

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia

Corso di Laurea in Astronomia

**MATERIA DEGENERE:
FISICA E APPLICAZIONI
ASTROFISICHE**

Tesi di laurea

Presentata da:
Enrico Occhiuto

Relatore:
**Chiar.mo Prof.
Daniele Dallacasa**

Appello I
Anno Accademico 2017/2018

"The larger our ignorance, the stronger the magnetic field."

-Lodewijk Woltjer

Indice

Introduzione	1
1 Fisica della materia degenere	2
1.1 Particelle identiche: bosoni e fermioni	2
1.2 Potenziale chimico	3
1.3 Condizione di non Degenerazione	3
1.4 Degenerazione nei fermioni	4
1.4.1 Il livello di Fermi	4
1.4.2 Momento di Fermi	5
1.5 Degenerazione nei bosoni	6
1.5.1 Condensazione di Bose	6
2 Applicazioni astrofisiche	7
2.1 Pressione negli interni stellari	7
2.1.1 Equazione di stato	7
2.1.2 Pressione di degenerazione	8
2.1.3 Diagramma $\text{Log}\rho - \text{Log}T$	9
2.2 Evoluzione stellare	10
2.2.1 Nane Bianche	11
2.2.2 Rapporto massa raggio	11
2.2.3 La massa limite di Chandrasekhar	12
2.2.4 Sequenza di raffreddamento	12
2.3 Stelle di neutroni	14

Introduzione

La degenerazione rappresenta uno stato della materia, in condizioni estreme di temperatura e densità, nel quale per descrivere il comportamento delle particelle bisogna tenere conto di effetti quantistici. Col seguente elaborato si vuole fornire una panoramica generale sullo stato degenero della materia e le sue principali applicazioni in astrofisica. L'obiettivo di questa tesi di laurea è quello di fornire un'analisi del diverso comportamento di particelle bosoniche e fermioniche in stato di degenerazione, portando poi l'attenzione su come tali aspetti si riflettano in strutture stellari come le nane bianche e le stelle di neutroni. La tesi è articolata su due capitoli: nel primo viene fornita un'introduzione sulla fisica della materia degenera, enunciando il principio di esclusione di Pauli e descrivendo le distribuzioni di Fermi-Dirac e Bose-Einstein. Nel secondo capitolo viene mostrato come cambi la descrizione della pressione in ambiente degenero. Infine, sulla base di questi risultati, vengono trattati alcuni esempi astrofisici, in particolare si pone particolare attenzione a come la degenerazione caratterizzi il raggio e la massa di stelle come le nane bianche e le stelle di neutroni.

Capitolo 1

Fisica della materia degenera

1.1 Particelle identiche: bosoni e fermioni

Due particelle sono identiche se hanno le stesse intrinseche proprietà fisiche (massa, carica elettrica, momento magnetico ecc..). In meccanica classica due particelle sono sempre distinguibili, poiché possiamo misurare simultaneamente posizione e momento con precisione arbitraria lungo la traiettoria della particella. In meccanica quantistica la situazione è completamente diversa. In virtù del principio di indeterminazione, il concetto di traiettoria perde completamente significato. Se la posizione della particella è nota esattamente in un dato istante, nell'istante successivo le sue coordinate non hanno più valori determinati, le particelle perdono del tutto la loro individualità.

Consideriamo un sistema formato da due sole particelle. A causa della loro identità gli stati del sistema, che si ottengono scambiando le due particelle, devono essere fisicamente equivalenti. Questo significa che la funzione d'onda $\psi(\xi_1, \xi_2)$, dove ξ_1, ξ_2 indicano gli insiemi delle tre coordinate, può variare soltanto di un fattore di fase. Pertanto deve essere: $\psi(\xi_1, \xi_2) = e^{i\alpha}\psi(\xi_2, \xi_1)$.

Scambiando ancora una volta, si torna allo stato iniziale, mentre la funzione risulta moltiplicata per $e^{2i\alpha}$. Ma $e^{2i\alpha} = 1$, ossia $e^{i\alpha} = \pm 1$.

Di conseguenza $\psi(\xi_1, \xi_2) = \pm \psi(\xi_2, \xi_1)$. Esistono quindi due possibilità per la funzione d'onda: essa può essere simmetrica o antisimmetrica rispetto allo scambio di due particelle. Questo risultato si generalizza ai sistemi formati da un numero qualsiasi di particelle identiche. Infatti, a causa dell'identità, se una coppia qualsiasi di queste particelle gode della proprietà di poter essere descritta, per esempio, da funzioni d'onda simmetriche, tutte le altre coppie di queste particelle avranno la stessa proprietà. Un insieme di particelle, descritto da funzioni d'onda simmetriche si dice che è composto da *bosoni*, mentre particelle descritte da funzioni d'onda antisimmetriche vengono chiamate *fermioni*. Dunque, se in un sistema descritto da una funzione antisimmetrica, ho due particelle con gli stessi numeri quantici, scambiandole ottengo uno stato che è uguale a meno se stesso, cioè nullo. Ne segue che in un sistema di fermioni è impossibile che due particelle si trovino nello stesso stato. Questo è il principio di esclusione di Pauli. In virtù di tale principio, se più fermioni vengono a occupare gli stati di un sistema quantistico, una volta che lo stato fondamentale è occupato, il secondo fermione deve necessariamente collocarsi nel successivo stato eccitato, e così via, occupando

tutti gli stati. Il comportamento di particelle bosoniche è descritto dalla statistica di Bose-Einstein, quello fermionico dalla statistica di Fermi-Dirac. Tenendo conto della conservazione del numero di particelle, le popolazioni di equilibrio di bosoni e fermioni vengono descritte dalla seguente funzione:

$$n_{\alpha}^{\pm} = \frac{g_{\alpha}}{e^{\beta(\epsilon_{\alpha}-\mu)} \pm 1} \quad (+ \rightarrow FD; - \rightarrow BE) \quad (1.1)$$

Nell'equazione (1.1): n_{α} rappresenta il numero di sistemi che occupano un livello di energia ϵ_{α} , $\beta=1/k_B T$ e μ rappresenta il potenziale chimico.

