

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

**Confronto tra stimatori alternativi dei multipoli della
funzione di correlazione a due punti in cataloghi simulati
di galassie, AGN e ammassi di galassie**

Relatore:
Prof. Lauro Moscardini

Presentata da:
Leonardo Gabriele Coppola

Correlatori:
Dott. Federico Marulli
Dott. Alfonso Veropalumbo

Anno Accademico 2017/2018

Abstract

Uno dei principali obiettivi della cosmologia moderna è quello di spiegare l'espansione accelerata dell'Universo attraverso la misura dei parametri del modello cosmologico standard. In particolare si attribuisce l'effetto dell'accelerazione ad una componente legata all'energia oscura (Dark Energy, DE), la cui natura rimane al momento sconosciuta. Si stima infatti che circa il 70% dell'energia dell'Universo sia DE che, diversamente dalla materia e dalle altre forme di energia conosciute, interagisce contrastando la forza di gravità.

La missione spaziale ESA Euclid, pianificata nell'ottobre 2011 e il cui lancio è previsto per il 2021, rappresenta il più grande progetto scientifico europeo finalizzato ad investigare le proprietà della DE. Grazie a Euclid si potrà indagare in particolare la relazione distanza-redshift e l'evoluzione delle strutture cosmiche misurando le forme, le distribuzioni e i redshift di galassie e ammassi di galassie, fino a redshift ~ 2 , che corrisponde ad un *look-back time* di 10 miliardi di anni, ricoprendo l'intero periodo di tempo in cui la DE ha avuto un ruolo fondamentale nell'espansione dell'Universo.

Uno dei metodi utilizzati per lo studio della distribuzione delle galassie e degli ammassi di galassie è quello di misurare la funzione di correlazione a due punti, che è espressa come l'eccesso o il difetto di probabilità di trovare un oggetto ad una certa distanza da un altro oggetto, rispetto ad una distribuzione completamente omogenea. In particolare l'obiettivo specifico di questo lavoro di Tesi è il confronto tra due stimatori dei multipoli della funzione di correlazione a due punti applicati a cataloghi simulati di galassie, AGN e ammassi di galassie, gli stimatori Landy-Szalay integrato e diretto.

Nel primo capitolo si introdurrà il modello di Universo preso in considerazione partendo dal principio cosmologico e la metrica dello spazio-tempo, passando alle equazioni di Friedmann, e si concluderà con le evidenze sperimentali dell'espansione accelerata dell'Universo.

Nel secondo capitolo verrà presentata la teoria della crescita delle perturbazioni di densità primordiali che danno origine alle strutture gravitazionalmente legate che si osservano oggi; si introdurrà poi il concetto di clustering e di funzione di correlazione a due punti, della quale verranno presentati in particolare i principali stimatori. Infine si accennerà alle distorsioni dinamiche e geometriche della funzione di correlazione a due punti, e di come queste possano essere modellate per ricavare vincoli ai parametri cosmologici.

Nel terzo capitolo si tratterà brevemente la teoria delle simulazioni numeriche, al fine di presentare le principali caratteristiche della simulazione Magneticum, dalla quale sono stati estratti i cataloghi di traccianti utilizzati in questa Tesi. Si concluderà questo capitolo con un paragrafo dedicato alle librerie C++ per calcoli cosmologici CosmoBolognaLib, e al metodo seguito in questo lavoro di Tesi per analizzare i cataloghi presi in considerazione.

Nel quarto ed ultimo capitolo verranno presentati e discussi i risultati ottenuti per i vari traccianti considerati e si confronteranno gli stimatori dei multipoli della funzione di correlazione a due punti Landy-Szalay integrato e diretto.

Contents

1	Cosmologia	1
1.1	La metrica dello spazio-tempo	1
1.1.1	La metrica di Robertson-Walker	2
1.1.2	L'elemento di linea di Robertson-Walker e la legge di Hubble	3
1.2	Le equazioni relativistiche della dinamica cosmica	5
1.2.1	Le equazioni di Friedmann	6
1.3	Modelli di Universo	7
1.3.1	Evoluzione dei modelli di Universo piatto	7
1.3.2	La costante cosmologica e l'energia del vuoto	8
1.3.3	L'Universo in accelerazione	9
2	La funzione di correlazione	12
2.1	Le perturbazioni di densità	12
2.1.1	Teoria di Jeans	13
2.1.2	Fuori e dentro l'orizzonte cosmologico	14
2.1.3	Materia oscura	15
2.2	Clustering: la funzione di correlazione a due punti	15
2.2.1	Traccianti	16
2.2.2	Stimatori	17
2.3	Distorsioni della funzione di correlazione	19
2.3.1	Distorsioni dinamiche	19
2.3.2	Distorsioni geometriche	19
2.3.3	Test di Alcock-Paczynski	20
3	Cataloghi simulati Magneticum e codici utilizzati	22
3.1	Caratteristiche dei cataloghi	22
3.1.1	Simulazioni N-body	22
3.1.2	Simulazioni idrodinamiche	23
3.1.3	Cataloghi della simulazione Magneticum	23
3.2	Metodo e codici	25
3.2.1	Le CosmoBolognaLib	25
3.2.2	Metodo utilizzato	25
4	Risultati	26
4.1	Stimatori Landy-Szalay integrato e diretto	26
4.2	Risultati	27
4.2.1	Galassie	27
4.2.2	Nuclei Galattici Attivi, AGN	28
4.2.3	Ammassi di galassie	29
4.3	Tempi di calcolo	29

Chapter 1

Cosmologia

La cosmologia è la scienza che si occupa dello studio dell'Universo su grande scala, con l'obiettivo di descrivere e spiegare i fenomeni legati alla sua origine e alla sua evoluzione. La cosmologia contemporanea nasce all'inizio del secolo scorso grazie alla formulazione della teoria della Relatività Generale di Einstein e alle osservazioni sperimentali che hanno portato alla verifica del Principio Cosmologico. Lo scopo di questo primo capitolo sarà di delineare gli assunti e i principi alla base della cosmologia e nello specifico il modello cosmologico utilizzato in questa trattazione. In primo luogo si introdurrà la metrica spazio-temporale, la cui forma deriva dai concetti di isotropia e omogeneità assunti nel Principio Cosmologico; in seguito si descriveranno i modelli di Universo formulati a partire da questa metrica; infine si procederà alla descrizione del modello cosmologico utilizzato in questa tesi, con particolare attenzione ad alcuni parametri cosmologici. Gli argomenti trattati in questo capitolo fanno riferimento al testo *Stelle, galassie e universo* di Attilio Ferrari [1].

1.1 La metrica dello spazio-tempo

La metrica di Robertson-Walker, che descrive la geometria dello spazio-tempo, è basata sulle assunzioni di isotropia e omogeneità dell'Universo su grande scala, come predetto dal Principio Cosmologico. Quest'ultimo in particolare può essere enunciato nel seguente modo: "le grandezze che descrivono il flusso del fluido cosmico sono invarianti rispetto a traslazione dell'origine e rotazione degli assi". Con tali presupposti sembra opportuno assumere che l'Universo debba apparire il medesimo qualunque sia il punto d'osservazione.

In particolare però se l'Universo è popolato da una distribuzione infinita ed uniforme di stelle, in un qualunque angolo solido di osservazione cade un numero di stelle la cui luminosità decresce con l'inverso del quadrato della distanza, ma il cui numero cresce con il quadrato della distanza; pertanto ogni angolo solido dovrebbe presentare la stessa luminosità globale. E quest'ultima sarebbe addirittura infinita per un Universo infinitamente esteso. Questo ovviamente appare contraddittorio se applicato alle osservazioni locali di "cielo buio punteggiato di stelle distribuite in modo discreto". Queste argomentazioni prendono il nome di Paradosso di Olbers. La soluzione al problema richiede necessariamente di abbandonare l'idea di un Universo come sistema in equilibrio. In esso al contrario hanno luogo processi locali irreversibili, come ad esempio l'evoluzione stellare; infatti, poichè le stelle hanno una vita finita e la velocità della luce è finita, sorgenti abbastanza lontane non possono aver fatto giungere fino a noi la loro luce. Inoltre va tenuto in considerazione il fatto che l'Universo ha avuto un inizio ed è in continua espansione, dunque esiste un orizzonte al di là del quale non possiamo "vedere"; e ancora che per sorgenti a distanze cosmologiche la radiazione subisce uno spostamento verso lunghezze d'onda sempre maggiori

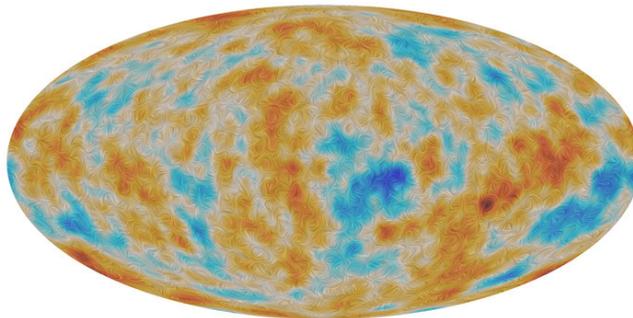


Figure 1.1: La mappa della radiazione cosmica di fondo, ottenuta dalla missione ESA Planck 2015, che appare (quasi perfettamente) omogenea e isotropa [2].

e la corrispondente energia dei fotoni da noi ricevuti tende ad annullarsi. Il Paradosso di Olbers è dunque risolto considerando che l'Universo è finito nel tempo, è in espansione, e si evolve in modo che noi possiamo osservarne solo una parte. Attualmente, a scale molto grandi, l'omogeneità e l'isotropia sono verificate dai dati sperimentali; tra queste la distribuzione delle galassie e la radiazione cosmica di fondo (Cosmic Microwave Background Radiation, CMBR) mostrata in Figura 1.1.

1.1.1 La metrica di Robertson-Walker

La metrica 4-dimensionale che descrive l'Universo a grandi scale è costruita sulla base della Relatività Generale in modo che vengano soddisfatte le sopracitate condizioni di isotropia e omogeneità. Dal punto di vista della geometria differenziale questo si traduce nel fatto che l'Universo può essere visto come una varietà 4-dimensionale costituita da una foliazione di sottovarietà 3-dimensionali stratificate lungo la coordinata temporale, alle quali va adattata una metrica dotata di isometrie, in particolare: invarianza per traslazione dell'origine e invarianza per rotazioni degli assi. Il Principio Cosmologico è soddisfatto nell'ambito di un continuo euclideo, ma può valere anche per spazi a curvatura costante, positiva o negativa, di cui quello euclideo a curvatura nulla rappresenta l'elemento di separazione.

Consideriamo, ad esempio, uno spazio 3-dimensionale a curvatura positiva in un continuo euclideo a quattro dimensioni. La distanza tra due punti, in un sistema di riferimento cartesiano con coordinate generalizzate, viene scritta:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + du^2, \quad (1.1)$$

e l'unica ipersuperficie a curvatura costante positiva che sia omogenea e isotropa è quella di una ipersfera, la cui equazione si scrive:

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 + u^2. \quad (1.2)$$

Sulla ipersfera la distanza tra due punti in coordinate generalizzate è data da:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (1.3)$$

quindi per una ipersfera di raggio unitario si ottiene:

$$u^2 = 1 - r^2, \quad (1.4)$$

da cui, differenziando:

$$du = \frac{rdr}{(1-r^2)^{1/2}}. \quad (1.5)$$

A questo punto l'elemento di linea della varietà 3-dimensionale ipersferica risulta:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{r^2 dr^2}{1-r^2}. \quad (1.6)$$

Passando in coordinate polari sferiche:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (1.7)$$

diventa:

$$\begin{aligned} dl^2 &= dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + \frac{r^2 dr^2}{1-r^2} \\ &= \frac{dr^2}{1-r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Seguendo lo stesso procedimento si possono trattare gli altri casi di spazi a curvatura costante. In generale si ha che:

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (1.9)$$

dove la costante di curvatura K vale $+1,0,-1$ rispettivamente per spazi a curvatura positiva (sferico chiuso), a curvatura nulla (piatto aperto) e a curvatura negativa (iperbolico aperto, come mostrato in Figura 1.2).

Questa espressione viene generalizzata introducendo un fattore di scala dipendente dal tempo $a(t)$:

$$dl^2 = a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (1.10)$$

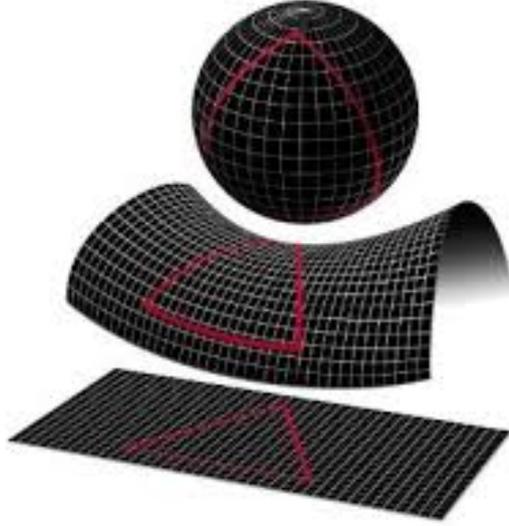


Figure 1.2: La figura mostra i tre tipi di geometrie dello spazio-tempo. Dall'alto in basso: geometria a curvatura chiusa, aperta e piatta rispettivamente per i valori di $K = +1, -1, 0$

. In particolare la distanza tra due punti nelle posizioni x_1 e x_2 espressa nella forma:

$$d_p(t) = \int_{x_1}^{x_2} dl = a(t) \left[\frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} + r(d\theta + \sin\theta d\phi) \right], \quad (1.11)$$

rappresenta la distanza propria al tempo t misurata da una catena di osservatori sincronizzati che si collegano attraverso il lookback time. Un singolo osservatore misurerà invece la distanza al suo tempo proprio:

$$d_p(t_0) = \frac{a(t_0)}{a(t)} d_p(t). \quad (1.12)$$

1.1.2 L'elemento di linea di Robertson-Walker e la legge di Hubble

Ricordando che la coordinata temporale deve rispettare l'invarianza della velocità di propagazione della luce, l'elemento di linea completo, detto anche elemento di linea di Robertson-Walker, si può scrivere come segue:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (1.13)$$

Se si prende in considerazione la propagazione di un raggio luminoso che viaggia radialmente, si ha che:

$$ds^2 = 0, \quad \frac{dr}{(1 - Kr^2)^{1/2}} = \frac{cdt}{a(t)}, \quad (1.14)$$

da cui si evince il legame tra il trascorrere del tempo nell'origine e il trascorrere del tempo in un punto generico di coordinata radiale r . Se si considera un impulso luminoso emesso a r al tempo t_e di durata Δt_e , questo giungerà all'origine tra t_0 e $t_0 + \Delta t_0$, e utilizzando l'equazione di propagazione dei raggi di luce, si ottengono le seguenti relazioni tra i tempi di inizio e fine dell'impulso luminoso:

$$\int_r^0 \frac{dr}{(1 - Kr^2)^{1/2}} = \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a}, \quad (1.15)$$

e

$$\int_r^0 \frac{dr}{(1 - Kr^2)^{1/2}} = \int_{t_e + \Delta t_e}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{cdt}{a}. \quad (1.16)$$

Nell'ipotesi di un impulso breve ed eguagliando i secondi membri, si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a} &= \int_{t_e + \Delta t_e}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{cdt}{a} \\ &= \int_{t_e + \Delta t_e}^{t_e} \frac{cdt}{a} + \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a} + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{cdt}{a} \end{aligned}$$

$$= -\frac{c\Delta t_e}{a(t_e)} + \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a} + \frac{c\Delta t_0}{a(t_0)},$$

da cui si ha:

$$\frac{c\Delta t_e}{a(t_e)} = \frac{c\Delta t_0}{a(t_0)}. \quad (1.17)$$

Pertanto esiste una differenza nel trascorrere del tempo che dipende dal fattore di scala corrispondente al tempo cosmico in cui avviene la misura.

Si può interpretare la quantità $c\Delta t$ come una lunghezza d'onda e scrivere :

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}, \quad (1.18)$$

e introducendo il fattore di redshift z :

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e}, \quad (1.19)$$

si ha:

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}. \quad (1.20)$$

La quantità $1 + z$ è osservabile, ad esempio spettroscopicamente, e misura il rapporto tra i fattori di scala della metrica all'istante di ricezione e all'istante di emissione, ovvero il fattore di espansione dell'Universo nell'intervallo di tempo cosmico. Da questa relazione è possibile ricavare la legge di Hubble; infatti per il caso $t_e = t_0 - \Delta t$ approssimando al primo ordine in Δt , si può scrivere:

$$\begin{aligned} 1 + z &= \frac{a(t_0)}{a(t_0 - \Delta t)} \approx \frac{a(t_0)}{a(t_0) - \dot{a}(t_0)\Delta t} \\ &\approx \frac{a(t_0) + \dot{a}(t_0)\Delta t}{a(t_0)} = 1 + \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}\Delta t, \end{aligned} \quad (1.21)$$

e ponendo $\Delta t = d/c$, dove Δt è il tempo che intercorre tra l'emissione e l'arrivo di un impulso luminoso tra i punti a distanza comovente d_p , si ottiene:

$$cz = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}d = H_0 d_p, \quad (1.22)$$

da cui si ha:

$$d_p = \frac{c}{H_0}z, \quad (1.23)$$

che è la legge di Hubble, dove H_0 è la costante di Hubble al tempo cosmico di ricezione.

