ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

NEWTON E LA PRIMA LEGGE DI KEPLERO

Tesi di Laurea in Storia del Pensiero Scientifico

Relatore:
Chiar.mo Prof.
SANDRO GRAFFI

Presentata da:
FABRIZIA
CIARROCCHI

♯ Sessione Seconda
Anno Accademico 2009-2010

Alla mia famiglia ...

Introduzione

L'obiettivo di questo lavoro è capire come Newton arriva a formulare la seconda legge della dinamica: $F = ma$.
Ripercorrendo la storia della meccanica aristotelica la forza impressa ad un corpo è direttamente proporzionale alla massa del corpo e alla velocità impressa: $F = mv$.
E' Newton a scoprire che in realtà l'effetto di una forza non è la velocità ma l'accelerazione; infatti è solo assumendo la legge $F = ma$ che Newton riesce a convalidare la prima legge di Keplero, ossia l'ellitticità delle orbite dei pianeti intorno al Sole. Il secondo principio della dinamica insomma non deriva da una esperienza terrestre, ma da osservazioni fatte su corpi celesti. E' così che la dinamica celeste diventa un vero e proprio capitolo della meccanica.

Indice

Capitolo 1

Meccanica Peripatetica

Tutta la storia della meccanica comincia da Aristotele(384-322 a.c.). Prese in prestito le parole di De Barolomeo e Magni[4] riportiamo in breve la teoria dei cieli. Nella concezione Aristotelica la Natura è nettamente divisa in due realtà, celeste e terrestre (o sublunare). La prima va dai cieli più lontani fino all'astro più vicino alla Terra, cioè alla Luna; la seconda comprende l'intera regione sublunare con la Terra, che si colloca al centro dell'universo. Mondo celeste e sublunare differiscono per due aspetti essenziali: l'elemento da cui sono formati e il tipo di movimento che li caratterizza. I corpi terrestri sono infatti composti da terra, acqua, aria e fuoco, mentre quelli celesti sono costituiti da un quinto elemento, l'etere.

Mentre i quattro elementi si muovono in linea retta, l'etere si muove di moto circolare: questo è più perfetto di quello rettilineo, in quanto non ha mai termine, è eterno, quindi appartiene necessariamente ad una sostanza più perfetta (l'etere appunto).

A differenza del movimento degli astri, quello delle cose corruttibili o terrestri, è di due tipi, entrambi rettilinei: verso il basso e verso l'alto. La terra e l'acqua si muovono naturalmente verso il basso, l'aria e il fuoco verso l'alto. Ogni elemento ha il suo luogo naturale: al centro l'elemento-terra, poi, su livelli sovrapposti ad esso, tutti gli altri elementi, prima l'acqua poi l'aria e il fuoco. Ciascun elemento, se viene strappato dal suo luogo naturale, tende

a tornarvi.
Ad esempio una bolla d'aria nell'acqua si muove verso l'alto, in quanto il suo luogo naturale si trova sopra l'acqua, mentre un getto d'acqua lanciato in aria tende a cadere verso il basso. Così scrive Aristotele[1]:

' Il più comune e fondamentale movimento quello che si suol chiamare spostamento, è in relazione ad un luogo...che il luogo intanto esista sembra risultare chiaro dallo spostamento reciproco dei corpi. Difatti dove ora è l'acqua, lì, quando essa se n'esce come da un vaso, è l'aria; e in tale circostanza, un corpo diverso viene ad occupare quel medesimo luogo; e allora appare che il luogo è cosa diversa da tutto ciò che penetra e muta dentro di esso.
Proprio dove infatti ora è l'aria, lì precedentemente era stata l'acqua: sicché è chiaro che il luogo è pur qualcosa e che quella parte di spazio verso cui e da cui si verifica il mutamento dei due elementi, è qualcosa di diverso da entrambi.
Inoltre anche lo spostamento dei corpi naturali e semplici come il fuoco o la terra o altro di tal genere, ma non solo dimostra che il luogo è qualcosa, ma anche che ha una potenza. Ciascun corpo difatti qualora non vi sia attrito, è portato al proprio luogo: l'uno in alto, l'altro in basso; e l'alto e il basso e le altre quattro dimensioni sono le parti e le specie del luogo. Tali determinazioni, ossia alto e basso e destro e sinistro, sono non solo relative a noi; ma hanno ciascuna una particolare determinazione naturale.
Infatti l'alto non è una qualsivoglia cosa, ma là dove si portano il fuoco e il leggero; e parimenti il basso non è una qualsivoglia cosa, ma là dove vanno le cose pesanti e fatte di terra, in quanto che queste due dimensioni differiscono non solo per posizione ma anche per potenza.'

Aristotele distingue due tipi di movimenti: naturale e violento[2].
'Si tenga presente che ogni movimento è o per violenza o per natura. Ma

[1]Fisica, libro quarto
[2]Fisica,libro IV

l'esistenza del moto violento presuppone necessariamente quella del moto naturale (infatti il moto violento è contro natura e, se è contro natura, è posteriore a quello naturale); sicché, se non vi sarà per alcun corpo fisico un movimento naturale, non vi sarà neppure nessuno degli altri movimenti. Ma come vi potrà essere un movimento naturale lungo il vuoto e l'infinito, se in questi non persiste alcuna differenza? Infatti nel primo, in quanto infinito, non ci saranno né l'alto né il basso né il mediano, e nel secondo, in quanto vuoto, l'alto non differisce affatto dal basso. Lo spostamento naturale invece ha le sue differenze, sicché gli oggetti che naturalmente si muovono sono differenti. Dunque, o non c'è per natura nessuno spostamento in nessun luogo e per nessuna cosa, oppure, se questo c'è, non c'è affatto un vuoto.
Inoltre i proiettili si muovono ancora, benché non li tocchi più colui che li ha lanciati, e si muovono o per reazione, come dicono alcuni, oppure perché l'aria, spinta, spinge a sua volta con un moto più veloce di quello spostamento del corpo spinto in virtù del quale il corpo stesso viene spostato verso il suo proprio luogo. Nessuna di queste cose può verificarsi nel vuoto e nessuna cosa potrà essere spostata se non mediante un veicolo. Non solo nella fisica di Aristotele, ma in tutta quella pregalileiana era radicato il concetto che per mantenere in moto un corpo con una certa velocità è necessaria una forza.
A tale proposito così si esprime Aristotele nella *Fisica*:
'Sia A il motore, B il mosso, Γ la lunghezza percorsa, Δ il tempo in cui si attua il movimento.
In un tempo uguale la forza uguale A muoverà la metà di B per il doppio di Δ, e muoverà Γ nella metà di Δ: tale, infatti, sarà la proporzione. E, inoltre, se la stessa forza muoverà lo stesso oggetto in questo tempo qui secondo tanta lunghezza, e lo muoverà secondo la metà di lunghezza nella metà del tempo, anche la metà della forza muoverà parimenti la metà dell'oggetto in eguale tempo secondo una lunghezza uguale.
Ad esempio, sia E la metà della forza A, e Z la metà dell'oggetto B: le cose staranno allo stesso modo, e la forza starà nella medesima proporzione con il peso, sicché attueranno il movimento secondo una grandezza uguale in un

tempo uguale.
E se E muove Z nel tempo Δ secondo la lunghezza Γ, non necessariamante in egual tempo la forza E muoverà il doppio di Z lungo la metà di Γ. Se, poi, A muoverà B nel tempo Δ secondo la grandezza Γ, la metà di A, cioè E, non muoverà B nel tempo Δ né in una parte del tempo Δ secondo una parte della lunghezza Γ che sia rispetto all'intero Γ nella stessa proporzione in cui è la forza A rispetto alla forza E: se, insomma, si desse questo caso, non vi sarebbe movimento secondo nessuna parte della lunghezza: difatti, se l'intera forza ha attuato il movimento secondo tanta quantità di lunghezza, la metà di essa non attuerà il movimento secondo altrettanta quantità né in un tempo qualsivoglia: se fosse altrimenti, un uomo solo muoverebbe la nave, qualora venissero numericamente divise la forza di quelli che la tirano a secco e la lunghezza secondo cui tutti la muovono.'
E che l'effetto di una forza sia per Aristotele una velocità, lo si deduce pure quando egli affermava che la velocità di caduta di un grave è proporzionale alla sua pesantezza:[3]
'Se un dato peso percorre un dato spazio in un dato tempo, un peso eguale al primo più qualcosa lo farà in un tempo minore, e la proporzione che c'è tra i pesi si ripeterà nel rapporto inverso per i tempi; ad esempio se metà del peso si muove in un dato tempo, un peso doppio del primo si muoverà nella metà di quel tempo.
Ad Aristotele era ben noto anche che la velocità di un grave durante la caduta va aumentando e interpretava questo fatto sostenendo che i corpi man mano che si avvicinano al loro luogo naturale si muovono più velocemente.'

