta/2}, \quad (2.12)$$

dove r è il raggio dal centro dell'ammasso, r_e è il raggio di core dell'ammasso e β è l'indice della legge di potenza. Utilizzando questo modello il segnale dell'effetto S-Z termico risulta:

$$\Delta T = f(x) T_{CMB} D_A \int \sigma_T n_e \frac{kT_e}{m_e c^2} d\zeta = \Delta T_0 \left(1 + \frac{\theta^2}{\theta_c^2}\right)^{(1-3\beta)/2}, \quad (2.13)$$

con:

$$f(x) = \left[x \frac{e^x + 1}{e^x - 1} - 4 \right] (1 + \delta_{SZE}), \quad (2.14)$$

$\delta_{SZE}(x, T_e)$ è la correzione relativistica, la variabile d'integrazione $\zeta = l/D_A$ rappresenta la linea di vista e θ è il raggio angolare sul piano del cielo, θ_c è il raggio angolare di core e ΔT_0 è la variazione centrale dovuta all'effetto S-Z. Tornando su δ_{SZE} , il gruppo di ricerca ha utilizzato una correzione fino al quinto ordine che ha ridotto $f(x)$ di MS0451 e Cl0016 rispettivamente del 3.7% e del 2.7%, con un effetto maggiore su MS0451 a causa della sua temperatura maggiore.

Mente la brillantezza superficiale dell'emissione X risulta:

$$S_X = \frac{1}{4\pi(1+z)^4} D_A \int n_e n_H \Lambda_{eH} d\zeta = S_{X0} \left(1 + \frac{\theta^2}{\theta_c^2}\right)^{(1-6\beta)/2}, \quad (2.15)$$

con S_X la brillantezza superficiale nella banda X espressa in cgs, n_H la densità numerica di idrogeno dell'ammasso, $\Lambda_{eH} = \Lambda_{eH}(T_e, \text{abbondanze})$ è la funzione di raffreddamento X dell'ammasso nel suo sistema di riferimento in unità cgs e S_{X0} è la brillantezza superficiale in banda X centrale. Da questi due dati possiamo ottenere, scrivendo $n_H = n_e \mu_e / \mu_H$ (dove $n_j = /\mu_j m_p$ per una generica specie j):

$$D_A = \frac{\Delta T_0^2 \Lambda_{eH0} \mu_e / \mu_H}{S_{X0} 4\pi^{3/2} f(x)^2 T_{CMB}^2 \sigma_T^2 (1+z)^4 \theta_c} \left(\frac{m_e c^2}{kT_{e0}} \right)^2 \frac{\Gamma(3\beta - 1/2)}{\Gamma(3\beta)} \left[\frac{\Gamma(3\beta/2)}{\Gamma(3\beta/2 - 1/2)} \right]^2, \quad (2.16)$$

dove $\Gamma(x)$ è la funzione gamma di Eulero. In maniera analoga si può eliminare D_A per stimare n_{e0} .

Utilizzando i dati delle tabelle 2.1 e 2.2 ($T_{CMB} = 2.726 \pm 0.001 K$ [9]) ottennero come risultati: per MS0451 $D_A = 1278_{-298}^{+265} Mpc$ [10] e per Cl0016 $D_A = 2041_{-514}^{+484} Mpc$ [10].

Ammassi	β	$\theta_c(arcsec)$	$S_{X0}(s^{-1}cm^{-2}arcmin^{-2}erg)$	$\Delta T_0(\mu K)$
MS0451	$0.806_{-0.043}^{+0.052}$	$34.7_{-3.5}^{+3.9}$	$9.56_{-0.84}^{+0.86} \times 10^{-13}$	-1431_{-93}^{+98}
Cl0016	$0.749_{-0.018}^{+0.024}$	$42.3_{-2.0}^{+2.4}$	$6.17_{-0.28}^{+0.24} \times 10^{-13}$	-1242_{-105}^{+105}

Tabella 2.1: Tabella dei dati[10]

Ammassi	$T_e(keV)$	$N_H(cm^{-2})$	Metallicità	$\Lambda_{eH0}(s^{-1}cm^3erg)$
MS0451	$10.4_{-0.8}^{+1.0}$	$3.0_{-0.3}^{+0.4} \times 10^{20}$	$0.15_{-0.07}^{+0.07}$	$6.95 \pm 0.01 \times 10^{-24}$
Cl0016	$7.55_{-0.58}^{+0.72}$	$5.59_{-0.36}^{+0.41} \times 10^{20}$	$0.07_{-0.07}^{+0.11}$	$6.91 \pm 0.01 \times 10^{-24}$

Tabella 2.2: Tabella dei dati[10]

