

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

**Analisi della complessità del *voice leading*
di musica polifonica sacra
tramite matrici di permutazione parziale**

Tesi di Laurea in Topologia Algebrica

Relatore:
Prof.
MASSIMO FERRI

Presentata da:
MICHELE PAOLIZZI

Correlatore:
Dott.
MATTIA G. BERGOMI

III Sessione
Anno Accademico 2016-2017

*Il desiderio è la cosa più importante,
è l'emozione del presente;
è l'esser vivi in tutto ciò che si può fare, non solo nell'amore.*

*Il desiderio è quando inventi ogni momento,
è quando ridere e parlare è una gran gioia
e questo sentimento ti salva dalla noia.*

[...]

*è il primo impulso per conoscere e capire,
è la radice di una pianta delicata
che se sai coltivare ti tiene in vita.*

(Giorgio Gaber)

*Se sarete quello che dovete essere,
metterete fuoco in tutto il mondo!*

(S. Caterina da Siena)

*Al prof. Ferri,
che ha avuto il coraggio di condividere il mio desiderio
e mi ha aiutato a "mettere fuoco in tutto il mondo".*

*Al dott. Bergomi,
che ha seguito con attenzione e (com)passione
questo lavoro di tesi.*

*Alla mia famiglia, a Virginia
e ad ogni amico ricevuto,
per il diverso contributo di ognuno,
grande o piccolo,
al mio cammino.*

Indice

Introduzione	v
1 Nozioni musicali preliminari	1
1.1 Teoria musicale	1
1.1.1 Nozioni di base	1
1.1.2 Condotta delle parti	10
1.2 Cenni sulla storia della polifonia sacra	14
1.2.1 La nascita e i primi sviluppi	14
1.2.2 La nuova polifonia: i musicisti fiamminghi	16
1.2.3 La musica del Cinquecento: Riforma e Controriforma	17
1.2.4 Fase intermedia: il basso continuo	21
1.2.5 Bach e il corale	22
2 Modellizzazione matematica	25
2.1 Un approccio geometrico alla musica: Modelli continui	25
2.1.1 Dai toni alle frequenze continue	25
2.1.2 Geometrizzazione dello spazio degli accordi	27
2.2 La condotta delle parti (o <i>voice leading</i>)	29
2.3 Permutazioni parziali	31
2.4 Voice leading e geodetiche definite a tratti	33
2.5 Complessità di un voice leading	38
2.5.1 Esempio: Analisi della complessità di un brano	41
2.6 Indipendenza ritmica e pause	42
2.6.1 Esempio: Analisi di un brano contrappuntistico del 1500	45
2.7 Concatenazione di voice leading e serie temporali	45
2.7.1 Analisi con Dynamic Time Warping (DTW)	47
2.7.2 Clustering gerarchico e rappresentazione tramite dendrogramma	48
3 Metodi e risultati	53
3.1 Algoritmo e metodi utilizzati	53
3.1.1 Gestione di strofe e ripetizioni	53
3.1.2 Elaborazione delle pause	54
3.1.3 Riduzione della specie del contrappunto	54
3.1.4 Calcolo della matrice di permutazione parziale	55

3.1.5	Studio del voice crossing esteso e dell'unisono	55
3.1.6	Analisi tramite DTW e clustering gerarchico	57
3.2	Brani analizzati	58
3.3	Risultati	61
3.3.1	Riduzione della specie del contrappunto	61
3.3.2	Distanze DTW	63
3.3.3	Analisi del clustering gerarchico e dendrogrammi	66
	Metodo di linkage completo	68
	Metodo di linkage singolo	80
	Metodo di linkage medio	90
	Metodo di linkage pesato	101
	Conclusioni e possibili sviluppi futuri	113
A	Tabelle delle distanze DTW	115
B	Codice	157
B.1	Lettura file esterni	157
B.1.1	Lettura file TXT	157
B.1.2	Lettura file MIDI	158
B.2	Riduzione della specie del contrappunto	159
B.3	Analisi del brano	162
B.3.1	Permutazione parziale	162
B.3.2	Script di analisi	166
B.3.3	Norme e DTW	169
B.4	Creazione dendrogramma	171
C	Spartiti	173
	Elenco delle figure	241
	Elenco delle tabelle	245
	Bibliografia	247

Introduzione

Recentemente abbiamo osservato un mutamento drastico tanto nella disponibilità che nella fruizione di contenuti; di conseguenza, la capacità di trattare dati massivi in maniera automatica è divenuta essenziale.

Come Wikipedia permette di accedere a un bacino di informazioni costantemente in crescita (Hahn et al. 2010), abbiamo oggi accesso a una pressoché infinita raccolta di opere musicali. Uno dei problemi aperti di maggior rilievo nel campo del *music information retrieval* (MIR, [Burgoyne, Fujinaga e Downie 2016]) è la classificazione automatica di contenuti, applicata ai fini più svariati, come ad esempio musicologia e raccomandazione.

Chiaramente, la raccomandazione di contenuti è un processo di capitale importanza sia in ambito di puro business (come Spotify®, Google Play® per quanto riguarda la musica, ma anche Amazon® in altro ambito) che a livello molto più alto: algoritmi basati su un processo di apprendimento (come intelligenze artificiali e *machine learning*) sono inequivocabilmente influenzati dalla base di dati da cui apprendono tendenze e schemi ricorrenti.

In questa tesi proponiamo un algoritmo capace di classificare brani musicali a partire dalla loro partitura, che non necessita di alcuna fase di apprendimento. Il nostro approccio si fonda sul lavoro presentato in [Bergomi 2015], [Bergomi, Jadanza e Portaluri 2013], [Bergomi, Jadanza e Portaluri 2014] e [Bergomi, Jadanza e Portaluri 2015], legato a un aspetto formale della composizione di un brano, che è la *condotta delle parti*, in inglese *voice leading*, e abbiamo applicato l'algoritmo a un insieme di brani di musica polifonica sacra scelti tra la fine del Quattrocento e l'epoca di Bach (inizio Settecento).

Quanto fatto è stato studiare la complessità dell'andamento delle composizioni scelte, attraverso la creazione di un vettore (detto *vettore di complessità*) nel quale sono riportate alcune informazioni relative al movimento delle voci del brano in ogni suo passaggio musicale. Il vettore di complessità è costruito a partire da una rappresentazione delle note coinvolte nel passaggio come *multiinsieme*, e una sua successiva schematizzazione come *matrice di permutazione parziale*, che permette una rapida osservazione della complessità.

L'unione dei vettori ottenuti dal brano crea quindi una sua descrizione sintetica, che è possibile confrontare con una sequenza costruita allo stesso modo, utilizzando una serie di strumenti matematico-computazionali come la *Dynamic Time Warping* (DTW), dalla quale si ottiene un valore di dissimiglianza tra i brani analizzati, e il *clustering gerarchico* e la sua visualizzazione in dendrogrammi, per poter osservare i raggruppamenti possibili di un dataset strutturato in tal modo.

Nel primo capitolo è riportata la teoria musicale necessaria per la comprensione dell'aspetto musicale della tesi, sia da un punto di vista teorico, descrivendo nozioni di base e elementi di condotta delle parti, che da un punto di vista storico, riportando una sintesi della storia della polifonia sacra fino a Bach.

Nel secondo capitolo sono riportati gli elementi di modellizzazione matematica di toni, accordi e della condotta delle parti, fino alla definizione del vettore di complessità e all'esposizione teorica degli strumenti matematico-computazionali utilizzati nel corso dell'analisi.

Nel terzo capitolo è infine trattata la parte sperimentale, dalla descrizione degli strumenti tecnici utilizzati fino all'esposizione e il commento dei risultati ottenuti.

Capitolo 1

Nozioni musicali preliminari

Per iniziare a comprendere le forme della musica, occorre iniziare a comprendere anche il suo linguaggio: in questo capitolo cercheremo quindi di dare le nozioni teoriche necessarie per comprendere il contenuto musicale della tesi, per poi dare dei cenni di storia della polifonia sacra.

1.1 Teoria musicale

Nelle seguenti sezioni esponiamo elementi di base di teoria musicale, dall'organizzazione delle frequenze nel temperamento equabile, fino a cenni di armonizzazione e condotta delle parti.

1.1.1 Nozioni di base

Semitoni e toni, scale maggiori e minori Partiamo introducendo la definizione di *ottava musicale*. Il termine ottava designa la distanza tra due suoni le cui frequenze sono fra loro in un rapporto uguale a 2 : 1.¹

L'ottava musicale è molto importante per la cosiddetta *equivalenza tra le ottave*: due suoni distanti un'ottava sono percettivamente molto simili tanto che, se tali suoni si riferiscono a note, esse sono chiamate allo stesso modo; questo è un aspetto importantissimo dell'organizzazione delle intonazioni in musica, che approfondiremo successivamente (una modellizzazione matematica di quest'aspetto sarà esposta nella sezione 2.1.1).

Definiamo poi il *semitono* come una delle 12 parti uguali in cui è suddivisa l'ottava, nonché la distanza minima che può intercorrere fra due suoni, secondo il *temperamento equabile*, che è il sistema di riferimento tonale più utilizzato nel mondo occidentale moderno. Il *tono* è invece il doppio di un semitono.

Da queste definizioni si intuisce che è possibile suddividere l'ottava in base a toni e semitoni; a seconda di come questi vengono disposti lungo l'ottava, si ottengono diverse tipologie di scale, dette anche *modi*. Per ragioni culturali e storiche, nel mondo classico occidentale si sono affermate principalmente due scale, formate da 7 suoni: la scala di modo *maggiore* e la scala di

¹Questo fatto è diretta conseguenza degli studi effettuati sin dall'epoca dei pitagorici sul rapporto tra la lunghezza delle corde e i suoni da loro prodotti quando pizzicate; si rimanda a [Ferguson 2009] e [Comotti 1996] per approfondimenti al riguardo.

Nome italiano	Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si
Nome inglese	C	D	E	F	G	A	B

Tabella 1.1: Nomenclatura delle note, in alto è riportata quella italiana, in basso quella anglosassone.

modo *minore*; la scala minore a sua volta può essere *naturale*, *armonica* e *melodica*.² I suoni che formano la scala sono anche detti *gradi*: il I grado è l'estremo sinistro dell'ottava (cioè il suono più grave), mentre si indica con l'VIII grado l'estremo acuto dell'ottava.

La disposizione di toni e semitoni tra i gradi delle scale citate è la seguente (si abbrevia tono con T e semitono con S):

$$\begin{aligned}
 \text{Maggiore:} & \quad \text{I} \xrightarrow{1\text{T}} \text{II} \xrightarrow{1\text{T}} \text{III} \xrightarrow{1\text{S}} \text{IV} \xrightarrow{1\text{T}} \text{V} \xrightarrow{1\text{T}} \text{VI} \xrightarrow{1\text{T}} \text{VII} \xrightarrow{1\text{S}} \text{VIII} \\
 \text{Minore naturale:} & \quad \text{I} \xrightarrow{1\text{T}} \text{II} \xrightarrow{1\text{S}} \text{III} \xrightarrow{1\text{T}} \text{IV} \xrightarrow{1\text{T}} \text{V} \xrightarrow{1\text{S}} \text{VI} \xrightarrow{1\text{T}} \text{VII} \xrightarrow{1\text{T}} \text{VIII} \\
 \text{Minore armonica:} & \quad \text{I} \xrightarrow{1\text{T}} \text{II} \xrightarrow{1\text{S}} \text{III} \xrightarrow{1\text{T}} \text{IV} \xrightarrow{1\text{T}} \text{V} \xrightarrow{1\text{S}} \text{VI} \xrightarrow{1\text{T}+1\text{S}} \text{VII} \xrightarrow{1\text{S}} \text{VIII}
 \end{aligned}$$

Una scala può essere percorsa sia dal basso verso l'alto che viceversa; per quest'aspetto la scala minore melodica ha una particolarità, perché in ascesa segue un suo andamento specifico, mentre in discesa la distribuzione di toni e semitoni segue quella della scala minore naturale discendente:

$$\begin{aligned}
 \text{Minore melodica:} & \quad \text{I} \xrightarrow{1\text{T}} \text{II} \xrightarrow{1\text{S}} \text{III} \xrightarrow{1\text{T}} \text{IV} \xrightarrow{1\text{T}} \text{V} \xrightarrow{1\text{T}} \text{VI} \xrightarrow{1\text{T}} \text{VII} \xrightarrow{1\text{S}} \text{VIII} \\
 & \quad \text{VIII} \xrightarrow{1\text{T}} \text{VII} \xrightarrow{1\text{T}} \text{VI} \xrightarrow{1\text{S}} \text{V} \xrightarrow{1\text{T}} \text{IV} \xrightarrow{1\text{T}} \text{III} \xrightarrow{1\text{S}} \text{II} \xrightarrow{1\text{T}} \text{I}
 \end{aligned}$$

Si noti che, tranne nel caso della minore naturale, tutte le scale hanno un semitono tra VII e VIII grado: è una proprietà estremamente importante di questo intervallo, che sarà approfondita in seguito.

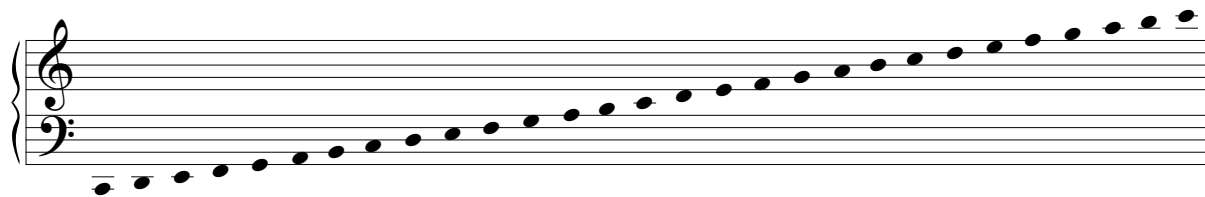
Rappresentazione della musica La storia della musica ha visto nascere le note prima che fosse possibile sia dare loro un nome che rappresentarle in modo univoco.

I primi nomi alle note sono stati dati da *Guido d'Arezzo*, che nell'opera *Micrologus* [d'Arezzo, Colette e Jolivet 1993], le nomina utilizzando la prima sillaba delle righe dell'Inno a san Giovanni Battista di Paolo Diacono (Ut, Re, Mi, Fa, Sol, La). Inoltre è il primo a cercare una rappresentazione univoca delle note, in un sistema formato da righe e spazi (il cosiddetto *rigo musicale*).

Nel corso del tempo, partendo dagli studi di Guido d'Arezzo, si è giunti a una codifica comune dei nomi delle note e ad una loro rappresentazione univoca sul rigo musicale. In tabella 1.1 sono riportati i nomi delle note nella notazione italiana e nell'altra notazione più utilizzata, che è quella anglosassone.

Attualmente per la lettura della musica si utilizza il cosiddetto *pentagramma*, una struttura formata da 5 righe parallele sulla quale vengono disposte le diverse note, nominate con i 7

²Abbiamo specificato che questi modi sono quelli affermatasi nel mondo classico perché, nell'ultimo secolo, sono stati riscoperti e valorizzati altri modi in aggiunta a quelli descritti; si rimanda a [Vincent 1951] per approfondimenti.



Do Re Mi Fa Sol La Si Do Re Mi Fa Sol La Si Do Re Mi Fa Sol La Si Do

Figura 1.1: Le note rappresentate su due pentagrammi, con le chiavi più utilizzate: nel rigo in basso è rappresentata la chiave di basso, per la quale il Fa è indicato dai due puntini che circondano il rigo; in quello superiore è presente la chiave di violino, per la quale il rigo del Sol è indicato dalla conclusione del “ricciolo” interno.

nomi indicati nella tabella 1.1. Queste note sono le note presenti all’interno di un’unica ottava, e gli estremi dell’ottava hanno lo stesso nome, per indicare proprio la stretta correlazione tra le due.

Il pentagramma però non indica a priori la disposizione delle note in modo univoco: occorre infatti un punto di riferimento. Questo ruolo è assunto dalla *chiave* posta all’inizio del pentagramma, ognuna delle quali indica il posizionamento di una nota sulle 5 righe. Sono due le chiavi più largamente utilizzate, cui diamo riferimento rispetto al La avente frequenza uguale a 440Hz:

- La *chiave di violino* indica il posizionamento del Sol distante un tono sotto al La di riferimento;
- La *chiave di basso*, che indica la posizione del Fa distante un’ottava e due toni sotto al La di riferimento.

In figura 1.1 sono riportate le due chiavi in successione, con le diverse note indicate.

Dalla figura 1.1 si possono dedurre alcuni aspetti importanti. Le note riportate sulla chiave di basso non sono le stesse riportate sulla chiave di violino: difatti, partendo dalla prima nota rappresentata a sinistra scorrendo a destra la frequenza di ogni suono cresce, seguendo la definizione di ottava, per cui la frequenza di ogni ottava successiva raddoppia. Quindi, solitamente, si utilizza la chiave di basso per rappresentare le note più gravi (eseguite, ad esempio, dalla mano sinistra sulla parte grave di un pianoforte, o da un basso), mentre la chiave di violino è utilizzata per le note con una frequenza più alta. Il punto di collegamento tra le due chiavi è il Do, posto al centro tra i due righi: è il cosiddetto *Do centrale*.

In alcuni casi si usa una variazione della chiave di violino, specie per il registro vocale del tenore, con un 8 sotto la chiave, ad indicare che le note segnate sul rigo vanno lette un’ottava sotto.

Poiché i nomi delle note sono solo 7, ma si dispongono su diverse ottave, è utile indicare il numero dell’ottava a cui la nota appartiene. La numerazione convenzionale utilizzata in questa tesi è riportata in figura 1.2 nella pagina seguente.

I pentagrammi non sono sufficienti a rappresentare tutte le note eseguibili; per facilitare la lettura si utilizzano i cosiddetti *tagli addizionali*, posti sulle note sotto o sopra il rigo. Ne fanno uso nelle figure precedenti le note più gravi e più acute, e il Do centrale.

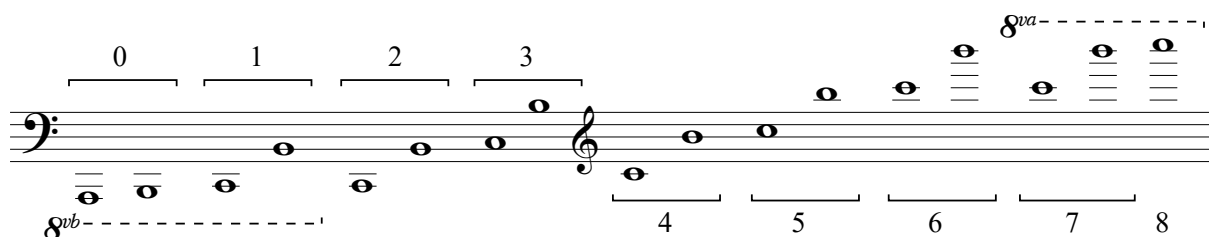


Figura 1.2: Numerazione delle ottave sull'estensione normale di un pianoforte. Il simbolo 8^{vb} indica che le note che sono contrassegnate da questa indicazione sono da leggersi un'ottava più bassa di quanto effettivamente scritto. Analogamente per l'indicazione 8^{va} , che indica una lettura all'ottava superiore.

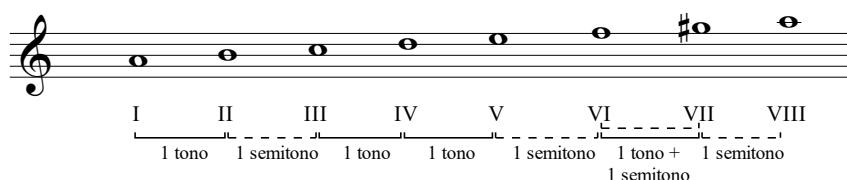


Figura 1.3: Le scale immediatamente osservabili dalla figura 1.1.

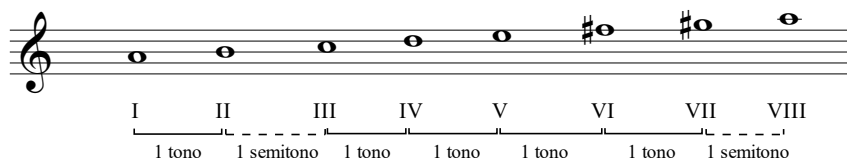
Nelle ottave delimitate dai Do, infine, le note non sono disposte arbitrariamente: difatti la successione di note crea esattamente una scala maggiore. Poiché la scala assume il nome della nota iniziale, seguita dal modo, siamo di fronte a una successione di scale di *Do maggiore*; in figura 1.3a è riportata la struttura tonale rispetto alla scala di Do maggiore. Allo stesso modo, partendo da un La, e arrivando a un La successivo, si osserva una scala minore naturale: si ha quindi la scala di *La minore naturale* (figura 1.3b).

Alterazioni Non esistono, chiaramente, solo le scale di Do maggiore e di La minore naturale: si possono costruire scale su ogni nota e in ognuno dei modi indicati in precedenza. Per poterlo fare però, occorre introdurre le *alterazioni*, simboli preposti a una nota che ne indicano l'innalzamento o l'abbassamento dell'intonazione di un semitono. Le alterazioni principali sono le seguenti:

- Il *diesis* \sharp , indica che la nota davanti a cui è posto è un semitono più alta rispetto all'intonazione naturale;
- Il *bemolle* \flat abbassa l'intonazione della nota di un semitono;
- Il *bequadro* \natural annulla le alterazioni poste in precedenza sulla nota davanti a cui è indicato.



(a) Toni e semitoni rappresentati sulla scala di La minore armonica.



(b) Toni e semitoni rappresentati sulla scala di La minore melodica.

Figura 1.4: Le scale di La minore armonica e melodica.

- Esistono altre due tipologie di alterazioni, il doppio diesis e il doppio bemolle, che hanno lo stesso ruolo delle alterazioni da cui prendono il nome, ma modificano l'intonazione di un tono.

Il fatto che stiamo lavorando nell'ambiente del temperamento equabile fa sì che ci sia equivalenza tra una nota col diesis e il bemolle della nota successiva; per esempio, nella stessa ottava, $La\sharp$ si riferisce allo stesso suono a cui si riferisce Sib .

Avendo introdotto le alterazioni possiamo costruire le scale su ogni nota, rispettando la suddivisione in toni e semitoni di ogni modo. In figura 1.4 sono rappresentate le scale di La minore armonica e melodica, che necessitano di alcune alterazioni per essere rappresentate.

Tonalità Introduciamo ora un concetto fondamentale nella musica: la *tonalità* di un brano musicale.

La tonalità è un sistema di principi armonici e melodici che ordinano gli elementi di un brano (note e accordi, che approfondiremo più avanti) in una gerarchia di percepite relazioni, equilibri e tensioni. Per rendere la definizione più rigorosa, affermiamo che la tonalità di un brano è *conseguenza diretta della scala su cui il brano è principalmente costruito*, e prenderà il nome dalla nota di partenza della scala e dal suo modo, maggiore e minore (trascurando se naturale, armonica o melodica). Di conseguenza, per esempio, un brano sarà detto in *Do maggiore*, se la scala principale su cui è strutturato è il Do maggiore.

Per avere maggiore fluidità di lettura delle tonalità diverse da Do maggiore e La minore, dato il progressivo aumentare delle alterazioni che occorrono, si scrivono le alterazioni caratterizzanti la scala accanto alla chiave, nella cosiddetta *armatura di chiave*, lasciandole sottintese per il resto del brano; le alterazioni tipiche dei modi minori armonici e melodici invece non sono riportate nell'armatura, ma esplicitate man mano. In figura 1.5 nella pagina seguente è riportato un frammento di un brano molto popolare, *Fra Martino*, in diverse tonalità. Il cambiamento della tonalità di un brano, con conseguente abbassamento o innalzamento della linea di note, è detto *trasposizione*.

Fra Mar-ti-no cam-pa-na-ro, dor-mi tu? Dor-mi tu?
(a) *Fra Martino* in Re maggiore.

Fra Mar-ti-no cam-pa-na-ro, dor-mi tu? Dor-mi tu?
(b) *Fra Martino* in Fa maggiore.

Fra Mar-ti-no cam-pa-na-ro, dor-mi tu? Dor-mi tu?
(c) *Fra Martino* in Mi maggiore.

Fra Mar-ti-no cam-pa-na-ro, dor-mi tu? Dor-mi tu?
(d) *Fra Martino* in Mi bemolle maggiore.

Figura 1.5: Frammento di *Fra Martino* riportato in diverse tonalità. Si noti la diversa armatura di chiave di ogni esempio.

Alcune delle tensioni e relazioni che permettono di riconoscere la tonalità sono insite nella costruzione della scala stessa: sono utilizzati infatti nomi specifici per indicare alcuni gradi, che denotano proprio la loro importanza nell'indicare la tonalità.

- Il I grado è anche chiamato *tonica*: la nota che infatti occupa questo grado dà il nome alla tonalità;
- il III è il grado che fa capire il *modo* della tonalità (cioè se maggiore o minore), ed è perciò chiamato *mediante*. Questo perché la distanza tra II e III grado è il primo segno di diversità tra i due modi;
- il V grado è chiamato *dominante*, o anche tonica secondaria; è un altro "centro di gravitazione" molto importante per definire la tonalità;
- infine, il VII è detto *sensibile*, chiamato così a causa della sensazione sonora di incompletezza e tensione alla tonica successiva che la nota in questa posizione genera. Per queste ragioni si prediligono le scale con una distanza tra sensibile e tonica di un semitono, in quanto la tensione è ben maggiore che nella scala minore naturale.

Da questo momento in poi per indicare il nome delle note sarà largamente utilizzata la notazione anglosassone, con al pedice il numero dell'ottava cui la nota appartiene: per esempio al Do centrale corrisponde la notazione C₄.

Valori ritmici e indicazioni di tempo La musica è fatta di note, ma tali note si muovono nel tempo, seguendo un ritmo musicale; ogni nota ha quindi una certa durata o, più precisamente, un *valore ritmico*. Il modo per esprimere tali valori è stato codificato nel corso del tempo; riportiamo in tabella 1.2 nella pagina successiva i valori più frequenti in musica, col loro rispettivo nome. A fianco della nota è anche riportata la pausa ad essa associata.

Un punto alla destra della testa della nota (*punto di valore*) aggiunge alla nota la metà del suo valore.

Sul ritmo musicale non ci soffermiamo molto; diciamo solo che il tempo musicale è scandito dalle *battute*, la cui durata è indicata all'inizio del brano, dopo la chiave e l'armatura di chiave, tramite una coppia di numeri indicata come frazione, il cui denominatore indica il valore


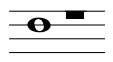


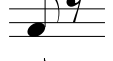

Nota	Nome	Valore
	Breve	$\frac{8}{4} = \frac{2}{1}$
	Semibreve	$\frac{4}{4} = \frac{1}{1}$
	Minima	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
	Semiminima	$\frac{1}{4}$
	Croma	$\frac{1}{8}$
	Semicroma	$\frac{1}{16}$

Tabella 1.2: I valori ritmici usati più frequentemente.



Figura 1.6: Esempi di alcuni tra i ritmi più utilizzati. In ognuna delle battute indicate è rappresentata la quantità di valori ritmici di riferimento che essa può contenere.

ritmico di riferimento, mentre il numeratore indica quanti di quei valori considerare per ogni battuta (figura 1.6). A volte è possibile trovare alcuni simboli che rimandano ad alcune indicazioni ritmiche: ad esempio il simbolo **C** è equivalente all'indicazione di tempo di $\frac{4}{4}$, mentre **C** rappresenta il tempo di $\frac{2}{2}$ o anche di $\frac{2}{1}$ nelle partiture più antiche.

Intervalli Abbiamo già utilizzato il termine intervallo per indicare la distanza tra note: chiamiamo infatti *intervallo* (o salto) la relazione tra due note udite in un unico contesto. Intervalli considerati tra note eseguite simultaneamente si chiamano *armonici*, mentre quelli considerati tra note eseguite in successione sono detti *melodici*.

È possibile descrivere gli intervalli, sia armonici che melodici, dal numero di gradi attraversati per passare da una nota all'altra (considerando quindi anche i gradi di partenza e arrivo). Per esempio, $C_4 \rightarrow G_4$ è un intervallo di quinta, $C_4 \rightarrow D_4$ un intervallo di seconda; $C_4 \rightarrow C_5$ è un intervallo di ottava.

Non è tuttavia una caratterizzazione sufficiente: per esempio, $C_4 \rightarrow D_4$ e $B_4 \rightarrow C_5$ sono entrambi intervalli di seconda, ma il primo è formato da un tono, mentre il secondo da un semitono. Si aggiunge quindi un'ulteriore categorizzazione di intervalli; per tutti gli intervalli si può parlare di intervalli:

- *eccedenti*: $C_4 \rightarrow F\sharp_4$ è una quarta eccedente;
- *diminuiti*. Per esempio $B_4 \rightarrow F_5$ è una quinta diminuita.

Per gli intervalli di I, IV, V e VIII si usa anche il nome di intervallo *giusto*, come $C_4 \rightarrow G_4$ (una quinta giusta). Per i gradi rimanenti (II, III, VI e VII) si parla invece di intervalli:

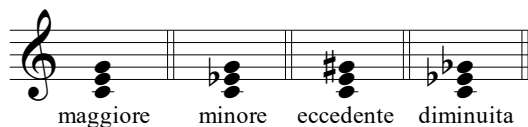


Figura 1.7: Tipologie di triadi. Il nome è dato dagli intervalli caratterizzanti l'accordo: in quella maggiore tra fondamentale e terza c'è un intervallo di terza maggiore, mentre nella minore c'è una terza minore (in entrambe il rapporto tra quinta e fondamentale è una quinta giusta); la triade eccedente ha un intervallo di quinta eccedente tra fondamentale e quinta (la terza è invece maggiore), mentre nella diminuita si tratta di una quinta diminuita (la terza è diminuita).

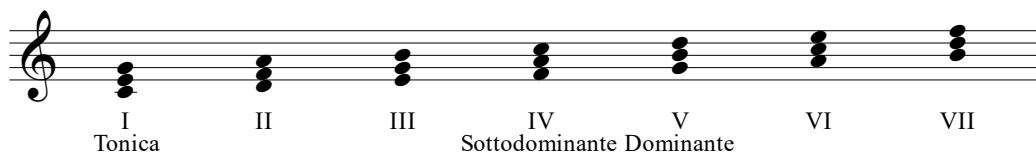


Figura 1.8: Triadi costruite sui gradi della scala di Do maggiore, utilizzando le note presenti nella scala. Il grado è indicato sotto ogni accordo, oltre al nome tradizionale per quelli fondamentali.

- *maggiore*. Ad esempio, $C_4 \rightarrow E_4$ è una terza maggiore;
- *minori*: $C_4 \rightarrow A\flat_4$ è una sesta minore.

Accordi Secondo la definizione tradizionale, un *accordo* è una sovrapposizione di tre o più suoni per ordine di terze (per una sintetica giustificazione di tale affermazione tramite i suoni armonici si rimanda a [Dionisi 1982, pagg. 3-8]).

La prima forma accordale che quindi si ottiene, nonché la più semplice, è la *triade*. A seconda del tipo di intervalli che la costituiscono, la triade può essere maggiore, minore, eccedente o diminuita; i suoni, partendo dal più grave e salendo si chiamano fondamentale, terza, quinta (figura 1.7). Successivamente a questo, è possibile aggiungere sempre più note per ordine di terze per avere le altre tipologie di accordi: settime, none, ecc.

In base a queste definizioni, è possibile costruire accordi su ogni grado della scala, sia utilizzando le note costituenti la scala stessa, che alterandole per ottenere l'effetto o l'andamento desiderato. Se utilizziamo solo le note presenti nella scala otteniamo chiaramente solo un tipo di accordo per ogni grado; nel caso delle triadi, si hanno triadi maggiori per I, IV e V grado, minori per II, III e VI, e diminuite per il VII grado.

Nello studio dell'armonia, per indicare un accordo su un grado della scala, si utilizza il numero del grado precedentemente indicato (figura 1.8); per alcuni accordi, essendo molto importanti per l'armonia, si usa spesso il nome tradizionale del grado, come quello di tonica, sottodominante e dominante.

Oltre al numero del grado, si usa anche una serie di numeri per presentare il tipo di accordo (ad esempio per le settime) e i *rivolti*. I rivolti indicano le varie disposizioni possibili in cui le note possono essere ordinate, utilizzando come riferimento la nota posta più in basso nella nuova disposizione: per le triadi, se al basso è presente la terza dell'accordo, si parla di *primo*

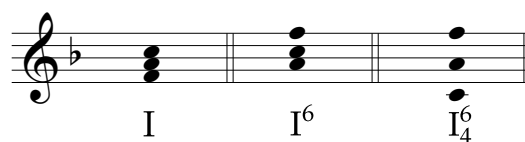
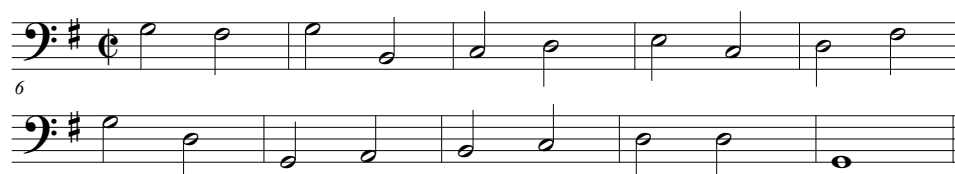


Figura 1.9: Esempi di disposizione di una triade di Fa maggiore: in ordine, allo stato fondamentale, in primo rivolto e in secondo rivolto.



(a) La linea di basso assegnata in partenza.



(b) La realizzazione di una possibile armonizzazione a partire dalla linea di basso.

Figura 1.10: Esempio di armonizzazione su linea di basso. L'esempio è tratto da [Dionisi 1982, pag. 75].

rivolto, e si indica con un 6 accanto al numero di grado; se invece è presente la quinta si tratta di un *secondo rivolto*, rappresentato dai numeri 6 e 4 (figura 1.9).

Armonizzazione A questo punto possiamo approfondire l'utilizzo di queste nozioni nella composizione musicale polifonica.

L'*armonia* è la disciplina musicale che si occupa delle strutture musicali in senso verticale, cioè degli accordi e dei loro rapporti. Si parla di *armonizzazione* di una melodia riferendosi alla costruzione di una struttura armonica su di essa, realizzata secondo un andamento accordale che la melodia suggerisce, seguendo regole e strutture ben definite, alcune delle quali saranno esposte nella sezione 1.1.2. La melodia su cui si armonizza può essere la melodia principale, da arricchire con un'armonia che la valorizzi (come i corali), oppure una linea di basso, come nella tecnica del basso continuo (per approfondimenti su tale tecnica si rimanda alla sezione 1.2.4 di questo capitolo). In figura 1.10 è riportato un esempio di armonizzazione su una linea di basso.

The image displays five examples of counterpoint species, each on a grand staff (treble and bass clefs) in common time (C).
 - **Prima specie:** Shows two voices moving in parallel motion with whole notes, one in the treble and one in the bass.
 - **Seconda specie:** Shows two voices with the treble voice moving in parallel motion and the bass voice moving in contrary motion, using half notes.
 - **Terza specie:** Shows two voices with the treble voice moving in parallel motion and the bass voice moving in contrary motion, using quarter notes.
 - **Quarta specie:** Shows two voices with the treble voice moving in parallel motion and the bass voice moving in contrary motion, using eighth notes.
 - **Quinta specie:** Shows two voices with the treble voice moving in parallel motion and the bass voice moving in contrary motion, using sixteenth notes.

Figura 1.11: Cinque differenti gradi di indipendenza tra le voci: da *nota contro nota* nella prima specie di contrappunto, a un livello di indipendenza completa nella quinta specie. Esempio tratto da [Bergomi 2015, pag. 16].

Si ponga l'attenzione su un aspetto importante: armonizzare un brano non è sinonimo di comporre. La composizione è ben più complessa, e a tratti più libera, di un'armonizzazione.

Contrappunto Nel mondo moderno, il termine *contrappunto* indica la presenza, in una composizione o in una sua parte, di linee melodiche indipendenti che si combinano secondo regole tramandate dalla tradizione musicale occidentale.

Il grado di indipendenza tra le voci in termini ritmici o di intervalli consente una classificazione del contrappunto in cinque specie, rappresentate in figura 1.11. L'armonizzazione di figura 1.10b, per esempio, risulta essere più un contrappunto di prima specie, sebbene in talune parti presenti una complessità da seconda specie.

L'evoluzione del contrappunto nel corso della storia sarà trattato nella sezione 1.2, e alcuni aspetti di costruzione del contrappunto, quelli essenziali, saranno presentati successivamente, parlando di condotta delle parti.

1.1.2 Condotta delle parti

In musica la *condotta delle parti* (o anche *andamento* delle parti) di un brano polifonico è l'andamento che le parti assumono nel corso del tempo, sia rispetto a loro stesse che rispetto alle altre parti che compongono il brano. L'armonia e lo studio del contrappunto forniscono alcuni assiomi teorici per garantire la bontà di un andamento delle parti. Si rimanda a [Aldwell e Schachter 2002, Capitolo 5] per un elenco dei fenomeni che si verificano nel processo di condotta delle parti nella scrittura a quattro voci. Il seguente elenco ha lo scopo di descrivere alcune strategie compositive.

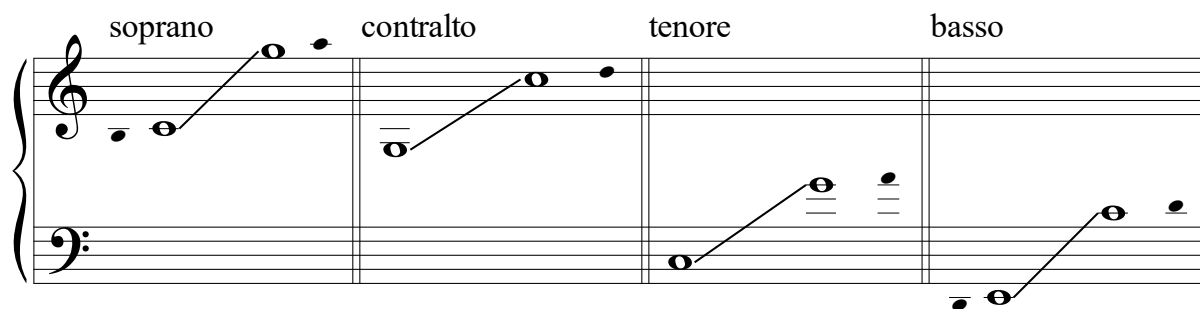


Figura 1.12: L'estensione vocale di soprano, contralto, tenore e basso. Le note più piccole sui lati rappresentano delle estensioni consentite.

Estensione vocale Ogni voce deve essere posizionata in un intervallo nel quale l'esecutore possa cantare senza sforzi eccessivi. La costruzione di una melodia legata a ogni voce deve tenere conto di questa caratteristica. In particolare per le quattro voci più utilizzate nelle composizioni si hanno le seguenti estensioni, rappresentate anche in figura 1.12:

- Soprano: $C_4 \rightarrow G_6$;
- Contralto: $G_3 \rightarrow C_5$;
- Tenore: $C_3 \rightarrow G_4$;
- Basso: $E_2 \rightarrow C_4$.

Raddoppi In generale gli accordi, a meno che non siano di settima o simili, sono triadi; trattando spesso brani a quattro voci, è quindi naturale che una delle note debba essere raddoppiata. In un contesto teorico, le regole per il raddoppio sono formulate sulla base di una sonorità verticale ideale; nella pratica invece i raddoppi sono molto influenzati dal modo in cui le voci si muovono. Di conseguenza, molte delle regole di raddoppio possono essere applicate in modo flessibile, ma solo se in funzione di un buon andamento delle parti. Solo una regola dev'essere considerata assoluta: la sensibile della scala, a causa della sua forte tensione alla tonica, non deve mai essere raddoppiata, specie se è parte di un accordo di V o VII grado o rivolti (vedi figura 1.13 nella pagina successiva).

Accordi completi e incompleti Si ottiene la sonorità verticale migliore quando tutte le note dell'accordo sono presenti. È possibile omettere la quinta negli accordi allo stato fondamentale, in quanto non aggiunge informazioni sul *genere* dell'accordo; di conseguenza, si cerca di raddoppiare il primo grado. La terza è omissibile solo per ottenere effetti particolari.

Distanza tra le voci Un'ampia distanza tra le voci superiori può far risultare la struttura armonica esile, specie se tale distanza è mantenuta per due o tre accordi. Normalmente, voci superiori adiacenti non dovrebbero essere distanti più di un'ottava, mentre è accettata anche una distanza di due ottave tra tenore e basso. Inoltre, il soprano distanziato dalle altre voci o l'eccessiva vicinanza tra tenore e contralto può creare confusione.

(a) Nel passaggio evidenziato dalla linea rossa si osserva un raddoppio della sensibile.

(b) La stessa composizione precedente, ma con tutti i raddoppi corretti.

Figura 1.13: Esempio di raddoppio in caso di accordo con la sensibile.

(a) La prima melodia presenta un intervallo di sesta ben bilanciato da un successivo intervallo di terza. Nella seconda, l'intervallo di sesta non è seguito da uno di moto contrario, causando mancanza di equilibrio.

(b) La prima melodia presenta un salto di ottava bilanciato; la seconda un salto di decima, non consentito.

Figura 1.14: I movimenti per intervalli più ampi della terza necessitano di essere seguiti da un cambio di movimento. (a) presenta il caso della sesta maggiore (analogo è il caso della minore), (b) dell'ottava e di un salto superiore all'ottava.

Intervalli Il grado di complessità di un intervallo dipende dalla sua ampiezza e dalla sua conseguente natura, consonante o dissonante. Riportiamo qui una semplice classificazione:

- Terze maggiori e minori: intervalli consonanti.
- Seste o settime: intervalli dissonanti, solitamente seguiti da un cambio di movimento, in una sorta di controbilanciamento (figura 1.14a).
- Intervalli più ampi di un'ottava non sono permessi, sebbene vengano raramente usati per ottenere elementi di interesse. Anche le ottave vanno bilanciate con un cambio di movimento (vedi figura 1.14b).
- Quarta giusta e quinta giusta: consonanti e seguiti da un cambio di movimento.

Due salti consecutivi nella stessa direzione sono solitamente sconsigliati, fatta eccezione per due salti di terza consecutivi, o uno di terza e uno di quarta giusta, cioè salti che riproducano un accordo, in un qualunque rivolto.

Moto melodico Generalmente la linea del soprano tende a muoversi per grado congiunto, evitando il più possibile intervalli. La linea del basso ha il compito di supportare le altre voci, chiarendo l'armonia del brano; quindi può muoversi anche per intervalli molto ampi. Le voci interne devono completare le note dell'accordo che le linee del soprano e del basso hanno delineato. Quindi, degli intervalli cantati dal soprano aumentano la complessità di una condotta



Figura 1.15: Le classi di movimento per due voci. *Retto*: stesso andamento ma diversi intervalli; *parallelo*: stessa direzione e stessi intervalli; *obliquo*: si muove una voce sola; *contrario*: direzioni opposte.



Figura 1.16: Un esempio di incrocio delle parti, a sinistra, e uno di sovrapposizione all'unisono, a destra.

delle parti, ma la loro completa assenza potrebbe creare melodie statiche e ripetitive, rendendo vuota la struttura armonica.

Moto simultaneo È possibile classificare il moto simultaneo di due voci come segue (vedi figura 1.15 per una rappresentazione intuitiva):

- Moto retto: stessa direzione, intervalli differenti.
- Moto parallelo: stessa direzione e stessi intervalli.
- Moto obliquo: Solo una voce è in movimento.
- Moto contrario: direzioni opposte.

Il moto contrario crea contrasto e indipendenza tra le voci, creando una struttura interessante per l'ascoltatore. Il moto parallelo può essere considerato tra le più potenti tecniche di condotta delle parti, in terze, seste o decime, mentre in alcuni casi limita le possibili configurazioni; da qui il divieto di utilizzarlo per unisoni, ottave e quinte.

Le quinte consecutive e le ottave per moto contrario sono solitamente evitate. Le quinte e le ottave nascoste³ sono da evitare in contesti formati da poche voci, vietate in un brano a due voci. Una trama complessa o un contesto dissonante attenuano l'effetto di quinte e ottave parallele. Vale la regola generale per cui le ottave nascoste sono da evitare nelle voci esterne.

Incrocio delle parti Può accadere che in un moto obliquo o contrario due voci si scambino la posizione; in tal caso si parla di *incrocio delle parti* (vedi figura 1.16). È meno problematico quando accade in voci interne e con tempistiche ridotte.

³Si chiamano *relazioni nascoste* i moti di due voci che le portano a raggiungere un intervallo di quinta, ottava o unisono per moto retto, a prescindere da qualsiasi altro intervallo armonico le stesse costituissero in precedenza.

Sovrapposizione all'unisono In figura 1.16 è riportato anche un esempio di sovrapposizione all'unisono. L'unisono avviene quando una voce si muove, in alto o in basso, verso la stessa nota di un'altra voce adiacente. La differenza tra l'incrocio delle parti e l'unisono è che nel secondo le posizioni relative delle voci sono conservate, ma i loro intervalli si intersecano in due momenti consecutivi. Questa pratica può portare a confondere gli andamenti.

1.2 Cenni sulla storia della polifonia sacra

Semplicisticamente, si è soliti pensare che nella storia ci si sia approcciati alla polifonia seguendo due metodi di composizione nettamente differenti, ognuno racchiuso in un intervallo di tempo ben definito.

Nel primo metodo la polifonia è generata da una esecuzione simultanea di più melodie, più o meno indipendenti (polifonia di andamento *orizzontale*); questo metodo è associato al periodo che va dagli albori della polifonia fino al 1600 circa. Il secondo metodo, legato al periodo dal XVIII secolo in poi (soprattutto a Bach), consiste nel costruire la polifonia *armonizzando* una melodia preesistente (andamento *verticale*).

In realtà non è possibile, anche su basi storiche, né ordinare cronologicamente questi approcci né definirli come tecniche indipendenti.

Segue perciò una breve panoramica della storia della polifonia, concentrandosi sulla storia della polifonia sacra e focalizzandosi in particolare sulle strutture che nascono nel corso del tempo.

1.2.1 La nascita e i primi sviluppi

Non si sa con precisione il luogo di origine del canto simultaneo a più voci, successivamente chiamato *contrappunto* (da *punctum contra punctum*, cioè "nota contro nota"); quello che è certo è che la tecnica polifonica fu coltivata inizialmente nei monasteri dell'Impero Franco, i centri propulsori dello sviluppo del canto gregoriano, in particolare della composizione di *tropi* e *sequenze*, cioè aggiunte di testi o melodie (o entrambi) all'interno del canto liturgico (si rimanda a [Surian 2012, cap. 5], [Mazzi 2008, cap. 1], [Apel 1958], [Chanan 1994] per approfondimenti sul canto gregoriano); anzi, la polifonia è da considerare nelle sue prime fasi come una forma di tropatura musicale. In un primo tempo la parte aggiunta (*vox organalis*, "voce organale") raddoppiava a distanza costante di un'ottava, di una quinta o di una quarta un'altra melodia (*vox principalis*, "voce principale") desunta dal repertorio liturgico: un riempitivo sonoro che poco aggiungeva al canto dato.

I più antichi esempi di polifonia scritta sono contenuti nel trattato *Musica enchiriadis* ("Manuale di musica") della metà del IX secolo, redatto nella Francia settentrionale; ivi è descritto un tipo di polifonia chiamato *organum*, e sono indicate anche le consonanze ammesse: gli intervalli di ottava, quinta e quarta.⁴ La *vox principalis* è duplicata dalla *vox organalis* generalmente alla distanza costante di una quinta inferiore o di una quarta superiore, con possibilità di rad-

⁴Questi intervalli sono di fatto i primi intervalli che i fonologi medioevali potevano individuare sul monocordo ereditato dalle speculazioni musicali dei teorici greci. Si veda [Comotti 1996] per un approfondimento al riguardo.

(a) Esempio di *organum* parallelo, tratto dal brano *Sit gloria Domini*.

(b) Esempio di *organum* libero, tratto dal brano *Rex coeli Domine*.

Figura 1.17: Esempi di *organa* da *Musica enchiriadis*; trascrizione tratta da [Surian 2012].

doppio delle voci all’ottava sopra e sotto, e procedendo perlopiù per moto parallelo. Questo tipo di polifonia è chiamata “*organum* parallelo” (figura 1.17a).

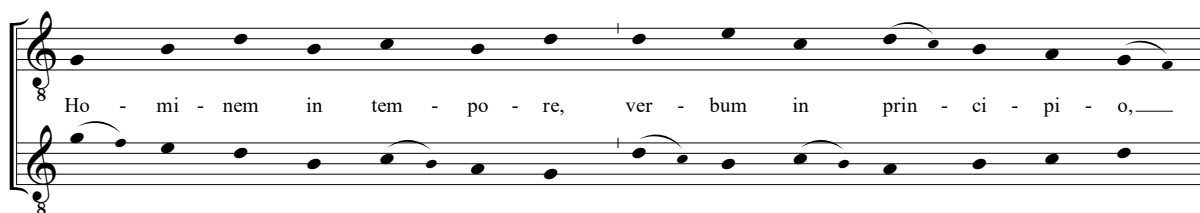
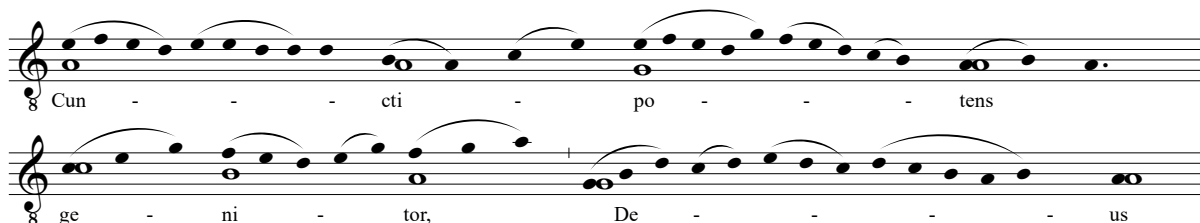
Per evitare intonazioni simultanee di intervalli al tempo ritenuti sgradevoli (come l’intervallo di quarta eccedente, dai cantori definito *diabolus in musica*), *Musica enchiriadis* propone l’uso di unisono e “intervalli imperfetti” (di seconda e di terza), nonché l’introduzione dell’andamento obliquo e contrario delle due melodie. Questo tipo di *organum* è chiamato “*organum* libero” (vedi la figura 1.17b). Questo procedimento in particolare e il moltiplicarsi dei rapporti e delle combinazioni possibili tra le voci vengono ammessi e codificati successivamente tra il X e l’XI secolo dai teorici musicali, tra cui Guido d’Arezzo, che nel *Micrologus* permette l’incrocio delle parti e l’uso degli intervalli di terza e sesta, vedi [d’Arezzo, Colette e Jolivet 1993, cap. 18-19].

Dagli inizi del XII secolo nell’abbazia di San Marziale di Limoges (in Francia Meridionale) e a Santiago de Compostela si pratica un tipo di polifonia chiamata “*organum* melismatico” (da *melisma*, termine che indica un insieme di note su una sillaba sola): per la prima volta le due voci non seguono lo stile di nota contro nota (o *discantus*), ma ad ogni nota della *vox principalis*, posta nella parte inferiore (e ora chiamata *tenor* perché “tiene” la melodia liturgica) ne corrispondono da una a venti nella superiore, che quindi assume un carattere di spicco rispetto al *tenor* (figura 1.18 nella pagina seguente).

In particolare, un *organum* di questo tipo consta di tre elementi: un’iniziale sezione melismatica, il *chorus*, in cui viene ripresa l’originaria struttura monodica gregoriana, e la conclusiva *clausula*, in cui si ritorna alla polifonia, ma dove *vox organalis* e *tenor* assumono una struttura melodico-ritmica di nota contro nota.

Nella seconda metà del XII secolo a Parigi nasce una scuola polifonica, la *scuola di Notre Dame*, che seguirà nel tempo e che produrrà un *corpus* notevole di opere polifoniche. Per la prima volta nella storia della musica europea si possono attribuire a personalità ben distinte le musiche composte, tra le quali ricordiamo le figure di *Leoninus* e *Perotinus*; quest’ultimo in particolare fu il primo a utilizzare nelle sue composizioni più di due voci.

Le composizioni della scuola parigina sono particolarmente complesse rispetto a quelle precedenti: questo è dovuto alla conquistata possibilità di indicare le altezze precise delle note e alla sempre maggiore precisione nell’indicare le proporzioni di durata di ciascuna nota di

(a) Scuola di San Marziale di Limoges, da *Viderunt Hemanuel*; trascrizione tratta da [Surian 2012].(b) Scuola di Compostela, dal *Kyrie*; trascrizione tratta da [Surian 2012].Figura 1.18: Esempi di *organa* melismatici.

ogni voce rispetto alle altre.

Nel XIII secolo, a fianco dell'*organum* melismatico si sviluppano altre forme polifoniche, come il *conductus* e il *mottetto*; in particolare, quest'ultimo nasce dallo stile di scrittura della *clausula* dell'*organum* melismatico, isolata e considerata come pezzo autonomo. Nel nuovo brano polifonico, però, mentre al *tenor* rimane il testo gregoriano originale, alle altre voci (due o tre) vengono aggiunti testi nuovi a volte differenti tra loro, uno per ogni voce.

Oltre a queste forme, si iniziano ad avere nel secolo successivo le prime *messe* interamente composte in forme polifoniche a quattro voci. Si ricorda in particolare *Guillaume de Machaut* (1300-1377), a cui è attribuita la prima Messa di questo tipo, la *Messa di Notre Dame*.

1.2.2 La nuova polifonia: i musicisti fiamminghi

All'inizio del Quattrocento, la tendenza dei musicisti era stata quella di comporre musica utilizzando una polifonia a tre voci, tra le quali era stabilita una gerarchia dove una sola era la parte principale, mentre le altre erano di sostegno. A fine secolo, invece, la polifonia era già divenuta più elaborata e presentava quattro voci tutte della stessa importanza; culla di questa tendenza fu la Borgogna i cui compositori, al fine di supportare questa nuova elaborazione, perfezionarono la tecnica del *canone*, già utilizzata nel 1300 per la musica profana, in particolare in Italia. A poco a poco, il significato della parola "canone" si allarga a dismisura, ed esso comincia ad essere inteso anche in senso più ampio, sia come fuga sia, più genericamente, come *composizione a carattere imitativo*.

Tra le forme utilizzate, la messa continua ad essere, assieme al meno esteso mottetto, quella principale della musica sacra, e grazie ai nuovi compositori segue un continuo sviluppo. La vera novità della messa è che ora le diverse sezioni dell'ordinario⁵ (quelle realizzate in polifonia) vengono costruite su un unico *tenor*, cioè su una stessa melodia di base cui vengono applicate

⁵Si dice ordinario l'insieme dei canti i cui testi rimangono uguali in ogni liturgia, in particolare *Kyrie*, *Gloria*, *Credo*, *Sanctus* e *Agnus*.

tutte le possibilità di elaborazione del canone. Tale melodia però può essere sì tratta dal gregoriano, ma anche da brani profani o addirittura scritti per l'occasione, per dare unità alla messa; una messa di questo tipo è chiamata su *cantus firmus*. Inoltre nasce la *messa-parodia*, basata sulla tecnica dell'utilizzazione di un'intera composizione polifonica preesistente, e non soltanto del suo *tenor*.

Tra i compositori borgognoni ricordiamo in particolare *Guillaume Dufay* (1400-1474), che esercitò la sua professione di compositore in tutta Europa, anche a Bologna, Firenze e a Roma, presso il Papa. Citiamo in particolare il mottetto *Nuper rosarum flores*, scritto nel 1436 per la consacrazione del duomo di Firenze e della cupola del Brunelleschi, composto con raffinato simbolismo matematico.⁶

Nel secondo Quattrocento lo sviluppo della polifonia vocale trova una sua collocazione nelle Fiandre, nelle cui cappelle musicali le premesse estetiche dei borgognoni giungono al massimo dell'artificio della complicazione e dell'elaborazione contrappuntistica.

L'artificio e la complicazione sono determinati dalla moltiplicazione delle voci e da un'ulteriore elaborazione della tecnica del canone: la polifonia dei musicisti fiamminghi è infatti una polifonia piena, caratterizzata da una grande orizzontalità e dallo sviluppo estremo della tecnica della messa su *cantus firmus*.

I più grandi esponenti della scuola fiamminga sono stati *Johannes Ockeghem* (1428-1495), *Jacob Obrecht* (1450-1505) e *Josquin Desprez* (1440-1521). Mentre i primi due perfezionano i modelli polifonici, il terzo collega questo mondo col Rinascimento italiano del primo Cinquecento, mediando la tecnica fiamminga con l'espressività italiana e cercando di recuperare poco per volta il significato del testo in rapporto con la musica, cosa che si era persa nella ostentazione, da parte di molti autori, delle proprie capacità compositive. Per una sintetica ma esauriente descrizione del loro operato, si rimanda a [Hughes e Abraham 1960].

Nelle composizioni fiamminghe, il *tenor* agisce come una sorta di "centro spirituale" della composizione e fornisce la sostanza per tutto il tessuto polifonico; le altre voci ne ricevono un sostegno che non è più qualcosa di estraneo, e vi attingono il materiale tematico. In particolare Desprez sviluppa le possibilità dello stile imitativo, ove lo stesso tema musicale viene successivamente esposto da ciascuna voce. Questo porta a una nuova tecnica compositiva: se prima il compositore pensava alle diverse parti di un'opera successivamente e separatamente, arriva ora a concepirle contemporaneamente. Di conseguenza, si ha una maggiore perfezione nel rapporto reciproco tra le diverse parti.

1.2.3 La musica del Cinquecento: Riforma e Controriforma

Con il Cinquecento inizia la fioritura della polifonia corale. Questa forma artistica, che era stata coltivata con fervore nei secoli precedenti, arriva in Italia e, preparata da grandi maestri come i maestri fiamminghi, qui si trapianta sia attraverso la Scuola Romana, *Palestrina* e i suoi allievi, sia con i maestri originari d'oltralpe (per esempio, gli spagnoli *Morales* e *Victoria* o il fiammingo *Orlando di Lasso*), che avevano studiato in Italia.

⁶Per approfondimenti relativi al simbolismo del mottetto, si rimanda a [Warren 1973], [Wright 1994], [Trachtenberg 2001] e [Gasparini 2009]; per poter osservare lo spartito, è disponibile una versione online nell'archivio IMSLP all'indirizzo [http://imslp.org/wiki/Nuper_rosarum_flores_\(Dufay,_Guillaume\)](http://imslp.org/wiki/Nuper_rosarum_flores_(Dufay,_Guillaume)).

La Riforma: I primi corali

Uno degli eventi storici più importanti della storia religiosa occidentale del XVI secolo è senza dubbio la riforma protestante di *Martin Lutero* (1483-1546), a seguito della quale si ebbe il cosiddetto *Scisma d'Occidente*. Lo Scisma non lasciò indifferente neppure l'ambiente musicale: Lutero incoraggiò (e praticò lui stesso) la composizione di semplici canti monodici, chiamati *corali* (in tedesco *Kirchenlieder*), che il popolo avrebbe dovuto cantare nel corso delle funzioni.

Il corale è quindi un canto monodico in lingua tedesca, caratterizzato da grandissima semplicità, regolarità metrica e da uno spirito quasi popolare, per rendere possibile ai fedeli imparare il brano ad orecchio. L'esecuzione successivamente comincia ad essere affidata anche a cori di cantori professionisti, che utilizzano le risorse tecniche del contrappunto solitamente impiegate nei mottetti (per cui la melodia del corale funge da *cantus firmus*); anche i compositori che iniziano a scrivere corali o brani polifonici basati su corali iniziano ad aumentare. Tra i tanti si ricordano *Johann Walter* (1490-1570), *Hans Leo Hassler* (1564-1612) e *Michael Pretorius* (1573-1621).

La più alta valorizzazione dei corali si avrà poi nella produzione musicale di Bach, che li utilizzerà sia nelle composizioni vocali che in quelle strumentali, contribuendo anche con semplici armonizzazioni a quattro voci (un approfondimento dei corali dal Seicento in poi sarà dato nella sezione 1.2.5 a pagina 22).

La musica della Controriforma: Palestrina e la scuola romana, san Filippo Neri e le laude

Davanti allo Scisma d'Occidente, la Chiesa di Roma percepisce l'urgenza di una riforma e di porre freno alle fratture che all'interno di essa erano sorte. A tal proposito, tra il 1545 e il 1563, la Chiesa romana convoca il *Concilio di Trento*, che rivoluzionerà radicalmente la Chiesa.

Come la Riforma, anche il Concilio e la sua conseguente Controriforma non lascerà indenne la musica: la composizione sacra polifonica avrebbe dovuto essere *depurata da tutti gli artifici* utilizzati a fini esclusivamente musicali e, soprattutto, il significato avrebbe dovuto essere di nuovo prevalente e determinante per sottolineare il valore del testo. Inoltre si ritiene fondamentale la richiesta di recupero del canto gregoriano, anche come base esclusiva per le composizioni liturgiche, lasciando da parte le melodie profane che erano entrate come *cantus firmi* delle composizioni polifoniche.

Giovanni Pierluigi da Palestrina (1525-1594) occupa una posizione centrale nella Controriforma, in quanto incarna lo spirito del Concilio di Trento, pur senza rinunciare alla propria vocazione di polifonista. Il linguaggio polifonico che costruisce, fondato sulla purezza della sonorità vocale e sull'uso controllato di un contrappunto levigato, non si scosta molto dalla maniera tradizionale dei maestri franco-fiamminghi. La sua arte contrappuntistica si sviluppa soprattutto in direzione della intelligibilità delle parole (di cui viene sempre osservata la corretta accentuazione) e di una sonorità ordinata in maniera da evitare l'enunciazione simultanea di testi diversi; nell'andamento delle sue linee melodiche è evidente l'influsso del canto gregoriano.

Il lavoro compositivo di Palestrina, svolto prevalentemente alla corte papale e nelle Chiese romane, si dispiega in primo luogo nel calcolato, accurato ed equilibrato controllo grammaticale della curva melodica delle singole parti. Una decisa andatura lungo una data direzione sarà

The image shows a musical score for the beginning of 'Sicut cervus' by Giovanni Pierluigi da Palestrina. It consists of four staves: Soprano, Contralto, Tenore, and Basso. The music is in G major (one sharp) and common time. The lyrics are: Soprano: Si - cut cer - vus de - si - de - rat ad; Contralto: Si - cut cer - vus de - si - de - rat ad fon - tes a - qua - rum,; Tenore: Si - cut cer - vus de - si - de - rat ad fon - tes a - qua - rum,; Basso: Si - cut.

Figura 1.19: *Sicut cervus*, Giovanni Pierluigi da Palestrina (1525-1594), battute 1-7.

seguita da un movimento nella direzione opposta; un movimento per salti tenderà ad essere controbilanciato da un moto per gradi congiunti (un esempio di questo andamento è il brano *Sicut cervus*, il cui inizio è riportato in figura 1.19). In generale, si può affermare che la dimensione autonoma della condotta delle voci e lo stile imitativo sono tra i tratti più caratterizzanti della scrittura contrappuntistica di Palestrina.

Rigorosa ed equilibrata si rivela anche l'organizzazione delle dissonanze, impiegate con estrema circospezione⁷: l'accurata preparazione e risoluzione delle dissonanze verticali rimane il tratto stilistico che più contraddistingue la polifonia palestriniana.

Tra i compositori della cerchia romana che colsero il rigorismo tecnico del contrappunto di Palestrina vanno ricordati Felice Anerio (1560-1614) e *Tomás Luis de Victoria* (1548-1611), che da giovane si formò a Roma (alla scuola di Palestrina) dove fu attivo per lunghi anni prima di tornare in Spagna.

Se Palestrina è ritenuto il modello per la composizione polifonica sacra, de Victoria è un eccelso discepolo e sviluppatore delle tecniche palestriniane. L'intento del compositore spagnolo è di subordinare interamente ogni raffinatezza contrappuntistica alla resa del senso spirituale del testo. A volte il flusso polifonico imitativo è interrotto da passi in stile omofonico con ripetizioni di note per mettere in evidenza vocaboli o frasi particolari del testo. A differenza di Palestrina, de Victoria non esita a far ricorso a salti melodici inusitati e a utilizzare particolari fluttuazioni accordali, sempre per servire il contenuto emotivo suggerito dal testo (si veda la figura 1.20 nella pagina successiva).

Oltre a queste riforme, in conseguenza della nuova situazione determinatasi con la Controriforma, la Chiesa cattolica cerca di guidare i fedeli ad esercitarsi nella meditazione e nella preghiera per risvegliare in essi lo spirito religioso. Nei luoghi gestiti dai nuovi ordini religiosi dediti all'apostolato e all'istruzione (come i gesuiti) e nelle confraternite, le pratiche devote

⁷Nello stesso periodo in Italia si sta sviluppando il *madrigale*, forma polifonica profana nella quale le dissonanze hanno un ruolo predominante. Le sperimentazioni dei madrigalisti quindi non interessano Palestrina in alcun modo. Si rimanda a [Surian 2012, cap. 11] per approfondimenti sul madrigale e sull'uso della dissonanza da parte dei madrigalisti.

3 voci (Responsorio)

40

Om - nes i - ni - mi - ci me - i ad - ver - sum me co - gi - ta - bant

Om - nes i - ni - mi - ci me - i ad - ver - sum me co -

Om - nes i - ni - mi - ci me - i ad - ver - sum me co -

45

ma - la mi - hi ver - bum in - i - - - quum

- gi - ta - bant ma - la mi - hi ver - bum in - i - quum man -

- gi - ta - bant ma - la mi - hi ver - bum in - i - quum man -

Figura 1.20: *Eram quasi agnus*, Tomás Luis de Victoria (1548-1611), battute 40-49, mottetto tratto dall'opera *Officium Hebdomadae Sanctae*. Si noti alle battute 47-48 (evidenziate) la progressione melodica $F\sharp_4 - F\flat_4 - F\sharp_4$ della seconda voce, che porta a una fluttazione tra gli accordi di Re maggiore e Re minore.

hanno luogo alla sera e generalmente constano di preghiere, di letture spirituali e di quattro *sermoni*, che sono preceduti e seguiti dal canto delle *laude*, un'antica forma devozionale dal contenuto semplice e descrittivo in lingua volgare, che consentiva di comprendere le parole e di prendere parte attiva alla preghiera anche con il canto.

Un forte impulso alla promozione delle pratiche devozionali collettive viene dato a Roma da *San Filippo Neri* (1515-1595). Frequentatissimi sono gli *Esercizi Spirituali* da lui tenuti, nei quali la musica assume un'importanza sempre maggiore. Inizialmente il canto delle laude spirituali era affidato all'assemblea dei fedeli. Le melodie strofiche vengono armonizzate in maniera semplice, quasi tutte a tre voci in stile omofonico, con prevalenza della voce superiore accompagnata *nota contro nota* dalle altre voci (vedi figura 1.21 a fronte); successivamente vengono contattati alcuni compositori per estendere il repertorio. Ben cinque antologie di laude (per un totale di 200 brani) vengono raccolte e curate dal compositore spagnolo *Francisco Soto de Langa* (1534-1619), stretto collaboratore di San Filippo Neri.

Questo oratorio diventerà la base dell'oratorio del Seicento, più vicino al melodramma che alla polifonia in senso stretto, che a sua volta ispirerà Handel e Bach nella costruzione dei loro monumentali oratori.

L'unicum della scuola veneziana

Mentre i compositori della scuola romana mettevano al servizio dell'espressione del testo sacro le risorse del contrappunto ordinato e dello stile vocale *a cappella* intenzionalmente omogeneo

Canto
Giù per la ma - la vi - a l'a - ni - ma mia ne va:

Alto
Giù per la ma - la vi - a l'a - ni - ma mia ne va:

Basso
Giù per la ma - la vi - a l'a - ni - ma mia ne va:

Figura 1.21: *Giù per la mala via*, tratto dal *Terzo libro delle laudi spirituali stampate ad istantia delli Reverendi Padri della Congregazione dell'Oratorio*, del 1577.

ed equilibrato, i maestri che operavano a Venezia ponevano invece al centro del loro interesse la coltivazione di uno stile musicale discontinuo e composito, fondato in prevalenza sul contrasto dei colori timbrici e sonori (vocali e strumentali). Lo sfruttamento sonoro di raggruppamenti corali diversi ed equivalenti (tecnica chiamata *policorale* o dei *cori spezzati*) si era verificato nell'area veneta fin dagli inizi del XVI secolo. Studi recenti hanno suggerito che la pratica dei cori spezzati facesse da tempo parte intrinseca della tradizione musicale veneziana e della basilica di san Marco in particolare. L'utilizzazione di questa tecnica fu probabilmente sollecitata proprio dalla presenza in San Marco di due cantorie absidali opposte l'una all'altra (si veda [Quaranta 1998] per uno studio approfondito riguardo all'ambiente musicale veneziano).

Se per la polifonia di ascendenza franco-fiamminga il *contrasto sonoro* era sporadico e ridotto all'alternanza tra contrappunto imitativo e passi in stile omofonico, per i maestri veneziani i registri e i timbri diversi di voci e strumenti costituiscono gli elementi essenziali che determinano i contrasti sonori.

Tra i maestri della scuola veneziana si citano in particolare *Adrian Willaert* (1490-1562), compositore fiammingo ritenuto il fondatore della tecnica policorale, *Andrea Gabrieli* (1533-1585), a cui va il merito di aver arricchito la tecnica dei cori spezzati di una maggiore varietà di effetti sonori mediante dialoghi più serrati tra coro e coro, e *Giovanni Gabrieli* (1557-1612), nipote di Andrea. In particolare, le opere dei Gabrieli ebbero notevole diffusione, e influenzarono l'opera di tantissimi autori successivi, tra i quali ricordiamo *Claudio Monteverdi*, compositore veneziano del Seicento, ritenuto uno dei fondatori dell'opera lirica e un punto di passaggio fondamentale tra la musica Rinascimentale e la musica Barocca.

1.2.4 Fase intermedia: il basso continuo

Tra Cinquecento e Seicento, nell'ambiente della musica profana, avviene un grande cambiamento, che avrà notevoli ripercussioni su tutta la musica, anche quella sacra. L'esigenza di giungere alla totale adesione tra musica e testo determina progressivamente importanti modifiche interne al madrigale, spingendolo a poco a poco verso la definitiva *eliminazione della polifonia* in favore della monodia accompagnata che, secondo i teorici e i compositori dell'epoca, meglio riusciva a rendere i concetti e i sentimenti. Inoltre spesso le composizioni polifoniche si riducevano nella pratica a brani per una voce sola accompagnata da uno strumento in grado di raggruppare tutte le altre, che si trasformavano quindi in *accordi di sostegno*.

Questi elementi ora vengono connessi in una diversa prospettiva musicale. Perché ancora, infatti, in quei casi la musica nasceva polifonica, con tutte le voci concepite in senso orizzontale, mentre ora i brani sono costituiti da una sola voce che procede in senso *orizzontale*, accompagnata da un sostegno che procede in senso *verticale* e accordale. Questa modalità di accompagnamento è realizzata nel *basso continuo*: la realizzazione di una linea di basso sulla quale vengono indicati coi numeri gli accordi di sostegno alla linea melodica. Ogni nota del basso infatti, secondo la teoria degli armonici, contiene tutte le note dell'accordo, che non è quindi necessario scrivere per esteso ma è sufficiente *indicare con numeri* che ne identificano il tipo (vedi figura 1.22 nella pagina successiva).

Il basso continuo sembra slegato dalla storia della polifonia, in quanto tratta di un aspetto sì legato al canto, ma ad un canto monodico accompagnato da strumenti. In realtà questo ha due conseguenze fondamentali: la prima è che lo sviluppo della polifonia, come era stata intesa fino al Cinquecento, nel XVII secolo ha come una *battuta d'arresto*, lasciando la polifonia sacra quasi inalterata nelle sue strutture, mentre nella musica profana, quando si fa uso di polifonia, si cerca una scrittura più semplice; la seconda è che il metodo di armonizzazione del basso continuo, per la sua efficacia sintetica, verrà utilizzato anche per indicare l'armonizzazione di brani polifonici o su un basso o su un *cantus firmus*, come può essere la melodia di un corale, per esempio.

In particolare quest'ultima è stata teorizzata e canonizzata successivamente partendo dallo studio dei corali composti da Bach, di cui si parlerà nella sezione successiva.

1.2.5 Bach e il corale

Come già detto nella sezione 1.2.3, i corali luterani (*Kirchenlieder*), già poco dopo la loro comparsa iniziano ad essere realizzati a più voci; nato come canto comunitario, il corale trova così una varietà di applicazioni in diversi generi di composizioni sia vocali (nelle forme di mottetti, cantate, passioni, oratori) che strumentali (pezzi organistici) che si sviluppano nell'ambito della musica sacra luterana.

Molti compositori luterani del XVI secolo esercitano la loro bravura compositiva nei mottetti in stile *cantus firmus*, dove la melodia del corale viene intrecciata nella trama contrappuntistica. La tradizione luterana aveva imposto da sempre l'uso di un linguaggio musicale severo e austero che aveva le sue radici nello stile polifonico rigoroso dei maestri franco-fiamminghi. Ai musicisti era pertanto richiesto di possedere una padronanza tecnica assoluta del contrappunto lineare severo e dell'arte della variazione. L'ambiente musicale della Germania protestante di certo si distingueva stilisticamente dalla cultura musicale delle regioni tedesche di fede cattolica, aperte agli influssi del linguaggio operistico internazionale d'impronta italiana, che privilegiava invece una scrittura sfrondata di elementi contrappuntistici.

In questo ambiente si ritroverà a lavorare il celeberrimo compositore *Johann Sebastian Bach* (1685-1750), quando nel 1723 si trasferisce a Lipsia prendendo il posto di *Kantor* nella chiesa di S. Tommaso. Per gli storici della musica, Bach è essenziale per il lavoro di sintesi effettuato nelle sue opere: la sua musica sorprende per la capacità di unire l'espressione delle emozioni con architetture musicali complesse e originali, costantemente rinnovate in uno sforzo di ricerca continuo.

Non pian-go e non so - spi-ro O mia ca - ra Eu ri - di - ce, Ché so-spi-rar, ché la-gri-mar non

b.c. # 4 4 2 1 # 6 #

pos - so Ca-da - ve-ro_in - fe-li - ce. O mio co - re,_o mia spe - me, o pa - ce,_o vi - ta!

#

(a) Linea cantata e basso numerato.

Non pian-go e non so - spi-ro O mia ca - ra Eu ri - di - ce, Ché so-spi-rar, ché la-gri-mar non

b.c. # 4 4 2 1 # 6 #

pos - so Ca-da - ve-ro_in - fe-li - ce. O mio co - re,_o mia spe - me, o pa - ce,_o vi - ta!

#

(b) Linea cantata e realizzazione del basso continuo.

Figura 1.22: Brano tratto da *Euridice*, melodramma musicato da Jacopo Peri (1561-1633); trascrizione tratta da [Surian 2012].

The image shows a musical score for a four-part chorale. It consists of four staves: Soprano (top), Contralto, Tenore, and Basso (bottom). The music is in C major and common time (C). The lyrics are written below each staff. The lyrics are: 'Wer nur den lieben Gott läßt walten, Und hof-fet auf Ihn al-le-zeit / Se Tu m'ac-co-gli, Pa-dre buo-no, pri-ma che ven-ga se-ra'. The score shows the first five measures of the piece.

Figura 1.23: *Wer nur den lieben Gott läßt walten* (*Se Tu m'accompigli*), Johann Sebastian Bach (1685-1750), battute 1-5.

In una straordinaria *sintesi stilistica* Bach ha creato un modello in cui l'intensità e la sapienza del linguaggio musicale si fondono in modo mai convenzionale o freddo. Il compositore, il cui monumentale catalogo comprende tutti i generi tranne il melodramma (di cui però usa alcune forme), riassume tutte le esperienze e gli stili musicali della sua epoca (italiano, francese e tedesco a seconda dei generi affrontati) e rivisita il passato attraverso il filtro del suo genio.

A Lipsia, Bach compone la maggior parte del suo repertorio sacro, se non tutto. Sul modello di altri grandi compositori luterani, compone diverse centinaia di cantate sacre da eseguirsi nel corso delle funzioni liturgiche. In generale esse sono caratterizzate dalla successione di più sezioni: un brano strumentale di introduzione, una serie di pezzi solistici con orchestra o con basso continuo, uno o più cori in stile mottettistico (cioè a carattere imitativo-contrappuntistico) e, ovviamente, il corale.

Come già accennato, l'opera di Bach è un'opera di sintesi di stili e forme. Allo stesso modo, i suoi corali (e più in generale i suoi brani polifonici) rappresentano una *summa* dell'estetica musicale maturata fino ai suoi tempi: l'andamento delle parti che scrive segue i criteri che Palestrina applicava per scrivere le sue opere, e la struttura armonica che genera è assolutamente naturale e riscontrabile nel passato, solo che ora risulta essere codificata e costante in ogni suo brano, e non più frutto di un semplice senso estetico comune.

L'opera di Bach è stata studiata nel secolo successivo, ponendo le basi dell'armonia moderna; infatti le regole sulla condotta delle parti e sull'armonia, in parte riportate nella sezione 1.1.2, sono state desunte dallo studio della sua polifonia; se infatti si osserva, ad esempio, l'inizio del corale *Wer nur den lieben Gott läßt walten* (figura 1.23), si può notare come ogni voce e ogni armonia seguano esattamente tali regole.

Capitolo 2

Modellizzazione matematica

In questo capitolo verranno presentati gli strumenti matematici utilizzati per l'analisi, partendo innanzitutto dalla modellizzazione dello "spazio musicale" su cui si opera, proseguendo nella definizione del *voice leading* e di tutti gli strumenti necessari per analizzarne la complessità.

Per la stesura di questo capitolo si è largamente attinto da [Bergomi 2015], cui rimandiamo per eventuali approfondimenti.

2.1 Un approccio geometrico alla musica: Modelli continui

In questa prima sezione riportiamo dei modelli matematici per melodie e armonie musicali; per il modello armonico ci si riferisce a studi quali [Tymoczko 2011].

2.1.1 Dai toni alle frequenze continue

Considerando il temperamento equabile, data la frequenza fondamentale ν di una nota è possibile rappresentare la sua intonazione (o *pitch*) come un numero reale attraverso la funzione $p : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$p(\nu) = 69 + 12 \log_2 \left(\frac{\nu}{440} \right) \quad (2.1.1)$$

D'ora in poi per riferirci all'intonazione di una nota useremo il corrispettivo inglese *pitch*.

La maggior parte degli esseri umani riesce a percepire non le frequenze assolute delle note, bensì il loro rapporto. Questo suggerisce che un concetto di distanza nello spazio matematico delle note debba essere definito in termini di rapporti tra le loro frequenze fondamentali. L'equazione (2.1.1) ci consente di lavorare con semplici sottrazioni (molto più maneggevoli rispetto ai rapporti).