[3]Del Cielo, libro IV

Capitolo 2

KEPLERO

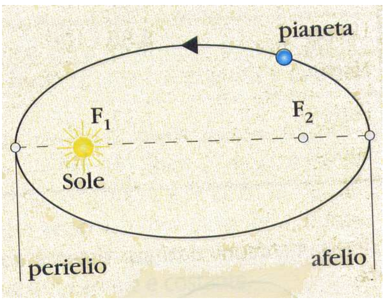
2.1 LE TRE LEGGI DEL MOTO PLANETARIO

In questo capitolo si riporta una breve presentazione, curata da De Bartolomeo e Magni[5], di Keplero e delle tre leggi del moto planetario. Giovanni Keplero nasce nel 1571 a Weil e studia teologia e filosofia, oltre che matematica e astronomia, presso l'università di Tubinga. Insegna dapprima matematica nel ginnasio di Graz e nel 1597 scrive un'opera (Mysterium cosmographicum) che risente di una forte influenza del pitagorismo. Successivamente si reca a Praga, chiamato da Ticho Brahe, e ne prosegue l'opera dopo la morte, essendo stato nominato matematico imperiale.
Pubblica scritti di ottica e di matematica e, dal 1609 al 1621, le sue tre opere astronomiche fondamentali, Astronomia Nova (1609), Harmonices mundi (del 1619) ed Epitomae astronomiae copernicanae (1618-21). Opera anche come astrologo ed è costretto, dal 1616 al 1621, a impegnarsi nella difesa della madre accusata di stregoneria. Muore nel 1630.
La sua personalità è una tra le più complesse: calcolatore instancabile, riprende senza mai scoraggiarsi, l'interpretazione delle osservazioni di Ticho Brahe e rifiuta tutte le leggi che lasciano spazio alle imprecisioni. Keplero non accoglie il modello di Brahe. Ma pur accettando il modello eliocentri-

co è consapevole dei limiti profondi delle posizioni di Copernico. Dalla sua profonda ispirazione platonica e pitagorica, ricava l'impegno a cercare leggi rigorose capaci di dare ragione del funzionamento del cosmo e di evidenziarne la struttura essenzialmente matematica. Così, proprio sulla base della tradizione pitagorica, egli è convinto che quella struttura sia costituita da 5 poliedri regolari (cubo, tetraedro, dodecaedro, icosaedro, ottaedro) aventi le facce costituite da triangoli equilateri.
Ma Keplero va oltre questa riproposizione di posizioni antichissime e studiando e calcolando soprattutto le orbite di Marte, avverte, dopo numerosi tentativi, l'impossibilità che esse siano circolari, perché tale ipotesi porterebbe ad uno scarto di 8 minuti rispetto ai moti reali. Riesce a trovare nell'ellisse la figura geometrica capace di conciliare i dati dell'osservazione e quelli risultanti del calcolo matematico.

2.1.1 Prima legge di Keplero

I pianeti descrivono intorno al sole orbite ellittiche di cui il sole occupa uno dei fuochi.

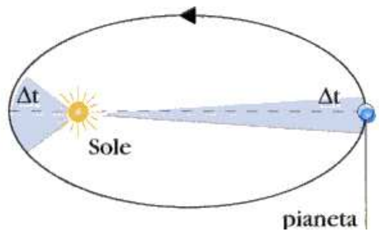


Ricordiamo dalla matematica che l'ellisse è il luogo geometrico dei punti di un piano per i quali la somma delle distanze da due punti fissi, detti fuochi, è costante.
Indicando con $2a$ la somma delle distanze di un punto P dell'ellisse dai due

fuochi F_1 e F_2 si ha $PF_1 + PF_2 = 2a$.

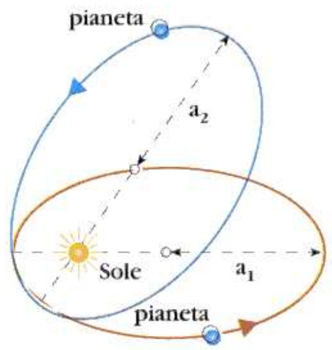
2.1.2 Seconda legge di Keplero

Le aree descritte dal raggio vettore tracciato dal sole ai pianeti sono proporzionali ai tempi impiegati a descriverle (leggi delle aree).
In particolare le aree descritte in uguali intervalli di tempo sono uguali, qualunque sia la posizione del pianeta.
Più in generale la seconda legge di Keplero afferma che l'area descritta dal raggio vettore di ogni pianeta nell'unità di tempo, cioè la cosiddetta velocità areolare, è costante durante il moto del pianeta sull'orbita.



2.1.3 Terza legge di Keplero

I quadrati dei tempi impiegati dai pianeti a descrivere le proprie orbite sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle ellissi.
Per esempio, se a_1 e a_2 sono i semiassi maggiori delle ellissi descritte dai due pianeti, i cui periodi di rivoluzione sono rispettivamnete T_1 e T_2 si ha ${T_1}^2 : {T_2}^2 = {a_1}^3 : {a_2}^3$.



2.2 L'Armonia del cosmo e le sue leggi matematiche

Quella forza di attrazione , che era stata considerata da Keplero inizialmente come un'anima motrice localizzata nel sole, viene poi chiamata vis, cioè una forza di tipo magnetico. Keplero così commenta:
Un tempo credevo che la causa motrice dei pianeti fosse un'anima, invece lo scopo che qui mi propongo è di affermare che la macchina dell'universo non è simile a un divino essere animato, ma è simile a un orologio e in essa tutti i movimenti dipendono da una forza attiva materiale, così come tutti i moti dell'orologio sono dovuti al semplice pendolo. Contro gli aristotelici, che mirano alla sostanza ultima delle cose, e contro i tentativi di maghi e alchimisti di descrivere la natura attraverso simboli ed immagini sensibili, Keplero difende la funzione della matematica come modello di conoscenza.

Capitolo 3

NEWTON

3.1 Presentazione

Isaac Newton occupa una posizione di grande rilievo nella storia della scienza e della cultura in generale. Il suo nome è associato ad una grande quantità di leggi e teorie ancora oggi insegnate: si parla di dinamica newtoniana, di leggi newtoniane del moto, di teoria della gravitazione newtoniana. In questo lavoro, seguendo fedelmente la trattazione proposta da Guicciardini[7], parleremo del tentativo di Newton di dare una risposta a una domanda molto singolare relativa al moto dei pianeti: qual è la natura della forza che regge il sistema del mondo e che fa sì che i pianeti orbitino intorno al Sole? Come vedremo Newton articola una risposta che lo porterà a rivedere molte concezioni accettate dai suoi contemporanei, e a parlare in modo nuovo di fisica celeste e terrestre.

3.2 Un premio da 44 scellini

Agosto 1684: una carrozza trasporta da Londra a Cambridge un astronomo che ha da poco perso la possibilità di aggiudicarsi un premio. Il nostro viaggiatore si chiama Edmondo Halley e non ha ancora compiuto i trent'anni. Oggi egli è noto al grande pubblico per la cometa da lui avvistata

nel 1682. Il matematico e architetto Christopher Wren aveva promesso in premio un libro del valore di 40 scellini a chi, fra Halley e Robert Hooke, il più brillante sperimentatore della Royal Society, avesse risposto a una certa domanda. I termini esatti in cui essa era stata formulata non ci sono noti. Si sa però che aveva a che fare niente meno che con il 'Sistema del Mondo '. Wren sospettava che una forza diretta verso il sole e inversamnete proporzionale al quadrato della distanza dal sole fosse sufficiente a spiegare tutti i moto dei pianeti. Halley o Hooke erano forse in grado di fornire entro due mesi una dimostrazione di questa intuizione?
Guadagnarsi quel libro da 40 scellini non era impresa delle più semplici. Le difficoltà erano principalmente di natura matematica. Ora, a Cambridge viveva pressoché in isolamento uno strano carattere titolare della cattedra Lucasiana di Matematica: il suo nome era Isaac Newton. Di lui sapevano varie cose, benché non avesse fatto molto per farsi conoscere. Come 'filosofo della natura', insomma come persona in grado di dire qualcosa sulla Natura del Mondo non doveva essere un gran che. Nell'unica sua uscita pubblica aveva esposto una teoria piuttosto bizzarra sulla natura della luce, secondo cui la luce bianca sarebbe composta da tutti i colori dell'arcobaleno...Si sapeva anche che ultimamente passava gran parte del suo tempo ad alimentare la fornace del suo laboratorio di alchimia. Si diceva però che fosse un gran matematico. Delle sue scoperte matematiche aveva fatto trapelare ben poco: solo qualche lettera e qualche manoscritto gli erano stati quasi estorti dai suoi ammiratori londinesi. Circolava voce che egli fosse in possesso di un metodo sublime per risolvere i più intricati problemi relativi alle curve. Quale fosse poi questo metodo rimaneva un mistero. In ogni caso Halley confidava che quell'uomo così difficile da avvicinare avesse gli strumenti matematici per dare una risposta al problema che aveva beffato lui, l'architetto e il permaloso sperimentatore.
Nell'avvicinarsi alle stanze del Trinity College situate di fianco al portone principale, dove Newton lo avrebbe ricevuto, Halley non sapeva nascondere un certo nervosismo. Al di là dei 40 scellini la questione era importante: ave-