1.2 Potenziale chimico

Introduciamo ora una grandezza fondamentale per lo studio della materia degenere, il potenziale chimico. Tale grandezza si definisce per i sistemi Gran-canonici, sistemi aperti, che scambiano sia calore che particelle. All'equilibrio termico e lontano dalle transizioni di fase, questo non comporta alcuna modifica alle funzioni di stato se non quella di considerare un numero N di sottosistemi canonici. Ciò porta a modificare il primo principio, dal momento che il contenuto di energia totale dipende certamente da N . Il differenziale dell'energia risulterà:

$$dE = TdS - PdV + \mu dN \quad (1.2)$$

dove la funzione di stato μ è denominata potenziale chimico. Ponendo nella (1.2) $dS = dV = 0$ otteniamo:

$$\mu = \left(\frac{\partial E}{\partial N} \right)_{S,V} \quad (1.3)$$

Vediamo quindi che il potenziale chimico rappresenta l'energia che occorre fornire o sottrarre al sistema per inserirvi un nuovo sotto-sistema, mantenendo il volume e l'entropia costanti.

Vi é anche un altro modo per definire il potenziale chimico. Introducendo la funzione Energia Libera di Helmholtz: $\phi = E - TS$ il potenziale chimico assume la seguente forma:

$$\mu = \left(\frac{\partial \phi}{\partial N} \right)_{T,V} \quad (1.4)$$

Il potenziale chimico, dunque, è la quantità di energia libera che si aggiunge o sottrae al sistema per introdurvi un altro sotto-sistema mantenendo costante la temperatura ed il volume.

1.3 Condizione di non Degenerazione

La degenerazione è un particolare stato della materia che si manifesta in particolari condizioni di temperatura e densità. Sotto tali condizioni, il numero più probabile di particelle, in un particolare stato, con energia ϵ non segue più la distribuzione di Maxwell-Boltzman:

$$M(\epsilon, T) = e^{-(\epsilon-\mu)/K_B T} \quad (1.5)$$

Occorre introdurre due nuove distribuzioni (Bose-Einstein, Fermi-Dirac) che tengano conto della natura quantistica delle particelle. La condizione di non degenerazione è quel limite sotto il quale possiamo escludere gli effetti quantistici sul sistema. Tale condizione si traduce nella richiesta:

$$\frac{n_\alpha}{g_\alpha} \ll 1 \quad (1.6)$$

dove n_α rappresenta una popolazione di equilibrio del livello ϵ_α mentre g_α è il numero di stati disponibili. Si richiede dunque che il numero di stati del sistema sia molto maggiore del numero di particelle che lo compongono. Un altro modo per esprimere la condizione (1.6) è attraverso il potenziale chimico. Tale limite, considerando μ si traduce nel richiedere che $\exp(-\beta\mu) \gg 1$.

Nel caso degenere, considerando la (1.1), si deduce facilmente che $\mu \leq 0$ per i Bosoni. Se così non fosse la popolazione n_0 del livello fondamentale sarebbe negativa, il che è assurdo. Nel caso fermionico, invece, μ può essere anche positivo, il che è una conseguenza del principio di esclusione di Pauli.

1.4 Degenerazione nei fermioni

1.4.1 Il livello di Fermi

Nello studio di fermioni degeneri si definisce la seguente funzione di occupazione:

$$F(\epsilon, T) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} \quad (1.7)$$

La (1.7) è chiamata distribuzione di Fermi-Dirac e si applica a fermioni identici. Si definisce *livello di Fermi* l'energia $\epsilon_F = \lim_{T \rightarrow 0} \mu(T)$ che, è necessariamente positiva. La funzione (1.7) ha un andamento particolarmente semplice per $T \rightarrow 0$:

$$F(\epsilon, 0) = \begin{cases} 1 & \text{per } \epsilon < \epsilon_F \\ \frac{1}{2} & \text{per } \epsilon = \epsilon_F \\ 0 & \text{per } \epsilon > \epsilon_F \end{cases} \quad (1.8)$$

La (1.8) rappresenta una funzione-gradino di altezza 1 e larghezza ϵ_F (curva (A) Figura 1.1).