È quindi ragionevole interpretare lo *spazio dei pitch* come lo spazio metrico (\mathbb{R}, d) , dove d è la distanza indotta dal valore assoluto: $d(p, q) := |p - q|$. Si osservi che questo modello implica l'esistenza di una infinità di note tra due pitch p e q (come il *glissando continuo* di un trombone o di una voce umana, per esempio); comunque i valori corrispondenti alle note effettivamente suonate in musica sono di fatto specifici numeri *interi*. Questo è dovuto alla scelta di lavorare nello spazio del temperamento equabile, in cui l'ottava è suddivisa in 12 sottointervalli di

Numeri delle note												
Ottava	C	C♯	D	D♯	E	F	F♯	G	G♯	A	A♯	B
0	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
1	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
2	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
3	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
4	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
5	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83
6	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95
7	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107
8	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119
9	120	121	122	123	124	125	126	127				

Tabella 2.1: Tabella che associa ogni nota al pitch corrispondente, seguendo la convenzione sulle ottave utilizzata in questa tesi e indicata nella figura 1.2 a pagina 4.

uguali dimensioni; in questo modo il rapporto tra due semitoni consecutivi è sempre $\sqrt[12]{2}$. In tabella 2.1 sono indicati i pitch associati alle diverse note.

Si assume quindi che le traiettorie continue tra note (rappresentate come punti dello spazio) siano cammini da uno stato discreto dello spazio all'altro, in quanto sono definite dalla stessa accordatura.

Per poter effettuare un'analisi più profonda, consideriamo la *classe dei pitch*, ottenuta identificando i pitch modulo ottava:

$$[p] = \{p + 12k \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad (2.1.2)$$

Questo significa prendere lo spazio quoziente $\mathbb{R}/12\mathbb{Z} \cong S^1 =: \mathbb{T}^1$, che dotiamo della distanza

$$\bar{d}([p], [q]) := \min\{|p - q| \mid p \in [p], q \in [q]\}$$

Chiamiamo quindi (\mathbb{T}^1, \bar{d}) lo *spazio delle classi dei pitch*.

Grazie a queste definizioni, è possibile ora modellizzare elementi armonici, come gli accordi. Sono stati pubblicati diversi studi relativi a una descrizione geometrica dello spazio degli accordi (si veda [Tymoczko 2006], [Tymoczko 2008], [Callender, Quinn e Tymoczko 2008], [Tymoczko 2011]).

Come visto già nella sezione 1.1.1, in musica un *accordo* è una sovrapposizione di tre o più suoni per ordine di terze; è però frequente trovare accordi con i gradi non disposti in modo canonico, oppure senza qualcuno di essi. Da un punto di vista generale, è quindi ragionevole considerarlo come l'esecuzione simultanea di due o più note (in generale n) modulo ottava; tradotto in linguaggio matematico, un accordo è quindi una n -upla di numeri reali (cioè un punto di \mathbb{R}^n). Poiché in armonia non si tiene conto delle ottave quando si studia la relazione tra accordi o note, noi ragioniamo in termini di classi di pitch.

Quindi, una n -upla di classi di pitch è, inizialmente, un punto del toro n -dimensionale \mathbb{T}^n . Comunque, gli accordi in cui ci sono note (o classi di pitch) permutate sono considerati equivalenti da un punto di vista armonico; di conseguenza, se ignoriamo l'ordine con cui le

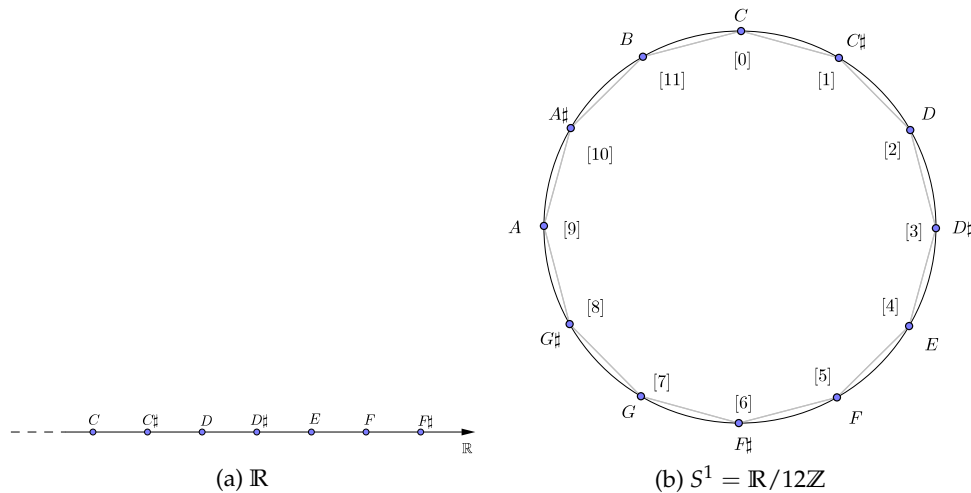


Figura 2.1: Lo spazio lineare dei pitch e quello delle classi di pitch.

note sono disposte, otteniamo il quoziente di \mathbb{T}^n rispetto al gruppo simmetrico \mathcal{S}_n , e giungiamo alla definizione matematica di accordo.

In quanto segue assumiamo sempre $n \geq 2$.

Definizione 2.1.1 (spazio n -dimensionale dei pitch). Una n -upla di note (p_1, \dots, p_n) , dove $P = \{p_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{Z}_{12}$ è, un punto dello spazio

$$\mathbb{T}^n = (\mathcal{S}^1)^n$$

Poiché vogliamo trascurare l'ordine con cui le note sono elencate in P , si ottiene la seguente definizione:

Definizione 2.1.2 (Spazio degli accordi). Un accordo è un punto dello spazio

$$\mathbb{A}_n = \mathbb{T}^n / \mathcal{S}_n,$$

dove \mathcal{S}_n è il gruppo simmetrico, che agisce permutando le coordinate:

$$\sigma(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

2.1.2 Geometrizzazione dello spazio degli accordi

Il toro n -dimensionale può essere visto come lo spazio quoziente

$$\mathbb{T}^n \cong \mathbb{R}^n / (12\mathbb{Z})^n$$

Poiché l'azione di $(12\mathbb{Z})^n$ su \mathbb{R}^n non ha punti fissi, la funzione $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ è una proiezione di rivestimento, e quindi conserva la topologia locale. In più, il gruppo simmetrico \mathcal{S}_n agisce sul toro n -dimensionale attraverso diffeomorfismi (isometrie), che permutano le coordinate di ogni punto. Così \mathbb{A}_n eredita la struttura di spazio metrico da \mathbb{T}^n ; inoltre, poiché è stato ottenuto da una varietà differenziabile (*manifold*) attraverso l'azione di un gruppo finito, è anche un

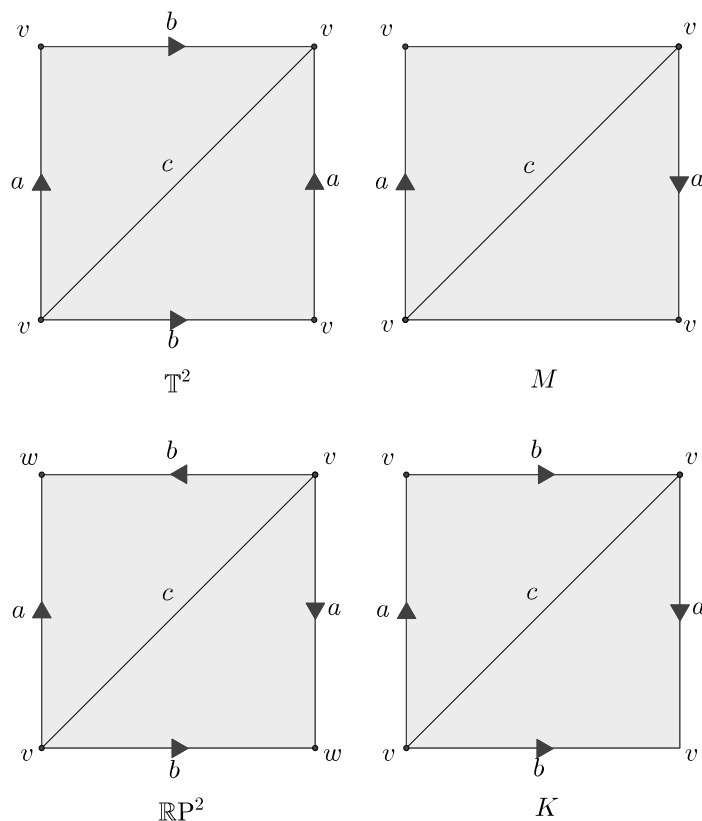


Figura 2.2: I *gluing diagram* del toro \mathbb{T}^2 , del nastro di Möbius M , del piano proiettivo \mathbb{RP}^2 e della bottiglia di Klein K .

orbifold (per i dettagli su questo argomento si rimanda a [Thurston 2002]). Comunque \mathbb{A}_n non è un manifold differenziabile, perché i punti fissati dall'azione di \mathcal{S}_n sono *singolarità*.¹

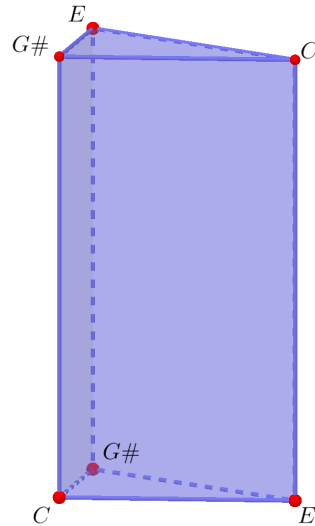
Ricordiamo ora rapidamente la definizione di *gluing diagram*, oggetto standard in topologia: una raccolta di poligoni topologici, i cui lati sono etichettati e orientati. Tale diagramma rappresenta lo spazio ottenuto incollando (*gluing*) i lati etichettati con le stesse lettere, seguendo l'orientamento indicato. Oggetti geometrici come il toro \mathbb{T}^2 , il nastro di Möbius M , il piano proiettivo \mathbb{RP}^2 e la bottiglia di Klein K possono essere ottenute incollando due triangoli come in figura 2.2.

Il risultato successivamente descritto è stato dimostrato in [Slavich 2010] e fornisce una caratterizzazione geometrica degli spazi degli accordi:

Teorema 2.1.1. *Lo spazio degli accordi \mathbb{A}_n è uno spazio metrico, ottenuto incollando le basi tetraedriche $(n - 1)$ -dimensionali di un prisma retto n -dimensionale, attraverso la relazione di equivalenza indotta da una permutazione ciclica dei vertici.*

È possibile caratterizzare i punti dello spazio degli accordi considerando il numero di classi di pitch ripetute che contengono. Per esempio, i punti dello spazio \mathbb{A}_3 rappresentati nella figura 2.3 nella pagina successiva sono strutturati come segue:

¹Un punto di \mathbb{A} è *singolare* se almeno 2 delle sue coordinate hanno lo stesso valore: in questo caso l'azione del gruppo di permutazione ammette punti fissi.

Figura 2.3: Lo spazio \mathbb{A}_3 .

- I punti che rappresentano accordi senza classi di pitch ripetute sono nella parte interna del prisma \mathbb{A}_3 .
- Gli accordi i cui rappresentanti sono tuple della forma (x, x, y) sono sulle facce bidimensionali del prisma.
- Gli spigoli del prisma sono costituiti da unisoni (modulo ottava).

La condotta delle parti tra due accordi di n note può essere rappresentata come una traiettoria nello spazio degli accordi. Le frontiere singolari del prisma agiscono come specchi sulla traiettoria (questa particolare proprietà dello spazio degli accordi sarà discussa più dettagliatamente nella sezione 2.4).

Intuitivamente, è possibile pensare a questi riflessi in una rappresentazione semplificata del tavolo da biliardo orbifold della figura 2.4 nella pagina seguente.

2.2 La condotta delle parti (o *voice leading*)

È possibile, in generale, descrivere una melodia come una sequenza finita di coppie ordinate di pitch o classi di pitch $(p_i, p_{i+1})_{i \in I}$, dove I è un insieme finito di indici. Al fine di modellizzare matematicamente la condotta delle parti è necessario introdurre prima il concetto di *multiinsieme* (approccio già considerato in [Tymoczko 2006]).

Definizione 2.2.1 (Multiinsieme). Un *multiinsieme* M è una coppia (X, μ) composta da un insieme *soggiacente* X e una funzione $\mu : X \rightarrow \mathbb{N}$, detta *molteplicità* di M , tale che per ogni $x \in X$ $\mu(x)$ è il numero di volte che x compare in M .

Si definisce infine la *cardinalità* $|M|$ di M come

$$|M| = \sum_{x \in X} \mu(x)$$

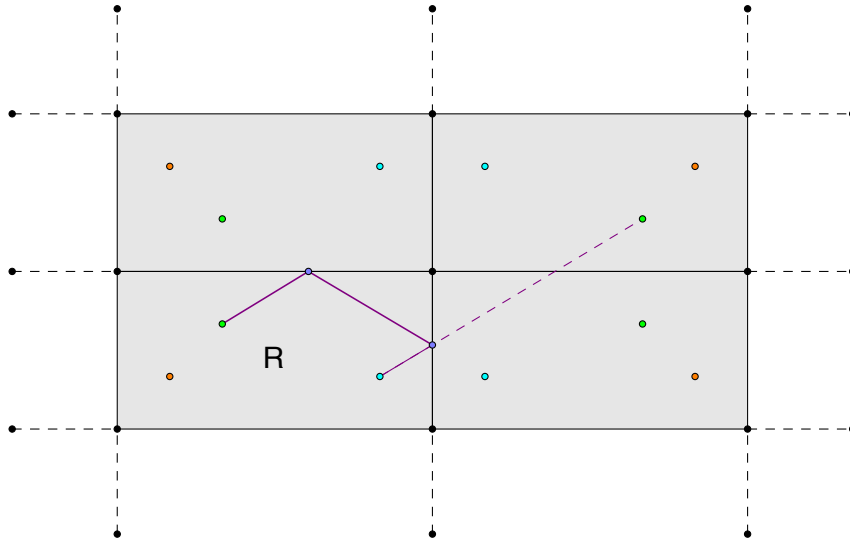


Figura 2.4: Il tavolo da biliardo orbifold è generato dal gruppo di isometrie di \mathbb{R}^2 che riflettono un rettangolo lungo i suoi quattro lati. I bordi del rettangolo R agiscono come specchi sulla traiettoria tratteggiata.

Esempio 2.2.1. Consideriamo $L = [a, a, a, b, b, c]$. L'insieme soggiacente di L è $X = \{a, b, c\}$, la funzione μ assume i valori $\mu(a) = 3$, $\mu(b) = 2$, $\mu(c) = 1$ e la cardinalità di L è $|L| = 6$.

Si osservi che, di fatto, un multiinsieme è totalmente definito dalla sua funzione di molteplicità: è quindi sufficiente definire

$$M := (\text{dom}(\mu), \mu)$$

Definizione 2.2.2. Siano L e M due multiinsiemi finiti, tali che $|L| = |M|$. Una *biiezione* tra L e M è il multiinsieme $\Phi \subset L \times M$ tale che

$$\Phi = \{(l_1, m_1), \dots, (l_n, m_n)\}$$

dove $L = \{l_1, \dots, l_n\}$ e $M = \{m_1, \dots, m_n\}$.

Se interpretassimo un insieme di n voci (o parti strumentali, o entrambe), come un multiinsieme di pitch di cardinalità n , una condotta delle parti potrebbe essere matematicamente descritta come segue:

Definizione 2.2.3 (Condotta delle parti). Siano $M := (X_M, \mu_M)$ e $L := (X_L, \mu_L)$ due multiinsiemi di pitch con la stessa cardinalità n e si ordinino i loro elementi in n -uple (x_1, \dots, x_n) e (y_1, \dots, y_n) , rispettivamente².

Una condotta delle parti (o *voice leading*) di n voci tra M e L , indicato con

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (y_1, \dots, y_n)$$

è il multiinsieme

$$Z := \{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$$

²Queste sono infatti le immagini di due funzioni biietive $\psi_M : \{1, \dots, n\} \rightarrow M$ e $\psi_L : \{1, \dots, n\} \rightarrow L$, dove M e L sono intesi come "insieme" con possibili elementi ripetuti.

il cui insieme soggiacente è $X_Z := X_M \times X_L$ e la cui funzione di molteplicità μ_Z è definita di conseguenza, contando la frequenza di ogni coppia ordinata.

D'ora in poi faremo riferimento alla condotta delle parti col termine corrispettivo inglese "voice leading".

Osservazione 2.1. Si osservi che la definizione appena enunciata non è legata al tipo di oggetto (in questo caso i pitch): è possibile descrivere i voice leading anche attraverso le classi di pitch, per esempio.

Si noti che è anche possibile descrivere un voice leading come una funzione biiettiva dal multiinsieme M al multiinsieme L , cioè come una *permutazione parziale* del *multiinsieme unione*

$$M \cup L := (X_M \cup X_L, \mu_{M \cup L})$$

dove

$$\mu_{M \cup L} := \max\{\mu_M \chi_M, \mu_L \chi_L\}$$

e χ_M e χ_L sono le funzioni caratteristiche rispettivamente di X_M e X_L .³

2.3 Permutazioni parziali

Definizione 2.3.1 (Permutazioni parziali). Una *permutazione parziale* di un insieme (o multiinsieme) finito S è una biiezione tra due sottoinsiemi (o sottomultiinsiemi) fissati di S .

Per esempio questa funzione può essere una stringa di n simboli, in cui ammettiamo \diamond come carattere che denota il carattere vuoto. In questa definizione il dominio della permutazione parziale è costituito dagli indici di posizione degli elementi non vuoti della stringa. Per esempio la stringa "1 1 \diamond 2" rappresenta la permutazione parziale di dominio $\{1, 2, 4\}$: il simbolo 1 è fissato, 2 è associato a 1 e 4 a 2. La notazione ciclica corrispondente è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & \diamond & 2 \end{pmatrix}$$

dove i due sottoinsiemi corrispondono alle righe della matrice, la funzione alle colonne e \diamond è legato agli elementi *non associati*.

Osservazione 2.2. Al fine di poter effettuare calcoli con le permutazioni parziali, è importante fissare un *ordine* tra gli elementi del multiinsieme unione $M \cup L$.

Assegniamo a $M \cup L$ l'ordine naturale \leq dei numeri reali, cioè ai pitch dei suoi elementi. Infatti nella musica classica con temperamento equabile, si definisce il pitch p di una nota in funzione della frequenza fondamentale utilizzando l'equazione (2.1.1). Questo può essere fatto anche nel caso in cui gli elementi del multiinsieme unione siano classi di pitch: l'ordine è indotto da quello dei rappresentanti delle classi.

³Si assuma che, per un multiinsieme S , $\mu_S(x) = 0$ se $x \notin X_S$. Con questa assunzione la funzione $\mu_{M \cup L}$ è definita sull'intero insieme $X_M \cup X_L$.

matrice $P \in M_m(\mathbb{R})$ è una *matrice di permutazione parziale* se per ogni riga e colonna c'è al più un elemento diverso da zero (uguale a 1). Rispetto al voice leading $M \rightarrow L$ la dimensione m della matrice P è uguale alla cardinalità del multiinsieme $M \cup L$.

Osservazione 2.3. In generale, la matrice di permutazione parziale associata a un voice leading dato non è unica. Questo è dovuto al fatto che stiamo lavorando con multiinsiemi: se $M \rightarrow L$ è un voice leading è possibile che alcune componenti di M o L abbiano lo stesso valore, vale a dire che voci diverse stanno eseguendo parti che vanno da una stessa nota a note diverse, oppure che vanno da note diverse alla medesima.

Per questa ragione introduciamo la seguente convenzione.

Convenzione 2.1. Sia $M := (x_1, \dots, x_n) \rightarrow L := (y_1, \dots, y_n)$ un voice leading e supponiamo che più di una voce sia associata alla stessa nota di L . A questo scopo, siano $(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ i pitch di M (con $i_1 < \dots < i_k$) che vanno nei pitch $(y_{j_1}, \dots, y_{j_k})$ di L , con $y_{j_1} = \dots = y_{j_k}$ e $j_1 < \dots < j_k$. Per poter associare un'unica matrice di permutazione parziale $P := (a_{ij})$ al voice leading di cui sopra, assegniamo il valore 1 agli elementi corrispondenti di P seguendo l'ordine degli indici, cioè ponendo $a_{i_1 j_1} = 1, \dots, a_{i_k j_k} = 1$.

Ragionamento analogo si ha nel caso in cui più voci abbiano la stessa nota in M . Siano quindi $(x_{i_1}, \dots, x_{i_l})$ i pitch di M (con $x_{i_1} = \dots = x_{i_l}$ e $i_1 < \dots < i_l$) che vanno nei pitch $(y_{j_1}, \dots, y_{j_l})$ di L , con $j_1 < \dots < j_l$. Assegniamo dunque il valore 1 agli elementi corrispondenti di P seguendo l'ordine degli indici, cioè ponendo $a_{i_1 j_1} = 1, \dots, a_{i_l j_l} = 1$.

D'ora in poi quindi parleremo dell'*unica* matrice di permutazione parziale associata a un voice leading dato.

Esempio 2.3.2. La matrice di permutazione parziale associata alla rappresentazione ciclica riportata nell'equazione (2.3.2) del voice leading (2.3.1) (rappresentato in figura 2.5) è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi, se $M \rightarrow L$ è un voice leading, con M e L pensati come tuple ordinate, e se P è la sua matrice di permutazione parziale, abbiamo che $PM = L$; in più, il voice leading "inverso" $L \rightarrow M$ è ovviamente descritto dalla trasposizione P^t di P : $P^t L = M$.

Questa rappresentazione ha il vantaggio di fornire oggetti che sono molto più maneggevoli di un multiinsieme di coppie, parlando in termini computazionali.

2.4 Voice leading e geodetiche definite a tratti

Possiamo immaginare un voice leading di n voci come una sequenza di vettori n -dimensionali (punti in \mathbb{R}^n), le cui componenti sono i pitch associati a ogni nota eseguita da ciascuna voce.

Un'importante proprietà di questa visualizzazione è che la melodia di una certa voce è sempre rappresentata dalla stessa coordinata (sia la i -esima) in ogni vettore della sequenza: possiamo quindi leggerla molto semplicemente guardando la proiezione

$$\begin{aligned} \pi_i : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_n) &\longmapsto v_i, \text{ con } i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Un modo utile di rappresentare quest'idea è considerare un segmento orientato che unisce due punti consecutivi u e v di \mathbb{R}^n , cioè un cammino $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dato da

$$\gamma(s) := u + s(v - u) \tag{2.4.1}$$

Si noti che è solo uno strumento grafico conveniente e non significa assolutamente che ogni punto del cammino sia effettivamente "suonato": gli unici punti coinvolti nella melodia sono gli estremi $\gamma(0) = u$ e $\gamma(1) = v$.

La caratteristica principale del cammino appena presentato è che è una *geodetica* tra i punti u e v , essendo lo spazio euclideo n -dimensionale convesso. Ci sono infiniti modi per collegare due punti di \mathbb{R}^n , e non siamo interessati al modo particolare in cui sono uniti; ha senso porre la convenzione che siano collegati nel modo più semplice possibile.

Se iteriamo il procedimento per ogni nota e per ogni voce otteniamo una catena poligonale in \mathbb{R}^n , che *non* è una geodetica, piuttosto una *geodetica definita a tratti*. Questo non è sorprendente, anzi è di fatto ciò che cerchiamo, perché se noi considerassimo una melodia con più di 2 note (per voce) e unissimo gli estremi della melodia con un segmento, perderemmo qualsiasi informazione tra gli estremi, cioè cancelleremmo la melodia stessa! Per questa ragione è significativo considerare una *concatenazione di geodetiche*, che consente di riprodurre ogni passaggio della musica.

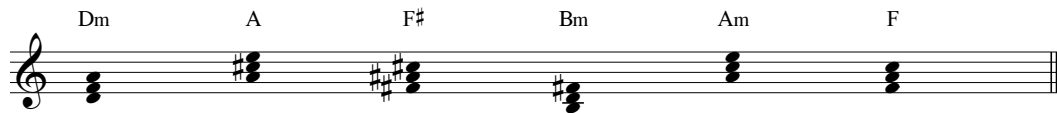
Questa è la rappresentazione geometrica di quanto presentato nella sezione 2.3 in forma algebrica attraverso le matrici di permutazione parziale. Infatti, se consideriamo una melodia come una sequenza finita di k punti in \mathbb{R}^n , con n il numero delle voci, possiamo allora descriverla geometricamente attraverso un cammino lineare definito a tratti, e algebricamente come un prodotto $P_k \cdot \dots \cdot P_1$, dove P_i è la matrice di permutazione parziale dell' i -esimo voice leading.

Per esempio, si consideri la progressione di triadi nella figura 2.6a: ognuna di esse è rappresentata come una tripla $(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$, con $p_1 < p_2 < p_3$. In generale è possibile costruire un voice leading associando ogni nota di un accordo dato con una nota del successivo, rispettando l'ordine indotto da $<$. Questa regola è stata utilizzata per disegnare il cammino in figura 2.6b.

Si considerino ora i quattro voice leading

$$\begin{aligned} (B_3, F_5) &\rightarrow (C_4, E_4) \quad \text{e} \quad (F_5, B_3) \rightarrow (E_4, C_4), \\ (B_3, F_5) &\rightarrow (E_4, C_4) \quad \text{e} \quad (F_5, B_3) \rightarrow (C_4, E_4), \end{aligned}$$

rappresentati in figura 2.7 a pagina 36: ogni riga descrive lo stesso voice leading, cioè le coppie sono musicalmente e percettivamente equivalenti. Generalizzando il fatto a n voci, è naturale identificare i cammini in \mathbb{R}^n simmetrici rispetto alla diagonale dello spazio utilizzato.



(a) Voice leading tra triadi allo stato fondamentale.

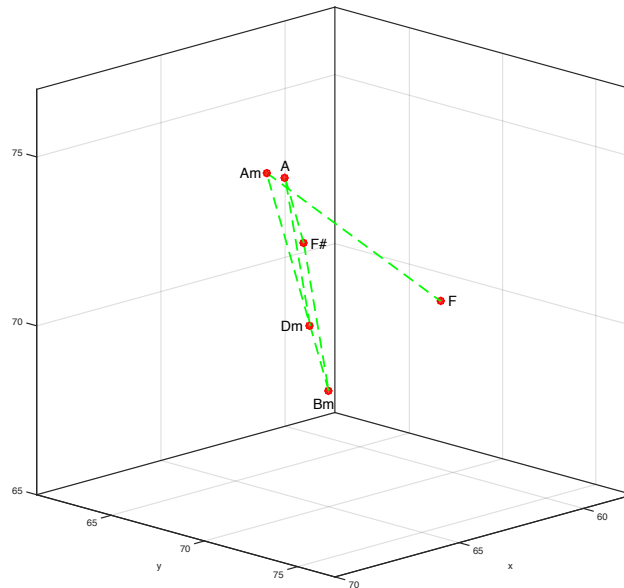
(b) Rappresentazione grafica in \mathbb{R}^3 del voice leading precedente.

Figura 2.6: Voice leading e la corrispondente geodetica definita a tratti.

Una generalizzazione di questa situazione conduce alla conclusione che se noi applicassimo la *stessa* permutazione a entrambi gli estremi di cammini che rappresentano un voice leading, otterremmo di fatto lo *stesso* voice leading.

La precedente discussione sulla simmetria mostra che ha senso rappresentare un voice leading di n voci come una geodetica sul manifold Riemanniano con frontiera \mathbb{R}^n / S_n . Nel caso speciale $n = 2$ lo spazio \mathbb{R}^2 / S_2 è isomorfo al semipiano

$$\mathbb{H} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq y\}.$$

La figura 2.7 nella pagina successiva mostra il voice leading tra le diadi di cui sopra rappresentato in \mathbb{R}^2 .

È possibile rappresentare e analizzare voice leading come cammini su più spazi *harmony-oriented*, come lo spazio delle classi dei pitch \mathbb{T}^n (i cui punti sono n -uple di classi di pitch) o lo spazio di accordi \mathbb{A}_n introdotti nella sezione 2.1. Da un punto di vista armonico è effettivamente ammesso non considerare l'ottava di una nota appartenente a un accordo, e identificare ogni accordo con l'insieme delle possibili disposizioni delle sue note. Siamo quindi interessati alle geodetiche su questi spazi, in quanto saranno la rappresentazione del voice leading in questo ambiente così generale. I cammini che stiamo cercando saranno facilmente costruiti una volta osservato che \mathbb{T}^n e \mathbb{A}_n sono ottenuti da \mathbb{R}^n come spazi quoziente. Perciò è sufficiente rappresentare i segmenti collegando gli estremi del voice leading in \mathbb{R}^n , esattamente come prima, per poi trasformarli attraverso la proiezione di rivestimento che genera lo spazio desiderato. Di

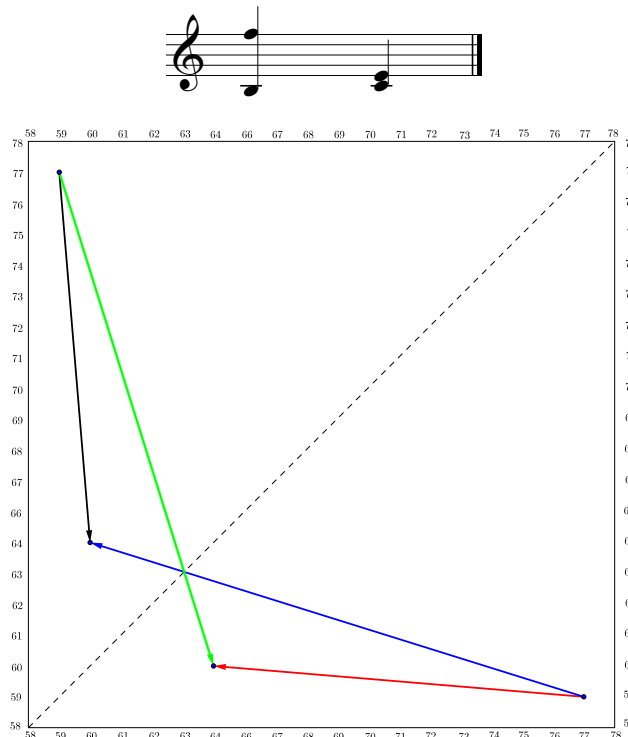


Figura 2.7: I quattro possibili voice leading tra le note dello spartito rappresentato sopra. Si osservi la natura simmetrica dei cammini rispetto alla linea tratteggiata ($y = x$).

seguito sono riportati alcuni esempi nel caso $n = 2$.

Esempio 2.4.1 (Voice leading in \mathbb{T}^2). Nella figura 2.8a a fronte il toro è descritto come un *gluing space* (vedi anche la sottosezione 2.1.2). Quindi, una traiettoria che attraversa il bordo superiore del quadrato in un certo punto (x, u) rientrerà nel quadrato nel punto (x, l) dove $y = u$ e $y = l$ sono le linee su cui giacciono i lati orizzontali. Si ha analogo ragionamento per i lati verticali. Contando quante volte una traiettoria attraversa i lati opposti del quadrato⁴ è possibile recuperare il numero di salti d'ottava fatti da una o più voci in un voice leading (che a priori è un parametro perso, dato che stiamo considerando le classi di pitch). Consideriamo a questo proposito i seguenti quattro voice leading in \mathbb{R}^2 :

- | | |
|--|---|
| i) $(D_0, F_0) \rightarrow (E_0, G_0)$, | ii) $(D_0, F_0) \rightarrow (E_1, G_0)$, |
| iii) $(D_0, F_0) \rightarrow (E_0, G_1)$, | iv) $(D_0, F_0) \rightarrow (E_1, G_1)$. |

Nello spazio delle classi dei pitch rappresentano lo stesso voice leading $(D, F) \rightarrow (E, G)$, ma le realizzazioni dei loro cammini sono diverse. La figura 2.8a nella pagina successiva mostra questi quattro cammini in \mathbb{T}^2 :

- Il cammino i) è rappresentato con la freccia rossa più corta, perché il salto tra le diadi non supera l'ottava;
- il cammino ii) è rappresentato con la freccia verde, che esce dal quadrato dal lato destro e rientra dal lato sinistro: questo mostra il fatto che la prima voce fa un salto di un'ottava;

⁴Equivalentemente, possiamo considerare i generatori del gruppo fondamentale $\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Si veda [Hatcher 2002, cap. 1].

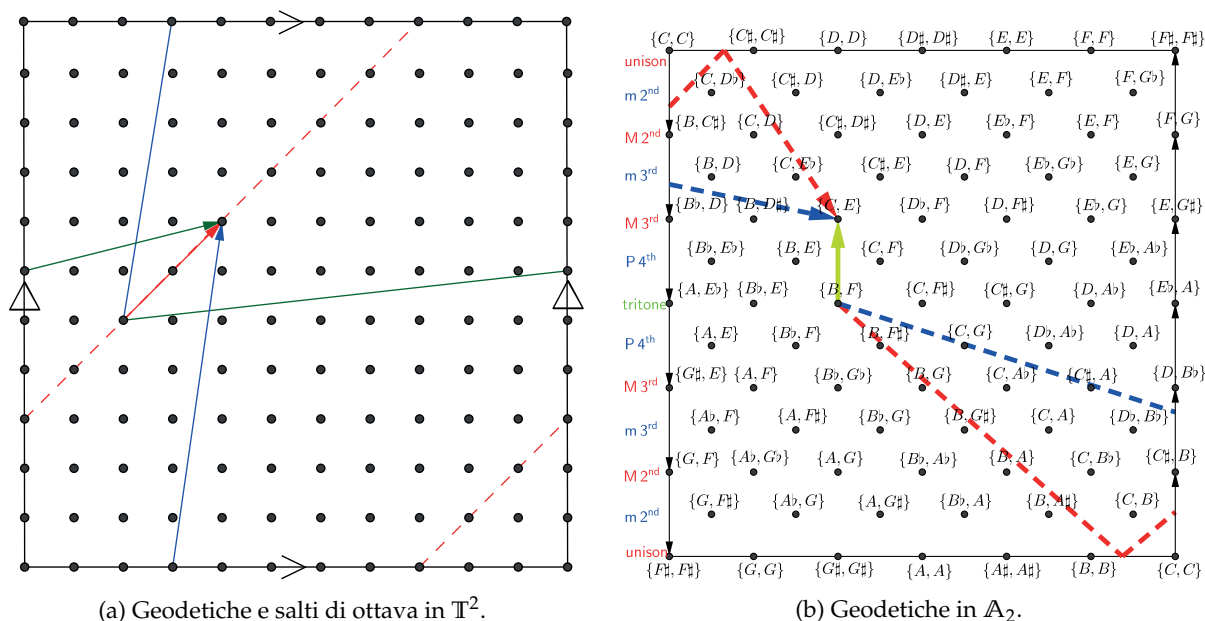


Figura 2.8: I cammini di voice leading nello spazio di classi dei pitch \mathbb{T}^2 e nel suo relativo spazio degli accordi \mathbb{A}_2 . (a) Il toro \mathbb{T}^2 è rappresentato come un quadrato, la regola di identificazione usuale sui suoi lati espressa dai simboli $>$ e \triangle . (b) La regola di identificazione su \mathbb{A}_2 è rappresentata dalle frecce verticali del quadrato.

- il cammino iii) è associato alla freccia blu, diretta verso l'alto e rientrante in figura dal basso: in questo caso è la prima voce che salta all'ottava successiva;
- il cammino iv) è associato alla freccia rossa tratteggiata: Va dall'alto verso il basso, e poi dalla destra alla sinistra del quadrato, perché entrambe le voci superano l'ottava.

Esempio 2.4.2 (Voice leading in \mathbb{A}_2). Nel caso bidimensionale delle diadi, $\mathbb{A}_2 = \mathbb{T}^2 / S_2$ è il *nastro di Möbius*. Si veda [Bergomi, Jadanza e Portaluri 2014] per dettagli sulla costruzione e il posizionamento degli accordi sul reticolo. La figura 2.8b mostra tre diversi cammini geodetici corrispondenti al voice leading $\{B, F\} \rightarrow \{C, E\}$, dove le parentesi graffe indicano che stiamo identificando tutti i possibili assegnamenti delle parti a ogni voce. Si osservi l'identificazione di lato sinistro e destro del quadrato con orientamento inverso, e si noti la *frontiera singolare* degli unisoni, formata dai lati alto e basso del quadrato. Come descritto intuitivamente nella sezione 2.1.2, i cammini rimbalzano indietro quando la toccano a causa del passaggio a quoziente col gruppo simmetrico. Qui è chiaro che l'armonia è più favorita della melodia, poiché eliminare le ottave e ordinare porta a concentrarsi sull'ensemble delle voci.

Questi esempi mostrano una proprietà importante: i cammini più corti che collegano le due coppie di classi di pitch in \mathbb{T}^2 o le diadi in \mathbb{A}_2 (le geodetiche minime tra quei due punti) rappresentano un voice leading senza né incroci né salti di ottava, mentre i cammini che toccano la frontiera singolare corrispondono alla scrittura delle parti dove avviene almeno uno dei fenomeni.

Nonostante il voice crossing non sia indicato come una pratica standard nei manuali di armonia, è comunque una tecnica utile per evitare note ripetute, quinte parallele e ottave nascoste e per assicurare un alto grado di indipendenza per ogni voce. Per maggiori dettagli

sull'orchestrazione e sull'uso del voice crossing, si vedano [Prout 2012], [Boland e Link 2012], [Russo 1997], [Sussman e Abene 2012], [Notley 2007].

2.5 Movimenti simultanei delle voci e complessità di un voice leading

Nella sezione precedente abbiamo visto come una matrice di permutazione parziale associata a un voice leading contenga le informazioni che descrivono il cammino che porta da una nota alla successiva per ogni voce. Qui mostreremo che lo strumento costruito codifica anche la direzione del movimento delle voci differenti, inclusi gli incroci.

Nella musica si distinguono tre comportamenti principali (si ricorda il paragrafo sui moti simultanei a pagina 13):

- (i) *Moto retto*, quando le voci si muovono nella stessa direzione, di cui il *moto parallelo* è un caso particolare;
- (ii) *Moto contrario*, quando le voci si muovono in direzioni opposte;
- (iii) *Moto obliquo*, quando risulta esserci solo una voce in movimento.

Riferendosi poi alla matrice di permutazione parziale (a_{ij}) , è possibile descrivere il movimento di una voce considerando tre condizioni, che sono immediata conseguenza dell'ordinamento del multiinsieme unione:

1. Se esiste un elemento $a_{ij} = 1$ con $i < j$ allora l' i -esima voce si sta muovendo *verso l'alto*;
2. Se esiste un elemento $a_{ij} = 1$ con $i > j$ allora l' i -esima voce si sta muovendo *verso il basso*;
3. Se esiste un elemento $a_{ii} = 1$ allora l' i -esima voce è *costante*.

Il collegamento tra le formulazioni musicali e quelle legate alle matrici di permutazione parziale è il seguente:

- Se è verificata la Condizione 1) o la Condizione 2) da due elementi distinti si ha il *moto retto*;
- Se sono verificate sia la Condizione 1) che la Condizione 2) per due elementi distinti, siamo di fronte a un *moto contrario*;
- Il caso del *moto obliquo* coinvolge le Condizioni 1) e 3) o 2) e 3), per almeno due elementi distinti.

Come detto nella sezione 1.1.2, il *voice crossing* è un caso particolare di questi movimenti, in cui le voci scambiano le loro relative posizioni. Questo fenomeno può essere descritto in termini di multiinsieme come segue:

Definizione 2.5.1. Sia $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (y_1, \dots, y_n)$ un voice leading (con $n \in \mathbb{N}$). Se esistono due coppie (x_i, y_i) e (x_j, y_j) tali che $x_i < x_j$ e $y_i > y_j$ o tali che $x_i > x_j$ e $y_i < y_j$ diciamo che c'è un (*voice*) *crossing* tra la voce i e la voce j .

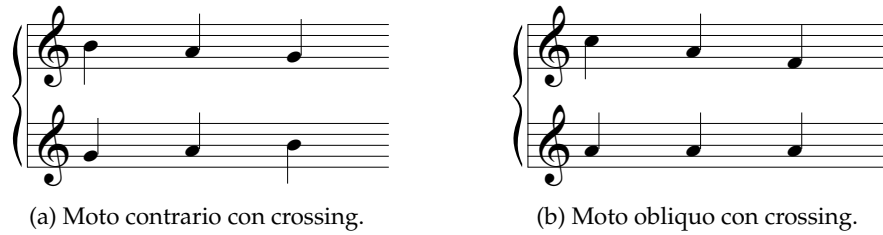


Figura 2.9: Esempi di voice crossing in cui le voci si incrociano passando per un unisono.

La matrice di permutazione parziale restituisce questa informazione, come mostra la seguente proposizione:

Proposizione 2.5.1. *Si consideri un voice leading di n voci e sia $P := (a_{ij})$ la sua matrice di permutazione parziale associata. Scelti gli indici $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$ tali che $a_{ij} = 1$ e $a_{kl} = 1$. Allora c'è un incrocio (crossing) tra le due voci se e solo se si verifica una delle seguenti condizioni:*

1. $i < k$ e $j > l$;
2. $i > k$ e $j < l$.

Inoltre il numero totale di voci che incrociano quella rappresentata da a_{ij} è uguale alla quantità di 1 nelle sottomatrici (a_{rs}) e (a_{tu}) di P determinate dalle restrizioni sugli indici: $r > i$, $s < j$ e $t < i$, $u > j$.

Dimostrazione. In una matrice di permutazione parziale l'indice della riga di un elemento diverso da 0 denota la posizione iniziale di una voce data nel multiinsieme unione ordinato, mentre l'indice della colonna dello stesso elemento rappresenta la sua posizione al termine della transizione.

È quindi chiaro dalla definizione 2.5.1 che per un voice crossing presente deve essere verificata o la condizione 1 o la 2. Ogni elemento a_{kl} che soddisfa una di queste condizioni è legato a una voce che incrocia quella rappresentata da a_{ij} . Perciò il numero di incroci per a_{ij} è la quantità di 1 nelle posizioni (t, u) tali che $t < i$ e $u > j$. \square

Osservazione 2.4. Quanto affermato nella proposizione precedente sul numero totale di voice crossing relativi a una voce data è vero grazie alla convenzione 2.1: se infatti non la assumessimo, le sottomatrici potrebbero contenere elementi positivi che si riferiscono a voci che giungono sulla stessa nota, ma che non producono incroci.

La definizione 2.5.1 non tiene però in considerazione i voice crossing che non si verificano nello stesso voice leading, ad esempio passando da un unisono (si veda la figura 2.9). Di conseguenza occorre considerare una sequenza di voice leading, alla fine della quale le due voci avranno invertito la loro posizione.

Definizione 2.5.2 (Voice crossing esteso). Siano

$$(x_{1,1}, \dots, x_{1,n}) \rightarrow (x_{2,1}, \dots, x_{2,n}) \rightarrow \dots \rightarrow (x_{m,1}, \dots, x_{m,n})$$

una serie di $m - 1$ voice leading tra n voci ($m, n \in \mathbb{N}$). Se esistono due coppie $(x_{m_1,i}, x_{m_2,i})$ e $(x_{m_1,j}, x_{m_2,j})$ tali che:

- $x_{m_1,i} < x_{m_1,j}$ e $x_{m_2,i} > x_{m_2,j}$ o $x_{m_1,i} > x_{m_1,j}$ e $x_{m_2,i} < x_{m_2,j}$
- $x_{l,i} = x_{l,j}$, con $l = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2 - 2, m_2 - 1$

diciamo che c è un (*voice*) *crossing* tra la voce i e la voce j .

Dovendo quindi considerare più *voice leading* (e quindi più matrici a permutazione parziale), la proposizione 2.5.1 non è valida per considerare questo tipo di *crossing*. Rileviamo questo caso nel modo seguente:

- Memorizziamo le voci che in un *voice leading* raggiungono un unisono, e la loro reciproca posizione;
- Se c è un *voice leading* successivo in cui le due voci non sono più in unisono, e hanno scambiato la loro posizione, si sarà verificato un *voice crossing*.

Osservazione 2.5. Per quanto l'unisono non sia da considerare *voice crossing* da un punto di vista musicale, è comunque una singolarità: matematicamente può essere infatti considerato come un caso limite di *voice crossing*, sebbene musicalmente non siano verificate le condizioni necessarie.

È quindi utile tenere conto del passaggio all'unisono, seppure considerandolo diversamente dal *voice crossing*.

Da quanto esposto emerge che è possibile dare una descrizione qualitativa di un *voice leading* contando le voci che si muovono verso l'alto, quelle che si muovono verso il basso, le voci costanti e il numero di incroci. Riassumiamo queste proprietà in un *vettore di complessità* 5-dimensionale c definito come

$$c := (\#voci \text{ verso l'alto}, \#voci \text{ verso il basso}, \#voci \text{ costanti}, \#\text{incroci}, \#\text{unisoni}) \quad (2.5.1)$$

grazie al quale possiamo classificare e distinguere i *voice leading* semplicemente guardando a questi quattro aspetti.

Osservazione 2.6. La nozione di complessità appena definita non è né equivalente né correlata alla definizione standard di complessità.

Esempio 2.5.1. *Moto retto.* Il *voice leading* $(C_1, E_1, G_1) \rightarrow (D_1, F_1, A_1)$ è rappresentato da

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e il suo vettore di complessità è $(3, 0, 0, 0, 0)$.

Moto obliquo. Il voice leading $(G_2, G_2, C_3) \rightarrow (C_3, C_3, C_3)$ è associato a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e il suo vettore di complessità è $(2, 0, 1, 0, 3)$.

Voice crossing. Il voice leading $(C_1, E_1, G_1) \rightarrow (G_1, C_1, G_1)$ è rappresentato da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con vettore di complessità $(1, 1, 1, 1, 1)$.

Sfruttando quindi gli strumenti esposti è semplice analizzare un intero contrappunto di prima specie, considerando la concatenazione dei suoi voice leading per poi avere una sequenza di vettori di complessità. Questa informazione può essere vista come un'insieme di punti in uno spazio pentadimensionale - o meglio come una o più delle sue proiezioni tridimensionali. Infatti se si vuole rappresentare la complessità dell'intera composizione come una nuvola di punti, occorre tenere in conto che matrici diverse possono produrre lo stesso vettore di complessità. Quindi, abbiamo un *multiinsieme* di punti di \mathbb{R}^5 (con componenti intere non negative).

2.5.1 Esempio: Analisi della complessità di un brano

Analizziamo un frammento di un corale di Albert Schweitzer, compositore vissuto tra il XIX e il XX secolo: *Discendi Santo Spirito* (il frammento analizzato è riportato nella figura 2.10 nella pagina successiva)⁵. È un contrappunto di prima specie ed è per 4 voci. Il compositore, essendo vissuto dopo Bach, compone questo brano seguendo (quasi) scrupolosamente le regole armoniche canonizzate da Bach. Si può ben notare l'andamento delle voci, tra le quali almeno una ha sempre moto contrario rispetto alle altre.

In quanto segue, presento la molteplicità di ogni vettore di complessità c come un cerchio di centro $c \in \mathbb{R}^5$ e raggio uguale alla *molteplicità normalizzata* $\mu(c)/n$ di c , dove $\mu(c)$ è il numero di volte in cui c appare nel brano analizzato e n è il numero di note eseguite o cantate da ogni voce nell'intero pezzo.

I primi quattro voice leading risultano avere i seguenti vettori di complessità:

$$\begin{aligned} (A_4, F_4, C_4, F_3) &\rightarrow (A_4, F_4, C_4, F_3): & (0, 0, 4, 0, 0) \\ (A_4, F_4, C_4, F_3) &\rightarrow (A_4, F_4, A_3, F_3): & (0, 1, 3, 0, 0) \\ (A_4, F_4, A_3, F_3) &\rightarrow (C_5, E_4, G_3, C_3): & (1, 3, 0, 0, 0) \\ (C_5, E_4, G_3, C_3) &\rightarrow (G_4, E_4, C_4, C_3): & (1, 1, 2, 0, 0) \end{aligned}$$

⁵Le pause per ora non sono state considerate nell'analisi del voice leading; spiegherò come sono state considerate all'interno della sezione 2.6.

Soprano
Di-scen-di - San - to Spi - ri - to, le no stre men ti_il lu - mi - na;

Contralto
Di-scen-di - San - to Spi - ri - to, le no stre men ti_il lu - mi - na;

Tenore
Di-scen-di - San - to Spi - ri - to, le no stre men ti_il lu - mi - na;

Basso
Di-scen-di - San - to Spi - ri - to, le no stre men ti_il lu - mi - na;

Figura 2.10: *Discendi Santo Spirito*, Albert Schweitzer (1875-1965), battute 1-8.

c	$\mu(c)$
(0, 0, 4, 0, 0)	3
(0, 1, 3, 0, 0)	2
(1, 1, 2, 0, 0)	1
(3, 0, 1, 0, 0)	1
(0, 3, 1, 0, 0)	2
(1, 3, 0, 0, 0)	4
(2, 2, 0, 0, 0)	1
(2, 2, 0, 0, 1)	1
(3, 1, 0, 0, 0)	1
(4, 0, 0, 0, 0)	1

Tabella 2.2: Vettori di complessità del frammento analizzato e la loro occorrenza.

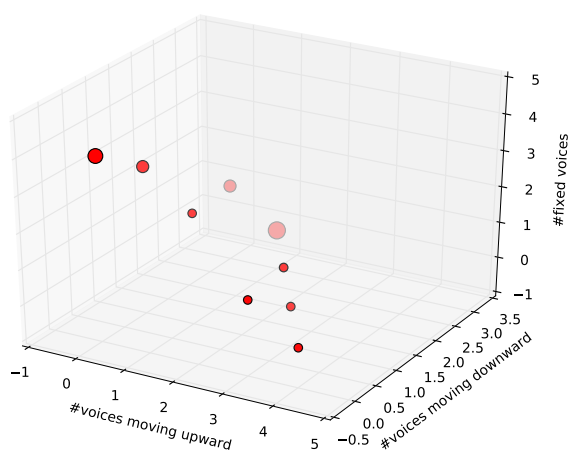
La tabella 2.2 contiene i vettori di complessità e le loro occorrenze nel pezzo. La nuvola di punti associata a questo multiinsieme è rappresentata nella figura 2.11 nella pagina successiva.

2.6 Indipendenza ritmica e pause

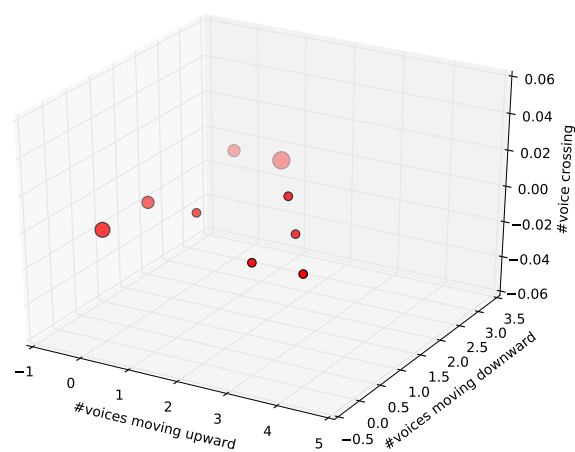
L'esempio appena analizzato nella sottosezione 2.5.1 tratta di un contrappunto di prima specie, cioè il caso più semplice, in cui le voci seguono un'armonizzazione omoritmica. È comunque possibile studiare scenari più complessi, introducendo l'*indipendenza ritmica* tra le voci e le *pause* nella melodia, riconducendo le voci non simultanee al caso più semplice.

Se le voci sono eseguite a ritmi differenti o seguono temi ritmicamente irregolari, consideriamo l'unità ritmica minima u che appare nella frase e *omogeneizziamo* la composizione su quella unità: quindi se una nota ha durata ku , con $k \in \mathbb{N}$, la rappresentiamo come k note ripetute di durata u (si veda la figura 2.12 a pagina 44). Questa trasformazione del contrappunto originale introduce solo movimenti obliqui e non altera gli altri tipi di movimenti.

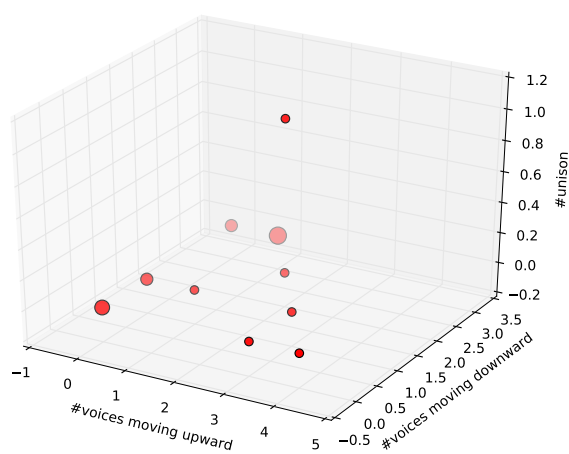
In termini musicali, se una voce è in silenzio non è né in movimento, né costante né può incrociare altre voci; quindi per poter includere le pause è necessario aggiungere un nuovo sim-



(a) Proiezione sulle componenti *verso l'alto*, *verso il basso* e *voci costanti*.

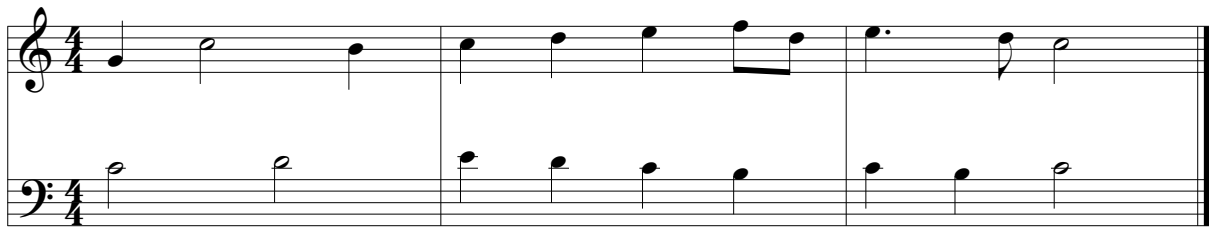


(b) Proiezione sulle componenti *verso l'alto*, *verso il basso* e *voice crossing*.



(c) Proiezione sulle componenti *verso l'alto*, *verso il basso* e *unisono*.

Figura 2.11: Le proiezioni tridimensionali delle nuvole di punti create dai vettori di complessità del voice leading del frammento di *Discendi Santo Spirito*. Il raggio di ogni cerchio rappresenta la molteplicità normalizzata del vettore di complessità corrispondente.



(a) Contrappunto di quinta specie.



(b) Riduzione alla prima specie.

Figura 2.12: Riduzione di voci ritmicamente indipendenti a un contrappunto della prima specie.

bolo (p) nell'elenco dei pitch. Scegliamo inoltre di indicare una pausa nella matrice associata a un voice leading con l'elemento -1 .

Adottiamo la seguente convenzione relativamente al multiinsieme unione ordinato.

Convenzione 2.2. Si pone che le pause siano gli ultimi elementi di un multiinsieme unione ordinato associato a un voice leading. In altre parole, p è strettamente maggiore di qualsiasi altro pitch.

Esempio 2.6.1. Il voice leading $(A_3, E_4, p) \rightarrow (F_3, F_4, A_4)$ corrisponde alla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Osservazione 2.7. Si noti che quando si inseriscono gli elementi uguali a -1 nella matrice associata a un voice leading, non stiamo più utilizzando matrici di permutazioni parziali. Comunque, per studiare i voice leading con indipendenza ritmica delle voci come prima (cioè ignorando le pause) è sufficiente considerare la sottomatrice ottenuta eliminando tutte le righe e le colonne contenenti -1 (ottenendo di nuovo una matrice di permutazione parziale).

Estendiamo il vettore di complessità definito precedentemente nella formula 2.5.1 a pagina 40 aggiungendo una sesta componente che conta il numero di elementi negativi (i valori uguali a -1) della matrice associata. In più, modifichiamo leggermente anche la nozione di molteplicità normalizzata di un vettore di complessità c , necessario per la rappresentazione della complessità di un brano nella forma di una nuvola di punti, dividendo il numero $\mu(c)$ di occorrenze di c nel pezzo per il numero totale di note per voce *dopo l'omogeneizzazione*.

(a) La versione originale del brano.

(b) La riduzione del brano a contrappunto di prima specie.

Figura 2.13: *Estote fortes*, Luca Marenzio (1553-1599), battute 1-6.

2.6.1 Esempio: Analisi di un brano contrappuntistico del 1500

Consideriamo un brano del compositore rinascimentale Luca Marenzio, *Estote fortes*, di cui riportiamo l'inizio e la sua omogeneizzazione in figura 2.13.

Omogeneizziamo il ritmo esprimendo ogni nota in ottavi; i primi voice leading della battuta 3 sono riportati di seguito:

$$\begin{aligned}
 (C_5, p, Eb_4, Ab_4) &\rightarrow (C_5, p, Eb_4, Ab_4): & (0, 0, 3, 0, 0, 1) \\
 (C_5, p, Eb_4, Ab_4) &\rightarrow (C_5, Eb_4, Eb_4, Ab_4): & (0, 0, 3, 0, 0, 1) \\
 (C_5, Eb_4, Eb_4, Ab_4) &\rightarrow (C_5, Eb_4, Eb_4, Ab_4): & (0, 0, 4, 0, 2, 0) \\
 (C_5, Eb_4, Eb_4, Ab_4) &\rightarrow (p, C_4, Eb_4, Ab_4): & (0, 1, 2, 1, 0, 1) \\
 (p, C_4, Eb_4, Ab_4) &\rightarrow (p, Bb_3, Eb_4, Ab_4): & (0, 1, 2, 0, 0, 1) \\
 (p, Bb_3, Eb_4, Ab_4) &\rightarrow (Eb_5, C_4, Eb_4, Ab_4): & (1, 0, 2, 0, 0, 1)
 \end{aligned}$$

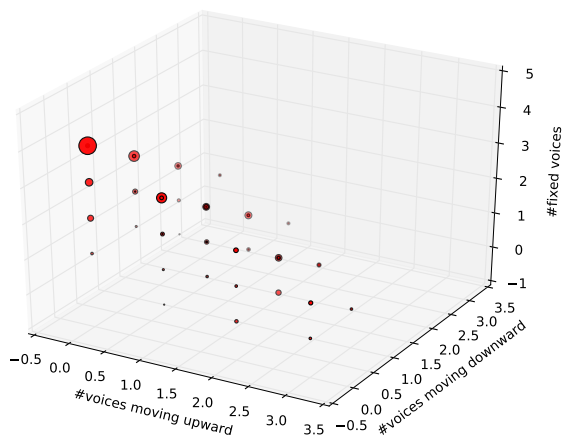
La tabella 2.3 nella pagina successiva raccoglie i vettori di complessità e le loro molteplicità, rappresentati in forma di nuvola di punti nella figura 2.14 nella pagina seguente.

2.7 Concatenazione di voice leading e serie temporali

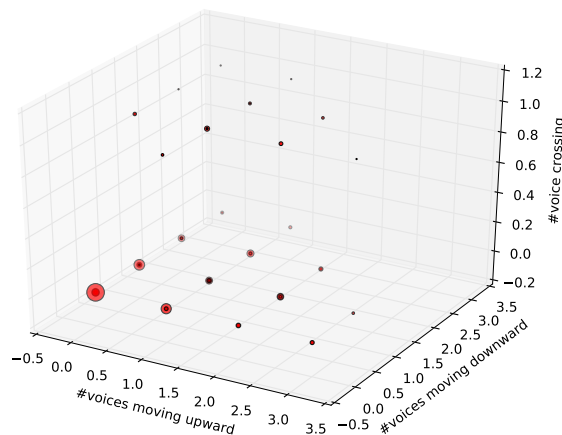
La nuvola di punti associata a un voice leading restituisce un'utile rappresentazione tridimensionale del brano; tuttavia quest'analisi è solo strutturale, poiché non considera il modo in cui i

c	$\mu(c)$	c	$\mu(c)$	c	$\mu(c)$	c	$\mu(c)$
(0,0,1,0,0,3)	3	(1,1,1,0,0,1)	8	(1,0,3,1,1,0)	1	(1,2,1,1,0,0)	4
(1,0,0,0,0,3)	1	(1,1,1,1,1,1)	1	(1,0,3,1,0,0)	3	(1,2,1,0,1,0)	2
(0,0,2,0,0,2)	15	(1,1,1,1,0,1)	1	(1,0,3,0,1,0)	6	(2,1,1,0,0,0)	19
(0,1,1,0,0,2)	2	(1,1,1,0,1,1)	2	(0,2,2,0,0,0)	23	(2,1,1,1,0,0)	6
(1,0,1,0,0,2)	2	(2,0,1,0,0,1)	3	(0,2,2,1,0,0)	1	(2,1,1,0,1,0)	2
(0,2,0,0,0,2)	1	(1,2,0,0,0,1)	5	(0,2,2,0,1,0)	4	(3,0,1,0,0,0)	7
(1,1,0,0,0,2)	3	(1,2,0,1,0,1)	1	(1,1,2,0,0,0)	19	(1,3,0,0,0,0)	4
(1,1,0,1,0,2)	2	(2,1,0,0,0,1)	12	(1,1,2,1,1,0)	1	(1,3,0,1,0,0)	1
(2,0,0,0,0,2)	5	(3,0,0,0,0,1)	3	(1,1,2,1,0,0)	11	(2,2,0,0,0,0)	7
(0,0,3,0,0,1)	24	(0,0,4,0,0,0)	129	(1,1,2,0,1,0)	7	(2,2,0,1,0,0)	3
(0,1,2,0,0,1)	11	(0,0,4,0,2,0)	2	(2,0,2,0,0,0)	9	(2,2,0,0,1,0)	2
(0,1,2,1,0,1)	1	(0,0,4,0,1,0)	7	(2,0,2,0,1,0)	2	(3,1,0,0,0,0)	3
(0,1,2,0,1,1)	1	(0,1,3,0,0,0)	59	(0,3,1,0,0,0)	4	(3,1,0,1,0,0)	1
(1,0,2,0,0,1)	6	(0,1,3,1,0,0)	5	(0,3,1,1,0,0)	1		
(1,0,2,1,0,1)	1	(0,1,3,0,1,0)	6	(0,3,1,0,1,0)	1		
(0,2,1,0,0,1)	4	(1,0,3,0,0,0)	43	(1,2,1,0,0,0)	21		

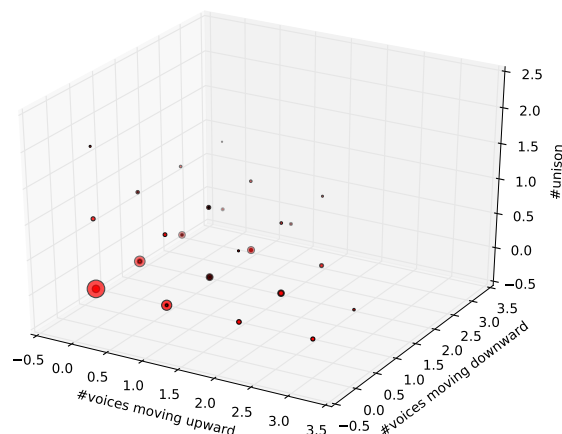
Tabella 2.3: Vettori di complessità del brano e la loro occorrenza.



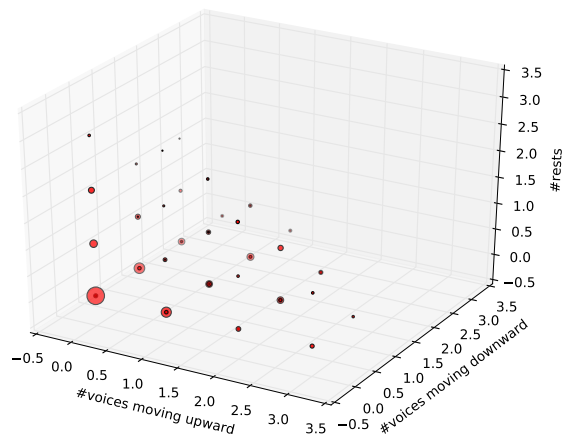
(a) Proiezione sulle prime tre componenti del vettore di complessità.



(b) Proiezione sulle componenti verso l'alto, verso il basso e crossing del vettore di complessità.



(c) Proiezione sulle componenti verso l'alto, verso il basso e unisoni del vettore di complessità.



(d) Proiezione sulle componenti verso l'alto, verso il basso e pausa del vettore di complessità.

Figura 2.14: Proiezioni tridimensionali della nuvola di punti 6-dimensionali che rappresenta la complessità dell'Estote fortes. Il raggio di ogni cerchio rappresenta la molteplicità normalizzata di ogni vettore di complessità.

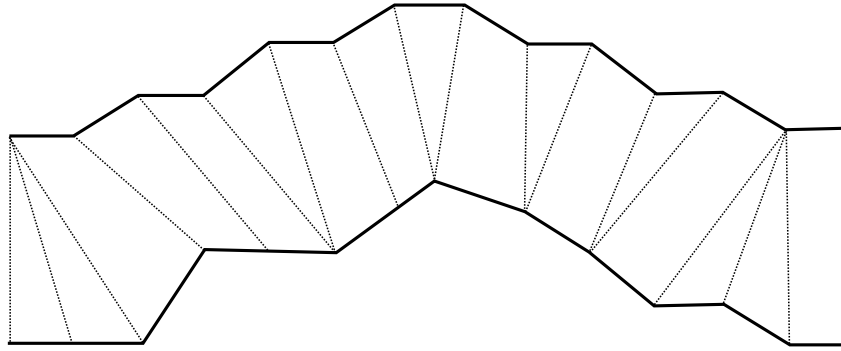


Figura 2.15: Dynamic Time Warping tra due serie di osservazioni.

voice leading sono stati concatenati dal compositore. È possibile introdurre questa dimensione temporale guardando la sequenza di vettori di complessità da un diverso punto di vista.

La concatenazione di osservazioni nel tempo può essere vista come una *serie temporale*, una sequenza di dati riguardanti le osservazioni ordinate nel tempo. Nel nostro caso, ogni brano musicale può essere descritto come una serie temporale 6-dimensionale, le cui osservazioni sono i vettori di complessità associati a ogni voice leading. Più specificatamente, utilizzeremo il cosiddetto *Dynamic Time Warping* (DTW, Deformazione Dinamica Temporale), un metodo che consente di paragonare sequenze dipendenti dal tempo di diverse lunghezze: il risultato è una misura di somiglianza tra le due sequenze, ottenuta “deformandole” non linearmente (si veda la figura 2.15 per una rappresentazione intuitiva) lungo l’asse temporale. Si invita a consultare [Senin 2008] per una review più dettagliata sugli algoritmi DTW.

2.7.1 Analisi con Dynamic Time Warping (DTW)

Sia \mathcal{F} un insieme, chiamato *feature space*, e siano date due sequenze finite $X := (x_1, \dots, x_n)$ e $Y := (y_1, \dots, y_m)$ di elementi di \mathcal{F} , chiamate *features* (con n e m numeri naturali). Per confrontarle, occorre introdurre una nozione di distanza tra features, cioè una funzione $\mathcal{C} : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$, chiamata anche *funzione costo*, che abbia almeno le seguenti proprietà:

- i. $\mathcal{C}(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathcal{F}$
- ii. $\mathcal{C}(x, y) = 0 \iff x = y$
- iii. $\mathcal{C}(x, y) = \mathcal{C}(y, x) \quad \forall x, y \in \mathcal{F}$

Se ora applichiamo \mathcal{C} alle feature X e Y , possiamo organizzare i valori in una matrice reale $n \times m$ $C := (\mathcal{C}(x_i, y_j))$ con $i \in \{1, \dots, n\}$ e $j \in \{1, \dots, m\}$.

Un *cammino di (n, m) -warping* in C è una sequenza finita $\gamma := (\gamma_1, \dots, \gamma_l) \in \mathbb{R}^l$, con $l \in \mathbb{N}$, tale che:

1. $\gamma_k := (\gamma_k^x, \gamma_k^y) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} \quad \forall k \in \{1, \dots, l\}$
2. $\gamma_1 := (1, 1)$ e $\gamma_l := (n, m)$
3. $\gamma_k^x \leq \gamma_{k+1}^x$ e $\gamma_k^y \leq \gamma_{k+1}^y \quad \forall k \in \{1, \dots, l-1\}$
4. $\gamma_{k+1} - \gamma_k \in \{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\} \quad \forall k \in \{1, \dots, l-1\}$



Figura 2.16: Cammino di warping ottimale su *Estote fortes* e *Discendi, Santo Spirito*.

	<i>Sicut</i>	<i>Estote</i>	<i>Discendi</i>
<i>Sicut</i>	0	0,7585	1,6229
<i>Estote</i>	0,7585	0	1,5336
<i>Discendi</i>	1,6229	1,5336	0

Tabella 2.4: La matrice delle distanze DTW per le tre serie temporali di vettori di complessità.

Il costo totale di un cammino di (n, m) -warping γ tra le feature X e Y è definito come

$$C_{\gamma}(X, Y) := \sum_{k=1}^l C(x_{\gamma_k^x}, y_{\gamma_k^y})$$

Un cammino di warping ottimale su X e Y è un cammino di warping che realizza il costo minimo totale (si veda la figura 2.16). Possiamo a questo punto definire la distanza DTW su X e Y :

$$DTW(X, Y) := \min\{C_{\gamma}(X, Y) \mid \gamma \text{ è un cammino di } (n, m)\text{-warping}\}$$

Osservazione 2.8. Si noti che il minimo esiste sempre perché l'insieme è finito.

Esempio 2.7.1. Calcoliamo la DTW tra i brani analizzati nelle sottosezioni 2.5.1 e 2.6.1, scegliendo come funzione costo la distanza euclidea in \mathbb{R}^6 ; i vettori 5-dimensionali sono stati immersi in \mathbb{R}^6 aggiungendo una sesta componente nulla.

Oltre a questi due brani, analizziamo un altro brano di polifonia del 1500, il *Sicut cervus* di Giovanni Pierluigi da Palestrina (già citato nella sezione 1.2.3 a pagina 19), e calcoliamo la sua distanza rispetto agli altri due.

I risultati di questo confronto sono mostrati nella tabella 2.4. Per quanto abbiamo analizzato solo tre composizioni, è già possibile osservare quanto la distanza DTW separa i due pezzi del 500 rispetto al corale.

2.7.2 Clustering gerarchico e rappresentazione tramite dendrogramma

Nell'esempio precedente abbiamo visto come confrontare i brani a coppie attraverso la DTW. Possiamo pensare ora a un insieme di n brani (o alla loro rappresentazione come concatenazione di voice leading) come a una nuvola di n punti in uno spazio metrico, in cui la distanza tra due punti è la distanza DTW; è ora possibile descrivere il posizionamento tra tali punti attraverso un'analisi di *clustering gerarchico* (si veda [Ott 2009] e [Jain e Dubes 1988]). Questa analisi restituisce una semplice rappresentazione di tutti i possibili cluster tra i punti, visualizzabile come dendrogramma.

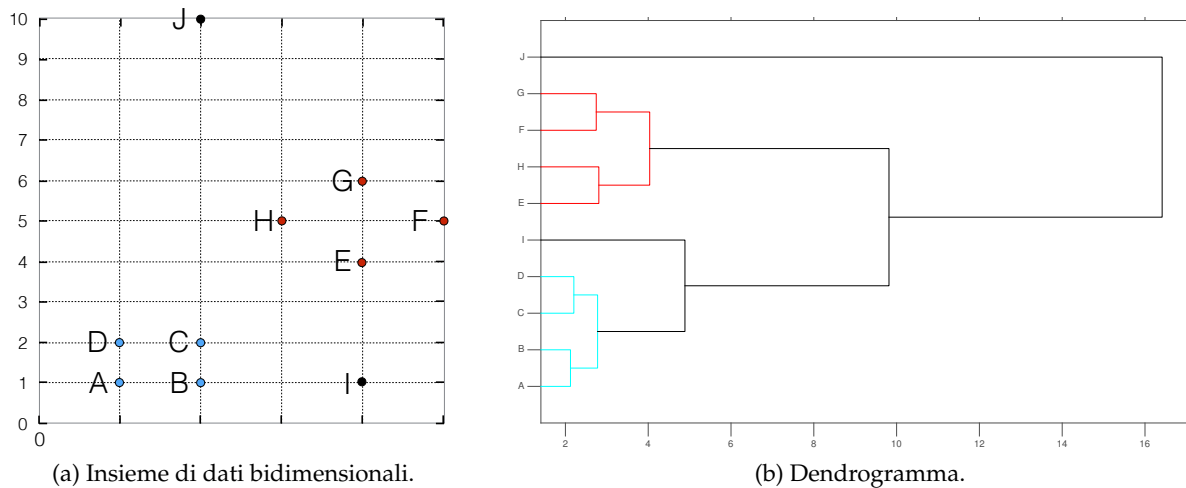


Figura 2.17: Dendrogramma che riporta la dissomiglianza tra dati. La struttura della nuvola di punti è fatta da due gruppi distinti e da due elementi outliers. Il dendrogramma riporta una tale struttura, rappresentando i due gruppi come cluster separati e unendo gli outliers ai cluster rispettando la loro posizione relativa rispetto alla configurazione della nuvola di punti.

Rappresentazione di dati tramite dendrogrammi

I dendrogrammi forniscono una rappresentazione intuitiva del clustering gerarchico di dati (si veda [Langfelder, Zhang e Horvath 2008], [W. L. Martinez, A. R. Martinez e Solka 2010] per una descrizione completa di questi argomenti). Si considerino i dati bidimensionali rappresentati come punti in \mathbb{R}^2 nella figura 2.17a. I dati formano due cluster e hanno due elementi distaccati (*outliers*) etichettati come *I* e *J*. L'asse orizzontale del dendrogramma rappresenta la distanza (o dissomiglianza) tra i cluster, mentre ogni oggetto è rappresentato dalla sua etichetta nell'asse verticale. L'informazione che restituisce il dendrogramma riguarda quindi la somiglianza e il clustering tra dati. Ogni unione è rappresentata dalla divisione di una linea orizzontale in due linee orizzontali. La posizione della divisione consente di recuperare la distanza tra due cluster. Osservando il dendrogramma nella figura 2.17b, si può vedere come i due cluster principali sono rappresentati come rami che stanno circa alla stessa distanza. I valori anomali sono congiunti a distanze ben più elevate.

I valori presenti all'interno di un dendrogramma sono chiamati *foglie* (o *leaves*, in inglese).

Calcolo del dendrogramma Si consideri un gruppo di n oggetti e sia $D = (d_{uv})$ la matrice che rappresenta la distanza tra i cluster u e v , composti da n_u e n_v oggetti rispettivamente. Il dendrogramma è calcolato come segue:

1. Si trovano i cluster \bar{u} e \bar{v} tali che $d_{\bar{u}\bar{v}}$ è minimo in D .
2. Si raggruppano \bar{u} e \bar{v} in un nuovo cluster z con $n_z = n_u + n_v$ oggetti.
3. Occorre ora ricalcolare le distanze tra il nuovo cluster z e gli altri cluster w , ottenendo una nuova matrice di distanze; a ogni tipo di distanza calcolata corrisponde la scelta di un diverso algoritmo. Citiamo alcuni degli algoritmi più utilizzati:

	<i>Sicut</i>	<i>Estote</i>	<i>Discendi</i>	<i>Se Tu m'accogli</i>
<i>Sicut</i>	0	0,7585	1,6229	1,3089
<i>Estote</i>	0,7585	0	1,5336	1,2251
<i>Discendi</i>	1,6229	1,5336	0	1,0962
<i>Se Tu m'accogli</i>	1,3089	1,2251	1,0962	0

Tabella 2.5: Matrice delle distanze DTW tra i brani analizzati in questi esempi.

- Il *linkage singolo* (*single*) assegna la distanza:

$$d_{zw} = \min\{d(z_i, w_j) \mid i \in \{1, 2, \dots, n_z\}, j \in \{1, 2, \dots, n_w\}\}$$

- il *linkage completo* (*complete*) assegna come distanza:

$$d_{zw} = \max\{d(z_i, w_j) \mid i \in \{1, 2, \dots, n_z\}, j \in \{1, 2, \dots, n_w\}\}$$

- nel *linkage medio* (*average*) la distanza tra cluster è definita come media aritmetica delle distanze:

$$d_{zw} = \sum_{\substack{i=1, \dots, n_z \\ j=1, \dots, n_w}} \frac{d(z_i, w_j)}{n_z \cdot n_w}$$

- il *linkage pesato* (*weighted*), infine, assegna la seguente distanza:

$$d_{zw} = \frac{d(\bar{u}, w) + d(\bar{v}, w)}{2}$$

4. Si iterano i passaggi precedenti.

Il metodo del clustering gerarchico ha una proprietà fondamentale: l'assegnazione di un oggetto a un cluster è *irrevocabile*, ovvero una volta che un oggetto è entrato a far parte di un cluster, non ne viene più rimosso.

Esempio 2.7.2. Proviamo ad applicare il clustering gerarchico ai brani analizzati nell'esempio 2.7.1.

Per allargare la complessità del dendrogramma, aggiungiamo all'analisi una versione del corale *Wer nur den lieben Gott läßt walten*, armonizzato da Johann Sebastian Bach su melodia di Georg Neumark (di seguito riportato col titolo della versione in italiano, *Se Tu m'accogli*), già citato a pagina 24; una volta analizzati i suoi voice leading, le distanze DTW rispetto agli altri brani sono riportate, insieme a quelle della tabella 2.4, nella tabella 2.5.

Dalle distanze delle tabelle 2.4 e 2.5 si ottiene il dendrogramma riportato in figura 2.18 a fronte. Si può vedere come ci siano due cluster nettamente distinti: uno formato dai due brani del 1500, caratterizzati da una grande indipendenza tra le voci, l'altro formato dai due brani più omoritmici, sebbene *Se Tu m'accogli* riporti una complessità maggiore rispetto a *Discendi Santo Spirito*.

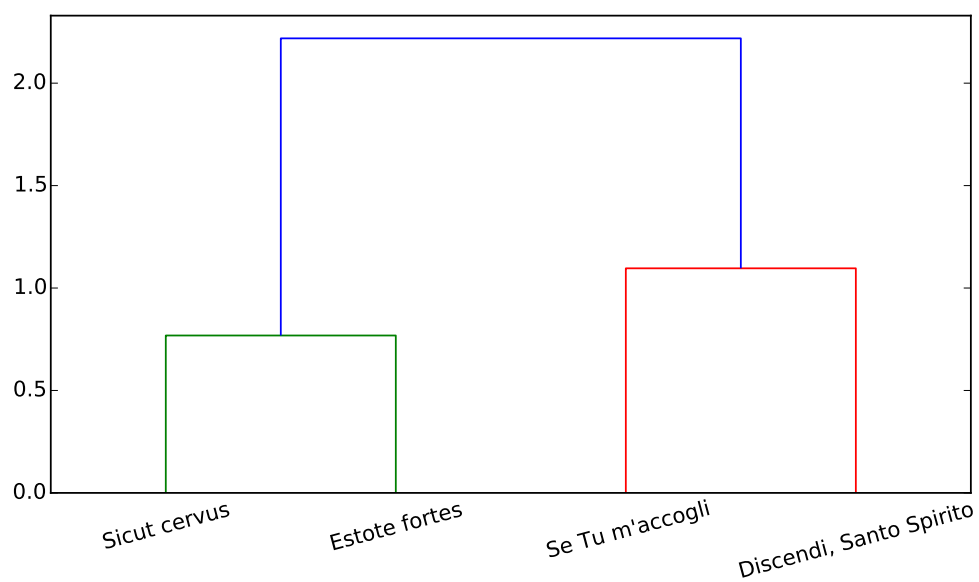


Figura 2.18: Dendrogramma che rappresenta il clustering tra i quattro brani polifonici analizzati in precedenza.