va a che fare con le cause profonde che strutturano il mondo, che in mettono in moto la Luna e i pianeti nelle loro orbite.
Ma il Professore Lucasiano, se pure fosse stato in possesso della risposta, non è detto che gliela avrebbe rivelata. Era un uomo che teneva per sé le proprie verità. Newton era inoltre noto per il suo rigore morale e passava per puritano. Da questo punto di vista Halley non godeva di una buona fama, e forse temeva di essere messo alla porta. I soliti pettegoli dicevano che nel suo viaggio a Sant'Elena egli avesse reso madre la moglie di un compagno di viaggio. Circolava voce che, ancora nel 1734, il vescovo e filosofo, Giorge Berkeley si riferisce ad Halley come a un matematico senza fede. Come avrebbe risposto Halley a una richiesta di aiuto formulata da quel discusso avvistatore di comete?
Non si conosce esattamente il contenuto della conversazione, ciò che si sa è che ad Halley non sarebbe potuta andare meglio. Newton era di luna buona e subito disse al suo ospite che quella domanda non gli era affatto nuova: se la era già posta qualche anno addietro. Certo, una forza diretta verso il sole e inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal sole era quanto necessario per spiegare tutto il sistema del mondo. Newton concluse l'incontro spiegando allo stupefatto libertino come, ottenuta la dimostrazione, l'avesse riposta in un cassetto. E, al momento, non ricordava quale. In ogni caso egli si impegnava, non appena avesse ritrovato quel vecchio foglio, a farlo riavere ad Halley.
Nel novembre del 1684 Halley riceve un breve manoscritto contenente la risposta alla domanda posta da Wren. Halley ne è entusiasta. Ne riferisce ai soci della Royal Society e sprona Newton a sviluppare quelle idee. Newton si lascia contagiare da quell'entusiasmo e si mette al lavoro con una intensità che lascia sbalordito il suo assistente. Lavora senza sosta. Spesso scrive in piedi, chino sul tavolo: anche il tempo per trovare una sedia o mangiare un boccone gli sembra sprecato! Notti insonni e pasti saltati. Ma nell'estate del 1687 il classico che era destinato a cambiare la scienza è in stampa.
In quei tre anni Halley ha ricevuto da Newton 460 pagine manoscritte fitte di

argomentazioni matematiche, diagrammi, risultati sperimentali, osservazioni astronomiche. Halley ha letto, corretto, e commentato pazientemente ciascuna riga. Ha anche provveduto a mantenere i contatti con la Royal Society, sotto i cui auspici i *Principia* vengono pubblicati. Come se non bastasse, Halley pur non essendo in condizioni economiche rosee, finanzia l'intera pubblicazione. Senza il suo entusiasmo e la sua determinazione i *Principia* non avrebbero visto la luce.

3.3 I Principia: Fondamenti

Newton presenta un'opera difficile da leggere. Si tratta di un'opera divisa in tre libri. I primi due sono prevalentemente di matematica. Una matematica applicata al moto dei corpi nel vuoto (libro primo) e nei mezzi resistenti come l'aria o l'acqua libro secondo. Nel terzo libro si tratta del 'Sistema del Mondo': è qui che Newton presenta la sua cosmologia basata sull'idea che i pianeti si muovano nello spazio vuoto, attratti verso il sole da una forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Le modalità di azione di questa forza sono misteriose: sulle sue cause Newton non si pronuncia. L'-opera si apre con una parte di notevolissima importanza: ossia le definizioni e gli assiomi, che contiene i concetti basilari della meccanica. Newton riesce a dare per la prima volta una fondazione chiara e coerente alla dinamica. Sono definite la quantità di materia, la quantità di moto, l'inerzia, le nozioni di forza e di forza centripeta.
Gli assiomi comprendono le tre leggi del moto e sei corollari. La prima legge è quella dell'inerzia, la seconda stabilisce che l'accelerazione è proporzionale alla forza, la terza è quella dell'equivalenza dell'azione e reazione. I primi due corollari spiegano il parallelogramma delle forze e le relative applicazioni; il terzo e il quarto affermano che la quantità di moto e il centro di gravità di un sistema di corpi non vengono alterati dall'azione di tali corpi fra loro; il quinto e il sesto stabiliscono che i moti mutui rimangono inalterati nel caso

di moto uniformi come nel caso di moto uniformemente accelerati.

3.4 Definizioni[1]

Definizione 3.1. *La quantità di materia è la misura della medesima ricavata dal prodotto della sua densità per il volume.*

Definizione 3.2. *La quantità di moto è la misura del medesimo ricavata dal prodotto della velocità per la quantità di materia.*
Il movimento totale è la somma dei movimenti delle singole parti; perciò in un corpo doppio, con velocità uguale, la quantità di moto è doppia; con velocità doppia è quadrupla.

Definizione 3.3. *La forza insita (vis insita) della materia è la disposizione a resistere, per effetto della quale ciascun corpo, per quanto sta in esso, persevera nel suo stato di qiete o di moto rettilineo uniforme.*
Questa forza è sempre proporzionale al corpo, né differisce in alcunché dall'inerzia della massa altrimenti che per il modo di concepirla. A causa dell'inerzia della materia, accade che ogni corpo è rimosso con difficoltà dal suo stato di quiete o di moto. Per cui la forza insita può essere chiamata anche con il nome molto espressivo di forza di inerzia. Il corpo esercita questa forza solo nel caso di mutamento del proprio stato per effetto di una forza impressa dall'esterno; e quell'azione è di resistenza e di impulso: di resistenza in quanto il corpo per conservare il proprio stato si oppone alla forza impressa; di impulso, in quanto il medesimo corpo, poiché la forza di resistenza dell'ostacolo cede con difficoltà, tenta di mutare lo stato di quell'ostacolo.

Definizione 3.4. *La forza impressa è un'azione esercitata sul corpo al fine di mutare il suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.*

[1]Dai Principia

Questa forza consiste nell'azione in quanto tale e cessata l'azione non permane nel corpo. Infatti un corpo persevera in ciascun nuovo stato per la sola forza di inerzia. La forza di inerzia ha varie origini: l'urto, la pressione e la forza centripeta.

Definizione 3.5. *La forza centripeta è la forza per effetto della quale i corpi sono attratti, o sono spinti, o comunque tendono verso un qualche punto come verso un centro.*
Di questo genere è la gravità, per effetto della quale i corpi tendono verso il centro della terra; la forza magnetica, per effetto della quale il ferro si dirige verso la calamita; e quella forza per effetto della quale i pianeti sono continuamente deviati dai moti rettilinei e sono costretti a ruotare secondo linee curve.
La quantità di questa forza centripeta è inoltre di tre generi: assoluta, acceleratrice e motrice.

Definizione 3.6. *La quantità assoluta di una forza centripeta è la misura della medesima, ed è maggiore o minore a seconda della potenza della causa che la diffonde dal centro attraverso gli spazi circostanti*

Definizione 3.7. *La quantità acceleratrice di una forza centripeta è la misura della medesima ed è proporzionale alla velocità che essa genera.*
Così la forza della medesima calamita è maggiore ad una distanza minore, minore ad una distanza maggiore; la forza di gravità è maggiore nelle valli e minore sulla vetta dei monti, e ancora minore alle maggiori distanze dal globo terrestre, ad uguali distanze è la medesima ovunque. Per questa ragione accelera uniformemente tutti i corpi che cadono se si trascura la resistenza dell'aria.

Definizione 3.8. *La quantità motrice di una forza centripeta è la misura della medesima ed è proporzionale al moto che esso genera.*
Così il peso è maggiore nel corpo più grande, minore nel minore; nello stesso corpo è maggiore in prossimità della Terra, minore nei Cieli. Questa quantità

è la disposizione centripeta, o propensione verso il centro, di tutto il corpo, o, come posso anche dire, il peso; ed è sempre conosciuta a causa di una forza uguale e contraria per effetto della quale la caduta dei corpi può essere impedita.

3.5 Assiomi o leggi del movimento[2]

3.5 Assiomi o leggi del movimento[3]

Legge I:
Ciascun corpo persevera nel proprio stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, salvo che sia costretto a mutare quello stato da forze impresse.