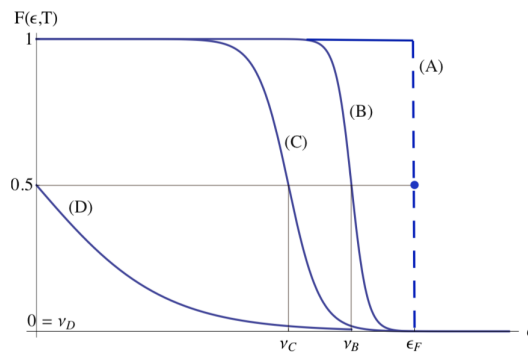


Figura 1.1: Funzione di occupazione fermionica a varie temperature

Questo risultato descrive un'occupazione totale di tutti gli stati al di sotto dell'energia di Fermi e un'occupazione nulla al di sopra. Questo è ciò che ci si aspetta allo zero assoluto per un gas di Fermioni. A tale temperatura il gas si trova nello stato di minima energia, ma a causa del principio di esclusione di Pauli, i fermioni non possono occupare tutti insieme il livello fondamentale $\epsilon = 0$. Aumentando la temperatura la distribuzione di Fermi-Dirac "addolcisce" il gradino che separa gli stati vuoti da quelli pieni. Il gradino della funzione (1.8) diventa una curva ripida ma continua (curve (B) e (C) figura 1.1). In corrispondenza, il potenziale chimico $\mu(T) = \epsilon_F + \mu(T)$ cambia di poco. Aumentando ancora la temperatura, μ si annulla (vedi curva (D) in Fig. 1.1), poi diventa negativo, finché $e^{-\beta\mu} \gg 1$, che, come abbiamo visto, rappresenta la condizione di non degenerazione. In quest'ultimo caso, la funzione di occupazione, per energie positive, si riduce ad una piccola coda esponenziale, che rappresenta il fattore di Boltzmann.

1.4.2 Momento di Fermi

Riscrivendo la funzione di occupazione Fermionica in funzione degli impulsi delle particelle si ottiene la seguente equazione:

$$N_p dp = \frac{8\pi}{h^3} \frac{p^2}{e^{\frac{p^2}{2mkT} - \psi} + 1} dp \quad (1.9)$$

Essa rappresenta il numero di fermioni con un impulso compreso tra p e $p + dp$. Nella (1.9) compare il parametro ψ , che tiene conto della degenerazione del sistema:

$$\psi \propto \frac{1}{kT} \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (1.10)$$

Tanto più grande è ψ , tanto più degenerare sarà il sistema. Sarà invece negativo per un sistema non degenero. Riportando in un grafico la (1.9) al variare del parametro ψ e confrontandola con la distribuzione di momenti di Maxwell-Boltzmann otteniamo la (Figura 1.2).

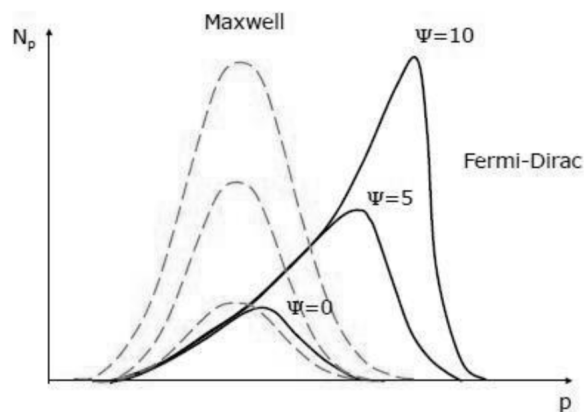


Figura 1.2: Funzione di occupazione fermionica al variare di ψ a confronto con la distribuzione di Maxwell-Boltzmann

Attraverso il confronto delle due distribuzioni possiamo trarre le seguenti conclusioni. Nella Maxwell-Boltzmann, mantenendo costante la temperatura, e aumentando il numero delle particelle il valore più probabile del momento non cambia.

Al contrario nella Fermi-Dirac, aumentando il numero di particelle, il valore di ψ aumenta e il picco della curva si sposta a valore di p più alti. Questo spostamento è dovuto al principio di esclusione di Pauli. Essendo gli stati a piccoli p tutti occupati, gli elettroni sono costretti ad assumere impulsi maggiori. Per un sistema completamente degenere $\psi = \infty$, e la (1.9) diventa:

$$N_p dp = \frac{8\pi}{h^3} p^2 dp \quad (1.11)$$

Integrando la (1.11), fino a P_0 , otteniamo il momento di Fermi:

$$p_0 = \sqrt[3]{\frac{3h^3}{8\pi\mu H} \rho^{\frac{1}{3}}} \quad (1.12)$$

Il momento di Fermi, rappresenta, il massimo momento possibile, che un sistema di fermioni può assumere ad una data temperatura.

1.5 Degenerazione nei bosoni

1.5.1 Condensazione di Bose

Nel caso di bosoni la funzione di occupazione si riduce a :

$$B(\epsilon, T) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} \quad (1.13)$$

Per l'equazione (1.13), come osservato nel paragrafo della degenerazione, $\mu(T) \leq 0$ per ogni valore di temperatura. È interessante osservare che, al diminuire della temperatura, $\mu(T) \rightarrow 0$. In queste condizioni si raggiunge una situazione critica detta *condensazione di Bose*. Questo stato fisico si raggiunge quando la temperatura assume un valore limite. Tale limite è chiamato *temperatura di Bose* e vale:

$$T_B = \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B} \left(\frac{N}{2.61V} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (1.14)$$

La condensazione di Bose è un processo in cui la popolazione del condensato cambia bruscamente natura. Per $T \geq T_B$, essa è una quantità sub-estensiva, invece per $T < T_B$ la popolazione del condensato diviene estensiva. Parallelamente, μ cresce da valori negativi fino a zero, rimanendo zero al di sotto di T_B . L'importanza concettuale di questa transizione sta nel potere immaginare che la condensazione di Bose può dare luogo a una forma di superfluidità. A differenza di una normale corrente, in cui un campo esterno agisce individualmente sulle particelle, dando origine ad un moto caotico il condensato si comporta come un monoblocco di Bosoni identici, nello stesso stato, che, una volta sollecitato da opportune forze, si muove come un corpo unico. Nel primo caso, ogni particella dissipa individualmente parte dell'energia acquisita attraverso il campo. Al contrario il Condensato dissipa energia soltanto in forma collettiva, cosa che avviene con probabilità trascurabile. Dunque un condensato, messo in movimento, si trasforma in un superfluido che continua a muoversi quasi indefinitamente. La condensazione di Bose è un fenomeno ideale, molto difficile da osservare sperimentalmente, in quanto sono necessarie temperature prossime allo zero assoluto.