In realtà d_p approssima d solo al primo ordine. Per tenere conto di questa differenza bisogna utilizzare i termini al secondo ordine in z . Si prenda ancora una volta in considerazione la propagazione di raggi luminosi in direzione radiale, trascurando nella metrica i termini in r^2 , o superiori, per riferirsi a spazi quasi piatti si ha:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 dr^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad dr = \frac{cdt}{a(t)}. \quad (1.24)$$

Integrando sul tempo $\Delta t = t - t_0$, con sviluppo dell'integrando fino al primo ordine in Δt , si ha:

$$\begin{aligned} r &= c \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = -c \int_{\Delta t}^0 \frac{d(\Delta t)}{a(t - \Delta t)} = \int_0^{\Delta t} \frac{d(\Delta t)}{a(t_0) - \dot{a}(t_0)} \\ &= \frac{c}{a(t_0)} \int_0^{\Delta t} \frac{a(t_0) - \dot{a}(t_0)\Delta t}{a(t_0)} d(\Delta t) = \frac{c}{a(t_0)} \left[\Delta t + \frac{1}{2} H_0 \Delta t^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Si espande a questo punto l'espressione per il fattore di redshift come fatto in precedenza:

$$\begin{aligned} 1 + z &= \frac{a(t_0)}{a(t_0 - \Delta T)} = 1 + \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}\Delta t + \left[\frac{\dot{a}(t_0)^2}{a(t_0)^2} - \frac{1}{2} \frac{\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)} \right] \Delta t^2 \\ &= 1 + \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}\Delta t + \frac{\dot{a}(t_0)^2}{a(t_0)^2} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\ddot{a}(t_0)a(t_0)}{\dot{a}(t_0)^2} \right] \Delta t^2 \\ &= 1 + H_0 \Delta t + H^2 \left(1 + \frac{1}{2} q_0 \right) \Delta t^2, \end{aligned} \quad (1.26)$$

dove è stato introdotto il parametro di decelerazione :

$$q_0 \equiv -\frac{\ddot{a}_0 a_0}{\dot{a}_0^2}. \quad (1.27)$$

Invertendo quindi la relazione

$$z = H_0 \Delta t + H^2 \left(1 + \frac{1}{2} q_0\right) \Delta t^2 \quad (1.28)$$

e considerando al primo ordine $\Delta t = z/H_0$ per il termine Δt^2 si ottiene:

$$\Delta t_0 = \frac{z}{H_0} - H_0 \left(1 + \frac{1}{2} q_0\right) \frac{z^2}{H_0^2} = \frac{1}{H_0} \left[z - \left(1 + \frac{1}{2} q_0\right) z^2 \right], \quad (1.29)$$

che viene sostituita nella espressione per la distanza metrica r . Quindi la distanza propria sarà:

$$d_p(t_0) = a_0 r = \frac{c}{H_0} \left[z - \frac{1}{2} (1 + q_0) z^2 \right]. \quad (1.30)$$

Il termine del secondo ordine modifica la legge di Hubble classica e ne determina uno scostamento dall'andamento lineare a grandi z .

In astrofisica tuttavia si usano differenti definizioni di distanza, in quanto quella metrica non è misurabile. Una di quelle più utilizzate è la distanza di luminosità, d_L . Si calcola dapprima il flusso ricevuto da una sorgente di potenza W posta a distanza comovente r , che avrà elemento di superficie perpendicolare alla linea di vista:

$$dl_\theta dl_\phi = a(t_0) r d\theta \times a(t_0) r \sin \theta d\phi = a^2(t_0) r^2 \sin \theta d\theta, d\phi \quad (1.31)$$

e dunque la potenza sarà distribuita sulla superficie sferica $S = 4\pi a^2(t_0) r^2$. Al variare del fattore di scala tra l'emissione e la ricezione si ha:

$$\frac{a(t_0)}{a(t)} = \frac{1}{1+z}; \quad (1.32)$$

nel frattempo la frequenza dei fotoni diminuisce insieme alla potenza:

$$\frac{W}{W_0} \propto \frac{h\nu}{h\nu_0} = \frac{a(t_0)}{a(t)} = \frac{1}{1+z}. \quad (1.33)$$

Il flusso misurato è quindi:

$$F = \frac{W}{4\pi a^2(t_0) r^2} \frac{1}{1+z^2}. \quad (1.34)$$

Si può definire la distanza di luminosità come la distanza che conserva la legge dell'inverso del quadrato della distanza tra potenza irradiata e flusso ricevuto:

$$d_L = a(t_0)(1+z)r. \quad (1.35)$$

Questa è la distanza si misura osservando candele standard e confrontandone la luminosità apparente con quella assoluta. A questo punto la legge di Hubble al secondo ordine del fattore di redshift e con la distanza appena definita è la seguente:

$$d_L = \frac{c}{H_0} \left[z + \frac{1}{2} (1 - q_0) z^2 \right]. \quad (1.36)$$

1.2 Le equazioni relativistiche della dinamica cosmica

Le equazioni della Relatività Generale di Einstein permettono di collegare la metrica dello spazio-tempo con la distribuzione di materia, permettendo di costruire un modello dinamico dell'Universo, grazie al quale è possibile determinare l'evoluzione del fattore di scala, $a(t)$. Nello specifico, le equazioni di Einstein rappresentano l'estensione relativistica dell'equazione di Poisson per il campo gravitazionale e hanno forma tensoriale:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} + \Lambda g_{ik} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}, \quad (1.37)$$

dove g_{ik} è il tensore metrico, R_{ik} il tensore di curvatura di Riemann-Christoffel (in termini del tensore metrico e delle sue derivate prime e seconde), R lo scalare di curvatura, e T_{ik} il tensore energia-impulso della materia. Il termine Λg_{ik} è un termine cosmologico introdotto da Einstein per tenere conto dell'eventuale materia diffusa capace di rendere l'Universo statico; Λ è detta costante cosmologica. Dunque dalla conoscenza di T_{ik} le equazioni di Einstein definiscono la metrica dello spazio-tempo dell'Universo.

Il tensore metrico è costituito dai coefficienti dell'elemento di linea:

$$ds^2 = s \sum_{i,k} g_{ik} dx^i dx^k \quad \text{con} \quad i, k = 0, 1, 2, 3. \quad (1.38)$$

Usando coordinate generalizzate, x_1, x_2, x_3 , si può riscrivere l'elemento di linea di Robertson-Walker:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{(1 + Kr^2/4)^2} \right], \quad (1.39)$$

dove $r^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Allora il tensore metrico è diagonale e ha componenti:

$$g_{00} = c^2, \quad g_{i0} = g_{0i} = 0, \quad g_{ik} = -\frac{a^2 \delta_{ik}}{(1 + Kr^2/4)^2} \quad \text{con} \quad i, k = 1, 2, 3. \quad (1.40)$$

Il tensore energia-impulso T_{ik} , viene calcolato considerando le caratteristiche delle varie componenti del fluido cosmologico, assunto essere isotropo e omogeneo, alle quali competono diverse equazioni di stato:

- **Materia:** si intende la materia aggregata in strutture gravitazionalmente stabili come le galassie o gli ammassi di galassie, in cui l'autogravitazione prevale sull'espansione cosmologica. La pressione della materia ha un effetto trascurabile rispetto alla dinamica globale:

$$\rho = \rho_m, \quad p = p_m = 0. \quad (1.41)$$

- **Radiazione:** che sta ad indicare in generale particelle di massa nulla, come fotoni, o trascurabile, come neutrini:

$$\rho = \rho_r, \quad p = p_r = \frac{1}{3} \rho_r c^2. \quad (1.42)$$

- **Vuoto:** componente per la quale non esiste ancora una teoria che ne fissi l'equazione di stato. Tuttavia si concorda sul fatto che la sua densità di energia sia positiva e in prima approssimazione costante nello spazio e nel tempo; ciò comporta che, per la legge di evoluzione adiabatica ($d[\rho_v c^2 V] = -p_v dV$), si ha:

$$p_v = -\rho_v c^2. \quad (1.43)$$

Poichè l'energia del vuoto è costante, in un Universo in espansione (nel quale dunque decrescono densità di radiazione e di materia) essa diventa dominante nelle fasi avanzate dell'evoluzione. Spesso viene legata alla costante cosmologica dalla seguente relazione:

$$\rho_v = \frac{c^2 \Lambda}{8\pi G}. \quad (1.44)$$

Si può infine scrivere il tensore energetico limitandoci alla combinazione di radiazione e materia barionica:

$$T_{00} = c^2(\rho_m + \rho_r), \quad T_{0i} = T_{i0} = 0, \quad T_{ik} = -p_r \delta_{ik} \quad \text{con} \quad i, k = 0, 1, 2, 3. \quad (1.45)$$

1.2.1 Le equazioni di Friedmann

Utilizzando le relazioni (1.44) e (1.45), si può ottenere l'espressione delle due equazioni di Einstein (le uniche due indipendenti nel caso di Universo omogeneo e isotropo con metrica di Robertson-Walker) nella forma:

$$\frac{\ddot{a}}{ac^2} - \frac{\Lambda}{3} = -\frac{4\pi G}{3c^2} \left(\rho_m + \rho_r + 3\frac{p_r}{c^2} \right), \quad (1.46)$$

$$\frac{2\ddot{a}}{ac^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2 c^2} + \frac{K}{a^2} - \Lambda = \frac{8\pi G}{c^2} \left(3\frac{p_r}{c^2} \right). \quad (1.47)$$

Queste possono essere combinate e riscritte nel modo seguente, raccogliendo le componenti di densità dei vari contributi in un unico valore di ρ :

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3} G \left(\rho + \frac{3p_r}{c^2} \right) a, \quad (1.48)$$

$$\dot{a}^2 + Kc^2 = \frac{8\pi}{3} G \rho a^2. \quad (1.49)$$

Derivando la prima di queste rispetto al tempo e combinandole ancora una volta si ottiene infine:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{p_r}{c^2} \right) = 0, \quad (1.50)$$

che rappresenta un'espansione adiabatica. Può infatti essere derivata anche a partire dal primo principio della termodinamica in condizioni di adiabaticità ($dU = -pdV$). Le tre relazioni (1.48)-(1.50), chiamate equazioni di Friedmann, permettono di ricavare l'evoluzione del fattore di scala in funzione della distribuzione della materia. Friedmann ne calcolò le soluzioni per $\Lambda = 0$, ottenendo il considerevole risultato che l'Universo non è statico, ma deve necessariamente evolversi espandendosi o contraendosi. Poco dopo Hubble misurò la recessione delle galassie confermando il fatto che l'Universo è effettivamente in espansione. Si ricorda anche che la costante cosmologica fu introdotta da Einstein come parametro correttivo proprio per ottenere una soluzione statica: per questo motivo più tardi la abbandonò sulla base delle evidenze sperimentali.

1.3 Modelli di Universo

I dati osservativi dell'Universo attuale mostrano che oggi la densità di materia, visibile e oscura (barionica e non barionica), domina sulla densità di radiazione di fondo, attualmente alla temperatura di $2.73K$. La densità di materia, concentrata prevalentemente all'interno degli ammassi di galassie, può essere calcolata moltiplicando la funzione di luminosità ($\approx 0.5 \times 10^8 (H_0/71) L_\odot / Mpc^3$) per il rapporto massa/luminosità (che mediamente può essere stimato pari a circa $150(H_0/71) M_\odot / L_\odot$):

$$\rho_{m,0} \approx 2.8 \times 10^{10} \left(\frac{H_0}{71}\right)^2 M_\odot / Mpc^3 = 26 \times 10^{-31} \left(\frac{H_0}{71}\right)^2 g/cm^3, \quad (1.51)$$

dove il pedice 0 sta ad indicare che è misurata al tempo $t = t_0$. Per quanto riguarda la radiazione risulta che, per $T_0 = 2.73K$:

$$\rho_{r,0} = \frac{\sigma}{c^2} T_0^4 \approx 0.0047 \times 10^{-31} g/cm^3. \quad (1.52)$$

Dunque l'Universo attuale può essere considerato un Universo di materia, dove possono essere trascurati gli effetti della densità e pressione della radiazione.

Si introducono adesso tre utili grandezze cosmologiche:

- ρ_c : la densità critica;
- Ω : il parametro di densità;
- Λ_e : la costante cosmologica critica.

Riprendendo la (1.49) e trascurando il contributo della densità di radiazione, si ottiene che il rapporto K/a^2 , la cosiddetta curvatura gaussiana (ovvero l'inverso del quadrato del raggio di curvatura), si annulla quando

$$\rho_m = \rho_c = \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) = \frac{3}{8\pi G} H^2, \quad (1.53)$$

dove si è posto $(\dot{a}/a) \equiv H$, che rappresenta la densità critica, ovvero la densità limite tra le geometrie dello spazio-tempo a curvatura negativa e positiva per $\Lambda = 0$. Quando la densità ha il valore critico la curvatura si annulla e lo spazio-tempo risulta piatto.

Il parametro di densità è definito come rapporto tra la densità di materia e la densità critica:

$$\Omega = \frac{8\pi G \rho a^2}{3 \dot{a}^2}. \quad (1.54)$$

I valori di Ω corrispondono ad una precisa curvatura, in particolare si hanno curvature negative, positive e nulle rispettivamente per $\Omega < 1$, $\Omega > 1$ e $\Omega = 1$.

La costante cosmologica corrisponde al valore di Λ nel caso di un Universo statico ($\dot{a} = \ddot{a} = 0$) di sola materia:

$$\Lambda_e = \frac{4\pi G}{c^2} \rho_m \quad (1.55)$$

Essendo la densità di materia sempre positiva tale è anche la costante cosmologica critica. Si vede che anche K è positivo, dunque l'Universo statico è ipersferico a curvatura positiva e quindi chiuso. I modelli statici di Universo sono tuttavia contraddetti dall'evidenza osservativa del redshift delle galassie.

1.3.1 Evoluzione dei modelli di Universo piatto

Si prenda in considerazione il caso degli universi piatti, ovvero i modelli con $K = 0$, includendo tutti i contributi di densità di materia, radiazione e vuoto. Si può allora scrivere la (1.49) nella forma seguente:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{8\pi G}{3} (\rho_m + \rho_r + \rho_\nu) = 0. \quad (1.56)$$

Essa può essere poi riscritta in funzione del parametro di densità Ω , utilizzando la densità critica $\rho_c = 3H^2/8\pi G$, ottenendo:

$$\Omega = \frac{\rho_m}{\rho_c} + \frac{\rho_r}{\rho_c} + \frac{\rho_\nu}{\rho_c} = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\nu = 1. \quad (1.57)$$

Si ricava dunque che nell'evoluzione degli universi piatti il parametro di densità rimane fissato all'unità. L'equazione (1.56) fornisce il valore di $a(t)$ a meno di una costante moltiplicativa. Questo riflette il fatto che la curvatura dello spazio-tempo rimane costantemente nulla. Dunque possiamo scegliere come valore di normalizzazione il fattore di scala al tempo presente $a(t_0) = 1$. Tenendo in considerazione che le leggi della termodinamica delle componenti di densità impongono l'andamento della densità in funzione del fattore di scala secondo la seguente relazione:

$$\rho(a) = \rho_{c,0} \left(\frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \Omega_{\nu,0} \right) \quad \text{con} \quad a(t_0) = 1, \quad (1.58)$$

possiamo riscrivere la (1.48) nella forma:

$$\frac{\dot{a}^2}{2H_0^2} + U_{eff}(a) = 0 \quad \text{con} \quad U_{eff}(a) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_{m,0}}{a} + \frac{\Omega_{r,0}}{a^2} + \Omega_{\nu,0} a^2 \right). \quad (1.59)$$

Questa è l'analogo dell'espressione della conservazione dell'energia in forma newtoniana. Ovvero risolvere l'equazione per l'evoluzione di un modello di Universo piatto corrisponde a risolvere l'equazione del moto di una particella singola in presenza del potenziale U_{eff} . L'equazione (1.59) può essere risolta considerando ciascuna delle componenti (materia, radiazione e vuoto) separatamente. L'andamento del fattore di scala nei tre casi, fissando sempre $a(t_0) = 1$, è:

- Universo dominato dalla materia: $\Omega_m = 1$, $\Omega_r = 0$, $\Omega_\nu = 0$, da cui:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3} \quad (1.60)$$

- Universo dominato dalla radiazione: $\Omega_m = 0$, $\Omega_r = 1$, $\Omega_\nu = 0$, da cui:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{1/2} \quad (1.61)$$

- Universo dominato dal vuoto: $\Omega_m = 0$, $\Omega_r = 0$, $\Omega_\nu = 1$, da cui:

$$a(t) = e^{H(t-t_0)} \quad H = \frac{8\pi G \rho_\nu}{3} = \frac{c^2 \Lambda}{3} \quad (1.62)$$

I primi due casi sono conosciuti come modelli di Einstein-De Sitter, il terzo è il modello di De Sitter. Nell'universo dominato dal vuoto la costante di Hubble è effettivamente costante, come la densità. Si nota come in tutte e tre le soluzioni l'espansione del fattore di scala è illimitata: nei primi due casi, in particolare, lo stato iniziale è una singolarità dove la curvatura dello spazio-tempo, la densità e la temperatura sono infinite: si tratta del momento del Big Bang. L'evidenza osservativa che la recessione delle galassie corrisponde ad un'espansione accelerata del fattore di scala viene associata all'esistenza di una forma di energia responsabile di tale accelerazione: l'energia oscura. Come si discuterà nel seguito, l'ipotesi attualmente favorita è che l'Universo è piatto, con $\Omega_{m,0} \simeq 0.3$, il che comporta $\Omega_\nu \simeq 0.7$, dunque l'intervento nella fase accelerata dovuta all'energia oscura verrebbe a corrispondere circa alla fase attuale dell'evoluzione.

1.3.2 La costante cosmologica e l'energia del vuoto

L'esistenza di una forma di energia addizionale nell'Universo fu proposta inizialmente da Einstein, il quale propose che essa agisse contro la forza di gravità, in modo da avere un modello di universo statico. Questa energia è rappresentata dalla costante cosmologica Λ . Si cercherà di spiegare, entrando maggiormente nel dettaglio, il legame tra la costante cosmologica e l'energia del vuoto per capire il suo significato fisico.