Legge II:
Il cambiamento del moto è proporzionale alla forza motrice impressa, ed avviene lungo la linea retta secondo la quale la forza è stata impressa.

Posto che una qualche forza generi un movimento qualsiasi, una forza doppia ne produrrà uno doppio, e una tripla uno triplo, sia che sia stata impressa di colpo e in una sola volta, sia gradatamente ed in tempi successivi. E questo moto (poiché è sempre determinato lungo lo stesso piano della forza generatrice) se è concorde e se il corpo era già mosso, viene aggiunto al moto di quello; sottratto se contrario, oppure aggiunto solo obliquamente se obliquo, e si compone con esso secondo la determinazione di entrambi.

Legge III:
Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria: ossia le azioni di due corpi sono sempre uguali fra loro e dirette verso parti opposte.
Qualunque cosa pressi o tiri un'altra cosa, è pressata e tirata da essa nella stessa misura. Se qualcuno preme una pietra con il dito, anche il suo dito

[2] Dai Principia
[3] Dai Principia

viene premuto dalla pietra. Se un cavallo tira una pietra legata ad una fune, anche il cavallo è tirato ugualmente verso la pietra. Se un qualche corpo urtando in un altro corpo in qualche modo avrà mutato con la sua forza il moto dell'altro, a sua volta, a causa della forza contraria, subirà un medesimo mutamento del proprio moto in senso opposto. A queste azioni corrispondono uguali mutamenti, non di velocità ma di moto: sempre che sui corpi non agisca nessun altro impedimento. I mutamenti di velocità effettuati allo stesso modo in direzioni contrarie, sono inversamente proporzionali ai corpi.

Newton illustra la prima legge con tre esempi: il moto dei proiettili, il moto delle trottole e il moto di rotazione sull'asse dei pianeti. Il primo esempio è un classico e non ci stupisce: un proiettile dopo essere stato lanciato, si muove di moto rettilineo uniforme se su di esso non agiscono forze di nessun genere.

L'enunciato della seconda legge è altrettanto sorprendente. La forza è detta proporzionale al 'cambiamento [della quantità] di moto' (mΔv). Guicciardini[7] fa inoltre osservare che in realtà non c'è nessun riferimento al tempo. Non sapremmo quindi se tradurre in simboli questa legge come: F=ma o come F=mΔv.

La prima traduzione mette in risalto il carattere continuo della forza. La seconda si applica ad una forza impulsiva, a un cambiamento istantaneo della velocità. Effettivamente nei Principia convivono i due modelli. A volte una forza è rappresentata come una azione continua che, esercitata su un corpo, ne devia il moto rettilineo inerziale lungo una traiettoria liscia.

A volte la forza è rappresentata come una serie di impulsi esercitati a intervalli uguali e infinitesimi di tempo. In questo secondo caso ne risulta una traiettoria poligonale: ciascun lato infinitesimo della poliginale è un cammino rettilineo inerziale. Si noti comunque che nella proposizione 24 del secondo libro troviamo la seguente spiegazione della seconda legge:

'La velocità che una data forza può generare in una data materia durante un tempo dato sta come la forza e il tempo direttamente, e come la materia

inversamente'
Quanto maggiore è la forza o più lungo il tempo, o minore la quantità di materia, tanto maggiore sarà la velocità generata. Non c'è dubbio quindi che Newton comprendesse bene tutti gli aspetti concettuali coinvolti in $F = ma$. Si sostituisca dv a 'velocità generata', F a 'forza', m a materia e dt a 'tempo dato' e si otterrà $F = ma$.
Ma Newton era in grado di dare una versione simbolica della seconda legge? Resta infatti sorprendente che i Principia non si aprano con una espressione simbolica della cosiddetta 'seconda legge di Newton': $F = ma$.
Su questa assenza di $F = ma$ dai Principia si rendono necessarie due precisazioni:

1. Newton scrive i Principia in forma geometrica. Egli non usa esplicitamente il calcolo delle flussioni [4] e quindi non può scrivere una equazione del moto del tipo $F = ma$. La scelta di utilizzare il linguaggio geometrico dipende anche dal bisogno di tener conto delle competenze dei lettori cui Newton si rivolgeva. Lo stile geometrico era più consono alla preparazione dei filosofi della natura del Seicento.

2. In alcuni punti dei Principia Newton si riferisce in modo alquanto obliquo alla possibilità di tradurre certe proposizioni in termini del calcolo delle flussioni. Da manoscritti degli anni '90 e dalla corrispondenza con i suoi allievi è dato evincere che Newton era in grado di scrivere $F = m\ddot{x}$, dove $\ddot{x}$ è la flussione seconda dello spostamento, e di applicare questa equazione allo studio del moto in un campo di forze centrali.
   Si elencano i corollari che seguono alle leggi del moto:
   Corollario I: *Un corpo spinto da forze congiunte, descriverà la diagonale di un parallelogramma nello stesso tempo nel quale descriverebbe separatamente i lati.*
   Corollario II: *Per conseguenza è manifesta la composizione della forza*

[4] Per il calcolo delle flussioni consultare la pubblicazione di Guicciardini

diretta AD per effetto di forze oblique qualsiasi AC e CD, e la risoluzione di quella forza diretta AD nelle forze oblique qualunque AC e CD. E tale composizione e risoluzione è abbondantemente confermata dalla meccanica.

Corollario III: *La quantità di moto calcolata prendendo la somma dei moti diretti verso la medesima parte, e la differenza dei moto diretti in parti opposta, non viene mutata dall'azione dei corpi fra loro.*

Corollario IV: *Il comune centro di gravità di due o più corpi, non muta il suo stato di moto o di quiete per effetto delle azioni dei corpi fra loro: e per effetto dei corpi agenti fra di loro (esclusi le azioni e gli impedimenti esterni) il comune centro di gravità o giace in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme.*

Corollario V: *I moti relativi dei corpi inclusi in un dato spazio sono identici sia che quello spazio giaccia in quiete, sia che il medesimo si muova in linea retta senza moto circolare.*

Corollario VI: *Se i corpi sono mossi uno rispetto all'altro in un qualunque modo, e sono spinti da forze acceleratrici eguali lungo le linee parallele, essi continueranno ad essere mossi l'uno rispetto all'altro nello stesso modo, come se non fossero sollecitati da quelle forze.*

Capitolo 4

I PRINCIPIA: LA RISPOSTA AD HALLEY

Nel primo libro [1] Newton analizza le relazioni tra le orbite descritte dai pianeti in movimento e le forze centrali.
In verità esistono due problemi distinti: nel Seicento il primo veniva detto problema delle forze centrali, il secondo problema inverso delle forze centrali.

4.1 Il problema diretto delle forze centrali

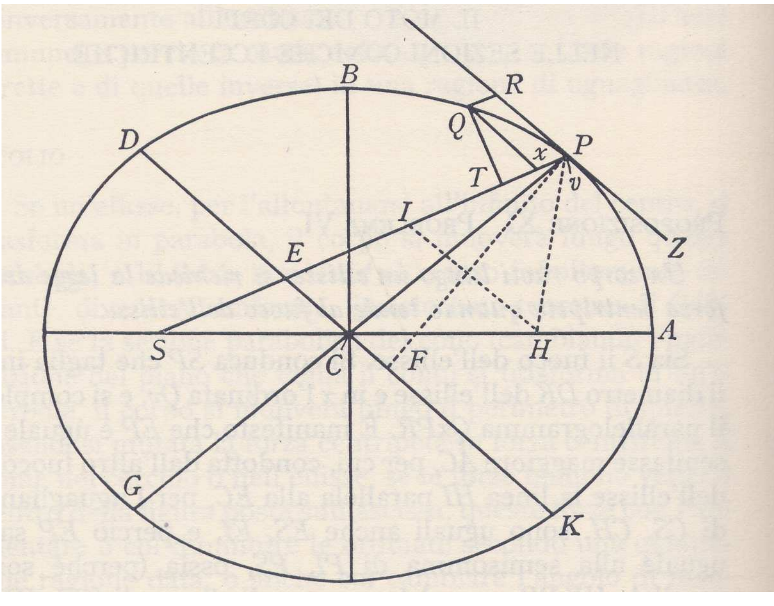
Sappiamo che la prima legge di Keplero afferma che ciascun pianeta orbita attorno al Sole descrivendo un'ellisse tale che il Sole occupa uno dei fuochi. Il problema diretto delle forze centrali è il seguente: Si supponga che un corpo (la cui posizione indichiamo con P) descriva una traiettoria ellittica. Si supponga che S sia un fuoco dell'ellisse e che il raggio vettore SP, congiungente il fuoco S con il pianeta, spazzi aree uguali in tempi uguali. Si chiede quale sia la forza che accelera il corpo. Anche se non sappiamo con certezza che cosa Halley avesse chiesto a