Capitolo 3

Metodi e risultati

In questo capitolo sarà mostrato il procedimento sperimentale utilizzato per l'analisi: nella prima sezione sono presentati i metodi con cui essa è stata affrontata, per poi descrivere i brani analizzati e infine riportare e commentare i risultati.

3.1 Algoritmo e metodi utilizzati

Il linguaggio utilizzato per l'analisi è Python, versione 2.7.10; l'algoritmo iniziale è quello utilizzato in [Bergomi 2015, Parte 2] e [Bergomi, Jadanza e Portaluri 2015], opportunamente adattato per gli scopi di questa tesi.

I brani analizzati, in formato MIDI, vengono codificati come liste di pitch dal pacchetto Music21; i file MIDI sono creati con il software di scrittura musicale Finale; la versione del programma che è stata utilizzata è la versione 2012a.

I file MIDI devono presentare le seguenti caratteristiche:

- Ogni traccia del file riferita a voci diverse deve essere impostata su un canale diverso;
- Nel caso dei MIDI generati con Finale, occorre impostare Human Playback su *Nessuno* prima di esportare il file in formato MIDI, per evitare complicazioni nella fase di conteggio dei valori delle note, necessaria per quanto descritto nella sezione 3.1.3 nella pagina successiva;
- All'inizio della sperimentazione era necessario che ogni voce fosse in un file MIDI separato; si è poi modificato l'algoritmo di conversione MIDI, consentendo di inserire un unico file per ogni brano, riducendo sensibilmente le tempistiche di sperimentazione. Si è comunque conservata la possibilità precedente.

3.1.1 Gestione di strofe e ripetizioni

Nel corso dell'analisi, ci si è trovati di fronte a brani strofici, cioè nei quali la struttura armonica e melodica è ripetuta totalmente, cambiando soltanto il testo (ad esempio i corali, o le laude filippine). Poiché la struttura strofica di un brano non ne aumenta la complessità, si è deciso di considerarne solo una strofa; questo non influenza il calcolo delle distanze DTW (vedi

sezione 2.7 a pagina 45), poiché è pensata proprio per confrontare serie temporali di diversa lunghezza. Si sono invece mantenute ripetizioni interne.

3.1.2 Elaborazione delle pause

Poiché la pausa non è presente nelle informazioni sui pitch, è stato necessario riscriverle in modo tale che il programma le potesse leggere. Il metodo utilizzato è stato l'inserimento, al posto delle pause, delle note che non rientrassero in nessun tipo di estensione, sia umana che strumentale; nel nostro caso sono state scelte diverse note, una per ogni traccia:

- C_0 (pitch 12) per il basso;
- $C\sharp_0$ (pitch 13) per il tenore;
- D_0 (pitch 14) per il contralto;
- $D\sharp_0$ (pitch 15) per il soprano.

Di conseguenza, l'algoritmo riconosce i pitch sotto una certa soglia come pause, facilitando il procedimento; seguendo poi quanto detto nella sezione 2.6 a pagina 42, ogni pausa è stata ulteriormente identificata aumentando il suo valore di pitch di 500, essendo stata posta la pausa p come strettamente maggiore di qualsiasi altro pitch.

La sostituzione delle pause è stata effettuata tramite Finale. Occorre precisare che la scelta di pitch diversi è stata fatta soprattutto per facilitare *debugging* necessari.

3.1.3 Riduzione della specie del contrappunto

Come già detto nella sezione 2.6, i brani caratterizzati da indipendenza ritmica necessitano di una riduzione a contrappunto di prima specie; tuttavia occorre capire come scegliere l'unità ritmica minima su cui omogeneizzare il brano. Una possibilità, che è stata la prima utilizzata, consiste nel scegliere l'unità ritmica minima *globalmente*, cioè ricercando in tutto il brano da analizzare la figura minima presente e assumerla come unità; tuttavia è una scelta ingenua, poiché, ad esempio, esistono casi limite di poche semicrome su un brano intero di semiminime e crome: di fronte a un brano simile, quelle poche semicrome rischiano di assumere troppo peso nell'analisi di complessità; inoltre una suddivisione così elevata aumenta considerevolmente il costo computazionale, ed eliminare quelle semicrome arbitrariamente è una scelta poco ragionevole.

Si è scelto quindi di non escludere certi abbellimenti a priori, bensì di *dare un peso* ad ogni valore: è stato scritto quindi un algoritmo, che effettua i seguenti passaggi:

1. Dato un file MIDI in input, estrae le durate delle note effettivamente eseguite (escludendo quindi le pause) per ogni voce del brano;
2. Conta le note per ogni valore presente, e ne calcola lo spazio occupato relativamente al tempo di effettiva esecuzione del brano, restituendo in output le percentuali risultanti.

Impostati dei valori di soglia, si decreta in base ad essi quale unità ritmica assumere come globale, quale come locale e quali ritmi semplificare in elementi di durata maggiore. I valori scelti per l'analisi sono stati i seguenti:

- valori ritmici che occupano una percentuale $x \leq 1$ nel brano vengono semplificati;
- valori ritmici che occupano una percentuale $x \in]1, 4]$, vengono considerati solo localmente;
- il valore più piccolo che supera la percentuale del 4%, diventa la suddivisione globale del brano.

Si precisa che la semplificazione dei valori ritmici è stata effettuata in modo tale da aumentare la complessità; si rimanda a figura 3.1 nella pagina seguente per un esempio effettivo di semplificazione, e a figura 3.2 per uno di suddivisione locale.

L'algoritmo, per come è strutturato in questa tesi, non gestisce i gruppi irregolari come, ad esempio, le terzine. Avendo tuttavia riscontrato un solo caso di terzina sui brani analizzati in totale (riportati nella sezione 3.2), questa è stata riscritta in modo ragionevole, cercando un'approssimazione il più vicina possibile alla struttura metrica originale (tale caso è riportato e spiegato in figura 3.3 nella pagina successiva).

3.1.4 Calcolo della matrice di permutazione parziale

La matrice di permutazione parziale è stata ottenuta con il seguente algoritmo:

1. Preso in input il voice leading $M \rightarrow L$, con M e L multiinsiemi, valuta le molteplicità di ogni $x \in M$ e di ogni $y \in L$;
2. Genera il multiinsieme *ordinato* $U := M \cup L$;
3. Inizializza $P \in M_{|U|}(\mathbb{R})$ ponendo $P(i, j) = 0 \quad \forall i, j$;
for $i, j \in \{1, \dots, |U|\}$ **do**
 if $U(i) \rightarrow U(j)$ **then**
 $P(i, j) = 1$
 end if
end for
4. L'output è la matrice P di permutazione parziale associata al voice leading.

Dalla matrice ricavata con questo algoritmo, si calcola la complessità del voice leading, come descritto nelle sezioni 2.5 e 2.6; questo per ogni voice leading presente nel brano. I vettori di complessità vengono poi memorizzati in un array unico, che rappresenta quindi la concatenazione di tutti i voice leading del brano.

3.1.5 Studio del voice crossing esteso e dell'unisono

Una delle modifiche più consistenti all'algoritmo utilizzato in [Bergomi 2015] è stata la possibilità di studiare anche il voice crossing esteso come definito nella definizione 2.5.2 a pagina 39, e lo studio dell'unisono, come accennato nell'osservazione 2.5 a pagina 40. I due aspetti sono molto legati tra loro, dato che per avere un crossing esteso su più voice leading occorre che prima si verifichi una sovrapposizione all'unisono.



(a) Il passaggio prima della semplificazione della coppia di semicrome.



(b) Il passaggio dopo la semplificazione; è stata conservata la nota che mantiene una complessità maggiore.

Figura 3.1: Esempio di semplificazione di una coppia di semicrome.



(a) Il passaggio prima della suddivisione.



(b) Il passaggio dopo la suddivisione: per la suddivisione globale è stata scelta la semiminima, per quella locale la croma.

Figura 3.2: Esempio di suddivisione locale e globale; il frammento originale è tratto da *In flagellis*, di Josquin Desprez (1440-1521).



(a) Il passaggio originale.



(b) Il passaggio con la terzina approssimata.

Figura 3.3: La terzina rappresentata nella figura (a) è presente nel brano *Absalon, fili mi*, di Pierre de la Rue, a battuta 47. Quanto fatto è stato cercare la migliore approssimazione con valori composti di ogni valore della terzina, che risulta essere $\frac{2}{3} = 0,6\bar{6}$ della battuta. Il risultato è stato raggiunto in modo soddisfacente con una minima e una croma col punto, il cui valore totale è di $\frac{11}{16} = 0,6875$. Essendo un'approssimazione per eccesso, all'ultima minima è stata aggiunta solo una croma, ottenendo così un valore di $\frac{5}{8} = 0,625$. Tale soluzione è quella rappresentata nella figura (b). Le semicrome aggiunte in questa approssimazione sono state trascurate nella suddivisione.

Per fare ciò, è stato esteso l'input della funzione principale dell'algoritmo, aggiungendovi un vettore `prob_cross` inizialmente vuoto, nel quale segnare le voci che potrebbero effettuare un crossing passando per l'unisono.

Di conseguenza, è stato ampliato il passaggio relativo al voice crossing nel modo seguente:

1. si considerano gli indici (i, j) relativi agli elementi non nulli a_{ij} della matrice M e se ne considerano le combinazioni $((i, j), (k, l))$; i e k sono gli indici relativi alla nota di partenza delle due voci nel voice leading, j e l si riferiscono all'arrivo.
2. si verificano i pitch relativi agli indici n_i, n_j, n_k, n_l ;
if $n_i \neq n_k$ **and** $n_j \neq n_l$ **then**
 si segue il procedimento indicato nella proposizione 2.5.1 a pagina 39;
else:
 - (a) **if** $n_i \neq n_k$ **and** $n_j = n_l$ **then**
 Le voci sono arrivate all'unisono.
 Aggiunge a `prob_cross` una componente dove sono indicate le voci giunte all'unisono, e la posizione reciproca prima della sovrapposizione.
 Viene aumentata di 1 la componente del vettore di complessità c relativa all'unisono.
 - (b) **if** $n_i = n_k$ **and** $n_j = n_l$ **then**
 Le voci sono rimaste all'unisono.
 Aumenta di 1 il conteggio delle voci in unisono.
 - (c) **if** $n_i = n_k$ **and** $n_j \neq n_l$ **then**
 Le voci non sono più all'unisono.
 Se le voci erano già segnate in `prob_cross` e hanno cambiato la posizione reciproca, è avvenuto un voice crossing.
 Una volta segnato l'eventuale crossing, viene eliminata la componente di `prob_cross` legata alle voci analizzate.

Sono presente alcune eccezioni legate ai voice leading iniziali e a quelli contenenti pause, ma non sono riportati qui per semplicità. L'intero codice è riportato nelle appendici, nella sezione B.3.1 a pagina 162.

Si precisa inoltre che l'algoritmo è stato impostato perché l'unisono venga contato all'arrivo in unisono, in modo da non contare lo stesso due volte, fatta eccezione per alcuni casi.

3.1.6 Analisi tramite DTW e clustering gerarchico

Una volta calcolate le collezioni di vettori di complessità per tutti i brani del dataset, si confrontano tramite la DTW; Python dispone del pacchetto DTW, contenente le funzioni necessarie per questo tipo di analisi. L'analisi è stata effettuata con diverse funzioni costo (norma euclidea, norma 1, norma 3, norma 4, norma 5, norma 6, norma 7 e norma infinito), per rilevare quale distanza desse risultati migliori nel calcolo dei cluster: questa ricerca è possibile, perché non esiste un'unica metrica che rende semplice la geometria relativa alle serie temporali (si veda

al riguardo [Esling 2012]); sono state riportate tutte le metriche perché si possa osservare nei dendrogrammi (sezione 3.3.3) la differenza di applicazione delle diverse norme.

Successivamente le distanze calcolate vengono inserite in una matrice simmetrica e sottoposte al calcolo del linkage per verificare i cluster. Sono stati usati tutti i metodi di linkage citati nella sezione 2.7.2 a pagina 49, allo scopo di trovare il metodo che desse risultati migliori.

Per il calcolo del clustering gerarchico e del dendrogramma, Python dispone del pacchetto Scipy, contenente al suo interno tutte le funzioni necessarie. In particolare, il calcolo è dato da 3 fasi:

1. Attraverso la funzione `pdist`, si rende la matrice delle distanze simmetrica una *matrice di distanze condensata*;
2. Si dà in input alla funzione `linkage` la matrice appena ottenuta con altri 3 parametri:
 - `method`: il metodo di linkage, scelto tra i metodi già citati utilizzando una stringa riportante il nome in inglese ('single', 'complete', 'average' e 'weighted'), oltre ad alcuni metodi da noi non utilizzati ('median', 'centroid' e 'ward'); in ogni caso, sono tutti ben descritti nelle reference relative [Scipy Community 2017]. Il metodo predefinito è il linkage singolo.
 - `metric`: la metrica della distanza da utilizzare nel caso in cui la matrice sia un insieme di vettori di osservazione, altrimenti è ignorata. Nel nostro caso è stata conservata quella predefinita, 'euclidean'.
 - Dalla versione 1.0.0 del pacchetto è stato aggiunto un nuovo parametro di input, `optimal_order`: se il valore di questo è impostato su `True`, la matrice di linkage risultante sarà ordinata in modo tale che la distanza tra due foglie successive del dendrogramma visualizzato sia minima, rendendo la visualizzazione ben più intuitiva. L'impostazione predefinita è `False`, perché nel caso di dataset molto ampi questo algoritmo risulta molto lento (si rimanda a [Bar-Joseph, Gifford e Jaakkola 2001] per approfondimenti al riguardo). Essendo il nostro dataset non molto ampio, abbiamo impostato il valore su `True`.
3. Si visualizza poi il dendrogramma usando la funzione `dendrogram`, inserendovi in input il risultato del linkage appena descritto, insieme ad altri parametri (come il nome delle etichette e l'orientamento dell'immagine); per approfondimento è riportato il codice nell'appendice B.4 a pagina 171.

3.2 Brani analizzati

Nel corso della sperimentazione sono stati analizzati 60 brani, tutti a tre o quattro voci, composti nel periodo che va dai compositori franco fiamminghi (sezione 1.2.2) ai corali di Bach (sezione 1.2.5), toccando ogni scuola appartenente a questo lasso di tempo e descritta nella sezione 1.2, concentrandosi principalmente sulla scuola romana del 1500 e i corali. Non sono state considerate Messe o loro parti.

In tabella 3.1 sono riportati i brani analizzati, con autore o attribuzioni, anno o riferimento bibliografico. La fonte principale dei corali è stata [Bach e Richter (curatore) 1912]. La maggior parte dei corali armonizzati da Bach presentano diverse armonizzazioni, dovute al contesto di esecuzione e alle coppie di strofe indicate. Abbiamo quindi deciso di analizzare diverse armonizzazioni del corale *Wer nur den lieben Gott Läßt walten* per osservare come si sarebbero collocate secondo il linkage.

Successivamente i brani saranno indicati con i titoli indicati in tabella, o con abbreviazioni che comunque ne consentano l'immediato riconoscimento. Le partiture sono riportate nella relativa appendice C a pagina 173.

Tabella 3.1: Elenco dei brani analizzati. Per il corale di Bach *Wer nur den lieben Gott Läßt walten* è stato riportato il titolo della versione in italiano, *Se Tu m'accogli*.

	Autore	Titolo	Anno/Codice, opera
1	Anonimo	<i>Anima Christi</i>	1507, <i>Laude libro secondo</i>
2	Pierre de la Rue (attr. Desprez)	<i>Absalon, fili mi</i>	1510?
3	Pierre de la Rue	<i>O salutaris Hostia</i>	?
4	Pierre de la Rue	<i>Vexilla Regis</i>	?
5	Josquin Desprez	<i>O Jesu, fili David</i>	1510?
6	J. Desprez (attr.)	<i>In flagellis</i>	?
7	J. Desprez	<i>Ecce, tu pulchra es</i>	?
8	J. Desprez	<i>Ave Christe, immolate</i>	?
9	J. Desprez	<i>Salve, Lux mundi</i>	2 ^a parte di <i>Ave Christe</i>
10	J. Desprez	<i>De profundis</i>	?
11	J. Desprez	<i>A custodia</i>	2 ^a parte di <i>De profundis</i>
12	Adrien Willaert	<i>Ave Maria, gratia plena</i>	1539?
13	A. Willaert	<i>Regina Coeli, laetare</i>	1545?
14	Andrea Gabrieli	<i>Angelus ad pastores ait</i>	1576, <i>Ecclesiasticarum cantionum quatuor vocum</i>
15	A. Gabrieli	<i>Te Deum Patrem ingenitum</i>	n.63 in [Proske 1854]
16	A. Gabrieli	<i>Angeli, Archangeli</i>	n.125 in <i>ibid.</i>
17	A. Gabrieli	<i>Tollite jugum meum</i>	n.137 in <i>ibid.</i>
18	Giovanni P. da Palestrina	<i>Ave Maria</i>	1564, <i>Motecta festorum totius anni</i>
19	G.P. da Palestrina	<i>Sicut cervus</i>	1564, <i>ibid.</i>
20	G.P. da Palestrina	<i>Sitivit anima mea</i>	2 ^a parte di <i>Sicut cervus</i>
21	G.P. da Palestrina	<i>Super flumina Babylonis</i>	1564, <i>ibid.</i>
22	G.P. da Palestrina	<i>Alma redemptoris Mater</i>	?
23	G.P. da Palestrina	<i>Regina Coeli</i>	?
24	G.P. da Palestrina	<i>Adoramus Te, Christe</i>	1584
25	G.P. da Palestrina	<i>Jesu! Rex admirabilis</i>	1586, <i>Diletto spirituale</i>

Continua nella prossima pagina

Continua dalla pagina precedente

	Autore	Titolo	Anno/Codice, opera
26	G.P. da Palestrina	<i>Tua Jesu dilectio</i>	1586, <i>ibid.</i>
27	G.P. da Palestrina	<i>Jesu, flos matris Virginis</i>	1586, <i>ibid.</i>
28	G.P. da Palestrina	<i>Conditor alme siderum</i>	1589, <i>Himni totius anni</i>
29	Tomás L. de Victoria (attr.)	<i>Jesu dulcis memoria</i>	?
30	T.L. de Victoria	<i>O magnum Mysterium</i>	1572, <i>Motecta</i> , libro 1
31	T.L. de Victoria	<i>Ne timeas Maria</i>	1572, <i>ibid.</i>
32	T.L. de Victoria	<i>Amicus meus</i>	1585, <i>Officium Hebdomadae Sanctae</i>
33	T.L. de Victoria	<i>Eram quasi agnus</i>	1585, <i>ibid.</i>
34	T.L. de Victoria	<i>Tenebrae factae sunt</i>	1585, <i>ibid.</i>
35	T.L. de Victoria	<i>Animam meam dilectam</i>	1585, <i>ibid.</i>
36	T.L. de Victoria	<i>Caligaverunt oculi mei</i>	1585, <i>ibid.</i>
37	T.L. de Victoria	<i>Astiterunt reges</i>	1585, <i>ibid.</i>
38	T.L. de Victoria	<i>Popule meus, quid feci tibi?</i>	1585, <i>ibid.</i>
39	Luca Marenzio	<i>Quem dicunt homines</i>	1588, <i>Motetorum pro festis totius anni</i>
40	L. Marenzio	<i>Estote fortes in bello</i>	1588, <i>ibid.</i>
41	Marc'Antonio Ingegneri (attr. Palestrina)	<i>O bone Jesu</i>	1588?
42	M.A. Ingegneri	<i>Amicus meus</i>	1588, <i>Responsoria Hebdomadae Sanctae</i>
43	M.A. Ingegneri	<i>Eram quasi agnus innocens</i>	1588, <i>ibid.</i>
44	Anonimo	<i>Stava a' pie' della croce</i>	1588
45	Anonimo (F. Soto de Langa attr.)	<i>Interna sete ardente</i>	1591, <i>Il quinto libro delle Laudi Spirituali a tre et a quattro voci</i>
46	Anonimo (<i>ibid.</i>)	<i>O cor soave</i>	1591, <i>ibid.</i>
47	Anonimo (<i>ibid.</i>)	<i>S'acceso ha del suo foco</i>	1591, <i>ibid.</i>
48	Fra Marc'Antonio da San Germano	<i>Cristo al morir tendea</i>	1599, <i>Tempio armonico della Beatissima Vergine</i>
49	Francesco Soto de Langa	<i>Nell'apparir del sempiterno sole</i>	1599, <i>ibid.</i> ; versione a 3 voci
50	F. Soto de Langa	<i>Nell'apparir del sempiterno sole</i>	1599, <i>ibid.</i> ; versione a 4 voci
51	Johann S. Bach (attr.)	<i>Accetta questo pane</i>	?
52	J.S. Bach	<i>Allein Gott in der Höh' sei Ehr'</i>	n.12 in [Bach e Richter (curatore) 1912]
53	J.S. Bach	<i>Aus meines Herzens Grunde</i>	n.30 in <i>ibid.</i>
54	J.S. Bach	<i>O caput cruentatum</i>	BWV270
55	J.S. Bach	<i>Per Te, Signore</i>	BWV374
56	J.S. Bach	<i>Se Tu m'accogli</i>	BWV434, n.370 in [Bach e Richter (curatore) 1912]

Continua nella prossima pagina

Continua dalla pagina precedente

	Autore	Titolo	Anno/Codice, opera
57	J.S. Bach	<i>Se Tu m'accogli</i>	n.367 in <i>ibid.</i>
58	J.S. Bach	<i>Se Tu m'accogli</i>	n.371 in <i>ibid.</i>
59	J.S. Bach	<i>Se Tu m'accogli</i>	n.368 in <i>ibid.</i>
60	Albert Schweitzer	<i>Discendi, Santo Spirito</i>	?

Si conclude da pagina 59

Nelle fonti utilizzate, alcuni brani sono indicati come la seconda parte di un brano già analizzato, precisazione riportata anche nella tabella precedente; questo accade perché il testo cantato, preso dallo stesso salmo o dalla stessa preghiera, è il proseguo di quello precedente. Brani di questo tipo sono storicamente eseguibili sia in sequenza che indipendentemente l'uno dall'altro, per questo motivo sono stati inseriti come brani distinti.

Si ponga attenzione ai brani attribuiti ad alcuni autori, di cui si è poi identificato l'autore originale o meno: sono stati inseriti, unitamente ad altri brani dell'autore originale, per osservare come si sarebbero collocati all'interno dell'analisi.

3.3 Risultati

3.3.1 Riduzione della specie del contrappunto

L'algoritmo di riconoscimento di suddivisione locale e globale descritto nella sezione 3.1.3 è stato applicato a tutti i brani. In tabella 3.2 sono riportati i valori ritmici risultanti per ogni brano, con le relative percentuali. I valori ritmici relativi ad ogni brano sono riferiti alle versioni degli spartiti riportate nell'appendice C.

Per motivi di brevità e impaginazione, alcuni nomi dei valori sono stati abbreviati nel modo seguente (si rimanda poi alla tabella 1.2 a pagina 7 per un elenco completo dei valori ritmici):

- Semibreve → Semibr.
- Semiminima → Semimin.
- Semicroma → Semicr.

Tabella 3.2: Risultati della valutazione del peso dei valori ritmici, necessari per la suddivisione. I valori sono indicati col nome corrente in italiano (o con una sua abbreviazione), seguiti dalla percentuale di occorrenza nel brano.

	Titolo	Sudd. globale e perc.	Sudd. locale e perc.	Trascurabili e perc.
1	<i>Anima Christi</i>	Semimin. 8,52%	-	-
2	<i>Absalon, fili mi</i>	Semimin. 7,80%	-	Croma 0,13%
3	<i>O salutaris Hostia</i>	Croma 11,01%	Semicr. 2,43%	-
4	<i>Vexilla Regis</i>	Semimin. 6,49%	-	Croma 0,64%

Continua nella prossima pagina

Continua dalla pagina precedente

Titolo	Sudd. globale e perc.	Sudd. locale e perc.	Trascurabili e perc.
5 <i>O Jesu, fili David</i>	Semimin. 10,05%	-	Croma 0,06%
6 <i>In flagellis</i>	Semimin. 35,44%	Croma 2,71%	Semicr. 0,60%
7 <i>Ecce tu pulchra es</i>	Semimin. 5,63%	-	-
8 <i>Ave Christe immolate</i>	Semimin. 4,46%	-	-
9 <i>Salve Lux mundi</i>	Semimin. 4,55%	-	-
10 <i>De profundis</i>	Semimin. 10,27%	-	Croma 0,05%
11 <i>A custodia</i>	Semimin. 9,31%	-	Croma 0,64%
12 <i>Ave Maria (Willaert)</i>	Croma 6,29%	-	Semicr. 0,18%
13 <i>Regina Coeli (Willaert)</i>	Croma 11,18%	-	Semicr. 0,61%
14 <i>Angelus ad pastores</i>	Semimin. 6,22%	-	Croma 0,16%
15 <i>Te Deum</i>	Semimin. 7,90%	-	Croma 0,33%
16 <i>Angeli Archangeli</i>	Semimin. 4,03%	-	Croma 0,28%
17 <i>Tollite jugum meum</i>	Semimin. 6,15%	-	Croma 0,26%
18 <i>Ave Maria (Palestrina)</i>	Semimin. 5,46%	-	Croma 0,15%
19 <i>Sicut cervus</i>	Semimin. 9,71%	-	-
20 <i>Sitioit anima mea</i>	Semimin. 10,97%	-	Croma 0,25%
21 <i>Super flumina</i>	Croma 12,10%	-	Semicr. 0,16%
22 <i>Alma redemptoris</i>	Croma 6,22%	-	Semicr. 0,14%
23 <i>Regina Coeli (Palestrina)</i>	Semimin. 13,02%	-	Croma 0,47%
24 <i>Adoramus Te, Christe</i>	Croma 7,30%	-	Semicr. 0,41%
25 <i>Jesu Rex</i>	Croma 11,56%	-	-
26 <i>Tua Jesu dilectio</i>	Croma 8,33%	-	-
27 <i>Jesu flos</i>	Croma 9,18%	-	-
28 <i>Conditor</i>	Semimin. 7,66%	-	Croma 0,40%
29 <i>Jesu dulcis</i>	Croma 5,83%	-	Semicr. 0,83%
30 <i>O magnum</i>	Croma 13,62%	-	Semicr. 0,26%
31 <i>Ne timeas</i>	Croma 11,03%	-	Semicr. 0,51%
32 <i>Amicus (Victoria)</i>	Semimin. 35,26%	Croma 3,31%	Semicr. 0,28%
33 <i>Eram quasi agnus</i>	Semimin. 46,75%	Croma 3,52%	-
34 <i>Tenebrae factae sunt</i>	Croma 4,76%	-	Semicr. 0,19%
35 <i>Animam meam</i>	Croma 7,11%	-	Semicr. 0,05%
36 <i>Caligaverunt</i>	Croma 4,33%	-	Semicr. 0,19%
37 <i>Astiterunt reges</i>	Croma 4,58%	-	Semicr. 0,09%
38 <i>Popule meus</i>	Semimin. 30,28%	Croma 2,57%	-
39 <i>Quem dicunt</i>	Semimin. 12,43%	-	Croma 0,34%
40 <i>Estote fortes</i>	Croma 16,72%	Semicr. 1,26%	-
41 <i>O bone Jesu</i>	Semimin. 11,75%	Croma 1,91%	-
42 <i>Amicus (Ingegneri)</i>	Semimin. 4,38%	-	Croma 0,13%

Continua nella prossima pagina

Continua dalla pagina precedente

	Titolo		Sudd. globale e perc.	Sudd. locale e perc.	Trascurabili e perc.	
43	<i>Eram quasi agnus</i> (Ingeneri)	Minima	46,29%	-	Semimin.	0,76%
44	<i>Stava a' pie'</i>	Croma	4,08%	-	-	-
45	<i>Interna sete</i>	Croma	4,60%	-	-	-
46	<i>O cor soave</i>	Croma	9,33%	-	-	-
47	<i>S'acceso</i>	Semimin.	52,28%	Croma	3,22%	-
48	<i>Cristo al morir</i>	Croma	12,13%	-	-	-
49	<i>Nell'apparir a 3 v.</i>	Croma	8,39%	-	-	-
50	<i>Nell'apparir a 4 v.</i>	Croma	7,33%	-	-	-
51	<i>Accetta questo pane</i>	Croma	11,79%	-	-	-
52	<i>Allein Gott</i>	Croma	32,37%	Semicr.	2,01%	-
53	<i>Aus meines</i>	Croma	11,90%	-	-	-
54	<i>O caput cruentatum</i>	Croma	19,92%	-	-	-
55	<i>Per Te, Signore</i>	Croma	14,42%	-	-	-
56	<i>Se Tu m'accogli</i>	Croma	13,18%	-	-	-
57	<i>Se Tu m'accogli 2</i>	Croma	26,54%	-	Semicr.	0,66%
58	<i>Se Tu m'accogli 3</i>	Croma	23,44%	Semicr.	2,90%	-
59	<i>Se Tu m'accogli 4</i>	Croma	20,09%	-	-	-
60	<i>Discendi</i>	Semimin.	56,77%	-	-	-

Si conclude da pagina 61

3.3.2 Distanze DTW

Le tabelle che rappresentano le matrici delle distanze DTW sono riportate interamente nell'appendice A a pagina 115. A causa dell'ampiezza delle matrici, ognuna di esse è riportata in 5 tabelle, ognuna contenente 12 colonne. Qui di seguito i riferimenti per ogni norma:

- Norma euclidea: tabelle A.1, A.2, A.3, A.4, A.5, a partire da pagina 116;
- Norma 1: tabelle A.6, A.7, A.8, A.9, A.10, a partire da pagina 121;
- Norma 3: tabelle A.11, A.12, A.13, A.14, A.15, a partire da pagina 126;
- Norma 4: tabelle A.16, A.17, A.18, A.19, A.20, a partire da pagina 131;
- Norma 5: tabelle A.21, A.22, A.23, A.24, A.25, a partire da pagina 136;
- Norma 6: tabelle A.26, A.27, A.28, A.29, A.30, a partire da pagina 141;
- Norma 7: tabelle A.31, A.32, A.33, A.34, A.35, a partire da pagina 146;
- Norma infinito: tabelle A.36, A.37, A.38, A.39, A.40, a partire da pagina 151.



Figura 3.4: Cammino di warping ottimale sulle armonizzazioni a tre e quattro voci di *Nell'apparir del sempiterno sole*, con la norma 1 come funzione costo. Come si vede, il cammino è totalmente in diagonale, segno che il costo dell'allineamento delle osservazioni tra i due brani era sempre minore del costo dell'introduzione di un *gap*, e una scelta ottima rispetto a qualunque deformazione del segnale.

Chiaramente non commenteremo ogni singola distanza DTW, essendo oltre 1700 per ogni norma. È però possibile fare alcune considerazioni su delle distanze esemplari e su alcune distanze importanti per ogni matrice, come quelle massime e minime.

La distanza minima calcolata per ogni norma, eccetto che per la norma 1, è relativa sempre ai due medesimi brani, *Jesu Rex* e *Tua Jesu dilectio* (posizione (25, 26) delle tabelle in A), due brani di Palestrina a tre voci prevalentemente omoritmici, appartenenti alla stessa opera; nella norma 1 la distanza minima è relativa alle due armonizzazioni della lauda *Nell'apparir del sempiterno sole*, una a tre e una a quattro voci (posizione (49, 50) delle tabelle in appendice). La distanza tra questi due brani in particolare è molto piccola per tutte le norme utilizzate (0, 5087 per la norma euclidea). Questo è un risultato molto interessante: difatti nell'armonizzazione a quattro voci le due voci superiori sono state conservate, mentre la voce inferiore, prima affidata alla voce del tenore, è stata abbassata di un'ottava e assegnata al basso, dando al tenore una voce aggiuntiva. L'andamento di tre parti è quindi completamente conservato, e questa somiglianza è in parte riconosciuta dal DTW (in figura 3.4 è riportato il cammino di warping ottimale sui due brani), sebbene in generale vi sia una distinzione molto significativa tra le composizioni a tre e a quattro voci.

Allo stesso modo, la distanza massima osservata nel dataset è risultata essere per tutte le norme quella tra i brani *De profundis* di Desprez e *Discendi Santo Spirito* (con un valore di 1, 9828 per la norma euclidea, posizione (10, 60) e simmetrica delle tabelle in appendice), tranne che per la norma 1, nella quale questa distanza è la seconda più grande; per la norma 1 la massima dissomiglianza è tra *Ecce tu pulchra es* di Desprez e il *Discendi*, distanza che nelle altre norme è la seconda più grande (posizione (7, 60) e simmetrico). Anche questo è un ottimo risultato, poiché i due brani di Desprez e il brano di Schweitzer sono agli antipodi della sequenza temporale

	<i>Se Tu m'accogli</i>	<i>Se Tu m'accogli 2</i>	<i>Se Tu m'accogli 3</i>	<i>Se Tu m'accogli 4</i>
<i>Se Tu m'accogli</i>	0	0,6586	0,7516	0,5677
<i>Se Tu m'accogli 2</i>	0,6586	0	0,6215	0,5751
<i>Se Tu m'accogli 3</i>	0,7516	0,6215	0	0,7025
<i>Se Tu m'accogli 4</i>	0,5677	0,5751	0,7025	0

Tabella 3.3: Matrice delle distanze DTW tra le armonizzazioni di *Se Tu m'accogli* calcolate con la norma euclidea.

(a) Inizio di *Se Tu m'accogli*.

(b) Inizio di *Se Tu m'accogli 2*.

(c) Inizio di *Se Tu m'accogli 3*.

(d) Inizio di *Se Tu m'accogli 4*.

Figura 3.5: Inizio di ogni armonizzazione di *Se Tu m'accogli*.

da noi considerata, oltre ad essere composti con uno stile considerevolmente diverso (i primi due sono contrappunti a carattere imitativo, mentre il *Discendi* è una composizione totalmente omoritmica).

Oltre a massimi e minimi delle matrici, ci soffermiamo ad osservare le distanze DTW relative alle diverse armonizzazioni del corale di Bach *Se Tu m'accogli*, per le quali riportiamo la sottomatrice relativa alle distanze per la norma euclidea in tabella 3.3.

Già osservando gli inizi delle armonizzazioni, riportati in figura 3.5, si intuisce quali siano quelle più simili. La prima armonizzazione e la quarta hanno la stessa linea di basso, e i movimenti sono complessivamente analoghi; la seconda e la quarta hanno le prime due battute con un andamento delle parti estremamente confrontabili (si vede bene nelle voci di contralto e tenore), mentre la seconda e la terza sono più movimentate, sebbene la complessità di quest'ultima sia ben più elevata. Le distanze DTW rispecchiano molto bene queste somiglianze o diversità: la distanza tra la prima e la quarta armonizzazione è infatti la distanza minore, seguita da quella tra seconda e quarta; la distanza dalla quarta è la distanza minore per la terza armonizzazione, la cui distanza dalla prima è la più alta dell'insieme.

Questa struttura è conservata nelle norme di ordine superiore, mentre le norme 1 e infinito spostano alcuni equilibri: in queste due norme, ad esempio, la distanza minore del set è tra la seconda e la quarta armonizzazione, seguita da quella tra prima e quarta, mentre quella maggiore è sempre tra prima e terza.

Gli esempi qui riportati sono un esempio di come le distanze DTW riflettano una serie di

relazioni sperate; ve ne sono state altre invece inattese oppure non riscontrate. Riportiamo ad esempio alcuni casi.

Nella sezione 3.2 abbiamo accennato all'aspetto dei brani legati da un punto di vista semantico, come i brani composti su un testo unico: le coppie di questo tipo sono quelle formate da *Ave Christe immolate* e *Salve lux mundi*, *De profundis* e *A custodia*, *Sicut cervus* e *Sitivit anima mea*. A priori si potrebbe pensare che ci sia un forte rapporto anche tra le architetture musicali degli elementi delle coppie, quindi anche tra i voice leading; questa è una relazione non vera in generale, sebbene alcuni brani, specie le coppie di Desprez, abbiano un andamento molto simile. Questa somiglianza non è stata confermata dalla DTW: le distanze delle coppie, per quanto sotto la media generale, sono comunque distanti dai minimi delle diverse matrici.

Discendi Santo Spirito è invece un corale, molto semplice, posteriore a Bach (già descritto nella sezione 2.5.1), che l'intuizione porta a pensare molto più vicino ai corali e ben distinto da altri periodi; in verità il calcolo delle distanze DTW (e un'effettiva osservazione dell'andamento delle parti) ha evidenziato la distanza di questo brano da tantissimi dei brani a lui cronologicamente più vicini; i brani più vicini al *Discendi* sono invece brani omoritmici del 1500: *Nell'apparir del sempiterno sole* a quattro voci, *O bone Jesu* e *Popule meus* (posizioni (50, 60), (41, 60) e (38, 60) e simmetrici delle tabelle in appendice).

Un discorso a parte va fatto per i brani attribuiti: *Absalon fili mi* è un brano attribuito a Desprez e molto probabilmente di un altro compositore fiammingo, Pierre de la Rue. Non sono stati trovati brani a quattro voci di de la Rue simili ad *Absalon*, per cui risulta essere abbastanza distante per la DTW rispetto agli altri brani del compositore. È stato però rilevato più vicino sia ai brani di Desprez che ai brani esemplari della scuola romana (Palestrina, i primi brani di de Victoria), ma anche ad alcuni di Gabrieli.

In flagellis, attribuito a Desprez, è distante da moltissimi brani a lui coevi, e più vicino ad altri brani successivi, come *l'Amicus meus* di Ingegneri e *Jesu dulcis memoria*, attribuito a De Victoria. Quest'ultimo è invece più vicino ad alcuni brani omoritmici a lui coevi, orientandosi però più all'inizio del 1500; è inoltre molto vicino a uno dei corali di Bach, *Aus meines*.

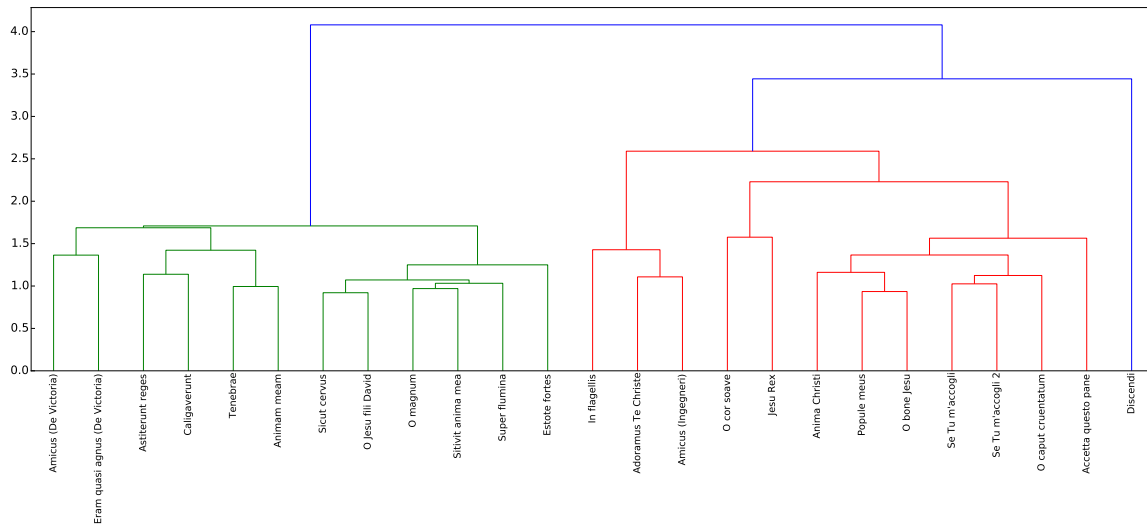
O bone Jesu, attribuito a Palestrina e più probabilmente di Marc'Antonio Ingegneri, è stato rilevato dalla DTW distante da brani di Palestrina più omoritmici, ma anche da brani di Ingegneri stesso. Infine, *Accetta questo pane* è stato attribuito a Bach, mentre è un'armonizzazione di una melodia tratta dal *Münchmer Gesangbuch* ad opera del compositore Luigi Molfino. Questo brano risulta abbastanza distante da tutti i brani, sebbene non tanto quanto il *Discendi*; i brani a lui più vicini sono la prima armonizzazione di *Se Tu m'accogli*, il *Popule meus* di De Victoria, *Jesu dulcis* e *Anima Christi*, brano anonimo di inizio '500. La vicinanza del *Popule meus* a brani più omoritmici non è sorprendente: non è infatti un mottetto, sebbene appartenente alla stessa opera dell'*Amicus meus*, *Eram quasi agnus* e altri brani prevalentemente contrappuntistici, bensì un cosiddetto *improperio*, prevalentemente omoritmico.

3.3.3 Analisi del clustering gerarchico e dendrogrammi

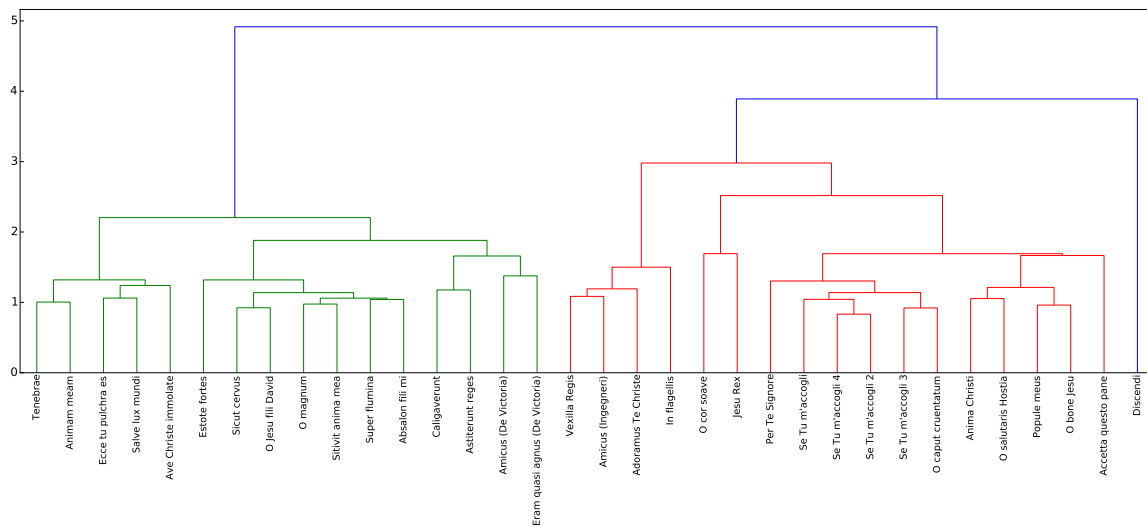
L'osservazione delle distanze DTW, per quanto utile per riscontrare relazioni binarie, diventa complessa per osservare aspetti globali di un dataset. Qui entra in gioco il clustering gerarchico e la sua visualizzazione come dendrogramma.

Figura 3.6: Variazioni del dendrogramma relativo alla norma euclidea, calcolato con linkage completo, da un clustering su 25 brani a uno su 40 brani. Si vede quanto la suddivisione dei cluster, e quindi di rami e foglie, vari da una figura all'altra.

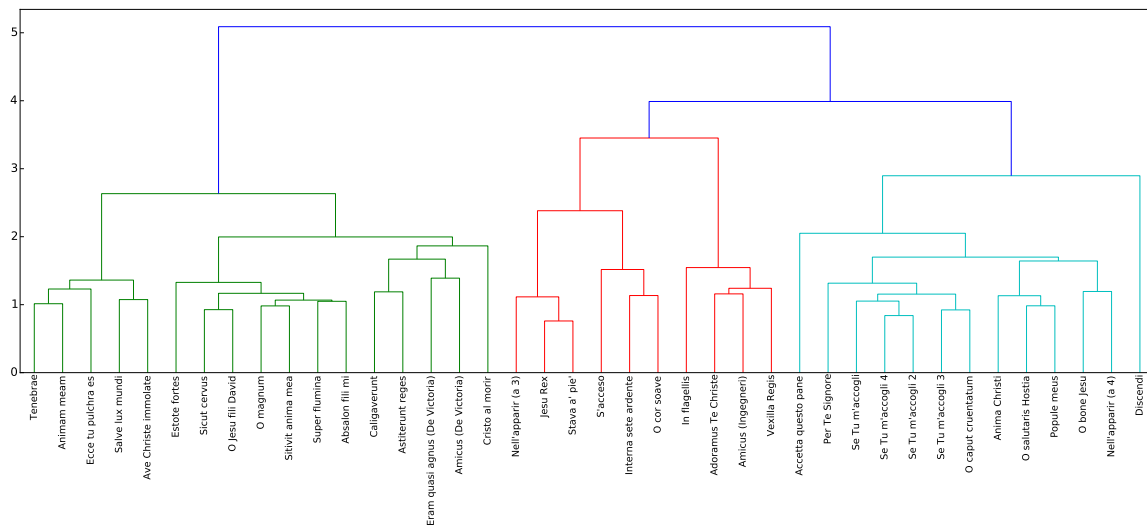
(a) Dendrogramma con 25 brani.



(b) Dendrogramma con 34 brani. Sono stati aggiunti i brani di de la Rue, tre brani di Desprez (*Ecce tu pulchra es*, *Ave Christe*, *Salve lux mundi*), due armonizzazioni di *Se Tu m'accogli* e il corale *Per te Signore*.



(c) Dendrogramma con 40 brani. Sono state aggiunte le laude filippine, che nel dendrogramma precedente erano rappresentate solo da *O cor soave*.



Prima della presentazione dei risultati, occorre fare un'osservazione preliminare: un brano inserito in un clustering non lascia invariati a priori gli altri cluster, venendo inserito in uno di quelli già esistenti; di conseguenza, i dendrogrammi *sono suscettibili di cambiamento* nella partizione di rami e foglie lungo la struttura, a seconda del momento di osservazione nel corso dell'analisi. È quindi utile, per lo meno durante la sperimentazione, osservare i cambiamenti dei cluster in corso d'opera, calcolando il dendrogramma di frequente, per esempio ogni due o tre brani; in questo caso i dendrogrammi sono stati ricalcolati principalmente ogni tre brani aggiunti, tranne casi particolari (in figura 3.6 nella pagina precedente sono riportati alcuni dendrogrammi calcolati con linkage completo relativi alla norma euclidea, all'aumentare dei brani analizzati).

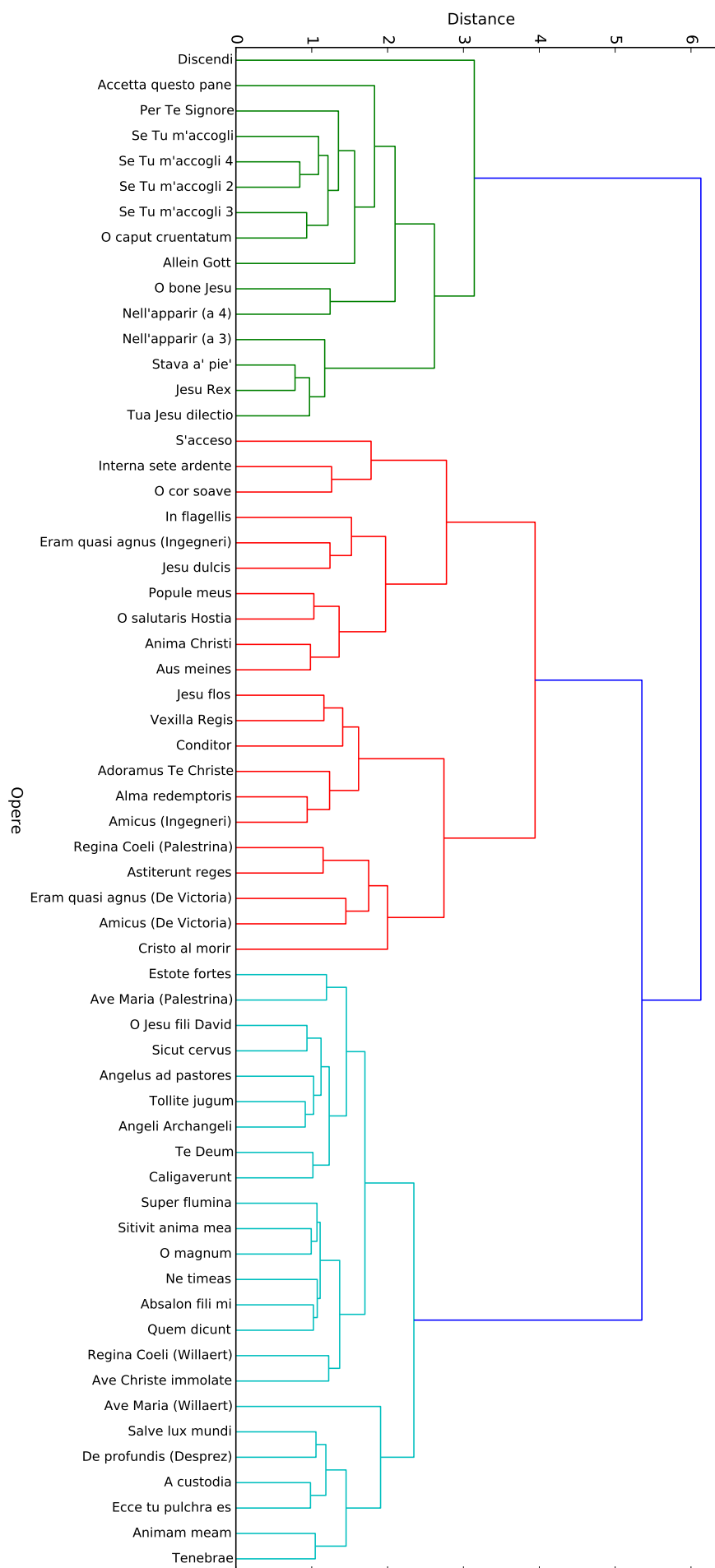
Iniziamo ora ad osservare come il linkage colloca i brani, a seconda del metodo utilizzato e della norma applicata nelle distanze DTW.

Metodo di linkage completo

Norma euclidea (figura 3.7 nella pagina successiva) In questo dendrogramma sono visibili tre cluster principali:

- Il primo a partire dall'alto, indicato col colore verde, è a sua volta suddiviso in tre cluster e presenta un outlier generale:
 - La prima suddivisione è formata dai corali tranne uno, *Aus meines*, che in ogni dendrogramma è legato ad *Anima Christi* e separato dagli altri corali. Qui le armonizzazioni di *Se Tu m'accogli* sono molto ben raggruppate, sebbene la coppia con distanza minima riscontrata nella sezione 3.3.2 non sia stata conservata (per la DTW le armonizzazioni più vicine erano la prima e la quarta, mentre qui l'affiancamento più rilevante si ha tra la seconda e la quarta armonizzazione), e si nota come *Accetta questo pane* sia sì riconosciuto come corale, ma non sia posto in relazione con nessuno in particolare, come se fosse un outlier interno a questo cluster.
 - La seconda è formata da due soli brani: *O bone Jesu* di Ingegneri e la lauda *Nell'apparir* nella versione a quattro voci; sono entrambi brani prevalentemente omoritmici precedenti a Bach.
 - La terza parte è formata da brani a tre voci: due laude filippine (*Stava a' piè della croce* e *Nell'apparir* a tre voci) e i due brani a tre voci analizzati di Palestrina, *Jesu Rex e Tua Jesu dilectio*. Si noti come le due diverse armonizzazioni di *Nell'apparir*, per quanto in due cluster diversi, siano poste vicine; questo è dovuto all'attivazione della funzione di `optimal_order`, che rende visibili anche queste somiglianze. Si noti anche come i due brani di Palestrina siano sì legati, ma *Jesu Rex* sia posto più in somiglianza con *Stava a' piè*, sebbene la distanza tra *Jesu Rex* e *Tua Jesu dilectio* sia la distanza minima in ogni matrice delle distanze (eccetto che nella norma 1). Questo cluster strutturato in questo modo sarà mantenuto costantemente in ognuno dei dendrogrammi presentati.
 - *Discendi Santo Spirito* è l'outlier generale.

Figura 3.7: Dendrogramma calcolato con linkage completo relativo alla norma euclidea.



Si può quindi dire che questo primo cluster è formato dalla stragrande maggioranza dei brani più omoritmici dell'analisi.

- Il cluster successivo, di colore rosso, è a sua volta suddiviso in due parti:
 - la prima ha anch'essa due gruppi ben distinti:
 - * il primo è formato dai restanti brani a tre voci (*S'accesso*, *Interna sete ardente* e *O cor soave*, tutte laude filippine), tranne *Cristo al morir tendea*, che in tutti i dendrogrammi rimarrà più legato ai brani contrappuntistici (giustamente, essendo un canto di carattere imitativo);
 - * il secondo ha una separazione tra quattro brani più omoritmici (il corale rimanente *Aus meines* e *Anima Christi*, *Popule meus* di De Victoria e *O salutaris hostia* del fiammingo de la Rue) e tre non completamente a voci pari (*In flagellis*, *l'Eram* di Ingegneri e *Jesu dulcis memoria*).
 - la seconda parte del cluster rosso è formata da brani caratterizzati da un tipo di contrappunto intermedio: sono infatti tutti brani del 1500 che presentano molte parti omoritmiche. In questa porzione di cluster la maggior parte dei brani sono di de Victoria, Palestrina e Ingegneri, appartenenti alla scuola romana (Ingegneri, sebbene abbia operato sempre a Venezia e Cremona, ha uno stile compositivo più vicino alla scuola romana che a quella veneziana), fatta eccezione per *Vexilla Regis* (di de la Rue) e *Cristo al morir tendea*. Inoltre si noti come sono più ravvicinati i brani dello stesso autore.

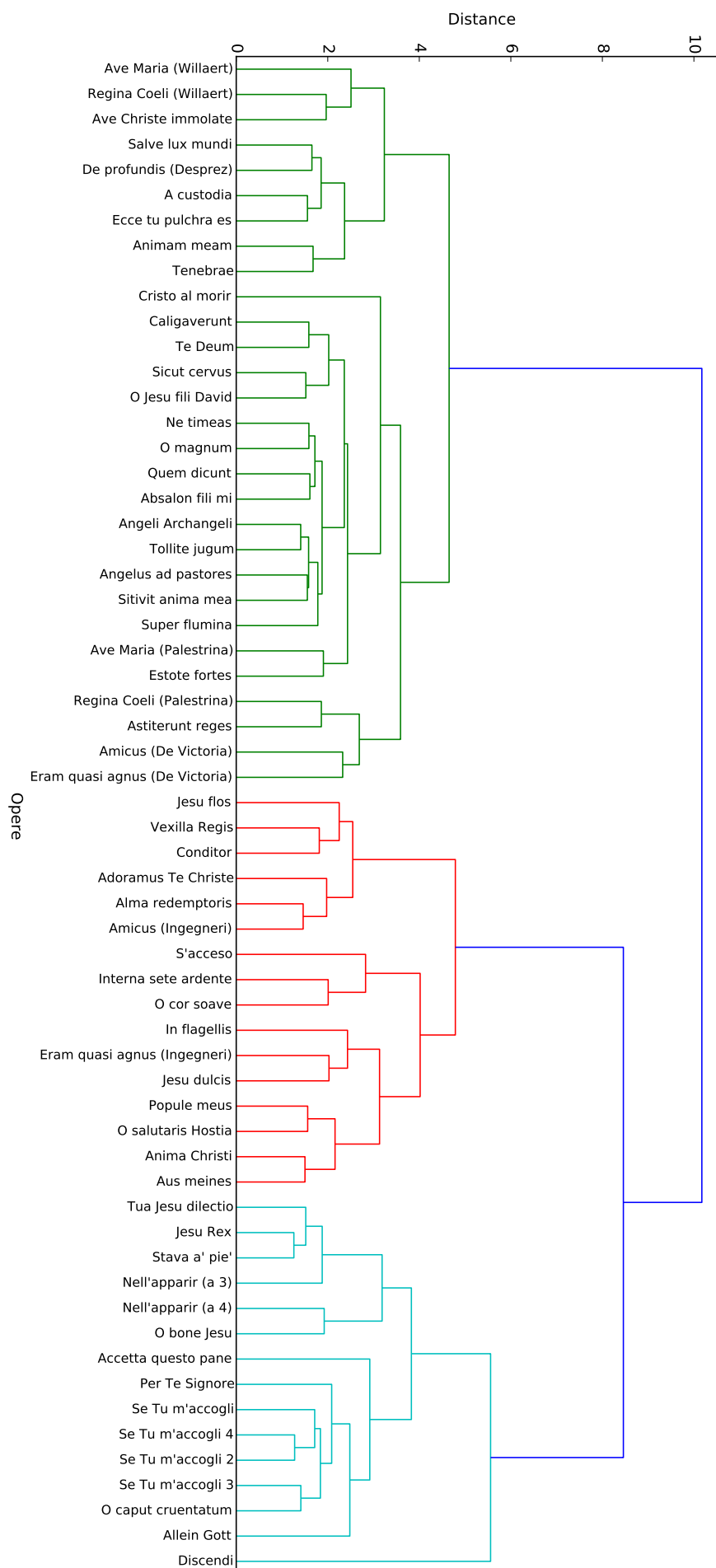
Questo cluster è quindi composto principalmente da brani con una specie del contrappunto non particolarmente elevata, ma ben diversa dall'omoritmia.

- Nel cluster più in basso, in azzurro, sono raggruppati i brani più contrappuntistici del nostro dataset; sono tuttavia raggruppati, specie nel caso di questo dendrogramma, in modo molto eterogeneo. Si segnala tuttavia un raggruppamento significativo dei brani di Gabrieli analizzati (*Angelus ad pastores*, *Tollite jugum* e *Angeli Archangeli* sono nel medesimo cluster, mentre la foglia di *Te Deum*, pur in un altro cluster, è rappresentata vicino ai tre già citati) e uno dei brani di Desprez (tranne *O Jesu fili David*, che in ogni dendrogramma calcolato è legato al *Sicut cervus* di Palestrina) e di Willaert. Sebbene non siano tutti nello stesso cluster, `optimal_order` consente di notare questa somiglianza. Willaert è ritenuto il fondatore della scuola veneziana, ma la sua origine, anche compositiva, è quella franco-fiamminga: è quindi molto interessante che i due brani analizzati di questo autore siano più vicini a Desprez, fiammingo anch'egli, che a Gabrieli.

Norma 1 (figura 3.8 a fronte) I cluster di questo dendrogramma sono sostanzialmente uguali a quelli analizzati per la norma euclidea. Il diagramma è stato però ordinato in ordine esattamente inverso a prima, e si possono osservare alcune variazioni:

- Ora i brani di Willaert e Desprez sono tutti nello stesso cluster (in alto nel cluster verde), e la coppia di mottetti di de Victoria a loro legati (*Animam meam* e *Tenebrae*) è avvicinata al cluster contenente i brani del medesimo autore;

Figura 3.8: Dendrogramma calcolato con linkage completo relativo alla norma 1.



- *Cristo al morir tendea*, prima nel gruppo di brani con un tipo di contrappunto intermedio, è ora inserito nei brani più contrappuntistici; questo è in realtà un posizionamento più ragionevole del precedente: è difatti un brano strutturato quasi a canone, all'interno del quale l'omoritmia è pressoché inesistente.
- Al cluster relativo al contrappunto più consistente è stato legato anche il cluster formato dai brani *Regina Coeli* di Palestrina, *Amicus* e *Eram quasi agnus* di de Victoria. Anche questo è un aspetto molto interessante da tenere in considerazione, oltre all'accoppiamento dei brani di de Victoria *O magnum Mysterium* e *Ne timeas Maria*: questi brani sono difatti i brani dello scrittore spagnolo più complessi analizzati, nonché molto precedenti ai brani tratti dall'*Officium Hebdomadae Sanctae*.
- *Te Deum* di Gabrieli è stato invece allontanato considerevolmente dagli altri brani dell'autore, pur rimanendo nello stesso cluster.

Anche in questo caso, i brani a tre voci sono sempre raggruppati in cluster ben definiti, le due armonizzazioni di *Nell'apparir* sono rappresentate vicine, e le armonizzazioni di *Se Tu m'accogli* sono sempre nel medesimo cluster.

Norma 3 (figura 3.9 nella pagina successiva) In questo dendrogramma si osserva subito che sono presenti solo due cluster principali: il primo, in verde, è l'analogo del cluster dei brani più contrappuntistici del dataset per i due dendrogrammi già osservati, mentre il secondo, in rosso, è quello relativo all'omoritmia. Il cluster dei brani con un contrappunto intermedio è stato infatti suddiviso tra questi due: il primo gruppo, che nel dendrogramma della norma 1 in figura 3.8 andava da *Jesu flos* all'*Amicus* di Ingegneri è stato legato ai brani che nel dendrogramma della norma euclidea erano anch'essi nel gruppo intermedio; i brani rimanenti sono stati inseriti nel cluster dell'omoritmia, avvicinando tra loro i brani a tre voci. Questo spostamento ha però causato un allontanamento consistente delle armonizzazioni di *Nell'apparir*, mentre il *Discendi* è diventato un outlier molto più rilevante di prima: è rappresentato difatti col colore blu del tronco principale, segno che è lontano da tutti i cluster presenti.

Si noti poi che ora i brani di Willaert sono stati accoppiati e legati agli altri brani di Desprez, anch'essi in un raggruppamento più omogeneo: *Ave Christe immolate* e *Salve lux mundi*, uno la seconda parte dell'altro, sono addirittura accoppiati, mentre l'altra coppia di brani consecutivi, *De profundis* e *A custodia*, non sono accoppiati nel ramo, ma sono rappresentati comunque come foglie consecutive. Gabrieli è unito, mentre de Victoria e Palestrina sono raggruppati al massimo per coppie.

Norma 4 (figura 3.10 a pagina 74) In questo dendrogramma ritroviamo una situazione molto simile a quella riscontrata nella norma 3. Vi sono tuttavia alcune variazioni degne di nota:

- Come si può osservare, quattro brani a tre voci (*Tua Jesu dilectio*, *Jesu Rex*, *Stava a' piè* e *Nell'apparir* a tre voci) sono stati legati come cluster a *Discendi*, creando un cluster distinto, di colore azzurro.
- In conseguenza a questo, il cluster rosso è stato orientato in modo che gli altri brani a tre voci fossero vicini ai quattro legati al *Discendi*; inoltre è stato legato ad esso il cluster

Figura 3.9: Dendrogramma calcolato con linkage completo relativo alla norma 3.

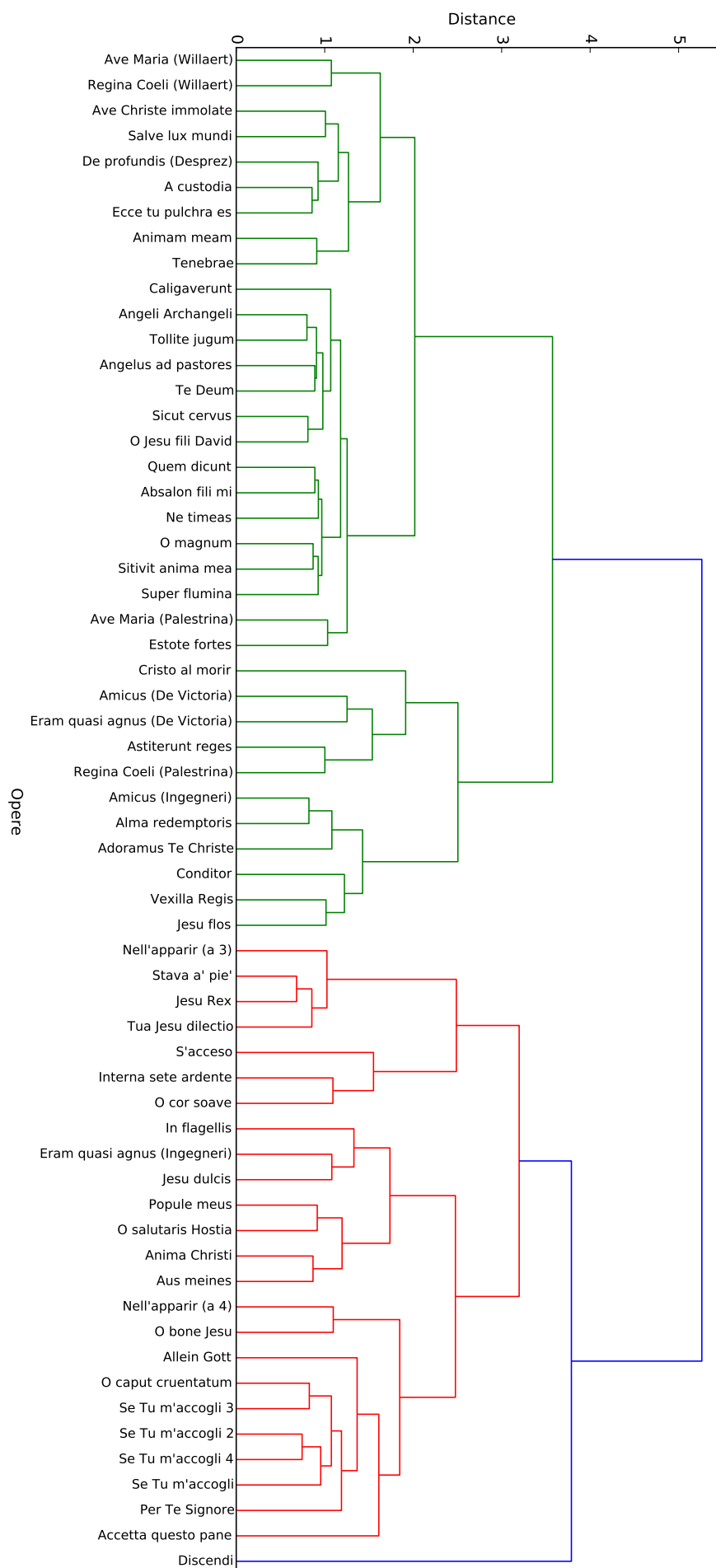
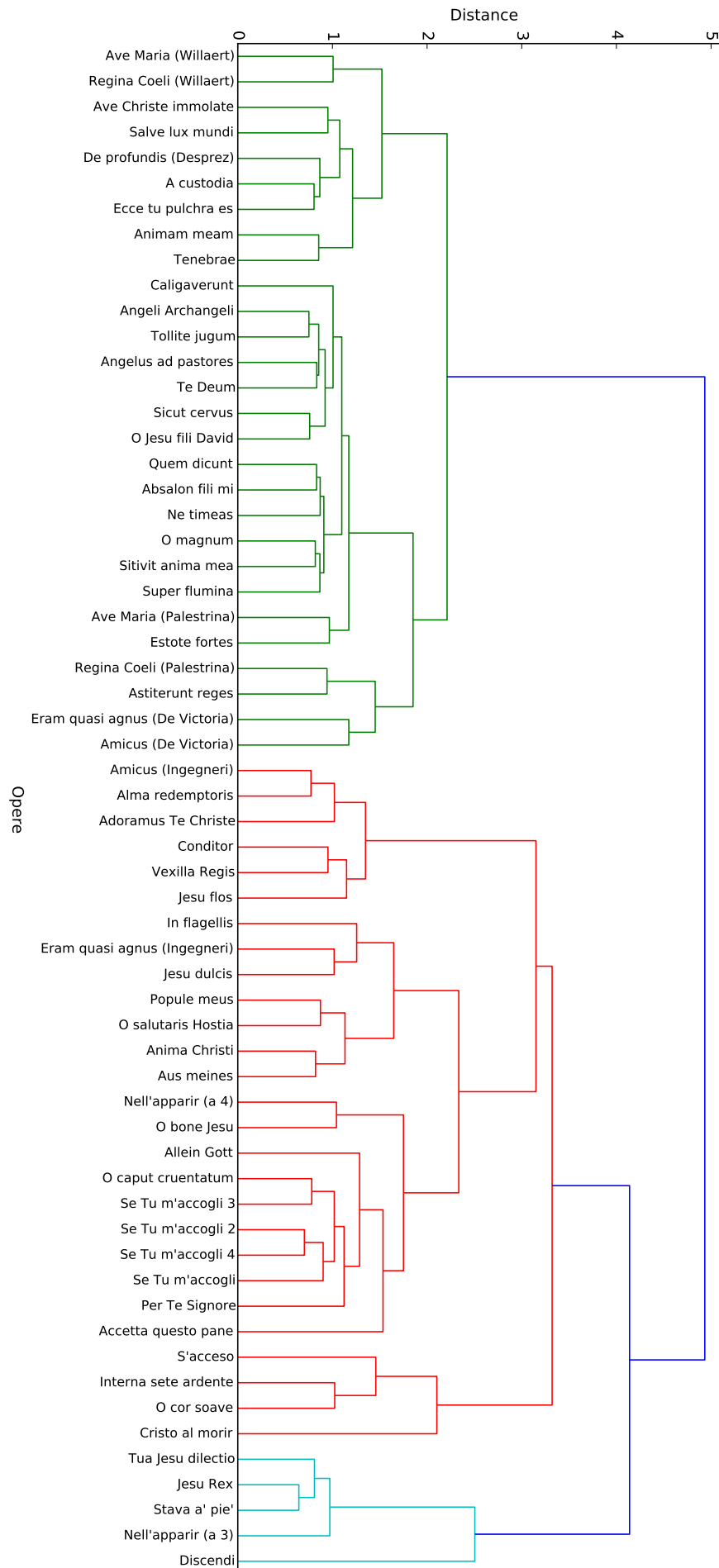


Figura 3.10: Dendrogramma calcolato con linkage completo relativo alla norma 4.



comprendente i brani dall'*Amicus* di Ingegneri a *Jesu flos*, che nella norma 3 era stato legato al cluster verde del contrappunto elevato.

Il resto risulta sostanzialmente identico alla norma 3.

Norma 5 (figura 3.11 nella pagina successiva) Il dendrogramma calcolato con linkage completo relativo alla norma 5 è strutturalmente identico a quello di norma 4. Questa invarianza è dovuta soprattutto all'attivazione del riordino ottimale, che riduce al minimo le permutazioni interne dei cluster, rendendo più visibili anche le invarianze in caso di conservazione delle distanze.

Norma 6 (figura 3.12 a pagina 77) Con la norma 6, il dendrogramma assume una struttura come di sintesi tra i dendrogrammi osservati in precedenza: ha infatti una struttura con tre cluster principali, suddivisi come nella norma 1 (figura 3.8), ma al suo interno sono presenti delle variazioni rilevanti:

- Il *Discendi* è rimasto legato al cluster dei brani a tre voci, come nella norma 4 e 5; questo cluster è tuttavia legato agli altri brani omoritmici, con una struttura più simile a quella di norma 1 e euclidea, sebbene alcuni brani omoritmici siano rimasti nel cluster rosso.
- Nel cluster del contrappunto, la configurazione del cluster formato da Desprez e Willaert con la coppia di brani di de Victoria formata da *Animam meam* e *Tenebrae* è rimasta invariata. Nell'altra parte del cluster vi sono alcune variazioni, quella più rilevante è l'eliminazione del cluster contenente i quattro brani di Gabrieli, ora presenti in due coppie, ognuna legata a un brano di Palestrina; nel caso dell'*Angelus ad pastores* e del *Te Deum*, questo brano è il *Sicut cervus*, quindi insieme ad esso è presente anche il brano di Desprez *O Jesu fili David*, come già riscontrato in precedenza.

Norma 7 (figura 3.13 a pagina 78) Questo dendrogramma è strutturalmente identico a quello relativo alla norma 6.

Norma infinito (figura 3.14 a pagina 79) Questo dendrogramma risulta avere alcune caratteristiche che lo differenziano dai dendrogrammi finora osservati. La struttura è sempre a tre cluster principali, risulta però orientato come quello relativo alla norma euclidea. Inoltre vi sono dei cluster anomali:

- Il cluster relativo all'omoritmia (in verde) risulta composto dagli stessi brani di quelli in precedenza descritti. Tuttavia, il cluster dei corali è più legato a tre brani omoritmici del '500 (*Popule meus*, *O bone Jesu* e *Nell'apparir* a quattro voci), mentre il cluster formato dal *Discendi* e dai quattro brani a tre voci descritto in precedenza è un cluster abbastanza distante.
- Il cluster del contrappunto intermedio risulta sostanzialmente invariato rispetto a quelli precedentemente descritti, mentre invece in quello del contrappunto più elevato si assiste a una separazione totale dei brani di Gabrieli. Il cluster relativo ai compositori fiamminghi è invariato.

Figura 3.11: Dendrogramma calcolato con linkage completo relativo alla norma 5.

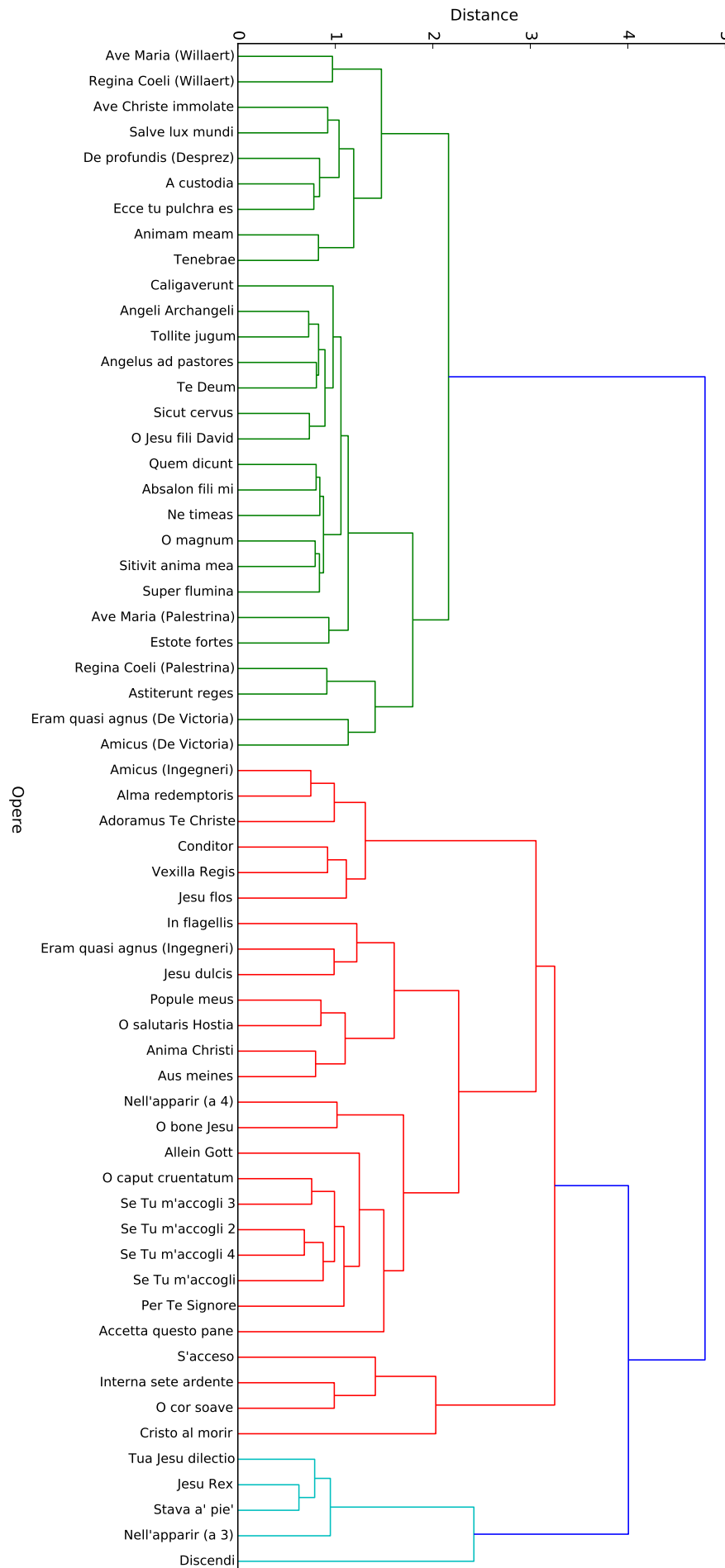


Figura 3.12: Dendrogramma calcolato con linkage completo relativo alla norma 6.

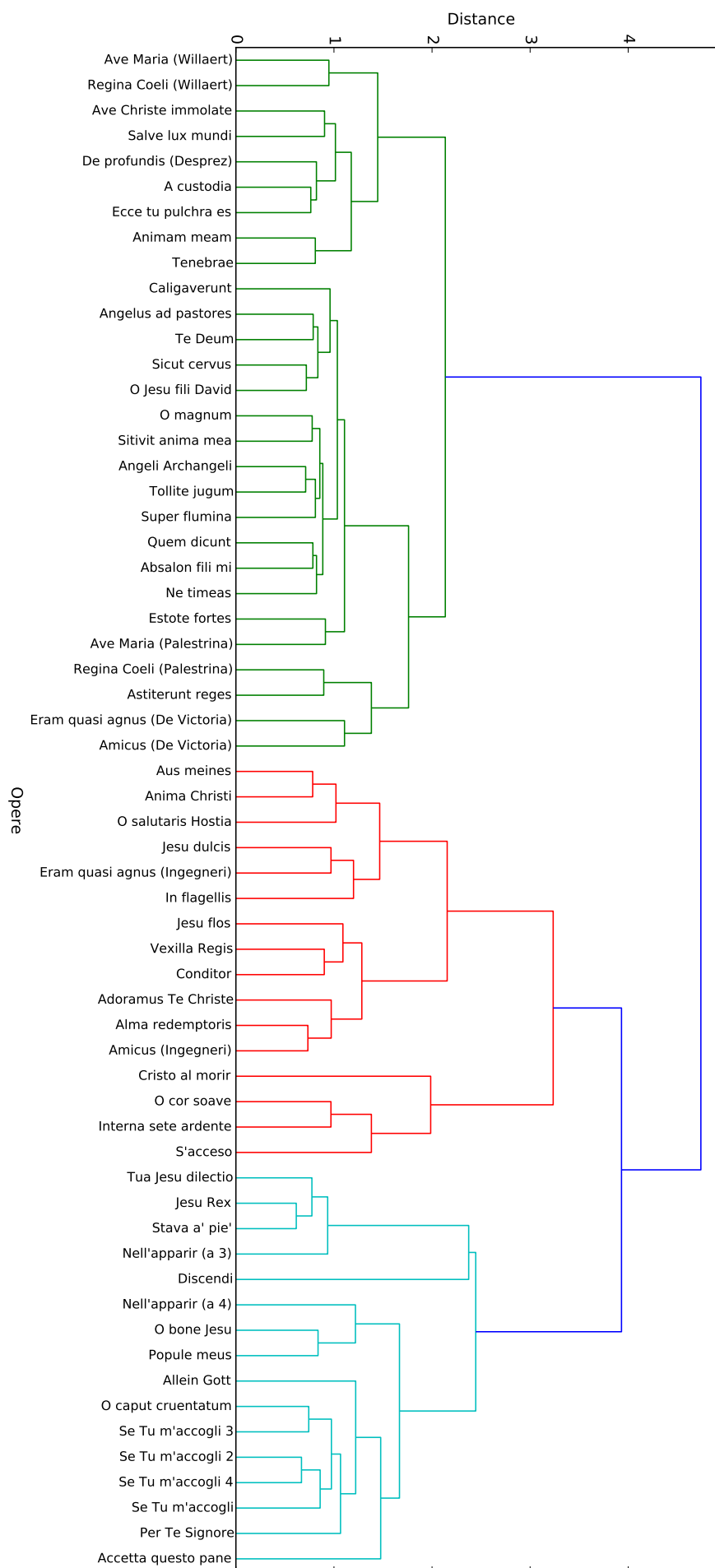


Figura 3.13: Dendrogramma calcolato con linkage completo relativo alla norma 7.