Il ragionamento di Einstein partiva da una modifica al termine geometrico delle equazioni di campo:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.63)$$

con Λ come coefficiente indeterminato. Il termine $\Lambda g_{\mu\nu}$ non permette di ottenere il limite newtoniano della legge di gravitazione, ma si può ovviare al problema assumendo il valore di Λ sufficientemente basso da non essere rilevabile su scale molto piccole. Per questo motivo a Λ viene dato il nome di costante cosmologica,

perchè agente solo su scale, appunto, cosmologiche. Un modo possibile per interpretare fisicamente termine Λ è spostarlo a destra nell'equazione, dalla parte del tensore energia-impulso:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}(T_{\mu\nu} + T^\Lambda_{\mu\nu}), \quad (1.64)$$

e può essere rinominato come tensore di energia del vuoto. In assenza di materia o energia ordinarie questo termine può comunque generare un effetto gravitazionale che va inteso come curvatura dello spazio-tempo. Il tensore energia-impulso della materia ordinaria intesa come un fluido isotropo nel riferimento proprio è:

$$T_{\mu\nu} = -pg_{\mu\nu} + \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)U_\mu U_\nu, \quad (1.65)$$

con U_μ che rappresenta il quadrivettore velocità del fluido. Nel sistema a riposo, ovvero con $U_\mu = (c, 0, 0, 0)$ e

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -g_{ij} \end{pmatrix}, \quad (1.66)$$

si ha:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 \\ 0 & pg_{ij} \end{pmatrix}. \quad (1.67)$$

Si vuole ora trattare il vuoto come un fluido ponendo:

$$T^\Lambda_{\mu\nu} = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -g_{ij} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \rho_\Lambda c^2 & 0 \\ 0 & p_\Lambda g_{ij} \end{pmatrix}. \quad (1.68)$$

Perchè valga l'equivalenza occorre che pressione e densità del vuoto siano:

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \quad p_\Lambda = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G} = -\rho_\Lambda c^2. \quad (1.69)$$

Dunque l'energia del vuoto, o costante cosmologica, corrisponde ad un fluido con densità di energia positiva e costante nello spazio e nel tempo, e a pressione negativa anch'essa costante nello spazio e nel tempo.

Per comprendere come la costante cosmologica agisca come una forza gravitazionale repulsiva è utile riferirsi al limite classico delle equazioni di campo, ovvero all'equazione di Poisson newtoniana con la quale si può definire il campo gravitazionale generato dall'energia del vuoto:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \left(\rho_\Lambda + 3\frac{p_\Lambda}{c^2} \right) = -\Lambda c^2. \quad (1.70)$$

Integrando si ottiene:

$$\Phi_\Lambda = -\frac{\Lambda c^2}{6} r^2, \quad (1.71)$$

alla quale corrisponde un "campo gravitazionale repulsivo":

$$g_\Lambda = -\nabla \Phi_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{6} r. \quad (1.72)$$

A scale cosmologiche anche per un piccolo valore di Λ il contributo di tale forza diventa importante. La soluzione di De Sitter delle equazioni di Friedmann corrisponde proprio al caso in cui l'espansione dell'Universo è dominata dal contributo della costante cosmologica, con l'effetto di una crescita esponenziale del fattore di scala.

1.3.3 L'Universo in accelerazione

Alla fine del secolo scorso, grazie agli esperimenti Supernova Cosmological Project (1999) e High-z Supernova Search Team (1998), si accumularono dati statisticamente significativi sulla luminosità e sul redshift di supernove del tipo SN Ia in galassie lontane a $z = 0.4 - 0.7$. Questo tipo di supernove corrisponde al collasso di una nana bianca per accrescimento di massa da una stella compagna verso lo stato di stella di neutroni, con una conseguente liberazione di una quantità ben definita di energia. Inoltre la loro curva di luce ha caratteristiche tali da permettere di utilizzare queste sorgenti come candele standard. Le osservazioni mostrarono che le luminosità misurate erano ben inferiori a quelle previste, indicando che tali oggetti sono più lontani di quanto non si supponesse secondo le equazioni di Friedmann per universi di Einstein-De Sitter. Questo portò all'inclusione di un termine di accelerazione nell'evoluzione dell'Universo, riassegnando un ruolo alla costante cosmologica (o energia del vuoto) rinominata più propriamente, come già accennato all'inizio di questo paragrafo, energia

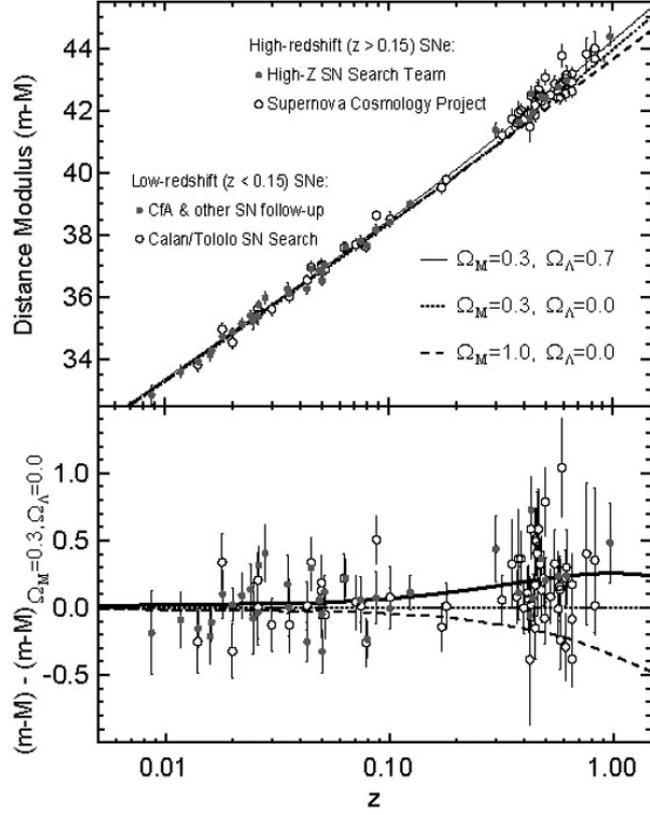


Figure 1.3: Diagramma magnitudine-redshift per le SN Ia misurate da Supernova Cosmological Project (1999) e High-z Supernova Search Team (1998). L'asse orizzontale indica il redshift, quello verticale il modulo della distanza. Le curve rappresentano le relazioni previste da modelli cosmologici con diversi valori di Ω_m e Ω_Λ . Nel grafico inferiore è indicata la differenza del modulo di distanza misurato rispetto a quello predetto da un modello standard di universo aperto a curvatura negativa [3].

oscura. Si può ricavare la quantità di energia oscura necessaria per interpretare i dati delle SN Ia mostrati in Figura 1.3 dalla relazione luminosità-redshift di Hubble scrivendo la distanza di luminosità d_L nella forma:

$$d_L = c(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}, \quad (1.73)$$

e la costante di Hubble H nella forma:

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = H_0 \left(\frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \Omega_\Lambda + \frac{1-\Omega_0}{a^3} \right)^{1/2}, \quad (1.74)$$

dove il fattore di scala è normalizzato a quello attuale $a_0 = 1$ e $\Omega_0 = \Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} + \Omega_\Lambda$. Si esprime dunque il fattore di scala in funzione del redshift, $1+z = 1/a(t)$, ottenendo:

$$H(t) = H_0 [\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_\Lambda + (1-\Omega_0)(1+z)^2]^{1/2}. \quad (1.75)$$

Come mostrato in Figura 1.4, i dati sulle supernove insieme alle misure di anisotropie della radiazione cosmica di fondo e al calcolo della quantità di materia (barionica e oscura) negli ammassi di galassie suggeriscono che l'Universo attualmente è piatto e dominato dall'energia oscura, con $\Omega_{m,0} \simeq 0.3$ e $\Omega_{\Lambda,0} \simeq 0.7$. Questi valori permettono anche di calcolare l'età dell'Universo, che risulta:

$$\begin{aligned} t_0 &= \int_0^{t_0} dt = \int_0^1 \frac{da'}{a' H(a')} = H_0^{-1} \int_0^1 \frac{da'}{[(a')^{-1}\Omega_{m,0} + (a')^2\Omega_\Lambda]^{1/2}} \\ &= H_0^{-1} \left[\frac{2}{3\sqrt{\Omega_\Lambda}} \ln \frac{\sqrt{\Omega_\Lambda} + \sqrt{\Omega_{m,0} + \Omega_\Lambda}}{\sqrt{\Omega_{m,0}}} \right] = \frac{0.97}{H_0} \approx 13.77 \times 10^9 \text{ anni}. \end{aligned} \quad (1.76)$$

Si può affermare che l'effetto di accelerazione legato all'energia oscura ha preso il sopravvento sui termini di decelerazione dovuti alla materia e alla radiazione solo "recentemente", su scala cosmica. Quanto appena

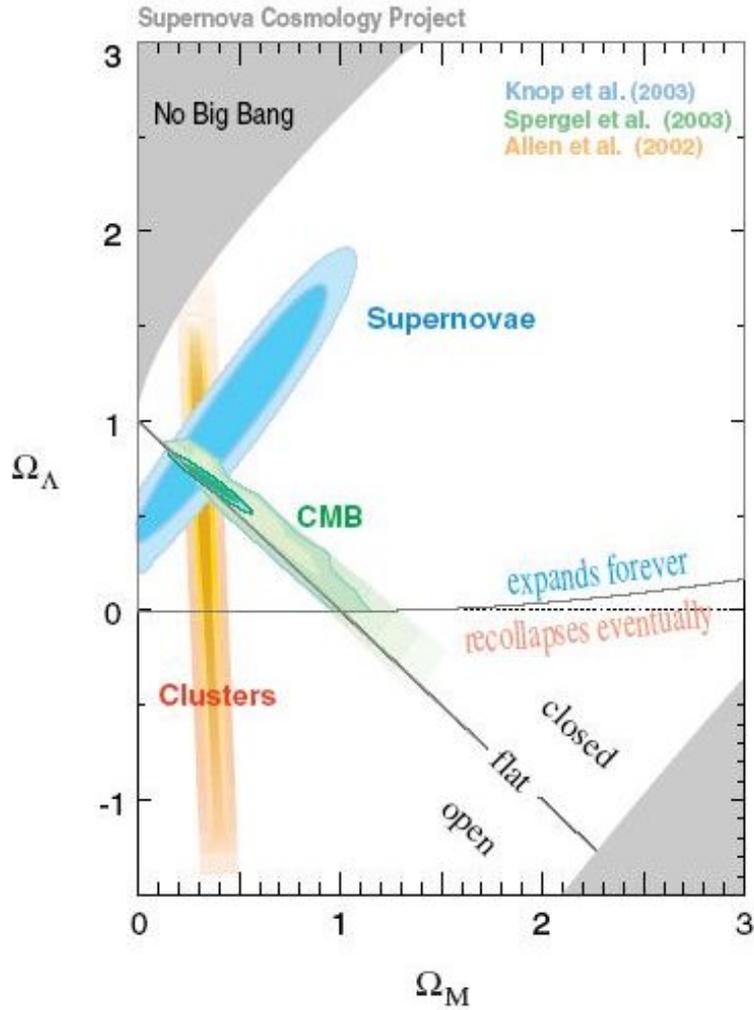


Figure 1.4: Livelli di confidenza dei valori di Ω_m e Ω_Λ ottenuti dai dati sulle supernove SN Ia ad alti redshift, dalle anisotropie della CMBR e dagli ammassi di galassie. I valori più probabili sono $\Omega_m \simeq 0.3$ e $\Omega_\Lambda \simeq 0.7$ [3].

affermato può essere stimato riprendendo il parametro di decelerazione:

$$q(t) \equiv -\frac{\ddot{a}(t)a(t)}{\dot{a}(t)^2}, \quad (1.77)$$

che riscritto in funzione dei parametri di densità diventa:

$$q(t) = \frac{\Omega_{m,0}}{2a^3(t)} - \Omega_\Lambda \approx \frac{1}{2}\Omega_{m,0}(1+z)^3 - \Omega_\Lambda. \quad (1.78)$$

La transizione tra $q > 0$ (decelerazione) a $q < 0$ (accelerazione) è avvenuta al redshift:

$$z_{tr} = \left(\frac{2\Omega_\Lambda}{\Omega_{m,0}}\right)^{1/3} \approx 0.7. \quad (1.79)$$

che corrisponde ad un'età di circa 7 miliardi di anni dal Big Bang, quindi prima che si formasse il sistema solare. Osservazioni recenti di supernove di tipo SN Ia a $z > 1$ indicano luminosità maggiori rispetto a quelle previste: a quelle distanze si osserva ancora la fase di decelerazione dell'Universo.

Chapter 2

La funzione di correlazione

Questo capitolo è dedicato a spiegare più nello specifico le nozioni alla base della teoria utilizzata per questo lavoro di tesi. Dapprima si introdurrà il significato e l'origine delle perturbazioni di densità che durante la storia dell'Universo hanno portato alla formazione di strutture gravitazionalmente legate come le galassie e gli ammassi di galassie; successivamente si darà una definizione del fenomeno del clustering, che verrà analizzato attraverso la funzione di correlazione; si porrà infine particolare attenzione alla funzione di correlazione a due punti, ai due stimatori utilizzati per misurarla e alle distorsioni geometriche e dinamiche che essa presenta.

2.1 Le perturbazioni di densità

Grazie alla disamina dei modelli cosmologici analizzati nel capitolo precedente, possiamo assumere che l'Universo abbia avuto inizio da una configurazione a densità e temperatura infinite e che esso si espanda secondo la legge di Hubble. Comunemente ci si riferisce a questa origine con il nome di Big Bang, tuttavia la dinamica di tale espansione è molto diversa da quella di un'esplosione: essa avviene in modo isotropo mantenendo la densità uniforme. Inoltre non esiste un punto privilegiato dal quale sia cominciata questa espansione poiché tutti i punti dello spazio sono equivalenti tra loro; infatti è bene tenere a mente che non è la materia dell'Universo ad espandersi, bensì lo spazio stesso che aumenta il proprio fattore di scala diminuendo la curvatura.

Procedendo a ritroso nel tempo e invertendo l'espansione di Hubble verso condizioni di alte densità e temperatura, è evidente che il contenuto di materia ed energia dell'Universo debba essere molto differente rispetto a quello attuale. Per esempio per un fattore di scala 10^3 o 10^4 volte più piccolo di quello attuale si ha che la densità di radiazione diventa superiore a quella di materia: l'Universo diventa dominato dalla radiazione con temperature 10^3 o 10^4 volte superiori al valore medio attuale della CMBR (2.73K). In queste condizioni le stelle non possono formarsi in quanto non sarebbero nemmeno in grado di irraggiare il calore prodotto al loro interno. L'Universo appare come un continuo di gas e ioni, opaco alla radiazione. Durante le prime fasi del processo di espansione, dopo la formazione dei primi elementi, la materia barionica non più relativistica continua a raffreddarsi in equilibrio con la radiazione. A energie tipiche dell'energia di legame degli elettroni negli atomi, che corrispondono a temperature di circa 3000 K, gli elettroni e gli ioni si ricombinano in atomi stabili. Si stima che questo processo sia avvenuto a circa 380.000 anni dal Big Bang: i fotoni si disaccoppiano dalla materia neutra e l'Universo diventa trasparente alla radiazione.

Particolarmente interessanti sono le proprietà di omogeneità e isotropia se si considerano due direzioni qualsiasi opposte nella volta celeste. Si osserva infatti che queste ultime presentano circa la stessa temperatura, nonostante siano talmente lontane che tra le due non è mai potuto avvenire alcuno scambio di informazioni. Questo tema è noto come *problema dell'orizzonte*. L'orizzonte cosmologico è definito come la massima distanza dalla quale una qualsiasi informazione può aver viaggiato fino all'osservatore:

$$R_H(t) = a(t) \int_0^t \frac{cdt'}{a(t')}, \quad (2.1)$$

e stabilisce un limite per l'osservabilità di una qualsiasi sorgente. Il problema dell'orizzonte viene affrontato introducendo nei modelli cosmologici una teoria inflazionaria che prevede un'espansione molto rapida (inflazione) che aumentò, a partire da circa 10^{-35} s dal Big Bang, le dimensioni dell'Universo di un fattore compreso tra 10^{25} e 10^{30} . Si pensa che questa fase inflattiva abbia avuto inizio quando le dimensioni dell'Universo erano abbastanza ridotte da permettere a tutte le sue componenti di interagire tra loro e distribuirsi in modo omogeneo e isotropo, così come si osserva oggi.

Nonostante su scale cosmologiche il principio di omogeneità e isotropia sia considerato valido, nella CMBR sono presenti delle perturbazioni di temperatura $\Delta T/T \approx 10^{-5}$ dovute a differenze di densità di materia ed energia tra punti diversi nello spazio. Grazie allo sviluppo nel tempo di queste perturbazioni del campo di

densità, dopo la fase inflattiva e il disaccoppiamento tra materia barionica e radiazione, sono stati possibili i processi di aggregazione gravitazionale secondo il principio di Jeans, processi che portano all'accensione delle prime stelle e alla formazione delle prime galassie (fase di reheating dell'Universo). Per discutere questo tipo di processi diventa fondamentale la componente di materia oscura in gioco: essa, infatti, non interagisce elettromagneticamente e in presenza di disomogeneità può aggregarsi molto presto, nello specifico subito dopo il disaccoppiamento tra materia barionica e radiazione. Sono proprio le disomogeneità della materia oscura che agendo gravitazionalmente sulla materia barionica accelerano la formazione di stelle e galassie.