[1] vedi Primo libro dei Principia

Newton, possiamo dire che il problema diretto ha certamente qualcosa a che fare con il premio da 40 scellini. Infatti secondo le prime due leggi di Keplero, la Terra, Marte, e qualsiasi altro pianeta, orbitano attorno al Sole come il corpo sito in P orbita attorno ad S. Se dimostriamo matematicamente che un tale corpo è accelerato da una forza diretta verso S e che è inversamnete proporzionale al quadrato della distanza da S, abbiamo anche dimostrato che la Terra, Marte, e qualsiasi altro pianeta, sono attratti verso il Sole da una forza siffatta.
Prima di procedere chiariamo, suggerisce Guicciardini[7], che cosa vuol dire che una forza è diretta verso S e che è inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Una forza è diretta verso S se determina in un corpo posto in un qualunque punto dello spazio una accelerazione diretta verso S. Essa è detta una forza centrale attrattiva (o centripeta) con centro di forza S.
Questa forza è inversamente proporzionale al quadrato della distanza da S se la sua intensità F è espressa dall'equazione: $F = \frac{k}{r^2}$. Veniamo ora alla soluzione newtoniana del problema diretto, riportando la proposizione direttamente dai Principia[8]:

Proposizione XI problema VI:
Un corpo ruoti lungo un'ellisse: si richiede la legge della forza centripeta quando tende al fuoco dell'ellisse.

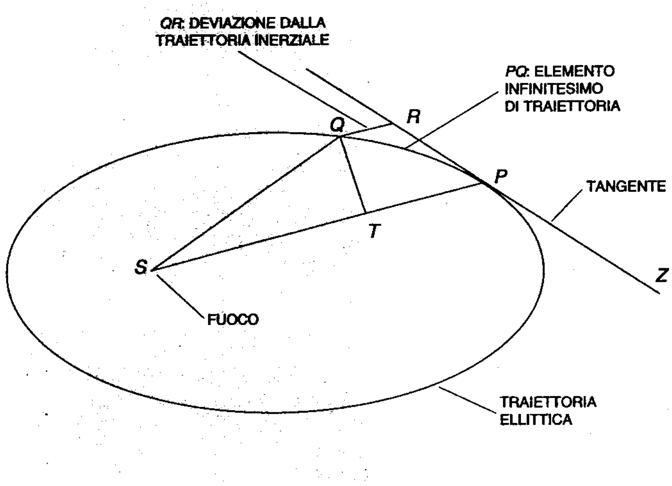
Sia S il fuoco dell'ellisse. Si conduca SP che taglia in E il diametro DK dell'ellisse e in x l'ordinata Qv, e si completi il parallelogramma QxPR. E' manifesto che EP è uguale al semiasse maggiore AC, per cui, condotta dall'altro fuoco H dell'ellisse la linea HI parallela alla EC, per l'uguaglianza di CS, CH, sono uguali anche ES, EI, e perciò EP sarà uguale alla semisomma delle stesse PS,PH, che prese insieme sono uguali a tutto l'asse 2AC. Si abbassi la perpendicolare QT su SP e detto L il parametro principale dell'ellisse (ossia $\frac{2BC^2}{AC}$), $L \times QR$ starà a $L \times Pv$ come QR a Pv, ossia come PE o AC a PC; ed $L \times Pv$ starà a GvP come L a Gv; e GvP a Qv^2 come PC^2 a CD^2, e (per il corollario 2 del lemma VII)[2] Qv^2 sta a Qx^2, allorché i punti Q e P si congiungono, in un rapporto di uguaglianza; e Qx^2 o Qv^2 sta a QT^2 come EP^2 sta a PF^2, ossia come CA^2 sta a PF^2, oppure (per il lemma XII)[3] come CD^2 a CB^2. E moltiplicando tutte queste relazioni, L sta a QT^2 come $AC^2 \times CD^2$, o $2CB^2 \times PC^2 \times CD^2$ sta a $PC \times Gv \times CD^2 \times CB^2$, oppure come 2PC sta a Gv. Ma essendo 2PC e Gv uguali quando i punti Q e P si incontrano, anche $L \times QR$ e QT^2, a loro proporzionali, si uguagliano. Si moltiplichino queste uguaglianze per $\frac{SP^2}{QR}$, $L \times SP^2$ sarà uguale a $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$. Dunque (per i corollari I e V della proposizione VI) [4] la forza centripeta è inversamente proporzionale a $L \times SP^2$, ossia è inversamente proporzionale al quadrato della distanza SP.



Ripercorriamo ora la dimostrazione con le parole di Guicciardini[7].

[2] Si veda l'appendice A
[3] Si veda l'appendice A
[4] Si veda l'appendice A

Per ipotesi il corpo situato in P orbita lungo una traiettoria ellittica in modo tale che S è un fuoco e SP spazza aree uguali in tempi uguali. ZPR è una retta tangente al punto P. Nella figura vediamo che: un altro punto Q appartenente alla traiettoria ellittica, un segmento QT perpendicolare a SP. La dimostrazione può essere divisa in quattro passi.



Primo passo: Dall'assunzione che SP spazza aree uguali in tempi uguali deduciamo, in base alla proposizione II[5]del primo libro, che la forza che accelera il corpo è centrale e diretta verso S.

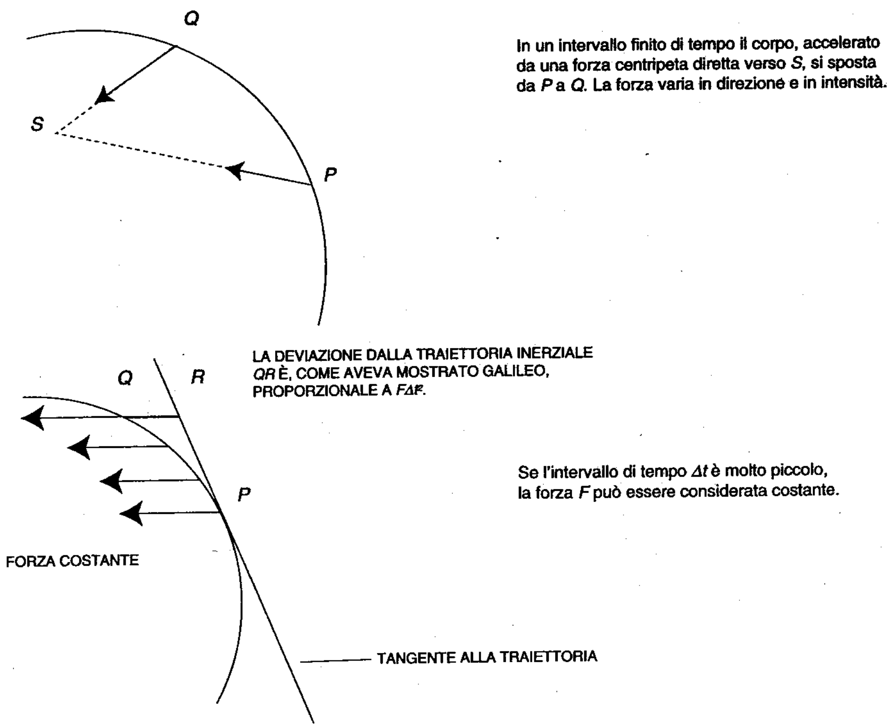
Secondo passo: Si può dimostare in base a proprietà geometriche dell'ellisse che il limite per Q che tende a P del rapporto $\frac{QR}{QT^2}$ è una costante. Prendiamo un qualsiasi punto P e un qualsiasi punto Q della traiettoria ellittica. Tracciamo la tangente ZPR e tracciamo QR e QT come in figura. Denotiamo con QT^2 l'area del quadrato di lato QT. Formiamo il rapporto $\frac{QR}{QT^2}$ e facciamo tendere l'arco QP a zero (prendendo

[5]vedi Appendice A

Q sempre più vicino a P). Newton dimostra che il limite del rapporto fra le quantità QR e QT^2 è una costante che non dipende dal punto P considerato: è la stessa costante per tutti i punti P dell'ellisse.