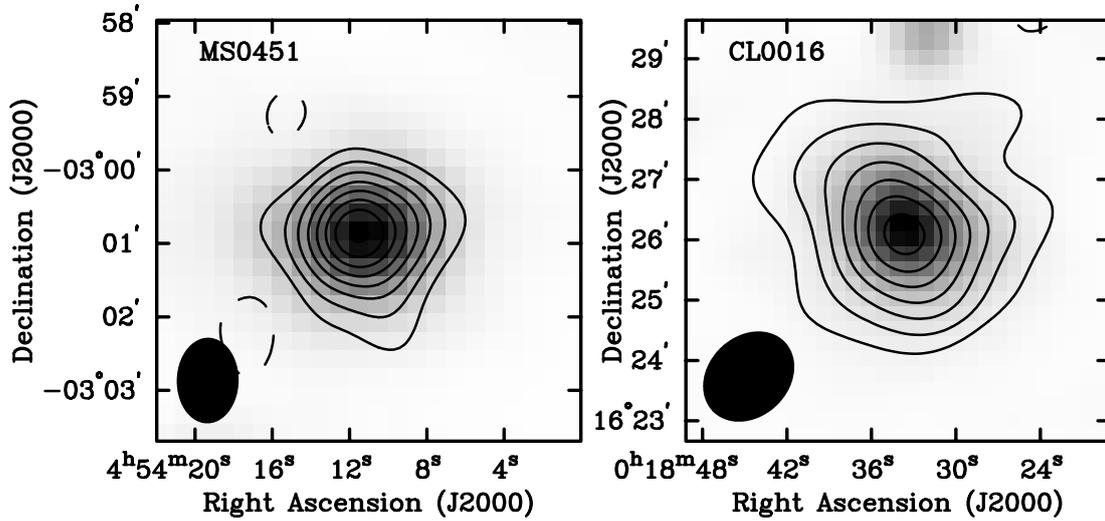


Figura 2.4: Effetto S-Z (contorni) e emissione X (scala di grigio) degli ammassi MS 0451.6-0305 (sinistra) e Cl 0016+16 (destra) (Reese, Mohr, Carlstrom, Joy, Greco, Holder, Holzzapfel, Hughes, Patel e Donahue, 200, p.3)

La costante di Hubble H_0 è stata ottenuta mediante una regressione lineare con i dati delle distanze e dei redshift per tre differenti teorie cosmologiche:

$$\begin{cases} H_0 = 52_{-7}^{+10} km s^{-1} Mpc^{-1}; \Omega_M = 1.0, \Omega_\Lambda = 0.0, \\ H_0 = 57_{-8}^{+11} km s^{-1} Mpc^{-1}; \Omega_M = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.0, \\ H_0 = 63_{-9}^{+12} km s^{-1} Mpc^{-1}; \Omega_M = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.7. \end{cases} \quad (2.17)$$

I risultati non sono esenti da possibili errori quali: la possibile non sfericità degli ammassi e errori nella stima della dimensione angolare dovuti alla presenza di sorgenti puntiformi vicino al centro dell'ammasso che possono andare a coprire il decremento dell'effetto S-Z.

In ogni caso questi risultati sono consistenti con quelli ottenuti da altri studi (in particolare con Hubble Space Telescope H_0 Key Project $H_0 = 71 \pm 6 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}$) e dimostrano l'importanza e l'efficacia dell'effetto S-Z per fini cosmologici.

2.2 Emissione di Compton inverso nel vento delle pulsar

L'emissione di Compton inverso è importante per spiegare l'emissione in banda γ delle pulsar.

Le pulsar sono, come dice il nome sorgenti radio pulsanti, costituite da una stella di neutroni che ruota su se stessa con un forte campo magnetico e capace di emettere venti che interagiscono con l'ambiente. In particolare uno studio pubblicato su Nature nel 2012, a partire dalle osservazioni dell'emissione γ della Crab pulsar, propone un modello per l'emissione del vento della pulsar. L'obiettivo dello studio è quello di spiegare il flusso γ mostrato in figura 2.5 in quanto per energie minori di 10 GeV lo spettro è ben descritto da un indice spettrale $\alpha = 1.97$ e un taglio esponenziale a $E_c = 5.8 \text{ GeV}$ mentre per energie maggiori di 10 GeV lo spettro è ben descritto da un indice spettrale $\alpha \approx 3.8$.

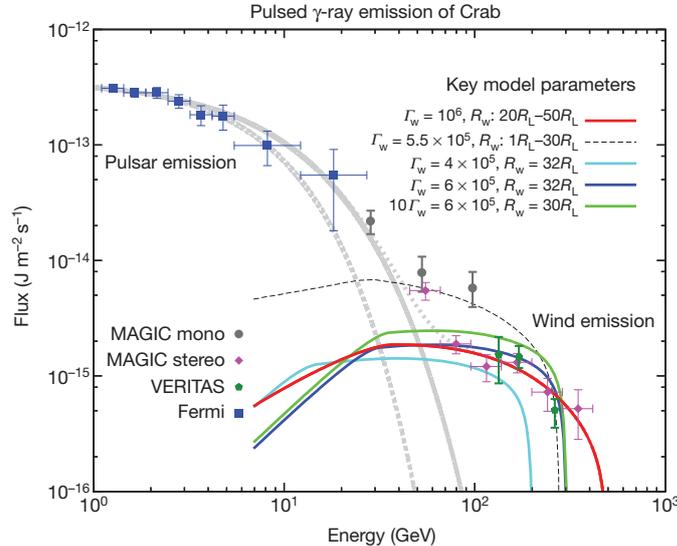


Figura 2.5: SED dell'emissione γ prodotta dalla magnetosfera della pulsar e dal vento della pulsar (Aharonian, Bogovalov e Khangulyan, 2012, p.1).