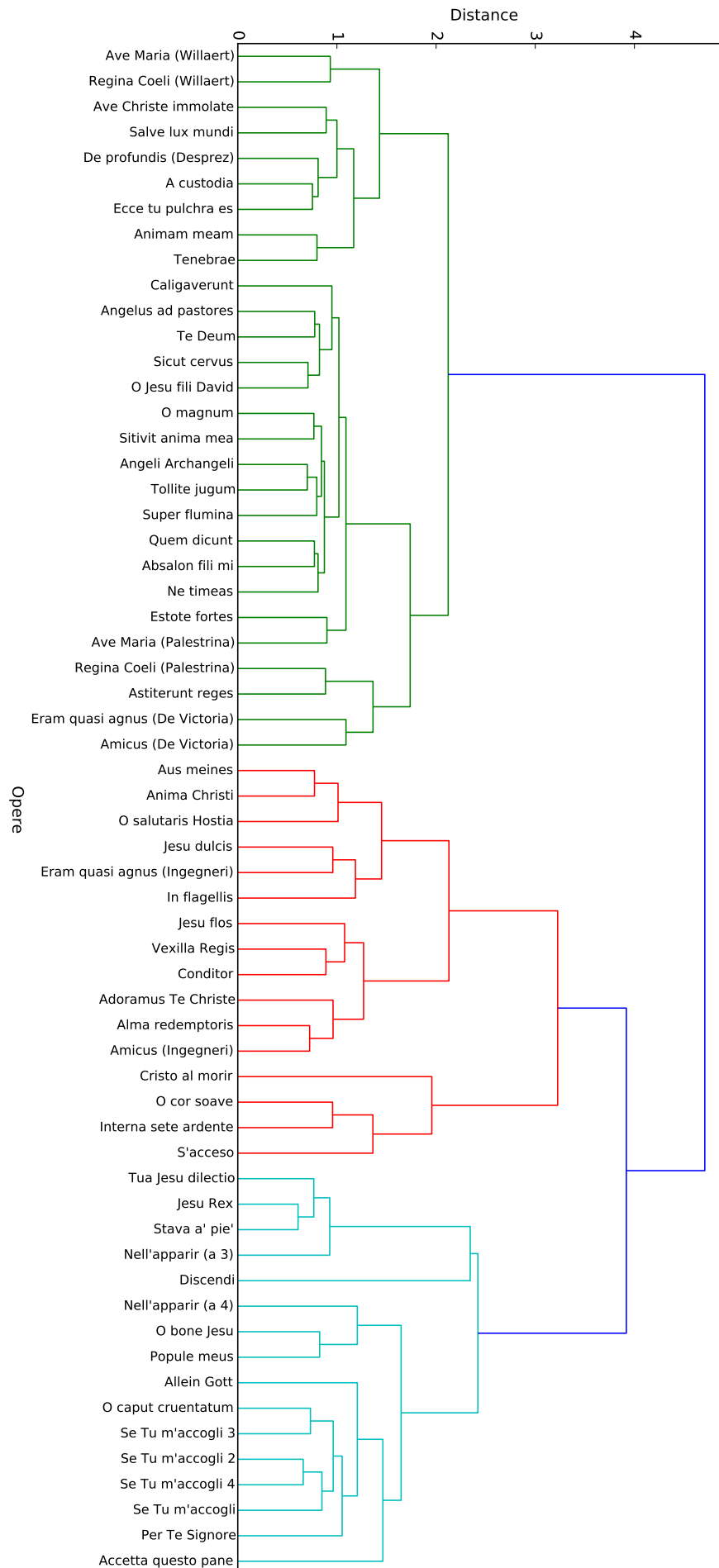
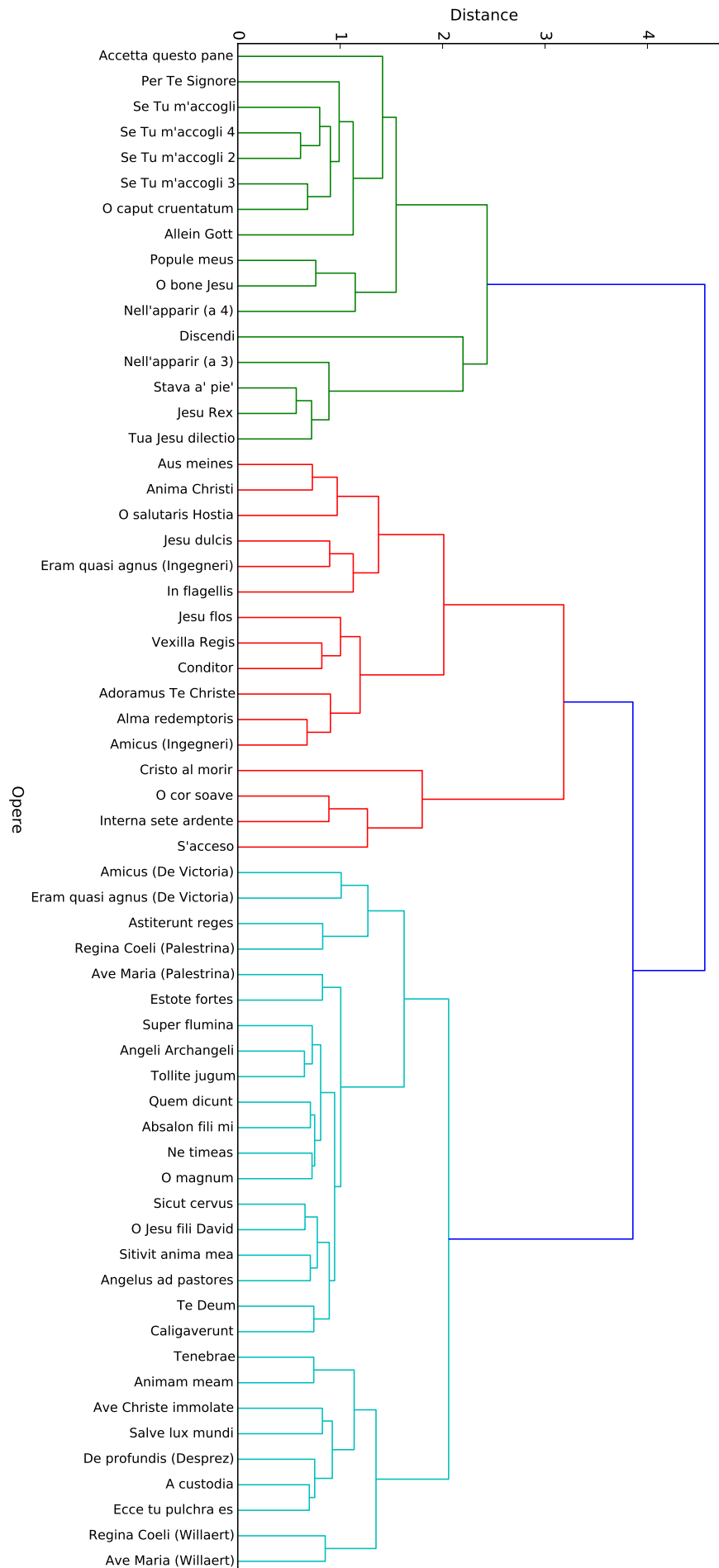


Figura 3.14: Dendrogramma calcolato con linkage completo relativo alla norma infinito.



In sintesi, il linkage completo suddivide molto bene le tipologie di contrappunto, specie per quanto riguarda le norme euclidea, 1, 6 e 7. Un aspetto molto interessante è quello degli outliers, rimasti sostanzialmente invariati per ogni norma, e dei cluster relativi a corali e compositori fiamminghi (Willaert e Desprez), che sono quelli che hanno subito meno variazioni al variare della norma utilizzata.

Metodo di linkage singolo

La situazione di fronte alla quale ci troviamo applicando questo metodo di linkage è notevolmente diversa a quella appena descritta per il linkage completo. Osserviamo i vari casi.

Norma euclidea (figura 3.15 nella pagina successiva) La prima cosa che si riscontra, osservando questo dendrogramma, è la presenza di quattro cluster principali, e gli outliers delineati in modo più netto rispetto al linkage completo.

Seguendo il dendrogramma dall'alto, si osservano:

- *Discendi Santo Spirito* come outlier rispetto a tutti i cluster;
- un cluster, rappresentato in verde, contenente tutti i brani a tre voci, con *Cristo al morir tendea* come outlier;
- un cluster (in rosso) contenente i brani con contrappunto più elevato, nel quale non si ha nessuna distinzione evidente. In realtà, osservando, si nota come sia sempre presente un unico cluster per i brani di Desprez (eccetto *O Jesu fili David*, sempre legato al *Sicut*), *Tenebrae* e *Animam meam* di de Victoria uniti e un primo raggruppamento unico dei brani di Gabrieli (l'unico escluso è *Te Deum*, più distante). Inoltre non sono visibili outliers significativi;
- un cluster azzurro, formato solo dalla coppia di *Eram quasi agnus* e *Amicus* di de Victoria, posto a metà tra i due tipi di contrappunto; posizionamento in realtà ragionevole, essendo due brani che si pongono a metà tra il contrappunto elevato e quello intermedio.
- infine, in viola, il cluster dei brani più omoritmici, contenente anche i brani che per il linkage completo erano raggruppati nell'insieme del contrappunto intermedio. I corali sono un unico cluster posto al centro del raggruppamento; sopra sono presenti i brani più omoritmici precedenti a Bach, e sotto i brani più contrappuntistici. In questa struttura sono visibili *In flagellis*, *Accetta questo pane* e *Nell'apparir* a quattro voci come outliers.

Norma 1 (figura 3.16 a pagina 82) Il dendrogramma che si ottiene applicando questo metodo alla matrice delle distanze DTW di norma è sicuramente il meno significativo, almeno su un aspetto di cluster: infatti sembra essere presente un unico cluster principale, in verde, all'interno del quale sono presenti tutti i cluster descritti in precedenza, e il *Discendi* come outlier di tutta la struttura.

Qui, come nel corrispettivo del linkage completo, il cluster formato da alcuni brani a tre voci (*Nell'apparir* a tre voci, *Stava a' piè*, *Jesu Rex* e *Tua Jesu dilectio*) è più legato agli omoritmici a quattro voci, affiancando le due armonizzazioni di *Nell'apparir*. Accanto è posto il cluster

Figura 3.15: Dendrogramma calcolato con linkage singolo relativo alla norma euclidea.

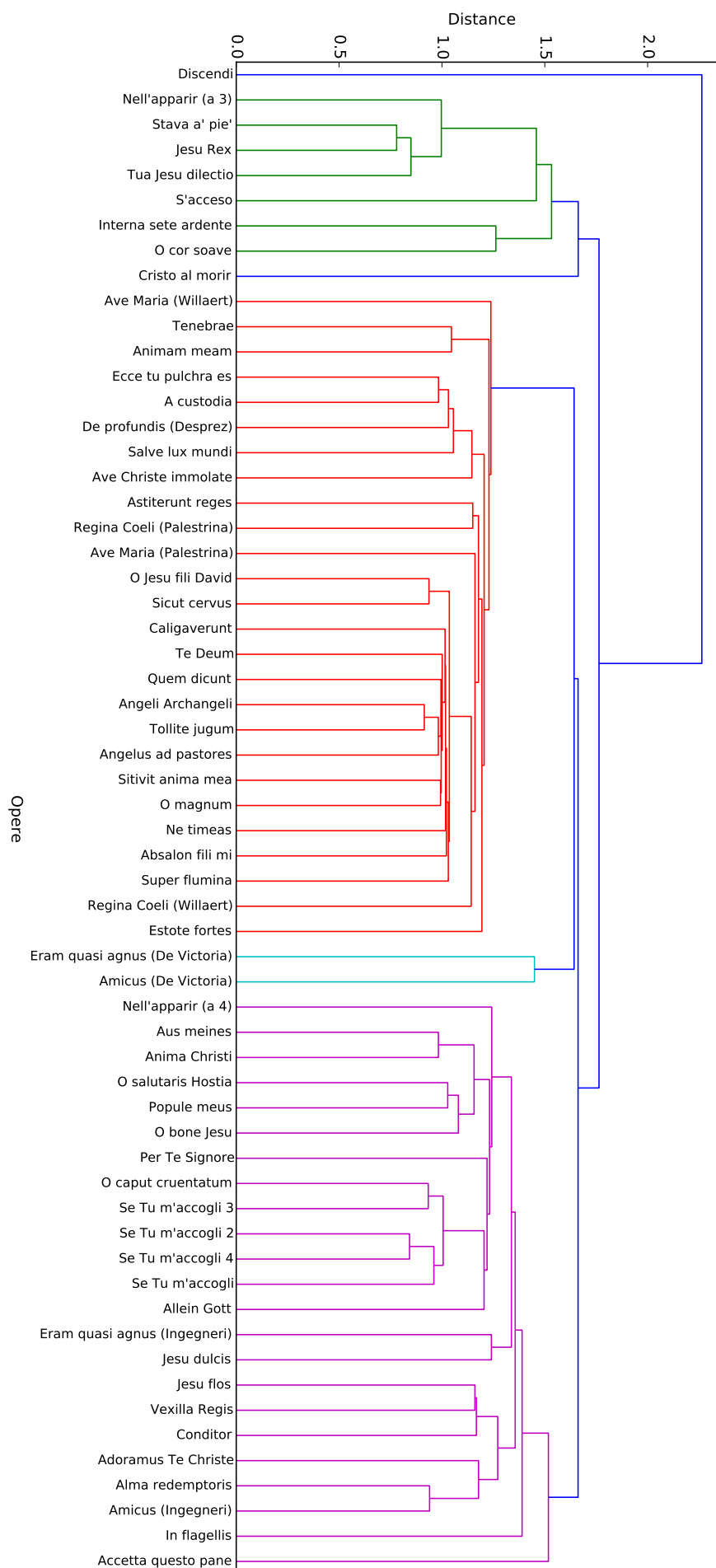
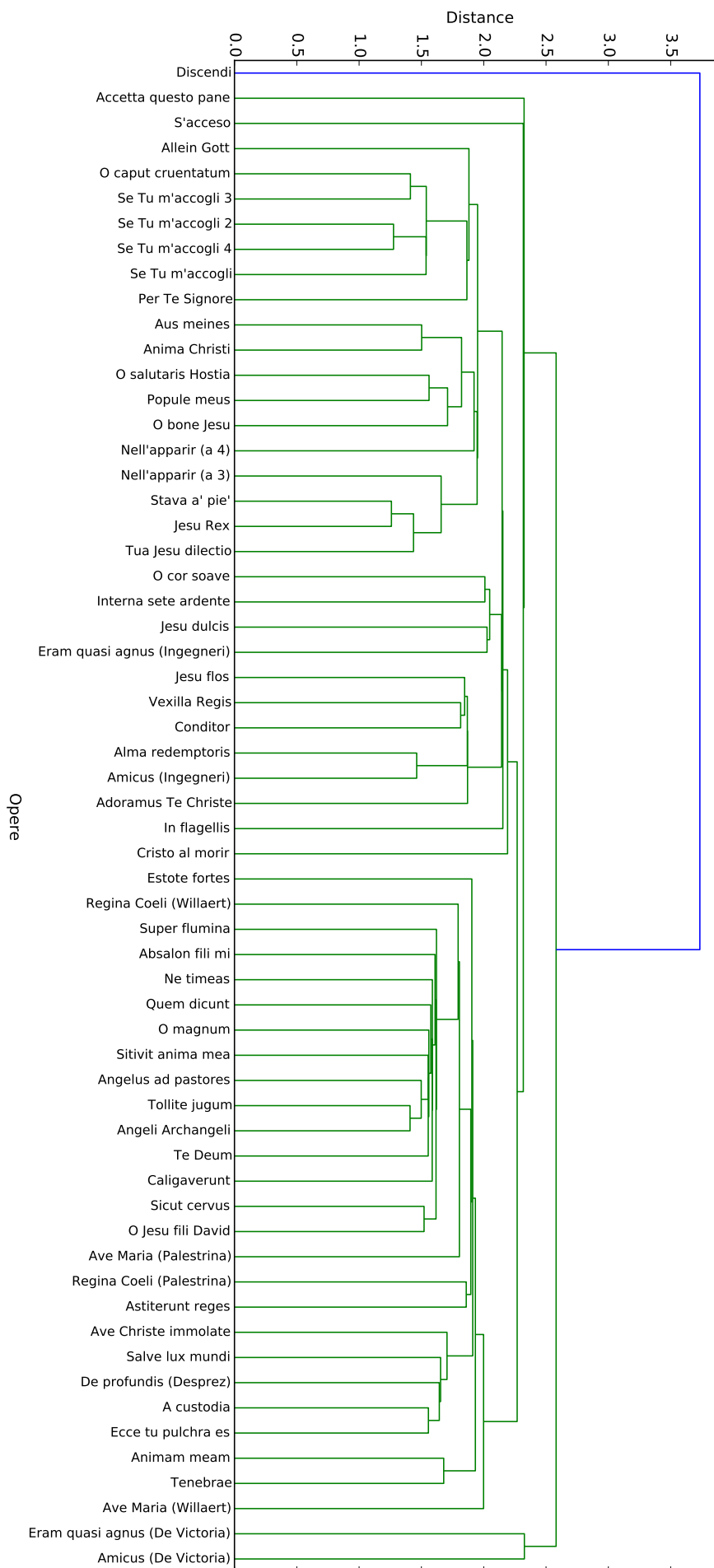


Figura 3.16: Dendrogramma calcolato con linkage singolo relativo alla norma 1.



formato dai brani di contrappunto intermedio, avvicinando tra loro i brani a tre voci; *In flagellis*, *S'accesso* e *Cristo al morir* sono rappresentati come outliers.

Nella sezione corrispondente al contrappunto più elevato non si riscontrano particolari cambiamenti rispetto a prima, se non un avvicinamento ulteriore dei brani di Gabrieli e il mantenimento del cluster di Desprez e delle coppie di de Victoria; in particolare, la coppia *Eram quasi agnus* e *Amicus* rimarranno associati e separati da tutti gli altri per ogni dendrogramma con linkage singolo.

Norma 3 (figura 3.17 nella pagina successiva) Nella norma 3, la situazione ritorna simile a quella riscontrata per la norma euclidea, eccetto il numero di cluster principali, ora aumentato a 5:

- *Discendi* è ancora un outlier generale;
- Subito dopo il *Discendi* è presente il cluster dei brani a tre voci, che ora risulta suddiviso in tre strutture separate:
 - La prima, in verde, contiene il cluster di brani a che nella norma euclidea era più legato ai brani a quattro voci, con in più *S'accesso*, visto come outlier relativamente al cluster;
 - La seconda, in rosso, contenente i brani a tre voci di contrappunto intermedio;
 - Infine, *Cristo al morir* come outlier del gruppo dei brani a tre voci.
- Il cluster azzurro è quello del contrappunto elevato, simile a quello per la norma euclidea, fatta eccezione per l'ordine dei cluster. Il cluster di Desprez risulta ancora quello più immune alle variazioni di metodo e norme.
- Il cluster viola rappresenta la coppia *Eram* e *Amicus*;
- Il cluster giallo raccoglie i brani omoritmici e quelli di contrappunto intermedio. Unica anomalia rispetto a prima è l'allontanamento di *Per Te Signore* dai corali, forse dovuto a una disposizione diversa delle foglie. Qui sono ben visibili *Nell'apparir* a quattro voci, *In flagellis* e *Accetta questo pane* come outliers.

Norma 4 (figura 3.18 a pagina 85) Il dendrogramma ottenuto dalla matrice delle distanze DTW in norma 4 è molto simile a quello della norma 3; la differenza è nell'orientamento del dendrogramma, che avvicina il *Discendi* ai brani a quattro voci, pur vedendolo come outlier generale. Gli altri outliers, come *Accetta questo pane* e *In flagellis*, sono ora molto più visibili; analogamente per *Cristo al morir tendea* e *S'accesso*.

Norma 5 (figura 3.19 a pagina 86), norma 6 (figura 3.20 a pagina 87) e norma 7 (figura 3.21 a pagina 88) Questi dendrogrammi li discutiamo assieme perché in verità sono identici a quello calcolato per la norma 4, fatta eccezione per una permutazione interna al cluster azzurro del contrappunto più elevato. In particolare la permutazione per la norma 7 è quella della norma 6 totalmente invertita.

Figura 3.17: Dendrogramma calcolato con linkage singolo relativo alla norma 3.

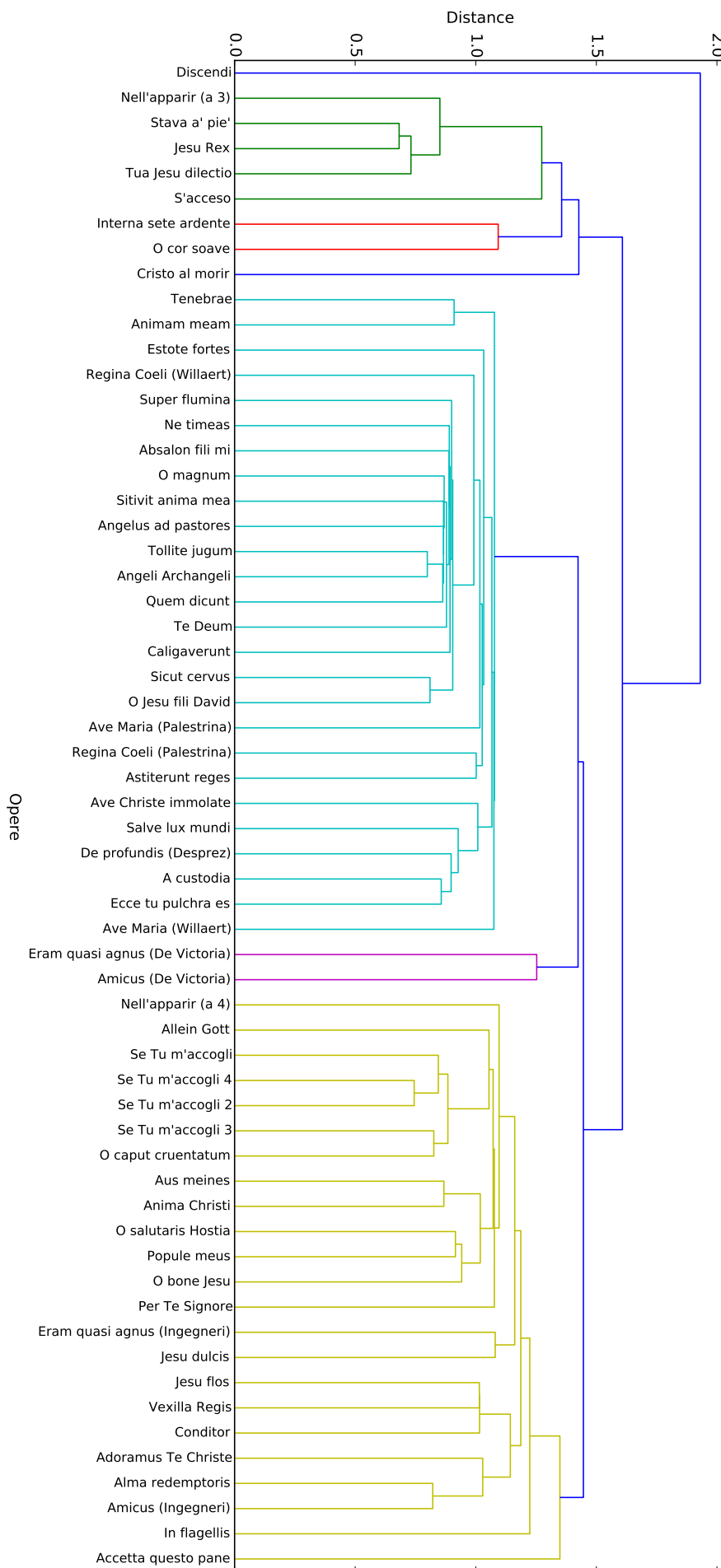


Figura 3.18: Dendrogramma calcolato con linkage singolo relativo alla norma 4.

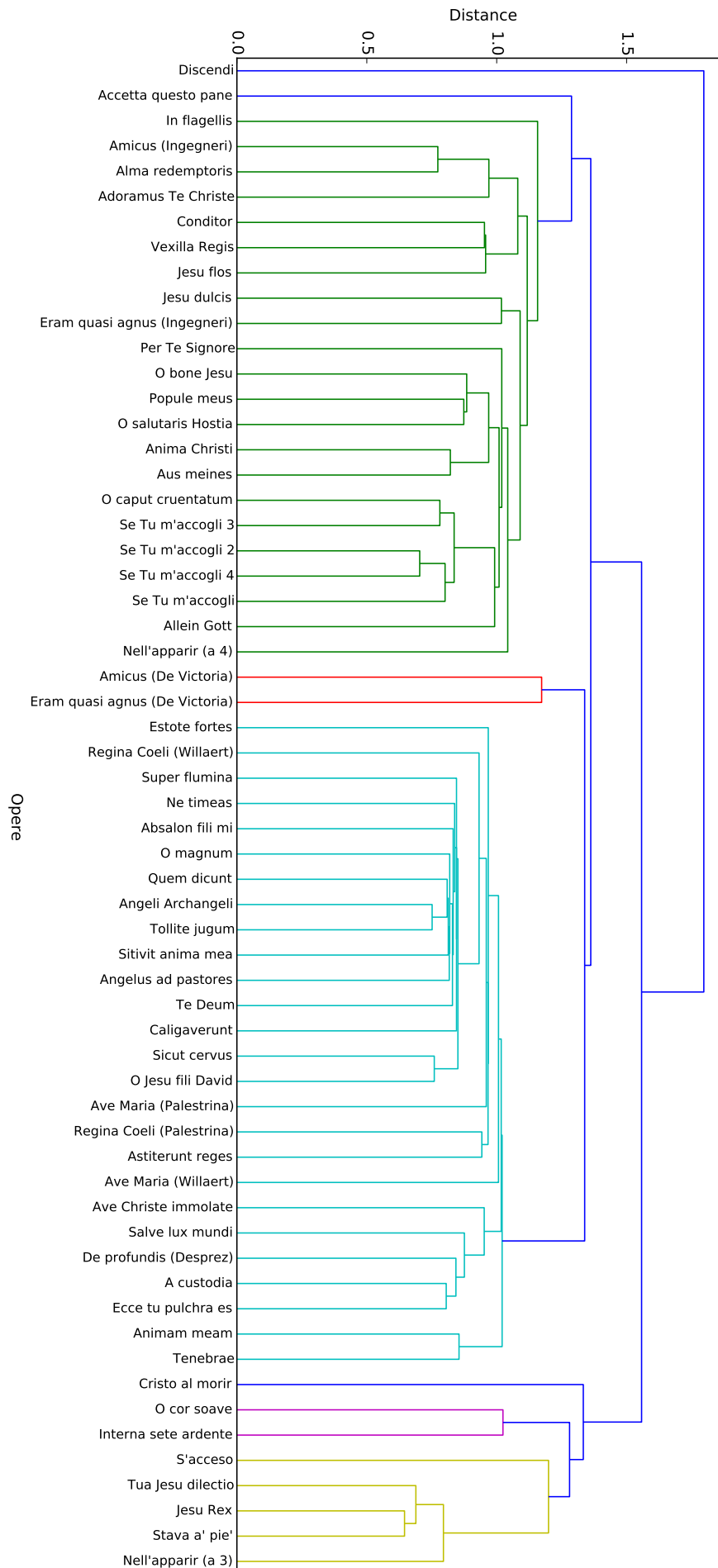


Figura 3.19: Dendrogramma calcolato con linkage singolo relativo alla norma 5.



Figura 3.20: Dendrogramma calcolato con linkage singolo relativo alla norma 6.

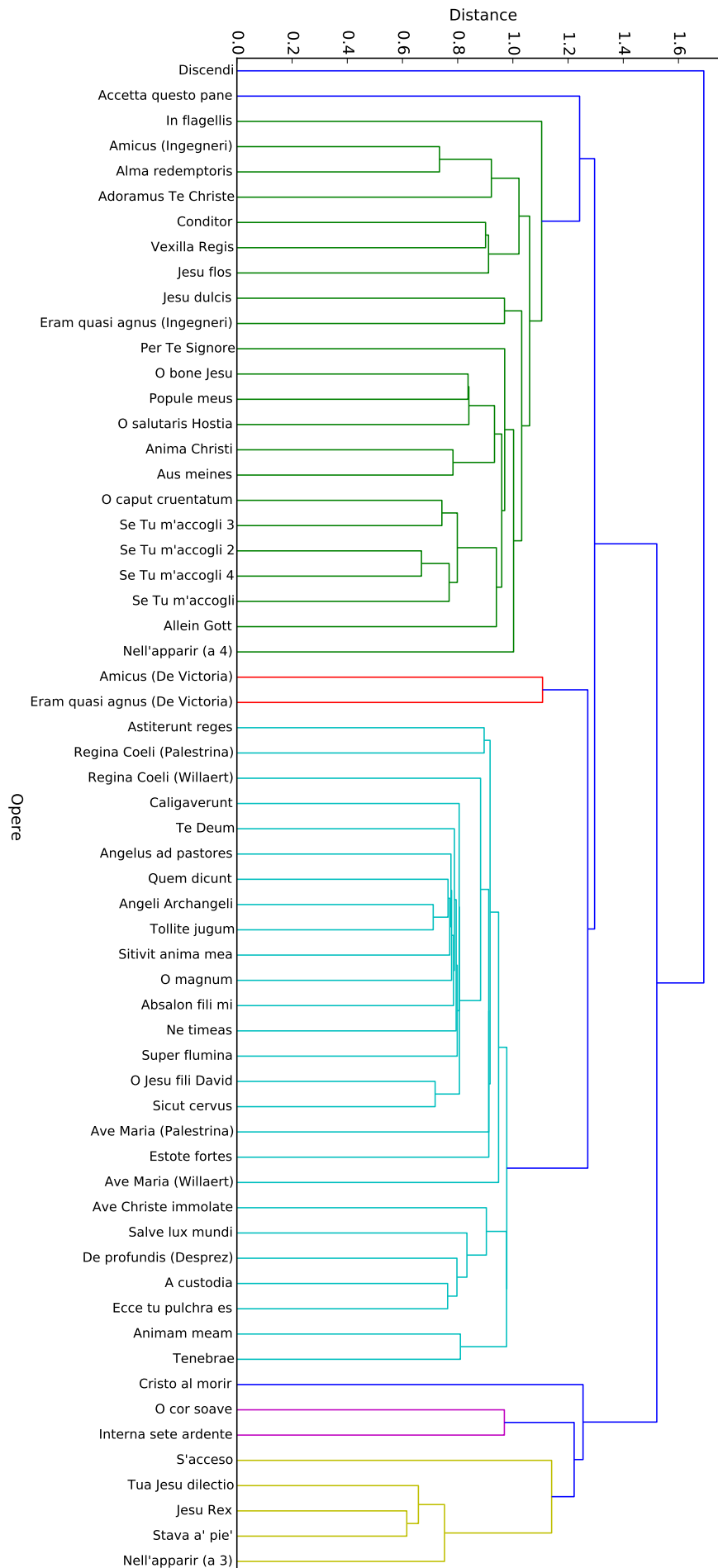


Figura 3.21: Dendrogramma calcolato con linkage singolo relativo alla norma 7.

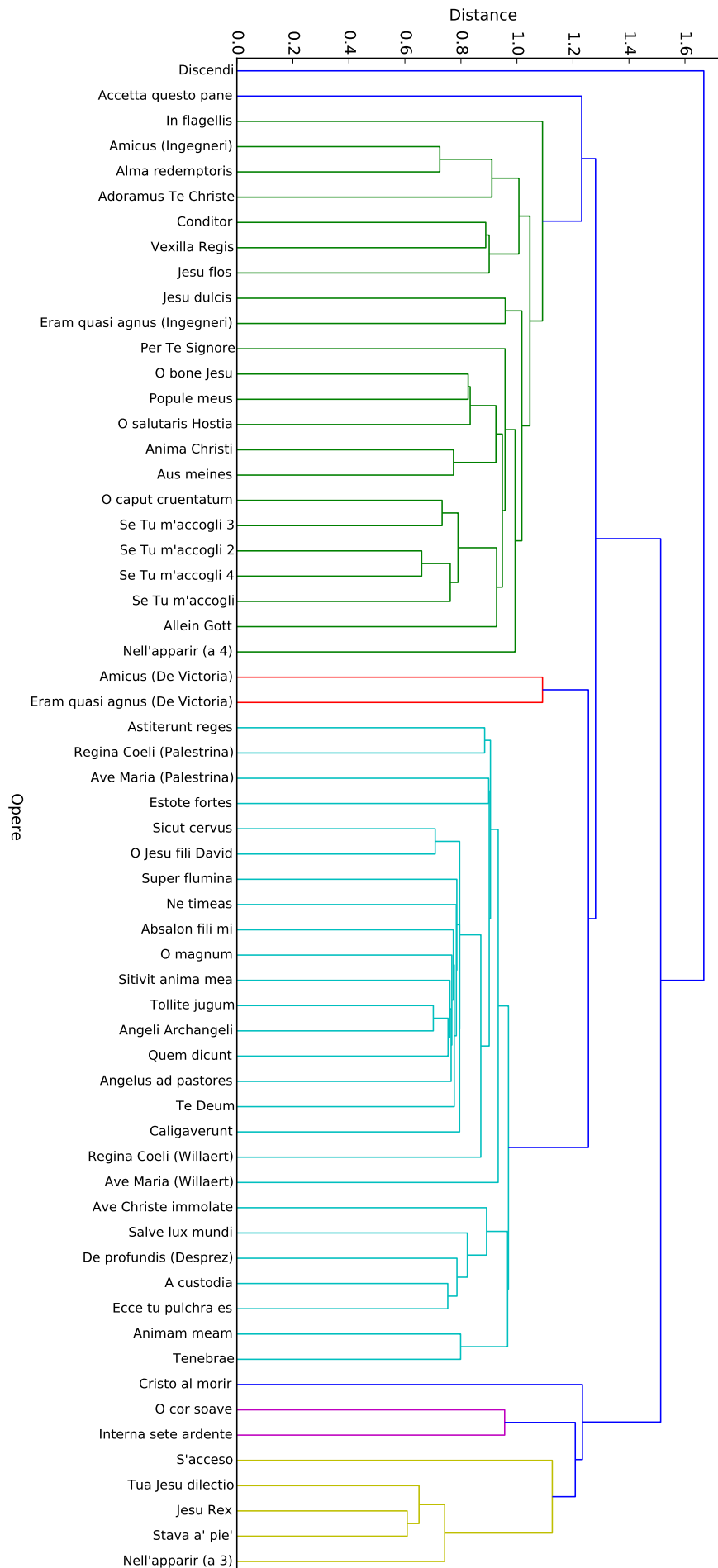
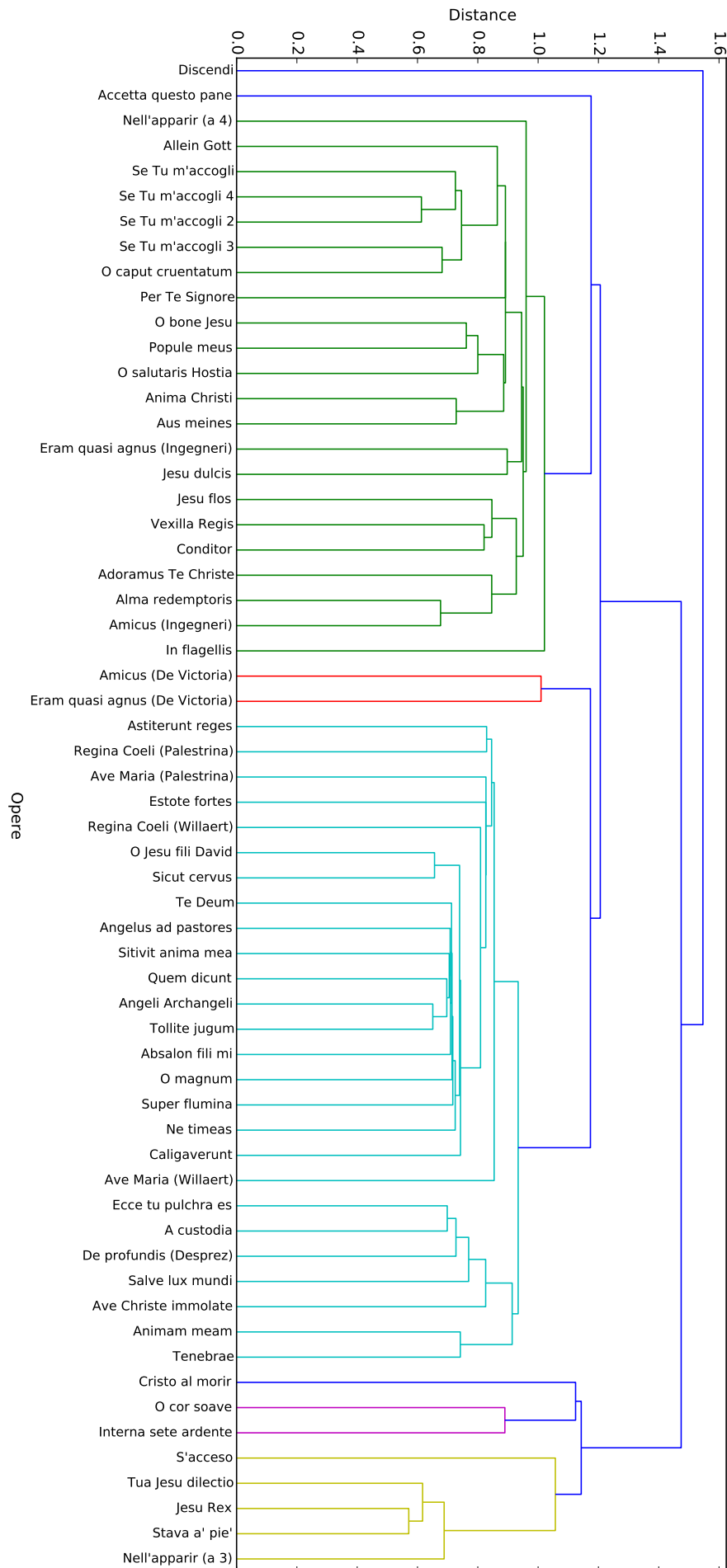


Figura 3.22: Dendrogramma calcolato con linkage singolo relativo alla norma infinito.



Norma infinito (figura 3.22 nella pagina precedente) Anche per la norma infinito non si verificano variazioni particolari alle strutture dei cluster, se non permutazioni interne ad essi, sebbene più consistenti rispetto a prima; inoltre si osserva una permutazione anche nel cluster relativo all'omoritmia.

In conclusione dell'osservazione del linkage singolo, è forse il metodo che dà meno variazioni al variare delle norme, a meno di permutazioni interne, e quello che pone più rilievo sugli outliers; outliers che coincidono, tra l'altro, con la maggior parte dei brani di dubbia attribuzione o nettamente diversi da quelli a cui sono affiancati.

È inoltre interessante ricordare la costante distinzione della coppia formata da *Amicus* e *Eram* di de Victoria dal resto; tra l'altro, sono gli unici due mottetti tratti dall'*Officium Hebdomadae Sanctae* che, nella riduzione della specie del contrappunto, hanno avuto come suddivisione principale la semiminima: gli altri mottetti di quest'opera sono stati infatti tutti suddivisi secondo la croma.

Metodo di linkage medio

Norma euclidea (figura 3.23 nella pagina successiva) Il primo dendrogramma che osserviamo ottenuto con il linkage medio risulta avere due cluster principali e un outlier generale, che sono strutturati all'incirca come quelli precedenti:

- Il primo cluster, in verde, è quello del contrappunto elevato. Il primo gruppo ben distinto al suo interno è quello già osservato anche per il linkage completo, formato dai brani di Willaert e di Desprez (eccetto *O Jesu fili David*) con la coppia *Animam* e *Tenebrae*; il secondo è quello formato dagli altri brani di de Victoria, Palestrina, Gabrieli, Marenzio e *l'Absalon* di de la Rue. Non sono presenti raggruppamenti di rilievo, tranne quello dei brani di Gabrieli (meno *Te Deum*), già osservato in precedenza. Infine si vede la coppia formata da *Eram* e *Amicus* di de Victoria, a cui è legato *Cristo al morir tendea*.
- Il secondo cluster, in rosso, presenta al suo interno i brani di contrappunto intermedio e i brani omoritmici, tra loro ben differenziati. Tra il contrappunto intermedio e i brani omoritmici, legato a questi ultimi, è presente il cluster di brani a tre voci, che mostra le due armonizzazioni di *Nell'apparir* vicine. Nei brani omoritmici si nota che il corale *Aus meines*, sebbene sia sempre legato all'omoritmia del 1500, è rappresentato vicino al cluster dei corali: questa è una configurazione che si ritroverà in quasi ogni dendrogramma calcolato col metodo medio. Gli outliers interni al cluster dell'omoritmia sono *Nell'apparir* a quattro voci e *Accetta questo pane*, quest'ultimo in particolare molto distante dai corali.
- Infine si vede il *Discendi* come outlier, legato però al cluster dei brani più omoritmici: infatti per il linkage singolo era sempre un ramo totalmente a sé, mentre qui è legato di più al cluster rosso; questa è una configurazione che si pone quindi a metà tra il linkage completo (nel quale il *Discendi* era più legato solo all'omoritmia) e singolo.

Figura 3.23: Dendrogramma calcolato con linkage medio relativo alla norma euclidea.

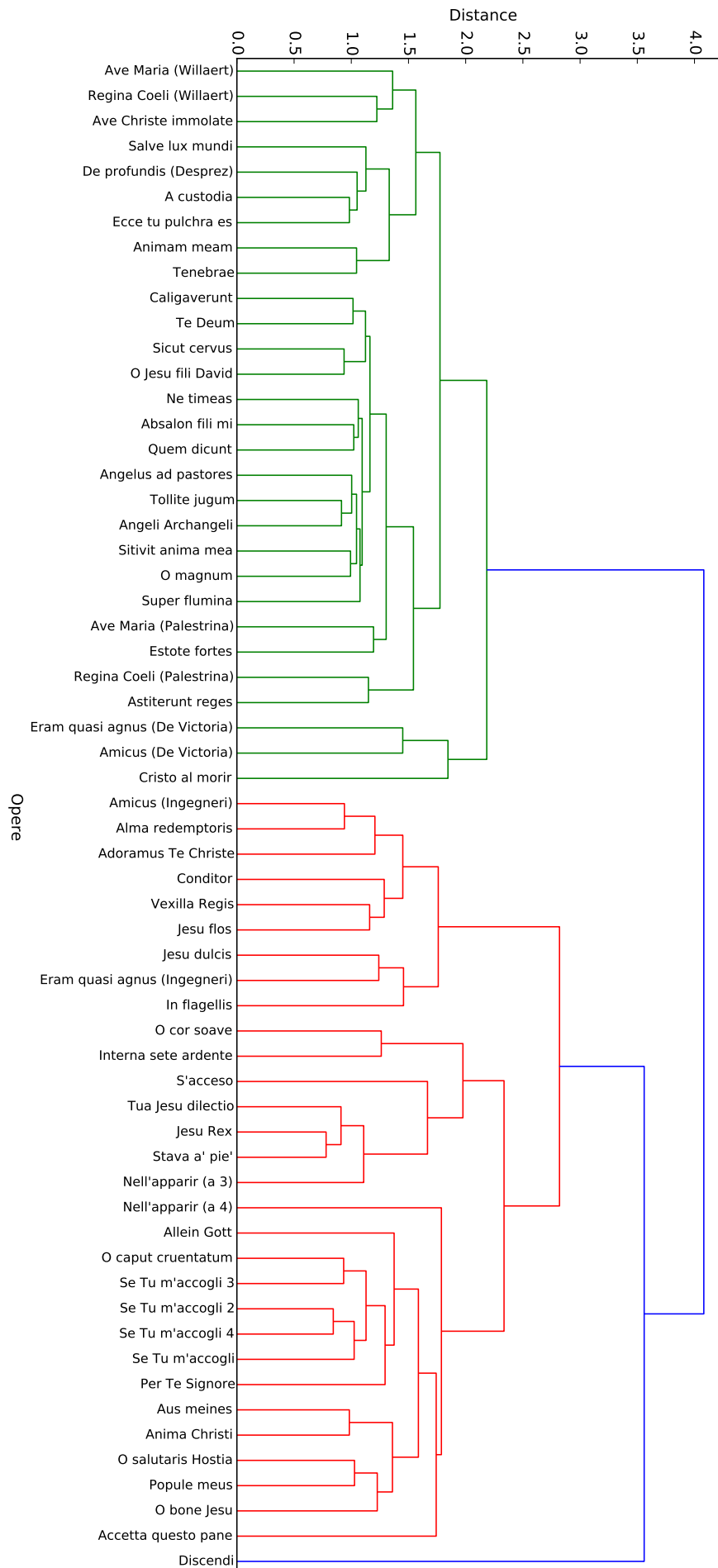
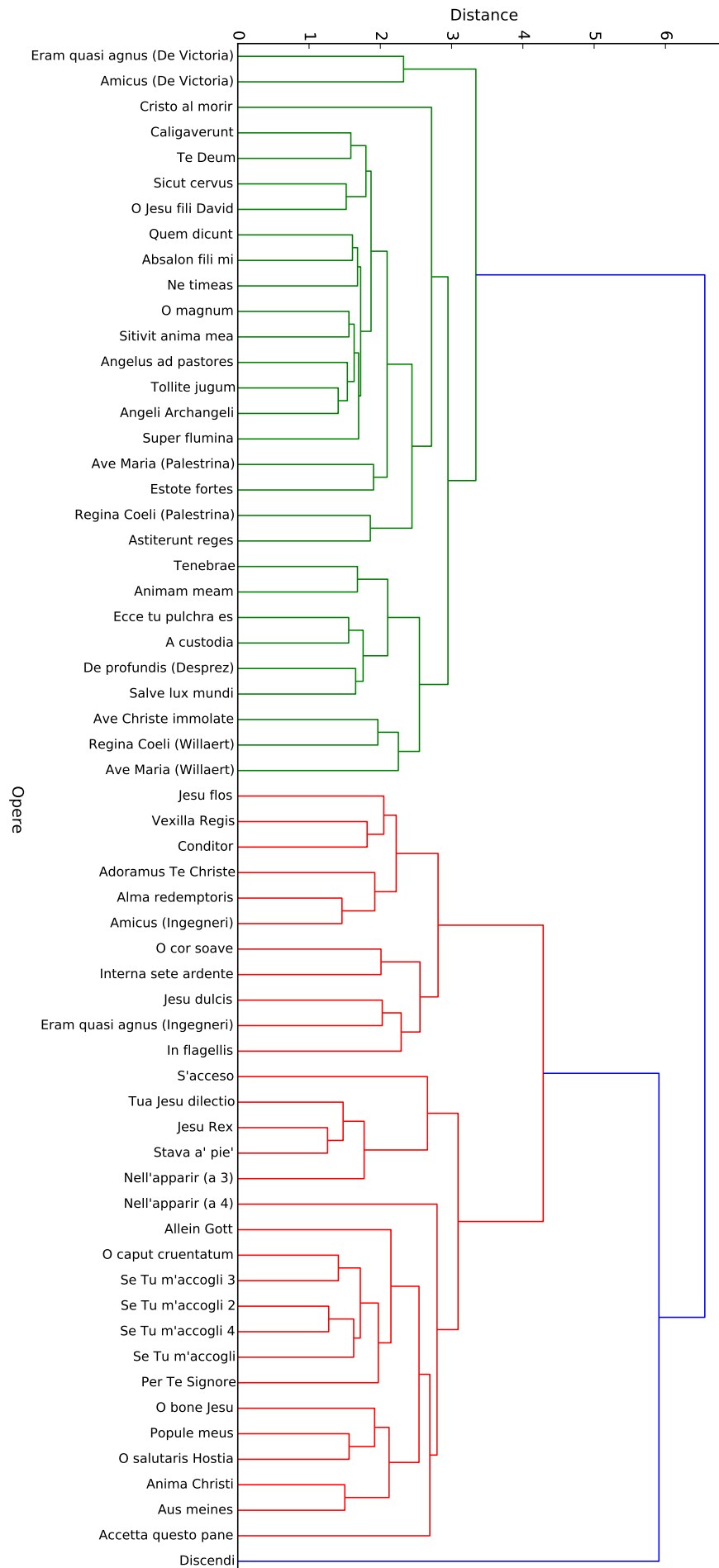


Figura 3.24: Dendrogramma calcolato con linkage medio relativo alla norma 1.



Norma 1 (figura 3.24 a fronte) Per la norma 1, la struttura fondamentale è la stessa della norma euclidea. Vi sono tuttavia alcune variazioni da osservare:

- Si osservi innanzitutto che il cluster dei fiamminghi, *Animam* e *Tenebrae* ha scambiato il suo posto con quello formato da *Eram*, *Amicus* e *Cristo al morir*, che ora è un outlier del contrappunto, mentre la coppia di brani di de Victoria è molto più separata dal cluster centrale.
- Nel cluster dei brani meno contrappuntistici, il gruppo di brani a tre voci è stato diviso, inserendo *O cor soave* e *Interna sete ardente* in mezzo ai brani di contrappunto intermedio. Questa è una cosa ragionevole da un punto di vista musicale, poiché questi due brani sono le laude più complesse analizzate, dopo *Cristo al morir tendea*; tuttavia è anche ragionevole che i brani a tre voci siano separati da quelli a quattro voci, poiché le configurazioni di voice leading che un brano con più voci può assumere sono sicuramente molte di più e molto più complesse di quelle di brani con meno voci.
- Infine l'altra variazione consistente è l'inversione di ordine del cluster relativo all'omioritmia del 1500. *Accetta questo pane* è ora invece un outlier molto più inserito nel gruppo dell'omioritmia rispetto a prima, mentre *Nell'apparir* a quattro voci risulta più distaccato da questo gruppo.

Per le somiglianze, si noti che le versioni di *Nell'apparir* sono rimaste vicine, e che il *Discendi* è sempre visualizzato come un outlier.

Norma 3 (figura 3.25 nella pagina successiva) La struttura di questo dendrogramma è più simile a quello relativo alla norma euclidea, con la differenza che qui i cluster principali sono 3, come per il linkage completo:

- Il cluster verde è quello del contrappunto più elevato. Il cambiamento più sostanziale rispetto alla norma euclidea è la presenza di un unico cluster contenente i brani di Gabrieli, rendendo quindi il *Caligaverunt* di de Victoria un outlier (solitamente è infatti legato al *Te Deum* del compositore veneziano).
- Il cluster rosso è quello dei brani con una specie di contrappunto intermedia;
- Il cluster azzurro ha al suo interno i brani a tre voci e l'omioritmia. Le armonizzazioni di *Nell'apparir* sono vicine, così come *Aus meines* e i corali, e nel cluster dell'omioritmia viene prima quello del '500 e poi quello dei corali.

È interessante osservare che questo dendrogramma è ordinato quasi in senso cronologico, specie il cluster dell'omioritmia: si parte da Willaert e Desprez, i più vicini all'inizio del '500, per poi passare alla metà del '500, proseguendo verso i brani più vicini all'inizio del XVII secolo; si conclude poi con i corali e il *Discendi*, il brano più vicino alla nostra epoca.

Norma 4 (figura 3.26 a pagina 95) Nel caso della norma 4, ritroviamo la struttura a due cluster: il gruppo del contrappunto intermedio è legato a quello del contrappunto elevato, e posto in alto, invertendo le foglie forse per conservare la distanza e cambiando un raggruppamento:

Figura 3.25: Dendrogramma calcolato con linkage medio relativo alla norma 3.

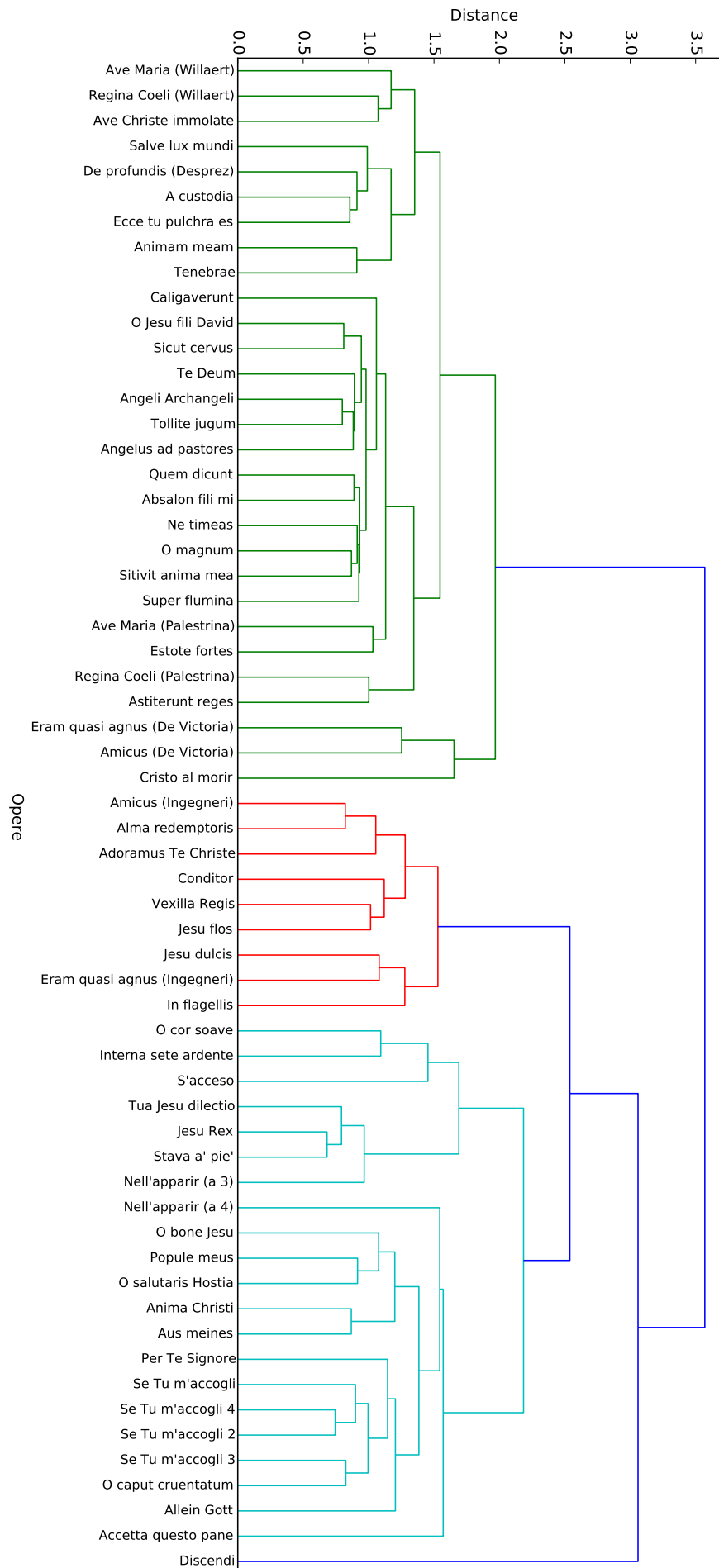
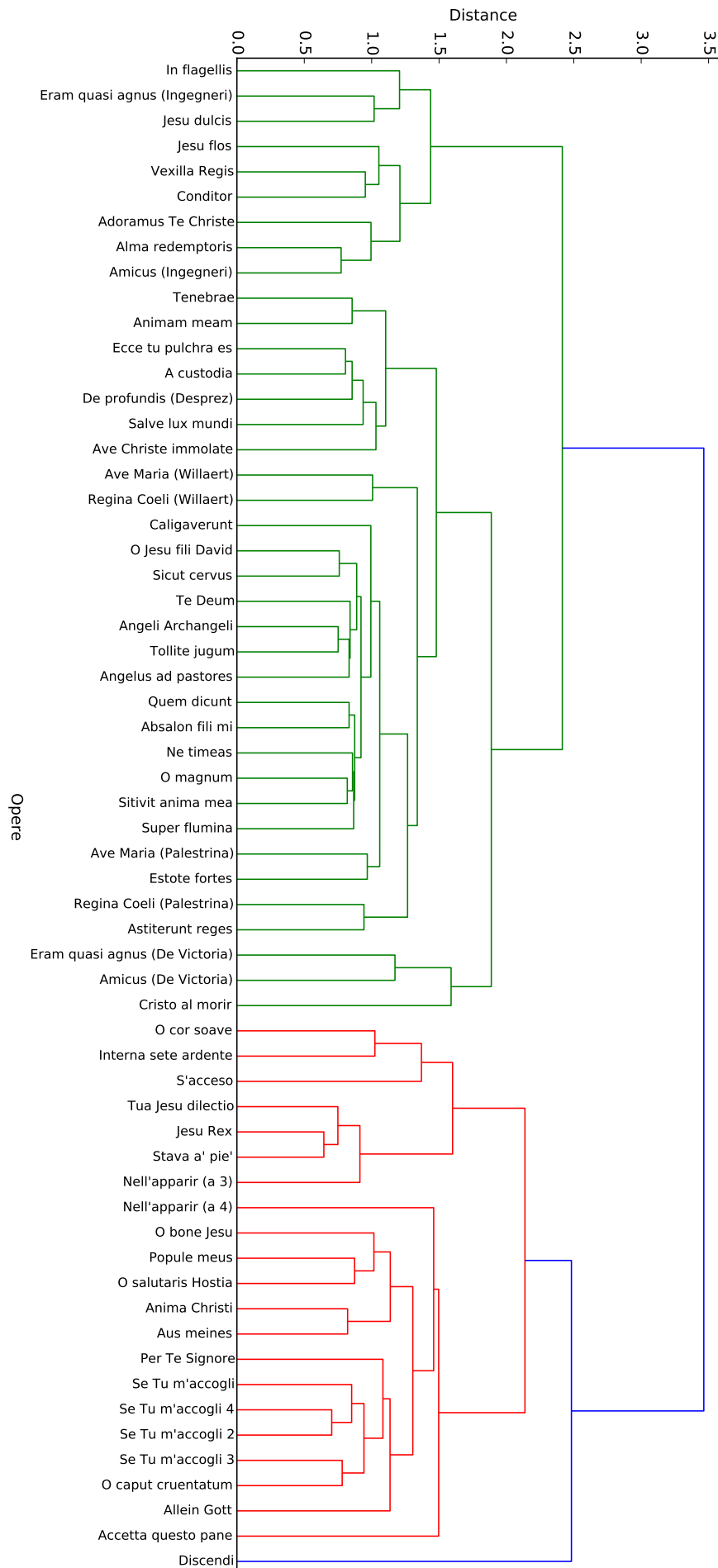


Figura 3.26: Dendrogramma calcolato con linkage medio relativo alla norma 4.



in tutti i dendrogrammi precedenti c'era un cluster a tre formato da *Jesu flos* e *Conditior* di Palestrina e *Vexilla Regis* di de la Rue, nel quale quest'ultimo era sempre legato a *Jesu flos*; ora invece *Vexilla Regis* è legato a *Conditior*, isolando *Jesu flos*. Willaert è stato staccato da Desprez e unito agli altri brani del 1500; la parte relativa all'omioritmia è rimasta uguale alla norma 3.

Norma 5 (figura 3.27 nella pagina successiva) In questo dendrogramma non cambia nulla di particolare rispetto a quello della norma 4: si assiste infatti solo a una permutazione dei brani di Gabrieli, che lasciano però i brani dell'autore uniti in un cluster unico.

Norma 6 (figura 3.28 a pagina 98) e norma 7 (figura 3.29 a pagina 99) Anche il dendrogramma della norma 6 non presenta modifiche particolari, eccetto un cambiamento di relazione analogo a quello osservato per la norma 4: infatti nel cluster formato da *O bone Jesu* di Ingegneri, *Popule meus* di de Victoria e *O salutaris Hostia* di de la Rue, erano sempre legati gli ultimi due, mentre ora sono legati *O bone Jesu* e *Popule meus*. Questo avvicinamento dei due brani è interessante, soprattutto perché filologicamente più ragionevole rispetto a prima: ci si aspetta infatti che due brani cronologicamente così vicini, di due autori con uno stile compositivo simile, siano più legati tra loro che a un brano di oltre 60 anni prima.

Il dendrogramma relativo alla norma 7 è invece identico a quello della norma 6 appena descritto.

Norma infinito (figura 3.30 a pagina 100) Questo dendrogramma merita un discorso a parte. Innanzitutto siamo tornati ad avere tre cluster principali:

- Il cluster verde è quello relativo al contrappunto più elevato. In Desprez abbiamo per la prima volta, con linkage medio, i brani *Ave Christe immolate* e *Salve lux mundi* (uno la seconda parte dell'altro) uniti in un'unica coppia; Willaert è invece rimasto legato agli altri brani del 1500. Il cluster relativo a Gabrieli ha assorbito al suo interno il *Sitivit* di Palestrina, mentre *Ne timeas* e *O magnum* di de Victoria sono uniti;
- il cluster rosso è quello dei brani a tre voci; interessante notare che *Cristo al morir* è affiancato a questo cluster.
- Il *Discendi* è sempre outlier, ma più legato al cluster rosso; separa così nella visualizzazione le due armonizzazioni di *Nell'apparir*.
- Il cluster azzurro comprende i brani omioritmici (più in alto quelli del '500, più in basso i corali) e i brani di contrappunto intermedio, posti in fondo. *Accetta questo pane* e la versione a quattro voci di *Nell'apparir* sono ancora gli outliers dei brani omioritmici.

Le variazioni di raggruppamento descritte per norma 4 e norma 6 sono state conservate.

Il metodo di linkage medio, quindi, agisce su questo dataset in modo simile a quello completo, mantenendo però più visibili gli outliers. Forse il dendrogramma più rilevante in questo caso è quello ottenuto per la norma 3.

Figura 3.27: Dendrogramma calcolato con linkage medio relativo alla norma 5.

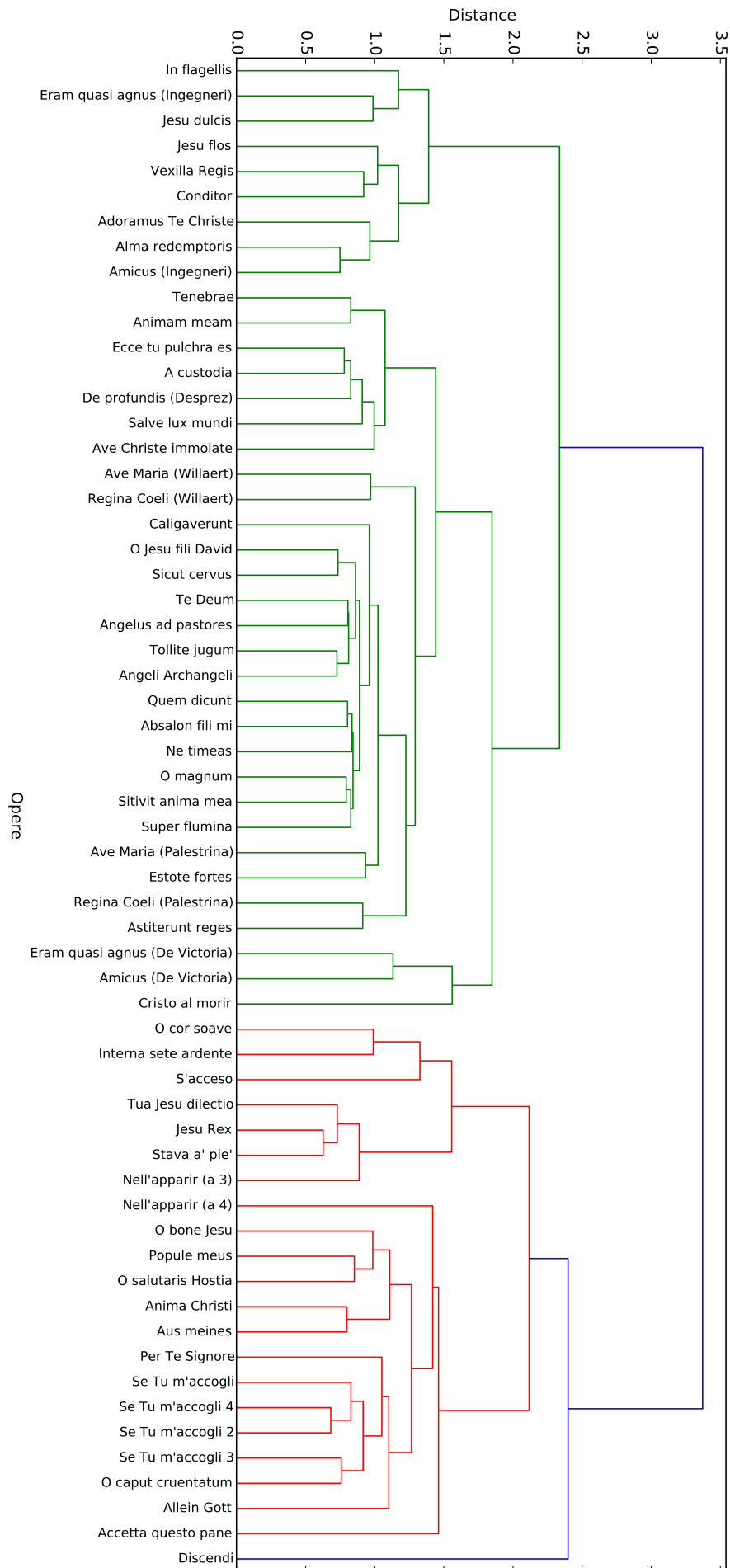


Figura 3.28: Dendrogramma calcolato con linkage medio relativo alla norma 6.

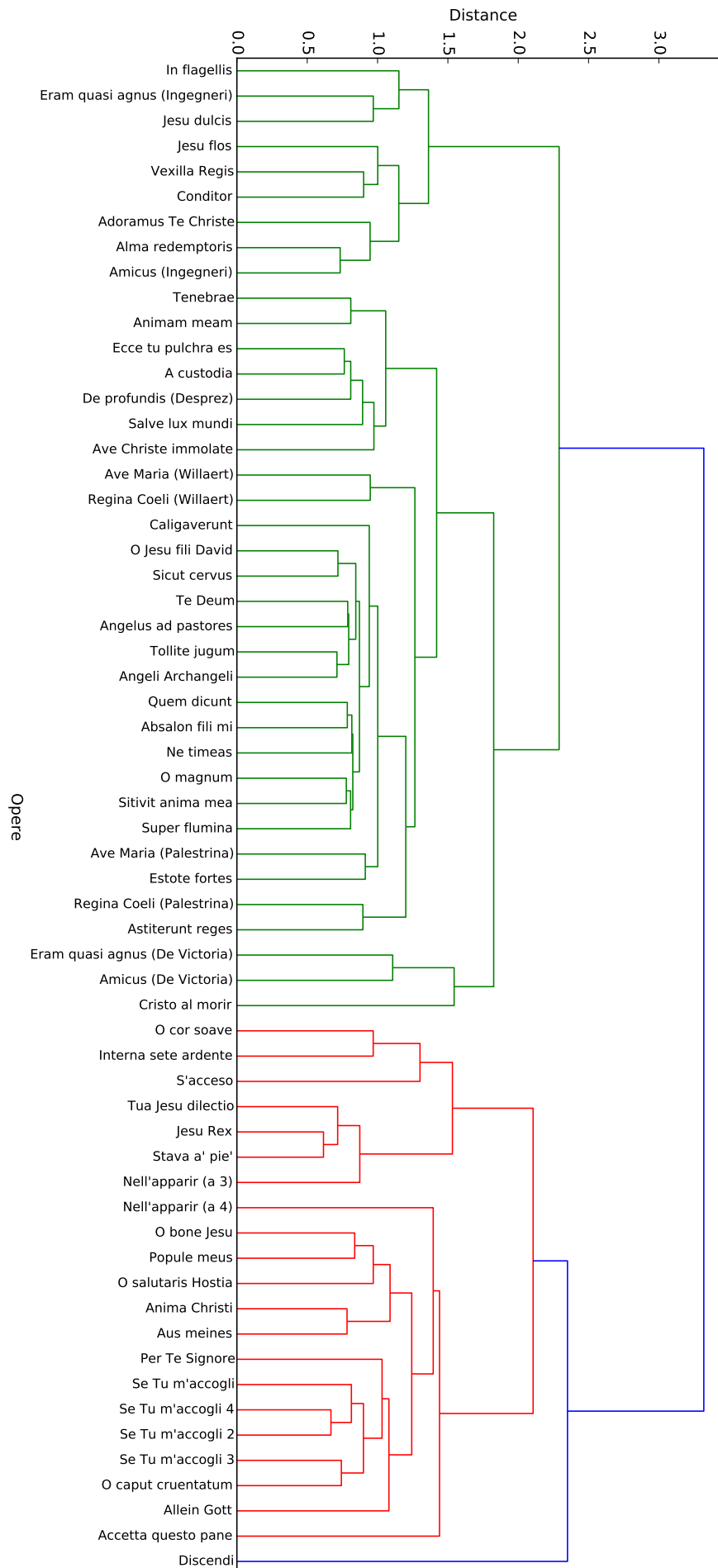


Figura 3.29: Dendrogramma calcolato con linkage medio relativo alla norma 7.

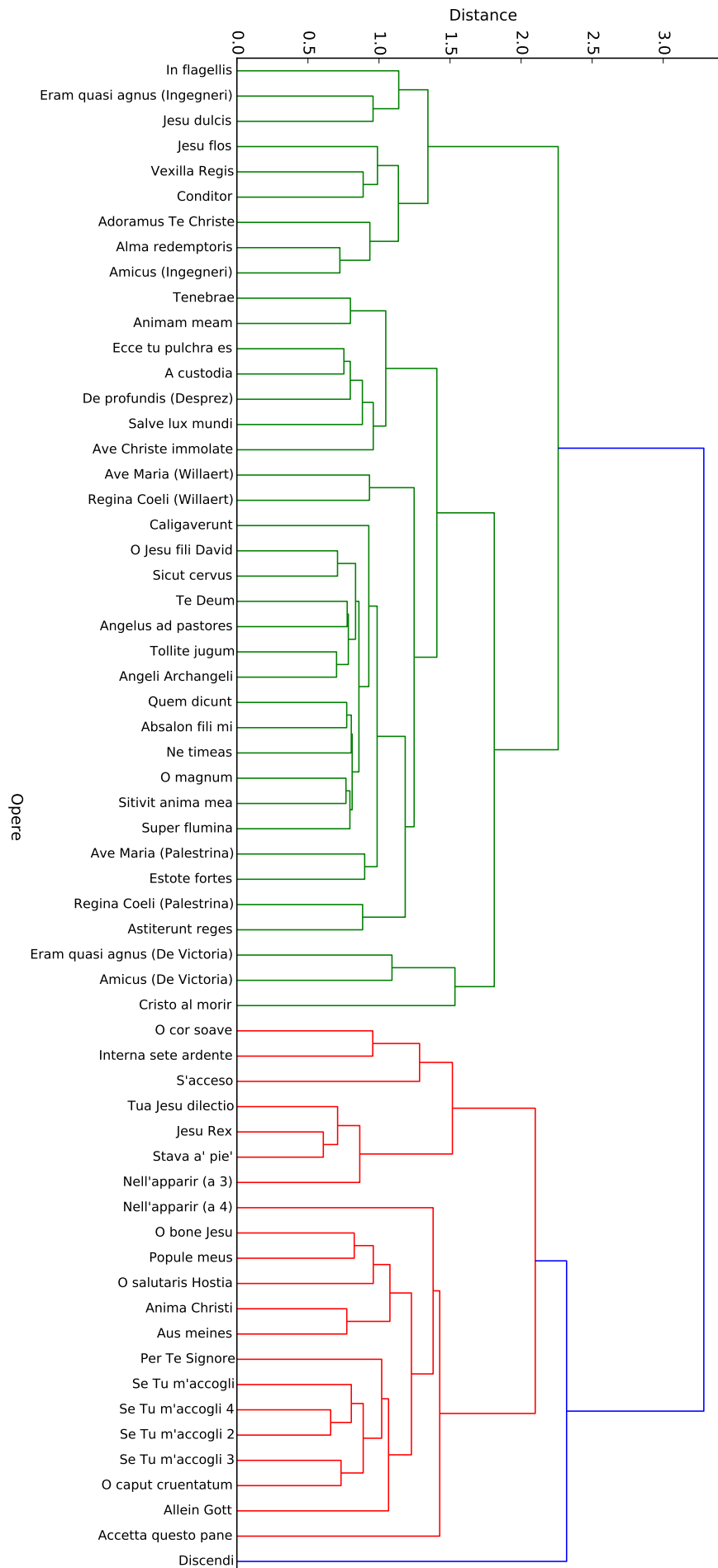
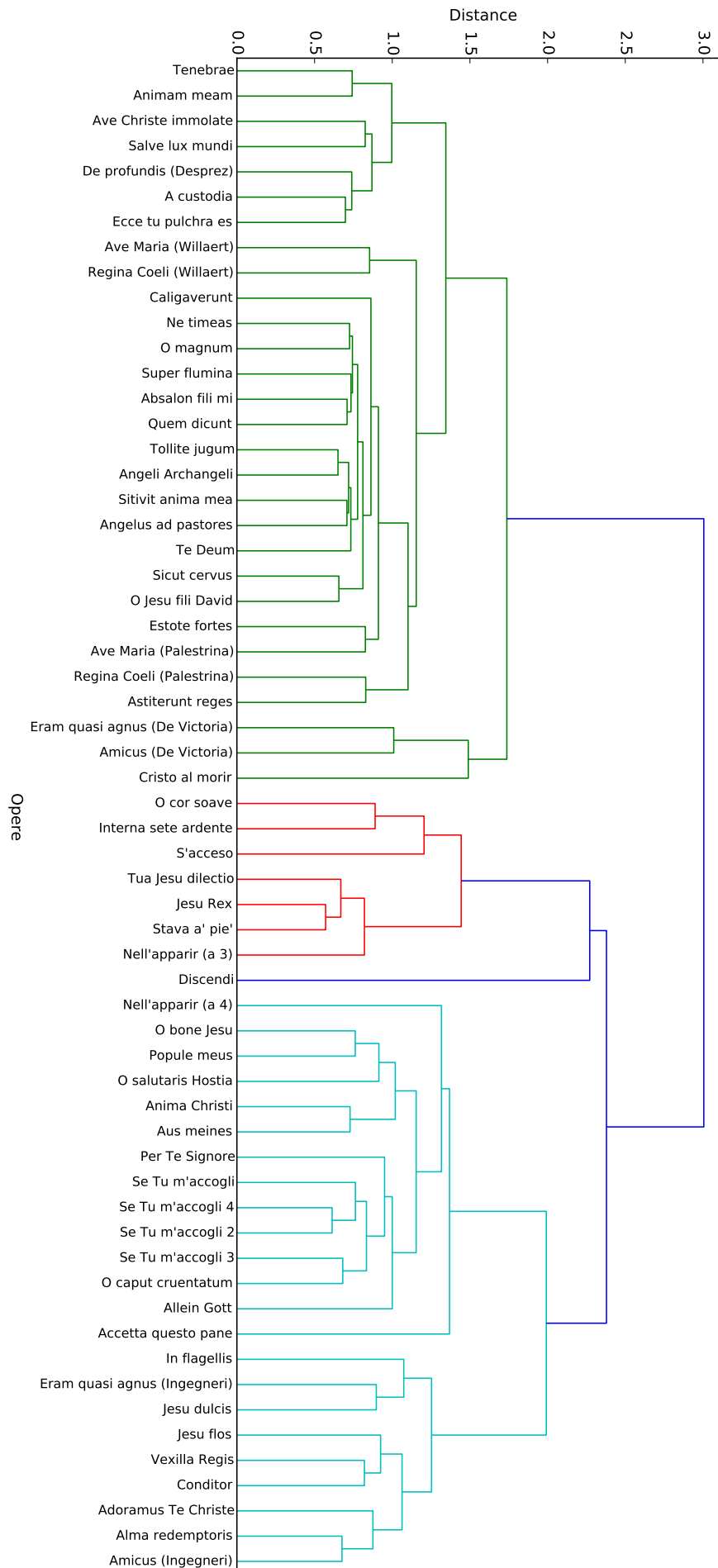


Figura 3.30: Dendrogramma calcolato con linkage medio relativo alla norma infinito.



Metodo di linkage pesato

I dendrogrammi ottenuti con questo metodo sono risultati molto simili a quelli ottenuti applicando il linkage medio; il commento dei dendrogrammi sarà quindi in riferimento anche a quelli descritti in precedenza.

Norma euclidea (figura 3.31 nella pagina successiva) Il dendrogramma per la norma euclidea calcolato con linkage pesato è sostanzialmente uguale a quello ottenuto con il linkage medio (figura 3.23); la differenza più importante è che il cluster dei brani con una specie di contrappunto intermedia è legato all'altro cluster del contrappunto, mentre per il medio era legato a quello dell'omioritmia; questo è una cosa più ragionevole, sebbene sarebbe più positiva una distinzione ulteriore per il contrappunto intermedio, come si aveva per il linkage completo e per la norma 3 con linkage medio.

C'è anche una variazione di cluster interni al contrappunto elevato:

- Per quanto i brani di Gabrieli non siano comunque tutti uniti, qui i cluster contenenti tali brani sono stati comunque ravvicinati, spostando quindi il cluster del *Sicut* di Palestrina e *O Jesu fili David* di Desprez accanto alla coppia formata da *Absalon fili mi* di de la Rue e *Quem dicunt* di Marenzio, ponendo vicini i brani dei due fiamminghi. Anche i brani *O magnum* e *Ne timeas* di de Victoria, sebbene in cluster diversi, qui sono rappresentati in foglie adiacenti.
- Sono stati invertiti i cluster dei brani omioritmici del 1500 e quello dei corali, invertendo anche l'ordine di quello del '500, mantenendo vicino *Aus meines* agli altri corali. *Accetta questo pane* è però rimasto nella sua posizione, venendo legato a tutti e due i cluster, non solo a quello dei corali.

Il *Discendi* persiste come outlier; anche le versioni di *Nell'apparir* sono mantenute vicine.

Norma 1 (figura 3.32 a pagina 103) Per quanto riguarda la norma 1 sono presenti alcune differenze sostanziali sia rispetto alla norma euclidea che al dendrogramma riferito alla stessa norma nel linkage medio:

- Il cluster del contrappunto elevato ha subito dei cambiamenti interni rispetto a quello della norma euclidea: il gruppo di Willaert, Desprez, *Animam meam* e *Tenebrae* è rimasto uguale (come la posizione della coppia *Amicus meus* e *Eram*), mentre il resto è identico al corrispettivo per il linkage medio (perdendo quindi la vicinanza dei brani di Gabrieli e dei due brani fiamminghi in questo cluster, presente nella norma euclidea).
- Il cluster del contrappunto intermedio è praticamente identico a quello del metodo di linkage medio (figura 3.24), oltre ad essere legato anche qui all'omioritmia; rispetto alla norma euclidea è stato invertito il cluster che va da *Jesu flos* all'*Amicus* di Ingegneri, e alla parte rimanente è stato legato il cluster formato dalle laude *O cor soave* e *Interna sete ardente*, come per il linkage medio, con in più anche *S'acceso* posto come outlier, che nel linkage medio era rimasto legato agli altri brani a tre voci.

Figura 3.31: Dendrogramma calcolato con linkage pesato relativo alla norma euclidea.