Capitolo 2

Applicazioni astrofisiche

2.1 Pressione negli interni stellari

2.1.1 Equazione di stato

Negli interni stellari le temperature sono così elevate da rendere possibile la ionizzazione. Dunque il gas è costituito prevalentemente da un plasma di ioni ed elettroni. In queste condizioni i contributi alla pressione sono dovuti al gas di elettroni e ioni, alla radiazione elettromagnetica e ai moti collettivi. Questi ultimi possono essere considerati trascurabili nel conto. La pressione totale sarà dunque la somma di:

$$P_{tot} = P_{gas} + P_{rad} \quad (2.1)$$

Per ciò che riguarda la componente particellare (ioni ed elettroni), possiamo assumere che essa si comporti come un gas perfetto, ovvero un gas in cui le interazioni coulombiane tra le particelle siano trascurabili rispetto alla loro energia cinetica. Per un tale sistema vale l'equazione di stato:

$$PV = \eta RT \quad (2.2)$$

dove le variabili sono in ordine: la pressione, il volume, il numero di moli, la costante dei gas (8,31 J/mol K) e la temperatura assoluta. La (2.2) può essere riscritta nella forma:

$$P = \frac{\rho KT}{\mu H} \quad (2.3)$$

dove compare il parametro μ (peso molecolare medio) che tiene conto delle abbondanze chimiche degli elementi all'interno della stella.

La pressione di radiazione può essere ricavata da quella di corpo nero e vale:

$$P_{rad} = \frac{4\sigma T^4}{3c} \quad (2.4)$$

dove: σ è la costante di Stefan-Boltzmann ($5.6 \cdot 10^5$ erg/ sec $\text{cm}^2 \text{K}^4$), c la velocità della luce e T la temperatura assoluta. Sostituendo nella (2.1) le equazioni (2.3) e (2.4) l'equazione della pressione assume la seguente forma:

$$P_{tot} = \frac{\rho KT}{\mu H} + \frac{4\sigma T^4}{3c} \quad (2.5)$$

2.1.2 Pressione di degenerazione

Vi sono alcuni regimi in cui il gas non ha un comportamento come quello descritto dall'equazione (2.5). Questo è il caso della degenerazione elettronica, un fenomeno fisico che tende a rendere il gas più incompressibile rispetto ad un gas perfetto. Tale condizione è favorita per particelle di piccola massa. Perciò, in un gas ionizzato ad alte temperature come quelle degli interni stellari vi sarà una probabilità maggiore di trovare gli elettroni in stato di degenerazione rispetto agli ioni. Per un gas di elettroni la pressione in funzione della distribuzione dei momenti è data dalla :

$$P = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} N(p) p v dp \quad (2.6)$$

Andando ora a sostituire la distribuzione (1.11) dei momenti per un gas degenere, l'integrale (2.6) diventa:

$$P = \frac{1}{3} \int_0^{P_0} \frac{8\pi}{h^3} p^3 v dp \quad (2.7)$$

dove P_0 rappresenta il momento di Fermi (1.12). A questo punto dobbiamo considerare due casi possibili: il regime relativistico e quello non relativistico.

Per il regime non relativistico si assume $P_0 \ll m_e c$; allora possiamo assumere $P = mv$. Risolvendo l'integrale (2.7), sotto queste condizioni si ottiene:

$$P = \frac{8\pi}{15h^3 m} P_0^5 \quad (2.8)$$

in cui, sostituendo il valore del momento di Fermi (1.12) ricaviamo:

$$P = K_1 \rho^{\frac{5}{3}} \quad (2.9)$$

dove K_1 è una costante e vale : $K_1 = 10^{13} \mu_e^{-\frac{5}{3}}$.

Nel caso relativistico avremo che $P_0 \sim m_e c$, e integrando la (2.7) sotto queste nuove condizioni, otteniamo:

$$P = \frac{2\pi c}{3h^3} P_0^4 \quad (2.10)$$

Sostituendo la (1.12) si ottiene l'equazione per la pressione degenere nel caso relativistico:

$$P = K_2 \rho^{\frac{4}{3}} \quad (2.11)$$

dove K_2 è una costante e vale : $K_2 = 1.2 \cdot 10^{15} \mu_e^{-\frac{4}{3}}$.

Le due nuove espressioni per la pressione: (2.9) e la (2.11), sono indipendenti dalla temperatura. Al contrario del caso non degenere, esse dipendono solamente dalla densità e dal peso elettronico medio (~ 2). Questo effetto è dovuto al subentrare di fenomeni quantistici e relativistici sul sistema fermionico per cui la distribuzione dei momenti non dipende più dalla temperatura.