Il vento di positroni ed elettroni si originerebbe verso il cilindro di luce, il raggio in cui la velocità di rotazione è uguale a c , e vedrebbe una prima fase in cui è dominato dall'energia elettromagnetica che viene poi convertita in energia cinetica. Non è ancora chiaro come e dove l'accelerazione abbia luogo e che velocità raggiunga il vento. Alcuni modelli propongono un'accelerazione graduale a partire dalla magnetosfera della pulsar fino alla fine del vento ma modelli in cui il vento subisce una brusca accelerazione nella

zona del cilindro di luce non sono privi di fondamento.

Assumiamo che ad una distanza R_W le particelle del vento siano accelerate di un fattore Γ_W . Le particelle non possono essere accelerate solo radialmente, in quanto il sistema deve conservare sia l'energia che il momento angolare perso dalla Pulsar. Dalla relazione $\frac{dE_{rot}}{dt} = \Omega \frac{dM_{rot}}{dt}$ (dove E_{rot} e M_{rot} sono l'energia di rotazione e il momento angolare e Ω è la velocità angolare) possiamo, sapendo che l'energia di ogni particella è $\Gamma_W mc^2$ e il momento angolare è $\Gamma_W mrv$, ricavare la relazione $\Gamma_W mrv\Omega = \Gamma_W mc^2$. Questa relazione ci dice che le particelle del vento si muovono lungo linee rette tangenti al cilindro di luce e di conseguenza i fotoni emessi dalla magnetosfera della pulsar incidono con un angolo non nullo che dà origine a emissione di Compton inverso nella banda γ . Anche ipotizzando una bassa efficienza ($k = 10^{-6}$) nell'emissione γ questa sarebbe comunque considerevole e rivelabile con un flusso stimato di $F = k \frac{dE_{rot}}{dt} / 4\pi d^2 \approx 10^{-12} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ (dove la distanza dalla pulsar è $d = 6 \times 10^{21} \text{ cm}$).

Sebbene l'emissione di Compton inverso avvenga da elettroni mono-energetici, la distribuzione spettrale dell'emissione γ tra 10 e 100 GeV risulta piatta. Questo è causato dalla combinazione di effetti legati all'ampia distribuzione a legge di potenza dei fotoni seme e dalla transizione della sezione d'urto Compton dal regime Thompson a quello di Klein-Nishina.

Bibliografia

- [1] George B. Rybicki e Alan P. Lightman, *Radiative processes in astrophysics*, WILEY-VCH Verlag GmbH Co. KGaA, Weinheim, seconda edizione, 2004.
- [2] Malcolm S. Longair, *High Energy Astrophysics*, Cambridge University Press, Cambridge, terza edizione, 2011.
- [3] Roberto Casalbuoni, *Appunti di Relatività Speciale*, Dipartimenti di fisica dell'Università di Firenze, Firenze, 2004.
- [4] Carla Fanti e Roberto Fanti, *Una finestra sull'Universo "Invisibile"*, Bologna, 2012.
- [5] T. Padmanabhan, *Theoretical astrophysics Volume I: Astrophysical Processes*, Cambridge University Press, Cambridge, prima edizione, 2000.
- [6] Donald G. Shirk, *A Practical Review of the Kompaneets Equation and its Application to Compton Scattering*, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, 2006.
- [7] Y. Rephaeli, S. Sadeh e M. Shimon, *The Sunyaev-Zeldovich Effect*, 2005.
- [8] Y. Rephaeli e M. Shimon, *Quantitative description of the Sunyaev-Zeldovich effect: analytic approximations*, 2003.
- [9] G. Hurier e C. Tchernin, *Mapping the temperature of the intra-cluster medium with the tSZ effect*, 2017.
- [10] E. D. Reese, J. J. Mohr, J. E. Carlstrom, M. Joy, L. Greco, G. P. Holder, W. L. Holzapfel, J. P. Hughes, S. K. Patel e M. Donahue, *Sunyaev-Zeldovich effect-derived distances to the high-redshift clusters MS 0451.6+0305 and Cl0016-16*, 2000.
- [11] Mark Birkinshaw, *The Sunyaev-Zel'Dovich effect*, 1998.
- [12] F. A. Aharonian, S. V. Bogovalov e D. Khangulyan, *Abrupt acceleration of a 'cold' ultrarelativistic wind from the Crab pulsar*, 2012 .