2.1.1 Teoria di Jeans

Descriveremo ora come dalla crescita delle perturbazioni di densità possano avere origine oggetti collassati. Ci si servirà in particolare di un modello di Universo statico, che fornisce un utile strumento di comparazione per definire le linee guida del ragionamento, che in seguito estenderemo al caso di modelli di Universo dinamico. Facendo uso del teorema del viriale, possiamo affermare che una nube di gas si troverà in condizione di instabilità e inizierà un collasso gravitazionale se la sua energia interna (funzione della temperatura) è minore dell'energia potenziale gravitazionale:

$$\frac{1}{2}Mv^2 < \frac{GM^2}{R} \sim GM\rho R^2, \quad (2.2)$$

dove M è la massa della nube, R il raggio, ρ la densità, G è la costante di gravitazione universale e v un termine di velocità legato all'energia interna del sistema, e quindi alla temperatura. Da questa disuguaglianza è facile ricavare il raggio limite (o raggio critico) per il quale il sistema diventa instabile e comincia a collassare gravitazionalmente, chiamato raggio di Jeans, R_J :

$$R_J = v\sqrt{\frac{1}{2G\rho}}. \quad (2.3)$$

Per nubi con dimensioni maggiori di R_J , il potenziale gravitazionale prende il sopravvento sull'energia interna del sistema e inizia il processo che porterà alla formazione degli oggetti collassati.

Estendiamo ora la teoria di Jeans per ottenere un modello che possa descrivere il comportamento dell'Universo nel suo insieme. Consideriamo in particolare un mezzo uniforme, nel quale siano presenti piccole perturbazioni di densità, $d\rho$, responsabili di onde di pressione tali da verificare $dP = c_s^2 d\rho$, con c_s la velocità del suono nel mezzo considerato. A questo punto possiamo scrivere le equazioni per il sistema imperturbato iniziale. In particolare il problema necessita di quattro equazioni: l'equazione di continuità, l'equazione di Eulero per la fluidodinamica, l'equazione di Poisson per il potenziale gravitazionale, e un'equazione di stato che dia la pressione come funzione della densità e dell'entropia, con la condizione aggiuntiva che l'entropia sia costante. Si ha dunque il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla \Phi \\ \nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \\ P = P(\rho, S) = P(\rho) \end{cases}. \quad (2.4)$$

Si perturba adesso il sistema appena descritto, approssimando al primo ordine. Si ha:

$$\begin{cases} \rho = \rho_u + \delta\rho \\ P = P_u + \delta P \\ \Phi = \Phi_u + \delta\Phi \\ \mathbf{v} = \delta\mathbf{v} \end{cases} \quad (2.5)$$

e se ne calcolano le soluzioni perturbate nello spazio di Fourier supponendo valide le soluzioni imperturbate indicate dall'indice u (*unperturbed*) e sostituendo le (2.5) nel sistema (2.4). Si ottengono così soluzioni sotto forma di onde piane, dalle quali si deriva la relazione di dispersione:

$$\omega^2 = k^2 c_s^2 - 4\pi G \rho_u. \quad (2.6)$$

Questa relazione ci permette di identificare le onde generate dalle perturbazioni di densità, caratterizzate dal numero d'onda k . In particolare si avrà un'ampiezza oscillante limitata per $\omega^2 > 0$, e un andamento esponenziale per $\omega^2 < 0$. Analogamente a quanto visto per la nube di gas, possiamo definire un valore critico oltre il quale non si ha più stabilità, che corrisponde a $\omega^2 = 0$. Si utilizzano in questo caso il numero d'onda di Jeans, k_J , e la lunghezza d'onda di Jeans, λ_J , che si ricavano dalla (2.6) con la condizione $\omega^2 = 0$:

$$k_J = \sqrt{\frac{4\pi G \rho_u}{c_s^2}} \Rightarrow \lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = \sqrt{\frac{\pi c_s^2}{G \rho_u}}. \quad (2.7)$$

Dunque, in modo analogo al caso della nube di gas, le perturbazioni con lunghezza d'onda maggiore di λ_J cresceranno in modo esponenziale collassando.

Nel caso di un Universo dinamico, in particolare in espansione, è possibile descrivere la crescita delle perturbazioni di densità tramite lo stesso ragionamento utilizzato per il modello di Universo statico, tenendo a mente che nell'Universo dinamico la crescita delle fluttuazioni di densità è inibita dall'espansione dell'Universo, e inoltre che le equazioni di Friedmann sono valide a scale maggiori dell'orizzonte cosmologico, ovvero quando è possibile considerare la gravità come l'unica forza in gioco.

Per cominciare, le componenti dell'Universo vengono approssimate come dei gas perfetti, dunque la loro densità e pressione sono legate da una relazione del tipo:

$$P = \omega \rho c^2, \quad (2.8)$$

con ω che vale $1/3, 0, -1$ rispettivamente per radiazione, materia (barionica e oscura) e energia oscura. Supponendo che l'evoluzione temporale della densità delle componenti dell'Universo segua trasformazioni adiabatiche, e riprendendo il fattore di scala a , si può scrivere:

$$d(\rho c^2 a^3) = -P da^3 = -\omega \rho c^2 da^3. \quad (2.9)$$

Da questa equazione è possibile ottenere l'andamento temporale della densità:

$$d(\rho a^3) = -\omega \rho da^3; \quad (2.10)$$

allora derivando al primo membro:

$$a^3 d\rho = -(1 + \omega) \rho da^3, \quad (2.11)$$

e integrando, si ottiene:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+\omega)}. \quad (2.12)$$

Questa relazione può essere espressa anche in funzione del redshift:

$$\rho = \rho_0 (1 + z)^{3(1+\omega)}. \quad (2.13)$$

2.1.2 Fuori e dentro l'orizzonte cosmologico

Come descritto precedentemente, al di fuori dell'orizzonte cosmologico la gravità è l'unica forza in gioco, dunque le equazioni di Friedmann sono valide. Si può in questo caso approssimare il problema considerando le perturbazioni di densità come un Universo sferico chiuso immerso in un Universo di background piatto. Le equazioni di Friedmann forniranno due espressioni per la costante di Hubble nel caso dell'Universo piatto di background e quello chiuso delle perturbazioni, eguagliando le quali si ottiene:

$$\frac{8\pi G}{3}(\rho - \rho_b) = \frac{c^2}{a^2}, \quad (2.14)$$

dove si sono indicate con ρ e ρ_b rispettivamente la densità delle perturbazioni e la densità di background. Si definisce dunque il contrasto di densità:

$$\delta \equiv \frac{\rho - \rho_b}{\rho_b}, \quad (2.15)$$

che all'esterno dell'orizzonte, sostituendo nella (2.14), vale:

$$\delta = \frac{3c^2}{8\pi G \rho_b a^2}. \quad (2.16)$$

Riprendendo la (2.12) si ottiene:

$$\delta \sim a^{1+3\omega}, \quad (2.17)$$

con diversi valori di ω a seconda di quale sia la componente dominante dell'Universo al tempo considerato. In particolare, prima dell'equivalenza tra materia e radiazione $\rho_r > \rho_m$, dunque si ha $\omega = 1/3$, e le perturbazioni di densità cresceranno come a^2 :

$$\delta \sim a^2 \sim t. \quad (2.18)$$

Invece, dopo l'equivalenza tra radiazione e materia, $\rho_r < \rho_m$ e si ha $\omega = 0$, e le perturbazioni di densità cresceranno come a :

$$\delta \sim a \sim t^{2/3}. \quad (2.19)$$

Come si vede, all'esterno dell'orizzonte cosmologico le perturbazioni di densità sono destinate a crescere in ogni epoca. All'interno dell'orizzonte cosmologico il problema deve essere invece affrontato tenendo conto

dell'espansione dell'Universo, e per questo si tratta il sistema (2.4) in coordinate comoventi. Anche in questo caso va fatta una distinzione tra tempi precedenti e successivi all'equivalenza tra materia e radiazione. In particolare, prima dell'equivalenza il fluido si può considerare prevalentemente composto di radiazione, per la quale la velocità di propagazione delle onde ha valori molto vicini a quelli della luce ($c/\sqrt{3}$). Tornando all'espressione (2.7) per λ_J , si nota che la lunghezza d'onda è maggiore della scala dell'orizzonte cosmologico stesso, R_H : non si ha dunque nessuna crescita per le perturbazioni di densità, dal momento che la pressione di radiazione appiana efficientemente le onde di densità.

La rapida espansione dell'Universo sortisce lo stesso effetto, ma in misura minore, sulla crescita delle perturbazioni di densità della materia oscura, nonostante essa interagisca solo gravitazionalmente. Infatti dopo l'equivalenza tra materia e radiazione, quando ancora la materia barionica è legata alla radiazione per interazione elettromagnetica attraverso lo scattering di Thomson, le onde di densità della materia oscura che superano i valori di λ_J cominciano a collassare con andamenti simili a quanto visto al di fuori dell'orizzonte cosmologico. All'epoca del disaccoppiamento tra materia barionica e radiazione, le perturbazioni di materia barionica subiscono l'attrazione gravitazionale delle buche di potenziale che le onde di densità della materia oscura hanno avuto il tempo di creare collassando. Dunque, dopo il loro disaccoppiamento dalla radiazione, le perturbazioni di densità di materia barionica si portano velocemente nella stessa configurazione di quelle della materia oscura, accelerate dall'effetto gravitazionale di queste ultime, finché le due componenti, annullando il ritardo della prima sulla seconda, cominciano ad evolvere in parallelo, e $\delta_{bar} \simeq \delta_{DM}$.

2.1.3 Materia oscura

Come visto, la materia oscura gioca un ruolo fondamentale nel determinare la struttura gravitazionale sulla quale, in un secondo momento, si costituirà la ragnatela di materia barionica a grande scala che oggi osserviamo. Nel modello attualmente maggiormente condiviso per descrivere questo processo, assumendo che la materia oscura sia stata accoppiata alla radiazione in una certa epoca dell'Universo, si distinguono per le loro caratteristiche due tipi di materia oscura:

- materia oscura calda (HDM): formata da particelle poco massive che diventano non relativistiche dopo il loro disaccoppiamento dalla radiazione;
- materia oscura fredda (CDM): formata da particelle più massive che cessano di essere relativistiche prima del loro disaccoppiamento dalla radiazione.

Si può definire una massa di Jeans, M_J , a partire dalla lunghezza d'onda di Jeans, λ_J , sulla componente dominante nell'Universo di densità, ρ_{dom} :

$$\lambda \sim \frac{v}{\sqrt{\rho_{dom}}}, \quad (2.20)$$

dove v è la velocità delle particelle. Si ha allora:

$$M_J \sim \rho \lambda_J^3 \sim \frac{\rho v^3}{\rho_{dom}^{3/2}}. \quad (2.21)$$

Questo mostra come per diverse velocità si abbiano differenti valori di M_J . Quest'ultima rappresenta la massa di soglia al di sopra della quale le perturbazioni di densità cominciano il collasso.

Alla materia oscura è legato, inoltre, un fenomeno simile alla dissipazione, chiamato *free streaming* [4], responsabile di annullare le perturbazioni di densità al di sotto della massa di Jeans M_J . In particolare, in base all'andamento delle velocità delle componenti dominanti nelle varie epoche, si stima che al momento dell'equivalenza per la materia oscura calda $M_J \approx 10^{16} M_\odot$ e per la materia oscura fredda $M_J \approx 10^5 M_\odot$. L'elevato valore per HDM evidenzia il fatto che solo le perturbazioni più massive del campo di densità possono collassare, e durante l'evoluzione si frammentano dando origine a strutture più piccole, dunque un processo di tipo *top-down* (dall'alto verso il basso). Per quanto riguarda la CDM, invece, lo sviluppo segue un andamento contrario: si ha prima un collasso delle perturbazioni più piccole che poi per effetto gravitazionale ne creano di più grandi, dunque un processo di tipo *bottom-up* (dal basso verso l'alto).

2.2 Clustering: la funzione di correlazione a due punti

Nel precedente paragrafo si è visto sotto quali condizioni si formano e si sviluppano le perturbazioni di densità primordiali. Ci si vuole adesso soffermare su come esse interagiscano gravitazionalmente. Il fenomeno di attrazione reciproca delle fluttuazioni di densità che porta alla formazione delle strutture gravitazionali che oggi si osservano prende il nome di *clustering*. Questo fenomeno può essere indagato attraverso diversi approcci: quello su cui ci si concentrerà in questo lavoro di tesi è lo studio attraverso la funzione di correlazione a due punti, $\xi(r)$.

Per rappresentare le fluttuazioni di densità in un campo di densità continuo, riprendiamo la (2.15) ed esprimiamo il contrasto di densità, δ , rispetto alla densità media, $\bar{\rho}$:

$$\delta \equiv \frac{\rho(x) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}, \quad (2.22)$$

dove $\rho(x)$ è la densità di materia nel punto x . A questo punto si utilizza il teorema di Bayes sulla probabilità condizionata per esprimere la probabilità di avere una perturbazione di densità δ_1 nel volume dV_1 che si trovi ad una certa distanza comovente r da una seconda perturbazione di densità δ_2 nel volume dV_2 :

$$dP_{12} \equiv dP(1|2) = dP(1)dP(2|1). \quad (2.23)$$

Nel caso di una disposizione di oggetti puramente casuale, ovvero nel caso di una distribuzione di densità totalmente omogenea, si ha:

$$dP_{12} = \bar{\rho}^2 dV_1 dV_2. \quad (2.24)$$

L'attrazione gravitazionale delle perturbazioni di densità attraverso il fenomeno del clustering rende la distribuzione non omogenea, perciò per trattare questa configurazione è necessario introdurre nella relazione (2.24) un termine che tenga conto di quanto la distribuzione si discosti da quella casuale totalmente omogenea. Si introduce dunque nell'espressione per la probabilità Bayesiana, dP_{12} , il termine correttivo $\xi(r)$, ovvero la funzione di correlazione a due punti:

$$dP_{12} = \bar{\rho}^2 dV_1 dV_2 [1 + \xi(r)], \quad (2.25)$$

che generalizza l'espressione (2.24): la probabilità che descrive la distribuzione omogenea è un caso particolare della (2.25), per $\xi(r)$ uguale a zero ad ogni r . Dunque si può interpretare la funzione di correlazione come l'eccesso o il difetto di probabilità, rispetto ad una distribuzione puramente casuale, di trovare due perturbazioni di densità ad una determinata distanza, e a partire da questo si può dare una definizione esplicita della funzione di correlazione scrivendola come segue:

$$\begin{aligned} \xi(r) &= \frac{\langle \rho(x)\rho(x+r) \rangle - \bar{\rho}^2}{\bar{\rho}^2} \\ &= \frac{\langle (\rho(x) - \bar{\rho})(\rho(x+r) - \bar{\rho}) \rangle}{\bar{\rho}^2} = \langle \delta(x)\delta(x+r) \rangle, \end{aligned} \quad (2.26)$$

dove le parentesi acute rappresentano l'operatore media spaziale su un determinato volume. Come si vede, l'andamento della funzione di correlazione è proporzionale a δ^2 .

La funzione di correlazione rappresenta l'antitrasformata di Fourier dello spettro di potenza, $P(k)$, che descrive le perturbazioni di densità in funzione del loro numero d'onda \vec{k} . Inoltre lo sviluppo temporale di $\xi(r)$ segue lo stesso andamento dello spettro di potenza, quindi anche $P(k, t)$ evolve come δ_k^2 . In particolare lo spettro di potenza è legato alla quantità $\hat{\delta}(\vec{k})$:

$$\hat{\delta}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \delta(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\vec{x}} d^3x. \quad (2.27)$$

Si utilizza lo spettro di potenza per determinare la distribuzione delle perturbazioni di densità in funzione del loro numero d'onda. Ad esempio si può affermare che lo spettro di potenza primordiale, nato alla fine della fase inflazionaria, segua un andamento del tipo:

$$P(k) \sim k^n, \quad (2.28)$$

dove n è chiamato indice spettrale. Per quanto concerne la materia oscura, le fluttuazioni di densità di questa componente risultano stagnanti per valori di $k \geq k_H$, che corrispondono a perturbazioni a crescita limitata entranti nell'orizzonte prima dell'equivalenza, e crescono per k minori ($k < k_H$, infatti il numero d'onda è inversamente proporzionale alla lunghezza d'onda), ossia per perturbazioni che entrano nell'orizzonte dopo l'equivalenza.

2.2.1 Traccianti

Quanto descritto dal punto di vista teorico per le perturbazioni di densità attraverso la funzione di correlazione a due punti non è facilmente osservabile in modo diretto. In genere si usano delle sorgenti *osservabili*, quali ad esempio galassie, ammassi di galassie, nuclei galattici attivi, come traccianti della distribuzione di materia (barionica e oscura). Ricordando che le perturbazioni di materia barionica si sviluppano diversamente dalle fluttuazioni di materia oscura, e che dopo il disaccoppiamento dalla radiazione le fluttuazioni di materia barionica vengono attratte gravitazionalmente dalle buche di potenziale già create dagli aloni di materia oscura, si capisce come attraverso lo studio di tali traccianti si possa giungere al campo continuo di densità totale. In particolare è

possibile esprimere il contrasto di densità di una qualsiasi classe di traccianti, δ_{obj} , come funzione del contrasto di densità totale, δ_m :

$$\delta_{obj} = f(\delta_m), \quad (2.29)$$

dove f è una funzione che dipende da diversi parametri astrofisici che tengono in considerazione anche le interazioni di tipo non gravitazionale alle quali gli oggetti osservati (originati dalle fluttuazioni di densità di materia) sono stati sottoposti durante tutto il loro sviluppo. Supponendo che abbia un andamento circa lineare, possiamo approssimare f attraverso un fattore di bias, b , e scrivere:

$$\delta_{obj} = b\delta_m, \quad (2.30)$$

dove b indica il livello di clustering di una determinata classe di oggetti rispetto a quello della materia oscura. In particolare, traccianti caratterizzati da valori $b > 1$ hanno un livello di clustering maggiore di quello della distribuzione di materia oscura sottostante. Ricordando quanto detto a proposito dell'andamento della funzione di correlazione, si vede che:

$$b = \sqrt{\frac{\xi_{obj}}{\xi_m}}. \quad (2.31)$$

Tutte le osservazioni effettuate fino ad oggi mostrano come a grandi scale (circa tra i 10 e i 100 Mpc h^{-1}) [5, 6] la funzione di correlazione a due punti $\xi(r)$ possa essere rappresentata da una legge di potenza del tipo:

$$\xi(r) = \left(\frac{r}{R_0}\right)^{-\gamma}, \quad (2.32)$$

dove R_0 è un raggio di scala, detto lunghezza di correlazione, che dipende dalle caratteristiche dei traccianti presi in considerazione e dal redshift di osservazione, e per il quale la funzione di correlazione vale $\xi(R_0) = 1$, e γ è la pendenza, che risulta generalmente $\gamma \approx 1.8$.