Terzo passo: Newton costruisce la sua dinamica con metodi geometrici. Il suo problema è: come rappresentare una forza centrale? Consideriamo un corpo accelerato da una forza centrale diretta verso S. Se quando il corpo raggiunge il punto P, la forza smettesse improvvisaamente di agire, il corpo si muoverebbe lungo la tangente a velocità costante. Ma il corpo in un tempo finito Δt si sposta lungo la traiettoria da P a Q. Nel punto Q la forza avrà variato in intensità e in direzione rispetto a P. Ora, se Q è molto vicino a P possiamo con buona approssimazione dire che la forza non varia nè in intensità nè in direzione: lungo l'arco PQ il corpo è accelerato da una forza costante. Questa approssimazione è tanto migliore quanto più piccolo è l'arco PQ. Dagli studi di Galileo si poteva dedurre che un corpo accelerato da una forza costante devia dalla sua traiettoria inerziale PR in modo tale che la caduta QR è proporzionale al quadrato del tempo di caduta moltiplicato per l'accelerazione (è familiare la legge $s = s_0 + v_0 t + \frac{g}{2} t^2$). Essendo per la seconda legge della dinamica l'accelerazione proporzionale alla forza, possiamo scrivere:
F è proporzionale al limite per Q che tende a P del rapporto $\frac{QR}{\Delta t^2}$, dato che vale la legge delle aree, abbiamo che il tempo è proporzionale all'area spazzata da SP. Quindi: Δt *è proporzionale all'area SPQ.*
Dato che l'arco è molto piccolo possiamo considerare l'arco PQ uguale alla corda e quindi SPQ può essere , con buona approssimazione, considerando un triangolo la cui area sarà uguale a $\frac{1}{2}(SP \times QT)$. Possiamo quindi affermare che le costanti le possiamo trascurare perchè stiamo parlando in termini di proporzionalità:
Δt *è proporzionale a* $SP \times QT^2$.
E quindi:

F è proporzionale al limite per Q che tende a P del rapporto $\frac{QR}{SP\times QT^2}$.
E' questa la misura geometrica della forza centrale.



Quarto passo: Applichiamo quanto appreso al caso dell'ellisse. Sappiamo che la forza è centrale e diretta verso S. Per il terzo passo la forza sarà data da:
F è proporzionale a $\frac{1}{PS^2}$ *moltiplicato per il limite per Q che tende a P del rapporto* $\frac{QR}{QT^2}$. Per il secondo passo abbiamo che:
F è proporzionale a $\frac{1}{SP^2}$ *moltiplicato per una costante*
La forza è inversamente proporzionale al quadrato della distanza SP. E' questa la dimostrazione che se valgono le prime due leggi di Keplero, allora ciascun pianeta è attratto verso il sole da una forza la cui intensità F varia con l'inverso del quadrato della distanza. I quaranta scellini sono molto vicini. Halley deve essere rimasto a bocca aperta davanti

a questa meraviglia matematica. Newton aveva messo in relazione la legge delle aree di Keplero col fatto che la traiettoria è ellittica e il sole occupa un fuoco. In definitiva: *se la traiettoria è un ellisse, una parabola o un'iperbole e il centro di forza occupa uno dei fuochi allora la forza è inversamente proporzionale al quadrato della distanza.*

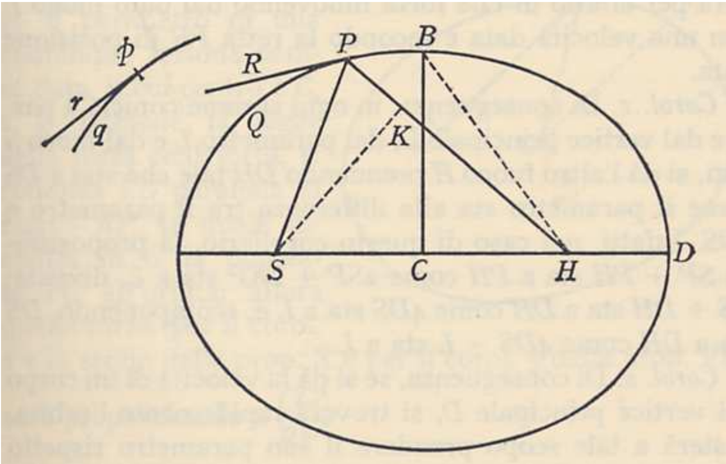
4.2 Il problema inverso delle forze centrali

Si supponga che vi sia una forza centrale con centro di forza S. Si supponga che la forza sia inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Si chiede quale sia la traiettoria descritta da un corpo che viene lanciato a un dato istante t_0 da un punto P con una data velocità v_0.
Nel precedente problema diretto è stato dimostrato che: se la traiettoria è una sezione conica e il centro di forza è in un fuoco, allora la forza varia con l'inverso del quadrato della distanza. Nel problema inverso si chiede di determinare la traiettoria, data una forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza e date posizione e velocità iniziali. La risposta la si trova nella seguente proposizione[6]:

Proposizione XVII Problema IX
Posto che la forza centripeta sia inversamente proporzionale al quadrato della distanza dei luoghi dal centro, e che sia conosciuta la quantità assoluta di quella forza, si ricerca la linea che un corpo descriverà muovendo da un luogo dato con una velocità assegnata secondo una data retta.

La forza centripeta tendente al punto S sia tale che il corpo *P* ruoti lungo una qualsiasi orbita assegnata *pq* e si conosca la sua velocità nel luogo *P*. Il corpo P muova dal luogo P lungo la linea PR con una velocità assegnata, e subito dopo, costringendolo la forza centripeta, devii dalla linea verso la sezione di cono PQ. La retta PR, quindi, tocchi questa in P. Parimenti, la retta qualsiasi *pr* tocchi l'orbita *pq* in *p*, e se si suppone di abbassare da S verso quelle tangenti le perpendicolari, il parametro principale della sezione conica (per il corollario

[6] Dai Principia



I della prop. XVI)[7] starà al parametro principale dell'orbita in ragione composta del quadrato delle perpendicolari e del quadrato delle velocità; e perciò è dato. Sia L il parametro della sezione conica. Si dia inoltre il fuoco S della medesima sezione conica. Sia l'angolo RPH complementare dell'angolo RPS, e la linea PH, sulla quale è l'altro fuoco H, abbia una posizione data. Abbassata la perpendicolare SK verso PH, si supponga di costruire il semiasse coniugato BC, allora sarà $SP^2 - 2KPH + PH^2 = SH^2 = 4CH^2 = 4BH^2 - 4BC^2 = (SP+PH)^2 - L\times(SP+PH) = SP^2+2SPH+PH^2-L\times(SP+PH)$. Ad entrambi i lati si aggiunga $2KPH - SP^2 - PH^2 + L \times (SP + PH)$, ed $L \times (SP + PH) = 2SPH + 2KPH$, o $SP + PH$, starà a PH come $2SP + 2KP$ sta a L. Per cui PH è data sia come lunghezza che come posizione. Ossia, se la velocità del corpo in P diviene tale che il parametro L risulta minore di $2PS + 2KP$, PH giacerà dalla stessa parte della tangente PR insieme alla linea PS; perciò la figura sarà un'ellisse, ed essendo dati i fuochi S, H e l'asse principale $SP + PH$, sarà data. Ma se la velocità del corpo è così grande da far diventare il parametro L uguale a $2SP + 2KP$, la lunghezza PH sarà infinita; per la qual cosa la figura sarà una parabola che ha per lato l'asse SH

[7] Si veda l'appendice A

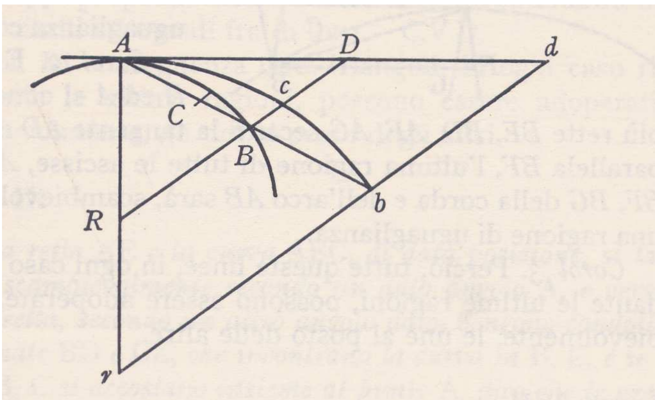
parallelo alla linea PH, e perciò sarà data. Ma se il corpo muove dal suo luogo P con una velocità ancora maggiore, la lunghezza PH andrà presa sull'altra parte della tangente: e perciò, in quanto la tangente spinge tra i fuochi, la figura sarà un'iperbole che ha l'asse principale uguale alla differenza delle linee SP e PH, e perciò sarà data. Se infatti il corpo viene fatto ruotare lungo la sezione conica in tal modo trovata, resta dimostrato, per le prop XI,XII e XIII[8], che la forza centripeta sarà inversamente proporzionale al quadrato della distanza del corpo dal centro S delle forze; perciò giustamente viene esibita la linea PQ, che un corpo descriverà per effetto di tale forza muovendo dal dato luogo P con una velocità data e secondo una retta PR di posizione data.