2.1.3 Diagramma $\text{Log}\rho - \text{Log}T$

Per il calcolo della pressione totale si deve quindi tener conto di diversi contributi dovuti al diverso comportamento del gas:

$$P_{tot} = \frac{4T^4}{3} + \frac{K\rho T}{\mu_i H} + \begin{cases} \frac{K\rho T}{\mu_e H} & \text{Non degenera} \\ K_1\rho^{\frac{5}{3}} & \text{Degenera classico} \\ K_2\rho^{\frac{4}{3}} & \text{Degenera relativistico} \end{cases} \quad (2.12)$$

Uguagliando i diversi contributi delle pressioni e passando alla scala logaritmica si ottengono le seguenti relazioni di equivalenza:

$$P_{gas} = P_{rad} \rightarrow \frac{\rho KT}{\mu H} = \frac{a}{3}T^4 \rightarrow \text{Log}(T) = \frac{1}{3}\text{Log}(\rho) + 7.57 \quad (2.13)$$

$$P_{ele} = P_{deg,c} \rightarrow \frac{\rho KT}{\mu_e H} = K_1\rho^{\frac{5}{3}} \rightarrow \text{Log}(T) = \frac{2}{3}\text{Log}(\rho) + 4.88 \quad (2.14)$$

$$P_{ele} = P_{deg,r} \rightarrow \frac{\rho KT}{\mu_e H} = K_2\rho^{\frac{4}{3}} \rightarrow \text{Log}(T) = \frac{1}{3}\text{Log}(\rho) + 7.07 \quad (2.15)$$

$$P_{deg,c} = P_{deg,r} \rightarrow K_1\rho^{\frac{5}{3}} = K_2\rho^{\frac{4}{3}} \rightarrow \text{Log}(\rho) = 6.6 \quad (2.16)$$

Riportando le precedenti equazioni in un piano otteniamo il diagramma $\text{Log}(T)$ - $\text{Log}(\rho)$ (Figura 2.1). Tale grafico ci permetterà, una volta conosciute densità e temperatura di uno strato della stella, di sapere quale componente di pressione prevale.

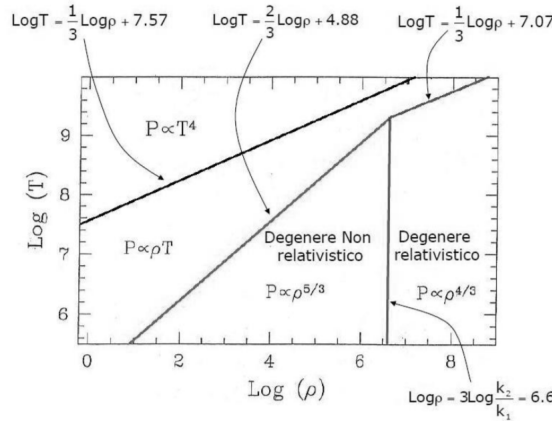


Figura 2.1: Diagramma $\text{Log}\rho$ - $\text{Log}T$

Nella (Figura 2.1), le stelle di sequenza principale si trovano nella zona non degenera, dove domina la pressione di gas perfetto. Le Giganti Rosse sono situate nella zona a cavallo tra il gas perfetto ed il degenera non relativistico. Infine, situate tra degenera classico e degenera relativistico, troviamo le nane bianche e le stelle di neutroni.

2.2 Evoluzione stellare

Durante la vita di una stella, si possono identificare tre fasi principali: la sequenza principale, la post-sequenza principale e la fase finale. Durante queste transizioni, la struttura chimica e fisica della stella cambia, raggiungendo diverse condizioni di equilibrio idrostatico. La fase di sequenza principale, periodo di maggior stabilità nella vita di una stella, è caratterizzata dalla conversione di idrogeno in elio. Quando l'idrogeno nel nucleo sta per essere esaurito, l'equilibrio idrostatico che si era stabilito viene a mancare. Di conseguenza, il nucleo incomincia a contrarsi e a riscaldarsi, dando il via alla fusione di elio in carbonio. Questo produce un sovrariscaldamento della stella, che per dissipare l'energia in eccesso si espande. La stella diventa una gigante rossa. Se la massa è inferiore alle $11M_{\odot}$ quando l'elio sta per esaurirsi, il nucleo inizia nuovamente a contrarsi e gli strati esterni si espandono, per la minore produzione di energia all'interno. La stella, divenuta instabile, espelle gli strati al di sopra del nucleo dando origine ad una nebulosa planetaria, al centro del quale si trova il nucleo caldo e denso della ex gigante rossa: una nana bianca. A seconda della massa iniziale, si possono distinguere due differenti categorie di nane bianche:

- $0.5M_{\odot} < M < 8M_{\odot}$: la stella è sostenuta da un nucleo degenere di carbonio-ossigeno, ma non è in grado di innescare le reazioni nucleari per convertire gli elementi del nucleo in elementi più pesanti e si spegne come tale;
- $8M_{\odot} < M < 11M_{\odot}$: la nana bianca costituita da un nucleo semi-degenere di carbonio-ossigeno, innesca il bruciamento del carbonio e lo converte in Neon. Terminata la conversione, la temperatura non permette di continuare la catena di conversione degli elementi. Si spengono come nane bianche Ossigeno-Neon, oppure esplodono come supernove.