Si supponga adesso di voler calcolare il numero di galassie mediamente contenute in una sfera di raggio R intorno ad un'altra galassia, ovvero si vogliono contare tutti gli oggetti nel volume sferico separati da una distanza $d < R$. Integrando sul volume considerato, la probabilità condizionata di avere due oggetti vicini risulta:

$$\begin{aligned} N(d < R) &= \int_V dP(1|2)dV \\ &= \int_V \bar{n}(1 + \xi(r))dV \\ &= \frac{4\pi}{3} R^3 \bar{n} + \bar{n} \int_V \xi(r)dV, \end{aligned} \quad (2.33)$$

dove il primo termine della somma rappresenta il numero degli oggetti che si contano per una distribuzione puramente casuale, e quindi omogenea, mentre il secondo termine è facilmente interpretabile come difetto o eccesso di densità dovuto al clustering. Assumendo che la funzione di correlazione $\xi(r)$ sia isotropa, possiamo scomporre il risultato della (2.33) in coordinate sferiche e scrivere:

$$n(d < R) = \frac{4\pi}{3} R^3 \bar{n} + \bar{n} \int_0^R \xi(r)r^2 dr. \quad (2.34)$$

Su scale piccole si avrà $\xi(r) \gg 1$, dunque il secondo termine dominerà sul primo, e il calcolo degli oggetti, utilizzando la (2.32), diventerà:

$$N(d < R) \sim \int_0^R r^{2-\gamma} dr = R^{3-\gamma} \sim R^{1.2}. \quad (2.35)$$

Questo risultato suggerisce che le galassie si distribuiscono tendenzialmente in strutture filamentari (andamento lineare $\sim R$).

2.2.2 Stimatori

Per misurare la funzione di correlazione, $\xi(r)$, di una distribuzione discreta di oggetti utilizzati come traccianti, si utilizzano degli stimatori statistici. L'operazione fondamentale su cui si basa la misura attraverso tali stimatori statistici è il conteggio delle coppie di oggetti in funzione della distanza di separazione comovente, r . Gli stimatori, in particolare, operano un confronto tra il numero di coppie del catalogo di traccianti di partenza e quello di un catalogo random, quindi omogeneo, a clustering nullo. Quanto detto è coerente con la definizione della funzione di correlazione data all'inizio di questo paragrafo, ovvero come eccesso o difetto di probabilità rispetto ad una distribuzione omogenea di trovare due perturbazioni (nel caso presente due oggetti traccianti) ad una determinata distanza. Si introducono adesso due stimatori per la misura della funzione di correlazione:

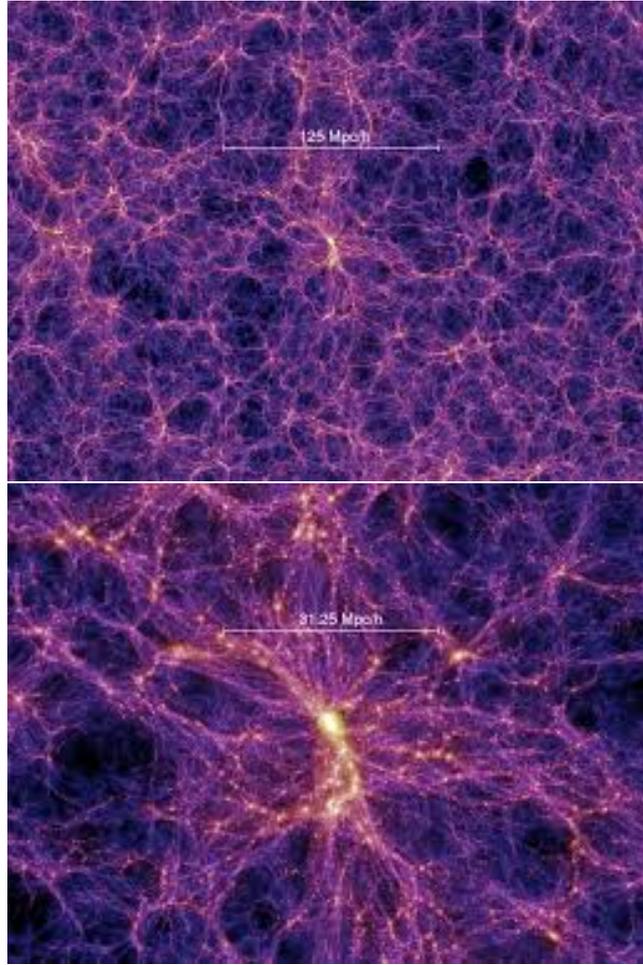


Figure 2.1: Immagini della distribuzione delle galassie ottenuta dalla simulazione Millennium, nelle quali si può apprezzare la struttura filamentare a grande scala della distribuzione di questi traccianti [7].

- Stimatore naturale (o di Peebles-Hauser): è lo stimatore più immediato che confronta il numero di coppie di oggetti alla distanza r estratte dal catalogo di traccianti e da quello random [8]. Lo stimatore naturale si scrive nella forma:

$$1 + \xi(r) = \frac{dP_{12}}{dP_{rdm}} = \frac{N_{RR} DD(r)}{N_{DD} RR(r)}, \quad (2.36)$$

dove $DD(r)$ è il numero di coppie alla distanza r nel catalogo di oggetti traccianti, $RR(r)$ è il numero di coppie alla distanza r nel catalogo random, N_{RR}/N_{DD} è il rapporto tra il numero di oggetti nel catalogo random e il numero di oggetti nel catalogo di traccianti. Tale stimatore presenta una particolare sensibilità alle fluttuazioni a causa della discretezza delle due distribuzioni [9, 10], e non risulta lo stimatore più efficiente.

- Stimatore di Landy-Szalay: questo stimatore a differenza del precedente include le cross-coppie $DR(r)$ formate da un oggetto del catalogo di traccianti e un oggetto del catalogo random [11]:

$$\xi_{LS}(r) = 1 + \frac{N_{RR}DD(r)}{N_{DD}RR(r)} - 2\frac{N_{RR}DR(r)}{N_{DR}RR(r)}. \quad (2.37)$$

Nel caso particolare in cui il numero di oggetti nel catalogo osservato sia uguale al numero di oggetti nel catalogo random ($N_{DD} = N_{RR} = N_{DR}$) lo stimatore di Landy-Szalay diventa:

$$\xi_{LS}(r) = \frac{DD(r) + RR(r) - 2DR(r)}{RR(r)}. \quad (2.38)$$

Questo stimatore è meno sensibile rispetto al precedente alle fluttuazioni che derivano dalla discretezza dei cataloghi. La varianza della stima ξ_{LS} è, inoltre, quasi del tutto poissoniana e dipende dunque della radice del numero di oggetti del catalogo, \sqrt{N} .

2.3 Distorsioni della funzione di correlazione

Si è descritta la funzione di correlazione $\xi(r)$ come dipendente dalla sola distanza r tra due oggetti: questo è giustificato solo in parte dalle assunzioni di isotropia e omogeneità implicite nel principio cosmologico, ma è necessario fare alcune precisazioni. Esistono vari effetti capaci di distorcere la funzione di correlazione a due punti. In particolare essi modificano la ξ in maniera diversa per le direzioni parallela e perpendicolare alla linea di vista. A questo proposito è utile riscrivere la funzione di correlazione a due punti passando ad una forma bidimensionale in cui r viene scomposta lungo le due direzioni passando da $\xi(r)$ a $\xi(r_{\perp}, r_{\parallel})$. In accordo con il principio cosmologico, non ci sono direzioni privilegiate nella misura di ξ , dunque per una distribuzione completamente isotropa le curve di isocorrelazione dovrebbero apparire come dei cerchi centrati sull'origine: $\xi(\vec{r}) = \xi(r_{\perp}, r_{\parallel}) = \xi(\sqrt{r_{\perp}^2 + r_{\parallel}^2})$. Le distorsioni possono essere quindi apprezzate confrontando le curve della funzione di correlazione bidimensionale misurate dai cataloghi di traccianti osservati con quelle di isocorrelazione estratte da cataloghi con distribuzione isotropa (dei cerchi standard).

2.3.1 Distorsioni dinamiche

Uno degli effetti di distorsione puramente osservativo è legato alla misura della distanze e in particolare al fatto che esse non sono determinabili direttamente ma vanno calcolate sulla base di altri osservabili diretti. Ad esempio, prendendo in considerazione la legge di Hubble che mette in relazione la velocità di recessione con la distanza dall'osservatore, l'osservabile che entra in gioco è il redshift. In questo caso la distanza ottenuta non tiene conto delle velocità proprie degli oggetti, considerandoli oggetti a riposo che risentono della sola espansione dell'Universo. In altre parole è considerato un redshift puramente cosmologico z_H . Il redshift osservato z_{obs} è contaminato dalla componente della velocità lungo la linea di vista degli oggetti osservati che forniscono un ulteriore termine di effetto Doppler che va a sommarsi a quello dello spostamento verso il rosso cosmologico, ovvero si ha:

$$z_{obs} = z_H + \frac{v_{\parallel}}{c}(1 + z_H), \quad (2.39)$$

dove v_{\parallel} è la velocità lungo la linea di vista. Di norma all'espressione precedente si somma un ulteriore termine che fornisce l'errore casuale del redshift misurato in unità di velocità (σ_v/c).

A piccole scale la velocità è dominata dal moto casuale degli oggetti dentro gli ammassi, dunque lungo la linea di vista si avrà un effetto Doppler significativo, dovuto alle velocità proprie, che perturba la misura delle distanze in maniera casuale. Questo effetto noto come *Fingers of God* produce una distorsione nella misura della funzione di correlazione a due punti bidimensionale allungandola lungo la linea di vista. Quindi a causa dei *Fingers of God* a piccole scale, si tenderà a sovrastimare la probabilità di avere due oggetti a una data distanza r .

A grandi scale invece domina il cosiddetto *effetto Kaiser*. In questo caso la misura delle distanze è influenzata dal moto coerente degli oggetti (ad esempio il moto coerente delle galassie verso gli ammassi) che ne modifica il redshift osservato. Quindi a scale abbastanza grandi aumenterà la probabilità di osservare oggetti muoversi verso uno stesso punto in maniera coerente ma in direzioni opposte: l'effetto Doppler dovuto al moto proprio tenderà a sottostimare la differenza tra il redshift dei due oggetti e quindi la distanza tra essi. L'effetto Kaiser produce dunque una distorsione della funzione di correlazione a due punti bidimensionale appiattendola lungo la linea di vista e distorcendo le curve di isocorrelazione in ellissi.

Questi due effetti fanno parte delle distorsioni dinamiche, dette anche RSD (*redshift-space distortions*) e compaiono in ogni osservazione. Le RSD colpiscono maggiormente gli oggetti piccoli perchè dotati di velocità proprie più elevate e moti coerenti più intensi. Si chiamerà spazio dei redshift lo spazio in cui il redshift cosmologico è contaminato dalle RSD descritte sopra, e spazio reale quello in cui il redshift è puramente cosmologico, che non presenta RSD e quindi legato direttamente alle distanze.

2.3.2 Distorsioni geometriche

Come appena visto, nello spazio reale la misura delle distanze non è contaminata da RSD e ci si aspetta che la funzione di correlazione bidimensionale assuma forma circolare. Di fatto però questo è verificato solo quando i parametri cosmologici utilizzati per misurare le distanze sono quelli corretti. Infatti per valori dei parametri cosmologici diversi da quelli dell'Universo vero, le curve di isocorrelazione subiscono delle distorsioni geometriche, sia nello spazio reale sia nello spazio dei redshift. Per chiarire quanto appena detto, si supponga di voler effettuare la misura, che non presenta distorsioni RSD, della distanza tra due oggetti nel piano $\vec{r} = (r_{\perp}, r_{\parallel})$. In questo caso gli osservabili utilizzati per effettuare la misura sono: la differenza di redshift Δz , tra i due oggetti per la componente lungo la linea di vista r_{\parallel} , osservabile direttamente legato alla distanza poichè non presenta distorsioni dinamiche (redshift cosmologico); la separazione angolare $\Delta\theta$ per la componente perpendicolare alla linea di vista r_{\perp} . Si ottengono le seguenti espressioni per le due componenti di r :

$$r_{\perp} = (1 + z)D_A(z)\Delta\theta, \quad (2.40)$$

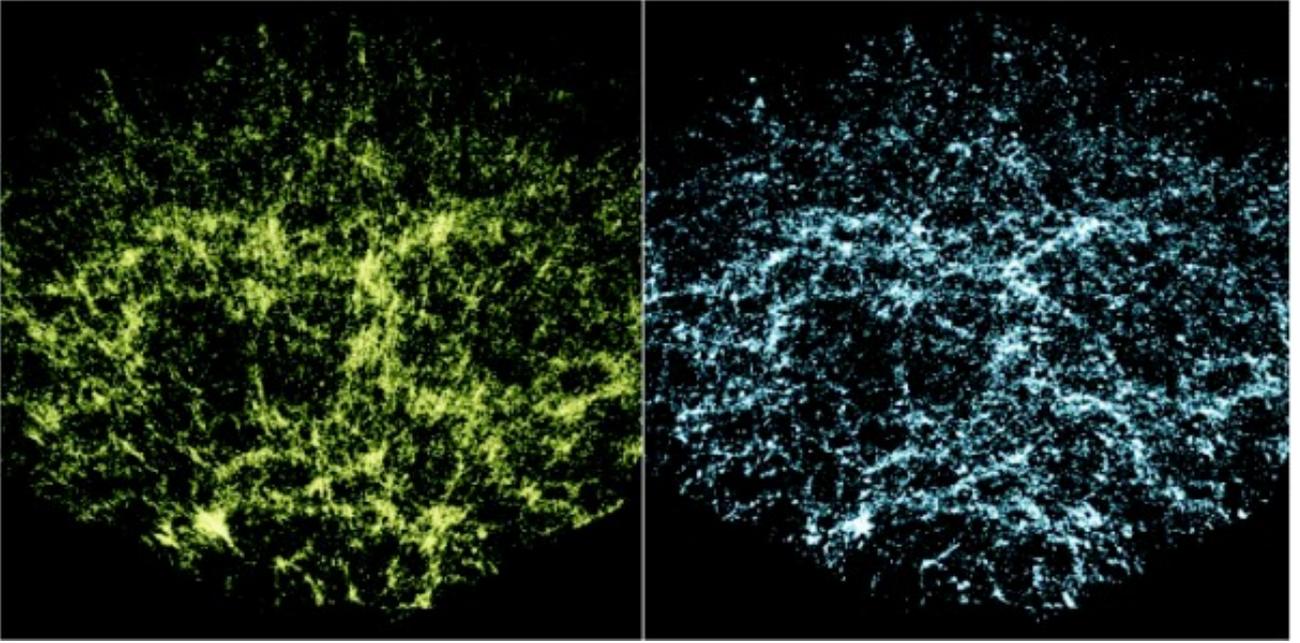


Figure 2.2: L'immagine tratta dalla Sloan Digital Sky Survey mostra la distribuzione delle galassie a grande scala: a sinistra nello spazio dei redshift dove sono ben visibili i Fingers of God; a destra nello spazio reale [12].

$$r_{\parallel} = \frac{c}{H(z)} \Delta z, \quad (2.41)$$

dove $D_A(z)$ è la distanza di diametro angolare che per definizione si scrive:

$$D_A(z) = \frac{1}{1+z} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (2.42)$$

Da queste espressioni appare evidente come la misura delle due componenti della distanza dipenda, attraverso la costante di Hubble, dal modello cosmologico utilizzato. Dunque adottare un modello cosmologico errato introduce delle distorsioni geometriche nelle curve di isocorrelazione lungo le due direzioni r_{\parallel} e r_{\perp} . In particolare le due componenti variano in maniera diversa al variare di $H(z)$, infatti dati due modelli cosmologici a e b si ha:

$$r_{\parallel a} = \frac{H_b(z)}{H_a(z)} r_{\parallel b}, \quad (2.43)$$

$$r_{\perp a} = \frac{D_{A,b}(z)}{D_{A,a}(z)} r_{\perp b}. \quad (2.44)$$

Le distorsioni geometriche, chiamate così perchè dipendono dalla geometria dell'Universo, sono presenti sia nello spazio reale sia nello spazio dei redshift, nel quale vanno a sommarsi alle RSD.

2.3.3 Test di Alcock-Paczynski

Anche se non è stato implementato per lo sviluppo di questo lavoro di tesi, è interessante mostrare per ragioni di completezza, il funzionamento del test di Alcock-Paczynski (AP) proposto per la stima dei parametri cosmologici [13]. Come già detto, l'assunzione di una cosmologia errata è causa delle distorsioni delle curve di isocorrelazione della funzione di correlazione a due punti bidimensionale; il test AP sfrutta questa relazione per ottenere i parametri cosmologici corretti attraverso la modellazione delle curve di livello $\xi(r_{\parallel}, r_{\perp})$. In pratica il test si focalizza sul fatto che solo utilizzando nel modello cosmologico i parametri cosmologici corretti è possibile ottenere curve di isocorrelazione prive di distorsioni geometriche.