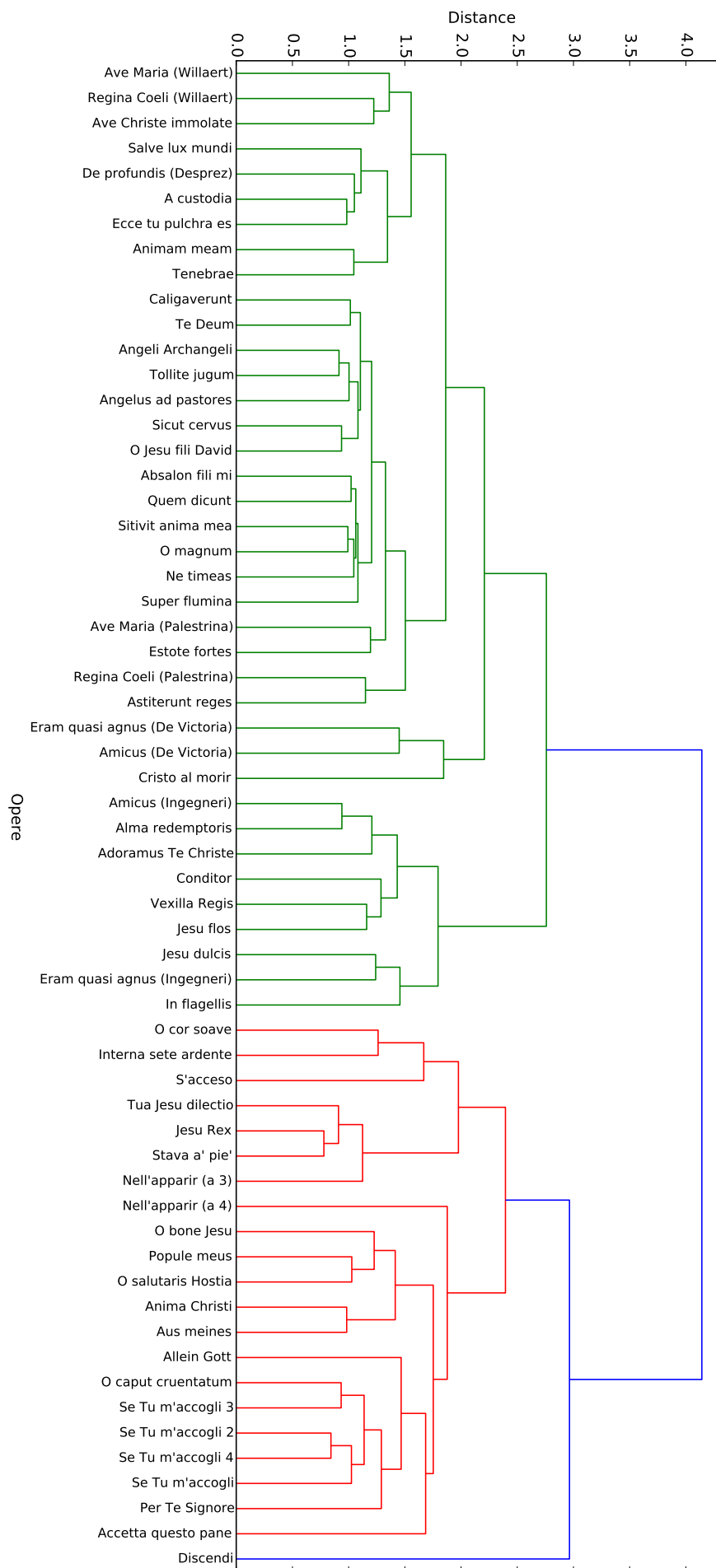
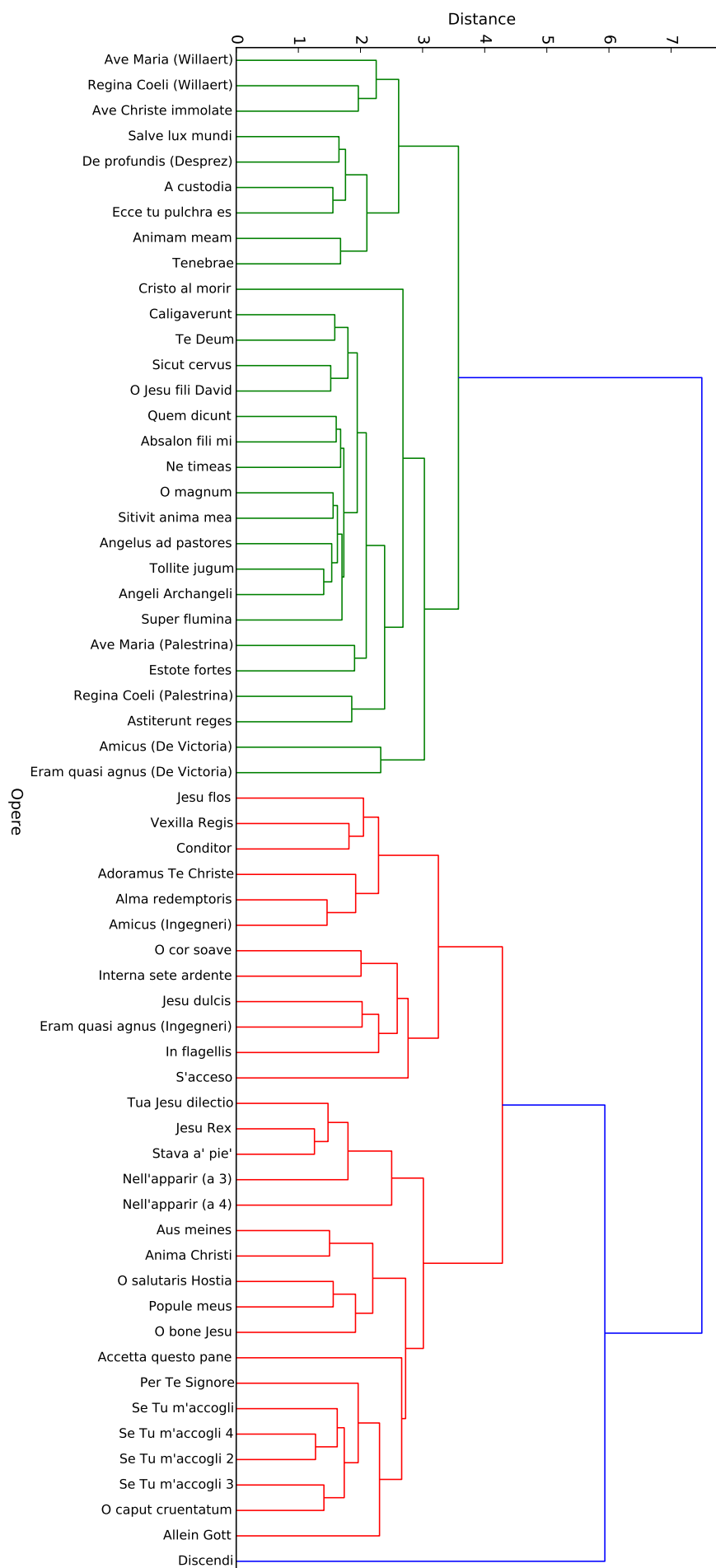


Figura 3.32: Dendrogramma calcolato con linkage pesato relativo alla norma 1.



- Il cluster dell'omioritmia ha subito alcune inversioni, e un cambiamento importante: la versione a 4 voci di *Nell'apparir del sempiterno sole* è stata legata ai brani a tre voci, rendendo molto evidente la sua somiglianza con lo stesso brano armonizzato a tre voci. Il cluster dell'omioritmia cinquecentesca è stato invertendo, così come quello dei corali, allontanando *Aus meines* dai corali e ponendo *Accetta questo pane* in mezzo ai due gruppi.

Norma 3 (figura 3.33 nella pagina successiva) La differenza rispetto al linkage medio (figura 3.25) per questa norma è sostanziale: innanzitutto sono presenti solo due cluster principali contro i tre del medio; il cluster dell'omioritmia è coincidente con quello della norma euclidea per il linkage pesato, riportando così *Aus meines* vicino ai corali (rispetto al linkage medio vi è infatti una permutazione nei corali).

Inoltre, il cluster del contrappunto intermedio è legato a quello del contrappunto elevato e posto all'inizio del dendrogramma, con ordine esattamente inverso rispetto alla norma euclidea, probabilmente per mantenere le distanze relative al cluster di contrappunto elevato. È stato invertito anche il cluster di Desprez e Willaert, mentre i due brani di quest'ultimo sono stati separati (il suo *Regina Coeli* è stato infatti unito agli altri brani del 1500). Nel resto del cluster risulta esserci una permutazione rilevante degli elementi, che ha però portato i brani di Gabrieli a congiungersi in un unico cluster, come per il linkage medio.

I brani a tre voci sono ora tutti in un unico cluster, le due versioni di *Nell'apparir* vicine, così come *Cristo al morir tendea* è stato orientato in modo da essere posto vicino ai brani a tre voci.

Norma 4 (figura 3.34 a pagina 106) Questo dendrogramma è estremamente interessante, essendo infatti evidenziati ben quattro cluster principali:

- Il cluster verde della norma 3 è stato conservato, ma separato con due colori diversi: verde per il contrappunto intermedio, rosso per il contrappunto elevato. Anche nel linkage medio si aveva una configurazione di questo tipo per il contrappunto intermedio e i compositori fiamminghi, sebbene qui Willaert sia ancora separato.
- Il cluster rosso della norma 3 è ora rappresentato dal cluster azzurro, contenente i brani a tre voci, e quello viola, contenente l'omioritmia, identico a prima tranne che per uno spostamento di *Discendi Santo Spirito*, ora outlier solo di questo cluster e posto tra le due versioni di *Nell'apparir*.

Norma 5 (figura 3.35 a pagina 107) La struttura ottenuta per questa norma ha alcune caratteristiche di sintesi tra la norma precedente e il dendrogramma ottenuto applicando il linkage medio alla stessa matrice di distanze (figura 3.27):

- Oltre alla conservazione dei quattro cluster principali, il cluster del contrappunto è posizionato all'inizio con lo stesso ordine del dendrogramma precedente;
- il cluster dei fiamminghi è nuovamente riunito e ordinato con i brani di Willaert accoppiati e i due brani di de Victoria verso gli altri brani del 500 più complessi. Il resto del cluster è ordinato come nel linkage medio, con Gabrieli unito e il *Caligaverunt* come outlier ordinato verso la coppia dello stesso autore legata ai fiamminghi, per esempio.

Figura 3.33: Dendrogramma calcolato con linkage pesato relativo alla norma 3.

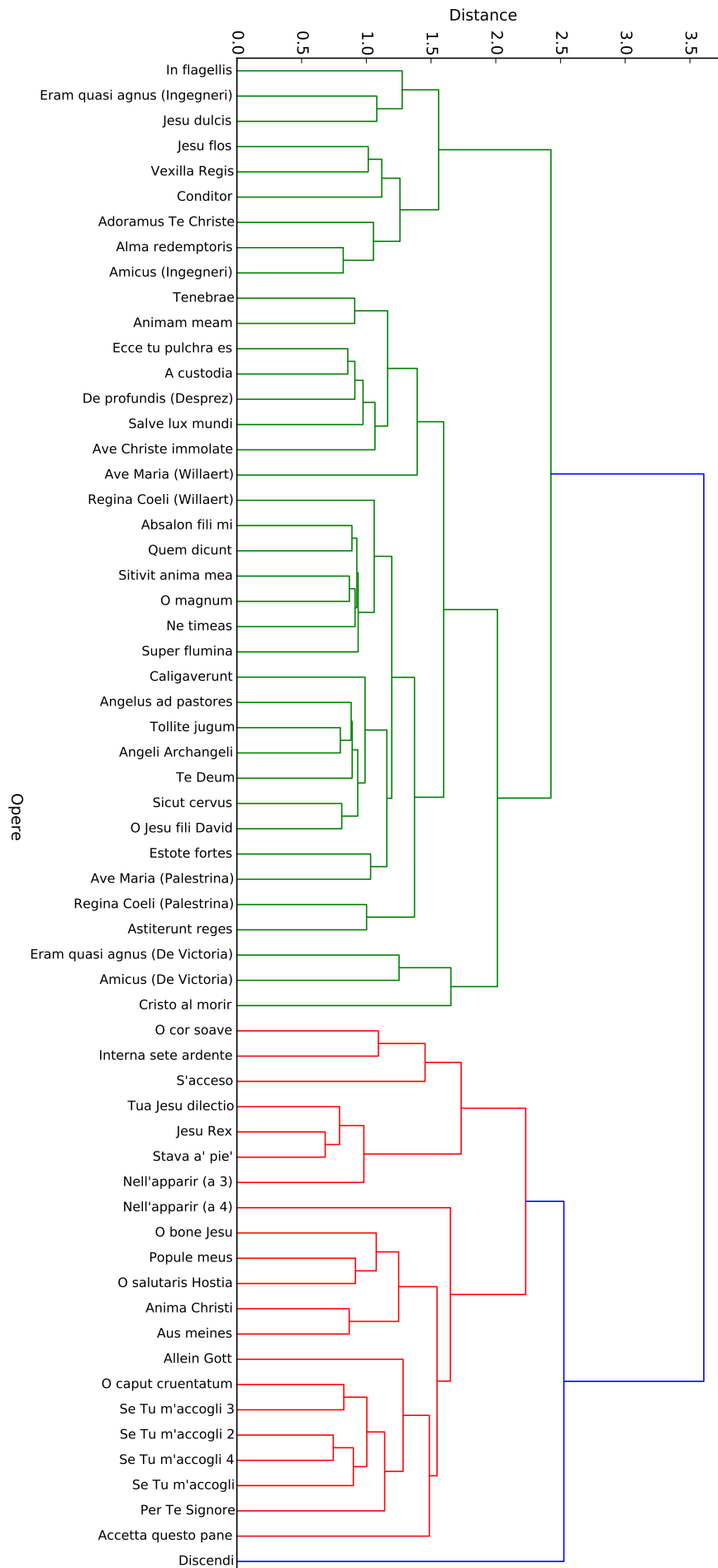


Figura 3.34: Dendrogramma calcolato con linkage pesato relativo alla norma 4.

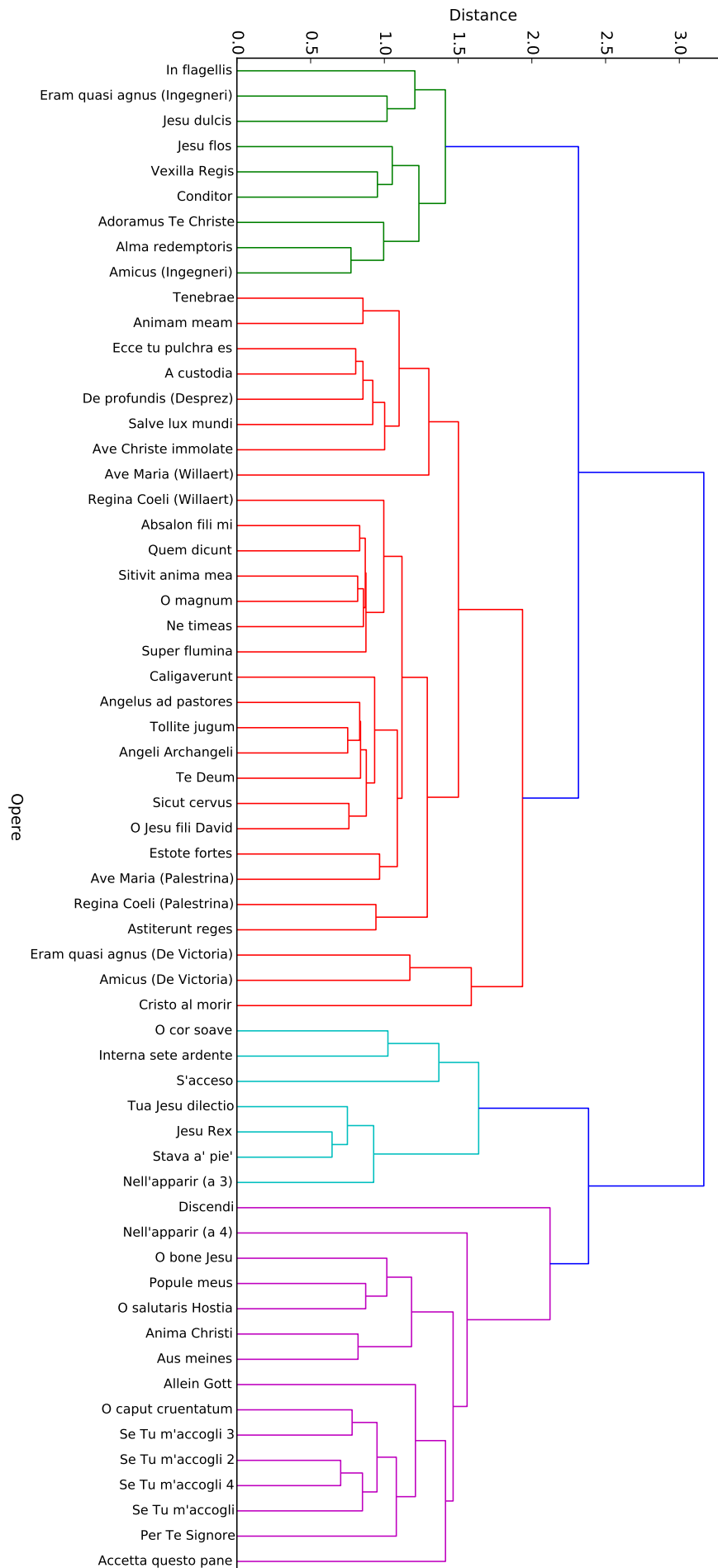
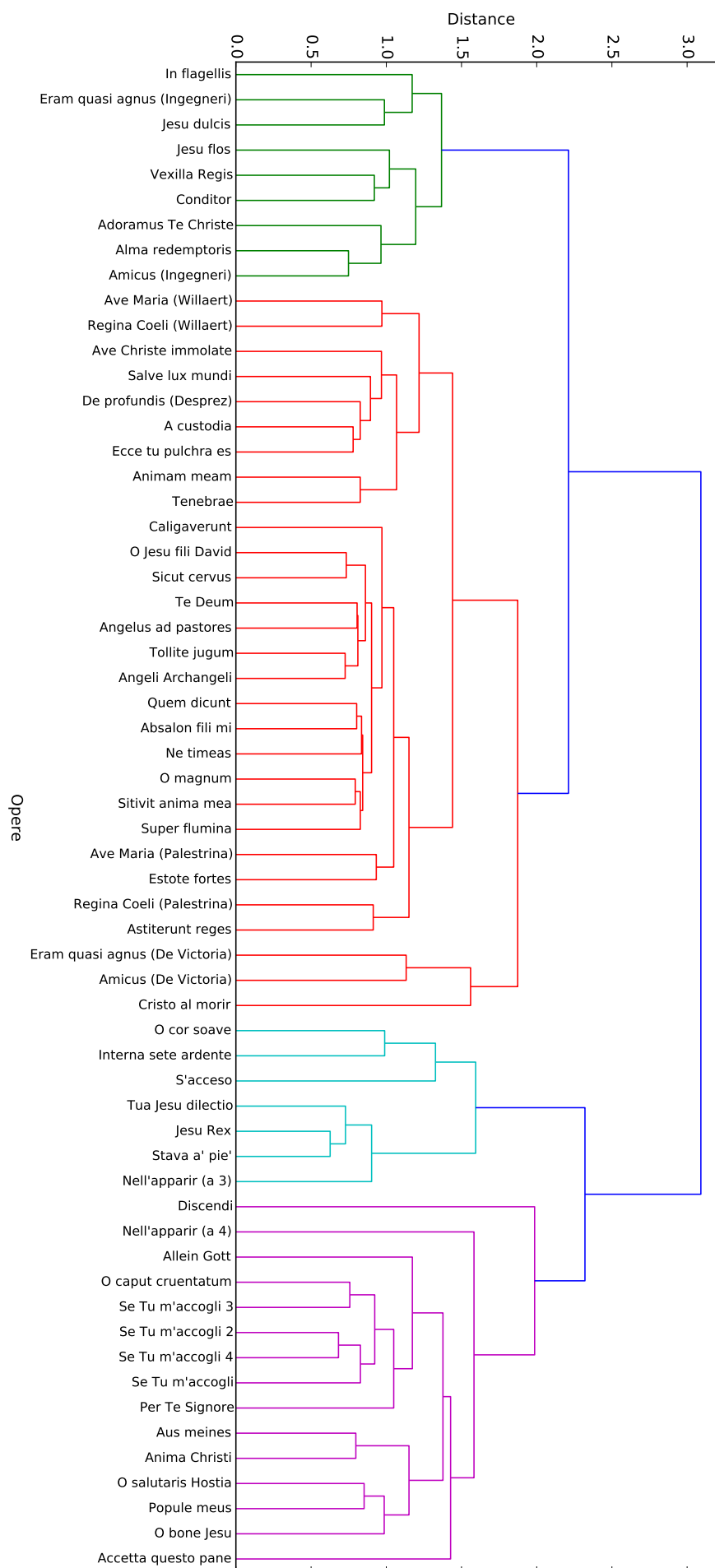


Figura 3.35: Dendrogramma calcolato con linkage pesato relativo alla norma 5.



- Gli altri due cluster sono identici alla norma precedente; la sola differenza è un riavvenuto scambio tra il cluster dei corali e quello dell'omoritmia del '500, che conserva comunque *Aus meines* vicino ai corali (e che inverte quindi quest'ultimo cluster); *Accetta questo pane* invece rimane nella posizione di prima, diventando outlier di tutto il cluster dell'omoritmia, non solo dei corali.

Norma 6 (figura 3.36 a fronte) Il dendrogramma per questa norma è pressoché uguale a quello della norma 5. Gli unici cambiamenti avvengono nel cluster viola dell'omoritmia: difatti si assiste a un'altra inversione tra il cluster dei corali e quello dell'omoritmia, portando questo cluster nello stesso ordine presente nella norma 4 (con conseguente riposizionamento di *Accetta questo pane*). In più, analogamente a quanto osservato per il linkage medio applicato a questa norma (figura 3.28), il cluster formato da *O bone Jesu*, *Popule meus* e *O salutaris Hostia* unisce i primi due, mentre prima erano sempre stati legati gli altri due; questo, come già detto per il linkage medio, è un risultato più accurato da un punto di vista filologico.

Norma 7 (figura 3.37 a pagina 110) Il dendrogramma ottenuto con la norma 7 è coincidente con quello ottenuto con la norma 6.

Norma infinito (figura 3.38 a pagina 111) In generale, abbiamo osservato che la norma infinito genera dendrogrammi molto diversi da quelli delle altre norme, a volte più vicini a quelli delle norme minori; col linkage pesato abbiamo invece un dendrogramma più simile a quello delle norme superiori, sebbene siano presenti solo tre cluster principali. Inoltre vi sono alcune analogie ulteriori col dendrogramma ottenuto applicando il linkage medio alla stessa matrice di distanze (figura 3.30).

- La prima parte del dendrogramma, quella relativa al contrappunto intermedio, è identica a quella della norma 7; i brani di Willaert sono rimasti accoppiati e legati al loro cluster abituale, sebbene l'ordine dei brani di Desprez sia esattamente l'inverso di quello della norma 7.

Il resto del cluster del contrappunto è esattamente quello del linkage medio, con l'unica differenza che la parte dal *Ne timeas* a *O Jesu fili David* è l'inverso. Si ha quindi *O Jesu* più vicino agli altri brani di Desprez (sebbene in mezzo vi siano i tre brani di de Victoria), il *Sitivit* di Palestrina all'interno del cluster di Gabrieli e i due brani di de Victoria *Ne timeas* e *O magnum* uniti. Se si confronta questo cluster con quello della norma 7, si può notare che il cambiamento del cluster è dovuto solo allo spostamento di *Sitivit*: venendo infatti inserito nel gruppo di Gabrieli, il *Super flumina*, prima legato al *Sitivit*, viene spostato verso Gabrieli, cambiando gli equilibri stabiliti nella norma 7.

- Infine, sono stati nuovamente scambiati il cluster dei corali e quello dell'omoritmia del 1500, mantenendo *Aus meines* vicino ai corali e *Accetta questo pane* nella posizione già descritta per la norma 5 (figura 3.35).

In conclusione a questa analisi dei dendrogrammi, possiamo affermare che il clustering gerarchico separa molto bene le specie di contrappunto più elevate da quelle più semplici,

Figura 3.36: Dendrogramma calcolato con linkage pesato relativo alla norma 6.

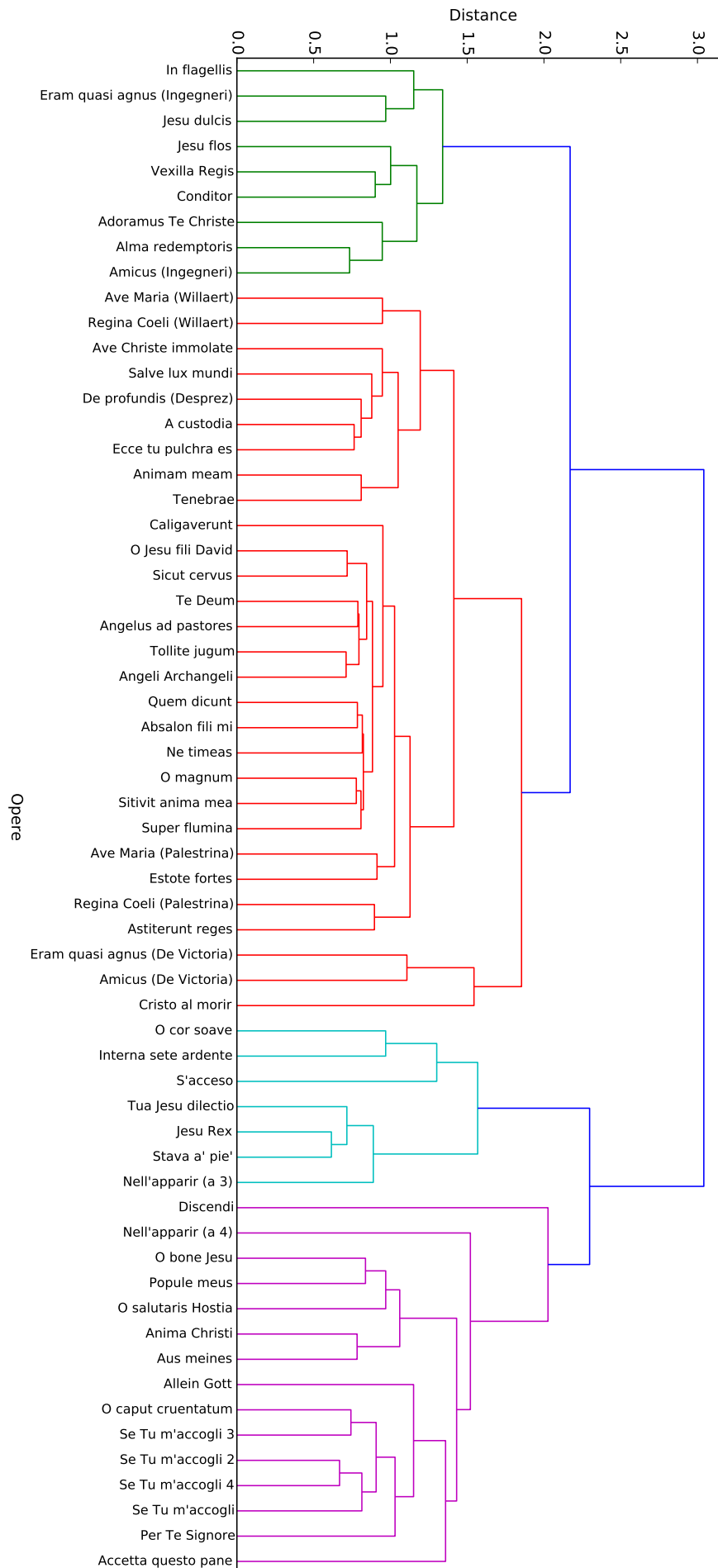


Figura 3.37: Dendrogramma calcolato con linkage pesato relativo alla norma 7.

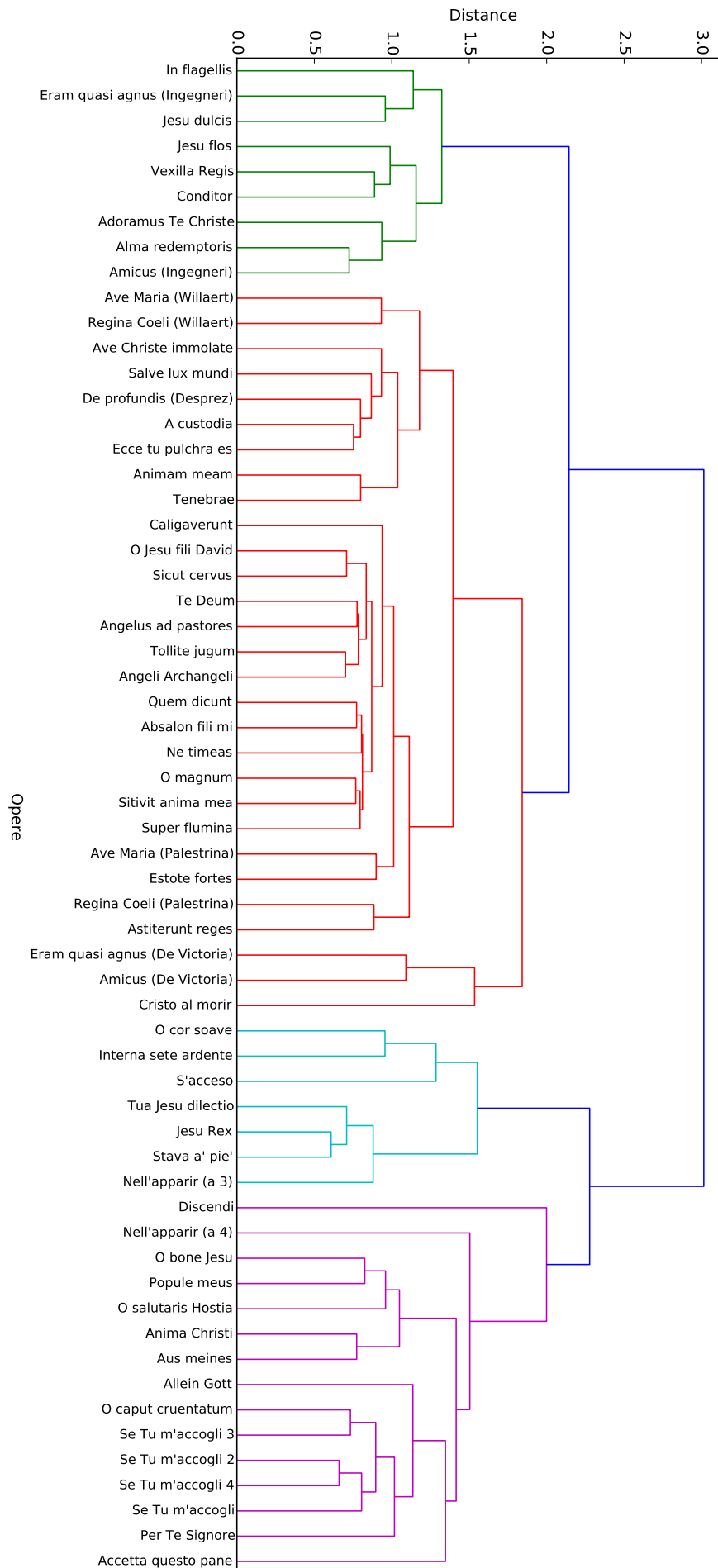
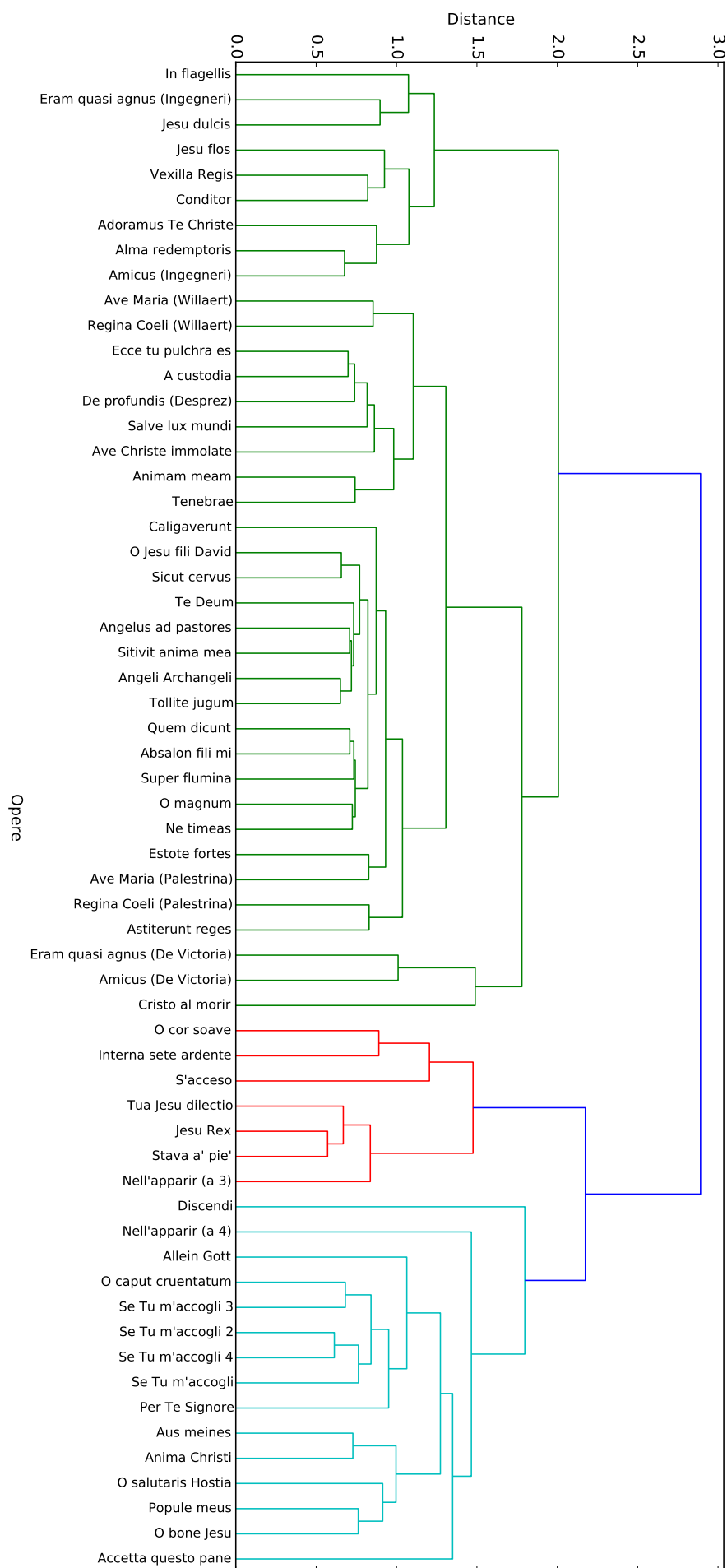


Figura 3.38: Dendrogramma calcolato con linkage pesato relativo alla norma infinito.



distinguendo in taluni casi delle specificità; è il caso, per esempio, dei compositori fiamminghi, o dei brani a tre voci, o delle coppie di brani di de Victoria dell'*Officium Hebdomadae Sanctae*, così come i corali, cluster costanti nel corso della sperimentazione; vi sono poi alcuni elementi considerati sempre come cluster, come il *Discendi*, *Accetta questo pane*, *Cristo al morir tendea*, in alcuni casi *In flagellis*.

Vi sono alcuni dendrogrammi e alcune norme, però, che più di altri hanno dato ottimi risultati, anche da un punto di vista filologico. Ne sono un esempio in generale le norme di ordine più elevato, come la norma 5 o la norma 6 (anche la norma 7, anche se spesso i suoi dendrogrammi risultavano identici a quelli della norma 6). Indichiamo ad esempio la norma 3 (figura 3.9) per il linkage completo, la norma 3 per il medio (figura 3.25), e la norma 6 e 7 per il linkage pesato (figura 3.36 e 3.37). Il linkage singolo si è rivelato essere un ottimo metodo per porre in evidenza, più che i cluster, gli outliers, quindi quegli elementi che, da un punto di vista filologico, hanno collocazione ambigua, confermando un'attribuzione errata, o distanze effettivamente osservate, dando risultati su quest'aspetto migliori degli altri metodi.

Per quanto riguarda i risultati di clustering, sicuramente il risultato più soddisfacente è quello ottenuto con il metodo di linkage pesato sulle norme 6 e 7, con le quali si è ottenuta un'ottima suddivisione di specie di contrappunto, un'evidenza dei brani a tre voci, e una vicinanza dei brani simili in cluster diversi, grazie a `optimal_order`, molto buona.

Come detto, le norme di ordine elevato danno in genere risultati più convincenti, per quanto il costo computazionale delle distanze DTW risulti molto più elevato usando tali norme come funzioni costo: difatti, se per la norma 1, euclidea, o anche infinito, il tempo necessario per calcolare un intero dataset di 60 brani è di circa 30 minuti, per la norma 6 o 7 questo tempo arriva a un massimo di oltre 2 ore, in caso di processore impegnato in altri processi.¹ Tuttavia questi tempi si raggiungono solo in caso di calcolo di tutte le distanze in un unico processo; se si calcolano le distanze DTW a mano a mano che i brani vengono aggiunti le tempistiche si riducono sensibilmente.

¹I tempi di computazione sono riferiti alla macchina utilizzata per l'analisi, che monta un processore Intel® Core™ i5-8250U CPU @ 1.60GHz, 8 GB di RAM.

Conclusioni e possibili sviluppi futuri

In questo progetto di tesi è stato ampliato il metodo di rappresentazione di un brano attraverso la complessità del suo voice leading esposto in [Bergomi 2015], aggiungendo fondamentalemente il riconoscimento del voice crossing avvenuto lungo più di un voice leading (sezione 2.5) e il conteggio dell'unisono; questo ha quindi permesso una rappresentazione della complessità di un voice leading più dettagliata. Applicando poi tale algoritmo ai brani scelti abbiamo permesso il confronto tra concatenazioni di voice leading tramite la DTW, e la visualizzazione delle distanze DTW come dendrogrammi, rappresentando così i cluster ottenuti col metodo del clustering gerarchico.

Così facendo abbiamo ottenuto risultati positivamente inaspettati; ad esempio, utilizzando diversi metodi e diverse metriche per il calcolo del dendrogramma, si è ottenuta una netta distinzione tra i brani omoritmici del '500 e i corali, sebbene le distanze DTW fossero molto vicine; abbiamo rilevato una vicinanza tra le diverse armonizzazioni dello stesso corale; oppure, abbiamo riscontrato una corrispondenza tra i brani di dubbia attribuzione e una loro visualizzazione come outliers.

Non sono tuttavia mancati i riscontri non ottenuti: iniziando la sperimentazione, ci aspettavamo che i brani contrappuntistici del 1500 fossero molto più distinti per autore, o perlomeno che i brani dei compositori più importanti (come Palestrina o de Victoria) risultassero ben separati dalle altre composizioni analizzate; questo però non è stato ottenuto in nessuno dei dendrogrammi calcolati.

Osservando però le partiture dei brani e i vettori di complessità ottenuti, si è notato che gli andamenti sono in realtà molto più simili di quanto aprioristicamente si pensasse: questo è probabilmente un segno di consolidamento e diffusione di un metodo compositivo che, in quel periodo, andava evidentemente ben oltre la distanza geografica, culturale e politica dei luoghi di sviluppo delle scuole (si ricordi, ad esempio, la netta differenza tra la scuola romana e veneziana, sottolineata nella sezione storica 1.2.3), e questo aspetto è stato sensibilmente rilevato dal clustering gerarchico.

In ogni caso, si è osservato e riportato che tantissimi brani dello stesso autore sono o legati in un ramo comune dei dendrogrammi o avvicinati pur appartenendo a cluster diversi, grazie all'implementazione del riordino ottimale nell'algoritmo di linkage: è il caso, ad esempio, delle coppie di brani di de Victoria o del cluster dei brani di Gabrieli, che sono state pressoché una costante in ogni dendrogramma osservato.

In conclusione, quindi, da questo metodo è stato ottenuto un buon riscontro sulla somiglianza tra brani di questo periodo. In presenza di un dataset molto più esteso, esso potrebbe

essere uno strumento utile anche in mano ai musicologi, per attribuire un autore a brani di attribuzione dubbia o ignota, oppure per confermare un'attribuzione errata (come nel caso degli outliers osservati).

Possibili sviluppi futuri

Estensione del dataset In questo progetto di tesi ci siamo fermati a brani di massimo quattro voci, ma il repertorio del periodo analizzato è ben più complesso: brani a cinque, sei o otto voci erano consuetudine sia tra i compositori fiamminghi e veneziani, che nella scuola romana. Sarebbe quindi interessante aggiungere brani con un tale numero di voci, per osservare come si collocherebbero all'interno dei dendrogrammi: saranno conservati in un cluster distinto come per i brani a tre voci, oppure risulteranno più legati a brani con un numero di voci diverso? Ovviamente sarebbe estremamente utile l'estensione del dataset con più brani degli stessi autori, o aggiungendo autori che sono stati esclusi nel corso della nostra sperimentazione.

Applicazione del metodo ad altri generi Chiaramente, non si parla di condotta delle parti solo per le composizioni vocali, ma per tantissimi altri ambiti compositivi: sarebbe interessante perciò applicare il metodo qui utilizzato su altri generi, come la musica strumentale classica nelle sue molteplici forme, o altri generi più vicini a noi, e osservare i risultati ottenuti.

Dinamiche del brano Una delle estensioni del vettore di complessità potrebbe essere effettuata tenendo in considerazione le *dinamiche* delle singole voci. Questo è possibile, perché uno dei canali del formato MIDI, quello della *velocity*, è proprio relativo alle dinamiche. La descrizione delle dinamiche potrebbe essere fatta in diversi modi: ad esempio si potrebbe calcolare la differenza di dinamica tra i due estremi di un voice leading di una voce e riportarne il segno. Sono tuttavia ancora spunti nebulosi, che sarebbe interessante sviscerare e sviluppare.

Sebbene la considerazione delle dinamiche non sia completamente corretta da un punto di vista filologico (alcuni musicologi affermano che molte composizioni fossero cantate senza dinamiche, piatte) sarebbe utile, definita con un'opportuna convenzione, per descrivere ulteriormente la complessità di un brano: in una specie avanzata di contrappunto è infatti molto frequente che le voci non cantino la stessa parola, o la stessa frase, nello stesso istante. Di conseguenza, l'andamento della frase musicale segue quello della voce stessa, aumentando la complessità. Si potrebbe quindi considerare che una frase in generale parta con una certa dinamica, raggiunga il culmine di volume verso il suo centro, per poi ricominciare a diminuire fino alla sua conclusione.

Unione di metriche e metodi di linkage Abbiamo poi notato come alcune norme mettano in rilievo somiglianze e discrepanze interessanti che altre non riportano, e viceversa. Un aspetto di sviluppo potrebbe quindi essere la ricerca di un metodo per unire le osservazioni rilevate con tali norme, per vedere se la loro rilevanza come singoli è conservata nell'unione. Sarebbe interessante anche trovare un'unione tra i metodi di linkage che hanno dato i risultati migliori, per avere un unico dendrogramma con gli aspetti interessanti di ognuno dei metodi (come ad esempio gli outliers del linkage singolo e i cluster del linkage pesato).

Appendice A

Tabelle delle distanze DTW

In questa appendice sono riportate integralmente le matrici contenenti le distanze DTW calcolate nel corso dell'analisi, riportate arrotondando alla quarta cifra decimale.

I nomi dei brani, per motivi di spazio, sono stati sostituiti da numeri di riferimento indicati già nelle tabelle 3.1 a pagina 59 e 3.2 a pagina 61; inoltre, a causa dell'ampiezza delle matrici, in ogni tabella sono contenute 12 colonne.

Tabella A.1: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma euclidea, colonne 1-12.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	1,2580	0,6495	0,6675	1,1548	0,8113	1,6438	1,4204	1,5790	1,5961	1,6471	1,3654
2	1,2580	0	1,2588	0,9498	0,7423	1,1608	0,7783	0,6996	0,7253	0,7686	0,8148	0,7693
3	0,6495	1,2588	0	0,7859	1,1360	0,8867	1,3519	1,3340	1,4585	1,4631	1,3647	1,4057
4	0,6675	0,9498	0,7859	0	0,8236	0,8102	0,9457	0,9810	1,0533	1,0332	0,9004	1,1541
5	1,1548	0,7423	1,1360	0,8236	0	1,1174	0,8286	0,7720	0,8294	0,8378	0,7885	0,9067
6	0,8113	1,1608	0,8867	0,8102	1,1174	0	1,1719	1,1473	1,1901	1,1845	1,1656	1,3342
7	1,6438	0,7783	1,3519	0,9457	0,8286	1,1719	0	0,6823	0,6817	0,6679	0,6294	0,9239
8	1,4204	0,6996	1,3340	0,9810	0,7720	1,1473	0,6823	0	0,5971	0,6551	0,6754	0,7766
9	1,5790	0,7253	1,4585	1,0533	0,8294	1,1901	0,6817	0,5971	0	0,6954	0,7272	0,8018
10	1,5961	0,7686	1,4631	1,0332	0,8378	1,1845	0,6679	0,6551	0,6954	0	0,6728	0,9189
11	1,6471	0,8148	1,3647	0,9004	0,7885	1,1656	0,6294	0,6754	0,7272	0,6728	0	0,9482
12	1,3654	0,7693	1,4057	1,1541	0,9067	1,3342	0,9239	0,7766	0,8018	0,9189	0,9482	0
13	1,2969	0,7251	1,3222	1,0694	0,7886	1,2282	0,8388	0,7070	0,7591	0,8613	0,8589	0,7477
14	1,1551	0,7767	1,2451	0,8265	0,7076	1,1089	0,8026	0,7390	0,8677	0,7933	0,7678	0,9328
15	1,1675	0,7164	1,1574	0,7815	0,7163	1,0639	0,7393	0,6935	0,7486	0,7279	0,7094	0,8789
16	1,2357	0,6955	1,2292	0,8654	0,6964	1,1007	0,6962	0,6633	0,7106	0,6837	0,7098	0,8360
17	1,2648	0,7080	1,2323	0,8651	0,6776	1,1523	0,7187	0,7029	0,7639	0,7036	0,7266	0,8796
18	1,1409	0,7752	1,1704	0,9313	0,7805	1,0981	0,8597	0,7976	0,8066	0,8803	0,9050	0,8261
19	1,1718	0,7117	1,1159	0,7940	0,6390	1,1156	0,7860	0,7596	0,8288	0,8193	0,7639	0,8768
20	1,2061	0,7235	1,2499	0,8627	0,6835	1,1704	0,7616	0,7532	0,8189	0,7704	0,7279	0,8781
21	1,3142	0,7065	1,2395	0,9331	0,6801	1,2542	0,7354	0,7445	0,8007	0,7857	0,7665	0,8021
22	0,7793	0,9080	0,8175	0,7715	0,8440	0,8187	1,0194	0,9038	0,9785	1,0474	1,1293	1,0259
23	1,1938	0,8651	1,1262	0,9062	0,8413	1,0141	0,7763	0,8182	0,8523	0,8453	0,8605	1,0204
24	0,8511	0,9714	0,8892	0,7481	0,8838	0,8508	0,9254	0,9455	0,9984	1,0113	0,9642	1,1280
25	0,9968	1,4213	0,8763	0,9921	1,3433	1,0819	1,4313	1,5225	1,5494	1,5845	1,5578	1,5679
26	1,0062	1,3576	0,9282	0,9673	1,2911	1,1048	1,4548	1,5045	1,5657	1,5264	1,4011	1,5462
27	0,6138	1,0989	0,8086	0,6218	0,9441	0,8810	1,0415	1,0327	1,1649	1,1074	0,9933	1,2895
28	0,8734	0,9272	0,9091	0,6522	0,7803	0,9643	0,9070	0,9783	1,0345	1,0093	0,8920	1,1510
29	0,5658	1,0889	0,6487	0,6317	1,0300	0,7793	1,1801	1,1371	1,2386	1,2265	1,2415	1,2701
30	1,2459	0,7069	1,2306	0,8913	0,7075	1,1695	0,8529	0,7414	0,8286	0,7843	0,7976	0,8326
31	1,2399	0,7141	1,3158	0,9486	0,7308	1,1847	0,8770	0,7442	0,8181	0,8565	0,7954	0,8063
32	1,2446	1,0626	1,2109	0,8765	0,9947	1,0486	0,9285	1,0222	1,0934	0,9675	0,8825	1,2467
33	1,2419	1,1251	1,1673	1,0300	1,0090	1,1063	0,9672	1,0478	1,0846	1,0580	1,0064	1,2591
34	1,4204	0,7962	1,2644	0,9150	0,8306	1,1780	0,7367	0,7780	0,7696	0,7879	0,7465	0,9224
35	1,4751	0,8027	1,3397	0,9978	0,9155	1,2178	0,7312	0,7997	0,8063	0,7250	0,7619	0,8754
36	1,2015	0,7565	1,1450	0,7971	0,7705	1,0162	0,7493	0,7497	0,7727	0,7746	0,7614	0,9101
37	1,1928	0,9313	1,0214	0,8251	0,9152	0,9254	0,8246	0,8794	0,9071	0,8948	0,8827	1,1118
38	0,7088	1,3154	0,6358	0,8337	1,2051	0,9447	1,4142	1,4325	1,5574	1,5278	1,4822	1,4465
39	1,2102	0,6834	1,2253	0,9147	0,7060	1,1394	0,7896	0,7076	0,7562	0,8035	0,7891	0,7849
40	1,1283	0,7567	1,1706	0,9614	0,7872	1,0708	0,9039	0,7900	0,8195	0,8608	0,8834	0,8562
41	0,7192	1,4079	0,6647	0,8933	1,3254	0,8879	1,5049	1,4600	1,6224	1,6587	1,6397	1,5184
42	0,7509	0,9325	0,7810	0,6945	0,8641	0,7136	0,9946	0,9620	0,9804	1,0584	1,0497	1,0544
43	0,7080	1,2235	0,7834	0,7922	1,1368	0,8583	1,2875	1,3042	1,4052	1,4099	1,3242	1,3674
44	1,0505	1,4161	0,9314	1,0048	1,3538	1,0388	1,6432	1,5753	1,6450	1,6642	1,6095	1,5625
45	0,8516	1,2356	0,8369	0,8201	1,1072	0,9787	1,3474	1,4090	1,4786	1,4024	1,4308	1,3936
46	0,9881	1,1424	1,0378	0,8723	1,0318	0,9544	1,1741	1,2516	1,2678	1,2030	1,2862	1,2996
47	1,1347	1,3281	1,0893	1,0604	1,2456	1,0943	1,3910	1,3884	1,4511	1,3923	1,3295	1,5187
48	1,2057	0,9742	1,1939	0,9462	0,8695	1,1559	0,9810	1,0707	1,0696	1,0273	0,9726	1,1546
49	1,0589	1,4535	0,9077	1,0311	1,4197	1,2154	1,5067	1,6423	1,6471	1,6720	1,6499	1,6145
50	0,7213	1,4796	0,6888	0,9078	1,3784	1,0899	1,5679	1,5462	1,6431	1,7508	1,6584	1,5781
51	0,8421	1,3869	0,9246	0,9823	1,3553	0,9233	1,6820	1,4794	1,6591	1,6406	1,6227	1,4785
52	0,8691	1,4234	0,8831	0,9838	1,3295	1,0389	1,8374	1,5760	1,7601	1,7774	1,8193	1,5194
53	0,6234	1,2501	0,7021	0,7415	1,1331	0,8514	1,6427	1,4071	1,5816	1,5925	1,6324	1,3469
54	0,7205	1,3270	0,7425	0,8544	1,2409	0,9635	1,7213	1,4939	1,6914	1,6670	1,6726	1,4378
55	0,7449	1,4088	0,7785	0,9211	1,3488	0,9610	1,7925	1,5445	1,7268	1,7709	1,7628	1,5048
56	0,7426	1,3770	0,7554	0,8959	1,3110	0,9378	1,7536	1,5163	1,7050	1,7111	1,7119	1,4804
57	0,7354	1,4326	0,8121	0,9350	1,3476	1,0076	1,7958	1,5435	1,7425	1,7689	1,7436	1,5250
58	0,7600	1,3697	0,7798	0,9004	1,2622	0,9714	1,7380	1,4941	1,6973	1,6940	1,6923	1,4761
59	0,7626	1,4123	0,8044	0,9338	1,3468	1,0311	1,7895	1,5458	1,7448	1,7662	1,7572	1,5092
60	1,0334	1,6467	1,0214	1,2727	1,6131	1,2841	1,9709	1,6940	1,8728	1,9828	1,9660	1,7027

Tabella A.2: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma euclidea, colonne 13-24.

	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	1,2969	1,1551	1,1675	1,2357	1,2648	1,1409	1,1718	1,2061	1,3142	0,7793	1,1938	0,8511
2	0,7251	0,7767	0,7164	0,6955	0,7080	0,7752	0,7117	0,7235	0,7065	0,9080	0,8651	0,9714
3	1,3222	1,2451	1,1574	1,2292	1,2323	1,1704	1,1159	1,2499	1,2395	0,8175	1,1262	0,8892
4	1,0694	0,8265	0,7815	0,8654	0,8651	0,9313	0,7940	0,8627	0,9331	0,7715	0,9062	0,7481
5	0,7886	0,7076	0,7163	0,6964	0,6776	0,7805	0,6390	0,6835	0,6801	0,8440	0,8413	0,8838
6	1,2282	1,1089	1,0639	1,1007	1,1523	1,0981	1,1156	1,1704	1,2542	0,8187	1,0141	0,8508
7	0,8388	0,8026	0,7393	0,6962	0,7187	0,8597	0,7860	0,7616	0,7354	1,0194	0,7763	0,9254
8	0,7070	0,7390	0,6935	0,6633	0,7029	0,7976	0,7596	0,7532	0,7445	0,9038	0,8182	0,9455
9	0,7591	0,8677	0,7486	0,7106	0,7639	0,8066	0,8288	0,8189	0,8007	0,9785	0,8523	0,9984
10	0,8613	0,7933	0,7279	0,6837	0,7036	0,8803	0,8193	0,7704	0,7857	1,0474	0,8453	1,0113
11	0,8589	0,7678	0,7094	0,7098	0,7266	0,9050	0,7639	0,7279	0,7665	1,1293	0,8605	0,9642
12	0,7477	0,9328	0,8789	0,8360	0,8796	0,8261	0,8768	0,8781	0,8021	1,0259	1,0204	1,1280
13	0	0,8450	0,8092	0,7471	0,7700	0,7399	0,7916	0,7774	0,7358	0,9308	0,8889	1,0470
14	0,8450	0	0,6619	0,6517	0,6337	0,8029	0,6787	0,6769	0,7191	0,8223	0,8537	0,8767
15	0,8092	0,6619	0	0,6539	0,6402	0,7439	0,6938	0,6926	0,6967	0,8271	0,7768	0,8504
16	0,7471	0,6517	0,6539	0	0,6090	0,7103	0,6612	0,6618	0,6697	0,8581	0,7894	0,8884
17	0,7700	0,6337	0,6402	0,6090	0	0,7509	0,6750	0,6766	0,6784	0,9257	0,8320	0,9154
18	0,7399	0,8029	0,7439	0,7103	0,7509	0	0,7601	0,7731	0,7873	0,7807	0,7431	0,8284
19	0,7916	0,6787	0,6938	0,6612	0,6750	0,7601	0	0,6778	0,6450	0,8298	0,8368	0,8820
20	0,7774	0,6769	0,6926	0,6618	0,6766	0,7731	0,6778	0	0,6842	0,8494	0,7929	0,9319
21	0,7358	0,7191	0,6967	0,6697	0,6784	0,7873	0,6450	0,6842	0	0,9242	0,8308	0,9943
22	0,9308	0,8223	0,8271	0,8581	0,9257	0,7807	0,8298	0,8494	0,9242	0	0,7946	0,7175
23	0,8889	0,8537	0,7768	0,7894	0,8320	0,7431	0,8368	0,7929	0,8308	0,7946	0	0,8082
24	1,0470	0,8767	0,8504	0,8884	0,9154	0,8284	0,8820	0,9319	0,9943	0,7175	0,8082	0
25	1,5075	1,4192	1,3337	1,4029	1,4225	1,3716	1,2974	1,4429	1,4591	1,1697	1,3533	1,1456
26	1,5124	1,3057	1,3385	1,3227	1,2549	1,4215	1,2317	1,3655	1,4072	1,2381	1,4791	1,1958
27	1,2164	0,9310	0,9090	0,9535	0,9548	1,1112	0,8765	0,9812	1,0020	0,8126	1,0882	0,8787
28	1,0585	0,8066	0,7910	0,7918	0,7980	0,9577	0,7593	0,8326	0,8310	0,8225	0,9086	0,8117
29	1,1440	1,0582	0,9899	1,0456	1,0826	1,0052	1,0088	1,0633	1,1677	0,6445	0,9609	0,7237
30	0,7778	0,6989	0,6994	0,6731	0,6991	0,7716	0,6929	0,6712	0,6965	0,8652	0,8780	1,0081
31	0,7329	0,7421	0,7468	0,6772	0,7265	0,7660	0,7120	0,7170	0,7205	0,9016	0,8831	1,0048
32	1,1878	0,9580	0,9273	0,9984	0,9339	1,1031	0,9299	0,9821	1,0100	1,0571	0,9637	0,9896
33	1,1105	1,0110	1,0080	1,0141	1,0002	1,0080	0,9831	1,0279	1,0148	1,0257	0,8941	1,0010
34	0,8608	0,8580	0,7086	0,7468	0,7548	0,8302	0,7545	0,7978	0,7508	0,9126	0,7667	0,8952
35	0,8443	0,8611	0,7704	0,7495	0,7961	0,8275	0,8616	0,8516	0,8138	0,9691	0,8008	0,9653
36	0,8440	0,6889	0,6652	0,6602	0,6869	0,7911	0,7268	0,7143	0,7559	0,8164	0,7879	0,8126
37	1,0084	0,8519	0,7689	0,8477	0,8627	0,8194	0,8521	0,9527	0,9210	0,7887	0,7014	0,7566
38	1,3798	1,2466	1,1886	1,3212	1,3137	1,2106	1,1471	1,3087	1,2604	0,8954	1,2551	0,9527
39	0,7492	0,7384	0,7068	0,6550	0,7080	0,7324	0,6882	0,7027	0,7112	0,8620	0,8375	0,9436
40	0,7601	0,8010	0,8003	0,7574	0,7726	0,7898	0,7585	0,7568	0,7510	0,8266	0,8737	0,9667
41	1,4588	1,4286	1,3241	1,3930	1,4396	1,2917	1,2968	1,4193	1,4503	0,9075	1,2871	1,0108
42	0,9528	0,8404	0,7793	0,8101	0,8545	0,7926	0,8107	0,8482	0,9185	0,5774	0,8347	0,6692
43	1,2365	1,1464	1,0751	1,1624	1,1753	1,1049	1,0752	1,1418	1,1843	0,7487	1,0821	0,8387
44	1,5110	1,4080	1,3758	1,3942	1,4211	1,3553	1,3399	1,4393	1,4921	1,1864	1,3648	1,1325
45	1,2955	1,1628	1,1596	1,2197	1,2274	1,1782	1,0987	1,1954	1,2439	0,9698	1,1453	0,9373
46	1,1686	1,0220	1,0234	1,0739	1,0946	1,0699	1,0160	1,0643	1,1349	0,8760	1,0358	0,8894
47	1,4396	1,2607	1,2879	1,2892	1,2605	1,3576	1,2422	1,3046	1,3434	1,2299	1,3214	1,1919
48	1,0425	0,8550	0,8724	0,9122	0,8826	0,9848	0,8378	0,8956	0,9022	0,9515	0,9446	0,9662
49	1,5705	1,4609	1,4403	1,5052	1,4666	1,4413	1,3676	1,5240	1,5315	1,2761	1,4594	1,2316
50	1,5577	1,4284	1,3769	1,4662	1,4411	1,2877	1,3300	1,5121	1,4971	1,0478	1,3521	1,0854
51	1,4251	1,3626	1,3202	1,3397	1,4268	1,2611	1,3504	1,3891	1,4607	0,9196	1,2884	1,0355
52	1,4330	1,3820	1,3724	1,4090	1,4583	1,3343	1,3364	1,3806	1,4634	1,0143	1,4177	1,1230
53	1,2649	1,1609	1,1354	1,2189	1,2705	1,1031	1,1496	1,1897	1,2837	0,7303	1,1570	0,8702
54	1,3523	1,2922	1,2764	1,3339	1,3568	1,2367	1,2398	1,2836	1,3786	0,9267	1,2990	1,0037
55	1,4378	1,4233	1,3732	1,3851	1,4467	1,2415	1,3550	1,3974	1,4913	0,9662	1,3536	1,0371
56	1,4095	1,3535	1,3151	1,3460	1,4314	1,2756	1,3089	1,3753	1,4386	0,9031	1,3098	0,9924
57	1,4312	1,3972	1,3505	1,4162	1,4585	1,3222	1,3497	1,3795	1,4657	0,9842	1,3763	1,1190
58	1,3658	1,2972	1,2983	1,3475	1,3774	1,2866	1,2760	1,3028	1,3923	0,9399	1,2956	1,0663
59	1,4231	1,3902	1,3576	1,4125	1,4503	1,3235	1,3359	1,3724	1,4618	0,9633	1,3604	1,0829
60	1,6663	1,7466	1,6577	1,6220	1,7428	1,4901	1,6229	1,6832	1,7280	1,2227	1,5945	1,3869

Tabella A.3: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma euclidea, colonne 25-36.

	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
1	0,9968	1,0062	0,6138	0,8734	0,5658	1,2459	1,2399	1,2446	1,2419	1,4204	1,4751	1,2015
2	1,4213	1,3576	1,0989	0,9272	1,0889	0,7069	0,7141	1,0626	1,1251	0,7962	0,8027	0,7565
3	0,8763	0,9282	0,8086	0,9091	0,6487	1,2306	1,3158	1,2109	1,1673	1,2644	1,3397	1,1450
4	0,9921	0,9673	0,6218	0,6522	0,6317	0,8913	0,9486	0,8765	1,0300	0,9150	0,9978	0,7971
5	1,3433	1,2911	0,9441	0,7803	1,0300	0,7075	0,7308	0,9947	1,0090	0,8306	0,9155	0,7705
6	1,0819	1,1048	0,8810	0,9643	0,7793	1,1695	1,1847	1,0486	1,1063	1,1780	1,2178	1,0162
7	1,4313	1,4548	1,0415	0,9070	1,1801	0,8529	0,8770	0,9285	0,9672	0,7367	0,7312	0,7493
8	1,5225	1,5045	1,0327	0,9783	1,1371	0,7414	0,7442	1,0222	1,0478	0,7780	0,7997	0,7497
9	1,5494	1,5657	1,1649	1,0345	1,2386	0,8286	0,8181	1,0934	1,0846	0,7696	0,8063	0,7727
10	1,5845	1,5264	1,1074	1,0093	1,2265	0,7843	0,8565	0,9675	1,0580	0,7879	0,7250	0,7746
11	1,5578	1,4011	0,9933	0,8920	1,2415	0,7976	0,7954	0,8825	1,0064	0,7465	0,7619	0,7614
12	1,5679	1,5462	1,2895	1,1510	1,2701	0,8326	0,8063	1,2467	1,2591	0,9224	0,8754	0,9101
13	1,5075	1,5124	1,2164	1,0585	1,1440	0,7778	0,7329	1,1878	1,1105	0,8608	0,8443	0,8440
14	1,4192	1,3057	0,9310	0,8066	1,0582	0,6989	0,7421	0,9580	1,0110	0,8580	0,8611	0,6889
15	1,3337	1,3385	0,9090	0,7910	0,9899	0,6994	0,7468	0,9273	1,0080	0,7086	0,7704	0,6652
16	1,4029	1,3227	0,9535	0,7918	1,0456	0,6731	0,6772	0,9984	1,0141	0,7468	0,7495	0,6602
17	1,4225	1,2549	0,9548	0,7980	1,0826	0,6991	0,7265	0,9339	1,0002	0,7548	0,7961	0,6869
18	1,3716	1,4215	1,1112	0,9577	1,0052	0,7716	0,7660	1,1031	1,0080	0,8302	0,8275	0,7911
19	1,2974	1,2317	0,8765	0,7593	1,0088	0,6929	0,7120	0,9299	0,9831	0,7545	0,8616	0,7268
20	1,4429	1,3655	0,9812	0,8326	1,0633	0,6712	0,7170	0,9821	1,0279	0,7978	0,8516	0,7143
21	1,4591	1,4072	1,0020	0,8310	1,1677	0,6965	0,7205	1,0100	1,0148	0,7508	0,8138	0,7559
22	1,1697	1,2381	0,8126	0,8225	0,6445	0,8652	0,9016	1,0571	1,0257	0,9126	0,9691	0,8164
23	1,3533	1,4791	1,0882	0,9086	0,9609	0,8780	0,8831	0,9637	0,8941	0,7667	0,8008	0,7879
24	1,1456	1,1958	0,8787	0,8117	0,7237	1,0081	1,0048	0,9896	1,0010	0,8952	0,9653	0,8126
25	0	0,4037	1,0415	1,0881	0,8942	1,5047	1,4558	1,2901	1,3517	1,3766	1,4690	1,2530
26	0,4037	0	0,8746	1,0016	0,9280	1,3427	1,3786	1,2139	1,4506	1,5231	1,5899	1,3303
27	1,0415	0,8746	0	0,6745	0,7419	0,9684	1,0633	0,9932	1,1984	1,1427	1,2154	0,9192
28	1,0881	1,0016	0,6745	0	0,7640	0,8541	0,9154	0,8677	0,9492	0,9286	1,0433	0,8283
29	0,8942	0,9280	0,7419	0,7640	0	1,0913	1,1267	1,0407	1,0844	1,1173	1,1792	0,9258
30	1,5047	1,3427	0,9684	0,8541	1,0913	0	0,6964	1,0300	1,0702	0,8476	0,8882	0,7539
31	1,4558	1,3786	1,0633	0,9154	1,1267	0,6964	0	1,0296	1,0720	0,8069	0,8780	0,7583
32	1,2901	1,2139	0,9932	0,8677	1,0407	1,0300	1,0296	0	0,9556	0,9118	0,9823	0,8780
33	1,3517	1,4506	1,1984	0,9492	1,0844	1,0702	1,0720	0,9556	0	0,9500	0,9817	0,8969
34	1,3766	1,5231	1,1427	0,9286	1,1173	0,8476	0,8069	0,9118	0,9500	0	0,6638	0,7257
35	1,4690	1,5899	1,2154	1,0433	1,1792	0,8882	0,8780	0,9823	0,9817	0,6638	0	0,7389
36	1,2530	1,3303	0,9192	0,8283	0,9258	0,7539	0,7583	0,8780	0,8969	0,7257	0,7389	0
37	1,2005	1,4335	0,9628	0,8890	0,8936	1,0117	0,9789	0,9211	0,8892	0,7635	0,7371	0,7261
38	0,9367	0,9712	0,8155	0,9996	0,7402	1,2926	1,3540	1,2017	1,2628	1,3428	1,4185	1,1425
39	1,4060	1,3571	1,0243	0,8577	1,0629	0,6929	0,7084	1,0154	1,0334	0,7731	0,7825	0,7033
40	1,4043	1,4058	1,1081	0,9390	0,9714	0,7312	0,7342	1,1217	1,0438	0,8987	0,9120	0,8334
41	0,7882	0,9194	0,8990	1,0754	0,7415	1,4058	1,4268	1,2942	1,2946	1,4385	1,5215	1,2297
42	1,1503	1,2642	0,7208	0,7853	0,6111	0,8443	0,8741	0,9358	0,9449	0,8078	0,9529	0,7498
43	1,0552	1,0983	0,7853	0,8429	0,6682	1,1979	1,1919	1,1110	1,0858	1,1492	1,2666	0,9980
44	0,4410	0,5124	1,0459	1,1092	0,9386	1,4503	1,4550	1,2433	1,3652	1,4828	1,5691	1,3049
45	0,5904	0,6340	0,8887	0,8722	0,7801	1,2820	1,2449	1,0813	1,1248	1,2813	1,3468	1,1879
46	0,6893	0,7882	1,0111	0,9046	0,8787	1,1390	1,1166	1,0083	1,0372	1,0532	1,1733	0,9739
47	0,8477	0,7284	1,0794	1,0758	1,0981	1,3075	1,3393	1,1245	1,1802	1,4033	1,4564	1,2656
48	0,9315	0,8775	1,0375	0,8798	1,0856	0,9174	0,9520	0,9859	1,0216	0,9959	1,0493	0,9048
49	0,4138	0,4540	1,1070	1,1977	0,9739	1,5761	1,5483	1,5069	1,4734	1,5218	1,5683	1,4425
50	0,8796	0,9414	0,8798	1,1949	0,7702	1,5436	1,5226	1,4922	1,3668	1,4866	1,5011	1,2847
51	1,1236	1,1675	0,9741	1,1056	0,8415	1,3326	1,3761	1,2205	1,3002	1,4932	1,5336	1,2275
52	1,0860	1,1293	0,9638	1,0464	0,9214	1,4107	1,3928	1,3414	1,3688	1,6457	1,6933	1,4230
53	1,0193	1,0582	0,7589	0,8489	0,6056	1,1986	1,2032	1,1974	1,1725	1,4323	1,4729	1,2063
54	0,9326	0,9468	0,8767	0,9533	0,7307	1,3089	1,3257	1,2551	1,2609	1,5623	1,5833	1,3444
55	0,9976	0,9631	0,9366	1,0492	0,7768	1,3866	1,3895	1,3279	1,3652	1,5999	1,6548	1,3547
56	0,9499	0,9534	0,8783	1,0301	0,7526	1,3199	1,3631	1,2975	1,3015	1,5482	1,5967	1,3064
57	0,9718	1,0296	0,9450	1,0764	0,8506	1,4032	1,4159	1,3661	1,3667	1,6306	1,6687	1,4152
58	0,9592	0,9970	0,9280	0,9909	0,7929	1,3298	1,3446	1,2921	1,2846	1,5781	1,6184	1,3697
59	0,9742	1,0012	0,9433	1,0327	0,8383	1,4044	1,4088	1,3693	1,3625	1,6235	1,6465	1,4171
60	1,1476	1,1840	1,2970	1,4481	1,1257	1,6686	1,6660	1,6594	1,6263	1,8298	1,8671	1,5575

Tabella A.4: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma euclidea, colonne 37-48.

	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
1	1,1928	0,7088	1,2102	1,1283	0,7192	0,7509	0,7080	1,0505	0,8516	0,9881	1,1347	1,2057
2	0,9313	1,3154	0,6834	0,7567	1,4079	0,9325	1,2235	1,4161	1,2356	1,1424	1,3281	0,9742
3	1,0214	0,6358	1,2253	1,1706	0,6647	0,7810	0,7834	0,9314	0,8369	1,0378	1,0893	1,1939
4	0,8251	0,8337	0,9147	0,9614	0,8933	0,6945	0,7922	1,0048	0,8201	0,8723	1,0604	0,9462
5	0,9152	1,2051	0,7060	0,7872	1,3254	0,8641	1,1368	1,3538	1,1072	1,0318	1,2456	0,8695
6	0,9254	0,9447	1,1394	1,0708	0,8879	0,7136	0,8583	1,0388	0,9787	0,9544	1,0943	1,1559
7	0,8246	1,4142	0,7896	0,9039	1,5049	0,9946	1,2875	1,6432	1,3474	1,1741	1,3910	0,9810
8	0,8794	1,4325	0,7076	0,7900	1,4600	0,9620	1,3042	1,5753	1,4090	1,2516	1,3884	1,0707
9	0,9071	1,5574	0,7562	0,8195	1,6224	0,9804	1,4052	1,6450	1,4786	1,2678	1,4511	1,0696
10	0,8948	1,5278	0,8035	0,8608	1,6587	1,0584	1,4099	1,6642	1,4024	1,2030	1,3923	1,0273
11	0,8827	1,4822	0,7891	0,8834	1,6397	1,0497	1,3242	1,6095	1,4308	1,2862	1,3295	0,9726
12	1,1118	1,4465	0,7849	0,8562	1,5184	1,0544	1,3674	1,5625	1,3936	1,2996	1,5187	1,1546
13	1,0084	1,3798	0,7492	0,7601	1,4588	0,9528	1,2365	1,5110	1,2955	1,1686	1,4396	1,0425
14	0,8519	1,2466	0,7384	0,8010	1,4286	0,8404	1,1464	1,4080	1,1628	1,0220	1,2607	0,8550
15	0,7689	1,1886	0,7068	0,8003	1,3241	0,7793	1,0751	1,3758	1,1596	1,0234	1,2879	0,8724
16	0,8477	1,3212	0,6550	0,7574	1,3930	0,8101	1,1624	1,3942	1,2197	1,0739	1,2892	0,9122
17	0,8627	1,3137	0,7080	0,7726	1,4396	0,8545	1,1753	1,4211	1,2274	1,0946	1,2605	0,8826
18	0,8194	1,2106	0,7324	0,7898	1,2917	0,7926	1,1049	1,3553	1,1782	1,0699	1,3576	0,9848
19	0,8521	1,1471	0,6882	0,7585	1,2968	0,8107	1,0752	1,3399	1,0987	1,0160	1,2422	0,8378
20	0,9527	1,3087	0,7027	0,7568	1,4193	0,8482	1,1418	1,4393	1,1954	1,0643	1,3046	0,8956
21	0,9210	1,2604	0,7112	0,7510	1,4503	0,9185	1,1843	1,4921	1,2439	1,1349	1,3434	0,9022
22	0,7887	0,8954	0,8620	0,8266	0,9075	0,5774	0,7487	1,1864	0,9698	0,8760	1,2299	0,9515
23	0,7014	1,2551	0,8375	0,8737	1,2871	0,8347	1,0821	1,3648	1,1453	1,0358	1,3214	0,9446
24	0,7566	0,9527	0,9436	0,9667	1,0108	0,6692	0,8387	1,1325	0,9373	0,8894	1,1919	0,9662
25	1,2005	0,9367	1,4060	1,4043	0,7882	1,1503	1,0552	0,4410	0,5904	0,6893	0,8477	0,9315
26	1,4335	0,9712	1,3571	1,4058	0,9194	1,2642	1,0983	0,5124	0,6340	0,7882	0,7284	0,8775
27	0,9628	0,8155	1,0243	1,1081	0,8990	0,7208	0,7853	1,0459	0,8887	1,0111	1,0794	1,0375
28	0,8890	0,9996	0,8577	0,9390	1,0754	0,7853	0,8429	1,1092	0,8722	0,9046	1,0758	0,8798
29	0,8936	0,7402	1,0629	0,9714	0,7415	0,6111	0,6682	0,9386	0,7801	0,8787	1,0981	1,0856
30	1,0117	1,2926	0,6929	0,7312	1,4058	0,8443	1,1979	1,4503	1,2820	1,1390	1,3075	0,9174
31	0,9789	1,3540	0,7084	0,7342	1,4268	0,8741	1,1919	1,4550	1,2449	1,1166	1,3393	0,9520
32	0,9211	1,2017	1,0154	1,1217	1,2942	0,9358	1,1110	1,2433	1,0813	1,0083	1,1245	0,9859
33	0,8892	1,2628	1,0334	1,0438	1,2946	0,9449	1,0858	1,3652	1,1248	1,0372	1,1802	1,0216
34	0,7635	1,3428	0,7731	0,8987	1,4385	0,8078	1,1492	1,4828	1,2813	1,0532	1,4033	0,9959
35	0,7371	1,4185	0,7825	0,9120	1,5215	0,9529	1,2666	1,5691	1,3468	1,1733	1,4564	1,0493
36	0,7261	1,1425	0,7033	0,8334	1,2297	0,7498	0,9980	1,3049	1,1879	0,9739	1,2656	0,9048
37	0	1,1315	0,9118	0,9893	1,2186	0,6912	0,9873	1,2938	1,1243	0,9758	1,2803	0,9960
38	1,1315	0	1,2014	1,2120	0,5833	0,8241	0,7476	0,9402	0,9223	1,0730	1,0968	1,2586
39	0,9118	1,2014	0	0,7520	1,3675	0,8739	1,1794	1,4064	1,1978	1,0893	1,3083	0,9352
40	0,9893	1,2120	0,7520	0	1,2605	0,8461	1,0965	1,3902	1,1797	1,0739	1,3034	0,9455
41	1,2186	0,5833	1,3675	1,2605	0	0,7838	0,8195	0,8032	1,0049	1,0888	1,1278	1,3913
42	0,6912	0,8241	0,8739	0,8461	0,7838	0	0,6315	1,1668	1,0432	0,9109	1,2567	0,9968
43	0,9873	0,7476	1,1794	1,0965	0,8195	0,6315	0	1,0596	0,9193	0,9419	1,0690	1,1283
44	1,2938	0,9402	1,4064	1,3902	0,8032	1,1668	1,0596	0	0,6074	0,6387	0,7534	0,9879
45	1,1243	0,9223	1,1978	1,1797	1,0049	1,0432	0,9193	0,6074	0	0,5145	0,7144	0,7012
46	0,9758	1,0730	1,0893	1,0739	1,0888	0,9109	0,9419	0,6387	0,5145	0	0,7072	0,6394
47	1,2803	1,0968	1,3083	1,3034	1,1278	1,2567	1,0690	0,7534	0,7144	0,7072	0	0,8659
48	0,9960	1,2586	0,9352	0,9455	1,3913	0,9968	1,1283	0,9879	0,7012	0,6394	0,8659	0
49	1,3387	0,9082	1,4733	1,4885	0,8642	1,2619	1,1572	0,5399	0,5840	0,8517	0,8734	1,0412
50	1,2086	0,6308	1,3883	1,4413	0,6470	0,8790	0,9582	1,0136	1,0887	1,2938	1,2973	1,5138
51	1,2716	0,8232	1,3349	1,2404	0,8954	0,8561	0,9290	1,0327	1,0761	1,0738	1,1282	1,3681
52	1,4570	0,9433	1,3698	1,2522	0,9751	1,0554	0,9175	1,1477	0,9725	1,1017	1,0160	1,3281
53	1,1991	0,7330	1,1861	1,0611	0,8189	0,7785	0,7236	1,0361	0,8056	0,9304	1,0588	1,1689
54	1,3528	0,7509	1,2897	1,1618	0,8136	0,9561	0,8200	1,0001	0,8387	1,0296	1,0073	1,2344
55	1,3684	0,8004	1,3749	1,2627	0,8141	0,9051	0,8688	0,9065	0,9651	1,1276	1,0586	1,3686
56	1,3314	0,6949	1,3266	1,2251	0,7086	0,8935	0,8140	0,9370	0,9454	1,0424	1,0495	1,3055
57	1,4410	0,7452	1,3625	1,2441	0,8365	1,0115	0,9134	1,0428	0,9631	1,1312	1,0182	1,3340
58	1,3715	0,7216	1,2989	1,1797	0,8596	0,9813	0,8264	1,0020	0,8819	1,0478	0,9733	1,2468
59	1,4131	0,7948	1,3625	1,2561	0,8638	0,9922	0,9158	1,0361	0,8967	1,1066	1,0179	1,3324
60	1,6342	0,8820	1,6097	1,5336	0,8641	1,0755	1,2626	1,1091	1,3853	1,4178	1,2818	1,6480

Tabella A.5: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma euclidea, colonne 49-60.