Le giganti rosse con massa superiore a $11 M_{\odot}$ hanno una temperatura sufficiente per innescare il bruciamento del carbonio verso elementi più pesanti. La catena si arresta quando il nucleo di ferro, elemento più stabile in natura, raggiunge una massa superiore al Limite di Chandrasekhar ($\sim 1.4M_{\odot}$). Oltrepassato quest'ultimo, il nucleo non riesce più a tollerare la sua stessa massa e va incontro ad un improvviso e irreversibile collasso. In tali condizioni si innesca il processo Urca, che fa interagire elettroni e protoni formando neutroni e neutrini. Questo meccanismo fa diminuire gli elettroni liberi che potrebbero contribuire alla pressione di degenerazione elettronica. Tutto il materiale esterno al nucleo di Ferro collassa data la mancanza del sostegno del core dando origine ad un'esplosione detta Supernova di tipo II. L'esplosione distrugge la stella ma lascia un remnant che può essere:

- Stella di neutroni, sostenuta dalla pressione di degenerazione dei neutroni, formati in gran numero dallo stesso processo Urca, se la massa del nucleo di ferro è compresa tra le 1.4 e $2.5M_{\odot}$;
- Buco nero se la massa del nucleo di ferro supera le $2.5M_{\odot}$, in quanto la pressione di degenerazione neutronica non riesce ad opporsi al collasso del nucleo.

2.2.1 Nane Bianche

Le Nane Bianche (White Dwarfs) rappresentano lo stadio evolutivo finale per stelle di massa intermedio-piccola ($M < 11M_{\odot}$). Sono costituite dal nucleo di una stella evoluta fino al bruciamento di He, prima nel nucleo poi in shell. Queste stelle sono caratterizzate da: luminosità dell'ordine di $L \simeq 0.003L_{\odot}$, masse $M \simeq 1,4M_{\odot}$, raggi $R \simeq 10^3\text{-}10^4\text{Km}$ e temperature nucleari di circa $10^6/10^7$ K. Le densità in gioco sono molto elevate, esse vanno da 10^6 a 10^8 g/cm³, di conseguenza il gas di elettroni si trova nello stato degenerare. Stimando il valore della pressione, dovuta alla forza di gravità ($P_g \simeq 10^{23}\text{dyne/cm}^2$) si osserva essere dello stesso ordine di grandezza della pressione dovuta agli elettroni degeneri ($P_e \simeq 10^{23}\text{dyne/cm}^2$). Questo risultato dimostra che la pressione di gas degenerare è in grado di sostenere la struttura della stella.

2.2.2 Rapporto massa raggio

Una delle relazioni fondamentali che caratterizzano la struttura delle nane bianche è la relazione massa-raggio. La struttura di una stella totalmente degenerata è descritta dal sistema politropico:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r\rho}{r^2}; \quad \frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2\rho; \quad P = k\rho^\gamma; \quad (2.17)$$

A differenza dei gas non degeneri, qui gli indici k e γ sono univocamente determinati dalla condizione di degenerazione elettronica. Nel caso non relativistico si ha: $P=10^{13}(\rho/\mu_e)^{\frac{5}{3}}$. Dalla struttura del sistema politropico discende che per ogni fissata densità centrale resta fissata la pressione centrale e con essa tutta la struttura ed in particolare la massa ed il raggio della stella. Ad ogni massa deve dunque corrispondere una e una sola densità centrale ed un determinato raggio della struttura degenerare. Uguagliando la pressione di gravità a quella di gas degenerare si ottiene la relazione raggio massa:

$$R \propto \frac{0.02}{\mu_e^{\frac{5}{3}} M^{\frac{1}{3}}} R_{\odot} \quad (2.18)$$

dove: M è la massa della stella e μ_e il peso elettronico medio. Dalla (Figura 2.2) si evince come le nane bianche abbiano raggiunto un equilibrio idrostatico in cui il raggio è inversamente proporzionale alla radice cubica della massa.

La (Figura2.2) mostra come queste previsioni teoriche siano in accordo coi dati sperimentali, confermando, in ultima analisi, le valutazioni teoriche sulle proprietà della materia degenerare. La relazione (2.18) resta valida finché la massa della stella non supera le $0.5M_{\odot}$. Per masse superiori si raggiungono densità in cui interviene la degenerazione relativistica, che tende ad accrescere la dipendenza del raggio dalla massa.

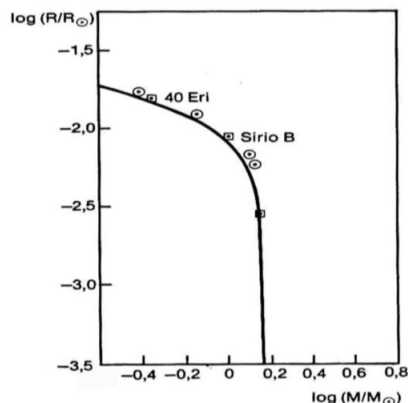


Figura 2.2: La relazione teorica massa-raggio per strutture elettronicamente degeneri confrontata con i dati sperimentali per alcune nane bianche appartenenti a sistemi binari.