Un metodo per implementare il test di Alcock-Paczynski consiste nella scelta di una cosmologia assunta e di una cosmologia di test: si utilizza la prima per la misura della funzione di correlazione a due punti; la seconda è utilizzata come cosmologia di base sulla quale modellare le distorsioni dinamiche [14]. Nella pratica viene calcolata la ξ solo per la cosmologia assunta, essa poi viene modellata aggiungendo le RSD per le cosmologie di test. Vengono quindi confrontate le curve della funzione di correlazione a due punti misurata utilizzando la cosmologia assunta con quelle ottenute dalla modellizzazione, e riscalandolo la cosmologia di test a quella assunta si aggiungono le distorsioni geometriche. A questo punto i parametri cosmologici corretti saranno quelli della cosmologia di test utilizzata per la misura della funzione di correlazione che meglio si accorda con

quella ottenuta dalla cosmologia assunta. Questo metodo tuttavia risulta poco efficiente per la difficoltà nel modellizzare accuratamente le distorsioni dinamiche e per la scelta della cosmologia assunta (che fa da modello per il bias).

Un metodo alternativo consiste nel misurare la funzione di correlazione a due punti per varie cosmologie di test, per ognuna di esse si costruisce un modello che include le RSD [15]. A questo punto si confronta ogni funzione di correlazione misurata con la rispettiva funzione di correlazione modellata alla ricerca del miglior accordo possibile tra la cosmologia di test e quella dell'Universo, ovvero quando le distorsioni geometriche sono nulle. La scelta di questo secondo metodo risulta più efficiente perché non necessita della scelta di un modello cosmologico assunto per il bias, tuttavia necessita della misura della funzione di correlazione per le varie cosmologie di test.

Chapter 3

Cataloghi simulati Magneticum e codici utilizzati

Questo capitolo si pone l'obiettivo di presentare le principali caratteristiche dei cataloghi estratti dalla simulazione cosmologica idrodinamica Magneticum e di descrivere a grandi linee il metodo di funzionamento dei codici utilizzati per ottenere i risultati esposti nel capitolo successivo. Si partirà dalla definizione di simulazione N-body e di alcuni suoi metodi di implementazione; successivamente si introdurranno le simulazioni idrodinamiche al fine di descrivere i cataloghi estratti dalla simulazione Magneticum; infine si descriveranno le librerie CosmoBolognaLib (librerie in linguaggio C++ usate in questo lavoro di tesi) e il metodo di funzionamento dei codici utilizzati.

3.1 Caratteristiche dei cataloghi

Come già anticipato, i cataloghi utilizzati in questo lavoro di tesi sono frutto di una simulazione numerica. Lo scopo di una simulazione numerica è quello di risolvere problemi non trattabili analiticamente (come il moto di N corpi gravitazionalmente legati, o il comportamento turbolento di un fluido viscoso); ad esempio, nel nostro caso si utilizza una simulazione numerica per studiare la crescita non lineare delle perturbazioni di densità. Si tratta in particolare di simulazioni dinamiche che seguono lo sviluppo di un sistema di particelle gravitazionalmente interagenti. Si comincia discretizzando il campo di densità responsabile del campo gravitazionale e calcolando le forze che agiscono su ogni elemento di massa, ad ogni intervallo di tempo. Ovviamente la simulazione sarà tanto più accurata quanto più fini saranno le discretizzazioni del campo di densità e degli intervalli temporali sui quali si integrano le equazioni del moto. Tuttavia l'aumento della risoluzione di massa e della risoluzione temporale causerà l'aumento dei tempi di calcolo.

3.1.1 Simulazioni N-body

Si può modellare il potenziale gravitazionale creato da una distribuzione discreta di N particelle per aggiornare, ad ogni intervallo di tempo, la posizione e la velocità di ogni particella, misurando la sommatoria delle forze applicate ad essa.

Prendiamo ad esempio il moto di una particella di massa unitaria, definito dall'equazione della dinamica seguente:

$$\ddot{r} = -\nabla\phi, \quad (3.1)$$

dove r indica la posizione della particella, \ddot{r} la sua accelerazione e ϕ il potenziale gravitazionale Poissoniano dato dall'equazione:

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho(r, t), \quad (3.2)$$

dove $\rho(r, t)$ è la densità di materia che genera il campo gravitazionale.

Si può passare in coordinate comoventi, x , in modo da esprimere le relazioni (3.1) e (3.2) in termini dei parametri cosmologici:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{x} = -\frac{\nabla\phi}{a^2} \\ \nabla^2\phi = 4\pi G[\rho(x, t) - \bar{\rho}] = \frac{3H_0^2\Omega_0\delta}{2a} \end{cases} \quad (3.3)$$

dove a è il fattore di scala, H_0 è la costante di Hubble e $\bar{\rho}$ è la densità media. Queste equazioni devono essere poi integrate su ogni intervallo di tempo per ottenere posizione e velocità della particella.

Si elencheranno adesso le idee alla base di alcuni dei principali metodi di implementazione di codici per le simulazioni N-body, che differiscono nel modo in cui viene calcolata l'accelerazione:

- Particle-Particle: è il metodo concettualmente più semplice di implementazione di un codice per una simulazione N-body e consiste nell'integrare ad ogni intervallo temporale la forza agente su ogni particella come somma dei contributi dell'attrazione gravitazionale di ogni altra particella. Ad ogni intervallo di tempo si sommano le forze su tutte le $N(N - 1)/2$ coppie di particelle, e si integrano le equazioni del sistema (3.3) per calcolare posizione e velocità. Questo metodo è utilizzato solo in caso di sistemi con N non troppo grande, poiché ad ogni istante temporale è necessario calcolare $N(N - 1)/2$ forze, a discapito del tempo di calcolo.
- Particle-Mesh: questo metodo si basa sul mediare localmente le densità e, dunque, il potenziale gravitazionale, introducendo una griglia in cui ogni cella media il campo di densità delle particelle in essa contenute. Questo riduce il tempo di calcolo delle forze agenti ad ogni istante, a discapito di una perdita di accuratezza nella rappresentazione delle interazioni su piccola scala.
- Particle-Particle-Particle-Mesh: è il modello che nasce come fusione dei due metodi precedenti. Nella pratica si definisce, dapprima, un raggio critico all'interno del quale si utilizzerà il metodo Particle-Particle per il calcolo del potenziale gravitazionale. Poi si costruisce una griglia con spaziatura pari al raggio critico, e si applica l'approccio Particle-Mesh sulle celle di tale griglia [16]. Si risolvono in tal modo i problemi legati all'accuratezza della rappresentazione su piccola scala e al tempo di calcolo su grande scala.
- Hierarchical tree: secondo tale metodo le forze agenti sulle particelle vengono calcolate in maniera diversa per particelle considerate vicine tra loro (approccio Particle-Particle) e per quelle considerate lontane (per le quali si ricorre a sviluppi in multipolo del potenziale gravitazionale). Si crea un albero gerarchico di pseudo-particelle, suddividendo il volume in celle contenenti a loro volta delle sottocelle iterativamente finché ogni cella elementare non contenga al massimo una particella. Nella pratica l'interazione tra una particella e un gruppo di particelle abbastanza lontane da essa può essere approssimata con l'interazione tra la particella e una pseudo-particella posta nel centro di massa della cella; si calcola per ogni pseudo-particella il rapporto tra la sua dimensione e la sua distanza dalla particella considerata: se tale rapporto è minore di un certo parametro di tolleranza si può trascurare la struttura interna della pseudo-particella e approssimare il suo potenziale con l'espansione in multipolo; se tale rapporto è maggiore del parametro di tolleranza si scende lungo la gerarchia, si considera la sottocella successiva e si ripete il calcolo.

3.1.2 Simulazioni idrodinamiche

Per trattare la dinamica di un sistema fisico collisionale, nel quale la gravità non è l'unica forza in gioco, è necessario includere nella trattazione l'idrodinamica, considerando la fisica del gas di barioni in modo da poter associare ad ogni particella le proprie funzioni di stato. Si devono aggiungere al sistema (3.3) delle equazioni del moto, l'equazione di Eulero, l'equazione di continuità e un'equazione di stato che leghi pressione a densità ed entropia, analogamente a quanto visto nel sistema (2.4). Integrando questo sistema di 5 equazioni su ogni intervallo di tempo, si ottengono ancora una volta posizione e velocità delle particelle ad ogni tempo.

Si introducono due diversi approcci per modellare la fisica dei gas nelle simulazioni N-body:

- Approccio euleriano: secondo tale approccio si utilizza una griglia di punti per risolvere le equazioni del fluido. Poiché le interazioni idrodinamiche sono a corto raggio, per integrare le equazioni su ogni cella sono sufficienti, come condizioni al contorno, le informazioni provenienti solo dalle celle adiacenti. La risoluzione spaziale può essere migliorata infittendo la griglia. Questo tipo di approccio risulta particolarmente efficiente per rappresentare le discontinuità.
- Approccio lagrangiano: secondo questo approccio le proprietà termodinamiche del fluido sono ottenute in ogni punto mediando sulle particelle della simulazione dopo averle opportunamente pesate. L'idea fondamentale è quella di passare da una distribuzione discreta di particelle ad un fluido con proprietà continue tramite un'interpolazione. A causa di questa interpolazione è difficile una rappresentazione accurata delle discontinuità, tuttavia questo metodo risulta di più semplice implementazione rispetto al precedente.

3.1.3 Cataloghi della simulazione Magneticum

Per questo lavoro di tesi si è fatto uso dei cataloghi estratti dalla simulazione idrodinamica cosmologica Magneticum. Tale simulazione implementa la dinamica attraverso un metodo ibrido tra il Particle-Mesh e lo Hierarchical Tree, e la fluidodinamica con l'approccio lagrangiano descritto precedentemente. La simulazione copre un volume con condizioni periodiche al contorno, che è inizialmente riempito da un egual numero di particelle di materia barionica e di materia oscura, in modo tale da tener conto della diversa abbondanza delle due

Magneticum Pathfinder Simulations

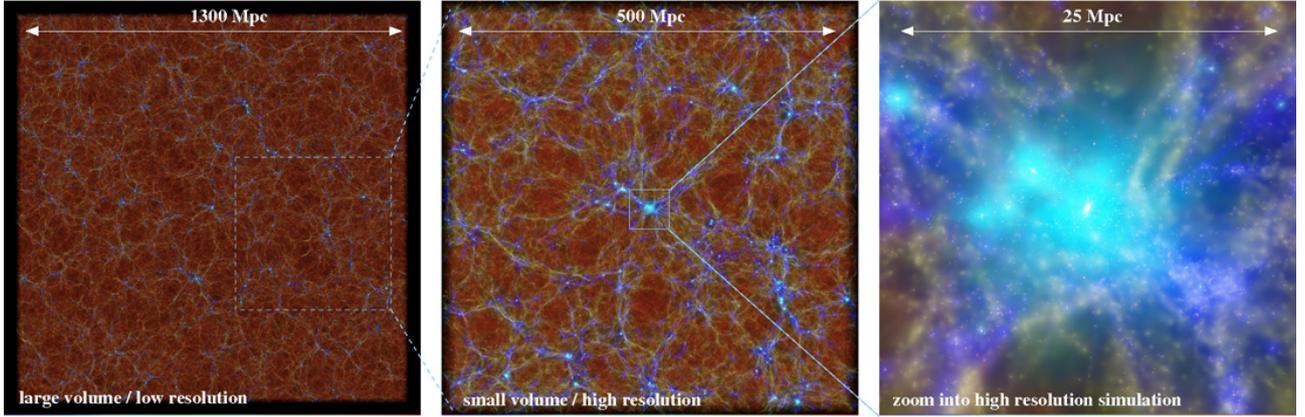


Figure 3.1: la figura mostra una rappresentazione della BOX1 della simulazione idrodinamica cosmologica Magneticum. La regione mostrata a sinistra ha un lato di circa 1300 Mpc, e a $z = 0$ contiene un numero di particelle di materia oscura e barionica (gas, stelle, buchi neri) uguale a circa 0.7×10^{10} . Il gas è riportato nei colori dal marrone al blu in funzione della sua temperatura, le galassie invece sono indicate col colore bianco. Al centro e a destra uno zoom mostra rispettivamente una regione di lato 500 Mpc, e una regione di lato 25 Mpc [17].

componenti. Ovvero si ha la seguente relazione tra le masse:

$$\frac{m_b}{m_{DM}} = \frac{\Omega_b}{\Omega_{DM}}. \quad (3.4)$$

Esistono diverse realizzazioni della simulazione Magneticum, con diverse risoluzioni di massa e diversi volumi. Per questo lavoro sono stati utilizzati i cataloghi estratti a vari redshift dalla realizzazione chiamata BOX1, di cui si può apprezzare uno screenshot in Figura (3.1). Il modello cosmologico utilizzato nella simulazione è un modello Λ CDM con i seguenti valori dei parametri cosmologici:

- parametro di densità della materia: $\Omega_{0,m} = 0.272$;
- parametro di densità della materia barionica: $\Omega_{0,b} = 0.0456$;
- parametro di densità dell'energia oscura: $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_{0,m}$;
- costante di Hubble: $H_0 = 70.4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

In questa simulazione sono inclusi dei metodi analitici (o semi-analitici) per trattare: il raffreddamento radiativo; il riscaldamento continuo da un background ultravioletto uniforme; la formazione stellare.

Nel calcolo del raffreddamento radiativo si tengono in considerazione sia il fondo cosmico a microonde sia un fondo ultravioletto e in banda X, proveniente da galassie e AGN. Il contributo al raffreddamento radiativo da parte dei diversi elementi è stato calcolato a priori attraverso un meccanismo per la stima della fotoionizzazione per un gas otticamente sottile in equilibrio.

Per quanto riguarda il modello della formazione stellare, il mezzo interstellare è trattato con un modello a due fasi nel quale le nuvole di gas freddo (formate per raffreddamento) sono immerse, assumendo equilibrio di pressione, in un gas caldo . Viene associato, dunque, un tasso di formazione stellare ad ogni agglomerato di materia barionica sufficientemente massivo. Si assume che un decimo delle stelle più massive esplosa in supernova di tipo II così da poter modellare l'energia rilasciata (10^{51} erg) per includere nella trattazione i conseguenti venti galattici, ovvero delle perdite di massa che nel modello sono considerate proporzionali al tasso di formazione stellare.

Nella simulazione si include anche una trattazione per la crescita dei buchi neri e la formazione degli AGN. I buchi neri vengono "inseriti" negli oggetti più massivi e viene assegnata loro una massa iniziale di $10 M_\odot$; successivamente, attraverso processi di accrescimento del gas circostante, la massa del buco nero aumenta, meccanismo descritto attraverso l'approssimazione di Bondi-Hoyle-Lyttleton:

$$M_{BH} \sim \frac{4\pi G^2 M_{BH}^2 \rho}{(c_s^2 + v^2)^{3/2}}, \quad (3.5)$$

dove ρ è la densità del mezzo interstellare circostante il buco nero, c_s la velocità del suono nel mezzo interstellare e v la velocità del buco nero rispetto al gas circostante.

La simulazione evolve contemporaneamente le particelle di materia oscura e di materia barionica, che risentono della reciproca attrazione gravitazionale. Gli aloni autogravitanti di materia oscura vengono identificati con un algoritmo *Friends-of-Friends*, il quale riconosce i gruppi virializzati di almeno 32 particelle di materia oscura separate da una distanza $d < 0.16\bar{d}$, dove \bar{d} è la distanza media tra le particelle. A questo punto si procede ad identificare sotto-strutture sovradense ed autogravitanti contenute negli aloni identificati in precedenza. Dunque vengono associate ad ogni struttura le proprietà fisiche derivanti dalla dinamica delle particelle di materia barionica che la compongono, in particolare si riconoscerà ogni struttura come una galassia, un nucleo galattico attivo (AGN) o un ammasso di galassie.

3.2 Metodo e codici

In questo paragrafo si descriveranno le librerie, e i codici utilizzati in questo lavoro di tesi. Si cercherà inoltre di spiegare come viene calcolata la funzione di correlazione a due punti e come vengono creati i cataloghi random con i quali confrontare quelli dei traccianti.

3.2.1 Le CosmoBolognaLib

I codici utilizzati per il calcolo della funzione di correlazione, $\xi(r)$, fanno uso delle librerie *free software* CosmoBolognaLib. Tali librerie consistono in una collezione, in continuo aggiornamento, di strumenti numerici per diversi tipi di calcoli in ambito cosmologico. Il progetto CosmoBolognaLib [18] nasce con lo scopo di creare un ambiente di lavoro comune per analizzare dal punto di vista computazionale vari problemi di natura cosmologica. Nel caso presente si è fatto uso delle CosmoBolognaLib per il calcolo dei multipoli della funzione di correlazione a due punti per i cataloghi estratti dalla simulazione cosmologica Magneticum attraverso i due stimatori di Landy-Szalay che verranno presentati nel prossimo capitolo.

3.2.2 Metodo utilizzato

La prima operazione da compiere è creare un catalogo random con la stessa geometria del catalogo su cui si vuole misurare la funzione di correlazione. La misura risulterà tanto più accurata quanto più è grande N_R [19], definito come il rapporto:

$$N_R \equiv \frac{N_{rdm}}{N_{obj}}, \quad (3.6)$$

dove N_{rdm} è il numero di oggetti del catalogo random e N_{obj} è il numero di oggetti del catalogo simulato di partenza. Tuttavia poiché il tempo di calcolo è dominato dal tempo necessario per il conteggio delle coppie si è deciso di utilizzare cataloghi random con $N_{rdm} = 5N_{obj}$, ovvero $N_R = 5$.