	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
1	1,0589	0,7213	0,8421	0,8691	0,6234	0,7205	0,7449	0,7426	0,7354	0,7600	0,7626	1,0334
2	1,4535	1,4796	1,3869	1,4234	1,2501	1,3270	1,4088	1,3770	1,4326	1,3697	1,4123	1,6467
3	0,9077	0,6888	0,9246	0,8831	0,7021	0,7425	0,7785	0,7554	0,8121	0,7798	0,8044	1,0214
4	1,0311	0,9078	0,9823	0,9838	0,7415	0,8544	0,9211	0,8959	0,9350	0,9004	0,9338	1,2727
5	1,4197	1,3784	1,3553	1,3295	1,1331	1,2409	1,3488	1,3110	1,3476	1,2622	1,3468	1,6131
6	1,2154	1,0899	0,9233	1,0389	0,8514	0,9635	0,9610	0,9378	1,0076	0,9714	1,0311	1,2841
7	1,5067	1,5679	1,6820	1,8374	1,6427	1,7213	1,7925	1,7536	1,7958	1,7380	1,7895	1,9709
8	1,6423	1,5462	1,4794	1,5760	1,4071	1,4939	1,5445	1,5163	1,5435	1,4941	1,5458	1,6940
9	1,6471	1,6431	1,6591	1,7601	1,5816	1,6914	1,7268	1,7050	1,7425	1,6973	1,7448	1,8728
10	1,6720	1,7508	1,6406	1,7774	1,5925	1,6670	1,7709	1,7111	1,7689	1,6940	1,7662	1,9828
11	1,6499	1,6584	1,6227	1,8193	1,6324	1,6726	1,7628	1,7119	1,7436	1,6923	1,7572	1,9660
12	1,6145	1,5781	1,4785	1,5194	1,3469	1,4378	1,5048	1,4804	1,5250	1,4761	1,5092	1,7027
13	1,5705	1,5577	1,4251	1,4330	1,2649	1,3523	1,4378	1,4095	1,4312	1,3658	1,4231	1,6663
14	1,4609	1,4284	1,3626	1,3820	1,1609	1,2922	1,4233	1,3535	1,3972	1,2972	1,3902	1,7466
15	1,4403	1,3769	1,3202	1,3724	1,1354	1,2764	1,3732	1,3151	1,3505	1,2983	1,3576	1,6577
16	1,5052	1,4662	1,3397	1,4090	1,2189	1,3339	1,3851	1,3460	1,4162	1,3475	1,4125	1,6220
17	1,4666	1,4411	1,4268	1,4583	1,2705	1,3568	1,4467	1,4314	1,4585	1,3774	1,4503	1,7428
18	1,4413	1,2877	1,2611	1,3343	1,1031	1,2367	1,2415	1,2756	1,3222	1,2866	1,3235	1,4901
19	1,3676	1,3300	1,3504	1,3364	1,1496	1,2398	1,3550	1,3089	1,3497	1,2760	1,3359	1,6229
20	1,5240	1,5121	1,3891	1,3806	1,1897	1,2836	1,3974	1,3753	1,3795	1,3028	1,3724	1,6832
21	1,5315	1,4971	1,4607	1,4634	1,2837	1,3786	1,4913	1,4386	1,4657	1,3923	1,4618	1,7280
22	1,2761	1,0478	0,9196	1,0143	0,7303	0,9267	0,9662	0,9031	0,9842	0,9399	0,9633	1,2227
23	1,4594	1,3521	1,2884	1,4177	1,1570	1,2990	1,3536	1,3098	1,3763	1,2956	1,3604	1,5945
24	1,2316	1,0854	1,0355	1,1230	0,8702	1,0037	1,0371	0,9924	1,1190	1,0663	1,0829	1,3869
25	0,4138	0,8796	1,1236	1,0860	1,0193	0,9326	0,9976	0,9499	0,9718	0,9592	0,9742	1,1476
26	0,4540	0,9414	1,1675	1,1293	1,0582	0,9468	0,9631	0,9534	1,0296	0,9970	1,0012	1,1840
27	1,1070	0,8798	0,9741	0,9638	0,7589	0,8767	0,9366	0,8783	0,9450	0,9280	0,9433	1,2970
28	1,1977	1,1949	1,1056	1,0464	0,8489	0,9533	1,0492	1,0301	1,0764	0,9909	1,0327	1,4481
29	0,9739	0,7702	0,8415	0,9214	0,6056	0,7307	0,7768	0,7526	0,8506	0,7929	0,8383	1,1257
30	1,5761	1,5436	1,3326	1,4107	1,1986	1,3089	1,3866	1,3199	1,4032	1,3298	1,4044	1,6686
31	1,5483	1,5226	1,3761	1,3928	1,2032	1,3257	1,3895	1,3631	1,4159	1,3446	1,4088	1,6660
32	1,5069	1,4922	1,2205	1,3414	1,1974	1,2551	1,3279	1,2975	1,3661	1,2921	1,3693	1,6594
33	1,4734	1,3668	1,3002	1,3688	1,1725	1,2609	1,3652	1,3015	1,3667	1,2846	1,3625	1,6263
34	1,5218	1,4866	1,4932	1,6457	1,4323	1,5623	1,5999	1,5482	1,6306	1,5781	1,6235	1,8298
35	1,5683	1,5011	1,5336	1,6933	1,4729	1,5833	1,6548	1,5967	1,6687	1,6184	1,6465	1,8671
36	1,4425	1,2847	1,2275	1,4230	1,2063	1,3444	1,3547	1,3064	1,4152	1,3697	1,4171	1,5575
37	1,3387	1,2086	1,2716	1,4570	1,1991	1,3528	1,3684	1,3314	1,4410	1,3715	1,4131	1,6342
38	0,9082	0,6308	0,8232	0,9433	0,7330	0,7509	0,8004	0,6949	0,7452	0,7216	0,7948	0,8820
39	1,4733	1,3883	1,3349	1,3698	1,1861	1,2897	1,3749	1,3266	1,3625	1,2989	1,3625	1,6097
40	1,4885	1,4413	1,2404	1,2522	1,0611	1,1618	1,2627	1,2251	1,2441	1,1797	1,2561	1,5336
41	0,8642	0,6470	0,8954	0,9751	0,8189	0,8136	0,8141	0,7086	0,8365	0,8596	0,8638	0,8641
42	1,2619	0,8790	0,8561	1,0554	0,7785	0,9561	0,9051	0,8935	1,0115	0,9813	0,9922	1,0755
43	1,1572	0,9582	0,9290	0,9175	0,7236	0,8200	0,8688	0,8140	0,9134	0,8264	0,9158	1,2626
44	0,5399	1,0136	1,0327	1,1477	1,0361	1,0001	0,9065	0,9370	1,0428	1,0020	1,0361	1,1091
45	0,5840	1,0887	1,0761	0,9725	0,8056	0,8387	0,9651	0,9454	0,9631	0,8819	0,8967	1,3853
46	0,8517	1,2938	1,0738	1,1017	0,9304	1,0296	1,1276	1,0424	1,1312	1,0478	1,1066	1,4178
47	0,8734	1,2973	1,1282	1,0160	1,0588	1,0073	1,0586	1,0495	1,0182	0,9733	1,0179	1,2818
48	1,0412	1,5138	1,3681	1,3281	1,1689	1,2344	1,3686	1,3055	1,3340	1,2468	1,3324	1,6480
49	0	0,5087	1,3086	1,1957	1,0766	0,9546	1,0414	1,0700	1,0113	0,9869	1,0197	1,0657
50	0,5087	0	1,1440	1,0847	0,8984	0,8761	0,8744	0,8317	0,7742	0,8977	0,8619	0,6774
51	1,3086	1,1440	0	1,0698	0,8961	0,9757	0,9152	0,7997	1,0370	1,0360	1,0221	1,1682
52	1,1957	1,0847	1,0698	0	0,7917	0,7963	0,9890	0,8378	0,7225	0,7765	0,7282	1,3712
53	1,0766	0,8984	0,8961	0,7917	0	0,6836	0,7435	0,7332	0,7362	0,7202	0,7601	1,2731
54	0,9546	0,8761	0,9757	0,7963	0,6836	0	0,8032	0,7646	0,7357	0,6341	0,6817	1,1774
55	1,0414	0,8744	0,9152	0,9890	0,7435	0,8032	0	0,7845	0,8697	0,8358	0,8041	1,0755
56	1,0700	0,8317	0,7997	0,8378	0,7332	0,7646	0,7845	0	0,6586	0,7516	0,5677	1,0962
57	1,0113	0,7742	1,0370	0,7225	0,7362	0,7357	0,8697	0,6586	0	0,6215	0,5750	1,1928
58	0,9869	0,8977	1,0360	0,7765	0,7202	0,6341	0,8358	0,7516	0,6215	0	0,7025	1,1387
59	1,0197	0,8619	1,0221	0,7282	0,7601	0,6817	0,8041	0,5677	0,5750	0,7025	0	1,2004
60	1,0657	0,6774	1,1682	1,3712	1,2731	1,1774	1,0755	1,0962	1,1928	1,1387	1,2004	0

Tabella A.6: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 1, colonne 1-12.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	1,9863	0,9797	1,0652	1,8358	1,2475	2,6698	2,2973	2,5395	2,6002	2,6604	2,1784
2	1,9863	0	1,9794	1,4709	1,1548	1,8170	1,1881	1,0836	1,1233	1,1878	1,2511	1,2113
3	0,9797	1,9794	0	1,2361	1,7938	1,3786	2,1425	2,1335	2,3112	2,3568	2,1939	2,2273
4	1,0652	1,4709	1,2361	0	1,2872	1,2620	1,4450	1,5204	1,6058	1,5973	1,3683	1,8464
5	1,8358	1,1548	1,7938	1,2872	0	1,7426	1,2884	1,2171	1,2733	1,3139	1,2217	1,4450
6	1,2475	1,8170	1,3786	1,2620	1,7426	0	1,8213	1,8103	1,8587	1,8602	1,8103	2,1277
7	2,6698	1,1881	2,1425	1,4450	1,2884	1,8213	0	1,0489	1,0392	1,0228	0,9648	1,4666
8	2,2973	1,0836	2,1335	1,5204	1,2171	1,8103	1,0489	0	0,9020	1,0138	1,0327	1,2344
9	2,5395	1,1233	2,3112	1,6058	1,2733	1,8587	1,0392	0,9020	0	1,0693	1,1091	1,2529
10	2,6002	1,1878	2,3568	1,5973	1,3139	1,8602	1,0228	1,0138	1,0693	0	1,0403	1,4597
11	2,6604	1,2511	2,1939	1,3683	1,2217	1,8103	0,9648	1,0327	1,1091	1,0403	0	1,5049
12	2,1784	1,2113	2,2273	1,8464	1,4450	2,1277	1,4666	1,2344	1,2529	1,4597	1,5049	0
13	2,0646	1,1116	2,1014	1,6837	1,2210	1,9367	1,3152	1,0954	1,1770	1,3399	1,3372	1,1725
14	1,8728	1,1898	1,9673	1,2847	1,0993	1,7604	1,2285	1,1330	1,3383	1,2448	1,1906	1,4557
15	1,8638	1,1119	1,8125	1,1964	1,1285	1,6636	1,1293	1,0641	1,1330	1,1217	1,0699	1,3947
16	1,9659	1,0667	1,9162	1,3320	1,0765	1,7459	1,0499	1,0221	1,0912	1,0478	1,0899	1,3098
17	2,0177	1,0881	1,9359	1,3401	1,0579	1,7971	1,0923	1,0763	1,1542	1,0976	1,1134	1,3784
18	1,7911	1,1942	1,8160	1,4309	1,2139	1,7214	1,3268	1,2409	1,2432	1,3668	1,3951	1,3004
19	1,8837	1,1025	1,7237	1,2242	1,0107	1,7620	1,2041	1,1710	1,2797	1,2785	1,1746	1,3865
20	1,9328	1,1165	1,9789	1,3265	1,0658	1,8571	1,1801	1,1621	1,2656	1,1983	1,1041	1,3748
21	2,0914	1,0891	1,9607	1,4246	1,0414	2,0039	1,1327	1,1624	1,2366	1,2215	1,1909	1,2591
22	1,1953	1,4094	1,2579	1,1934	1,3301	1,2500	1,5835	1,4205	1,5151	1,6195	1,7346	1,6260
23	1,9174	1,3501	1,8233	1,3985	1,3283	1,6067	1,1989	1,2621	1,3150	1,3122	1,3019	1,6113
24	1,3191	1,5095	1,3966	1,1461	1,4043	1,3220	1,4461	1,4552	1,5493	1,5947	1,4745	1,7851
25	1,2964	2,0537	1,1371	1,3428	1,9268	1,4704	2,0402	2,1647	2,2093	2,3376	2,2482	2,3156
26	1,3274	1,9544	1,2539	1,3129	1,8694	1,5481	2,0604	2,1556	2,3117	2,2418	1,9562	2,2945
27	0,9519	1,7155	1,2344	0,9667	1,4644	1,3750	1,6062	1,6114	1,8021	1,7166	1,5406	2,0654
28	1,3744	1,4407	1,4111	0,9884	1,2216	1,5120	1,3971	1,5213	1,6151	1,5694	1,3704	1,8321
29	0,8534	1,7042	0,9878	0,9673	1,6101	1,2057	1,8463	1,7925	1,9217	1,9118	1,9318	2,0293
30	1,9869	1,0974	1,9534	1,3766	1,1015	1,8508	1,3180	1,1526	1,2797	1,2190	1,2268	1,3073
31	1,9894	1,1082	2,0838	1,4793	1,1369	1,8882	1,3680	1,1626	1,2674	1,3425	1,2339	1,2680
32	1,9736	1,6478	1,8975	1,3404	1,5702	1,6316	1,4266	1,5806	1,6841	1,4850	1,3375	1,9923
33	2,0281	1,7722	1,8539	1,6097	1,6057	1,7505	1,4845	1,6342	1,6867	1,6537	1,5480	2,0182
34	2,2943	1,2512	1,9750	1,3947	1,2982	1,8342	1,1190	1,2158	1,1771	1,2117	1,1445	1,4640
35	2,3723	1,2527	2,0804	1,5515	1,4297	1,9452	1,1088	1,2419	1,2397	1,1290	1,1815	1,3903
36	1,8761	1,1780	1,7641	1,2085	1,2029	1,5532	1,1371	1,1451	1,1778	1,1865	1,1650	1,4282
37	1,8835	1,4480	1,6210	1,2613	1,4470	1,4214	1,2487	1,3528	1,3899	1,3902	1,3383	1,7709
38	1,0809	2,0751	0,9692	1,3039	1,8948	1,4569	2,2024	2,2599	2,4210	2,3898	2,2890	2,3147
39	1,9143	1,0618	1,9190	1,4185	1,0958	1,7870	1,2296	1,0991	1,1748	1,2559	1,2241	1,2376
40	1,7847	1,1897	1,8447	1,5191	1,2345	1,6872	1,4340	1,2330	1,2786	1,3434	1,3793	1,3485
41	1,0867	2,2218	1,0244	1,3829	2,1171	1,3742	2,3537	2,3053	2,5384	2,6436	2,5357	2,4308
42	1,1833	1,4564	1,2148	1,0674	1,3579	1,1026	1,5378	1,4903	1,5129	1,6597	1,6358	1,6799
43	1,0941	1,9284	1,2264	1,2242	1,8028	1,3155	2,0106	2,0664	2,2105	2,2453	2,1052	2,1836
44	1,3824	2,0522	1,2460	1,3665	1,9792	1,4351	2,4382	2,2348	2,3631	2,4389	2,3423	2,3193
45	1,1176	1,7482	1,0938	1,0974	1,5557	1,3564	1,9745	2,0166	2,1103	2,0585	2,1005	2,0221
46	1,3379	1,6068	1,4349	1,1938	1,4493	1,2705	1,6272	1,7070	1,7388	1,6667	1,8021	1,8878
47	1,5179	1,9130	1,5355	1,4943	1,7878	1,4941	1,9480	1,8979	1,9982	1,9694	1,8066	2,2405
48	1,7053	1,3522	1,6723	1,2308	1,1920	1,6387	1,3470	1,4675	1,4496	1,4407	1,2888	1,6584
49	1,3946	2,1059	1,2000	1,4097	2,0777	1,7095	2,1763	2,3847	2,4171	2,5181	2,4516	2,3936
50	1,0952	2,3165	1,0625	1,4194	2,2155	1,6892	2,4490	2,4573	2,6177	2,7907	2,6911	2,5398
51	1,2669	2,1911	1,4191	1,5234	2,1355	1,3841	2,6823	2,3170	2,5740	2,6005	2,5107	2,3767
52	1,3166	2,2466	1,3585	1,5582	2,0931	1,6168	2,9380	2,5102	2,8169	2,8673	2,9085	2,4219
53	0,9290	1,9504	1,0673	1,1466	1,7727	1,3043	2,6585	2,2672	2,5220	2,5662	2,6025	2,1466
54	1,1067	2,1101	1,1241	1,3576	1,9567	1,4909	2,8092	2,4135	2,7208	2,7252	2,7238	2,3096
55	1,1078	2,2125	1,2103	1,4503	2,1263	1,4578	2,9005	2,4666	2,7188	2,8410	2,8350	2,3959
56	1,1218	2,1793	1,1395	1,3780	2,0582	1,4363	2,8261	2,4258	2,6741	2,7740	2,6930	2,3584
57	1,1218	2,2841	1,2287	1,4817	2,1301	1,5764	2,9284	2,5020	2,7880	2,8573	2,8580	2,4395
58	1,1579	2,1669	1,2230	1,4159	2,0000	1,4831	2,8272	2,4309	2,7195	2,7572	2,7569	2,3691
59	1,1452	2,2329	1,2266	1,4509	2,1323	1,5897	2,9157	2,4853	2,7894	2,8658	2,8601	2,4080
60	1,5675	2,6325	1,5859	2,0261	2,5878	1,9921	3,2073	2,7075	2,9216	3,1790	3,1139	2,7293

Tabella A.7: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 1, colonne 13-24.

	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	2,0646	1,8728	1,8638	1,9659	2,0177	1,7911	1,8837	1,9328	2,0914	1,1953	1,9174	1,3191
2	1,1116	1,1898	1,1119	1,0667	1,0881	1,1942	1,1025	1,1165	1,0891	1,4094	1,3501	1,5095
3	2,1014	1,9673	1,8125	1,9162	1,9359	1,8160	1,7237	1,9789	1,9607	1,2579	1,8233	1,3966
4	1,6837	1,2847	1,1964	1,3320	1,3401	1,4309	1,2242	1,3265	1,4246	1,1934	1,3985	1,1461
5	1,2210	1,0993	1,1285	1,0765	1,0579	1,2139	1,0107	1,0658	1,0414	1,3301	1,3283	1,4043
6	1,9367	1,7604	1,6636	1,7459	1,7971	1,7214	1,7620	1,8571	2,0039	1,2500	1,6067	1,3220
7	1,3152	1,2285	1,1293	1,0499	1,0923	1,3268	1,2041	1,1801	1,1327	1,5835	1,1989	1,4461
8	1,0954	1,1330	1,0641	1,0221	1,0763	1,2409	1,1710	1,1621	1,1624	1,4205	1,2621	1,4552
9	1,1770	1,3383	1,1330	1,0912	1,1542	1,2432	1,2797	1,2656	1,2366	1,5151	1,3150	1,5493
10	1,3399	1,2448	1,1217	1,0478	1,0976	1,3668	1,2785	1,1983	1,2215	1,6195	1,3122	1,5947
11	1,3372	1,1906	1,0699	1,0899	1,1134	1,3951	1,1746	1,1041	1,1909	1,7346	1,3019	1,4745
12	1,1725	1,4557	1,3947	1,3098	1,3784	1,3004	1,3865	1,3748	1,2591	1,6260	1,6113	1,7851
13	0	1,3053	1,2584	1,1519	1,1988	1,1496	1,2312	1,2080	1,1384	1,4568	1,3972	1,6415
14	1,3053	0	1,0195	0,9956	0,9754	1,2335	1,0573	1,0473	1,1040	1,2793	1,3229	1,3684
15	1,2584	1,0195	0	1,0092	0,9827	1,1391	1,0736	1,0763	1,0730	1,2965	1,1996	1,3148
16	1,1519	0,9956	1,0092	0	0,9339	1,1034	1,0130	1,0239	1,0154	1,3356	1,2313	1,3921
17	1,1988	0,9754	0,9827	0,9339	0	1,1558	1,0510	1,0326	1,0382	1,4511	1,2848	1,4320
18	1,1496	1,2335	1,1391	1,1034	1,1558	0	1,1680	1,1879	1,2046	1,2160	1,1536	1,2888
19	1,2312	1,0573	1,0736	1,0130	1,0510	1,1680	0	1,0471	0,9951	1,2883	1,2996	1,3529
20	1,2080	1,0473	1,0763	1,0239	1,0326	1,1879	1,0471	0	1,0607	1,3373	1,2300	1,4488
21	1,1384	1,1040	1,0730	1,0154	1,0382	1,2046	0,9951	1,0607	0	1,4374	1,2828	1,5406
22	1,4568	1,2793	1,2965	1,3356	1,4511	1,2160	1,2883	1,3373	1,4374	0	1,2445	1,1063
23	1,3972	1,3229	1,1996	1,2313	1,2848	1,1536	1,2996	1,2300	1,2828	1,2445	0	1,2769
24	1,6415	1,3684	1,3148	1,3921	1,4320	1,2888	1,3529	1,4488	1,5406	1,1063	1,2769	0
25	2,2316	2,0711	1,8818	1,9843	2,0825	1,9179	1,8233	2,1132	2,0970	1,5541	1,9767	1,5963
26	2,2796	1,8930	1,9158	1,8591	1,7831	2,0192	1,7613	2,0069	2,0811	1,6787	2,2244	1,7068
27	1,9301	1,4727	1,3875	1,4718	1,4878	1,7089	1,3354	1,5232	1,5674	1,2360	1,7127	1,3498
28	1,6659	1,2424	1,2281	1,2200	1,2190	1,4668	1,1667	1,2711	1,2839	1,2648	1,4119	1,2613
29	1,8083	1,6882	1,5381	1,6128	1,6964	1,5720	1,5681	1,6651	1,8320	0,9742	1,5408	1,1300
30	1,2087	1,0842	1,0901	1,0383	1,0806	1,1788	1,0838	1,0513	1,0779	1,3525	1,3703	1,5683
31	1,1337	1,1552	1,1690	1,0612	1,1301	1,1758	1,1164	1,1223	1,1181	1,4085	1,3797	1,5747
32	1,8475	1,4921	1,4160	1,5177	1,4387	1,6983	1,4359	1,5220	1,5742	1,6205	1,4859	1,5513
33	1,7569	1,5807	1,5756	1,5641	1,5430	1,5802	1,5374	1,6057	1,5721	1,6115	1,4053	1,6077
34	1,3654	1,3044	1,0896	1,1430	1,1647	1,2659	1,1754	1,2406	1,1597	1,4262	1,1889	1,3821
35	1,3343	1,3215	1,1961	1,1474	1,2200	1,2894	1,3358	1,3153	1,2570	1,5090	1,2431	1,5132
36	1,3124	1,0621	1,0011	1,0019	1,0462	1,2203	1,1211	1,0952	1,1657	1,2611	1,2095	1,2520
37	1,5835	1,3106	1,1725	1,2908	1,3329	1,2775	1,3187	1,4723	1,4298	1,2214	1,0848	1,1841
38	2,1928	1,9904	1,8485	2,1012	2,0687	1,8894	1,7705	2,0534	1,9650	1,3814	2,0000	1,4809
39	1,1643	1,1315	1,0893	1,0098	1,0885	1,1365	1,0784	1,1072	1,1026	1,3439	1,3092	1,4754
40	1,1964	1,2535	1,2563	1,1900	1,2229	1,2385	1,2046	1,1961	1,1809	1,2968	1,3824	1,5325
41	2,3214	2,2689	2,0821	2,1950	2,2621	2,0299	2,0408	2,2587	2,2769	1,3978	2,0629	1,5565
42	1,5045	1,3145	1,1943	1,2432	1,3248	1,2182	1,2427	1,3412	1,4263	0,8875	1,2950	1,0389
43	1,9521	1,8011	1,7032	1,8065	1,8390	1,7230	1,6808	1,8012	1,8662	1,1654	1,7229	1,3288
44	2,2443	2,0705	1,9892	2,0140	2,0973	1,9243	1,9579	2,1471	2,2315	1,6073	1,9947	1,5767
45	1,8881	1,6945	1,6222	1,7366	1,7569	1,6199	1,5282	1,7074	1,7709	1,2753	1,6508	1,2982
46	1,6681	1,4479	1,4227	1,5052	1,5529	1,4764	1,4231	1,5183	1,6079	1,1438	1,4524	1,2451
47	2,1146	1,8379	1,8562	1,8318	1,7922	1,9474	1,8200	1,9178	2,0028	1,6754	1,9257	1,7304
48	1,4803	1,1544	1,1783	1,2451	1,1961	1,3263	1,1241	1,2342	1,2347	1,3140	1,3305	1,3165
49	2,3496	2,1787	2,0572	2,1619	2,1551	2,0302	1,9427	2,2527	2,2387	1,7445	2,1655	1,7377
50	2,5039	2,2723	2,1439	2,2810	2,2631	2,0121	2,0609	2,4028	2,3580	1,6189	2,1836	1,7213
51	2,2667	2,1574	2,0575	2,0906	2,2277	1,9611	2,1373	2,2057	2,3429	1,4033	2,0344	1,6005
52	2,2640	2,2020	2,1764	2,2305	2,3055	2,0917	2,1252	2,1929	2,3275	1,5762	2,2609	1,7852
53	2,0012	1,8487	1,8013	1,9387	1,9892	1,7139	1,8190	1,8824	2,0490	1,1122	1,8601	1,3584
54	2,1515	2,0952	2,0503	2,1175	2,1694	1,9497	1,9730	2,0617	2,2342	1,4160	2,1113	1,5925
55	2,3013	2,2759	2,1697	2,2103	2,2884	1,9570	2,1491	2,2111	2,3858	1,4635	2,1690	1,6270
56	2,2525	2,1680	2,0929	2,1204	2,2720	1,9912	2,0868	2,1815	2,3191	1,3708	2,1180	1,5625
57	2,2977	2,2664	2,1679	2,2392	2,3277	2,0765	2,1528	2,2089	2,3603	1,5064	2,2165	1,7578
58	2,1859	2,1202	2,1016	2,1548	2,1957	2,0232	2,0392	2,0924	2,2489	1,4472	2,0933	1,6709
59	2,2670	2,2243	2,1631	2,2229	2,3119	2,0664	2,1132	2,1907	2,3687	1,4809	2,1943	1,7094
60	2,7038	2,8435	2,6580	2,5884	2,7763	2,3565	2,5853	2,7290	2,7968	1,9078	2,5748	2,2068

Tabella A.8: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 1, colonne 25-36.

	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
1	1,2964	1,3274	0,9519	1,3744	0,8534	1,9869	1,9894	1,9736	2,0281	2,2943	2,3723	1,8761
2	2,0537	1,9544	1,7155	1,4407	1,7042	1,0974	1,1082	1,6478	1,7722	1,2512	1,2527	1,1780
3	1,1371	1,2539	1,2344	1,4111	0,9878	1,9534	2,0838	1,8975	1,8539	1,9750	2,0804	1,7641
4	1,3428	1,3129	0,9667	0,9884	0,9673	1,3766	1,4793	1,3404	1,6097	1,3947	1,5515	1,2085
5	1,9268	1,8694	1,4644	1,2216	1,6101	1,1015	1,1369	1,5702	1,6057	1,2982	1,4297	1,2029
6	1,4704	1,5481	1,3750	1,5120	1,2057	1,8508	1,8882	1,6316	1,7505	1,8342	1,9452	1,5532
7	2,0402	2,0604	1,6062	1,3971	1,8463	1,3180	1,3680	1,4266	1,4845	1,1190	1,1088	1,1371
8	2,1647	2,1556	1,6114	1,5213	1,7925	1,1526	1,1626	1,5806	1,6342	1,2158	1,2419	1,1451
9	2,2093	2,3117	1,8021	1,6151	1,9217	1,2797	1,2674	1,6841	1,6867	1,1771	1,2397	1,1778
10	2,3376	2,2418	1,7166	1,5694	1,9118	1,2190	1,3425	1,4850	1,6537	1,2117	1,1290	1,1865
11	2,2482	1,9562	1,5406	1,3704	1,9318	1,2268	1,2339	1,3375	1,5480	1,1445	1,1815	1,1650
12	2,3156	2,2945	2,0654	1,8321	2,0293	1,3073	1,2680	1,9923	2,0182	1,4640	1,3903	1,4282
13	2,2316	2,2796	1,9301	1,6659	1,8083	1,2087	1,1337	1,8475	1,7569	1,3654	1,3343	1,3124
14	2,0711	1,8930	1,4727	1,2424	1,6882	1,0842	1,1552	1,4921	1,5807	1,3044	1,3215	1,0621
15	1,8818	1,9158	1,3875	1,2281	1,5381	1,0901	1,1690	1,4160	1,5756	1,0896	1,1961	1,0011
16	1,9843	1,8591	1,4718	1,2200	1,6128	1,0383	1,0612	1,5177	1,5641	1,1430	1,1474	1,0019
17	2,0825	1,7831	1,4878	1,2190	1,6964	1,0806	1,1301	1,4387	1,5430	1,1647	1,2200	1,0462
18	1,9179	2,0192	1,7089	1,4668	1,5720	1,1788	1,1758	1,6983	1,5802	1,2659	1,2894	1,2203
19	1,8233	1,7613	1,3354	1,1667	1,5681	1,0838	1,1164	1,4359	1,5374	1,1754	1,3358	1,1211
20	2,1132	2,0069	1,5232	1,2711	1,6651	1,0513	1,1223	1,5220	1,6057	1,2406	1,3153	1,0952
21	2,0970	2,0811	1,5674	1,2839	1,8320	1,0779	1,1181	1,5742	1,5721	1,1597	1,2570	1,1657
22	1,5541	1,6787	1,2360	1,2648	0,9742	1,3525	1,4085	1,6205	1,6115	1,4262	1,5090	1,2611
23	1,9767	2,2244	1,7127	1,4119	1,5408	1,3703	1,3797	1,4859	1,4053	1,1889	1,2431	1,2095
24	1,5963	1,7068	1,3498	1,2613	1,1300	1,5683	1,5747	1,5513	1,6077	1,3821	1,5132	1,2520
25	0	0,6028	1,4065	1,5566	1,1503	2,1772	2,1012	1,9358	1,9950	1,9310	2,1186	1,6538
26	0,6028	0	1,1573	1,4141	1,2585	1,9347	2,0269	1,7978	2,2676	2,2368	2,3933	1,8432
27	1,4065	1,1573	0	1,0256	1,1480	1,5000	1,6798	1,5581	1,8821	1,7507	1,9115	1,4030
28	1,5566	1,4141	1,0256	0	1,1558	1,3278	1,4160	1,3383	1,4951	1,4253	1,5984	1,2859
29	1,1503	1,2585	1,1480	1,1558	0	1,7131	1,7615	1,5890	1,7101	1,7228	1,8455	1,4233
30	2,1772	1,9347	1,5000	1,3278	1,7131	0	1,0749	1,5831	1,6709	1,3306	1,3827	1,1522
31	2,1012	2,0269	1,6798	1,4160	1,7615	1,0749	0	1,6118	1,6857	1,2587	1,3815	1,1850
32	1,9358	1,7978	1,5581	1,3383	1,5890	1,5831	1,6118	0	1,4937	1,6857	1,3962	1,3653
33	1,9950	2,2676	1,8821	1,4951	1,7101	1,6709	1,6857	1,4937	0	1,4766	1,5250	1,3660
34	1,9310	2,2368	1,7507	1,4253	1,7228	1,3306	1,2587	1,3962	1,4766	0	1,0187	1,1126
35	2,1186	2,3933	1,9115	1,5984	1,8455	1,3827	1,3815	1,5257	1,5250	1,0187	0	1,1358
36	1,6538	1,8432	1,4030	1,2859	1,4233	1,1522	1,1850	1,3653	1,3660	1,1126	1,1358	0
37	1,6234	2,0553	1,4944	1,3641	1,3948	1,5889	1,5392	1,4186	1,3748	1,1633	1,1343	1,1241
38	1,2240	1,2829	1,2888	1,5387	1,1182	2,0225	2,1289	1,8706	1,9776	2,0997	2,2595	1,7601
39	2,0306	1,9524	1,5792	1,3258	1,6554	1,0689	1,1060	1,5811	1,6127	1,2048	1,2193	1,0863
40	2,0216	2,0427	1,7483	1,4730	1,5282	1,1545	1,1559	1,7710	1,6765	1,4217	1,4370	1,3118
41	1,0000	1,2500	1,3623	1,6582	1,1197	2,2108	2,2576	2,0674	2,0673	2,2626	2,4135	1,8624
42	1,4639	1,6816	1,0786	1,1944	0,9356	1,3185	1,3788	1,4263	1,4661	1,2276	1,5000	1,1427
43	1,4529	1,5563	1,1983	1,3015	1,0337	1,8859	1,8730	1,7407	1,7040	1,7797	1,9926	1,5404
44	0,6429	0,7294	1,4362	1,6056	1,2552	2,1104	2,1517	1,8591	2,1499	2,1682	2,3190	1,8040
45	0,8741	0,9580	1,2200	1,2000	1,0168	1,8022	1,7820	1,6023	1,7179	1,8451	1,9767	1,6313
46	1,0263	1,1943	1,3841	1,2621	1,1754	1,5910	1,5840	1,4372	1,5473	1,4315	1,6481	1,2711
47	1,2875	1,1008	1,5160	1,5426	1,5125	1,8700	1,9483	1,6888	1,7895	2,0521	2,1379	1,7658
48	1,3909	1,3300	1,4068	1,1388	1,5018	1,2653	1,3185	1,3574	1,4993	1,3769	1,4863	1,1970
49	0,6162	0,6893	1,5481	1,7548	1,2950	2,3100	2,2645	2,2629	2,2785	2,1825	2,3215	1,9797
50	1,1515	1,2282	1,3852	1,8548	1,1727	2,4347	2,4235	2,4200	2,2101	2,3111	2,4114	1,9627
51	1,5391	1,6176	1,5132	1,7193	1,2839	2,0826	2,1924	1,9372	2,0984	2,3278	2,4321	1,8923
52	1,5561	1,6407	1,4508	1,6478	1,4257	2,2299	2,2047	2,1493	2,2381	2,6275	2,7220	2,2276
53	1,3778	1,4964	1,1637	1,3168	0,9057	1,8849	1,9077	1,8839	1,8694	2,2735	2,3945	1,8761
54	1,3147	1,3750	1,3553	1,4971	1,0994	2,0708	2,1352	2,0104	2,0793	2,5120	2,5872	2,1250
55	1,3571	1,3211	1,4362	1,6491	1,1793	2,2164	2,2222	2,1077	2,2531	2,5374	2,6461	2,1196
56	1,2546	1,3527	1,3194	1,6128	1,1250	2,0695	2,1652	2,0380	2,0969	2,4815	2,5984	2,0230
57	1,3333	1,4866	1,4306	1,7043	1,2872	2,2204	2,2426	2,1984	2,2252	2,6451	2,7154	2,2500
58	1,3568	1,4340	1,4381	1,5487	1,2085	2,1077	2,1552	2,0343	2,0637	2,5539	2,6422	2,1745
59	1,3692	1,4099	1,4196	1,6196	1,2857	2,2270	2,2388	2,1913	2,2019	2,6084	2,6840	2,2492
60	1,5897	1,6341	2,0263	2,3284	1,7331	2,6218	2,6699	2,7175	2,6827	2,9541	3,0665	2,4562

Tabella A.9: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 1, colonne 37-48.

	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
1	1,8835	1,0809	1,9143	1,7847	1,0867	1,1833	1,0941	1,3824	1,1176	1,3379	1,5179	1,7053
2	1,4480	2,0751	1,0618	1,1897	2,2218	1,4564	1,9284	2,0522	1,7482	1,6068	1,9130	1,3522
3	1,6210	0,9692	1,9190	1,8447	1,0244	1,2148	1,2264	1,2460	1,0938	1,4349	1,5355	1,6723
4	1,2613	1,3039	1,4185	1,5191	1,3829	1,0674	1,2242	1,3665	1,0974	1,1938	1,4943	1,2308
5	1,4470	1,8948	1,0958	1,2345	2,1171	1,3579	1,8028	1,9792	1,5557	1,4493	1,7878	1,1920
6	1,4214	1,4569	1,7870	1,6872	1,3742	1,1026	1,3155	1,4351	1,3564	1,2705	1,4941	1,6387
7	1,2487	2,2024	1,2296	1,4340	2,3537	1,5378	2,0106	2,4382	1,9745	1,6272	1,9480	1,3470
8	1,3528	2,2599	1,0991	1,2330	2,3053	1,4903	2,0664	2,2348	2,0166	1,7070	1,8979	1,4675
9	1,3899	2,4210	1,1748	1,2786	2,5384	1,5129	2,2105	2,3631	2,1103	1,7388	1,9982	1,4496
10	1,3902	2,3898	1,2559	1,3434	2,6436	1,6597	2,2453	2,4389	2,0585	1,6667	1,9694	1,4407
11	1,3383	2,2890	1,2241	1,3793	2,5357	1,6358	2,1052	2,3423	2,1005	1,8021	1,8066	1,2888
12	1,7709	2,3147	1,2376	1,3485	2,4308	1,6799	2,1836	2,3193	2,0221	1,8878	2,2405	1,6584
13	1,5835	2,1928	1,1643	1,1964	2,3214	1,5045	1,9521	2,2443	1,8881	1,6681	2,1146	1,4803
14	1,3106	1,9904	1,1315	1,2535	2,2689	1,3145	1,8011	2,0705	1,6945	1,4479	1,8379	1,1544
15	1,1725	1,8485	1,0893	1,2563	2,0821	1,1943	1,7032	1,9892	1,6222	1,4227	1,8562	1,1783
16	1,2908	2,1012	1,0098	1,1900	2,1950	1,2432	1,8065	2,0140	1,7366	1,5052	1,8318	1,2451
17	1,3329	2,0687	1,0885	1,2229	2,2621	1,3248	1,8390	2,0973	1,7569	1,5529	1,7922	1,1961
18	1,2775	1,8894	1,1365	1,2385	2,0299	1,2182	1,7230	1,9243	1,6199	1,4764	1,9474	1,3263
19	1,3187	1,7705	1,0784	1,2046	2,0408	1,2427	1,6808	1,9579	1,5282	1,4231	1,8200	1,1241
20	1,4723	2,0534	1,1072	1,1961	2,2587	1,3412	1,8012	2,1471	1,7074	1,5183	1,9178	1,2342
21	1,4298	1,9650	1,1026	1,1809	2,2769	1,4263	1,8662	2,2315	1,7709	1,6079	2,0028	1,2347
22	1,2214	1,3814	1,3439	1,2968	1,3978	0,8875	1,1654	1,6073	1,2753	1,1438	1,6754	1,3140
23	1,0848	2,0000	1,3092	1,3824	2,0629	1,2950	1,7229	1,9947	1,6508	1,4524	1,9257	1,3305
24	1,1841	1,4809	1,4754	1,5325	1,5565	1,0389	1,3288	1,5767	1,2982	1,2451	1,7304	1,3165
25	1,6234	1,2240	2,0306	2,0216	1,0000	1,4639	1,4529	0,6429	0,8741	1,0263	1,2875	1,3909
26	2,0553	1,2829	1,9524	2,0427	1,2500	1,6816	1,5563	0,7294	0,9580	1,1943	1,1008	1,3300
27	1,4944	1,2888	1,5792	1,7483	1,3623	1,0786	1,1983	1,4362	1,2200	1,3841	1,5160	1,4068
28	1,3641	1,5387	1,3258	1,4730	1,6582	1,1944	1,3015	1,6056	1,2000	1,2621	1,5426	1,1388
29	1,3948	1,1182	1,6554	1,5282	1,1197	0,9356	1,0337	1,2552	1,0168	1,1754	1,5125	1,5018
30	1,5889	2,0225	1,0689	1,1545	2,2108	1,3185	1,8859	2,1104	1,8022	1,5910	1,8700	1,2653
31	1,5392	2,1289	1,1060	1,1559	2,2576	1,3788	1,8730	2,1517	1,7820	1,5840	1,9483	1,3185
32	1,4186	1,8706	1,5811	1,7710	2,0674	1,4263	1,7407	1,8591	1,6023	1,4372	1,6888	1,3574
33	1,3748	1,9776	1,6127	1,6765	2,0673	1,4661	1,7040	2,1499	1,7179	1,5473	1,7895	1,4993
34	1,1633	2,0997	1,2048	1,4217	2,2626	1,2276	1,7797	2,1682	1,8451	1,4315	2,0521	1,3769
35	1,1343	2,2595	1,2193	1,4370	2,4135	1,5000	1,9926	2,3190	1,9767	1,6481	2,1379	1,4863
36	1,1241	1,7601	1,0863	1,3118	1,8624	1,1427	1,5404	1,8040	1,6313	1,2711	1,7658	1,1970
37	0	1,7708	1,4225	1,5592	1,9000	1,0652	1,5432	1,8455	1,5599	1,3545	1,8165	1,3976
38	1,7708	0	1,8616	1,8871	0,8992	1,2632	1,1719	1,2441	1,2453	1,4404	1,4859	1,7472
39	1,4225	1,8616	0	1,1775	2,1477	1,3569	1,8638	2,0449	1,7071	1,5158	1,8708	1,2899
40	1,5592	1,8871	1,1775	0	1,9922	1,3351	1,7238	2,0092	1,6592	1,4981	1,8590	1,3279
41	1,9000	0,8992	2,1477	1,9922	0	1,2004	1,2628	1,0577	1,3442	1,4618	1,5798	2,0227
42	1,0652	1,2632	1,3569	1,3351	1,2004	0	0,9748	1,5132	1,3478	1,1722	1,7018	1,3511
43	1,5432	1,1719	1,8638	1,7238	1,2628	0,9748	0	1,5071	1,2759	1,2888	1,5387	1,6133
44	1,8455	1,2441	2,0449	2,0092	1,0577	1,5132	1,5071	0	0,9078	0,9653	1,1352	1,5204
45	1,5599	1,2453	1,7071	1,6592	1,3442	1,3478	1,2759	0,9078	0	0,7729	1,0801	1,0627
46	1,3545	1,4404	1,5158	1,4981	1,4618	1,1722	1,2888	0,9653	0,7729	0	1,0745	0,9566
47	1,8165	1,4859	1,8708	1,8590	1,5798	1,7018	1,5387	1,1352	1,0801	1,0745	0	1,3288
48	1,3976	1,7472	1,2899	1,3279	2,0227	1,3511	1,6133	1,5204	1,0627	0,9566	1,3288	0
49	1,8744	1,1736	2,1386	2,1847	1,1531	1,6351	1,6530	0,7871	0,8926	1,3024	1,3233	1,5774
50	1,8943	0,9504	2,1637	2,2660	0,9745	1,3378	1,4739	1,3663	1,4444	1,7964	1,8017	2,1799
51	1,9280	1,2153	2,1042	1,9568	1,3509	1,3291	1,4267	1,3632	1,4735	1,4399	1,5417	1,9569
52	2,2902	1,4607	2,1522	1,9548	1,5294	1,6317	1,4198	1,6872	1,3288	1,4958	1,4436	1,9006
53	1,8897	1,1274	1,8493	1,6568	1,2500	1,1831	1,1206	1,4234	1,0614	1,2365	1,4572	1,6636
54	2,1557	1,1413	2,0253	1,8262	1,2217	1,4728	1,2947	1,4153	1,1316	1,4185	1,3985	1,8281
55	2,1202	1,2283	2,1464	1,9892	1,2548	1,3943	1,3464	1,2150	1,2801	1,5058	1,5205	1,9939
56	2,0890	1,0692	2,0560	1,9239	1,0794	1,3694	1,2308	1,2818	1,2639	1,4205	1,4840	1,8931
57	2,2881	1,1423	2,1336	1,9604	1,2944	1,5728	1,4301	1,4636	1,3299	1,5568	1,4240	1,9435
58	2,1905	1,1218	2,0410	1,8548	1,3200	1,5210	1,2761	1,4026	1,1839	1,4601	1,3525	1,8619
59	2,2277	1,2016	2,1398	1,9710	1,3160	1,5225	1,4014	1,4633	1,1853	1,4857	1,4395	1,9231
60	2,5631	1,3550	2,5692	2,4271	1,3247	1,7059	1,9823	1,5500	1,9868	2,0514	1,8368	2,4771

Tabella A.10: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 1, colonne 49-60.

	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
1	1,3946	1,0952	1,2669	1,3166	0,9290	1,1067	1,1078	1,1218	1,1218	1,1579	1,1452	1,5675
2	2,1059	2,3165	2,1911	2,2466	1,9504	2,1101	2,2125	2,1793	2,2841	2,1669	2,2329	2,6325
3	1,2000	1,0625	1,4191	1,3585	1,0673	1,1241	1,2103	1,1395	1,2287	1,2230	1,2266	1,5859
4	1,4097	1,4194	1,5234	1,5582	1,1466	1,3576	1,4503	1,3780	1,4817	1,4159	1,4509	2,0261
5	2,0777	2,2155	2,1355	2,0931	1,7727	1,9567	2,1263	2,0582	2,1301	2,0000	2,1323	2,5878
6	1,7095	1,6892	1,3841	1,6168	1,3043	1,4909	1,4578	1,4363	1,5764	1,4831	1,5897	1,9921
7	2,1763	2,4490	2,6823	2,9380	2,6585	2,8092	2,9005	2,8261	2,9284	2,8272	2,9157	3,2073
8	2,3847	2,4573	2,3170	2,5102	2,2672	2,4135	2,4666	2,4258	2,5020	2,4309	2,4853	2,7075
9	2,4171	2,6177	2,5740	2,8169	2,5220	2,7208	2,7188	2,6741	2,7880	2,7195	2,7894	2,9216
10	2,5181	2,7907	2,6005	2,8673	2,5662	2,7252	2,8410	2,7740	2,8573	2,7572	2,8658	3,1790
11	2,4516	2,6911	2,5107	2,9085	2,6025	2,7238	2,8350	2,6930	2,8580	2,7569	2,8601	3,1139
12	2,3936	2,5398	2,3767	2,4219	2,1466	2,3096	2,3959	2,3584	2,4395	2,3691	2,4080	2,7293
13	2,3496	2,5039	2,2667	2,2640	2,0012	2,1515	2,3013	2,2525	2,2977	2,1859	2,2670	2,7038
14	2,1787	2,2723	2,1574	2,2020	1,8487	2,0952	2,2759	2,1680	2,2664	2,1202	2,2243	2,8435
15	2,0572	2,1439	2,0575	2,1764	1,8013	2,0503	2,1697	2,0929	2,1679	2,1016	2,1631	2,6580
16	2,1619	2,2810	2,0906	2,2305	1,9387	2,1175	2,2103	2,1204	2,2392	2,1548	2,2229	2,5884
17	2,1551	2,2631	2,2277	2,3055	1,9892	2,1694	2,2884	2,2720	2,3277	2,1957	2,3119	2,7763
18	2,0302	2,0121	1,9611	2,0917	1,7139	1,9497	1,9570	1,9912	2,0765	2,0232	2,0664	2,3565
19	1,9427	2,0609	2,1373	2,1252	1,8190	1,9730	2,1491	2,0868	2,1528	2,0392	2,1132	2,5853
20	2,2527	2,4028	2,2057	2,1929	1,8824	2,0617	2,2111	2,1815	2,2089	2,0924	2,1907	2,7290
21	2,2387	2,3580	2,3429	2,3275	2,0490	2,2342	2,3858	2,3191	2,3603	2,2489	2,3687	2,7968
22	1,7445	1,6189	1,4033	1,5762	1,1122	1,4160	1,4635	1,3708	1,5064	1,4472	1,4809	1,9078
23	2,1655	2,1836	2,0344	2,2609	1,8601	2,1113	2,1690	2,1180	2,2165	2,0933	2,1943	2,5748
24	1,7377	1,7213	1,6005	1,7852	1,3584	1,5925	1,6270	1,5625	1,7578	1,6709	1,7094	2,2068
25	0,6162	1,1515	1,5391	1,5561	1,3778	1,3147	1,3571	1,2546	1,3333	1,3568	1,3692	1,5897
26	0,6893	1,2282	1,6176	1,6407	1,4964	1,3750	1,3211	1,3527	1,4866	1,4340	1,4099	1,6341
27	1,5481	1,3852	1,5132	1,4508	1,1637	1,3553	1,4362	1,3194	1,4306	1,4381	1,4196	2,0263
28	1,7548	1,8548	1,7193	1,6478	1,3168	1,4971	1,6491	1,6128	1,7043	1,5487	1,6196	2,3284
29	1,2950	1,1727	1,2839	1,4257	0,9057	1,0994	1,1793	1,1250	1,2872	1,2085	1,2857	1,7331
30	2,3100	2,4347	2,0826	2,2299	1,8849	2,0708	2,2164	2,0695	2,2204	2,1077	2,2270	2,6218
31	2,2645	2,4235	2,1924	2,2047	1,9077	2,1352	2,2222	2,1652	2,2426	2,1552	2,2388	2,6699
32	2,2629	2,4200	1,9372	2,1493	1,8839	2,0104	2,1077	2,0380	2,1984	2,0343	2,1913	2,7175
33	2,2785	2,2101	2,0984	2,2381	1,8694	2,0793	2,2531	2,0969	2,2252	2,0637	2,2019	2,6827
34	2,1825	2,3111	2,3278	2,6275	2,2735	2,5120	2,5374	2,4815	2,6451	2,5539	2,6084	2,9541
35	2,3215	2,4114	2,4321	2,7220	2,3945	2,5872	2,6461	2,5984	2,7154	2,6422	2,6840	3,0665
36	1,9797	1,9627	1,8923	2,2276	1,8761	2,1250	2,1196	2,0230	2,2500	2,1745	2,2492	2,4562
37	1,8744	1,8943	1,9280	2,2902	1,8897	2,1557	2,1202	2,0890	2,2881	2,1905	2,2277	2,5631
38	1,1736	0,9504	1,2153	1,4607	1,1274	1,1413	1,2283	1,0692	1,1423	1,1218	1,2016	1,3550
39	2,1386	2,1637	2,1042	2,1522	1,8493	2,0253	2,1464	2,0560	2,1336	2,0410	2,1398	2,5692
40	2,1847	2,2660	1,9568	1,9548	1,6568	1,8262	1,9892	1,9239	1,9604	1,8548	1,9710	2,4271
41	1,1531	0,9745	1,3509	1,5294	1,2500	1,2217	1,2548	1,0794	1,2944	1,3200	1,3160	1,3247
42	1,6351	1,3378	1,3291	1,6317	1,1831	1,4728	1,3943	1,3694	1,5728	1,5210	1,5225	1,7059
43	1,6530	1,4739	1,4267	1,4198	1,1206	1,2947	1,3464	1,2308	1,4301	1,2761	1,4014	1,9823
44	0,7871	1,3663	1,3632	1,6872	1,4234	1,4153	1,2150	1,2818	1,4636	1,4026	1,4633	1,5500
45	0,8926	1,4444	1,4735	1,3288	1,0614	1,1316	1,2801	1,2639	1,3299	1,1839	1,1853	1,9868
46	1,3024	1,7964	1,4399	1,4958	1,2365	1,4185	1,5058	1,4205	1,5568	1,4601	1,4857	2,0514
47	1,3233	1,8017	1,5417	1,4436	1,4572	1,3985	1,5205	1,4840	1,4240	1,3525	1,4395	1,8368
48	1,5774	2,1799	1,9569	1,9006	1,6636	1,8281	1,9939	1,8931	1,9435	1,8619	1,9231	2,4771
49	0	0,5211	1,7973	1,6977	1,4695	1,3527	1,4554	1,4471	1,3750	1,4110	1,4272	1,3919
50	0,5211	0	1,6712	1,6884	1,3588	1,3304	1,3168	1,2500	1,1731	1,3790	1,3350	1,0405
51	1,7973	1,6712	0	1,6680	1,3639	1,5117	1,3718	1,2292	1,6083	1,5936	1,5882	1,7389
52	1,6977	1,6884	1,6680	0	1,1882	1,1968	1,5330	1,2918	1,0901	1,2172	1,1169	2,1329
53	1,4695	1,3588	1,3639	1,1882	0	1,0541	1,1277	1,0786	1,1000	1,0997	1,1475	1,9500
54	1,3527	1,3304	1,5117	1,1968	1,0541	0	1,2288	1,1736	1,1074	0,9565	1,0458	1,8352
55	1,4554	1,3168	1,3718	1,5330	1,1277	1,2288	0	1,1955	1,3136	1,2641	1,1972	1,6750
56	1,4471	1,2500	1,2292	1,2918	1,0786	1,1736	1,1955	0	0,9823	1,1646	0,8795	1,6747
57	1,3750	1,1731	1,6083	1,0901	1,1000	1,1074	1,3136	0,9823	0	0,9367	0,8616	1,8434
58	1,4110	1,3790	1,5936	1,2172	1,0997	0,9565	1,2641	1,1646	0,9367	0	1,0553	1,7571
59	1,4272	1,3350	1,5882	1,1169	1,1475	1,0458	1,1972	0,8795	0,8616	1,0553	0	1,8537
60	1,3919	1,0405	1,7389	2,1329	1,9500	1,8352	1,6750	1,6747	1,8434	1,7571	1,8537	0

Tabella A.11: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 3, colonne 1-12.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	1,0989	0,5733	0,5785	1,0041	0,7152	1,4234	1,2390	1,3753	1,3873	1,4232	1,1903
2	1,0989	0	1,1022	0,8295	0,6492	1,0167	0,6848	0,6124	0,6344	0,6733	0,7120	0,6673
3	0,5733	1,1022	0	0,6853	0,9868	0,7794	1,1716	1,1630	1,2676	1,2637	1,1821	1,2257
4	0,5785	0,8295	0,6853	0	0,7205	0,7101	0,8309	0,8585	0,9303	0,9050	0,7915	1,0030
5	1,0041	0,6492	0,9868	0,7205	0	0,9730	0,7239	0,6728	0,7291	0,7301	0,6873	0,7876
6	0,7152	1,0167	0,7794	0,7101	0,9730	0	1,0233	1,0008	1,0434	1,0271	1,0211	1,1621
7	1,4234	0,6848	1,1716	0,8309	0,7239	1,0233	0	0,5985	0,5990	0,5853	0,5520	0,8006
8	1,2390	0,6124	1,1630	0,8585	0,6728	1,0008	0,5985	0	0,5258	0,5745	0,5944	0,6756
9	1,3753	0,6344	1,2676	0,9303	0,7291	1,0434	0,5990	0,5258	0	0,6104	0,6402	0,6974
10	1,3873	0,6733	1,2637	0,9050	0,7301	1,0271	0,5853	0,5745	0,6104	0	0,5892	0,7988
11	1,4232	0,7120	1,1821	0,7915	0,6873	1,0211	0,5520	0,5944	0,6402	0,5892	0	0,8244
12	1,1903	0,6673	1,2257	1,0030	0,7876	1,1621	0,8006	0,6756	0,6974	0,7988	0,8244	0
13	1,1306	0,6356	1,1528	0,9351	0,6902	1,0731	0,7306	0,6176	0,6654	0,7518	0,7504	0,6518
14	0,9988	0,6782	1,0857	0,7248	0,6179	0,9686	0,7016	0,6499	0,7618	0,6907	0,6700	0,8131
15	1,0127	0,6259	1,0120	0,6873	0,6222	0,9298	0,6502	0,6106	0,6601	0,6361	0,6249	0,7651
16	1,0747	0,6090	1,0771	0,7576	0,6094	0,9566	0,6115	0,5822	0,6246	0,6004	0,6216	0,7296
17	1,1023	0,6215	1,0745	0,7566	0,5896	1,0064	0,6321	0,6174	0,6743	0,6146	0,6368	0,7670
18	0,9995	0,6778	1,0247	0,8177	0,6830	0,9590	0,7551	0,6993	0,7087	0,7702	0,7924	0,7191
19	1,0188	0,6227	0,9788	0,6960	0,5543	0,9728	0,6889	0,6653	0,7260	0,7145	0,6691	0,7624
20	1,0458	0,6329	1,0874	0,7575	0,5953	1,0197	0,6658	0,6611	0,7149	0,6737	0,6401	0,7640
21	1,1480	0,6202	1,0790	0,8233	0,5970	1,0876	0,6433	0,6502	0,6999	0,6883	0,6715	0,6982
22	0,6855	0,7951	0,7189	0,6758	0,7341	0,7204	0,8930	0,7907	0,8583	0,9174	0,9899	0,8947
23	1,0343	0,7546	0,9727	0,7925	0,7286	0,8788	0,6808	0,7179	0,7485	0,7395	0,7574	0,8870
24	0,7444	0,8526	0,7730	0,6577	0,7650	0,7448	0,8096	0,8311	0,8780	0,8806	0,8458	0,9840
25	0,9318	1,2870	0,8120	0,9172	1,2184	0,9945	1,3017	1,3873	1,4099	1,4213	1,4102	1,4106
26	0,9314	1,2312	0,8504	0,8900	1,1652	1,0027	1,3273	1,3690	1,4142	1,3760	1,2757	1,3882
27	0,5396	0,9584	0,7139	0,5452	0,8253	0,7732	0,9142	0,9080	1,0197	0,9690	0,8683	1,1230
28	0,7632	0,8104	0,7946	0,5736	0,6775	0,8402	0,7955	0,8595	0,9037	0,8819	0,7846	1,0019
29	0,5012	0,9503	0,5707	0,5549	0,8974	0,6834	1,0283	0,9921	1,0881	1,0715	1,0736	1,0986
30	1,0807	0,6192	1,0708	0,7827	0,6181	1,0171	0,7451	0,6474	0,7261	0,6857	0,6978	0,7265
31	1,0760	0,6248	1,1401	0,8275	0,6383	1,0273	0,7633	0,6498	0,7153	0,7432	0,6953	0,7032
32	1,0899	0,9288	1,0522	0,7677	0,8666	0,9192	0,8158	0,8960	0,9597	0,8485	0,7768	1,0832
33	1,0707	0,9789	1,0139	0,8979	0,8774	0,9631	0,8481	0,9185	0,9521	0,9233	0,8817	1,0934
34	1,2262	0,6919	1,1058	0,8059	0,7227	1,0319	0,6488	0,6803	0,6752	0,6905	0,6550	0,8033
35	1,2667	0,6982	1,1687	0,8736	0,7972	1,0549	0,6433	0,6992	0,7072	0,6328	0,6673	0,7599
36	1,0510	0,6607	1,0099	0,7030	0,6739	0,8925	0,6596	0,6602	0,6819	0,6787	0,6695	0,7937
37	1,0336	0,8165	0,8850	0,7226	0,7966	0,8120	0,7264	0,7735	0,8021	0,7859	0,7781	0,9670
38	0,6293	1,1475	0,5597	0,7318	1,0515	0,8343	1,2421	1,2574	1,3743	1,3390	1,3027	1,2624
39	1,0514	0,5958	1,0707	0,8003	0,6179	0,9950	0,6903	0,6173	0,6618	0,7009	0,6877	0,6833
40	0,9834	0,6577	1,0161	0,8371	0,6851	0,9348	0,7870	0,6904	0,7162	0,7524	0,7708	0,7438
41	0,6393	1,2279	0,5868	0,7820	1,1513	0,7819	1,3149	1,2793	1,4144	1,4451	1,4400	1,3244
42	0,6516	0,8148	0,6846	0,6107	0,7559	0,6257	0,8704	0,8430	0,8601	0,9258	0,9211	0,9178
43	0,6223	1,0665	0,6839	0,6950	0,9911	0,7557	1,1270	1,1383	1,2290	1,2239	1,1499	1,1923
44	0,9716	1,2803	0,8601	0,9239	1,2203	0,9499	1,4755	1,4349	1,4944	1,4965	1,4543	1,4022
45	0,7941	1,1256	0,7745	0,7571	1,0063	0,8898	1,2111	1,2813	1,3380	1,2612	1,2824	1,2559
46	0,9098	1,0407	0,9423	0,7992	0,9386	0,8822	1,0749	1,1539	1,1686	1,1052	1,1696	1,1715
47	1,0492	1,1989	0,9930	0,9661	1,1218	1,0040	1,2693	1,2750	1,3343	1,2659	1,2087	1,3614
48	1,0778	0,8874	1,0871	0,8653	0,7924	1,0377	0,8965	0,9816	0,9858	0,9360	0,8968	1,0437
49	0,9855	1,3143	0,8353	0,9494	1,2814	1,1017	1,3674	1,4842	1,4898	1,4974	1,4813	1,4519
50	0,6408	1,2955	0,6029	0,7983	1,1991	0,9566	1,3801	1,3575	1,4424	1,5297	1,4410	1,3725
51	0,7469	1,2067	0,8148	0,8619	1,1818	0,8191	1,4633	1,2991	1,4529	1,4306	1,4277	1,2888
52	0,7659	1,2415	0,7738	0,8555	1,1628	0,9144	1,5917	1,3730	1,5351	1,5464	1,5836	1,3242
53	0,5522	1,0899	0,6206	0,6489	0,9904	0,7509	1,4254	1,2299	1,3849	1,3869	1,4174	1,1744
54	0,6314	1,1526	0,6544	0,7411	1,0806	0,8423	1,4938	1,3041	1,4745	1,4522	1,4562	1,2473
55	0,6640	1,2279	0,6841	0,8052	1,1774	0,8493	1,5557	1,3507	1,5150	1,5468	1,5390	1,3118
56	0,6542	1,2006	0,6655	0,7836	1,1428	0,8250	1,5225	1,3227	1,4878	1,4867	1,4915	1,2884
57	0,6496	1,2443	0,7141	0,8146	1,1783	0,8870	1,5556	1,3468	1,5225	1,5422	1,5127	1,3269
58	0,6667	1,1921	0,6790	0,7852	1,0963	0,8571	1,5085	1,3034	1,4839	1,4771	1,4736	1,2819
59	0,6740	1,2271	0,7089	0,8151	1,1687	0,9080	1,5510	1,3504	1,5242	1,5386	1,5285	1,3119
60	0,9188	1,4352	0,8923	1,1111	1,4043	1,1249	1,7006	1,4754	1,6371	1,7152	1,6917	1,4866

Tabella A.12: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 3, colonne 13-24.

	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	1,1306	0,9988	1,0127	1,0747	1,1023	0,9995	1,0188	1,0458	1,1480	0,6855	1,0343	0,7444
2	0,6356	0,6782	0,6259	0,6090	0,6215	0,6778	0,6227	0,6329	0,6202	0,7951	0,7546	0,8526
3	1,1528	1,0857	1,0120	1,0771	1,0745	1,0247	0,9788	1,0874	1,0790	0,7189	0,9727	0,7730
4	0,9351	0,7248	0,6873	0,7576	0,7566	0,8177	0,6960	0,7575	0,8233	0,6758	0,7925	0,6577
5	0,6902	0,6179	0,6222	0,6094	0,5896	0,6830	0,5543	0,5953	0,5970	0,7341	0,7286	0,7650
6	1,0731	0,9686	0,9298	0,9566	1,0064	0,9590	0,9728	1,0197	1,0876	0,7204	0,8788	0,7448
7	0,7306	0,7016	0,6502	0,6115	0,6321	0,7551	0,6889	0,6658	0,6433	0,8930	0,6808	0,8096
8	0,6176	0,6499	0,6106	0,5822	0,6174	0,6993	0,6653	0,6611	0,6502	0,7907	0,7179	0,8311
9	0,6654	0,7618	0,6601	0,6246	0,6743	0,7087	0,7260	0,7149	0,6999	0,8583	0,7485	0,8780
10	0,7518	0,6907	0,6361	0,6004	0,6146	0,7702	0,7145	0,6737	0,6883	0,9174	0,7395	0,8806
11	0,7504	0,6700	0,6249	0,6216	0,6368	0,7924	0,6691	0,6401	0,6715	0,9899	0,7574	0,8458
12	0,6518	0,8131	0,7651	0,7296	0,7670	0,7191	0,7624	0,7640	0,6982	0,8947	0,8870	0,9840
13	0	0,7401	0,7064	0,6539	0,6726	0,6481	0,6906	0,6790	0,6440	0,8129	0,7744	0,9124
14	0,7401	0	0,5814	0,5715	0,5563	0,7045	0,5928	0,5928	0,6305	0,7175	0,7451	0,7671
15	0,7064	0,5814	0	0,5729	0,5617	0,6543	0,6062	0,6058	0,6113	0,7204	0,6806	0,7425
16	0,6539	0,5715	0,5729	0	0,5334	0,6226	0,5796	0,5784	0,5886	0,7506	0,6881	0,7775
17	0,6726	0,5563	0,5617	0,5334	0	0,6577	0,5864	0,5927	0,5958	0,8074	0,7271	0,7997
18	0,6481	0,7045	0,6543	0,6226	0,6577	0	0,6662	0,6768	0,6873	0,6825	0,6499	0,7251
19	0,6906	0,5928	0,6062	0,5796	0,5864	0,6662	0	0,5909	0,5645	0,7267	0,7310	0,7718
20	0,6790	0,5928	0,6058	0,5784	0,5927	0,6768	0,5909	0	0,5956	0,7392	0,6941	0,8130
21	0,6440	0,6305	0,6113	0,5886	0,5958	0,6873	0,5645	0,5956	0	0,8102	0,7261	0,8695
22	0,8129	0,7175	0,7204	0,7506	0,8074	0,6825	0,7267	0,7392	0,8102	0	0,6933	0,6284
23	0,7744	0,7451	0,6806	0,6881	0,7271	0,6499	0,7310	0,6941	0,7261	0,6933	0	0,7036
24	0,9124	0,7671	0,7425	0,7775	0,7997	0,7251	0,7718	0,8130	0,8695	0,6284	0,7036	0
25	1,3540	1,2819	1,2125	1,2765	1,2800	1,2569	1,1824	1,3001	1,3209	1,0828	1,2202	1,0483
26	1,3517	1,1866	1,2123	1,2108	1,1412	1,2945	1,1118	1,2249	1,2599	1,1412	1,3207	1,0851
27	1,0607	0,8106	0,8017	0,8412	0,8377	0,9757	0,7717	0,8548	0,8773	0,7168	0,9469	0,7727
28	0,9241	0,7054	0,6923	0,6954	0,7021	0,8414	0,6659	0,7297	0,7291	0,7207	0,7946	0,7085
29	0,9962	0,9151	0,8646	0,9183	0,9439	0,8717	0,8817	0,9256	1,0164	0,5681	0,8326	0,6316
30	0,6797	0,6107	0,6118	0,5880	0,6127	0,6771	0,6061	0,5856	0,6106	0,7551	0,7672	0,8826
31	0,6414	0,6504	0,6515	0,5899	0,6350	0,6692	0,6189	0,6264	0,6271	0,7868	0,7690	0,8732
32	1,0364	0,8375	0,8142	0,8753	0,8179	0,9646	0,8150	0,8579	0,8830	0,9274	0,8422	0,8647
33	0,9636	0,8852	0,8804	0,8847	0,8746	0,8810	0,8587	0,8950	0,8882	0,8942	0,7789	0,8649
34	0,7495	0,7513	0,6223	0,6551	0,6614	0,7316	0,6574	0,6978	0,6568	0,7971	0,6720	0,7854
35	0,7322	0,7510	0,6704	0,6598	0,6989	0,7229	0,7521	0,7462	0,7111	0,8501	0,6987	0,8423
36	0,7384	0,6045	0,5874	0,5807	0,6040	0,6944	0,6355	0,6266	0,6634	0,7166	0,6895	0,7134
37	0,8807	0,7458	0,6756	0,7456	0,7575	0,7179	0,7444	0,8348	0,8071	0,6921	0,6158	0,6610
38	1,2019	1,0814	1,0424	1,1481	1,1513	1,0611	1,0013	1,1412	1,1036	0,7874	1,0894	0,8363
39	0,6530	0,6463	0,6187	0,5711	0,6178	0,6410	0,5993	0,6110	0,6215	0,7541	0,7302	0,8245
40	0,6605	0,6984	0,6938	0,6581	0,6699	0,6862	0,6580	0,6564	0,6537	0,7200	0,7595	0,8410
41	1,2690	1,2386	1,1544	1,2155	1,2580	1,1262	1,1301	1,2343	1,2594	0,7945	1,1179	0,8894
42	0,8330	0,7358	0,6847	0,7149	0,7513	0,6949	0,7123	0,7410	0,8053	0,5045	0,7310	0,5849
43	1,0793	1,0010	0,9347	1,0149	1,0258	0,9668	0,9351	0,9976	1,0326	0,6565	0,9416	0,7355
44	1,3522	1,2692	1,2410	1,2643	1,2762	1,2334	1,2112	1,2867	1,3342	1,0952	1,2273	1,0355
45	1,1655	1,0477	1,0539	1,1098	1,1051	1,0781	1,0037	1,0787	1,1255	0,8990	1,0334	0,8574
46	1,0596	0,9274	0,9350	0,9790	0,9911	0,9792	0,9235	0,9628	1,0269	0,8149	0,9425	0,8088
47	1,2936	1,1351	1,1654	1,1689	1,1417	1,2275	1,1146	1,1711	1,1971	1,1305	1,1849	1,0729
48	0,9447	0,7879	0,8010	0,8358	0,8063	0,9040	0,7652	0,8173	0,8243	0,8672	0,8532	0,8813
49	1,4068	1,3152	1,3100	1,3648	1,3194	1,3181	1,2437	1,3719	1,3796	1,1721	1,3092	1,1174
50	1,3577	1,2512	1,2056	1,2884	1,2609	1,1281	1,1668	1,3180	1,3064	0,9220	1,1784	0,9514
51	1,2419	1,1856	1,1527	1,1739	1,2508	1,1023	1,1732	1,2129	1,2656	0,8121	1,1240	0,9108
52	1,2515	1,2043	1,1908	1,2305	1,2691	1,1683	1,1635	1,2051	1,2779	0,8910	1,2335	0,9789
53	1,1020	1,0059	0,9862	1,0638	1,1104	0,9658	0,9974	1,0321	1,1148	0,6442	1,0042	0,7629
54	1,1734	1,1141	1,1070	1,1606	1,1793	1,0720	1,0776	1,1130	1,1847	0,8136	1,1256	0,8741
55	1,2500	1,2350	1,1938	1,2075	1,2565	1,0838	1,1736	1,2188	1,2883	0,8512	1,1783	0,9069
56	1,2205	1,1729	1,1416	1,1752	1,2398	1,1118	1,1392	1,1914	1,2354	0,7963	1,1372	0,8667
57	1,2417	1,2100	1,1718	1,2301	1,2646	1,1563	1,1700	1,1961	1,2643	0,8672	1,1941	0,9813
58	1,1838	1,1160	1,1217	1,1678	1,1982	1,1152	1,1019	1,1297	1,1972	0,8245	1,1252	0,9309
59	1,2376	1,2099	1,1791	1,2323	1,2633	1,1559	1,1580	1,1934	1,2593	0,8494	1,1807	0,9462
60	1,4460	1,5182	1,4391	1,4139	1,5071	1,3034	1,4147	1,4609	1,4939	1,0740	1,3850	1,2036

Tabella A.13: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 3, colonne 25-36.

	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
1	0,9318	0,9314	0,5396	0,7632	0,5012	1,0807	1,0760	1,0899	1,0707	1,2262	1,2667	1,0510
2	1,2870	1,2312	0,9584	0,8104	0,9503	0,6192	0,6248	0,9288	0,9789	0,6919	0,6982	0,6607
3	0,8120	0,8504	0,7139	0,7946	0,5707	1,0708	1,1401	1,0522	1,0139	1,1058	1,1687	1,0099
4	0,9172	0,8900	0,5452	0,5736	0,5549	0,7827	0,8275	0,7677	0,8979	0,8059	0,8736	0,7030
5	1,2184	1,1652	0,8253	0,6775	0,8974	0,6181	0,6383	0,8666	0,8774	0,7227	0,7972	0,6739
6	0,9945	1,0027	0,7732	0,8402	0,6834	1,0171	1,0273	0,9192	0,9631	1,0319	1,0549	0,8925
7	1,3017	1,3273	0,9142	0,7955	1,0283	0,7451	0,7633	0,8158	0,8481	0,6488	0,6433	0,6596
8	1,3873	1,3690	0,9080	0,8595	0,9921	0,6474	0,6498	0,8960	0,9185	0,6803	0,6992	0,6602
9	1,4099	1,4142	1,0197	0,9037	1,0881	0,7261	0,7153	0,9597	0,9521	0,6752	0,7072	0,6819
10	1,4213	1,3760	0,9690	0,8819	1,0715	0,6857	0,7432	0,8485	0,9233	0,6905	0,6328	0,6787
11	1,4102	1,2757	0,8683	0,7846	1,0736	0,6978	0,6953	0,7768	0,8817	0,6550	0,6673	0,6695
12	1,4106	1,3882	1,1230	1,0019	1,0986	0,7265	0,7032	1,0832	1,0934	0,8033	0,7599	0,7937
13	1,3540	1,3517	1,0607	0,9241	0,9962	0,6797	0,6414	1,0364	0,9636	0,7495	0,7322	0,7384
14	1,2819	1,1866	0,8106	0,7054	0,9151	0,6107	0,6504	0,8375	0,8852	0,7513	0,7510	0,6045
15	1,2125	1,2123	0,8017	0,6923	0,8646	0,6118	0,6515	0,8142	0,8804	0,6223	0,6704	0,5874
16	1,2765	1,2108	0,8412	0,6954	0,9183	0,5880	0,5899	0,8753	0,8847	0,6551	0,6598	0,5807
17	1,2800	1,1412	0,8377	0,7021	0,9439	0,6127	0,6350	0,8179	0,8746	0,6614	0,6989	0,6040
18	1,2569	1,2945	0,9757	0,8414	0,8717	0,6771	0,6692	0,9646	0,8810	0,7316	0,7229	0,6944
19	1,1824	1,1118	0,7717	0,6659	0,8817	0,6061	0,6189	0,8150	0,8587	0,6574	0,7521	0,6355
20	1,3001	1,2249	0,8548	0,7297	0,9256	0,5856	0,6264	0,8579	0,8950	0,6978	0,7462	0,6266
21	1,3209	1,2599	0,8773	0,7291	1,0164	0,6106	0,6271	0,8830	0,8882	0,6568	0,7111	0,6634
22	1,0828	1,1412	0,7168	0,7207	0,5681	0,7551	0,7868	0,9274	0,8942	0,7971	0,8501	0,7166
23	1,2202	1,3207	0,9469	0,7946	0,8326	0,7672	0,7690	0,8422	0,7789	0,6720	0,6987	0,6895
24	1,0483	1,0851	0,7727	0,7085	0,6316	0,8826	0,8732	0,8647	0,8649	0,7854	0,8423	0,7134
25	0	0,3569	0,9635	0,9884	0,8379	1,3625	1,3140	1,1499	1,2120	1,2578	1,3329	1,1651
26	0,3569	0	0,8115	0,9111	0,8542	1,2166	1,2371	1,0873	1,2735	1,3750	1,4230	1,2195
27	0,9635	0,8115	0	0,5957	0,6526	0,8502	0,9267	0,8683	1,0451	1,0056	1,0574	0,8089
28	0,9884	0,9111	0,5957	0	0,6733	0,7481	0,8005	0,7618	0,8303	0,8134	0,9111	0,7227
29	0,8379	0,8542	0,6526	0,6733	0	0,9467	0,9764	0,9129	0,9422	0,9785	1,0274	0,8149
30	1,3625	1,2166	0,8502	0,7481	0,9467	0	0,6114	0,9040	0,9350	0,7399	0,7752	0,6625
31	1,3140	1,2371	0,9267	0,8005	0,9764	0,6114	0	0,8987	0,9352	0,7045	0,7656	0,6616
32	1,1499	1,0873	0,8683	0,7618	0,9129	0,9040	0,8987	0	0,8302	0,8034	0,8619	0,7705
33	1,2120	1,2735	1,0451	0,8303	0,9422	0,9350	0,9352	0,8302	0	0,8304	0,8579	0,7906
34	1,2578	1,3750	1,0056	0,8134	0,9785	0,7399	0,7045	0,8034	0,8304	0	0,5835	0,6361
35	1,3329	1,4230	1,0574	0,9111	1,0274	0,7752	0,7656	0,8619	0,8579	0,5835	0	0,6471
36	1,1651	1,2195	0,8089	0,7227	0,8149	0,6625	0,6616	0,7705	0,7906	0,6361	0,6471	0
37	1,1085	1,3009	0,8426	0,7742	0,7781	0,8861	0,8547	0,8055	0,7793	0,6724	0,6467	0,6347
38	0,8712	0,8977	0,7128	0,8753	0,6538	1,1309	1,1717	1,0508	1,1051	1,1740	1,2364	0,9993
39	1,2704	1,2303	0,8941	0,7501	0,9271	0,6080	0,6196	0,8871	0,9028	0,6739	0,6844	0,6157
40	1,2721	1,2702	0,9665	0,8203	0,8478	0,6371	0,6381	0,9762	0,9050	0,7829	0,7937	0,7280
41	0,7403	0,8444	0,7967	0,9416	0,6569	1,2250	1,2452	1,1218	1,1223	1,2543	1,3243	1,0840
42	1,0815	1,1735	0,6361	0,6895	0,5399	0,7409	0,7616	0,8222	0,8294	0,7110	0,8318	0,6613
43	0,9654	0,9943	0,6941	0,7389	0,5877	1,0410	1,0410	0,9712	0,9461	1,0093	1,1039	0,8764
44	0,3938	0,4573	0,9615	1,0027	0,8651	1,3129	1,3041	1,1099	1,1934	1,3326	1,4038	1,1948
45	0,5260	0,5623	0,8142	0,7899	0,7173	1,1619	1,1250	0,9632	0,9908	1,1582	1,2061	1,0891
46	0,6122	0,6924	0,9270	0,8204	0,8137	1,0412	1,0104	0,9114	0,9220	0,9689	1,0701	0,9051
47	0,7429	0,6402	0,9823	0,9644	1,0042	1,1847	1,2023	0,9999	1,0430	1,2570	1,3061	1,1539
48	0,8265	0,7662	0,9523	0,8154	0,9840	0,8391	0,8704	0,8941	0,9118	0,9117	0,9522	0,8397
49	0,3650	0,4014	1,0153	1,0772	0,8976	1,4197	1,3896	1,3374	1,2896	1,3819	1,4100	1,3273
50	0,8212	0,8828	0,7758	1,0427	0,6813	1,3504	1,3245	1,2986	1,1905	1,3088	1,3088	1,1323
51	1,0327	1,0665	0,8607	0,9706	0,7449	1,1693	1,1927	1,0673	1,1281	1,3029	1,3365	1,0773
52	0,9868	1,0101	0,8523	0,9156	0,8073	1,2292	1,2120	1,1685	1,1785	1,4325	1,4713	1,2456
53	0,9420	0,9605	0,6666	0,7416	0,5347	1,0459	1,0463	1,0481	1,0160	1,2458	1,2696	1,0585
54	0,8444	0,8484	0,7699	0,8264	0,6428	1,1432	1,1422	1,0956	1,0849	1,3500	1,3663	1,1742
55	0,9171	0,8855	0,8259	0,9128	0,6831	1,2069	1,2029	1,1565	1,1771	1,3978	1,4427	1,1853
56	0,8778	0,8686	0,7802	0,9002	0,6651	1,1548	1,1872	1,1370	1,1244	1,3410	1,3768	1,1462
57	0,8895	0,9308	0,8327	0,9353	0,7509	1,2219	1,2246	1,1899	1,1814	1,4077	1,4426	1,2338
58	0,8698	0,8963	0,8180	0,8663	0,6950	1,1575	1,1666	1,1248	1,1133	1,3658	1,4026	1,1947
59	0,8851	0,9069	0,8332	0,9004	0,7352	1,2264	1,2238	1,1861	1,1790	1,4049	1,4231	1,2347
60	1,0493	1,0850	1,1406	1,2576	0,9923	1,4621	1,4433	1,4274	1,4046	1,5532	1,5996	1,3466

Tabella A.14: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 3, colonne 37-48.