2.2.3 La massa limite di Chandrasekhar

La teoria pone un limite superiore alla massa di una struttura sorretta dalla degenerazione elettronica, pari a circa $1.4M_{\odot}$. Esso è chiamato limite di Chandrasekhar e fu a suo tempo ricavato come conseguenza diretta delle relazioni fisiche che siamo andati sin qui esponendo. Si può comprendere la sua origine ricordando che al crescere della massa cresce la densità (serve maggior pressione degli elettroni) e la degenerazione è spinta verso il regime relativistico. Considerando l'espressione relativistica per gli elettroni degeneri (2.11) ed uguagliando la pressione gravitazionale a quella di degenerazione, si ottiene un'equazione indipendente dal raggio:

$$M \propto \frac{1}{G^{3/2} \mu_e^2} \quad (2.19)$$

dove: G è la costante di gravitazione universale ($6.7 \cdot 10^{-8} \text{ dyne cm}^2 \text{ g}^{-2}$) e μ_e il peso elettronico medio. Sostituendo i valori si ottiene che tale massa ha un valore di $\simeq 1.4M_{\odot}$. L'espressione esatta, dipende dall'abbondanza di idrogeno, il che porta al seguente risultato: $M_{Ch} = 1.4(1+x)^2 M_{\odot}$. Questo risultato è del tutto generale, non vale solo per le nane bianche, vale per tutte le strutture mantenute in equilibrio idrostatico dalla pressione degli elettroni degeneri, che si tratti di una nana bianca o di un nucleo di Ferro.

2.2.4 Sequenza di raffreddamento

Con la fine delle reazioni di fusione nucleare, una nana bianca non ha alcun meccanismo che produca energia, sia dal punto di vista nucleare che dal punto di vista gravitazionale. Esse si raffredderanno lentamente nel tempo, mantenendo il raggio costante, irradiando il calore accumulato. Nelle stelle normali, il libero cammino medio dei fotoni è molto maggiore di quello degli elettroni o degli ioni. Di conseguenza il trasporto di energia avviene principalmente per diffusione radiativa. Nel caso delle nane bianche, gli elettroni degeneri possono percorrere lunghe distanze prima di perdere energia in una collisione con un nucleo, poiché la maggior parte degli stati a energia più bassa è già occupata. Dunque il principale trasporto di

energia è la conduzione elettronica. L'efficienza di tale metodo è così elevata da rendere isoterma l'interno della stella (Figura 2.3). Il sottile involucro esterno, non degenere, che riveste la nana bianca, trasferisce il calore in modo meno efficiente e agisce come un isolante, causando lente perdite di energia.

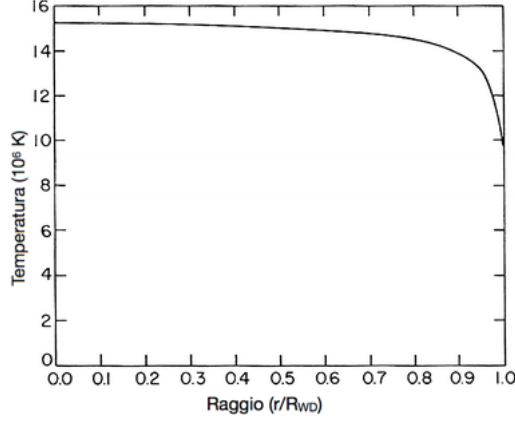


Figura 2.3: Andamento della temperatura in funzione del raggio per una nana bianca.

Dunque, le nane bianche non si stanno contraendo lungo la cooling sequence e la luminosità è sostenuta dal rilascio di energia termica degli ioni in regime classico all'interno della stella. Possiamo stimare la velocità di raffreddamento, trascurando lo strato esterno e assumendo una temperatura uniforme per tutto il sistema. Essendo l'energia termica l'unica fonte disponibile, la luminosità della nana bianca è uguale al rate con cui gli ioni rilasciano energia raffreddandosi. La perdita di energia si ottiene eguagliando la luminosità del corpo nero, data dalla legge di Stefan-Boltzmann, al tasso di variazione dell'energia termica:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \quad \sim \quad -\frac{dE_{th}}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{3M_{wd} k_b T}{2Am_p} \right) \quad (2.20)$$

Stimiamo ora l'ordine di grandezza dell'energia termica per una nana bianca con: una massa pari a $1M_{\odot}$, costituita da carbonio ad una temperatura di $\simeq 10^7$ K. Il valore che si ottiene è di: $E \simeq 2.5 \cdot 10^{47}$ erg. Conoscendo una stima approssimata dell'energia, attraverso la (2.20) possiamo ricavare una relazione che leghi il tempo di raffreddamento alla luminosità al variare del tempo t :

$$L_{wd} = L_0 \left(1 + \frac{5t}{2\tau_0} \right)^{-\frac{7}{5}} \quad (2.21)$$

La relazione ottenuta è chiamata legge di Mestel, ed il suo andamento è riportato in (figura 2.4) con una linea continua.

Si vede come l'andamento mostra un declino rapidissimo della luminosità nella prima fase e poi una diminuzione via via più lenta. Per confronto la linea tratteggiata è un modello di raffreddamento vero e proprio che tiene conto dell'involucro esterno e del processo di cristallizzazione. La cristallizzazione è un fenomeno fisico che comincia nelle regioni centrali della nana bianca e si propaga verso l'esterno. Man mano che la stella si raffredda, i nuclei interni si strutturano per formare un