Una volta ottenuti un catalogo simulato di oggetti e un catalogo random in coordinate comoventi, calcolate utilizzando la cosmologia della simulazione Magneticum, si procede con il conteggio delle coppie. Lo stimatore di Landy-Szalay richiede che si contino le coppie $DD(r)$ (coppie di oggetti dal catalogo di partenza), $RR(r)$ (coppie di oggetti dal catalogo random), $DR(r)$ (coppie miste: un oggetto dal catalogo simulato e uno da quello random). Come già detto, questa operazione è la più dispendiosa in termini di tempo. In particolare, il tempo di calcolo di un codice generico che conti le coppie di un determinato catalogo di oggetti scala come $\sim N^2$, con N il numero di oggetti contenuto nel catalogo. La tecnica utilizzata per il conteggio delle coppie nel presente lavoro è detta *chain-mesh*: essa permette di ridurre lo scaling del tempo di calcolo, ma soprattutto la normalizzazione, a N fissato. Questa tecnica consiste nel suddividere il catalogo attraverso una griglia di finezza arbitraria e per ogni cella si memorizzano gli indici degli oggetti in essa contenuti; scelta allora una distanza arbitraria, r_{max} , fino alla quale si vogliono contare le coppie, è sufficiente che per ogni cella C_i si considerino solo gli oggetti contenuti nelle celle C_j tali che $d(C_i, C_j) < r_{max}$, ovvero tali che la distanza tra le due celle sia minore di r_{max} . Questa ultima operazione permette di escludere a priori dal conteggio tutti gli oggetti separati da una distanza maggiore di r_{max} , riducendo considerevolmente i tempi di calcolo. Analogamente è possibile scegliere una distanza minima, r_{min} , per escludere tutti gli oggetti presenti nelle celle C_j tali che $d(C_i, C_j) < r_{min}$, riducendo ulteriormente i tempi di calcolo. In questo lavoro di tesi si sono scelti in particolare i valori $r_{max} = 150 \text{ Mpc}/h$ e $r_{min} = 1 \text{ Mpc}/h$.

Concluso il conteggio delle coppie si procede al calcolo dei multipoli della funzione di correlazione a due punti del catalogo considerato attraverso i due differenti stimatori di Landy-Szalay integrato e diretto, il cui confronto è l'argomento centrale del capitolo conclusivo.

Chapter 4

Risultati

In quest'ultimo capitolo verranno presentati i risultati originali di questo lavoro di Tesi. Si partirà dalla definizione dei due stimatori dei multipoli della funzione di correlazione a due punti considerati. Questi verranno poi messi a confronto sia nello spazio reale che nello spazio dei redshift, utilizzando cataloghi simulati di galassie, nuclei galattici attivi e ammassi di galassie.

4.1 Stimatori Landy-Szalay integrato e diretto

Nel secondo capitolo sono stati presentati due stimatori per il calcolo della funzione di correlazione a due punti: lo stimatore naturale e lo stimatore LS. Per quanto detto in precedenza, lo stimatore LS è preferibile a quello naturale perchè, includendo opportunamente anche il conteggio delle cross-coppie tra oggetti del catalogo e oggetti del catalogo random, migliora l'accuratezza della misura della funzione di correlazione a due punti e ne minimizza il bias. Lo stimatore dei multipoli della funzione di correlazione, indipendentemente che sia naturale o LS, può essere costruito in due modi alternativi, chiamati *stimatore integrato* e *stimatore diretto*.

Per cominciare, consideriamo la funzione di correlazione a due punti bidimensionale in coordinate angolari, $\xi(\mu, s)$, dove $s = |\vec{s}|$ è il modulo della separazione comovente tra gli oggetti delle coppie e μ è il coseno dell'angolo tra \vec{s} e la linea di vista. Risulta conveniente sviluppare $\xi(\mu, s)$ in termini di polinomi di Legendre:

$$\xi(\mu, s) = \sum_l \xi_l(s) P_l(\mu), \quad (4.1)$$

dove $P_l(\mu)$ sono i polinomi di Legendre¹ e $\xi_l(s)$ sono i multipoli della funzione di correlazione a due punti definiti così:

$$\xi_l(s) \equiv \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{+1} \xi(\mu, s) P_l(\mu) d\mu. \quad (4.2)$$

Possiamo a questo punto scrivere i multipoli dello stimatore LS in forma integrata come segue:

$$\begin{aligned} \xi_l^{\text{integrated}}(s) &\equiv \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{+1} \xi_{LS}(\mu, r) P_l(\mu) d\mu \\ &= \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{+1} \left[1 + N_R \frac{DD(\mu, s)}{RR(\mu, s)} - 2 \frac{N_{RR}}{N_{DR}} \frac{DR(\mu, s)}{RR(\mu, s)} \right] P_l(\mu) d\mu, \end{aligned} \quad (4.3)$$

dove N_R , già introdotto nel capitolo precedente, è il rapporto tra il numero di oggetti contenuto nel catalogo random, N_{RR} , e il numero di oggetti nel catalogo di traccianti N_{DD} . Se la dipendenza di $RR(\mu, s)$ da μ risulta trascurabile, ovvero $RR(\mu, s) \sim RR(s)$, la (4.3) può essere riscritta nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \xi_l^{\text{direct}}(s) &\equiv \frac{2l+1}{2} \frac{1}{RR(s)} \int_{-1}^{+1} \left[RR(s) + N_R DD(\mu, s) - 2 \frac{N_{RR}}{N_{DR}} DR(\mu, s) \right] P_l(\mu) d\mu \\ &= \frac{2l+1}{2} \frac{1}{RR(s)} \left[RR_l(s) + N_R DD_l(s) - 2 \frac{N_{RR}}{N_{DR}} DR_l(s) \right], \end{aligned} \quad (4.4)$$

dove $DD_l(s)$, $RR_l(s)$ e $DR_l(s)$ sono il numero delle coppie pesate per $P_l(\mu)$. Lo stimatore integrato fornisce una stima dei multipoli coerente con la definizione data dall'equazione (4.2), ma può essere affetto da problemi di *binning*, dal momento che richiede un'integrazione diretta delle funzioni $DD(\mu, s)$, $RR(\mu, s)$ e $DR(\mu, s)$, che potrebbero avere significativi errori di *shot noise* per campioni non sufficientemente densi di oggetti. Lo stimatore diretto risulta quindi preferibile da un punto di vista numerico, ma solo se vale l'approssimazione $RR(\mu, s) \sim RR(s)$, altrimenti le coppie andrebbero pesate per un fattore pari a $RR(\mu, s)/RR(s)$ [20].

¹I primi 3 polinomi di interesse per la funzione di correlazione sono: $P_0 = 1$, $P_2 = \frac{1}{2}(\mu^2 - 1)$, $P_4 = \frac{1}{8}(35\mu^2 - 30\mu + 3)$.

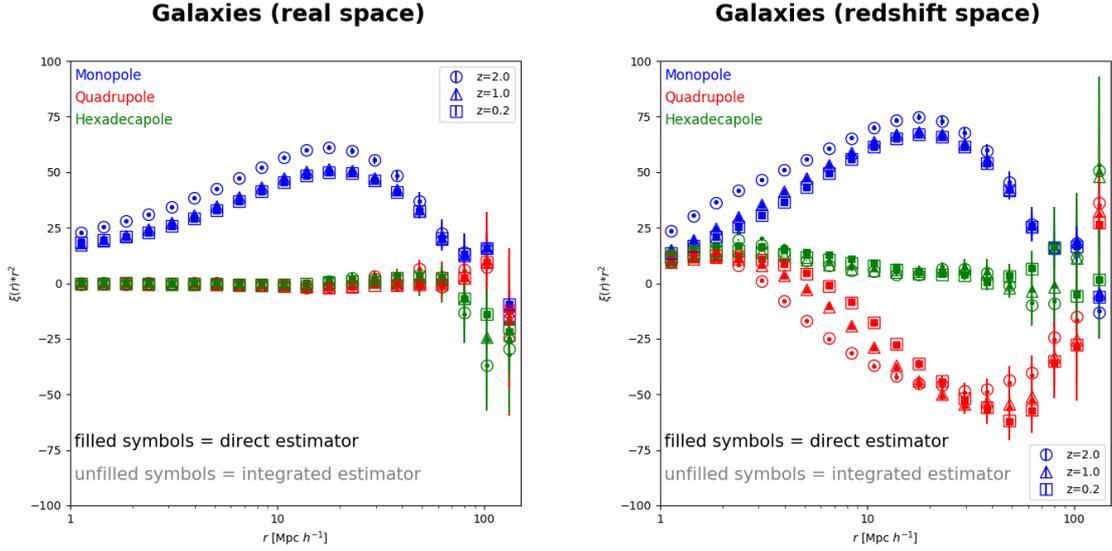


Figure 4.1: La figura mostra i primi tre multipoli non nulli della funzione di correlazione a due punti del catalogo di galassie della simulazione Magneticum, nello spazio reale (pannello di sinistra) e nello spazio dei redshift (pannello di destra), misurati con gli stimatori LS diretto (simboli pieni) e integrato (simboli vuoti). Per convenienza di visualizzazione, sono mostrati i multipoli moltiplicati per r^2 . In blu sono riportati i multipoli di ordine 0 (monopoli), in rosso quelli di ordine 2 (quadrupoli) e in verde quelli di ordine 4 (esadecupoli). Il calcolo dei multipoli è stato effettuato a diversi redshift: $z = 0.2$ (quadrati), $z = 1$ (triangoli), $z = 2$ (cerchi).

4.2 Risultati

4.2.1 Galassie

Presentiamo qui i risultati ottenuti utilizzando il catalogo di galassie della simulazione Magneticum. La Figura 4.1 mostra i primi tre multipoli non nulli della funzione di correlazione a due punti, misurati in funzione di r e a diversi redshift, sia nello spazio reale che nello spazio dei redshift. In particolare, sono confrontati i risultati ottenuti utilizzando i due stimatori LS diretto e integrato. Come atteso, nello spazio reale l'unico termine che dà un contributo non nullo alla funzione di correlazione è il monopolo, positivo fino a r abbastanza grandi ($\approx 110 \text{ Mpc } h^{-1}$). Nello spazio dei redshift, invece, tutti i multipoli pari della funzione di correlazione risultano non nulli, dal momento che per effetto delle RSD la distribuzione spaziale osservata delle sorgenti non è più isotropa, come descritto nel secondo capitolo di questa Tesi. In particolare, nel pannello di destra della Figura 4.1 possiamo osservare che i primi 3 multipoli pari della funzione di correlazione sono non nulli nello spazio dei redshift, come atteso.

Per quantificare la differenza tra le misure ottenute con i due stimatori diretto e integrato, abbiamo confrontato la *differenza sistematica*, ovvero lo scarto tra i valori dello stesso multipolo misurati con i due diversi stimatori ad ogni r , con l'*errore statistico medio* dei due stimatori. Quest'ultimo è stato ottenuto con il metodo statistico *Bootstrap* [21, 18]. Nello specifico, abbiamo:

$$\Delta\xi_{\text{systematic}}(r) = \xi_{\text{int}}(r) - \xi_{\text{dir}}(r), \quad (4.5)$$

$$\Delta\xi_{\text{statistic}}(r) = \frac{\Delta\xi_{\text{int}}(r) + \Delta\xi_{\text{dir}}(r)}{2}, \quad (4.6)$$

dove $\Delta\xi_{\text{int}}(r)$ e $\Delta\xi_{\text{dir}}(r)$ rappresentano gli errori statistici dello stimatore LS integrato e diretto, rispettivamente. Il risultato è mostrato in Figura 4.2, ai diversi redshift. Per convenienza di visualizzazione, abbiamo mostrato separatamente il risultato a piccole ($r < 5 \text{ Mpc } h^{-1}$) e grandi scale ($r > 5 \text{ Mpc } h^{-1}$).

Nello spazio reale possiamo notare che la differenza sistematica tra i due stimatori risulta quasi sempre minore dell'errore statistico medio. In particolare, la misura del monopolo ottenuta con i due stimatori risulta praticamente indistinguibile. Questo risultato è ancora valido per il monopolo anche nello spazio dei redshift, come mostrato nel pannello di destra di Fig. 4.2. Anche per il quadrupolo, le differenze sistematiche tra i due stimatori risultano trascurabili rispetto all'errore statistico medio. Al contrario possiamo notare invece che le misure dell'esadecupolo ottenute con i due stimatori nello spazio dei redshift differiscono significativamente a scale $r < 10 \text{ Mpc } h^{-1}$. Questo interessante effetto andrà studiato più approfonditamente nel prossimo futuro. Per il momento possiamo notare che un risultato simile è stato trovato anche nel lavoro di Kazin et al. 2012[20].

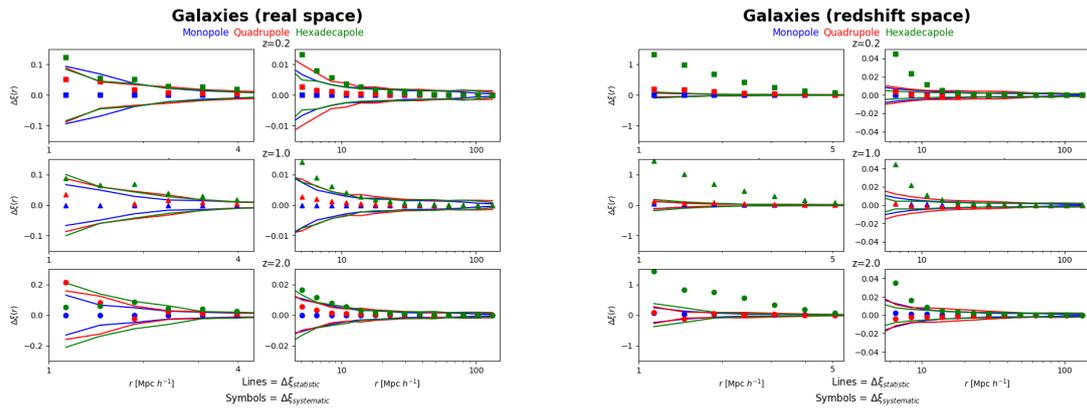


Figure 4.2: I grafici mostrano le differenze sistematiche tra i due stimatori integrato e diretto (Eq.(4.5), simboli), confrontate con l'errore statistico medio degli stimatori (Eq.(4.6), linee), per i primi 3 multipoli non nulli della funzione di correlazione a due punti del catalogo di galassie della simulazione Magneticum. Il risultato è mostrato in funzione della distanza e a diversi redshift. A sinistra nello spazio reale, a destra nello spazio dei redshift. Sono indicati in blu, rosso e verde gli errori relativi al monopolo, al quadrupolo e all'esadecupolo, rispettivamente.

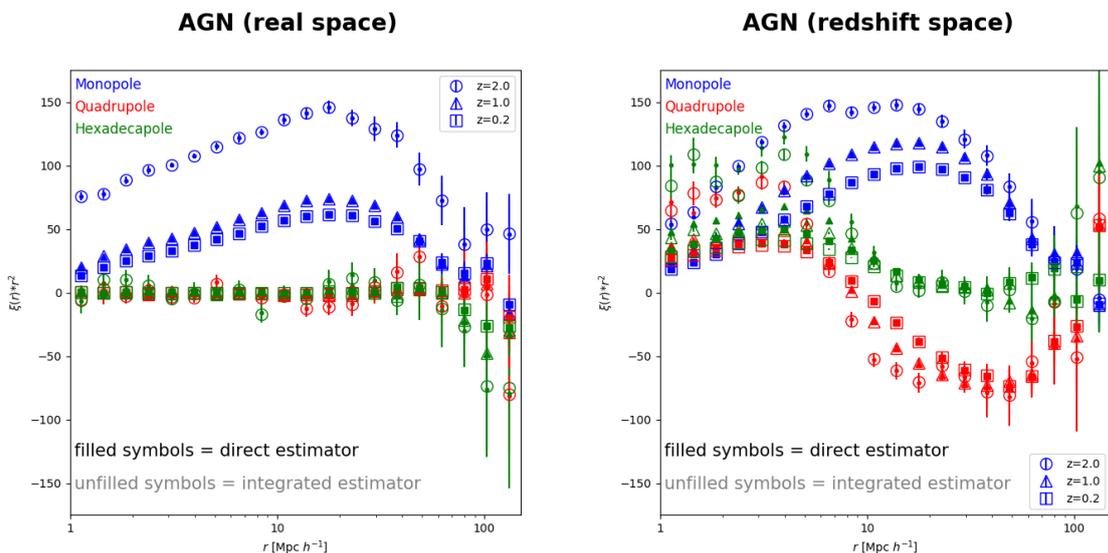


Figure 4.3: La figura mostra i primi tre multipoli non nulli della funzione di correlazione a due punti del catalogo di AGN della simulazione Magneticum. I simboli sono come in Fig.4.1.

4.2.2 Nuclei Galattici Attivi, AGN

Presentiamo ora i risultati ottenuti utilizzando il catalogo degli AGN della simulazione Magneticum. Analogamente al caso delle galassie, le Figure 4.3 e 4.4 mostrano, rispettivamente, i primi tre multipoli non nulli della funzione di correlazione a due punti e le differenze tra le misure ottenute con i due stimatori diretto e inverso, questa volta però per il catalogo di AGN.

Come si vede, il risultato è del tutto analogo a quanto trovato precedentemente utilizzando il catalogo di galassie. In particolare, troviamo un buon accordo tra le misure ottenute con i due stimatori dei multipoli, tranne nel caso dell'esadecupolo nello spazio dei redshift, in cui notiamo differenze significativamente a scale $r < 10 \text{ Mpc } h^{-1}$.

Il catalogo di AGN considerato rappresenta un sottocatalogo di galassie della simulazione Magneticum, caratterizzate dalla presenza di un buco nero supermassivo in fase di accrescimento. Il fatto che il risultato mostrato in Figura 4.4 sia del tutto analogo a quello di Figura 4.2 dimostra dunque che le nostre conclusioni sono stabili, ovvero non dipendono dal tipo di galassie selezionate [22]. In particolare, dunque, esse non dipendono dalla densità dei traccianti nel volume considerato (maggiore per le galassie), e dalla diversa ampiezza di clustering (maggiore per gli AGN, come si vede confrontando le figure 4.1 e 4.3).