[8]Si veda l'Appendice A

Appendice A

Lemma VI:

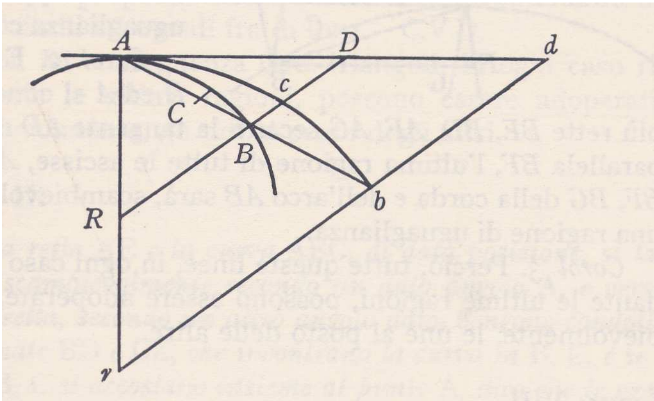
Se un arco qualsiasi ACB di posizione data è sotteso dalla corda AB e in un qualsiasi punto A, al mezzo di una curvatura continua, viene toccato dalla retta AD, prolungata da entrambe le parti, e se i punti A e B si accostano fra loro fino a congiungersi, dico che l'angolo BAD, contenuto fra la corda e la tangente, verrà diminuito all'infinito e da ultimo diventerà evanescente.



Se infatti quell'angolo non divenisse evanescente, l'arco ACB insieme alla tangente AD, conterebbe un angolo uguale a quello rettilineo, e di conseguenza la curvatura nel punto A, contro l'ipotesi, non sarebbe continua.

Lemma VII:

Ferme restando le medesime cose, dico che l'ultima ragione fra l'arco, la corda e la tangente è, scambievolmente, una ragione di uguaglianza.



Infatti mentre il punto B si accosta al punto A, si supponga sempre che AB e AD siano prolungate fino ai punti lontani *b* e *d*, e si tracci *bd* parallela alla secante BD. Sia l'arco Acb sempre simile all'arco ACB; essendo stati congiunti i punti A e B, l'angolo dAb, per il lemma precedente, diventerà evanescente: allora, le rette sempre finite Ab e Ad, e l'arco intermedio ACB, sempre proporzionali ai precedenti, diventeranno evanescenti e avranno per ultima ragione l'uguaglianza.

Corollario I: Per cui, se per B si conduce BF, parallela alla tangente, secante sempre una retta qualsiasi AF che attraverso A passi in F, questa linea BF sarà da ultimo in un rapporto di uguaglianza con l'arco evanescente ACB; per la qual cosa, una volta completato il parallelogramma AFBD, questo starà sempre in un rapporto di uguaglianza con AD.

Corollario II: E se per B e A si conducono più rette BE, BD, AF, AG secanti la tangente AD e la sua parallela BF, l'ultima ragione di tutte le ascisse, AD, AE, BD, BG della corda e dell'arco AB sarà scambievolmente una ragione di uguaglianza.

Corollario III: Perciò tutte queste linee in ogni caso riguardante le ultime ragioni, possono essere adoperate, scambievolmente le une al posto delle altre.

Lemma XII:
Tutti i parallelogrammi descritti intorno ai diametri intorno ai diametri coniugati qualsiasi di una data ellisse o di una iperbole sono uguali tra loro.

Lemma XIII:
Il parametro di una parabola relativo ad un qualsiasi vertice è quattro volte la distanza di quel vertice dal fuoco della figura
Proposizione I Teorema I
Le aree che i corpi ruotanti descrivono, condotti i raggi verso il centro immobile delle forze, giacciono sugli stessi piani e sono proporzionali ai tempi.

Corollario 2: Se le corde AB, BC di due archi descritti successivamente dal medesimo corpo in tempi uguali e in spazi privi di resistenza, vengono completate nel parallelogramma ABCV, e la diagonale BV di questo, nella posizione che da ultimo ha, è prolungata da entrambe le parti, essa passerà per il centro delle forze.

Corollario 4: Le forze per effetto delle quali corpi qualsiasi, in spazi non resistenti, vengono ritratti dai moto rettilinei e deviati in orbite curve, stanno fra di loro come le saette degli archi descritti in tempi uguali, le quali convergono verso il centro delle forze e, ove quegli archi diminuiscono all'infinito, bisecano le corde. Quelle saette, infatti, stanno come la metà delle diagonali.

Proposizione II Teorema II

Ogni corpo che si muove lungo una qualche linea curva descritta su un piano e, con il raggio condotto verso un punto o immobile o che si muove di moto rettilineo uniforme, descrive intorno a quel punto aree proporzionali ai tempi, è spinto da una forza centripeta che tende al medesimo punto.

Proposizione IV Teorema IV

Le forze centripete dei corpi, che descrivono cerchi diversi con moto uniforme, tendono ai centri dei medesimi cerchi, e stanno fra loro come i quadrati degli archi descritti in tempi uguali divisi per i raggi dei cerchi.

Queste forze tendono ai centri dei cerchi per la prop. II e il corol. 2 della prop I, e stanno fra loro come i seni versi [saette] degli archi minimi descritti in tempi uguali (per il corollario 4 della prop I); ossia (per il lemma VII) come i quadrati degli stessi archi divisi per i diametri dei cerchi. Per la qual cosa, poiché questi archi stanno come gli archi descritti in tempi qualsiasi uguali, e i diametri stanno come i raggi dei medesimi, le forze saranno proporzionali ai quadrati di archi qualsiasi descritti in tempi uguali divisi per i raggi dei cerchi.

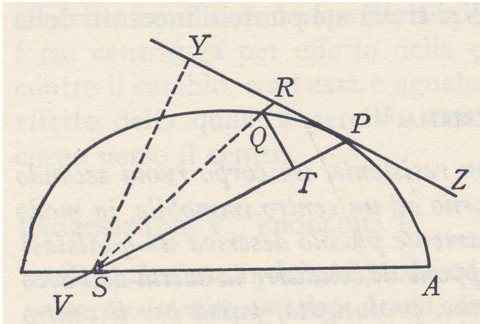
Corollario I: Poiché quegli archi stanno come le velocità dei corpi, le forze centripete staranno nella ragione composta dei quadrati delle velocità direttamente, e nella ragione semplice dei raggi inversamente [1].

Proposizione VI Teorema V

Se in uno spazio non resistente, un corpo ruota secondo un'orbita qualunque attorno a un cerchio immobile, in modo che in un tempo estremamente piccolo descriva un qualsiasi arco nascente, e se si suppone di condurre la saetta dell'arco che bisechi la corda, e che, prolungata, passa per il centro delle forze, allora la forza centripeta, nel punto di mezzo dell'arco, sarà direttamente proporzionale alla saetta e inversamente proporzionale al quadrato del

[1] In questo corollario si afferma che le forze centripete sono direttamente proporzionali ai quadrati delle velocità e inversamente proporzionali ai raggi

tempo.



Infatti la saetta è, in un dato tempo, proporzionale alla forza (corollario IV prop 1) e aumentando il tempo secondo una ragione qualsiasi, a causa dell'arco aumentato secondo la medesima ragione, la saetta viene aumentata secondo il quadrato di quella ragione(per i coroll. 2 e 3 dl lemma XI) e perciò è proporzionale alla forza e al quadrato del tempo, la forza sarà direttamente proporzionale alla saetta e inversamnete proporzionale al quadrato del tempo.

Corollario 1: Se un corpo P ruotando intorno al centro S descrive la linea curva APQ, e se la retta ZPR tocca quella curva in un qualsiasi punto Q si conduce verso la tangente alla curva la QR parallela alla distanza SP, e si abbassa la QT perpendicolare alla distanza SP, allora la forza centripeta sarà inversamente proporzionale al solido $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$, se di quel solido viene sempre assunta la quantità che da ultimo presenta quando i punti P e Q si incontrano. Infatti QR è uguale alla saetta dell'arco doppio di QP, nel cui mezzo è P, e il doppio del triangolo QSP o $PS \times QT$ è proporzionale al tempo con il quale questo arco doppio è descritto; perciò può essere scritto in luogo del tempo.

Corollario V:

Di conseguenza, se si dà una qualunqua figura curvilinea APQ e in essa viene dato anche il punto S, verso il quale la forza centripeta continuamente si dirige, si può trovare la legge della forza centripeta, per effetto della quale il qualunque corpo P viene ritratto continuamente dal moto rettilineo e trattenuto entro il perimetro di quella figura, che ruotando descriverà. Ossia: occorre calcolare o il solido $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$ oppure il solido $SY^2 \times PV$, inversamente proporzionali a questa forza.

Lemma XIV

La perpendicolare abbassata dal fuoco di una parabola su una sua tangente, è media proporzionale tra le distanze del fuoco dal punto di contatto e dal vertice principale della figura.