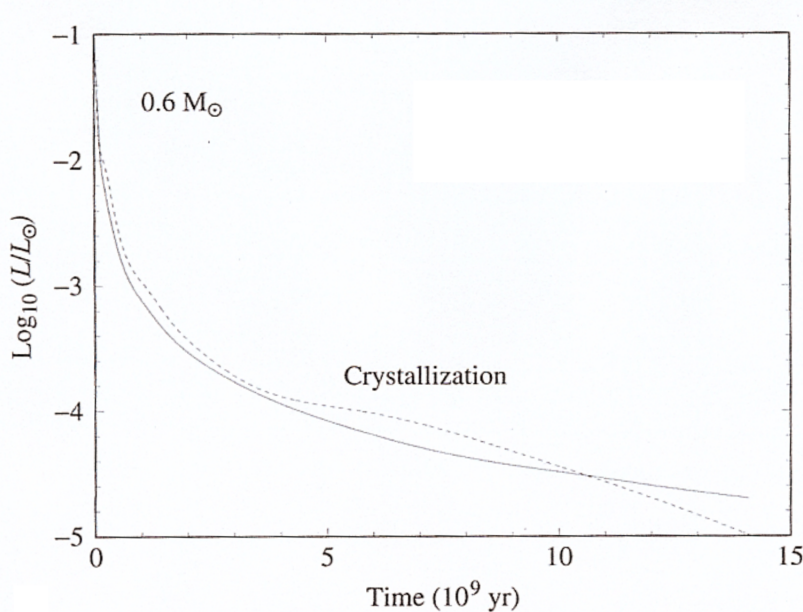


Figura 2.4: Confronto tra la relazione 2.21 ed una vera curva di raffreddamento che tiene conto della cristallizzazione e dello strato esterno per una nana bianca di $0.6M_{\odot}$.

reticolo cristallino regolare detto lattice cristallino. Questa struttura minimizza l'energia degli ioni, dal momento che una volta inseriti nel reticolo la loro energia è caratterizzata dalla sola energia vibrazionale. Durante la fase di cristallizzazione gli ioni rilasciano una certa quantità di energia ($\sim kT$ per ogni nucleo) che rallenta il processo di raffreddamento. Un altro modo per esprimere il tempo di raffreddamento è attraverso la seguente espressione:

$$t_{cool} = 8.8 \cdot 10^6 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{\frac{5}{7}} \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right)^{-\frac{5}{7}} yr \quad (2.22)$$

Dalla (2.22) si può dedurre che per una fissata luminosità, una nana bianca di piccola massa ha un tempo di raffreddamento minore rispetto ad una con massa maggiore. Quindi all'aumentare della massa, aumenta il tempo di raffreddamento e la diminuzione di luminosità.

2.3 Stelle di neutroni

Le stelle di neutroni sono il resto delle supernove tipo II di stelle massive, con una massa iniziale compresa tra le $11M_{\odot}$ e $25M_{\odot}$. Le masse delle stelle di neutroni, determinate dalla storia evolutiva della supernova antenata, sono generalmente dell'ordine di $1.4M_{\odot}$ - $2.5M_{\odot}$. I valori tipici dei raggi variano dai 10 ai 15 Km, le densità centrali sono dell'ordine di 10^{14} - $10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ e temperature di $\sim 5 \cdot 10^6 \text{ K}$. La principale sorgente di pressione, necessaria a controbilanciare la forza gravitazionale, è dovuta ai neutroni degeneri, dato che gli elettroni degeneri non riescono a supportare oggetti più massivi della M_{ch} . Essendo oggetti degeneri, le stelle di neutroni seguono una relazione massa-raggio come le nane bianche. Essa si ottiene eguagliando i termini di pressione di gas degeneri e gravitazionale. Una buona

approssimazione della relazione è data da:

$$R = 14.6 \left(\frac{\rho_c}{10^{15} \text{gcm}^{-3}} \right)^{\frac{1}{6}} \text{Km} \quad (2.23)$$

dove ρ_c è la densità centrale. Anche in questo caso esiste una massa limite, oltre la quale la pressione dei neutroni degeneri non riesce più a garantire l'equilibrio idrostatico. Tale valore è chiamato limite di Oppenheimer-Volkov ed è dell'ordine di $M_{Ns} \sim 2.5 M_{\odot}$. Oltre questo valore limite la struttura collassa in un buco nero. Le stelle di neutroni sono inoltre caratterizzate da un rapido moto di rotazione attorno al proprio asse, dovuto alla conservazione del momento angolare. Inoltre, a causa del collasso del nucleo, il valore del campo magnetico subirà un aumento d'intensità assumendo valori di 10^{12} - 10^{13} Gauss. L'insieme di questi due effetti produce una regione di plasma intorno alla stella. Le cariche, a causa del forte campo magnetico, fluiscono lungo le linee di forza e quindi sono forzate a ruotare con la stella. Muovendosi lungo linee curve, gli elettroni vengono accelerati e originano una radiazione detta di curvatura. Tale radiazione viene emessa lungo i poli magnetici e a causa della rotazione viene registrata in modo pulsato. Per questo motivo le stelle di neutroni sono anche dette pulsar.

Bibliografia

- [1] David j. Griffiths, *Introduzione alla meccanica quantistica*, CEA, 2015
- [2] L. Ferrari, *I Fondamenti della Termodinamica Statistica*, 2012
- [3] R. Zucchini, *Quantum Mechanics: Lecture Notes*
- [4] F. Ravanini, *Istituzioni di Fisica Teorica*, 2016
- [5] D. Landau, E. Lifshits, *Fisica teorica 3: Meccanica quantistica non relativistica*, Editori Riuniti, 1994
- [6] M. Salaris, S. Cassisi, *Evolution of Star and Stellar Population*, John Wiley and Sons, 2005
- [7] V. Castellani *Astrofisica Stellare*, Zanichelli, 1985
- [8] H. Karttunen, P. Kroger, H. Oja, M. Poutanen, K. J. Donner *Foundamental Astronomy*, Springer, 2007
- [9] F.R. Ferraro *Astrofisica Stellare, Dispense*, 2016
- [10] F.R. Ferraro *Evoluzione Stellare, Dispense*, 2016