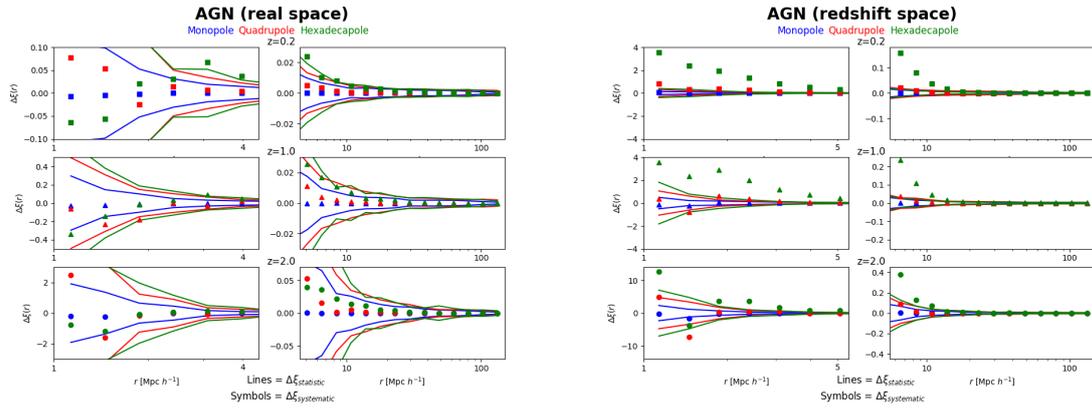


Figure 4.4: I grafici mostrano le differenze sistematiche tra i due stimatori integrato e diretto (Eq.(4.5), simboli), confrontate con l'errore statistico medio degli stimatori (Eq.(4.6), linee), per i primi 3 multipoli non nulli della funzione di correlazione a due punti del catalogo di AGN della simulazione Magneticum. I simboli sono come in Figura 4.2.

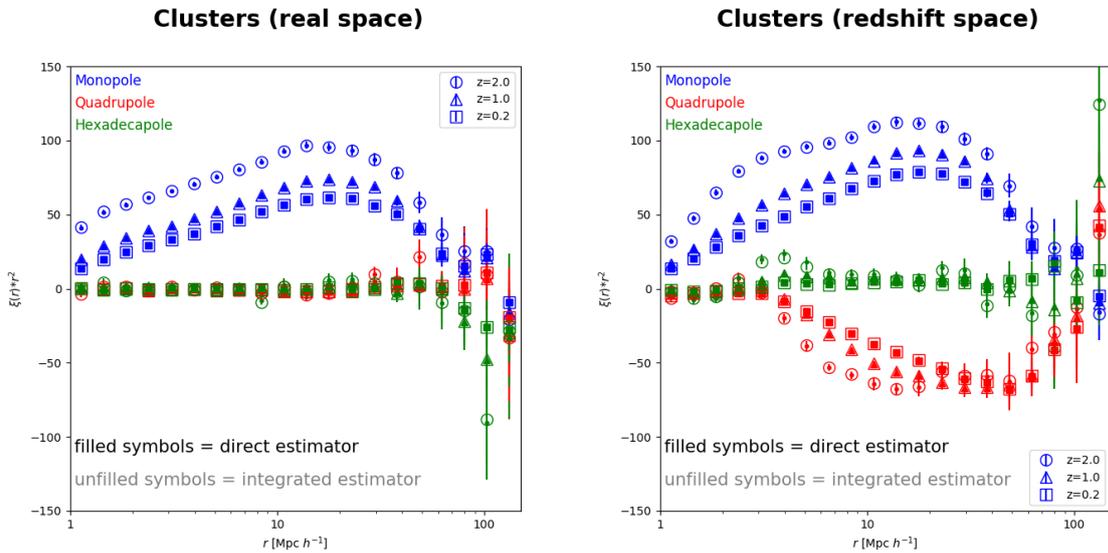


Figure 4.5: La figura mostra i primi tre multipoli non nulli della funzione di correlazione a due punti del catalogo di ammassi di galassie della simulazione Magneticum. I simboli sono come in Fig.4.1.

4.2.3 Ammassi di galassie

Concludiamo la nostra analisi mostrando i risultati ottenuti utilizzando i cataloghi di ammassi di galassie della simulazione Magneticum. Analogamente ai casi precedenti, abbiamo misurato i primi tre multipoli non nulli della funzione di correlazione a due punti e quantificato le differenze tra le misure ottenute con i due stimatori diretto e integrato. Il risultato è mostrato nelle Figure 4.5 e 4.6, rispettivamente.

Come si può vedere, c'è ottimo accordo tra i risultati ottenuti con i due stimatori, a tutte le scale considerate, sia nello spazio reale che nello spazio dei redshift. Inoltre, a differenza di quanto trovato con le galassie e gli AGN, in questo caso l'accordo è buono per tutti e tre i multipoli, in particolare anche per l'esadecupolo a piccole scale. Questo interessante risultato indica che l'analisi delle RSD è più robusta se effettuata utilizzando ammassi di galassie. In questo caso infatti la misura risulta meno dipendente dalla scelta dello stimatore utilizzato. In particolare possiamo concludere che i nostri risultati non dipendono dal livello di clustering e dalla densità di traccianti nel volume considerato, infatti queste due grandezze per gli ammassi di galassie assumono valori intermedi tra quelli delle galassie e quelli degli AGN (come si nota confrontando le figure 4.1, 4.3 e 4.5)

4.3 Tempi di calcolo

Questo ultimo paragrafo è dedicato infine al confronto dei tempi di calcolo dei due stimatori LS diretto e integrato. In Figura 4.7 sono riportati i tempi di calcolo relativi alla misura dei primi tre multipoli non nulli

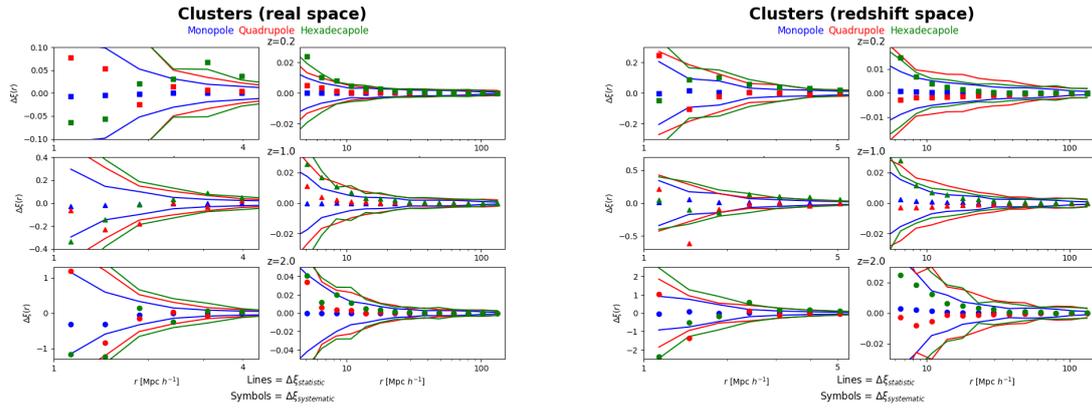


Figure 4.6: I grafici mostrano le differenze sistematiche tra i due stimatori integrato e diretto (Eq.(4.5), simboli), confrontate con l'errore statistico medio degli stimatori (Eq.(4.6), linee), per i primi 3 multipoli non nulli della funzione di correlazione a due punti del catalogo di ammassi di galassie della simulazione Magneticum. I simboli sono come in Figura 4.2.

Run Times (Galaxies real space)

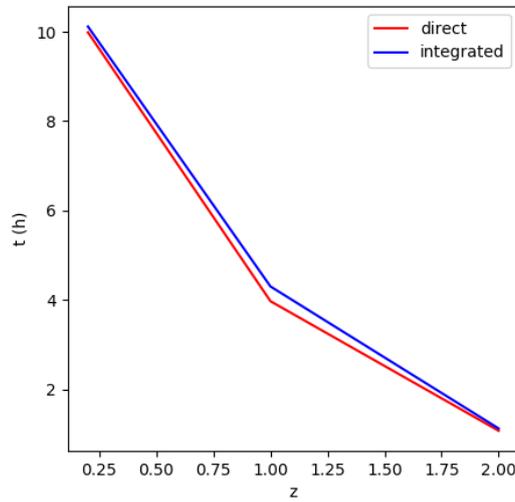


Figure 4.7: la figura mostra i tempi per il calcolo della funzione di correlazione a due punti su cataloghi di galassie a diversi redshift attraverso lo stimatore LS integrato (blu) e lo stimatore LS diretto (rosso)

della funzione di correlazione a due punti, per cataloghi di galassie a diversi redshift.

Tutte le misure necessarie per questo lavoro di tesi sono state effettuate utilizzando il cluster BladeRunner di proprietà del dipartimento di Fisica e Astronomia. Questo cluster di CPU utilizzato da vari gruppi di ricerca, tra i quali anche il gruppo di ricerca di cosmologia, è composto da 11 lame (numerate da 01 a 05 e da 15 a 20), ciascuna composta da un numero diverso di CPU, per un totale di 232 CPU. Il cluster permette di lavorare in parallelo. In particolare, gli algoritmi utilizzati per questo lavoro di tesi sono implementati con una parallelizzazione a memoria condivisa, utilizzando OpenMP. I codici sono stati lanciati sulla lama 19, composta da 32 CPU da 2.2 GHz, usufruendo di 64000 MB di memoria RAM.

Come previsto, i tempi di calcolo dei multipoli della funzione di correlazione a due punti misurati con lo stimatore diretto sono inferiori, anche se di poco ($\Delta t < 8\%$), a quelli impiegati dallo stimatore integrato, per gli stessi cataloghi ai diversi redshift.

Conclusioni

Lo scopo di questo lavoro di Tesi è stato quello di confrontare due stimatori dei multipoli della funzione di correlazione a due punti: gli stimatori Landy-Szalay integrato e diretto. Il nostro studio si è dedicato in particolare al confronto delle misure dei primi tre multipoli non nulli: monopolo, quadrupolo ed esasecupolo. Al fine di avere un quadro sufficientemente ampio, si è scelto di effettuare le misure dei multipoli fino alla distanza comovente di $150 \text{ Mpc } h^{-1}$, per tre diversi cataloghi di traccianti (galassie, AGN, ammassi di galassie) estratti dalla simulazione Magneticum a tre diversi redshift, $z = 0.2, 1, 2$, sia nello spazio reale che in quello dei redshift.

La differenza tra le due misure dei multipoli è stata quantificata confrontando la differenza sistematica data dalla eq 4.5 (lo scarto tra i valori dello stesso multipolo misurati con i due stimatori ad ogni r) con l'errore statistico medio dei due stimatori misurato con il metodo Bootstrap [21, 18] dato dalla eq 4.6.

Come mostrato nel capitolo conclusivo, nei pannelli a sinistra delle figure 4.2 e 4.4, sia per i cataloghi di galassie sia per quelli di AGN, nello spazio reale la differenza sistematica tra i due stimatori risulta quasi sempre minore dell'errore statistico medio per tutti e tre i multipoli misurati. In particolare le misure del monopolo risultano praticamente indistinguibili tra i due stimatori. Nello spazio dei redshift il risultato è analogo per quanto riguarda la misura del monopolo e del quadrupolo, mentre le misure dell'esadecupolo ottenute con i due stimatori differiscono significativamente a scale inferiori a $10 \text{ Mpc } h^{-1}$. Quest'ultimo è un effetto interessante, trovato anche nel lavoro di Kazin et al. 2012 [20], la cui origine andrà approfondita nel prossimo futuro. Poiché il catalogo di AGN rappresenta un sottocatalogo di galassie della simulazione Magneticum, il fatto che il risultato sia praticamente lo stesso per i due cataloghi di traccianti permette di concludere che le nostre misure non dipendono dal tipo di galassie selezionate e in particolare dalla loro densità o dal loro livello di clustering.

Il risultato presentato nella figura 4.6 per i cataloghi di ammassi di galassie differisce dal caso delle galassie e degli AGN. In questo caso infatti troviamo un buon accordo tra le misure di tutti e tre i multipoli, calcolati attraverso gli stimatore LS integrato e LS diretto, sia nello spazio reale sia nello spazio dei redshift. L'analisi delle RSD risulta dunque meno dipendente dalla scelta dello stimatore utilizzato se effettuata con cataloghi di ammassi di galassie.

Per quanto riguarda i tempi di calcolo sul cluster di CPU BladeRunner (figura 4.7), possiamo affermare che essi sono, ad ogni redshift, inferiori, anche se di poco ($\Delta t < 8\%$), per lo stimatore diretto rispetto a quello integrato, come previsto.

Grazie alla missione ESA Euclid, sarà possibile ottenere una grande qualità di dati nel prossimo futuro che potranno essere analizzati tramite la funzione di correlazione a due punti di diversi cataloghi di traccianti, come quelli analizzati in questo lavoro. Come descritto nel secondo capitolo, la modellizzazione delle distorsioni dinamiche e il test di Alcock-Paczynski permetteranno in particolare di ottenere importanti vincoli sul tasso di crescita delle perturbazioni e sulla geometria dell'Universo, e consentiranno di discriminare tra diversi modelli cosmologici. Questo lavoro di Tesi si inserisce tra le attività preparatorie della missione Euclid. In particolare, il nostro studio ha fornito importanti risultati relativi a due dei principali stimatori dei multipoli della funzione di correlazione che verranno utilizzati per analizzare i dati della missione.

Bibliography

- [1] A. Ferrari. *Stelle, galassie e universo. Fondamenti di astrofisica*. Springer. 2011.
- [2] European Space Agency. <https://www.esa.int/spaceinimages/images/2015/02/polarisation-of-the-cosmic-microwave-background>.
- [3] R. et al. Knop. New constraints on omega and w from an independent set of eleven high-redshift supernovae observed with hst. *The Astrophysical Journal*, 2003.
- [4] A. Schneider, Smith R. E., and D. Reed. Halo mass function and the free streaming scale. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, August 2013.
- [5] M. Davis and P. J. E. Peebles. A survey of galaxy redshifts. v- the two-point position and velocity correlations. *Apj*, April 1983.
- [6] F. Marulli, M. Bolzonella, E. Branchini, I. Davidzon, S. de la Torre, B. R. Granett, L. Guzzo, A. Iovino, L. Moscardini, A. Pollo, U. Abbas, C. Adami, S. Arnouts, J. Bel, D. Bottini, A. Cappi, J. Coupon, O. Cucciati, G. De Lucia, A. Fritz, P. Franzetti, M. Fumana, B. Garilli, O. Ilbert, J. Krywult, V. Le Brun, O. Le Fèvre, D. Maccagni, K. Malek, H. J. McCracken, L. Paiono, M. Polletta, H. Schlegenhauer, M. Scodreggio, L. A. M. Tasca, R. Tojeiro, D. Vergani, A. Zanichelli, A. Burden, C. Di Porto, A. Marchetti, C. Marinoni, Y. Mellier, R. C. Nichol, J. A. Peacock, W. J. Percival, S. Phleps, M. Wolk, and G. Zamorani. The VIMOS Public Extragalactic Redshift Survey (VIPERS) . Luminosity and stellar mass dependence of galaxy clustering at $0.5 < z < 1.1$. *Astron. Astrophys.*, 557:A17, September 2013.
- [7] V. Springel, S. D. M. White, and A. Jenkins. Simulations of the formation, evolution and clustering of galaxies and quasars. *Nature*, June 2005.
- [8] P. J. E. Peebles. Statistical analysis of catalogs of extragalactic objects.iv. cross-correlation of the abell and shane-wirtanen catalogs. *Apj*, November 1974.
- [9] M. Kerscher, I. Szapudi, and A. S. Szalay. A comparison of estimators for the two-point correlation function. *Apj*, May 2000.
- [10] A. Labatie, J. L. Starck, M. Lachièze-Rey, and P. Arnalte-Mur. Uncertainty in 2-point correlation function estimators and bao detection in sdss dr7. September 2010.
- [11] S. D. Landy and A. S. Szalay. Bias and variance of angular correlationfunctions. *Apj*, July 1993.
- [12] MU SubbaRao. Visualization of large scale structure from the sloan digital sky survey. *New Journal of Physics*, 2008.
- [13] F. Marulli, D. Bianchi, E. Branchini, L. Guzzo, L. Moscardini, and R. E. Angulo. Cosmology with clustering anisotropies: disentangling dynamic and geometric distorsions in galaxy redshift surveys. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, October 2012.
- [14] C. Blake, K. Glazebrook, T. M. Davis, and S. Brough. The wigglez dark energy survey: measuring the cosmic expansion history using the alcock-paczynski test and distant supernovae. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, December 2011.
- [15] F. Marulli, D. Bianchi, E. Branchini, L. Guzzo, L. Moscardini, and R. E. Angulo. Cosmology with clustering anisotropies: disentangling dynamic and geometric distortions in galaxy redshift surveys. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, November 2012.
- [16] R. W. Hocnkey. Measurements of collision and heating times in a two-dimensional thermal computer plasma. *Journal of Computational Physics*, August 1971.

- [17] Magneticum Simulation. <https://wwwmpa.mpa-garching.mpg.de/hydrosims/magneticum/images-movies/box1-mr.jpg>.
- [18] F. Marulli, A. Veropalumbo, and M. Moresco. CosmoBolognaLib: C++ libraries for cosmological calculations. *Astronomy and Computing*, 14:35–42, January 2016.
- [19] F. Marulli, A. Veropalumbo, L. Moscardini, A. Cimatti, and K. Dolag. Redshift-space distortions of galaxies, clusters and agn. testing how the accuracy of growth rate measurements depends on scales and sample selection. *Astron. Astrophys.*, March 2017.
- [20] E. A. Kazin, A. G. Sánchez, and M. R. Blanton. Improving measurements of $H(z)$ and $D_A(z)$ by analysing clustering anisotropies. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 419:3223–3243, February 2012.
- [21] P. Norberg, C. M. Baugh, E. Gaztañaga, and D. J. Croton. Statistical analysis of galaxy surveys - I. Robust error estimation for two-point clustering statistics. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 396:19–38, June 2009.
- [22] F. Marulli, S. Bonoli, E. Branchini, R. Gilli, L. Moscardini, and V. Springel. The spatial distribution of x-ray selected agn in the chandra deep fields: a theoretical perspective. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, December 2017.