Sia infatti AP la parabola, S il suo fuoco, A il vertice principale, P il punto di contatto, PO l'ordinata al diametro principale, PM la tangente che incontra in M il diametro principale ed SN la perpendicolare dal fuoco ala tangente. Si congiunga AN, e per l'uguaglianza delle MS e SP, MN e NP, MA e AO, le rette AN, OP saranno parallele; perciò il triangolo SAN sarà rettangolo in A, e simile ai triangoli uguali SNM,SNP: quindi PS starà a SN come SN a SA.

Corollario I: PS^2 sta a SN^2 come PS sta a SA.

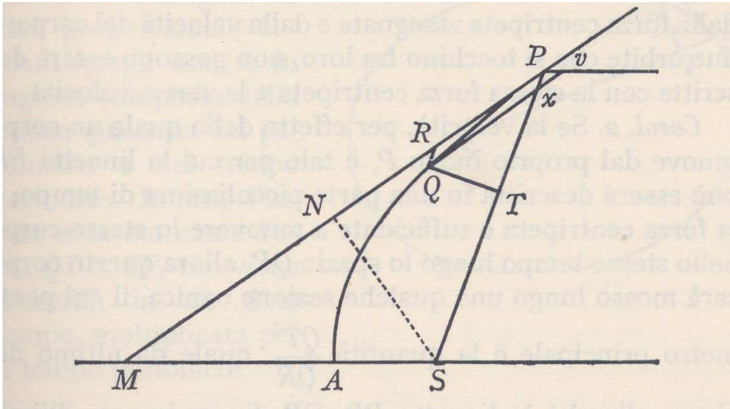
Corollario II: SA essendo data, SN^2 sta come PS

Corollario III: e l'incontro della tangente qualsiasi PM con la retta SN, che è la perpendicolare condotta dal fuoco verso la tangente, cade sulla retta AN che tocca la parabola nel vertice principale.

Proposizione XIII Teorema VIII

Un corpo si muova lungo il perimetro di una parabola: si ricerca la legge della forza centripeta quando tende verso il fuoco di questa figura

Ferma restando la costruzione del lemma, sia P un corpo lungo il perimetro della parabola, e dal luogo Q, verso il quale il corpo si muove, si tiri la parallela QR e la perpendicolare QT a SP, e anche Qv parallela alla tangente,



che incontra il diametro PG in v e la distanza SP in x. Ora, poiché i triangoli Pxv, SPM sono simili, e poiché i lati SM, SP di uno dei triangoli sono uguali, sono uguali anche i lati Px o QR e Pv dall'altro. Ma, per le coniche, il quadrato dell'ordinata Qv è uguale al rettangolo costruito sul perimetro e sul segmento di diametro Pv, ossia (per il lemma XIII) al rettangolo $4PS \times Pv$, o $4PS \times QR$; e coincidendo i punti P e Q, la ragione di Qv a Qx (per il corollario II del lemma VII) è una ragione di uguaglianza. Dunque, Qx^2 è in questo caso uguale al rettangolo $4PS \times QR$. Inoltre (per i triangoli simili QxT,SPN) Qx^2 sta a QT^2 come PS^2 a SN^2, ossia (per il corollario I del lemma XVI) come PS a SA, ossia, come $4PS \times QR$ a $4SA \times QR$; perciò (per la prop IX, lib. V degli Elementi) QT^2 e $4SA \times QR$ sono uguali. Si moltiplichino queste uguaglianze per $\frac{SP^2}{QR}$, $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$ sarà uguale a $SP^2 \times 4SA$: per la qual cosa(per i corollari 1 e 5 della prop.VI) la forza centripeta è inversamente proporzionale a $SP^2 \times 4SA$, ossia, data la 4SA, inversamente proporzionale al quadrato della distanza SP.

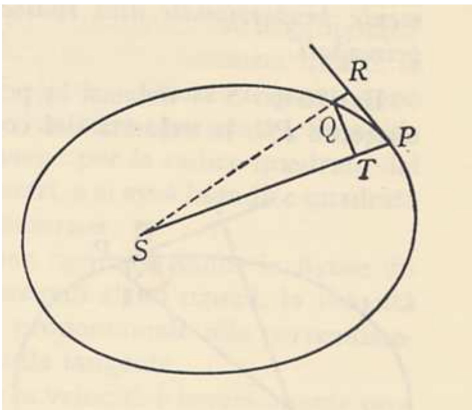
Proposizione XIV Teorema VI

Se più corpi girano intorno ad un centro comune, e la forza centripeta è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dei luoghi dal centro, dico che i parametri principali delle orbite sono proporzionali ai quadrati delle aree che i corpi con i raggi condotti verso il centro, descrivono in tempi uguali.

Infatti (per il corollario II della prop XIII) il parametro L è uguale alla quantità $\frac{QT^2}{QR}$, quale da ultimo diventa quando i punti P e Q coincidono. Ma la linea piccolissima QR è, in un dato tempo, proporzionale alla forza centripeta che la genera, ossia (per l'ipotesi) inversamente proporzionale a SP^2. Dunque $\frac{QT^2}{QR}$ è proporzionale a $QT^2 \times SP^2$, ossia, il parametro L è proporzionale al quadrato dell'area $QT \times SP$

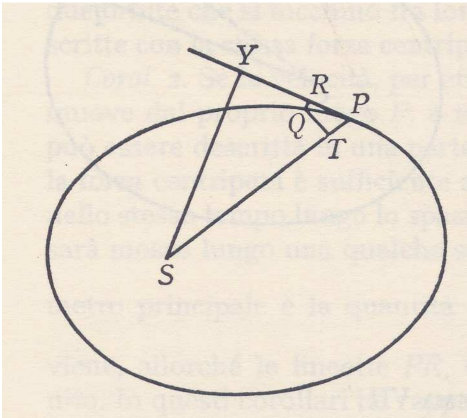
Corollario:

Di conseguenza l'intera area dell'ellisse e il rettangolo ad essa proporzionale costruito sugli assi, è in ragione composta della radice quadrata del parametro e del tempo periodico. Infatti l'intera area sta come l'area $QT \times SP$, che viene descritta in un dato tempo, moltiplicata per il tempo periodico.



Proposizione XVI Teorema VIII

Per le stesse cose, condotte le tangenti alle orbite nei punti occupati dai corpi, e abbassate dal fuoco comune le perpendicolari a queste tangenti, dico che le velocità dei corpi sono inversamente proporzionali a tali perpendicolari e direttamente proporzionali alla radice quadrata dei parametri principali.



Dal fuoco S si abbassi la perpendicolare SY verso la tangente PR, la velocità del corpo P sarà inversamente proporzionale alla radice quadrata della quantità $\frac{SY^2}{L}$.

Infatti quella velocità è proporzionale all'arco minimo PQ descritto in una data particella di tempo, ossia (per il lemma VII) proporzionale alla tangente PR, ossia, per le proporzionalità di PR a QT e di SP a SY, proporzionale a $\frac{SP \times QT}{SY}$, o, inversamente proporzionale a SY e direttamente proporzionale a $SP \times QT$; ma $SP \times QT$ è proporzionale all'area descritta in un dato tempo, ossia (per la prop XIV) proporzionale alla radice quadrata del parametro.

Corollario 1:

I parametri principali sono proporzionali al quadrato delle perpendicolari e al quadrato delle velocità.

Conclusioni

La necessità di assumere come assioma la legge $F = ma$ si presenta nella dimostrazione della proposizione XI del primo libro, in cui si mostra che se la traiettoria descritta dal pianeta è ellittica e il sole occupa uno dei due fuochi allora la forza è inversamente proporzionale al quadrato della distanza.
Una volta accettata la teoria newtoniana si rovescia il problema: la prima legge di Keplero si giustifica sulla base della dinamica assumendo l'espressione trovata sopra della legge di attrazione pianeta-sole. Per convalidare la natura ellittica della traiettoria dei pianeti occorre dunque assumere la legge $F = ma$, nonché la legge dell'inverso del quadrato.

Bibliografia

[1] Aristotele, *Fisica,Del Cielo*, Editori Laterza, 1973.

[2] E. Bellone, *Storia della fisica*, Utet, 1990.

[3] A. Caforio, A. Ferilli, *Nuova Physica 2000*, Volume1, Ed. Le Monnier.

[4] M. De Bartolomeo, V.Magni, *Filosofia: filosofia greca e filosofia romana*, Tomo 1, Ed. Atlas, 2001.

[5] M. De Bartolomeo, V.Magni, *Dall'Umanesimo all'età della scienza*, Tomo 3, Ed. Atlas, 2001.

[6] R. Dugas, Histoire de la Mècanique, Griffon, 1950.

[7] N. Guicciardini, *Newton: un filosofo della natura e il Sistema del Mondo*, Le scienze, 1998.

[8] I. Newton, *Principi matematici della filosofia naturale*, Utet, 1965.