	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
1	1,0336	0,6293	1,0514	0,9834	0,6393	0,6516	0,6223	0,9716	0,7941	0,9098	1,0492	1,0778
2	0,8165	1,1475	0,5958	0,6577	1,2279	0,8148	1,0665	1,2803	1,1256	1,0407	1,1989	0,8874
3	0,8850	0,5597	1,0707	1,0161	0,5868	0,6846	0,6839	0,8601	0,7745	0,9423	0,9930	1,0871
4	0,7226	0,7318	0,8003	0,8371	0,7820	0,6107	0,6950	0,9239	0,7571	0,7992	0,9661	0,8653
5	0,7966	1,0515	0,6179	0,6851	1,1513	0,7559	0,9911	1,2203	1,0063	0,9386	1,1218	0,7924
6	0,8120	0,8343	0,9950	0,9348	0,7819	0,6257	0,7557	0,9499	0,8898	0,8822	1,0040	1,0377
7	0,7264	1,2421	0,6903	0,7870	1,3149	0,8704	1,1270	1,4755	1,2111	1,0749	1,2693	0,8965
8	0,7735	1,2574	0,6173	0,6904	1,2793	0,8430	1,1383	1,4349	1,2813	1,1539	1,2750	0,9816
9	0,8021	1,3743	0,6618	0,7162	1,4144	0,8601	1,2290	1,4944	1,3380	1,1686	1,3343	0,9858
10	0,7859	1,3390	0,7009	0,7524	1,4451	0,9258	1,2239	1,4965	1,2612	1,1052	1,2659	0,9360
11	0,7781	1,3027	0,6877	0,7708	1,4400	0,9211	1,1499	1,4543	1,2824	1,1696	1,2087	0,8968
12	0,9670	1,2624	0,6833	0,7438	1,3244	0,9178	1,1923	1,4022	1,2559	1,1715	1,3614	1,0437
13	0,8807	1,2019	0,6530	0,6605	1,2690	0,8330	1,0793	1,3522	1,1655	1,0596	1,2936	0,9447
14	0,7458	1,0814	0,6463	0,6984	1,2386	0,7358	1,0010	1,2692	1,0477	0,9274	1,1351	0,7879
15	0,6756	1,0424	0,6187	0,6938	1,1544	0,6847	0,9347	1,2410	1,0539	0,9350	1,1654	0,8010
16	0,7456	1,1481	0,5711	0,6581	1,2155	0,7149	1,0149	1,2643	1,1098	0,9790	1,1689	0,8358
17	0,7575	1,1513	0,6178	0,6699	1,2580	0,7513	1,0258	1,2762	1,1051	0,9911	1,1417	0,8063
18	0,7179	1,0611	0,6410	0,6862	1,1262	0,6949	0,9668	1,2334	1,0781	0,9792	1,2275	0,9040
19	0,7444	1,0013	0,5993	0,6580	1,1301	0,7123	0,9351	1,2112	1,0037	0,9235	1,1146	0,7652
20	0,8348	1,1412	0,6110	0,6564	1,2343	0,7410	0,9976	1,2867	1,0787	0,9628	1,1711	0,8173
21	0,8071	1,1036	0,6215	0,6537	1,2594	0,8053	1,0326	1,3342	1,1255	1,0269	1,1971	0,8243
22	0,6921	0,7874	0,7541	0,7200	0,7945	0,5045	0,6565	1,0952	0,8990	0,8149	1,1305	0,8672
23	0,6158	1,0894	0,7302	0,7595	1,1179	0,7310	0,9416	1,2273	1,0334	0,9425	1,1849	0,8532
24	0,6610	0,8363	0,8245	0,8410	0,8894	0,5849	0,7355	1,0355	0,8574	0,8088	1,0729	0,8813
25	1,1085	0,8712	1,2704	1,2721	0,7403	1,0815	0,9654	0,3938	0,5260	0,6122	0,7429	0,8265
26	1,3009	0,8977	1,2303	1,2702	0,8444	1,1735	0,9943	0,4573	0,5623	0,6924	0,6402	0,7662
27	0,8426	0,7128	0,8941	0,9665	0,7967	0,6361	0,6941	0,9615	0,8142	0,9270	0,9823	0,9523
28	0,7742	0,8753	0,7501	0,8203	0,9416	0,6895	0,7389	1,0027	0,7899	0,8204	0,9644	0,8154
29	0,7781	0,6538	0,9271	0,8478	0,6569	0,5399	0,5877	0,8651	0,7173	0,8137	1,0042	0,9840
30	0,8861	1,1309	0,6080	0,6371	1,2250	0,7409	1,0410	1,3129	1,1619	1,0412	1,1847	0,8391
31	0,8547	1,1717	0,6196	0,6381	1,2452	0,7616	1,0410	1,3041	1,1250	1,0104	1,2023	0,8704
32	0,8055	1,0508	0,8871	0,9762	1,1218	0,8222	0,9712	1,1099	0,9632	0,9114	0,9999	0,8941
33	0,7793	1,1051	0,9028	0,9050	1,1223	0,8294	0,9461	1,1934	0,9908	0,9220	1,0430	0,9118
34	0,6724	1,1740	0,6739	0,7829	1,2543	0,7110	1,0093	1,3326	1,1582	0,9689	1,2570	0,9117
35	0,6467	1,2364	0,6844	0,7937	1,3243	0,8318	1,1039	1,4038	1,2061	1,0701	1,3061	0,9522
36	0,6347	0,9993	0,6157	0,7280	1,0840	0,6613	0,8764	1,1948	1,0891	0,9051	1,1539	0,8397
37	0	0,9887	0,7972	0,8603	1,0662	0,6069	0,8605	1,1722	1,0239	0,8909	1,1574	0,8993
38	0,9887	0	1,0537	1,0616	0,5143	0,7287	0,6551	0,8690	0,8542	0,9889	1,0119	1,1383
39	0,7972	1,0537	0	0,6530	1,1930	0,7632	1,0294	1,2699	1,0850	0,9940	1,1846	0,8543
40	0,8603	1,0616	0,6530	0	1,0976	0,7379	0,9569	1,2587	1,0716	0,9747	1,1808	0,8604
41	1,0662	0,5143	1,1930	1,0976	0	0,6887	0,7214	0,7465	0,9261	1,0005	1,0252	1,2413
42	0,6069	0,7287	0,7632	0,7379	0,6887	0	0,5569	1,0905	0,9735	0,8510	1,1585	0,9211
43	0,8605	0,6551	1,0294	0,9569	0,7214	0,5569	0	0,9617	0,8350	0,8631	0,9646	1,0237
44	1,1722	0,8690	1,2699	1,2587	0,7465	1,0905	0,9617	0	0,5399	0,5661	0,6659	0,8639
45	1,0239	0,8542	1,0850	1,0716	0,9261	0,9735	0,8350	0,5399	0	0,4532	0,6303	0,6181
46	0,8909	0,9889	0,9940	0,9747	1,0005	0,8510	0,8631	0,5661	0,4532	0	0,6225	0,5659
47	1,1574	1,0119	1,1846	1,1808	1,0252	1,1585	0,9646	0,6659	0,6303	0,6225	0	0,7612
48	0,8993	1,1383	0,8543	0,8604	1,2413	0,9211	1,0237	0,8639	0,6181	0,5659	0,7612	0
49	1,2264	0,8482	1,3273	1,3409	0,7981	1,1779	1,0423	0,4830	0,5175	0,7533	0,7676	0,9134
50	1,0593	0,5588	1,2179	1,2612	0,5736	0,7762	0,8453	0,9390	0,9937	1,1650	1,1803	1,3325
51	1,1202	0,7338	1,1680	1,0854	0,7947	0,7508	0,8228	0,9476	0,9927	0,9915	1,0323	1,2329
52	1,2738	0,8286	1,1976	1,0946	0,8581	0,9273	0,8014	1,0330	0,8880	1,0107	0,9225	1,1943
53	1,0520	0,6472	1,0359	0,9270	0,7219	0,6848	0,6352	0,9530	0,7440	0,8593	0,9672	1,0474
54	1,1766	0,6632	1,1247	1,0135	0,7217	0,8391	0,7148	0,9034	0,7738	0,9364	0,9116	1,0965
55	1,1999	0,7054	1,2028	1,1020	0,7189	0,7947	0,7620	0,8359	0,8932	1,0384	0,9622	1,2270
56	1,1618	0,6136	1,1587	1,0713	0,6249	0,7860	0,7189	0,8619	0,8719	0,9585	0,9577	1,1771
57	1,2524	0,6521	1,1876	1,0865	0,7355	0,8856	0,7997	0,9464	0,8800	1,0278	0,9281	1,1890
58	1,1949	0,6340	1,1349	1,0298	0,7557	0,8587	0,7238	0,9090	0,8068	0,9542	0,8901	1,1127
59	1,2312	0,7012	1,1873	1,0973	0,7624	0,8719	0,8057	0,9434	0,8313	1,0095	0,9246	1,1863
60	1,4189	0,7786	1,3959	1,3404	0,7597	0,9396	1,1052	1,0070	1,2296	1,2672	1,1552	1,4435

Tabella A.15: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 3, colonne 49-60.

	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
1	0,9855	0,6408	0,7469	0,7659	0,5522	0,6314	0,6640	0,6542	0,6496	0,6667	0,6740	0,9188
2	1,3143	1,2955	1,2067	1,2415	1,0899	1,1526	1,2279	1,2006	1,2443	1,1921	1,2271	1,4352
3	0,8353	0,6029	0,8148	0,7738	0,6206	0,6544	0,6841	0,6655	0,7141	0,6790	0,7089	0,8923
4	0,9494	0,7983	0,8619	0,8555	0,6489	0,7411	0,8052	0,7836	0,8146	0,7852	0,8151	1,1111
5	1,2814	1,1991	1,1818	1,1628	0,9904	1,0806	1,1774	1,1428	1,1783	1,0963	1,1687	1,4043
6	1,1017	0,9566	0,8191	0,9144	0,7509	0,8423	0,8493	0,8250	0,8870	0,8571	0,9080	1,1249
7	1,3674	1,3801	1,4633	1,5917	1,4254	1,4938	1,5557	1,5225	1,5556	1,5085	1,5510	1,7006
8	1,4842	1,3575	1,2991	1,3730	1,2299	1,3041	1,3507	1,3227	1,3468	1,3034	1,3504	1,4754
9	1,4898	1,4424	1,4529	1,5351	1,3849	1,4745	1,5150	1,4878	1,5225	1,4839	1,5242	1,6371
10	1,4974	1,5297	1,4306	1,5464	1,3869	1,4522	1,5468	1,4867	1,5422	1,4771	1,5386	1,7152
11	1,4813	1,4410	1,4277	1,5836	1,4174	1,4562	1,5390	1,4915	1,5127	1,4736	1,5285	1,6917
12	1,4519	1,3725	1,2888	1,3242	1,1744	1,2473	1,3118	1,2884	1,3269	1,2819	1,3119	1,4866
13	1,4068	1,3577	1,2419	1,2515	1,1020	1,1734	1,2500	1,2205	1,2417	1,1838	1,2376	1,4460
14	1,3152	1,2512	1,1856	1,2043	1,0059	1,1141	1,2350	1,1729	1,2100	1,1160	1,2099	1,5182
15	1,3100	1,2056	1,1527	1,1908	0,9862	1,1070	1,1938	1,1416	1,1718	1,1217	1,1791	1,4391
16	1,3648	1,2884	1,1739	1,2305	1,0638	1,1606	1,2075	1,1752	1,2301	1,1678	1,2323	1,4139
17	1,3194	1,2609	1,2508	1,2691	1,1104	1,1793	1,2565	1,2398	1,2646	1,1982	1,2633	1,5071
18	1,3181	1,1281	1,1023	1,1683	0,9658	1,0720	1,0838	1,1118	1,1563	1,1152	1,1559	1,3034
19	1,2437	1,1668	1,1732	1,1635	0,9974	1,0776	1,1736	1,1392	1,1700	1,1019	1,1580	1,4147
20	1,3719	1,3180	1,2129	1,2051	1,0321	1,1130	1,2188	1,1914	1,1961	1,1297	1,1934	1,4609
21	1,3796	1,3064	1,2656	1,2779	1,1148	1,1847	1,2883	1,2354	1,2643	1,1972	1,2593	1,4939
22	1,1721	0,9220	0,8121	0,8910	0,6442	0,8136	0,8512	0,7963	0,8672	0,8245	0,8494	1,0740
23	1,3092	1,1784	1,1240	1,2335	1,0042	1,1256	1,1783	1,1372	1,1941	1,1252	1,1807	1,3850
24	1,1174	0,9514	0,9108	0,9789	0,7629	0,8741	0,9069	0,8667	0,9813	0,9309	0,9462	1,2036
25	0,3650	0,8212	1,0327	0,9868	0,9420	0,8444	0,9171	0,8778	0,8895	0,8698	0,8851	1,0493
26	0,4014	0,8828	1,0665	1,0101	0,9605	0,8484	0,8855	0,8686	0,9308	0,8963	0,9069	1,0850
27	1,0153	0,7758	0,8607	0,8523	0,6666	0,7699	0,8259	0,7802	0,8327	0,8180	0,8332	1,1406
28	1,0772	1,0427	0,9706	0,9156	0,7416	0,8264	0,9128	0,9002	0,9353	0,8663	0,9004	1,2576
29	0,8976	0,6813	0,7449	0,8073	0,5347	0,6428	0,6831	0,6651	0,7509	0,6950	0,7352	0,9923
30	1,4197	1,3504	1,1693	1,2292	1,0459	1,1432	1,2069	1,1548	1,2219	1,1575	1,2264	1,4621
31	1,3896	1,3245	1,1927	1,2120	1,0463	1,1422	1,2029	1,1872	1,2246	1,1666	1,2238	1,4433
32	1,3374	1,2986	1,0673	1,1685	1,0481	1,0956	1,1565	1,1370	1,1899	1,1248	1,1861	1,4274
33	1,2896	1,1905	1,1281	1,1785	1,0160	1,0849	1,1771	1,1244	1,1814	1,1133	1,1790	1,4046
34	1,3819	1,3088	1,3029	1,4325	1,2458	1,3500	1,3978	1,3410	1,4077	1,3658	1,4049	1,5532
35	1,4100	1,3088	1,3365	1,4713	1,2696	1,3663	1,4427	1,3768	1,4426	1,4026	1,4231	1,5996
36	1,3273	1,1323	1,0773	1,2456	1,0585	1,1742	1,1853	1,1462	1,2338	1,1947	1,2347	1,3466
37	1,2264	1,0593	1,1202	1,2738	1,0520	1,1766	1,1999	1,1618	1,2524	1,1949	1,2312	1,4189
38	0,8482	0,5588	0,7338	0,8286	0,6472	0,6632	0,7054	0,6136	0,6521	0,6340	0,7012	0,7786
39	1,3273	1,2179	1,1680	1,1976	1,0359	1,1247	1,2028	1,1587	1,1876	1,1349	1,1873	1,3959
40	1,3409	1,2612	1,0854	1,0946	0,9270	1,0135	1,1020	1,0713	1,0865	1,0298	1,0973	1,3404
41	0,7981	0,5736	0,7947	0,8581	0,7219	0,7217	0,7189	0,6249	0,7355	0,7557	0,7624	0,7597
42	1,1779	0,7762	0,7508	0,9273	0,6848	0,8391	0,7947	0,7860	0,8856	0,8587	0,8719	0,9396
43	1,0423	0,8453	0,8228	0,8014	0,6352	0,7148	0,7620	0,7189	0,7997	0,7238	0,8057	1,1052
44	0,4830	0,9390	0,9476	1,0330	0,9530	0,9034	0,8359	0,8619	0,9464	0,9090	0,9434	1,0070
45	0,5175	0,9937	0,9927	0,8880	0,7440	0,7738	0,8932	0,8719	0,8800	0,8068	0,8313	1,2296
46	0,7533	1,1650	0,9915	1,0107	0,8593	0,9364	1,0384	0,9585	1,0278	0,9542	1,0095	1,2672
47	0,7676	1,1803	1,0323	0,9225	0,9672	0,9116	0,9622	0,9577	0,9281	0,8901	0,9246	1,1552
48	0,9134	1,3325	1,2329	1,1943	1,0474	1,0965	1,2270	1,1771	1,1890	1,1127	1,1863	1,4435
49	0	0,5055	1,1945	1,0804	0,9913	0,8622	0,9461	0,9774	0,9279	0,8903	0,9242	0,9964
50	0,5055	0	1,0209	0,9518	0,7946	0,7712	0,7752	0,7392	0,6850	0,7928	0,7555	0,5983
51	1,1945	1,0209	0	0,9392	0,7970	0,8604	0,8127	0,7130	0,9162	0,9141	0,9053	1,0340
52	1,0804	0,9518	0,9392	0	0,7007	0,7001	0,8692	0,7379	0,6369	0,6783	0,6409	1,2066
53	0,9913	0,7946	0,7970	0,7007	0	0,6014	0,6552	0,6521	0,6521	0,6332	0,6716	1,1250
54	0,8622	0,7712	0,8604	0,7001	0,6014	0	0,7086	0,6736	0,6506	0,5608	0,5984	1,0366
55	0,9461	0,7752	0,8127	0,8692	0,6552	0,7086	0	0,6929	0,7673	0,7341	0,7130	0,9457
56	0,9774	0,7392	0,7130	0,7379	0,6521	0,6736	0,6929	0	0,5841	0,6620	0,5037	0,9661
57	0,9279	0,6850	0,9162	0,6369	0,6521	0,6506	0,7673	0,5841	0	0,5465	0,5091	1,0499
58	0,8903	0,7928	0,9141	0,6783	0,6332	0,5608	0,7341	0,6620	0,5465	0	0,6200	1,0073
59	0,9242	0,7555	0,9053	0,6409	0,6716	0,5984	0,7130	0,5037	0,5091	0,6200	0	1,0548
60	0,9964	0,5983	1,0340	1,2066	1,1250	1,0366	0,9457	0,9661	1,0499	1,0073	1,0548	0

Tabella A.16: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 4, colonne 1-12.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	1,0355	0,5422	0,5416	0,9420	0,6748	1,3396	1,1717	1,2981	1,3046	1,3380	1,1208
2	1,0355	0	1,0385	0,7797	0,6103	0,9576	0,6454	0,5765	0,5969	0,6334	0,6685	0,6246
3	0,5422	1,0385	0	0,6442	0,9244	0,7365	1,0959	1,0965	1,1922	1,1831	1,1076	1,1520
4	0,5416	0,7797	0,6442	0	0,6773	0,6684	0,7829	0,8087	0,8793	0,8525	0,7459	0,9421
5	0,9420	0,6103	0,9244	0,6773	0	0,9143	0,6792	0,6314	0,6866	0,6848	0,6453	0,7388
6	0,6748	0,9576	0,7365	0,6684	0,9143	0	0,9628	0,9433	0,9839	0,9637	0,9612	1,0920
7	1,3396	0,6454	1,0959	0,7829	0,6792	0,9628	0	0,5637	0,5649	0,5509	0,5197	0,7499
8	1,1717	0,5765	1,0965	0,8087	0,6314	0,9433	0,5637	0	0,4960	0,5411	0,5609	0,6343
9	1,2981	0,5969	1,1922	0,8793	0,6866	0,9839	0,5649	0,4960	0	0,5753	0,6050	0,6542
10	1,3046	0,6334	1,1831	0,8525	0,6848	0,9637	0,5509	0,5411	0,5753	0	0,5542	0,7494
11	1,3380	0,6685	1,1076	0,7459	0,6453	0,9612	0,5197	0,5609	0,6050	0,5542	0	0,7734
12	1,1208	0,6246	1,1520	0,9421	0,7388	1,0920	0,7499	0,6343	0,6542	0,7494	0,7734	0
13	1,0641	0,5978	1,0848	0,8802	0,6496	1,0091	0,6848	0,5806	0,6271	0,7068	0,7054	0,6120
14	0,9365	0,6369	1,0214	0,6818	0,5804	0,9130	0,6587	0,6132	0,7190	0,6474	0,6293	0,7636
15	0,9485	0,5882	0,9535	0,6486	0,5838	0,8756	0,6132	0,5763	0,6226	0,5982	0,5888	0,7176
16	1,0091	0,5731	1,0161	0,7124	0,5731	0,8982	0,5755	0,5484	0,5897	0,5656	0,5844	0,6852
17	1,0367	0,5849	1,0098	0,7120	0,5530	0,9476	0,5960	0,5813	0,6369	0,5779	0,5994	0,7210
18	0,9432	0,6373	0,9628	0,7714	0,6427	0,9021	0,7123	0,6591	0,6689	0,7255	0,7459	0,6754
19	0,9583	0,5844	0,9212	0,6549	0,5195	0,9140	0,6483	0,6270	0,6830	0,6711	0,6291	0,7144
20	0,9811	0,5946	1,0213	0,7142	0,5593	0,9594	0,6257	0,6235	0,6706	0,6342	0,6033	0,7167
21	1,0796	0,5824	1,0139	0,7769	0,5624	1,0204	0,6050	0,6107	0,6578	0,6476	0,6325	0,6550
22	0,6483	0,7483	0,6776	0,6360	0,6889	0,6797	0,8413	0,7451	0,8101	0,8646	0,9341	0,8410
23	0,9710	0,7087	0,9100	0,7441	0,6812	0,8235	0,6413	0,6762	0,7065	0,6965	0,7144	0,8312
24	0,7026	0,8039	0,7248	0,6206	0,7171	0,7011	0,7621	0,7840	0,8286	0,8275	0,7972	0,9241
25	0,9044	1,2335	0,7860	0,8863	1,1687	0,9606	1,2498	1,3339	1,3564	1,3588	1,3528	1,3481
26	0,9014	1,1797	0,8198	0,8586	1,1139	0,9611	1,2781	1,3168	1,3575	1,3172	1,2258	1,3251
27	0,5093	0,8997	0,6745	0,5137	0,7768	0,7308	0,8617	0,8585	0,9608	0,9125	0,8182	1,0542
28	0,7169	0,7598	0,7471	0,5406	0,6340	0,7868	0,7492	0,8118	0,8493	0,8279	0,7403	0,9414
29	0,4749	0,8929	0,5386	0,5222	0,8422	0,6459	0,9644	0,9342	1,0271	1,0064	1,0036	1,0287
30	1,0163	0,5831	1,0057	0,7393	0,5811	0,9557	0,6996	0,6085	0,6837	0,6447	0,6561	0,6825
31	1,0103	0,5878	1,0698	0,7787	0,6002	0,9635	0,7154	0,6108	0,6712	0,6960	0,6528	0,6606
32	1,0297	0,8728	0,9882	0,7233	0,8146	0,8666	0,7692	0,8452	0,9050	0,8000	0,7323	1,0168
33	1,0031	0,9183	0,9524	0,8435	0,8238	0,9048	0,7987	0,8650	0,8988	0,8689	0,8302	1,0266
34	1,1502	0,6485	1,0399	0,7609	0,6778	0,9712	0,6124	0,6396	0,6364	0,6500	0,6159	0,7538
35	1,1835	0,6552	1,0987	0,8221	0,7462	0,9891	0,6062	0,6572	0,6659	0,5948	0,6281	0,7125
36	0,9892	0,6204	0,9549	0,6642	0,6350	0,8420	0,6223	0,6228	0,6441	0,6384	0,6316	0,7460
37	0,9717	0,7689	0,8279	0,6792	0,7491	0,7659	0,6858	0,7311	0,7595	0,7419	0,7345	0,9075
38	0,5975	1,0805	0,5280	0,6911	0,9902	0,7905	1,1735	1,1881	1,3039	1,2648	1,2313	1,1870
39	0,9871	0,5589	1,0080	0,7538	0,5809	0,9373	0,6487	0,5802	0,6232	0,6582	0,6457	0,6414
40	0,9256	0,6163	0,9531	0,7867	0,6423	0,8794	0,7395	0,6503	0,6744	0,7076	0,7235	0,6976
41	0,6073	1,1529	0,5559	0,7359	1,0809	0,7398	1,2387	1,2089	1,3335	1,3619	1,3602	1,2447
42	0,6121	0,7665	0,6447	0,5760	0,7129	0,5896	0,8186	0,7947	0,8097	0,8710	0,8703	0,8625
43	0,5877	1,0025	0,6432	0,6541	0,9324	0,7137	1,0566	1,0724	1,1570	1,1486	1,0774	1,1179
44	0,9389	1,2254	0,8311	0,8906	1,1656	0,9131	1,4119	1,3798	1,4363	1,4308	1,3945	1,3384
45	0,7710	1,0809	0,7491	0,7314	0,9641	0,8525	1,1575	1,2309	1,2800	1,2040	1,2238	1,1988
46	0,8782	0,9977	0,9039	0,7687	0,8991	0,8529	1,0343	1,1148	1,1305	1,0668	1,1239	1,1190
47	1,0165	1,1463	0,9532	0,9279	1,0683	0,9684	1,2210	1,2296	1,2878	1,2155	1,1594	1,2975
48	1,0281	0,8504	1,0403	0,8284	0,7597	0,9879	0,8611	0,9448	0,9521	0,8976	0,8653	0,9988
49	0,9549	1,2585	0,8051	0,9169	1,2273	1,0558	1,3132	1,4244	1,4308	1,4297	1,4133	1,3878
50	0,6087	1,2219	0,5688	0,7556	1,1275	0,9063	1,3071	1,2855	1,3624	1,4410	1,3549	1,2896
51	0,7075	1,1334	0,7714	0,8131	1,1130	0,7770	1,3789	1,2284	1,3734	1,3478	1,3509	1,2138
52	0,7222	1,1669	0,7273	0,8021	1,0964	0,8650	1,4911	1,2935	1,4483	1,4545	1,4852	1,2461
53	0,5228	1,0228	0,5865	0,6105	0,9314	0,7108	1,3433	1,1632	1,3110	1,3079	1,3329	1,1046
54	0,5948	1,0812	0,6175	0,6944	1,0140	0,7932	1,4073	1,2321	1,3939	1,3729	1,3768	1,1696
55	0,6302	1,1544	0,6461	0,7579	1,1081	0,8032	1,4647	1,2773	1,4327	1,4599	1,4557	1,2344
56	0,6168	1,1293	0,6276	0,7366	1,0747	0,7809	1,4346	1,2496	1,4057	1,4027	1,4078	1,2114
57	0,6145	1,1682	0,6726	0,7655	1,1095	0,8404	1,4657	1,2732	1,4402	1,4549	1,4277	1,2480
58	0,6278	1,1193	0,6383	0,7374	1,0274	0,8109	1,4227	1,2316	1,4028	1,3950	1,3930	1,2031
59	0,6368	1,1513	0,6683	0,7662	1,0957	0,8588	1,4610	1,2775	1,4392	1,4523	1,4437	1,2325
60	0,8732	1,3535	0,8394	1,0455	1,3214	1,0620	1,5993	1,3924	1,5451	1,6144	1,5858	1,4002

Tabella A.17: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 4, colonne 13-24.

	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	1,0641	0,9365	0,9485	1,0091	1,0367	0,9432	0,9583	0,9811	1,0796	0,6483	0,9710	0,7026
2	0,5978	0,6369	0,5882	0,5731	0,5849	0,6373	0,5844	0,5946	0,5824	0,7483	0,7087	0,8039
3	1,0848	1,0214	0,9535	1,0161	1,0098	0,9628	0,9212	1,0213	1,0139	0,6776	0,9100	0,7248
4	0,8802	0,6818	0,6486	0,7124	0,7120	0,7714	0,6549	0,7142	0,7769	0,6360	0,7441	0,6206
5	0,6496	0,5804	0,5838	0,5731	0,5530	0,6427	0,5195	0,5593	0,5624	0,6889	0,6812	0,7171
6	1,0091	0,9130	0,8756	0,8982	0,9476	0,9021	0,9140	0,9594	1,0204	0,6797	0,8235	0,7011
7	0,6848	0,6587	0,6132	0,5755	0,5960	0,7123	0,6483	0,6257	0,6050	0,8413	0,6413	0,7621
8	0,5806	0,6132	0,5763	0,5484	0,5813	0,6591	0,6270	0,6235	0,6107	0,7451	0,6762	0,7840
9	0,6271	0,7190	0,6226	0,5897	0,6369	0,6689	0,6830	0,6706	0,6578	0,8101	0,7065	0,8286
10	0,7068	0,6474	0,5982	0,5656	0,5779	0,7255	0,6711	0,6342	0,6476	0,8646	0,6965	0,8275
11	0,7054	0,6293	0,5888	0,5844	0,5994	0,7459	0,6291	0,6033	0,6325	0,9341	0,7144	0,7972
12	0,6120	0,7636	0,7176	0,6852	0,7210	0,6754	0,7144	0,7167	0,6550	0,8410	0,8312	0,9241
13	0	0,6971	0,6639	0,6140	0,6322	0,6106	0,6489	0,6380	0,6051	0,7650	0,7276	0,8578
14	0,6971	0	0,5476	0,5382	0,5237	0,6641	0,5571	0,5577	0,5940	0,6749	0,6983	0,7198
15	0,6639	0,5476	0	0,5397	0,5287	0,6171	0,5695	0,5697	0,5755	0,6764	0,6407	0,6987
16	0,6140	0,5382	0,5397	0	0,5014	0,5870	0,5453	0,5436	0,5537	0,7071	0,6460	0,7310
17	0,6322	0,5237	0,5287	0,5014	0	0,6191	0,5494	0,5576	0,5613	0,7588	0,6833	0,7527
18	0,6106	0,6641	0,6171	0,5870	0,6191	0	0,6268	0,6372	0,6456	0,6426	0,6115	0,6831
19	0,6489	0,5571	0,5695	0,5453	0,5494	0,6268	0	0,5538	0,5306	0,6842	0,6860	0,7244
20	0,6380	0,5577	0,5697	0,5436	0,5576	0,6372	0,5538	0	0,5583	0,6933	0,6531	0,7653
21	0,6051	0,5940	0,5755	0,5537	0,5613	0,6456	0,5306	0,5583	0	0,7638	0,6821	0,8172
22	0,7650	0,6749	0,6764	0,7071	0,7588	0,6426	0,6842	0,6933	0,7638	0	0,6515	0,5923
23	0,7276	0,6983	0,6407	0,6460	0,6833	0,6115	0,6860	0,6531	0,6821	0,6515	0	0,6604
24	0,8578	0,7198	0,6987	0,7310	0,7527	0,6831	0,7244	0,7653	0,8172	0,5923	0,6604	0
25	1,2931	1,2271	1,1639	1,2259	1,2234	1,2106	1,1354	1,2427	1,2613	1,0469	1,1631	1,0081
26	1,2886	1,1385	1,1618	1,1660	1,0954	1,2441	1,0622	1,1670	1,1972	1,1016	1,2593	1,0413
27	0,9988	0,7600	0,7567	0,7965	0,7905	0,9196	0,7272	0,8028	0,8271	0,6769	0,8882	0,7289
28	0,8693	0,6628	0,6519	0,6540	0,6612	0,7932	0,6268	0,6854	0,6862	0,6787	0,7476	0,6650
29	0,9366	0,8564	0,8130	0,8651	0,8873	0,8166	0,8286	0,8684	0,9543	0,5365	0,7817	0,5936
30	0,6381	0,5738	0,5762	0,5520	0,5765	0,6383	0,5701	0,5505	0,5751	0,7100	0,7221	0,8312
31	0,6035	0,6126	0,6123	0,5537	0,5970	0,6294	0,5797	0,5877	0,5884	0,7391	0,7221	0,8195
32	0,9742	0,7890	0,7676	0,8244	0,7694	0,9083	0,7666	0,8065	0,8314	0,8733	0,7915	0,8134
33	0,9044	0,8340	0,8288	0,8305	0,8224	0,8288	0,8078	0,8406	0,8361	0,8428	0,7309	0,8097
34	0,7040	0,7062	0,5866	0,6168	0,6230	0,6907	0,6169	0,6572	0,6180	0,7491	0,6316	0,7402
35	0,6858	0,7054	0,6291	0,6228	0,6580	0,6794	0,7049	0,7028	0,6684	0,8003	0,6557	0,7921
36	0,6950	0,5701	0,5548	0,5477	0,5698	0,6547	0,5965	0,5901	0,6258	0,6762	0,6481	0,6731
37	0,8295	0,7015	0,6367	0,7033	0,7139	0,6771	0,7005	0,7860	0,7609	0,6518	0,5799	0,6213
38	1,1315	1,0155	0,9830	1,0790	1,0871	0,9991	0,9404	1,0743	1,0403	0,7437	1,0229	0,7869
39	0,6133	0,6070	0,5822	0,5362	0,5805	0,6032	0,5624	0,5734	0,5838	0,7101	0,6863	0,7758
40	0,6192	0,6561	0,6498	0,6172	0,6275	0,6442	0,6164	0,6141	0,6126	0,6765	0,7124	0,7879
41	1,1932	1,1597	1,0840	1,1430	1,1843	1,0563	1,0619	1,1563	1,1819	0,7461	1,0494	0,8392
42	0,7851	0,6940	0,6462	0,6767	0,7103	0,6552	0,6719	0,6982	0,7593	0,4745	0,6869	0,5504
43	1,0150	0,9430	0,8780	0,9554	0,9649	0,9108	0,8779	0,9398	0,9716	0,6190	0,8852	0,6950
44	1,2889	1,2154	1,1885	1,2121	1,2188	1,1839	1,1598	1,2255	1,2708	1,0578	1,1727	0,9960
45	1,1119	1,0007	1,0107	1,0671	1,0546	1,0354	0,9626	1,0298	1,0732	0,8660	0,9882	0,8220
46	1,0147	0,8895	0,9000	0,9402	0,9493	0,9424	0,8846	0,9202	0,9821	0,7893	0,9058	0,7767
47	1,2352	1,0849	1,1167	1,1196	1,0931	1,1750	1,0628	1,1167	1,1357	1,0907	1,1304	1,0255
48	0,9049	0,7599	0,7697	0,8044	0,7753	0,8705	0,7352	0,7835	0,7914	0,8335	0,8156	0,8465
49	1,3424	1,2597	1,2575	1,3094	1,2612	1,2696	1,1939	1,3107	1,3191	1,1303	1,2503	1,0672
50	1,2788	1,1779	1,1375	1,2177	1,1902	1,0644	1,0993	1,2411	1,2312	0,8717	1,1109	0,8989
51	1,1686	1,1145	1,0845	1,1077	1,1801	1,0377	1,0983	1,1381	1,1870	0,7689	1,0592	0,8612
52	1,1782	1,1353	1,1175	1,1590	1,1938	1,1018	1,0938	1,1358	1,2035	0,8411	1,1590	0,9208
53	1,0378	0,9447	0,9261	1,0013	1,0457	0,9092	0,9339	0,9675	1,0423	0,6090	0,9451	0,7203
54	1,1014	1,0434	1,0404	1,0920	1,1089	1,0003	1,0095	1,0428	1,1057	0,7658	1,0558	0,8213
55	1,1759	1,1582	1,1197	1,1368	1,1800	1,0212	1,0983	1,1441	1,2035	0,8033	1,1085	0,8552
56	1,1451	1,1009	1,0711	1,1063	1,1631	1,0443	1,0669	1,1155	1,1503	0,7521	1,0699	0,8140
57	1,1670	1,1349	1,1002	1,1574	1,1866	1,0902	1,0926	1,1237	1,1798	0,8190	1,1230	0,9269
58	1,1108	1,0448	1,0505	1,0967	1,1260	1,0430	1,0287	1,0590	1,1189	0,7774	1,0576	0,8759
59	1,1631	1,1361	1,1072	1,1597	1,1870	1,0854	1,0816	1,1195	1,1759	0,8033	1,1088	0,8897
60	1,3599	1,4216	1,3511	1,3307	1,4144	1,2291	1,3258	1,3738	1,3949	1,0156	1,3023	1,1305

Tabella A.18: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 4, colonne 25-36.

	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
1	0,9044	0,9014	0,5093	0,7169	0,4749	1,0163	1,0103	1,0297	1,0031	1,1502	1,1835	0,9892
2	1,2335	1,1797	0,8997	0,7598	0,8929	0,5831	0,5878	0,8728	0,9183	0,6485	0,6552	0,6204
3	0,7860	0,8198	0,6745	0,7471	0,5386	1,0057	1,0698	0,9882	0,9524	1,0399	1,0987	0,9549
4	0,8863	0,8586	0,5137	0,5406	0,5222	0,7393	0,7787	0,7233	0,8435	0,7609	0,8221	0,6642
5	1,1687	1,1139	0,7768	0,6340	0,8422	0,5811	0,6002	0,8146	0,8238	0,6778	0,7462	0,6350
6	0,9606	0,9611	0,7308	0,7868	0,6459	0,9557	0,9635	0,8666	0,9048	0,9712	0,9891	0,8420
7	1,2498	1,2781	0,8617	0,7492	0,9644	0,6996	0,7154	0,7692	0,7987	0,6124	0,6062	0,6223
8	1,3339	1,3168	0,8585	0,8118	0,9342	0,6085	0,6108	0,8452	0,8650	0,6396	0,6572	0,6228
9	1,3564	1,3575	0,9608	0,8493	1,0271	0,6837	0,6712	0,9050	0,8988	0,6364	0,6659	0,6441
10	1,3588	1,3172	0,9125	0,8279	1,0064	0,6447	0,6960	0,8000	0,8689	0,6500	0,5948	0,6384
11	1,3528	1,2258	0,8182	0,7403	1,0036	0,6561	0,6528	0,7323	0,8302	0,6159	0,6281	0,6316
12	1,3481	1,3251	1,0542	0,9414	1,0287	0,6825	0,6606	1,0168	1,0266	0,7538	0,7125	0,7460
13	1,2931	1,2886	0,9988	0,8693	0,9366	0,6381	0,6035	0,9742	0,9044	0,7040	0,6858	0,6950
14	1,2271	1,1385	0,7600	0,6628	0,8564	0,5738	0,6126	0,7890	0,8340	0,7062	0,7054	0,5701
15	1,1639	1,1618	0,7567	0,6519	0,8130	0,5762	0,6123	0,7676	0,8288	0,5866	0,6291	0,5548
16	1,2259	1,1660	0,7965	0,6540	0,8651	0,5520	0,5537	0,8244	0,8305	0,6168	0,6228	0,5477
17	1,2234	1,0954	0,7905	0,6612	0,8873	0,5765	0,5970	0,7694	0,8224	0,6230	0,6580	0,5698
18	1,2106	1,2441	0,9196	0,7932	0,8166	0,6383	0,6294	0,9083	0,8288	0,6907	0,6794	0,6547
19	1,1354	1,0622	0,7272	0,6268	0,8286	0,5701	0,5797	0,7666	0,8078	0,6169	0,7049	0,5965
20	1,2427	1,1670	0,8028	0,6854	0,8684	0,5505	0,5877	0,8065	0,8406	0,6572	0,7028	0,5901
21	1,2613	1,1972	0,8271	0,6862	0,9543	0,5751	0,5884	0,8314	0,8361	0,6180	0,6684	0,6258
22	1,0469	1,1016	0,6769	0,6787	0,5365	0,7100	0,7391	0,8733	0,8428	0,7491	0,8003	0,6762
23	1,1631	1,2593	0,8882	0,7476	0,7817	0,7221	0,7221	0,7915	0,7309	0,6316	0,6557	0,6481
24	1,0081	1,0413	0,7289	0,6650	0,5936	0,8312	0,8195	0,8134	0,8097	0,7402	0,7921	0,6731
25	0	0,3372	0,9325	0,9483	0,8149	1,3065	1,2545	1,0938	1,1550	1,2099	1,2796	1,1306
26	0,3372	0	0,7856	0,8735	0,8234	1,1660	1,1796	1,0358	1,1983	1,3191	1,3585	1,1745
27	0,9325	0,7856	0	0,5643	0,6163	0,8030	0,8712	0,8158	0,9829	0,9476	0,9926	0,7637
28	0,9483	0,8735	0,5643	0	0,6359	0,7040	0,7531	0,7180	0,7818	0,7650	0,8558	0,6797
29	0,8149	0,8234	0,6163	0,6359	0	0,8875	0,9147	0,8584	0,8836	0,9220	0,9659	0,7682
30	1,3065	1,1660	0,8030	0,7040	0,8875	0	0,5757	0,8507	0,8783	0,6959	0,7278	0,6249
31	1,2545	1,1796	0,8712	0,7531	0,9147	0,5757	0	0,8446	0,8803	0,6630	0,7194	0,6216
32	1,0938	1,0358	0,8158	0,7180	0,8584	0,8507	0,8446	0	0,7786	0,7575	0,8131	0,7261
33	1,1550	1,1983	0,9829	0,7818	0,8836	0,8783	0,8803	0,7786	0	0,7811	0,8065	0,7470
34	1,2099	1,3191	0,9476	0,7650	0,9220	0,6959	0,6630	0,7575	0,7811	0	0,5501	0,5993
35	1,2796	1,3585	0,9926	0,8558	0,9659	0,7278	0,7194	0,8131	0,8065	0,5501	0	0,6088
36	1,1306	1,1745	0,7637	0,6797	0,7682	0,6249	0,6216	0,7261	0,7470	0,5993	0,6088	0
37	1,0705	1,2486	0,7935	0,7240	0,7305	0,8364	0,8042	0,7573	0,7332	0,6354	0,6079	0,5969
38	0,8460	0,8693	0,6717	0,8247	0,6192	1,0663	1,0992	0,9895	1,0406	1,1060	1,1627	0,9417
39	1,2162	1,1771	0,8412	0,7049	0,8710	0,5720	0,5834	0,8352	0,8486	0,6332	0,6437	0,5794
40	1,2197	1,2150	0,9073	0,7717	0,7971	0,5974	0,5983	0,9177	0,8479	0,7347	0,7453	0,6850
41	0,7216	0,8142	0,7549	0,8826	0,6231	1,1516	1,1730	1,0513	1,0545	1,1795	1,2457	1,0245
42	1,0539	1,1361	0,6008	0,6499	0,5114	0,6990	0,7158	0,7757	0,7822	0,6709	0,7840	0,6246
43	0,9298	0,9516	0,6573	0,6960	0,5552	0,9797	0,9810	0,9143	0,8895	0,9525	1,0369	0,8266
44	0,3739	0,4333	0,9289	0,9576	0,8352	1,2575	1,2431	1,0549	1,1222	1,2725	1,3378	1,1511
45	0,4998	0,5334	0,7845	0,7549	0,6910	1,1134	1,0765	0,9145	0,9353	1,1079	1,1477	1,0486
46	0,5802	0,6547	0,8935	0,7873	0,7862	1,0009	0,9661	0,8706	0,8745	0,9350	1,0280	0,8772
47	0,6994	0,6023	0,9458	0,9183	0,9673	1,1337	1,1473	0,9498	0,9853	1,1975	1,2453	1,1090
48	0,7843	0,7197	0,9147	0,7832	0,9421	0,8064	0,8356	0,8556	0,8667	0,8776	0,9125	0,8135
49	0,3445	0,3804	0,9782	1,0290	0,8667	1,3575	1,3264	1,2703	1,2170	1,3272	1,3485	1,2828
50	0,7993	0,8605	0,7361	0,9815	0,6461	1,2728	1,2467	1,2240	1,1223	1,2386	1,2333	1,0697
51	0,9969	1,0282	0,8167	0,9156	0,7072	1,1033	1,1197	1,0055	1,0585	1,2256	1,2584	1,0137
52	0,9479	0,9641	0,8061	0,8620	0,7603	1,1575	1,1371	1,1014	1,1027	1,3445	1,3841	1,1757
53	0,9119	0,9210	0,6286	0,6982	0,5057	0,9814	0,9832	0,9894	0,9534	1,1715	1,1893	1,0002
54	0,8089	0,8079	0,7273	0,7728	0,6060	1,0778	1,0675	1,0324	1,0145	1,2645	1,2792	1,1065
55	0,8846	0,8541	0,7809	0,8568	0,6445	1,1348	1,1270	1,0892	1,1018	1,3189	1,3604	1,1170
56	0,8482	0,8341	0,7399	0,8477	0,6292	1,0862	1,1156	1,0738	1,0542	1,2566	1,2878	1,0769
57	0,8574	0,8899	0,7890	0,8786	0,7101	1,1498	1,1481	1,1212	1,1073	1,3177	1,3509	1,1603
58	0,8324	0,8551	0,7731	0,8139	0,6534	1,0892	1,0940	1,0577	1,0422	1,2827	1,3173	1,1235
59	0,8494	0,8696	0,7869	0,8457	0,6936	1,1550	1,1485	1,1126	1,1040	1,3183	1,3361	1,1632
60	1,0087	1,0466	1,0796	1,1816	0,9401	1,3764	1,3508	1,3363	1,3153	1,4419	1,4908	1,2581

Tabella A.19: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 4, colonne 37-48.

	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
1	0,9717	0,5975	0,9871	0,9256	0,6073	0,6121	0,5877	0,9389	0,7710	0,8782	1,0165	1,0281
2	0,7689	1,0805	0,5589	0,6163	1,1529	0,7665	1,0025	1,2254	1,0809	0,9977	1,1463	0,8504
3	0,8279	0,5280	1,0080	0,9531	0,5559	0,6447	0,6432	0,8311	0,7491	0,9039	0,9532	1,0403
4	0,6792	0,6911	0,7538	0,7867	0,7359	0,5760	0,6541	0,8906	0,7314	0,7687	0,9279	0,8284
5	0,7491	0,9902	0,5809	0,6423	1,0809	0,7129	0,9324	1,1656	0,9641	0,8991	1,0683	0,7597
6	0,7659	0,7905	0,9373	0,8794	0,7398	0,5896	0,7137	0,9131	0,8525	0,8529	0,9684	0,9879
7	0,6858	1,1735	0,6487	0,7395	1,2387	0,8186	1,0566	1,4119	1,1575	1,0343	1,2210	0,8611
8	0,7311	1,1881	0,5802	0,6503	1,2089	0,7947	1,0724	1,3798	1,2309	1,1148	1,2296	0,9448
9	0,7595	1,3039	0,6232	0,6744	1,3335	0,8097	1,1570	1,4363	1,2800	1,1305	1,2878	0,9521
10	0,7419	1,2648	0,6582	0,7076	1,3619	0,8710	1,1486	1,4308	1,2040	1,0668	1,2155	0,8976
11	0,7345	1,2313	0,6457	0,7235	1,3602	0,8703	1,0774	1,3945	1,2238	1,1239	1,1594	0,8653
12	0,9075	1,1870	0,6414	0,6976	1,2447	0,8625	1,1179	1,3384	1,1988	1,1190	1,2975	0,9988
13	0,8295	1,1315	0,6133	0,6192	1,1932	0,7851	1,0150	1,2889	1,1119	1,0147	1,2352	0,9049
14	0,7015	1,0155	0,6070	0,6561	1,1597	0,6940	0,9430	1,2154	1,0007	0,8895	1,0849	0,7599
15	0,6367	0,9830	0,5822	0,6498	1,0840	0,6462	0,8780	1,1885	1,0107	0,9000	1,1167	0,7697
16	0,7033	1,0790	0,5362	0,6172	1,1430	0,6767	0,9554	1,2121	1,0671	0,9402	1,1196	0,8044
17	0,7139	1,0871	0,5805	0,6275	1,1843	0,7103	0,9649	1,2188	1,0546	0,9493	1,0931	0,7753
18	0,6771	0,9991	0,6032	0,6442	1,0563	0,6552	0,9108	1,1839	1,0354	0,9424	1,1750	0,8705
19	0,7005	0,9404	0,5624	0,6164	1,0619	0,6719	0,8779	1,1598	0,9626	0,8846	1,0628	0,7352
20	0,7860	1,0743	0,5734	0,6141	1,1563	0,6982	0,9398	1,2255	1,0298	0,9202	1,1167	0,7835
21	0,7609	1,0403	0,5838	0,6126	1,1819	0,7593	0,9716	1,2708	1,0732	0,9821	1,1357	0,7914
22	0,6518	0,7437	0,7101	0,6765	0,7461	0,4745	0,6190	1,0578	0,8660	0,7893	1,0907	0,8335
23	0,5799	1,0229	0,6863	0,7124	1,0494	0,6869	0,8852	1,1727	0,9882	0,9058	1,1304	0,8156
24	0,6213	0,7869	0,7758	0,7879	0,8392	0,5504	0,6950	0,9960	0,8220	0,7767	1,0255	0,8465
25	1,0705	0,8460	1,2162	1,2197	0,7216	1,0539	0,9298	0,3739	0,4998	0,5802	0,6994	0,7843
26	1,2486	0,8693	1,1771	1,2150	0,8142	1,1361	0,9516	0,4333	0,5334	0,6547	0,6023	0,7197
27	0,7935	0,6717	0,8412	0,9073	0,7549	0,6008	0,6573	0,9289	0,7845	0,8935	0,9458	0,9147
28	0,7240	0,8247	0,7049	0,7717	0,8826	0,6499	0,6960	0,9576	0,7549	0,7873	0,9183	0,7832
29	0,7305	0,6192	0,8710	0,7971	0,6231	0,5114	0,5552	0,8352	0,6910	0,7862	0,9673	0,9421
30	0,8364	1,0663	0,5720	0,5974	1,1516	0,6990	0,9797	1,2575	1,1134	1,0009	1,1337	0,8064
31	0,8042	1,0992	0,5834	0,5983	1,1730	0,7158	0,9810	1,2431	1,0765	0,9661	1,1473	0,8356
32	0,7573	0,9895	0,8352	0,9177	1,0513	0,7757	0,9143	1,0549	0,9145	0,8706	0,9498	0,8556
33	0,7332	1,0406	0,8486	0,8479	1,0545	0,7822	0,8895	1,1222	0,9353	0,8745	0,9853	0,8667
34	0,6354	1,1060	0,6332	0,7347	1,1795	0,6709	0,9525	1,2725	1,1079	0,9350	1,1975	0,8776
35	0,6079	1,1627	0,6437	0,7453	1,2457	0,7840	1,0369	1,3378	1,1477	1,0280	1,2453	0,9125
36	0,5969	0,9417	0,5794	0,6850	1,0245	0,6246	0,8266	1,1511	1,0486	0,8772	1,1090	0,8135
37	0	0,9322	0,7506	0,8079	1,0045	0,5723	0,8087	1,1241	0,9819	0,8563	1,1037	0,8609
38	0,9322	0	0,9942	1,0004	0,4866	0,6911	0,6171	0,8411	0,8280	0,9559	0,9787	1,0879
39	0,7506	0,9942	0	0,6114	1,1227	0,7166	0,9688	1,2154	1,0391	0,9543	1,1334	0,8215
40	0,8079	1,0004	0,6114	0	1,0318	0,6938	0,9005	1,2054	1,0269	0,9330	1,1305	0,8248
41	1,0045	0,4866	1,1227	1,0318	0	0,6491	0,6814	0,7236	0,8911	0,9637	0,9826	1,1799
42	0,5723	0,6911	0,7166	0,6938	0,6491	0	0,5270	1,0593	0,9397	0,8266	1,1193	0,8917
43	0,8087	0,6171	0,9688	0,9005	0,6814	0,5270	0	0,9232	0,8002	0,8310	0,9231	0,9778
44	1,1241	0,8411	1,2154	1,2054	0,7236	1,0593	0,9232	0	0,5127	0,5362	0,6304	0,8111
45	0,9819	0,8280	1,0391	1,0269	0,8911	0,9397	0,8002	0,5127	0	0,4283	0,5953	0,5835
46	0,8563	0,9559	0,9543	0,9330	0,9637	0,8266	0,8310	0,5362	0,4283	0	0,5882	0,5360
47	1,1037	0,9787	1,1334	1,1305	0,9826	1,1193	0,9231	0,6304	0,5953	0,5882	0	0,7135
48	0,8609	1,0879	0,8215	0,8248	1,1799	0,8917	0,9778	0,8111	0,5835	0,5360	0,7135	0
49	1,1831	0,8236	1,2696	1,2828	0,7709	1,1443	0,9950	0,4601	0,4912	0,7147	0,7226	0,8609
50	0,9992	0,5295	1,1499	1,1892	0,5430	0,7340	0,8000	0,9133	0,9527	1,1119	1,1333	1,2589
51	1,0568	0,6975	1,1021	1,0234	0,7562	0,7084	0,7814	0,9135	0,9616	0,9600	0,9963	1,1772
52	1,2032	0,7827	1,1283	1,0302	0,8120	0,8754	0,7536	0,9879	0,8526	0,9706	0,8841	1,1406
53	0,9943	0,6128	0,9753	0,8731	0,6834	0,6452	0,5997	0,9198	0,7183	0,8305	0,9309	0,9988
54	1,1077	0,6279	1,0579	0,9538	0,6833	0,7909	0,6714	0,8630	0,7448	0,8987	0,8726	1,0407
55	1,1332	0,6675	1,1349	1,0377	0,6818	0,7497	0,7196	0,8059	0,8617	1,0002	0,9258	1,1718
56	1,0948	0,5808	1,0908	1,0088	0,5904	0,7416	0,6790	0,8318	0,8393	0,9231	0,9225	1,1242
57	1,1768	0,6151	1,1173	1,0222	0,6944	0,8342	0,7536	0,9084	0,8449	0,9804	0,8930	1,1259
58	1,1256	0,5990	1,0692	0,9689	0,7134	0,8071	0,6820	0,8668	0,7744	0,9147	0,8571	1,0595
59	1,1589	0,6629	1,1161	1,0327	0,7213	0,8227	0,7585	0,9036	0,8043	0,9691	0,8861	1,1250
60	1,3334	0,7364	1,3076	1,2611	0,7178	0,8860	1,0427	0,9653	1,1566	1,2062	1,1041	1,3528

Tabella A.20: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 4, colonne 49-60.

	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
1	0,9549	0,6087	0,7075	0,7222	0,5228	0,5948	0,6302	0,6168	0,6145	0,6278	0,6368	0,8732
2	1,2585	1,2219	1,1334	1,1669	1,0228	1,0812	1,1544	1,1293	1,1682	1,1193	1,1513	1,3535
3	0,8051	0,5688	0,7714	0,7273	0,5865	0,6175	0,6461	0,6276	0,6726	0,6383	0,6683	0,8394
4	0,9169	0,7556	0,8131	0,8021	0,6105	0,6944	0,7579	0,7366	0,7655	0,7374	0,7662	1,0455
5	1,2273	1,1275	1,1130	1,0964	0,9314	1,0140	1,1081	1,0747	1,1095	1,0274	1,0957	1,3214
6	1,0558	0,9063	0,7770	0,8650	0,7108	0,7932	0,8032	0,7809	0,8404	0,8109	0,8588	1,0620
7	1,3132	1,3071	1,3789	1,4911	1,3433	1,4073	1,4647	1,4346	1,4657	1,4227	1,4610	1,5993
8	1,4244	1,2855	1,2284	1,2935	1,1632	1,2321	1,2773	1,2496	1,2732	1,2316	1,2775	1,3924
9	1,4308	1,3624	1,3734	1,4483	1,3110	1,3939	1,4327	1,4057	1,4402	1,4028	1,4392	1,5451
10	1,4297	1,4410	1,3478	1,4545	1,3079	1,3729	1,4599	1,4027	1,4549	1,3950	1,4523	1,6144
11	1,4133	1,3549	1,3509	1,4852	1,3329	1,3768	1,4557	1,4078	1,4277	1,3930	1,4437	1,5858
12	1,3878	1,2896	1,2138	1,2461	1,1046	1,1696	1,2344	1,2114	1,2480	1,2031	1,2325	1,4002
13	1,3424	1,2788	1,1686	1,1782	1,0378	1,1014	1,1759	1,1451	1,1670	1,1108	1,1631	1,3599
14	1,2597	1,1779	1,1145	1,1353	0,9447	1,0434	1,1582	1,1009	1,1349	1,0448	1,1361	1,4216
15	1,2575	1,1375	1,0845	1,1175	0,9261	1,0404	1,1197	1,0711	1,1002	1,0505	1,1072	1,3511
16	1,3094	1,2177	1,1077	1,1590	1,0013	1,0920	1,1368	1,1063	1,1574	1,0967	1,1597	1,3307
17	1,2612	1,1902	1,1801	1,1938	1,0457	1,1089	1,1800	1,1631	1,1866	1,1260	1,1870	1,4144
18	1,2696	1,0644	1,0377	1,1018	0,9092	1,0003	1,0212	1,0443	1,0902	1,0430	1,0854	1,2291
19	1,1939	1,0993	1,0983	1,0938	0,9339	1,0095	1,0983	1,0669	1,0926	1,0287	1,0816	1,3258
20	1,3107	1,2411	1,1381	1,1358	0,9675	1,0428	1,1441	1,1155	1,1237	1,0590	1,1195	1,3738
21	1,3191	1,2312	1,1870	1,2035	1,0423	1,1057	1,2035	1,1503	1,1798	1,1189	1,1759	1,3949
22	1,1303	0,8717	0,7689	0,8411	0,6090	0,7658	0,8033	0,7521	0,8190	0,7774	0,8033	1,0156
23	1,2503	1,1109	1,0592	1,1590	0,9451	1,0558	1,1085	1,0699	1,1230	1,0576	1,1088	1,3023
24	1,0672	0,8989	0,8612	0,9208	0,7203	0,8213	0,8552	0,8140	0,9269	0,8759	0,8897	1,1305
25	0,3445	0,7993	0,9969	0,9479	0,9119	0,8089	0,8846	0,8482	0,8574	0,8324	0,8494	1,0087
26	0,3804	0,8605	1,0282	0,9641	0,9210	0,8079	0,8541	0,8341	0,8899	0,8551	0,8696	1,0466
27	0,9782	0,7361	0,8167	0,8061	0,6286	0,7273	0,7809	0,7399	0,7890	0,7731	0,7869	1,0796
28	1,0290	0,9815	0,9156	0,8620	0,6982	0,7728	0,8568	0,8477	0,8786	0,8139	0,8457	1,1816
29	0,8667	0,6461	0,7072	0,7603	0,5057	0,6060	0,6445	0,6292	0,7101	0,6534	0,6936	0,9401
30	1,3575	1,2728	1,1033	1,1575	0,9814	1,0778	1,1348	1,0862	1,1498	1,0892	1,1550	1,3764
31	1,3264	1,2467	1,1197	1,1371	0,9832	1,0675	1,1270	1,1156	1,1481	1,0940	1,1485	1,3508
32	1,2703	1,2240	1,0055	1,1014	0,9894	1,0324	1,0892	1,0738	1,1212	1,0577	1,1126	1,3363
33	1,2170	1,1223	1,0585	1,1027	0,9534	1,0145	1,1018	1,0542	1,1073	1,0422	1,1040	1,3153
34	1,3272	1,2386	1,2256	1,3445	1,1715	1,2645	1,3189	1,2566	1,3177	1,2827	1,3183	1,4419
35	1,3485	1,2333	1,2584	1,3841	1,1893	1,2792	1,3604	1,2878	1,3509	1,3173	1,3361	1,4908
36	1,2828	1,0697	1,0137	1,1757	1,0002	1,1065	1,1170	1,0769	1,1603	1,1235	1,1632	1,2581
37	1,1831	0,9992	1,0568	1,2032	0,9943	1,1077	1,1332	1,0948	1,1768	1,1256	1,1589	1,3334
38	0,8236	0,5295	0,6975	0,7827	0,6128	0,6279	0,6675	0,5808	0,6151	0,5990	0,6629	0,7364
39	1,2696	1,1499	1,1021	1,1283	0,9753	1,0579	1,1349	1,0908	1,1173	1,0692	1,1161	1,3076
40	1,2828	1,1892	1,0234	1,0302	0,8731	0,9538	1,0377	1,0088	1,0222	0,9689	1,0327	1,2611
41	0,7709	0,5430	0,7562	0,8120	0,6834	0,6833	0,6818	0,5904	0,6944	0,7134	0,7213	0,7178
42	1,1443	0,7340	0,7084	0,8754	0,6452	0,7909	0,7497	0,7416	0,8342	0,8071	0,8227	0,8860
43	0,9950	0,8000	0,7814	0,7536	0,5997	0,6714	0,7196	0,6790	0,7536	0,6820	0,7585	1,0427
44	0,4601	0,9133	0,9135	0,9879	0,9198	0,8630	0,8059	0,8318	0,9084	0,8668	0,9036	0,9653
45	0,4912	0,9527	0,9616	0,8526	0,7183	0,7448	0,8617	0,8393	0,8449	0,7744	0,8043	1,1566
46	0,7147	1,1119	0,9600	0,9706	0,8305	0,8987	1,0002	0,9231	0,9804	0,9147	0,9691	1,2062
47	0,7226	1,1333	0,9963	0,8841	0,9309	0,8726	0,9258	0,9225	0,8930	0,8571	0,8861	1,1041
48	0,8609	1,2589	1,1772	1,1406	0,9988	1,0407	1,1718	1,1242	1,1259	1,0595	1,1250	1,3528
49	0	0,5040	1,1457	1,0309	0,9565	0,8235	0,9078	0,9392	0,8939	0,8493	0,8848	0,9695
50	0,5040	0	0,9721	0,8996	0,7527	0,7288	0,7338	0,7029	0,6489	0,7512	0,7134	0,5688
51	1,1457	0,9721	0	0,8883	0,7576	0,8167	0,7732	0,6801	0,8698	0,8681	0,8613	0,9798
52	1,0309	0,8996	0,8883	0	0,6629	0,6597	0,8206	0,6984	0,6002	0,6389	0,6045	1,1418
53	0,9565	0,7527	0,7576	0,6629	0	0,5679	0,6200	0,6178	0,6171	0,5976	0,6345	1,0652
54	0,8235	0,7288	0,8167	0,6597	0,5679	0	0,6705	0,6378	0,6152	0,5303	0,5643	0,9775
55	0,9078	0,7338	0,7732	0,8206	0,6200	0,6705	0	0,6555	0,7241	0,6923	0,6745	0,8937
56	0,9392	0,7029	0,6801	0,6984	0,6178	0,6378	0,6555	0	0,5530	0,6264	0,4794	0,9146
57	0,8939	0,6489	0,8698	0,6002	0,6171	0,6152	0,7241	0,5530	0	0,5158	0,4815	0,9933
58	0,8493	0,7512	0,8681	0,6389	0,5976	0,5303	0,6923	0,6264	0,5158	0	0,5851	0,9544
59	0,8848	0,7134	0,8613	0,6045	0,6345	0,5643	0,6745	0,4794	0,4815	0,5851	0	0,9956
60	0,9695	0,5688	0,9798	1,1418	1,0652	0,9775	0,8937	0,9146	0,9933	0,9544	0,9956	0

Tabella A.21: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 5, colonne 1-12.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	1,0033	0,5260	0,5222	0,9103	0,6532	1,2980	1,1396	1,2602	1,2635	1,2962	1,0853
2	1,0033	0	1,0058	0,7532	0,5891	0,9267	0,6236	0,5577	0,5770	0,6122	0,6450	0,6020
3	0,5260	1,0058	0	0,6226	0,8917	0,7146	1,0564	1,0631	1,1538	1,1413	1,0685	1,1134
4	0,5222	0,7532	0,6226	0	0,6540	0,6468	0,7573	0,7831	0,8520	0,8244	0,7217	0,9107
5	0,9103	0,5891	0,8917	0,6540	0	0,8833	0,6546	0,6098	0,6641	0,6611	0,6231	0,7135
6	0,6532	0,9267	0,7146	0,6468	0,8833	0	0,9312	0,9141	0,9532	0,9314	0,9288	1,0562
7	1,2980	0,6236	1,0564	0,7573	0,6546	0,9312	0	0,5453	0,5469	0,5328	0,5025	0,7233
8	1,1396	0,5577	1,0631	0,7831	0,6098	0,9141	0,5453	0	0,4801	0,5234	0,5431	0,6126
9	1,2602	0,5770	1,1538	0,8520	0,6641	0,9532	0,5469	0,4801	0	0,5568	0,5863	0,6315
10	1,2635	0,6122	1,1413	0,8244	0,6611	0,9314	0,5328	0,5234	0,5568	0	0,5356	0,7232
11	1,2962	0,6450	1,0685	0,7217	0,6231	0,9288	0,5025	0,5431	0,5863	0,5356	0	0,7467
12	1,0853	0,6020	1,1134	0,9107	0,7135	1,0562	0,7233	0,6126	0,6315	0,7232	0,7467	0
13	1,0307	0,5773	1,0494	0,8513	0,6278	0,9759	0,6598	0,5610	0,6070	0,6832	0,6818	0,5908
14	0,9051	0,6147	0,9884	0,6589	0,5605	0,8852	0,6353	0,5934	0,6970	0,6245	0,6075	0,7374
15	0,9159	0,5682	0,9233	0,6283	0,5638	0,8476	0,5937	0,5583	0,6026	0,5780	0,5696	0,6926
16	0,9756	0,5540	0,9848	0,6886	0,5530	0,8686	0,5564	0,5299	0,5713	0,5471	0,5643	0,6611
17	1,0028	0,5651	0,9757	0,6887	0,5335	0,9172	0,5772	0,5622	0,6174	0,5586	0,5794	0,6972
18	0,9143	0,6159	0,9308	0,7474	0,6219	0,8720	0,6899	0,6379	0,6482	0,7022	0,7216	0,6524
19	0,9269	0,5641	0,8896	0,6325	0,5012	0,8831	0,6265	0,6069	0,6602	0,6481	0,6080	0,6891
20	0,9485	0,5741	0,9859	0,6915	0,5404	0,9292	0,6048	0,6037	0,6472	0,6134	0,5839	0,6918
21	1,0441	0,5621	0,9804	0,7527	0,5438	0,9856	0,5849	0,5897	0,6355	0,6263	0,6115	0,6319
22	0,6286	0,7234	0,6561	0,6150	0,6652	0,6585	0,8143	0,7217	0,7855	0,8373	0,9048	0,8124
23	0,9394	0,6846	0,8775	0,7184	0,6559	0,7944	0,6195	0,6543	0,6847	0,6742	0,6914	0,8019
24	0,6817	0,7782	0,6999	0,6012	0,6921	0,6784	0,7373	0,7594	0,8030	0,7998	0,7717	0,8927
25	0,8903	1,2051	0,7722	0,8697	1,1426	0,9434	1,2238	1,3065	1,3301	1,3279	1,3241	1,3160
26	0,8861	1,1515	0,8043	0,8410	1,0869	0,9395	1,2538	1,2908	1,3304	1,2875	1,2001	1,2928
27	0,4938	0,8689	0,6537	0,4975	0,7512	0,7089	0,8342	0,8332	0,9301	0,8830	0,7926	1,0188
28	0,6929	0,7326	0,7224	0,5230	0,6106	0,7585	0,7245	0,7850	0,8209	0,7993	0,7172	0,9097
29	0,4614	0,8627	0,5217	0,5046	0,8129	0,6268	0,9298	0,9042	0,9940	0,9720	0,9669	0,9925
30	0,9836	0,5640	0,9719	0,7175	0,5616	0,9251	0,6752	0,5882	0,6609	0,6227	0,6339	0,6592
31	0,9767	0,5682	1,0334	0,7520	0,5799	0,9301	0,6897	0,5905	0,6479	0,6711	0,6302	0,6381
32	0,9967	0,8428	0,9547	0,6999	0,7877	0,8395	0,7445	0,8185	0,8762	0,7746	0,7087	0,9824
33	0,9691	0,8863	0,9209	0,8149	0,7957	0,8747	0,7724	0,8373	0,8712	0,8408	0,8032	0,9921
34	1,1122	0,6256	1,0046	0,7373	0,6542	0,9392	0,5933	0,6180	0,6160	0,6288	0,5952	0,7277
35	1,1423	0,6326	1,0630	0,7951	0,7196	0,9547	0,5862	0,6349	0,6441	0,5747	0,6073	0,6874
36	0,9548	0,5989	0,9265	0,6436	0,6154	0,8157	0,6026	0,6031	0,6243	0,6168	0,6118	0,7211
37	0,9404	0,7432	0,7984	0,6552	0,7248	0,7419	0,6643	0,7094	0,7374	0,7192	0,7113	0,8762
38	0,5813	1,0463	0,5111	0,6695	0,9583	0,7682	1,1386	1,1551	1,2688	1,2275	1,1950	1,1480
39	0,9541	0,5394	0,9745	0,7296	0,5614	0,9075	0,6267	0,5607	0,6030	0,6358	0,6231	0,6196
40	0,8958	0,5943	0,9205	0,7605	0,6194	0,8493	0,7147	0,6297	0,6527	0,6833	0,6988	0,6732
41	0,5908	1,1136	0,5390	0,7116	1,0443	0,7186	1,1986	1,1739	1,2936	1,3207	1,3195	1,2037
42	0,5920	0,7413	0,6235	0,5576	0,6907	0,5707	0,7910	0,7696	0,7829	0,8417	0,8446	0,8339
43	0,5698	0,9689	0,6220	0,6318	0,9013	0,6918	1,0173	1,0396	1,1195	1,1106	1,0396	1,0794
44	0,9222	1,1970	0,8162	0,8730	1,1370	0,8933	1,3807	1,3524	1,4079	1,3989	1,3650	1,3050
45	0,7579	1,0577	0,7354	0,7183	0,9418	0,8331	1,1306	1,2046	1,2507	1,1746	1,1945	1,1687
46	0,8614	0,9742	0,8842	0,7523	0,8777	0,8376	1,0134	1,0953	1,1114	1,0468	1,1010	1,0917
47	0,9999	1,1191	0,9331	0,9088	1,0384	0,9510	1,1967	1,2068	1,2649	1,1897	1,1342	1,2633
48	1,0037	0,8307	1,0148	0,8078	0,7426	0,9606	0,8422	0,9253	0,9344	0,8765	0,8490	0,9755
49	0,9381	1,2297	0,7893	0,9003	1,1986	1,0328	1,2864	1,3954	1,4026	1,3966	1,3799	1,3543
50	0,5922	1,1842	0,5516	0,7343	1,0909	0,8813	1,2704	1,2500	1,3219	1,3967	1,3109	1,2471
51	0,6865	1,0954	0,7491	0,7878	1,0777	0,7557	1,3370	1,1932	1,3346	1,3066	1,3122	1,1757
52	0,6988	1,1277	0,7028	0,7737	1,0618	0,8398	1,4420	1,2551	1,4053	1,4088	1,4357	1,2061
53	0,5073	0,9875	0,5688	0,5903	0,9000	0,6902	1,3028	1,1310	1,2759	1,2694	1,2912	1,0691
54	0,5755	1,0443	0,5980	0,6699	0,9784	0,7685	1,3661	1,1974	1,3553	1,3349	1,3396	1,1298
55	0,6123	1,1153	0,6264	0,7329	1,0723	0,7789	1,4202	1,2417	1,3919	1,4161	1,4166	1,1951
56	0,5970	1,0924	0,6073	0,7118	1,0371	0,7577	1,3916	1,2144	1,3657	1,3623	1,3669	1,1714
57	0,5962	1,1293	0,6502	0,7398	1,0738	0,8174	1,4224	1,2381	1,4008	1,4117	1,3875	1,2078
58	0,6072	1,0814	0,6172	0,7121	0,9918	0,7870	1,3813	1,1974	1,3643	1,3557	1,3553	1,1626
59	0,6170	1,1118	0,6471	0,7404	1,0563	0,8337	1,4176	1,2428	1,3984	1,4108	1,4035	1,1919
60	0,8499	1,3118	0,8118	1,0117	1,2792	1,0302	1,5510	1,3522	1,5002	1,5669	1,5334	1,3532

Tabella A.22: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 5, colonne 13-24.

	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	1,0307	0,9051	0,9159	0,9756	1,0028	0,9143	0,9269	0,9485	1,0441	0,6286	0,9394	0,6817
2	0,5773	0,6147	0,5682	0,5540	0,5651	0,6159	0,5641	0,5741	0,5621	0,7234	0,6846	0,7782
3	1,0494	0,9884	0,9233	0,9848	0,9757	0,9308	0,8896	0,9859	0,9804	0,6561	0,8775	0,6999
4	0,8513	0,6589	0,6283	0,6886	0,6887	0,7474	0,6325	0,6915	0,7527	0,6150	0,7184	0,6012
5	0,6278	0,5605	0,5638	0,5530	0,5335	0,6219	0,5012	0,5404	0,5438	0,6652	0,6559	0,6921
6	0,9759	0,8852	0,8476	0,8686	0,9172	0,8720	0,8831	0,9292	0,9856	0,6585	0,7944	0,6784
7	0,6598	0,6353	0,5937	0,5564	0,5772	0,6899	0,6265	0,6048	0,5849	0,8143	0,6195	0,7373
8	0,5610	0,5934	0,5583	0,5299	0,5622	0,6379	0,6069	0,6037	0,5897	0,7217	0,6543	0,7594
9	0,6070	0,6970	0,6026	0,5713	0,6174	0,6482	0,6602	0,6472	0,6355	0,7855	0,6847	0,8030
10	0,6832	0,6245	0,5780	0,5471	0,5586	0,7022	0,6481	0,6134	0,6263	0,8373	0,6742	0,7998
11	0,6818	0,6075	0,5696	0,5643	0,5794	0,7216	0,6080	0,5839	0,6115	0,9048	0,6914	0,7717
12	0,5908	0,7374	0,6926	0,6611	0,6972	0,6524	0,6891	0,6918	0,6319	0,8124	0,8019	0,8927
13	0	0,6746	0,6412	0,5929	0,6108	0,5910	0,6269	0,6163	0,5842	0,7400	0,7026	0,8294
14	0,6746	0	0,5294	0,5204	0,5063	0,6425	0,5382	0,5394	0,5749	0,6527	0,6734	0,6951
15	0,6412	0,5294	0	0,5217	0,5111	0,5975	0,5497	0,5503	0,5561	0,6532	0,6199	0,6758
16	0,5929	0,5204	0,5217	0	0,4844	0,5686	0,5271	0,5252	0,5348	0,6842	0,6233	0,7052
17	0,6108	0,5063	0,5111	0,4844	0	0,5987	0,5298	0,5390	0,5430	0,7330	0,6594	0,7284
18	0,5910	0,6425	0,5975	0,5686	0,5987	0	0,6059	0,6163	0,6235	0,6221	0,5913	0,6607
19	0,6269	0,5382	0,5497	0,5271	0,5298	0,6059	0	0,5342	0,5126	0,6613	0,6619	0,6991
20	0,6163	0,5394	0,5503	0,5252	0,5390	0,6163	0,5342	0	0,5385	0,6694	0,6315	0,7403
21	0,5842	0,5749	0,5561	0,5348	0,5430	0,6235	0,5126	0,5385	0	0,7394	0,6588	0,7899
22	0,7400	0,6527	0,6532	0,6842	0,7330	0,6221	0,6613	0,6694	0,7394	0	0,6292	0,5738
23	0,7026	0,6734	0,6199	0,6233	0,6594	0,5913	0,6619	0,6315	0,6588	0,6292	0	0,6375
24	0,8294	0,6951	0,6758	0,7052	0,7284	0,6607	0,6991	0,7403	0,7899	0,5738	0,6375	0
25	1,2621	1,2000	1,1394	1,1999	1,1945	1,1871	1,1101	1,2129	1,2273	1,0283	1,1338	0,9873
26	1,2570	1,1134	1,1361	1,1433	1,0709	1,2164	1,0359	1,1365	1,1641	1,0798	1,2280	1,0186
27	0,9670	0,7336	0,7331	0,7737	0,7661	0,8902	0,7031	0,7755	0,8013	0,6557	0,8574	0,7054
28	0,8407	0,6405	0,6303	0,6312	0,6388	0,7677	0,6061	0,6619	0,6631	0,6564	0,7231	0,6415
29	0,9059	0,8256	0,7858	0,8370	0,8575	0,7878	0,8004	0,8383	0,9220	0,5198	0,7556	0,5733
30	0,6160	0,5544	0,5578	0,5328	0,5575	0,6180	0,5513	0,5319	0,5561	0,6866	0,6983	0,8040
31	0,5830	0,5927	0,5918	0,5347	0,5767	0,6084	0,5589	0,5672	0,5678	0,7141	0,6976	0,7918
32	0,9417	0,7641	0,7431	0,7974	0,7434	0,8792	0,7408	0,7795	0,8047	0,8449	0,7650	0,7864
33	0,8738	0,8077	0,8025	0,8019	0,7947	0,8017	0,7811	0,8116	0,8088	0,8166	0,7052	0,7815
34	0,6803	0,6819	0,5678	0,5966	0,6029	0,6689	0,5954	0,6359	0,5976	0,7242	0,6102	0,7163
35	0,6613	0,6810	0,6073	0,6034	0,6359	0,6563	0,6798	0,6800	0,6456	0,7740	0,6325	0,7656
36	0,6721	0,5523	0,5373	0,5300	0,5516	0,6341	0,5754	0,5708	0,6057	0,6554	0,6259	0,6522
37	0,8026	0,6780	0,6160	0,6808	0,6910	0,6560	0,6772	0,7605	0,7367	0,6305	0,5612	0,5999
38	1,0960	0,9824	0,9524	1,0438	1,0545	0,9668	0,9082	1,0393	1,0078	0,7212	0,9895	0,7613
39	0,5925	0,5857	0,5628	0,5176	0,5607	0,5834	0,5429	0,5537	0,5629	0,6871	0,6633	0,7503
40	0,5973	0,6337	0,6264	0,5955	0,6050	0,6223	0,5944	0,5917	0,5898	0,6535	0,6873	0,7603
41	1,1543	1,1192	1,0478	1,1056	1,1466	1,0202	1,0265	1,1156	1,1420	0,7205	1,0153	0,8122
42	0,7605	0,6724	0,6264	0,6568	0,6893	0,6348	0,6506	0,6761	0,7352	0,4588	0,6637	0,5324
43	0,9818	0,9124	0,8476	0,9246	0,9335	0,8816	0,8482	0,9103	0,9403	0,5997	0,8561	0,6746
44	1,2565	1,1887	1,1622	1,1850	1,1898	1,1568	1,1321	1,1940	1,2380	1,0379	1,1448	0,9749
45	1,0839	0,9764	0,9873	1,0453	1,0283	1,0121	0,9408	1,0026	1,0449	0,8484	0,9650	0,8030
46	0,9911	0,8696	0,8816	0,9205	0,9278	0,9228	0,8642	0,8980	0,9589	0,7757	0,8860	0,7606
47	1,2053	1,0595	1,0915	1,0934	1,0673	1,1471	1,0342	1,0879	1,1015	1,0706	1,1026	1,0012
48	0,8841	0,7449	0,7531	0,7879	0,7591	0,8528	0,7193	0,7654	0,7739	0,8164	0,7960	0,8280
49	1,3101	1,2330	1,2312	1,2808	1,2320	1,2442	1,1684	1,2795	1,2881	1,1085	1,2211	1,0402
50	1,2383	1,1401	1,1029	1,1817	1,1546	1,0318	1,0637	1,2021	1,1928	0,8460	1,0773	0,8720
51	1,1312	1,0778	1,0502	1,0739	1,1439	1,0038	1,0591	1,0998	1,1449	0,7467	1,0264	0,8360
52	1,1409	1,0999	1,0796	1,1232	1,1554	1,0672	1,0575	1,0986	1,1656	0,8144	1,1206	0,8903
53	1,0047	0,9139	0,8952	0,9694	1,0126	0,8795	0,9010	0,9341	1,0026	0,5908	0,9154	0,6980
54	1,0645	1,0077	1,0067	1,0569	1,0737	0,9619	0,9710	1,0062	1,0653	0,7408	1,0204	0,7946
55	1,1384	1,1179	1,0817	1,1009	1,1405	0,9895	1,0579	1,1051	1,1596	0,7782	1,0733	0,8287
56	1,1066	1,0642	1,0348	1,0713	1,1242	1,0086	1,0276	1,0760	1,1059	0,7282	1,0364	0,7862
57	1,1292	1,0976	1,0638	1,1213	1,1469	1,0556	1,0515	1,0867	1,1359	0,7934	1,0874	0,8987
58	1,0735	1,0089	1,0143	1,0611	1,0889	1,0030	0,9898	1,0228	1,0782	0,7523	1,0233	0,8461
59	1,1240	1,0984	1,0695	1,1224	1,1483	1,0474	1,0406	1,0801	1,1327	0,7795	1,0730	0,8611
60	1,3168	1,3727	1,3072	1,2894	1,3682	1,1916	1,2784	1,3304	1,3444	0,9855	1,2607	1,0909

Tabella A.23: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 5, colonne 25-36.

	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
1	0,8903	0,8861	0,4938	0,6929	0,4614	0,9836	0,9767	0,9967	0,9691	1,1122	1,1423	0,9548
2	1,2051	1,1515	0,8689	0,7326	0,8627	0,5640	0,5682	0,8428	0,8863	0,6256	0,6326	0,5989
3	0,7722	0,8043	0,6537	0,7224	0,5217	0,9719	1,0334	0,9547	0,9209	1,0046	1,0630	0,9265
4	0,8697	0,8410	0,4975	0,5230	0,5046	0,7175	0,7520	0,6999	0,8149	0,7373	0,7951	0,6436
5	1,1426	1,0869	0,7512	0,6106	0,8129	0,5616	0,5799	0,7877	0,7957	0,6542	0,7196	0,6154
6	0,9434	0,9395	0,7089	0,7585	0,6268	0,9251	0,9301	0,8395	0,8747	0,9392	0,9547	0,8157
7	1,2238	1,2538	0,8342	0,7245	0,9298	0,6752	0,6897	0,7445	0,7724	0,5933	0,5862	0,6026
8	1,3065	1,2908	0,8332	0,7850	0,9042	0,5882	0,5905	0,8185	0,8373	0,6180	0,6349	0,6031
9	1,3301	1,3304	0,9301	0,8209	0,9940	0,6609	0,6479	0,8762	0,8712	0,6160	0,6441	0,6243
10	1,3279	1,2875	0,8830	0,7993	0,9720	0,6227	0,6711	0,7746	0,8408	0,6288	0,5747	0,6168
11	1,3241	1,2001	0,7926	0,7172	0,9669	0,6339	0,6302	0,7087	0,8032	0,5952	0,6073	0,6118
12	1,3160	1,2928	1,0188	0,9097	0,9925	0,6592	0,6381	0,9824	0,9921	0,7277	0,6874	0,7211
13	1,2621	1,2570	0,9670	0,8407	0,9059	0,6160	0,5830	0,9417	0,8738	0,6803	0,6613	0,6721
14	1,2000	1,1134	0,7336	0,6405	0,8256	0,5544	0,5927	0,7641	0,8077	0,6819	0,6810	0,5523
15	1,1394	1,1361	0,7331	0,6303	0,7858	0,5578	0,5918	0,7431	0,8025	0,5678	0,6073	0,5373
16	1,1999	1,1433	0,7737	0,6312	0,8370	0,5328	0,5347	0,7974	0,8019	0,5966	0,6034	0,5300
17	1,1945	1,0709	0,7661	0,6388	0,8575	0,5575	0,5767	0,7434	0,7947	0,6029	0,6359	0,5516
18	1,1871	1,2164	0,8902	0,7677	0,7878	0,6180	0,6084	0,8792	0,8017	0,6689	0,6563	0,6341
19	1,1101	1,0359	0,7031	0,6061	0,8004	0,5513	0,5589	0,7408	0,7811	0,5954	0,6798	0,5754
20	1,2129	1,1365	0,7755	0,6619	0,8383	0,5319	0,5672	0,7795	0,8116	0,6359	0,6800	0,5708
21	1,2273	1,1641	0,8013	0,6631	0,9220	0,5561	0,5678	0,8047	0,8088	0,5976	0,6456	0,6057
22	1,0283	1,0798	0,6557	0,6564	0,5198	0,6866	0,7141	0,8449	0,8166	0,7242	0,7740	0,6554
23	1,1338	1,2280	0,8574	0,7231	0,7556	0,6983	0,6976	0,7650	0,7052	0,6102	0,6325	0,6259
24	0,9873	1,0186	0,7054	0,6415	0,5733	0,8040	0,7918	0,7864	0,7815	0,7163	0,7656	0,6522
25	0	0,3269	0,9169	0,9277	0,8023	1,2780	1,2225	1,0656	1,1254	1,1854	1,2532	1,1135
26	0,3269	0	0,7719	0,8535	0,8071	1,1393	1,1494	1,0084	1,1597	1,2922	1,3267	1,1517
27	0,9169	0,7719	0	0,5482	0,5974	0,7783	0,8417	0,7863	0,9508	0,9170	0,9585	0,7400
28	0,9277	0,8535	0,5482	0	0,6162	0,6809	0,7275	0,6950	0,7562	0,7394	0,8262	0,6571
29	0,8023	0,8071	0,5974	0,6162	0	0,8561	0,8830	0,8291	0,8533	0,8927	0,9335	0,7439
30	1,2780	1,1393	0,7783	0,6809	0,8561	0	0,5568	0,8224	0,8487	0,6724	0,7026	0,6052
31	1,2225	1,1494	0,8417	0,7275	0,8830	0,5568	0	0,8162	0,8514	0,6413	0,6951	0,6004
32	1,0656	1,0084	0,7863	0,6950	0,8291	0,8224	0,8162	0	0,7513	0,7329	0,7872	0,7024
33	1,1254	1,1597	0,9508	0,7562	0,8533	0,8487	0,8514	0,7513	0	0,7551	0,7790	0,7242
34	1,1854	1,2922	0,9170	0,7394	0,8927	0,6724	0,6413	0,7329	0,7551	0	0,5327	0,5799
35	1,2532	1,3267	0,9585	0,8262	0,9335	0,7026	0,6951	0,7872	0,7790	0,5327	0	0,5884
36	1,1135	1,1517	0,7400	0,6571	0,7439	0,6052	0,6004	0,7024	0,7242	0,5799	0,5884	0
37	1,0494	1,2225	0,7680	0,6970	0,7059	0,8111	0,7775	0,7313	0,7090	0,6163	0,5866	0,5772
38	0,8335	0,8551	0,6507	0,7983	0,6007	1,0335	1,0621	0,9577	1,0070	1,0697	1,1237	0,9119
39	1,1887	1,1490	0,8136	0,6809	0,8410	0,5527	0,5648	0,8083	0,8202	0,6119	0,6223	0,5600
40	1,1931	1,1863	0,8764	0,7456	0,7708	0,5763	0,5774	0,8874	0,8178	0,7094	0,7202	0,6627
41	0,7122	0,7986	0,7328	0,8519	0,6059	1,1139	1,1346	1,0137	1,0195	1,1409	1,2055	0,9935
42	1,0399	1,1165	0,5823	0,6290	0,4969	0,6772	0,6919	0,7510	0,7573	0,6493	0,7598	0,6050
43	0,9117	0,9292	0,6384	0,6730	0,5385	0,9490	0,9505	0,8843	0,8598	0,9217	1,0016	0,7999
44	0,3630	0,4209	0,9119	0,9338	0,8193	1,2285	1,2117	1,0247	1,0864	1,2410	1,3045	1,1282
45	0,4863	0,5185	0,7694	0,7361	0,6766	1,0884	1,0512	0,8892	0,9061	1,0801	1,1167	1,0280
46	0,5634	0,6357	0,8759	0,7700	0,7720	0,9804	0,9434	0,8490	0,8498	0,9176	1,0056	0,8627
47	0,6765	0,5824	0,9276	0,8935	0,9491	1,1054	1,1182	0,9235	0,9554	1,1667	1,2136	1,0845
48	0,7626	0,6950	0,8940	0,7643	0,9189	0,7892	0,8172	0,8350	0,8432	0,8603	0,8920	0,8002
49	0,3334	0,3697	0,9596	1,0041	0,8507	1,3256	1,2937	1,2362	1,1802	1,3002	1,3181	1,2598
50	0,7891	0,8495	0,7167	0,9497	0,6285	1,2332	1,2063	1,1870	1,0883	1,2030	1,1949	1,0368
51	0,9781	1,0095	0,7947	0,8872	0,6882	1,0697	1,0824	0,9729	1,0233	1,1864	1,2190	0,9795
52	0,9284	0,9412	0,7809	0,8348	0,7357	1,1209	1,0981	1,0683	1,0637	1,3005	1,3368	1,1402
53	0,8966	0,9006	0,6087	0,6756	0,4897	0,9488	0,9508	0,9593	0,9218	1,1324	1,1491	0,9682
54	0,7907	0,7861	0,7055	0,7447	0,5865	1,0445	1,0282	0,9996	0,9781	1,2216	1,2360	1,0717
55	0,8678	0,8377	0,7578	0,8269	0,6244	1,0975	1,0876	1,0556	1,0628	1,2796	1,3185	1,0816
56	0,8330	0,8166	0,7187	0,8200	0,6106	1,0507	1,0781	1,0423	1,0185	1,2142	1,2428	1,0408
57	0,8413	0,8688	0,7674	0,8488	0,6879	1,1127	1,1093	1,0865	1,0693	1,2726	1,3048	1,1228
58	0,8128	0,8337	0,7504	0,7857	0,6316	1,0546	1,0558	1,0239	1,0050	1,2418	1,2742	1,0865
59	0,8315	0,8508	0,7626	0,8170	0,6718	1,1190	1,1094	1,0751	1,0647	1,2744	1,2929	1,1270
60	0,9880	1,0249	1,0495	1,1431	0,9123	1,3330	1,3038	1,2904	1,2653	1,3862	1,4368	1,2125

Tabella A.24: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 5, colonne 37-48.

	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
1	0,9404	0,5813	0,9541	0,8958	0,5908	0,5920	0,5698	0,9222	0,7579	0,8614	0,9999	1,0037
2	0,7432	1,0463	0,5394	0,5943	1,1136	0,7413	0,9689	1,1970	1,0577	0,9742	1,1191	0,8307
3	0,7984	0,5111	0,9745	0,9205	0,5390	0,6235	0,6220	0,8162	0,7354	0,8842	0,9331	1,0148
4	0,6552	0,6695	0,7296	0,7605	0,7116	0,5576	0,6318	0,8730	0,7183	0,7523	0,9088	0,8078
5	0,7248	0,9583	0,5614	0,6194	1,0443	0,6907	0,9013	1,1370	0,9418	0,8777	1,0384	0,7426
6	0,7419	0,7682	0,9075	0,8493	0,7186	0,5707	0,6918	0,8933	0,8331	0,8376	0,9510	0,9606
7	0,6643	1,1386	0,6267	0,7147	1,1986	0,7910	1,0173	1,3807	1,1306	1,0134	1,1967	0,8422
8	0,7094	1,1551	0,5607	0,6297	1,1739	0,7696	1,0396	1,3524	1,2046	1,0953	1,2068	0,9253
9	0,7374	1,2688	0,6030	0,6527	1,2936	0,7829	1,1195	1,4079	1,2507	1,1114	1,2649	0,9344
10	0,7192	1,2275	0,6358	0,6833	1,3207	0,8417	1,1106	1,3989	1,1746	1,0468	1,1897	0,8765
11	0,7113	1,1950	0,6231	0,6988	1,3195	0,8446	1,0396	1,3650	1,1945	1,1010	1,1342	0,8490
12	0,8762	1,1480	0,6196	0,6732	1,2037	0,8339	1,0794	1,3050	1,1687	1,0917	1,2633	0,9755
13	0,8026	1,0960	0,5925	0,5973	1,1543	0,7605	0,9818	1,2565	1,0839	0,9911	1,2053	0,8841
14	0,6780	0,9824	0,5857	0,6337	1,1192	0,6724	0,9124	1,1887	0,9764	0,8696	1,0595	0,7449
15	0,6160	0,9524	0,5628	0,6264	1,0478	0,6264	0,8476	1,1622	0,9873	0,8816	1,0915	0,7531
16	0,6808	1,0438	0,5176	0,5955	1,1056	0,6568	0,9246	1,1850	1,0453	0,9205	1,0934	0,7879
17	0,6910	1,0545	0,5607	0,6050	1,1466	0,6893	0,9335	1,1898	1,0283	0,9278	1,0673	0,7591
18	0,6560	0,9668	0,5834	0,6223	1,0202	0,6348	0,8816	1,1568	1,0121	0,9228	1,1471	0,8528
19	0,6772	0,9082	0,5429	0,5944	1,0265	0,6506	0,8482	1,1321	0,9408	0,8642	1,0342	0,7193
20	0,7605	1,0393	0,5537	0,5917	1,1156	0,6761	0,9103	1,1940	1,0026	0,8980	1,0879	0,7654
21	0,7367	1,0078	0,5629	0,5898	1,1420	0,7352	0,9403	1,2380	1,0449	0,9589	1,1015	0,7739
22	0,6305	0,7212	0,6871	0,6535	0,7205	0,4588	0,5997	1,0379	0,8484	0,7757	1,0706	0,8164
23	0,5612	0,9895	0,6633	0,6873	1,0153	0,6637	0,8561	1,1448	0,9650	0,8860	1,1026	0,7960
24	0,5999	0,7613	0,7503	0,7603	0,8122	0,5324	0,6746	0,9749	0,8030	0,7606	1,0012	0,8280
25	1,0494	0,8335	1,1887	1,1931	0,7122	1,0399	0,9117	0,3630	0,4863	0,5634	0,6765	0,7626
26	1,2225	0,8551	1,1490	1,1863	0,7986	1,1165	0,9292	0,4209	0,5185	0,6357	0,5824	0,6950
27	0,7680	0,6507	0,8136	0,8764	0,7328	0,5823	0,6384	0,9119	0,7694	0,8759	0,9276	0,8940
28	0,6970	0,7983	0,6809	0,7456	0,8519	0,6290	0,6730	0,9338	0,7361	0,7700	0,8935	0,7643
29	0,7059	0,6007	0,8410	0,7708	0,6059	0,4969	0,5385	0,8193	0,6766	0,7720	0,9491	0,9189
30	0,8111	1,0335	0,5527	0,5763	1,1139	0,6772	0,9490	1,2285	1,0884	0,9804	1,1054	0,7892
31	0,7775	1,0621	0,5648	0,5774	1,1346	0,6919	0,9505	1,2117	1,0512	0,9434	1,1182	0,8172
32	0,7313	0,9577	0,8083	0,8874	1,0137	0,7510	0,8843	1,0247	0,8892	0,8490	0,9235	0,8350
33	0,7090	1,0070	0,8202	0,8178	1,0195	0,7573	0,8598	1,0864	0,9061	0,8498	0,9554	0,8432
34	0,6163	1,0697	0,6119	0,7094	1,1409	0,6493	0,9217	1,2410	1,0801	0,9176	1,1667	0,8603
35	0,5866	1,1237	0,6223	0,7202	1,2055	0,7598	1,0016	1,3045	1,1167	1,0056	1,2136	0,8920
36	0,5772	0,9119	0,5600	0,6627	0,9935	0,6050	0,7999	1,1282	1,0280	0,8627	1,0845	0,8002
37	0	0,9034	0,7264	0,7807	0,9728	0,5546	0,7817	1,1000	0,9611	0,8391	1,0759	0,8415
38	0,9034	0	0,9634	0,9687	0,4724	0,6722	0,5970	0,8268	0,8146	0,9376	0,9622	1,0591
39	0,7264	0,9634	0	0,5889	1,0864	0,6916	0,9373	1,1869	1,0152	0,9330	1,1066	0,8036
40	0,7807	0,9687	0,5889	0	0,9978	0,6705	0,8712	1,1765	1,0023	0,9109	1,1047	0,8052
41	0,9728	0,4724	1,0864	0,9978	0	0,6278	0,6603	0,7110	0,8719	0,9440	0,9602	1,1461
42	0,5546	0,6722	0,6916	0,6705	0,6278	0	0,5118	1,0432	0,9219	0,8138	1,0994	0,8767
43	0,7817	0,5970	0,9373	0,8712	0,6603	0,5118	0	0,9036	0,7817	0,8133	0,9020	0,9531
44	1,1000	0,8268	1,1869	1,1765	0,7110	1,0432	0,9036	0	0,4986	0,5207	0,6121	0,7819
45	0,9611	0,8146	1,0152	1,0023	0,8719	0,9219	0,7817	0,4986	0	0,4154	0,5766	0,5652
46	0,8391	0,9376	0,9330	0,9109	0,9440	0,8138	0,8133	0,5207	0,4154	0	0,5706	0,5203
47	1,0759	0,9622	1,1066	1,1047	0,9602	1,0994	0,9020	0,6121	0,5766	0,5706	0	0,6875
48	0,8415	1,0591	0,8036	0,8052	1,1461	0,8767	0,9531	0,7819	0,5652	0,5203	0,6875	0
49	1,1619	0,8109	1,2403	1,2535	0,7569	1,1273	0,9708	0,4482	0,4778	0,6950	0,6990	0,8327
50	0,9673	0,5144	1,1152	1,1525	0,5269	0,7119	0,7768	0,9013	0,9306	1,0857	1,1096	1,2211
51	1,0242	0,6789	1,0690	0,9916	0,7356	0,6864	0,7609	0,8964	0,9465	0,9443	0,9792	1,1481
52	1,1668	0,7593	1,0921	0,9968	0,7889	0,8485	0,7281	0,9651	0,8334	0,9500	0,8645	1,1132
53	0,9635	0,5953	0,9434	0,8456	0,6639	0,6244	0,5801	0,9007	0,7045	0,8157	0,9127	0,9743
54	1,0738	0,6093	1,0223	0,9224	0,6628	0,7655	0,6479	0,8418	0,7287	0,8791	0,8510	1,0106
55	1,0999	0,6481	1,0987	1,0050	0,6633	0,7262	0,6981	0,7909	0,8455	0,9811	0,9071	1,1438
56	1,0611	0,5642	1,0550	0,9765	0,5724	0,7181	0,6574	0,8163	0,8215	0,9034	0,9051	1,0956
57	1,1382	0,5966	1,0812	0,9890	0,6730	0,8074	0,7296	0,8881	0,8248	0,9559	0,8755	1,0934
58	1,0892	0,5810	1,0349	0,9375	0,6914	0,7798	0,6599	0,8446	0,7567	0,8924	0,8393	1,0315
59	1,1228	0,6430	1,0792	0,9991	0,7000	0,7968	0,7333	0,8826	0,7896	0,9480	0,8664	1,0929
60	1,2901	0,7136	1,2613	1,2211	0,6965	0,8586	1,0111	0,9432	1,1179	1,1746	1,0780	1,3048

Tabella A.25: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 5, colonne 49-60.

	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
1	0,9381	0,5922	0,6865	0,6988	0,5073	0,5755	0,6123	0,5970	0,5962	0,6072	0,6170	0,8499
2	1,2297	1,1842	1,0954	1,1277	0,9875	1,0443	1,1153	1,0924	1,1293	1,0814	1,1118	1,3118
3	0,7893	0,5516	0,7491	0,7028	0,5688	0,5980	0,6264	0,6073	0,6502	0,6172	0,6471	0,8118
4	0,9003	0,7343	0,7878	0,7737	0,5903	0,6699	0,7329	0,7118	0,7398	0,7121	0,7404	1,0117
5	1,1986	1,0909	1,0777	1,0618	0,9000	0,9784	1,0723	1,0371	1,0738	0,9918	1,0563	1,2792
6	1,0328	0,8813	0,7557	0,8398	0,6902	0,7685	0,7789	0,7577	0,8174	0,7870	0,8337	1,0302
7	1,2864	1,2704	1,3370	1,4420	1,3028	1,3661	1,4202	1,3916	1,4224	1,3813	1,4176	1,5510
8	1,3954	1,2500	1,1932	1,2551	1,1310	1,1974	1,2417	1,2144	1,2381	1,1974	1,2428	1,3522
9	1,4026	1,3219	1,3346	1,4053	1,2759	1,3553	1,3919	1,3657	1,4008	1,3643	1,3984	1,5002
10	1,3966	1,3967	1,3066	1,4088	1,2694	1,3349	1,4161	1,3623	1,4117	1,3557	1,4108	1,5669
11	1,3799	1,3109	1,3122	1,4357	1,2912	1,3396	1,4166	1,3669	1,3875	1,3553	1,4035	1,5334
12	1,3543	1,2471	1,1757	1,2061	1,0691	1,1298	1,1951	1,1714	1,2078	1,1626	1,1919	1,3532
13	1,3101	1,2383	1,1312	1,1409	1,0047	1,0645	1,1384	1,1066	1,1292	1,0735	1,1240	1,3168
14	1,2330	1,1401	1,0778	1,0999	0,9139	1,0077	1,1179	1,0642	1,0976	1,0089	1,0984	1,3727
15	1,2312	1,1029	1,0502	1,0796	0,8952	1,0067	1,0817	1,0348	1,0638	1,0143	1,0695	1,3072
16	1,2808	1,1817	1,0739	1,1232	0,9694	1,0569	1,1009	1,0713	1,1213	1,0611	1,1224	1,2894
17	1,2320	1,1546	1,1439	1,1554	1,0126	1,0737	1,1405	1,1242	1,1469	1,0889	1,1483	1,3682
18	1,2442	1,0318	1,0038	1,0672	0,8795	0,9619	0,9895	1,0086	1,0556	1,0030	1,0474	1,1916
19	1,1684	1,0637	1,0591	1,0575	0,9010	0,9710	1,0579	1,0276	1,0515	0,9898	1,0406	1,2784
20	1,2795	1,2021	1,0998	1,0986	0,9341	1,0062	1,1051	1,0760	1,0867	1,0228	1,0801	1,3304
21	1,2881	1,1928	1,1449	1,1656	1,0026	1,0653	1,1596	1,1059	1,1359	1,0782	1,1327	1,3444
22	1,1085	0,8460	0,7467	0,8144	0,5908	0,7408	0,7782	0,7282	0,7934	0,7523	0,7795	0,9855
23	1,2211	1,0773	1,0264	1,1206	0,9154	1,0204	1,0733	1,0364	1,0874	1,0233	1,0730	1,2607
24	1,0402	0,8720	0,8360	0,8903	0,6980	0,7946	0,8287	0,7862	0,8987	0,8461	0,8611	1,0909
25	0,3334	0,7891	0,9781	0,9284	0,8966	0,7907	0,8678	0,8330	0,8413	0,8128	0,8315	0,9880
26	0,3697	0,8495	1,0095	0,9412	0,9006	0,7861	0,8377	0,8166	0,8688	0,8337	0,8508	1,0249
27	0,9596	0,7167	0,7947	0,7809	0,6087	0,7055	0,7578	0,7187	0,7674	0,7504	0,7626	1,0495
28	1,0041	0,9497	0,8872	0,8348	0,6756	0,7447	0,8269	0,8200	0,8488	0,7857	0,8170	1,1431
29	0,8507	0,6285	0,6882	0,7357	0,4897	0,5865	0,6244	0,6106	0,6879	0,6316	0,6718	0,9123
30	1,3256	1,2332	1,0697	1,1209	0,9488	1,0445	1,0975	1,0507	1,1127	1,0546	1,1190	1,3330
31	1,2937	1,2063	1,0824	1,0981	0,9508	1,0282	1,0876	1,0781	1,1093	1,0558	1,1094	1,3038
32	1,2362	1,1870	0,9729	1,0683	0,9593	0,9996	1,0556	1,0423	1,0865	1,0239	1,0751	1,2904
33	1,1802	1,0883	1,0233	1,0637	0,9218	0,9781	1,0628	1,0185	1,0693	1,0050	1,0647	1,2653
34	1,3002	1,2030	1,1864	1,3005	1,1324	1,2216	1,2796	1,2142	1,2726	1,2418	1,2744	1,3862
35	1,3181	1,1949	1,2190	1,3368	1,1491	1,2360	1,3185	1,2428	1,3048	1,2742	1,2929	1,4368
36	1,2598	1,0368	0,9795	1,1402	0,9682	1,0717	1,0816	1,0408	1,1228	1,0865	1,1270	1,2125
37	1,1619	0,9673	1,0242	1,1668	0,9635	1,0738	1,0999	1,0611	1,1382	1,0892	1,1228	1,2901
38	0,8109	0,5144	0,6789	0,7593	0,5953	0,6093	0,6481	0,5642	0,5966	0,5810	0,6430	0,7136
39	1,2403	1,1152	1,0690	1,0921	0,9434	1,0223	1,0987	1,0550	1,0812	1,0349	1,0792	1,2613
40	1,2535	1,1525	0,9916	0,9968	0,8456	0,9224	1,0050	0,9765	0,9890	0,9375	0,9991	1,2211
41	0,7569	0,5269	0,7356	0,7889	0,6639	0,6628	0,6633	0,5724	0,6730	0,6914	0,7000	0,6965
42	1,1273	0,7119	0,6864	0,8485	0,6244	0,7655	0,7262	0,7181	0,8074	0,7798	0,7968	0,8586
43	0,9708	0,7768	0,7609	0,7281	0,5801	0,6479	0,6981	0,6574	0,7296	0,6599	0,7333	1,0111
44	0,4482	0,9013	0,8964	0,9651	0,9007	0,8418	0,7909	0,8163	0,8881	0,8446	0,8826	0,9432
45	0,4778	0,9306	0,9465	0,8334	0,7045	0,7287	0,8455	0,8215	0,8248	0,7567	0,7896	1,1179
46	0,6950	1,0857	0,9443	0,9500	0,8157	0,8791	0,9811	0,9034	0,9559	0,8924	0,9480	1,1746
47	0,6990	1,1096	0,9792	0,8645	0,9127	0,8510	0,9071	0,9051	0,8755	0,8393	0,8664	1,0780
48	0,8327	1,2211	1,1481	1,1132	0,9743	1,0106	1,1438	1,0956	1,0934	1,0315	1,0929	1,3048
49	0	0,5031	1,1212	1,0059	0,9385	0,8032	0,8882	0,9197	0,8766	0,8274	0,8632	0,9556
50	0,5031	0	0,9452	0,8733	0,7315	0,7070	0,7122	0,6840	0,6304	0,7301	0,6921	0,5547
51	1,1212	0,9452	0	0,8626	0,7376	0,7943	0,7534	0,6636	0,8468	0,8455	0,8389	0,9507
52	1,0059	0,8733	0,8626	0	0,6432	0,6383	0,7956	0,6785	0,5805	0,6190	0,5854	1,1095
53	0,9385	0,7315	0,7376	0,6432	0	0,5506	0,6021	0,5995	0,5990	0,5790	0,6148	1,0342
54	0,8032	0,7070	0,7943	0,6383	0,5506	0	0,6511	0,6198	0,5966	0,5140	0,5464	0,9477
55	0,8882	0,7122	0,7534	0,7956	0,6021	0,6511	0	0,6355	0,7014	0,6704	0,6535	0,8673
56	0,9197	0,6840	0,6636	0,6785	0,5995	0,6198	0,6355	0	0,5364	0,6084	0,4673	0,8886
57	0,8766	0,6304	0,8468	0,5805	0,5990	0,5966	0,7014	0,5364	0	0,4999	0,4669	0,9639
58	0,8274	0,7301	0,8455	0,6190	0,5790	0,5140	0,6704	0,6084	0,4999	0	0,5664	0,9280
59	0,8632	0,6921	0,8389	0,5854	0,6148	0,5464	0,6535	0,4673	0,4669	0,5664	0	0,9650
60	0,9556	0,5547	0,9507	1,1095	1,0342	0,9477	0,8673	0,8886	0,9639	0,9280	0,9650	0

Tabella A.26: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 6, colonne 1-12.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	0,9841	0,5162	0,5104	0,8914	0,6403	1,2738	1,1219	1,2389	1,2401	1,2724	1,0645
2	0,9841	0	0,9858	0,7370	0,5759	0,9082	0,6103	0,5462	0,5649	0,5993	0,6306	0,5882
3	0,5162	0,9858	0	0,6095	0,8716	0,7017	1,0326	1,0437	1,1310	1,1162	1,0449	1,0893
4	0,5104	0,7370	0,6095	0	0,6396	0,6338	0,7416	0,7678	0,8356	0,8066	0,7067	0,8919
5	0,8914	0,5759	0,8716	0,6396	0	0,8650	0,6395	0,5967	0,6505	0,6468	0,6097	0,6979
6	0,6403	0,9082	0,7017	0,6338	0,8650	0	0,9123	0,8973	0,9349	0,9124	0,9092	1,0350
7	1,2738	0,6103	1,0326	0,7416	0,6395	0,9123	0	0,5342	0,5359	0,5218	0,4919	0,7068
8	1,1219	0,5462	1,0437	0,7678	0,5967	0,8973	0,5342	0	0,4703	0,5126	0,5322	0,5996
9	1,2389	0,5649	1,1310	0,8356	0,6505	0,9349	0,5359	0,4703	0	0,5454	0,5748	0,6176
10	1,2401	0,5993	1,1162	0,8066	0,6468	0,9124	0,5218	0,5126	0,5454	0	0,5242	0,7073
11	1,2724	0,6306	1,0449	0,7067	0,6097	0,9092	0,4919	0,5322	0,5748	0,5242	0	0,7304
12	1,0645	0,5882	1,0893	0,8919	0,6979	1,0350	0,7068	0,5996	0,6176	0,7073	0,7304	0
13	1,0110	0,5648	1,0284	0,8341	0,6141	0,9562	0,6442	0,5491	0,5949	0,6688	0,6675	0,5776
14	0,8866	0,6005	0,9687	0,6450	0,5483	0,8689	0,6208	0,5814	0,6835	0,6105	0,5942	0,7214
15	0,8967	0,5559	0,9052	0,6160	0,5517	0,8310	0,5817	0,5473	0,5902	0,5654	0,5578	0,6775
16	0,9559	0,5420	0,9662	0,6741	0,5406	0,8505	0,5445	0,5185	0,5600	0,5356	0,5518	0,6462
17	0,9825	0,5528	0,9550	0,6746	0,5216	0,8988	0,5658	0,5506	0,6055	0,5469	0,5672	0,6829
18	0,8971	0,6028	0,9117	0,7330	0,6092	0,8533	0,6764	0,6250	0,6357	0,6879	0,7071	0,6384
19	0,9074	0,5516	0,8702	0,6189	0,4901	0,8644	0,6131	0,5946	0,6466	0,6340	0,5952	0,6738
20	0,9295	0,5616	0,9643	0,6777	0,5287	0,9115	0,5918	0,5913	0,6327	0,6008	0,5720	0,6766
21	1,0231	0,5497	0,9602	0,7383	0,5324	0,9650	0,5727	0,5769	0,6219	0,6135	0,5983	0,6176
22	0,6165	0,7082	0,6429	0,6023	0,6509	0,6457	0,7979	0,7079	0,7709	0,8207	0,8867	0,7951
23	0,9211	0,6699	0,8579	0,7028	0,6403	0,7767	0,6062	0,6410	0,6715	0,6605	0,6771	0,7841
24	0,6691	0,7628	0,6851	0,5881	0,6771	0,6648	0,7224	0,7443	0,7879	0,7827	0,7560	0,8739
25	0,8821	1,1882	0,7629	0,8594	1,1270	0,9333	1,2088	1,2909	1,3152	1,3100	1,3076	1,2970
26	0,8771	1,1347	0,7953	0,8300	1,0705	0,9266	1,2399	1,2757	1,3152	1,2701	1,1850	1,2732
27	0,4847	0,8497	0,6409	0,4878	0,7352	0,6960	0,8175	0,8180	0,9117	0,8651	0,7770	0,9977
28	0,6785	0,7154	0,7075	0,5124	0,5962	0,7413	0,7092	0,7678	0,8038	0,7818	0,7033	0,8906
29	0,4535	0,8443	0,5115	0,4937	0,7952	0,6154	0,9082	0,8866	0,9738	0,9508	0,9446	0,9707
30	0,9641	0,5520	0,9518	0,7043	0,5497	0,9074	0,6602	0,5758	0,6460	0,6092	0,6203	0,6450
31	0,9554	0,5563	1,0113	0,7358	0,5673	0,9103	0,6738	0,5784	0,6337	0,6560	0,6164	0,6243
32	0,9756	0,8241	0,9338	0,6858	0,7717	0,8235	0,7296	0,8024	0,8588	0,7593	0,6942	0,9618
33	0,9492	0,8670	0,9021	0,7977	0,7782	0,8570	0,7564	0,8201	0,8546	0,8240	0,7869	0,9713
34	1,0902	0,6115	0,9830	0,7231	0,6396	0,9197	0,5817	0,6049	0,6037	0,6156	0,5824	0,7119
35	1,1186	0,6188	1,0419	0,7782	0,7031	0,9337	0,5735	0,6211	0,6307	0,5625	0,5946	0,6719
36	0,9343	0,5855	0,9095	0,6314	0,6038	0,8000	0,5906	0,5912	0,6125	0,6035	0,5993	0,7062
37	0,9222	0,7275	0,7809	0,6405	0,7104	0,7276	0,6512	0,6964	0,7242	0,7056	0,6968	0,8573
38	0,5716	1,0256	0,5008	0,6557	0,9394	0,7550	1,1180	1,1367	1,2487	1,2057	1,1736	1,1245
39	0,9347	0,5276	0,9546	0,7150	0,5496	0,8897	0,6132	0,5488	0,5907	0,6222	0,6093	0,6063
40	0,8780	0,5808	0,9013	0,7448	0,6051	0,8313	0,6996	0,6170	0,6398	0,6683	0,6837	0,6583
41	0,5811	1,0901	0,5286	0,6968	1,0220	0,7062	1,1744	1,1537	1,2706	1,2969	1,2956	1,1792
42	0,5803	0,7262	0,6105	0,5464	0,6774	0,5591	0,7741	0,7546	0,7665	0,8241	0,8295	0,8166
43	0,5591	0,9486	0,6092	0,6185	0,8828	0,6787	0,9925	1,0206	1,0969	1,0884	1,0168	1,0564
44	0,9125	1,1794	0,8076	0,8623	1,1197	0,8814	1,3632	1,3365	1,3919	1,3811	1,3479	1,2848
45	0,7502	1,0435	0,7270	0,7105	0,9280	0,8215	1,1144	1,1890	1,2335	1,1572	1,1774	1,1500
46	0,8518	0,9599	0,8726	0,7423	0,8644	0,8286	1,0008	1,0840	1,1002	1,0351	1,0869	1,0748
47	0,9900	1,1024	0,9207	0,8962	1,0200	0,9408	1,1822	1,1936	1,2518	1,1746	1,1192	1,2428
48	0,9897	0,8188	0,9990	0,7950	0,7323	0,9432	0,8308	0,9135	0,9234	0,8635	0,8392	0,9616
49	0,9281	1,2127	0,7797	0,8904	1,1807	1,0194	1,2710	1,3789	1,3867	1,3778	1,3607	1,3339
50	0,5825	1,1609	0,5415	0,7219	1,0693	0,8666	1,2489	1,2296	1,2981	1,3706	1,2847	1,2219
51	0,6738	1,0727	0,7351	0,7721	1,0568	0,7433	1,3129	1,1723	1,3115	1,2824	1,2896	1,1534
52	0,6844	1,1037	0,6879	0,7563	1,0403	0,8249	1,4139	1,2335	1,3814	1,3826	1,4058	1,1822
53	0,4979	0,9661	0,5582	0,5779	0,8805	0,6781	1,2792	1,1130	1,2560	1,2472	1,2673	1,0481
54	0,5638	1,0219	0,5862	0,6550	0,9565	0,7540	1,3430	1,1782	1,3339	1,3141	1,3185	1,1055
55	0,6015	1,0920	0,6146	0,7177	1,0509	0,7643	1,3949	1,2209	1,3682	1,3908	1,3949	1,1715
56	0,5849	1,0692	0,5948	0,6967	1,0141	0,7436	1,3674	1,1935	1,3432	1,3397	1,3438	1,1470
57	0,5853	1,1063	0,6364	0,7243	1,0522	0,8042	1,3973	1,2184	1,3788	1,3857	1,3653	1,1840
58	0,5946	1,0587	0,6047	0,6964	0,9704	0,7722	1,3578	1,1783	1,3426	1,3337	1,3347	1,1384
59	0,6050	1,0880	0,6344	0,7248	1,0319	0,8187	1,3933	1,2236	1,3757	1,3876	1,3813	1,1680
60	0,8364	1,2868	0,7952	0,9919	1,2542	1,0115	1,5241	1,3294	1,4745	1,5410	1,5033	1,3250

Tabella A.27: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 6, colonne 13-24.

	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	1,0110	0,8866	0,8967	0,9559	0,9825	0,8971	0,9074	0,9295	1,0231	0,6165	0,9211	0,6691
2	0,5648	0,6005	0,5559	0,5420	0,5528	0,6028	0,5516	0,5616	0,5497	0,7082	0,6699	0,7628
3	1,0284	0,9687	0,9052	0,9662	0,9550	0,9117	0,8702	0,9643	0,9602	0,6429	0,8579	0,6851
4	0,8341	0,6450	0,6160	0,6741	0,6746	0,7330	0,6189	0,6777	0,7383	0,6023	0,7028	0,5881
5	0,6141	0,5483	0,5517	0,5406	0,5216	0,6092	0,4901	0,5287	0,5324	0,6509	0,6403	0,6771
6	0,9562	0,8689	0,8310	0,8505	0,8988	0,8533	0,8644	0,9115	0,9650	0,6457	0,7767	0,6648
7	0,6442	0,6208	0,5817	0,5445	0,5658	0,6764	0,6131	0,5918	0,5727	0,7979	0,6062	0,7224
8	0,5491	0,5814	0,5473	0,5185	0,5506	0,6250	0,5946	0,5913	0,5769	0,7079	0,6410	0,7443
9	0,5949	0,6835	0,5902	0,5600	0,6055	0,6357	0,6466	0,6327	0,6219	0,7709	0,6715	0,7879
10	0,6688	0,6105	0,5654	0,5356	0,5469	0,6879	0,6340	0,6008	0,6135	0,8207	0,6605	0,7827
11	0,6675	0,5942	0,5578	0,5518	0,5672	0,7071	0,5952	0,5720	0,5983	0,8867	0,6771	0,7560
12	0,5776	0,7214	0,6775	0,6462	0,6829	0,6384	0,6738	0,6766	0,6176	0,7951	0,7841	0,8739
13	0	0,6611	0,6272	0,5800	0,5976	0,5792	0,6132	0,6031	0,5707	0,7243	0,6871	0,8123
14	0,6611	0	0,5182	0,5095	0,4957	0,6294	0,5266	0,5280	0,5634	0,6392	0,6583	0,6802
15	0,6272	0,5182	0	0,5107	0,5003	0,5856	0,5374	0,5385	0,5443	0,6389	0,6071	0,6619
16	0,5800	0,5095	0,5107	0	0,4740	0,5575	0,5157	0,5140	0,5232	0,6703	0,6090	0,6895
17	0,5976	0,4957	0,5003	0,4740	0	0,5862	0,5179	0,5277	0,5314	0,7175	0,6446	0,7138
18	0,5792	0,6294	0,5856	0,5575	0,5862	0	0,5930	0,6038	0,6100	0,6099	0,5791	0,6470
19	0,6132	0,5266	0,5374	0,5157	0,5179	0,5930	0	0,5224	0,5016	0,6472	0,6473	0,6834
20	0,6031	0,5280	0,5385	0,5140	0,5277	0,6038	0,5224	0	0,5265	0,6549	0,6185	0,7252
21	0,5707	0,5634	0,5443	0,5232	0,5314	0,6100	0,5016	0,5265	0	0,7248	0,6445	0,7733
22	0,7243	0,6392	0,6389	0,6703	0,7175	0,6099	0,6472	0,6549	0,7248	0	0,6156	0,5627
23	0,6871	0,6583	0,6071	0,6090	0,6446	0,5791	0,6473	0,6185	0,6445	0,6156	0	0,6235
24	0,8123	0,6802	0,6619	0,6895	0,7138	0,6470	0,6834	0,7252	0,7733	0,5627	0,6235	0
25	1,2437	1,1842	1,1251	1,1847	1,1772	1,1734	1,0948	1,1952	1,2069	1,0171	1,1168	0,9752
26	1,2381	1,0987	1,1210	1,1301	1,0559	1,1997	1,0194	1,1181	1,1442	1,0667	1,2089	1,0047
27	0,9482	0,7178	0,7186	0,7601	0,7516	0,8726	0,6883	0,7590	0,7860	0,6427	0,8386	0,6911
28	0,8232	0,6269	0,6172	0,6173	0,6249	0,7517	0,5928	0,6476	0,6490	0,6427	0,7082	0,6270
29	0,8875	0,8072	0,7686	0,8201	0,8393	0,7703	0,7829	0,8198	0,9022	0,5097	0,7399	0,5611
30	0,6024	0,5427	0,5469	0,5209	0,5461	0,6057	0,5395	0,5206	0,5444	0,6724	0,6837	0,7873
31	0,5706	0,5807	0,5793	0,5232	0,5645	0,5957	0,5462	0,5548	0,5550	0,6992	0,6826	0,7751
32	0,9218	0,7489	0,7282	0,7809	0,7275	0,8615	0,7249	0,7631	0,7884	0,8278	0,7489	0,7701
33	0,8554	0,7919	0,7870	0,7845	0,7779	0,7853	0,7643	0,7942	0,7923	0,8012	0,6889	0,7649
34	0,6658	0,6671	0,5564	0,5840	0,5907	0,6555	0,5821	0,6228	0,5852	0,7093	0,5971	0,7017
35	0,6465	0,6660	0,5940	0,5918	0,6222	0,6423	0,6643	0,6662	0,6318	0,7581	0,6183	0,7487
36	0,6583	0,5416	0,5265	0,5191	0,5404	0,6215	0,5624	0,5589	0,5937	0,6426	0,6123	0,6394
37	0,7866	0,6637	0,6034	0,6670	0,6771	0,6431	0,6629	0,7449	0,7221	0,6175	0,5501	0,5869
38	1,0753	0,9631	0,9342	1,0232	1,0354	0,9473	0,8884	1,0185	0,9887	0,7079	0,9702	0,7460
39	0,5795	0,5726	0,5511	0,5062	0,5485	0,5714	0,5311	0,5416	0,5499	0,6732	0,6493	0,7345
40	0,5842	0,6200	0,6122	0,5822	0,5911	0,6090	0,5811	0,5780	0,5758	0,6397	0,6720	0,7436
41	1,1311	1,0943	1,0262	1,0830	1,1241	0,9988	1,0050	1,0915	1,1183	0,7049	0,9956	0,7959
42	0,7458	0,6594	0,6144	0,6443	0,6771	0,6223	0,6375	0,6626	0,7205	0,4492	0,6500	0,5216
43	0,9622	0,8938	0,8295	0,9065	0,9148	0,8632	0,8303	0,8928	0,9216	0,5883	0,8389	0,6626
44	1,2371	1,1729	1,1467	1,1690	1,1723	1,1404	1,1150	1,1752	1,2185	1,0259	1,1283	0,9618
45	1,0667	0,9615	0,9732	1,0325	1,0127	0,9980	0,9275	0,9856	1,0278	0,8375	0,9510	0,7915
46	0,9768	0,8577	0,8699	0,9085	0,9150	0,9103	0,8518	0,8849	0,9451	0,7675	0,8740	0,7510
47	1,1871	1,0446	1,0764	1,0774	1,0520	1,1301	1,0165	1,0708	1,0803	1,0588	1,0861	0,9866
48	0,8713	0,7353	0,7430	0,7779	0,7489	0,8422	0,7098	0,7541	0,7633	0,8063	0,7840	0,8167
49	1,2906	1,2169	1,2159	1,2643	1,2147	1,2290	1,1527	1,2613	1,2695	1,0954	1,2039	1,0241
50	1,2142	1,1180	1,0826	1,1606	1,1337	1,0124	1,0420	1,1793	1,1703	0,8308	1,0578	0,8559
51	1,1089	1,0558	1,0304	1,0537	1,1228	0,9836	1,0353	1,0773	1,1196	0,7336	1,0062	0,8212
52	1,1187	1,0787	1,0569	1,1023	1,1326	1,0465	1,0357	1,0759	1,1425	0,7985	1,0970	0,8723
53	0,9852	0,8957	0,8770	0,9508	0,9930	0,8612	0,8805	0,9142	0,9787	0,5800	0,8981	0,6842
54	1,0421	0,9868	0,9864	1,0360	1,0527	0,9385	0,9476	0,9842	1,0411	0,7254	0,9999	0,7785
55	1,1165	1,0939	1,0592	1,0800	1,1168	0,9704	1,0335	1,0820	1,1330	0,7630	1,0529	0,8132
56	1,0838	1,0425	1,0132	1,0502	1,1014	0,9869	1,0036	1,0517	1,0788	0,7135	1,0164	0,7696
57	1,1070	1,0762	1,0419	1,1005	1,1236	1,0344	1,0268	1,0650	1,1098	0,7780	1,0667	0,8823
58	1,0513	0,9876	0,9930	1,0403	1,0661	0,9786	0,9661	1,0013	1,0538	0,7372	1,0032	0,8279
59	1,1007	1,0758	1,0466	1,1002	1,1256	1,0246	1,0158	1,0561	1,1069	0,7653	1,0520	0,8442
60	1,2918	1,3444	1,2812	1,2654	1,3408	1,1698	1,2500	1,3053	1,3146	0,9681	1,2367	1,0675

Tabella A.28: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 6, colonne 25-36.

	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
1	0,8821	0,8771	0,4847	0,6785	0,4535	0,9641	0,9554	0,9756	0,9492	1,0902	1,1186	0,9343
2	1,1882	1,1347	0,8497	0,7154	0,8443	0,5520	0,5563	0,8241	0,8670	0,6115	0,6188	0,5855
3	0,7629	0,7953	0,6409	0,7075	0,5115	0,9518	1,0113	0,9338	0,9021	0,9830	1,0419	0,9095
4	0,8594	0,8300	0,4878	0,5124	0,4937	0,7043	0,7358	0,6858	0,7977	0,7231	0,7782	0,6314
5	1,1270	1,0705	0,7352	0,5962	0,7952	0,5497	0,5673	0,7717	0,7782	0,6396	0,7031	0,6038
6	0,9333	0,9266	0,6960	0,7413	0,6154	0,9074	0,9103	0,8235	0,8570	0,9197	0,9337	0,8000
7	1,2088	1,2399	0,8175	0,7092	0,9082	0,6602	0,6738	0,7296	0,7564	0,5817	0,5735	0,5906
8	1,2909	1,2757	0,8180	0,7678	0,8866	0,5758	0,5784	0,8024	0,8201	0,6049	0,6211	0,5912
9	1,3152	1,3152	0,9117	0,8038	0,9738	0,6460	0,6337	0,8588	0,8546	0,6037	0,6307	0,6125
10	1,3100	1,2701	0,8651	0,7818	0,9508	0,6092	0,6560	0,7593	0,8240	0,6156	0,5625	0,6035
11	1,3076	1,1850	0,7770	0,7033	0,9446	0,6203	0,6164	0,6942	0,7869	0,5824	0,5946	0,5993
12	1,2970	1,2732	0,9977	0,8906	0,9707	0,6450	0,6243	0,9618	0,9713	0,7119	0,6719	0,7062
13	1,2437	1,2381	0,9482	0,8232	0,8875	0,6024	0,5706	0,9218	0,8554	0,6658	0,6465	0,6583
14	1,1842	1,0987	0,7178	0,6269	0,8072	0,5427	0,5807	0,7489	0,7919	0,6671	0,6660	0,5416
15	1,1251	1,1210	0,7186	0,6172	0,7686	0,5469	0,5793	0,7282	0,7870	0,5564	0,5940	0,5265
16	1,1847	1,1301	0,7601	0,6173	0,8201	0,5209	0,5232	0,7809	0,7845	0,5840	0,5918	0,5191
17	1,1772	1,0559	0,7516	0,6249	0,8393	0,5461	0,5645	0,7275	0,7779	0,5907	0,6222	0,5404
18	1,1734	1,1997	0,8726	0,7517	0,7703	0,6057	0,5957	0,8615	0,7853	0,6555	0,6423	0,6215
19	1,0948	1,0194	0,6883	0,5928	0,7829	0,5395	0,5462	0,7249	0,7643	0,5821	0,6643	0,5624
20	1,1952	1,1181	0,7590	0,6476	0,8198	0,5206	0,5548	0,7631	0,7942	0,6228	0,6662	0,5589
21	1,2069	1,1442	0,7860	0,6490	0,9022	0,5444	0,5550	0,7884	0,7923	0,5852	0,6318	0,5937
22	1,0171	1,0667	0,6427	0,6427	0,5097	0,6724	0,6992	0,8278	0,8012	0,7093	0,7581	0,6426
23	1,1168	1,2089	0,8386	0,7082	0,7399	0,6837	0,6826	0,7489	0,6889	0,5971	0,6183	0,6123
24	0,9752	1,0047	0,6911	0,6270	0,5611	0,7873	0,7751	0,7701	0,7649	0,7017	0,7487	0,6394
25	0	0,3207	0,9074	0,9155	0,7944	1,2596	1,2033	1,0488	1,1082	1,1709	1,2380	1,1037
26	0,3207	0	0,7632	0,8413	0,7973	1,1234	1,1312	0,9914	1,1368	1,2771	1,3083	1,1373
27	0,9074	0,7632	0	0,5386	0,5860	0,7633	0,8237	0,7685	0,9317	0,8979	0,9378	0,7246
28	0,9155	0,8413	0,5386	0	0,6036	0,6669	0,7119	0,6811	0,7404	0,7239	0,8075	0,6435
29	0,7944	0,7973	0,5860	0,6036	0	0,8369	0,8638	0,8111	0,8352	0,8752	0,9141	0,7292
30	1,2596	1,1234	0,7633	0,6669	0,8369	0	0,5454	0,8053	0,8310	0,6578	0,6872	0,5930
31	1,2033	1,1312	0,8237	0,7119	0,8638	0,5454	0	0,7989	0,8342	0,6282	0,6803	0,5876
32	1,0488	0,9914	0,7685	0,6811	0,8111	0,8053	0,7989	0	0,7346	0,7180	0,7712	0,6881
33	1,1082	1,1368	0,9317	0,7404	0,8352	0,8310	0,8342	0,7346	0	0,7393	0,7622	0,7105
34	1,1709	1,2771	0,8979	0,7239	0,8752	0,6578	0,6282	0,7180	0,7393	0	0,5222	0,5677
35	1,2380	1,3083	0,9378	0,8075	0,9141	0,6872	0,6803	0,7712	0,7622	0,5222	0	0,5760
36	1,1037	1,1373	0,7246	0,6435	0,7292	0,5930	0,5876	0,6881	0,7105	0,5677	0,5760	0
37	1,0369	1,2064	0,7527	0,6805	0,6912	0,7962	0,7612	0,7153	0,6945	0,6048	0,5735	0,5654
38	0,8262	0,8463	0,6384	0,7819	0,5897	1,0143	1,0401	0,9386	0,9871	1,0479	1,0997	0,8940
39	1,1725	1,1319	0,7971	0,6663	0,8226	0,5410	0,5529	0,7922	0,8029	0,5989	0,6093	0,5482
40	1,1775	1,1689	0,8578	0,7296	0,7551	0,5634	0,5646	0,8693	0,7992	0,6941	0,7053	0,6492
41	0,7067	0,7893	0,7196	0,8335	0,5947	1,0913	1,1115	0,9910	0,9989	1,1177	1,1818	0,9750
42	1,0317	1,1049	0,5711	0,6164	0,4882	0,6636	0,6771	0,7359	0,7423	0,6359	0,7456	0,5930
43	0,9011	0,9157	0,6272	0,6586	0,5285	0,9312	0,9325	0,8658	0,8421	0,9027	0,9806	0,7834
44	0,3564	0,4135	0,9012	0,9198	0,8095	1,2116	1,1928	1,0066	1,0655	1,2221	1,2852	1,1140
45	0,4782	0,5096	0,7605	0,7244	0,6678	1,0733	1,0345	0,8739	0,8885	1,0631	1,0977	1,0156
46	0,5532	0,6240	0,8655	0,7597	0,7632	0,9683	0,9295	0,8362	0,8350	0,9073	0,9917	0,8541
47	0,6629	0,5703	0,9172	0,8786	0,9375	1,0880	1,1005	0,9075	0,9374	1,1478	1,1945	1,0698
48	0,7492	0,6797	0,8808	0,7524	0,9044	0,7788	0,8058	0,8221	0,8293	0,8499	0,8797	0,7924
49	0,3267	0,3634	0,9489	0,9896	0,8409	1,3071	1,2735	1,2161	1,1587	1,2846	1,3000	1,2465
50	0,7837	0,8427	0,7055	0,9310	0,6182	1,2087	1,1823	1,1654	1,0686	1,1821	1,1722	1,0169
51	0,9672	0,9976	0,7811	0,8704	0,6772	1,0499	1,0601	0,9534	1,0023	1,1627	1,1957	0,9585
52	0,9173	0,9280	0,7652	0,8188	0,7209	1,0983	1,0746	1,0495	1,0399	1,2749	1,3086	1,1180
53	0,8877	0,8879	0,5967	0,6621	0,4800	0,9293	0,9302	0,9409	0,9033	1,1093	1,1255	0,9487
54	0,7799	0,7727	0,6924	0,7277	0,5747	1,0250	1,0045	0,9809	0,9564	1,1955	1,2110	1,0511
55	0,8581	0,8280	0,7441	0,8087	0,6122	1,0755	1,0640	1,0360	1,0388	1,2560	1,2929	1,0604
56	0,8241	0,8063	0,7061	0,8032	0,5993	1,0295	1,0556	1,0231	0,9970	1,1890	1,2166	1,0186
57	0,8319	0,8562	0,7548	0,8309	0,6738	1,0904	1,0863	1,0664	1,0467	1,2463	1,2778	1,1008
58	0,8009	0,8209	0,7362	0,7690	0,6183	1,0340	1,0320	1,0041	0,9826	1,2176	1,2491	1,0642
59	0,8211	0,8399	0,7480	0,7993	0,6587	1,0979	1,0853	1,0531	1,0409	1,2475	1,2679	1,1059
60	0,9744	1,0119	1,0324	1,1205	0,8960	1,3049	1,2763	1,2635	1,2349	1,3537	1,4054	1,1854

Tabella A.29: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 6, colonne 37-48.

	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
1	0,9222	0,5716	0,9347	0,8780	0,5811	0,5803	0,5591	0,9125	0,7502	0,8518	0,9900	0,9897
2	0,7275	1,0256	0,5276	0,5808	1,0901	0,7262	0,9486	1,1794	1,0435	0,9599	1,1024	0,8188
3	0,7809	0,5008	0,9546	0,9013	0,5286	0,6105	0,6092	0,8076	0,7270	0,8726	0,9207	0,9990
4	0,6405	0,6557	0,7150	0,7448	0,6968	0,5464	0,6185	0,8623	0,7105	0,7423	0,8962	0,7950
5	0,7104	0,9394	0,5496	0,6051	1,0220	0,6774	0,8828	1,1197	0,9280	0,8644	1,0200	0,7323
6	0,7276	0,7550	0,8897	0,8313	0,7062	0,5591	0,6787	0,8814	0,8215	0,8286	0,9408	0,9432
7	0,6512	1,1180	0,6132	0,6996	1,1744	0,7741	0,9925	1,3632	1,1144	1,0008	1,1822	0,8308
8	0,6964	1,1367	0,5488	0,6170	1,1537	0,7546	1,0206	1,3365	1,1890	1,0840	1,1936	0,9135
9	0,7242	1,2487	0,5907	0,6398	1,2706	0,7665	1,0969	1,3919	1,2335	1,1002	1,2518	0,9234
10	0,7056	1,2057	0,6222	0,6683	1,2969	0,8241	1,0884	1,3811	1,1572	1,0351	1,1746	0,8635
11	0,6968	1,1736	0,6093	0,6837	1,2956	0,8295	1,0168	1,3479	1,1774	1,0869	1,1192	0,8392
12	0,8573	1,1245	0,6063	0,6583	1,1792	0,8166	1,0564	1,2848	1,1500	1,0748	1,2428	0,9616
13	0,7866	1,0753	0,5795	0,5842	1,1311	0,7458	0,9622	1,2371	1,0667	0,9768	1,1871	0,8713
14	0,6637	0,9631	0,5726	0,6200	1,0943	0,6594	0,8938	1,1729	0,9615	0,8577	1,0446	0,7353
15	0,6034	0,9342	0,5511	0,6122	1,0262	0,6144	0,8295	1,1467	0,9732	0,8699	1,0764	0,7430
16	0,6670	1,0232	0,5062	0,5822	1,0830	0,6443	0,9065	1,1690	1,0325	0,9085	1,0774	0,7779
17	0,6771	1,0354	0,5485	0,5911	1,1241	0,6771	0,9148	1,1723	1,0127	0,9150	1,0520	0,7489
18	0,6431	0,9473	0,5714	0,6090	0,9988	0,6223	0,8632	1,1404	0,9980	0,9103	1,1301	0,8422
19	0,6629	0,8884	0,5311	0,5811	1,0050	0,6375	0,8303	1,1150	0,9275	0,8518	1,0165	0,7098
20	0,7449	1,0185	0,5416	0,5780	1,0915	0,6626	0,8928	1,1752	0,9856	0,8849	1,0708	0,7541
21	0,7221	0,9887	0,5499	0,5758	1,1183	0,7205	0,9216	1,2185	1,0278	0,9451	1,0803	0,7633
22	0,6175	0,7079	0,6732	0,6397	0,7049	0,4492	0,5883	1,0259	0,8375	0,7675	1,0588	0,8063
23	0,5501	0,9702	0,6493	0,6720	0,9956	0,6500	0,8389	1,1283	0,9510	0,8740	1,0861	0,7840
24	0,5869	0,7460	0,7345	0,7436	0,7959	0,5216	0,6626	0,9618	0,7915	0,7510	0,9866	0,8167
25	1,0369	0,8262	1,1725	1,1775	0,7067	1,0317	0,9011	0,3564	0,4782	0,5532	0,6629	0,7492
26	1,2064	0,8463	1,1319	1,1689	0,7893	1,1049	0,9157	0,4135	0,5096	0,6240	0,5703	0,6797
27	0,7527	0,6384	0,7971	0,8578	0,7196	0,5711	0,6272	0,9012	0,7605	0,8655	0,9172	0,8808
28	0,6805	0,7819	0,6663	0,7296	0,8335	0,6164	0,6586	0,9198	0,7244	0,7597	0,8786	0,7524
29	0,6912	0,5897	0,8226	0,7551	0,5947	0,4882	0,5285	0,8095	0,6678	0,7632	0,9375	0,9044
30	0,7962	1,0143	0,5410	0,5634	1,0913	0,6636	0,9312	1,2116	1,0733	0,9683	1,0880	0,7788
31	0,7612	1,0401	0,5529	0,5646	1,1115	0,6771	0,9325	1,1928	1,0345	0,9295	1,1005	0,8058
32	0,7153	0,9386	0,7922	0,8693	0,9910	0,7359	0,8658	1,0066	0,8739	0,8362	0,9075	0,8221
33	0,6945	0,9871	0,8029	0,7992	0,9989	0,7423	0,8421	1,0655	0,8885	0,8350	0,9374	0,8293
34	0,6048	1,0479	0,5989	0,6941	1,1177	0,6359	0,9027	1,2221	1,0631	0,9073	1,1478	0,8499
35	0,5735	1,0997	0,6093	0,7053	1,1818	0,7456	0,9806	1,2852	1,0977	0,9917	1,1945	0,8797
36	0,5654	0,8940	0,5482	0,6492	0,9750	0,5930	0,7834	1,1140	1,0156	0,8541	1,0698	0,7924
37	0	0,8865	0,7118	0,7645	0,9539	0,5441	0,7657	1,0858	0,9492	0,8291	1,0595	0,8302
38	0,8865	0	0,9446	0,9497	0,4639	0,6612	0,5850	0,8183	0,8056	0,9263	0,9527	1,0411
39	0,7118	0,9446	0	0,5750	1,0646	0,6765	0,9186	1,1702	0,9999	0,9200	1,0904	0,7919
40	0,7645	0,9497	0,5750	0	0,9776	0,6561	0,8534	1,1582	0,9871	0,8975	1,0890	0,7932
41	0,9539	0,4639	1,0646	0,9776	0	0,6147	0,6477	0,7034	0,8604	0,9318	0,9473	1,1250
42	0,5441	0,6612	0,6765	0,6561	0,6147	0	0,5028	1,0341	0,9109	0,8061	1,0878	0,8677
43	0,7657	0,5850	0,9186	0,8534	0,6477	0,5028	0	0,8914	0,7698	0,8022	0,8893	0,9380
44	1,0858	0,8183	1,1702	1,1582	0,7034	1,0341	0,8914	0	0,4902	0,5115	0,6012	0,7640
45	0,9492	0,8056	0,9999	0,9871	0,8604	0,9109	0,7698	0,4902	0	0,4077	0,5651	0,5541
46	0,8291	0,9263	0,9200	0,8975	0,9318	0,8061	0,8022	0,5115	0,4077	0	0,5599	0,5101
47	1,0595	0,9527	1,0904	1,0890	0,9473	1,0878	0,8893	0,6012	0,5651	0,5599	0	0,6715
48	0,8302	1,0411	0,7919	0,7932	1,1250	0,8677	0,9380	0,7640	0,5541	0,5101	0,6715	0
49	1,1499	0,8034	1,2223	1,2363	0,7486	1,1170	0,9566	0,4408	0,4695	0,6835	0,6846	0,8156
50	0,9479	0,5055	1,0948	1,1308	0,5173	0,6985	0,7631	0,8943	0,9173	1,0708	1,0955	1,1988
51	1,0049	0,6675	1,0487	0,9729	0,7234	0,6733	0,7489	0,8864	0,9369	0,9334	0,9697	1,1298
52	1,1441	0,7454	1,0703	0,9766	0,7744	0,8323	0,7114	0,9518	0,8216	0,9378	0,8528	1,0953
53	0,9457	0,5851	0,9243	0,8292	0,6526	0,6117	0,5682	0,8891	0,6953	0,8064	0,9021	0,9601
54	1,0545	0,5981	1,0007	0,9034	0,6502	0,7503	0,6335	0,8278	0,7183	0,8668	0,8381	0,9928
55	1,0799	0,6365	1,0770	0,9857	0,6527	0,7120	0,6855	0,7822	0,8358	0,9699	0,8964	1,1275
56	1,0419	0,5545	1,0336	0,9570	0,5615	0,7037	0,6443	0,8067	0,8101	0,8917	0,8950	1,0778
57	1,1155	0,5858	1,0590	0,9692	0,6604	0,7900	0,7152	0,8749	0,8118	0,9414	0,8653	1,0730
58	1,0677	0,5703	1,0140	0,9187	0,6782	0,7632	0,6461	0,8312	0,7453	0,8789	0,8289	1,0140
59	1,1020	0,6311	1,0573	0,9791	0,6874	0,7813	0,7179	0,8704	0,7806	0,9356	0,8548	1,0735
60	1,2642	0,7000	1,2338	1,1979	0,6841	0,8405	0,9926	0,9299	1,0941	1,1558	1,0625	1,2762

Tabella A.30: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 6, colonne 49-60.

	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
1	0,9281	0,5825	0,6738	0,6844	0,4979	0,5638	0,6015	0,5849	0,5853	0,5946	0,6050	0,8364
2	1,2127	1,1609	1,0727	1,1037	0,9661	1,0219	1,0920	1,0692	1,1063	1,0587	1,0880	1,2868
3	0,7797	0,5415	0,7351	0,6879	0,5582	0,5862	0,6146	0,5948	0,6364	0,6047	0,6344	0,7952
4	0,8904	0,7219	0,7721	0,7563	0,5779	0,6550	0,7177	0,6967	0,7243	0,6964	0,7248	0,9919
5	1,1807	1,0693	1,0568	1,0403	0,8805	0,9565	1,0509	1,0141	1,0522	0,9704	1,0319	1,2542
6	1,0194	0,8666	0,7433	0,8249	0,6781	0,7540	0,7643	0,7436	0,8042	0,7722	0,8187	1,0115
7	1,2710	1,2489	1,3129	1,4139	1,2792	1,3430	1,3949	1,3674	1,3973	1,3578	1,3933	1,5241
8	1,3789	1,2296	1,1723	1,2335	1,1130	1,1782	1,2209	1,1935	1,2184	1,1783	1,2236	1,3294
9	1,3867	1,2981	1,3115	1,3814	1,2560	1,3339	1,3682	1,3432	1,3788	1,3426	1,3757	1,4745
10	1,3778	1,3706	1,2824	1,3826	1,2472	1,3141	1,3908	1,3397	1,3857	1,3337	1,3876	1,5410
11	1,3607	1,2847	1,2896	1,4058	1,2673	1,3185	1,3949	1,3438	1,3653	1,3347	1,3813	1,5033
12	1,3339	1,2219	1,1534	1,1822	1,0481	1,1055	1,1715	1,1470	1,1840	1,1384	1,1680	1,3250
13	1,2906	1,2142	1,1089	1,1187	0,9852	1,0421	1,1165	1,0838	1,1070	1,0513	1,1007	1,2918
14	1,2169	1,1180	1,0558	1,0787	0,8957	0,9868	1,0939	1,0425	1,0762	0,9876	1,0758	1,3444
15	1,2159	1,0826	1,0304	1,0569	0,8770	0,9864	1,0592	1,0132	1,0419	0,9930	1,0466	1,2812
16	1,2643	1,1606	1,0537	1,1023	0,9508	1,0360	1,0800	1,0502	1,1005	1,0403	1,1002	1,2654
17	1,2147	1,1337	1,1228	1,1326	0,9930	1,0527	1,1168	1,1014	1,1236	1,0661	1,1256	1,3408
18	1,2290	1,0124	0,9836	1,0465	0,8612	0,9385	0,9704	0,9869	1,0344	0,9786	1,0246	1,1698
19	1,1527	1,0420	1,0353	1,0357	0,8805	0,9476	1,0335	1,0036	1,0268	0,9661	1,0158	1,2500
20	1,2613	1,1793	1,0773	1,0759	0,9142	0,9842	1,0820	1,0517	1,0650	1,0013	1,0561	1,3053
21	1,2695	1,1703	1,1196	1,1425	0,9787	1,0411	1,1330	1,0788	1,1098	1,0538	1,1069	1,3146
22	1,0954	0,8308	0,7336	0,7985	0,5800	0,7254	0,7630	0,7135	0,7780	0,7372	0,7653	0,9681
23	1,2039	1,0578	1,0062	1,0970	0,8981	0,9999	1,0529	1,0164	1,0667	1,0032	1,0520	1,2367
24	1,0241	0,8559	0,8212	0,8723	0,6842	0,7785	0,8132	0,7696	0,8823	0,8279	0,8442	1,0675
25	0,3267	0,7837	0,9672	0,9173	0,8877	0,7799	0,8581	0,8241	0,8319	0,8009	0,8211	0,9744
26	0,3634	0,8427	0,9976	0,9280	0,8879	0,7727	0,8280	0,8063	0,8562	0,8209	0,8399	1,0119
27	0,9489	0,7055	0,7811	0,7652	0,5967	0,6924	0,7441	0,7061	0,7548	0,7362	0,7480	1,0324
28	0,9896	0,9310	0,8704	0,8188	0,6621	0,7277	0,8087	0,8032	0,8309	0,7690	0,7993	1,1205
29	0,8409	0,6182	0,6772	0,7209	0,4800	0,5747	0,6122	0,5993	0,6738	0,6183	0,6587	0,8960
30	1,3071	1,2087	1,0499	1,0983	0,9293	1,0250	1,0755	1,0295	1,0904	1,0340	1,0979	1,3049
31	1,2735	1,1823	1,0601	1,0746	0,9302	1,0045	1,0640	1,0556	1,0863	1,0320	1,0853	1,2763
32	1,2161	1,1654	0,9534	1,0495	0,9409	0,9809	1,0360	1,0231	1,0664	1,0041	1,0531	1,2635
33	1,1587	1,0686	1,0023	1,0399	0,9033	0,9564	1,0388	0,9970	1,0467	0,9826	1,0409	1,2349
34	1,2846	1,1821	1,1627	1,2749	1,1093	1,1955	1,2560	1,1890	1,2463	1,2176	1,2475	1,3537
35	1,3000	1,1722	1,1957	1,3086	1,1255	1,2110	1,2929	1,2166	1,2778	1,2491	1,2679	1,4054
36	1,2465	1,0169	0,9585	1,1180	0,9487	1,0511	1,0604	1,0186	1,1008	1,0642	1,1059	1,1854
37	1,1499	0,9479	1,0049	1,1441	0,9457	1,0545	1,0799	1,0419	1,1155	1,0677	1,1020	1,2642
38	0,8034	0,5055	0,6675	0,7454	0,5851	0,5981	0,6365	0,5545	0,5858	0,5703	0,6311	0,7000
39	1,2223	1,0948	1,0487	1,0703	0,9243	1,0007	1,0770	1,0336	1,0590	1,0140	1,0573	1,2338
40	1,2363	1,1308	0,9729	0,9766	0,8292	0,9034	0,9857	0,9570	0,9692	0,9187	0,9791	1,1979
41	0,7486	0,5173	0,7234	0,7744	0,6526	0,6502	0,6527	0,5615	0,6604	0,6782	0,6874	0,6841
42	1,1170	0,6985	0,6733	0,8323	0,6117	0,7503	0,7120	0,7037	0,7900	0,7632	0,7813	0,8405
43	0,9566	0,7631	0,7489	0,7114	0,5682	0,6335	0,6855	0,6443	0,7152	0,6461	0,7179	0,9926
44	0,4408	0,8943	0,8864	0,9518	0,8891	0,8278	0,7822	0,8067	0,8749	0,8312	0,8704	0,9299
45	0,4695	0,9173	0,9369	0,8216	0,6953	0,7183	0,8358	0,8101	0,8118	0,7453	0,7806	1,0941
46	0,6835	1,0708	0,9334	0,9378	0,8064	0,8668	0,9699	0,8917	0,9414	0,8789	0,9356	1,1558
47	0,6846	1,0955	0,9697	0,8528	0,9021	0,8381	0,8964	0,8950	0,8653	0,8289	0,8548	1,0625
48	0,8156	1,1988	1,1298	1,0953	0,9601	0,9928	1,1275	1,0778	1,0730	1,0140	1,0735	1,2762
49	0	0,5026	1,1071	0,9914	0,9277	0,7909	0,8766	0,9083	0,8664	0,8140	0,8500	0,9469
50	0,5026	0	0,9287	0,8581	0,7189	0,6941	0,6991	0,6728	0,6195	0,7178	0,6797	0,5468
51	1,1071	0,9287	0	0,8474	0,7260	0,7807	0,7419	0,6540	0,8334	0,8321	0,8257	0,9333
52	0,9914	0,8581	0,8474	0	0,6312	0,6253	0,7807	0,6668	0,5685	0,6072	0,5740	1,0900
53	0,9277	0,7189	0,7260	0,6312	0	0,5403	0,5911	0,5882	0,5879	0,5678	0,6029	1,0159
54	0,7909	0,6941	0,7807	0,6253	0,5403	0	0,6391	0,6092	0,5846	0,5041	0,5357	0,9302
55	0,8766	0,6991	0,7419	0,7807	0,5911	0,6391	0	0,6231	0,6878	0,6570	0,6401	0,8520
56	0,9083	0,6728	0,6540	0,6668	0,5882	0,6092	0,6231	0	0,5262	0,5978	0,4604	0,8735
57	0,8664	0,6195	0,8334	0,5685	0,5879	0,5846	0,6878	0,5262	0	0,4904	0,4579	0,9456
58	0,8140	0,7178	0,8321	0,6072	0,5678	0,5041	0,6570	0,5978	0,4904	0	0,5550	0,9126
59	0,8500	0,6797	0,8257	0,5740	0,6029	0,5357	0,6401	0,4604	0,4579	0,5550	0	0,9468
60	0,9469	0,5468	0,9333	1,0900	1,0159	0,9302	0,8520	0,8735	0,9456	0,9126	0,9468	0

Tabella A.31: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 7, colonne 1-12.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	0,9715	0,5094	0,5025	0,8789	0,6317	1,2583	1,1108	1,2256	1,2252	1,2553	1,0511
2	0,9715	0	0,9717	0,7255	0,5669	0,8959	0,6013	0,5384	0,5566	0,5907	0,6209	0,5790
3	0,5094	0,9717	0	0,6008	0,8582	0,6934	1,0167	1,0311	1,1156	1,0994	1,0291	1,0734
4	0,5025	0,7255	0,6008	0	0,6300	0,6252	0,7309	0,7577	0,8246	0,7947	0,6965	0,8794
5	0,8789	0,5669	0,8582	0,6300	0	0,8529	0,6293	0,5880	0,6412	0,6370	0,6007	0,6875
6	0,6317	0,8959	0,6934	0,6252	0,8529	0	0,8996	0,8865	0,9227	0,8999	0,8959	1,0213
7	1,2583	0,6013	1,0167	0,7309	0,6293	0,8996	0	0,5268	0,5284	0,5143	0,4847	0,6956
8	1,1108	0,5384	1,0311	0,7577	0,5880	0,8865	0,5268	0	0,4637	0,5053	0,5249	0,5909
9	1,2256	0,5566	1,1156	0,8246	0,6412	0,9227	0,5284	0,4637	0	0,5377	0,5671	0,6083
10	1,2252	0,5907	1,0994	0,7947	0,6370	0,8999	0,5143	0,5053	0,5377	0	0,5165	0,6965
11	1,2553	0,6209	1,0291	0,6965	0,6007	0,8959	0,4847	0,5249	0,5671	0,5165	0	0,7196
12	1,0511	0,5790	1,0734	0,8794	0,6875	1,0213	0,6956	0,5909	0,6083	0,6965	0,7196	0
13	0,9982	0,5564	1,0147	0,8227	0,6049	0,9434	0,6338	0,5412	0,5868	0,6590	0,6580	0,5687
14	0,8745	0,5906	0,9554	0,6357	0,5400	0,8583	0,6109	0,5733	0,6743	0,6010	0,5852	0,7107
15	0,8842	0,5477	0,8933	0,6076	0,5435	0,8201	0,5735	0,5400	0,5819	0,5570	0,5499	0,6674
16	0,9431	0,5339	0,9540	0,6645	0,5324	0,8387	0,5363	0,5106	0,5524	0,5277	0,5434	0,6362
17	0,9693	0,5444	0,9412	0,6652	0,5137	0,8867	0,5582	0,5428	0,5976	0,5390	0,5590	0,6734
18	0,8853	0,5940	0,8992	0,7235	0,6008	0,8411	0,6673	0,6164	0,6274	0,6777	0,6974	0,6291
19	0,8945	0,5433	0,8571	0,6098	0,4826	0,8513	0,6036	0,5864	0,6376	0,6245	0,5865	0,6637
20	0,9170	0,5532	0,9501	0,6684	0,5209	0,8994	0,5832	0,5829	0,6227	0,5924	0,5639	0,6664
21	1,0094	0,5412	0,9469	0,7289	0,5247	0,9516	0,5642	0,5684	0,6127	0,6044	0,5894	0,6078
22	0,6085	0,6981	0,6340	0,5939	0,6413	0,6373	0,7870	0,6987	0,7613	0,8094	0,8747	0,7834
23	0,9095	0,6602	0,8447	0,6924	0,6299	0,7650	0,5970	0,6321	0,6626	0,6513	0,6674	0,7723
24	0,6607	0,7526	0,6753	0,5792	0,6670	0,6558	0,7126	0,7343	0,7780	0,7711	0,7453	0,8615
25	0,8768	1,1771	0,7567	0,8525	1,1166	0,9268	1,1990	1,2809	1,3059	1,2986	1,2971	1,2845
26	0,8713	1,1236	0,7895	0,8227	1,0594	0,9181	1,2297	1,2660	1,3056	1,2588	1,1748	1,2603
27	0,4787	0,8368	0,6324	0,4814	0,7245	0,6876	0,8063	0,8080	0,8987	0,8533	0,7667	0,9837
28	0,6690	0,7037	0,6976	0,5052	0,5865	0,7298	0,6990	0,7563	0,7924	0,7699	0,6941	0,8780
29	0,4482	0,8320	0,5047	0,4863	0,7835	0,6079	0,8931	0,8750	0,9604	0,9362	0,9297	0,9560
30	0,9510	0,5436	0,9386	0,6956	0,5417	0,8960	0,6501	0,5676	0,6360	0,6001	0,6111	0,6354
31	0,9414	0,5483	0,9962	0,7250	0,5588	0,8974	0,6631	0,5703	0,6242	0,6458	0,6070	0,6148
32	0,9615	0,8111	0,9200	0,6763	0,7611	0,8129	0,7196	0,7919	0,8472	0,7489	0,6845	0,9482
33	0,9363	0,8541	0,8897	0,7861	0,7665	0,8454	0,7457	0,8086	0,8434	0,8129	0,7761	0,9572
34	1,0761	0,6020	0,9687	0,7137	0,6294	0,9069	0,5739	0,5961	0,5954	0,6066	0,5739	0,7012
35	1,1032	0,6094	1,0282	0,7667	0,6919	0,9198	0,5646	0,6118	0,6215	0,5544	0,5859	0,6615
36	0,9206	0,5765	0,8983	0,6232	0,5962	0,7896	0,5826	0,5833	0,6046	0,5945	0,5910	0,6963
37	0,9100	0,7170	0,7692	0,6307	0,7007	0,7181	0,6425	0,6879	0,7155	0,6966	0,6868	0,8447
38	0,5652	1,0117	0,4939	0,6458	0,9262	0,7461	1,1044	1,1253	1,2358	1,1916	1,1595	1,1091
39	0,9217	0,5197	0,9416	0,7053	0,5415	0,8777	0,6041	0,5409	0,5826	0,6129	0,6000	0,5975
40	0,8662	0,5713	0,8887	0,7344	0,5955	0,8193	0,6892	0,6084	0,6312	0,6580	0,6736	0,6484
41	0,5748	1,0745	0,5218	0,6870	1,0072	0,6982	1,1584	1,1405	1,2557	1,2816	1,2799	1,1632
42	0,5726	0,7162	0,6018	0,5389	0,6686	0,5514	0,7624	0,7447	0,7549	0,8123	0,8196	0,8051
43	0,5520	0,9350	0,6007	0,6096	0,8706	0,6698	0,9760	1,0084	1,0817	1,0739	1,0015	1,0411
44	0,9062	1,1677	0,8022	0,8540	1,1084	0,8735	1,3521	1,3264	1,3813	1,3700	1,3368	1,2715
45	0,7451	1,0333	0,7215	0,7054	0,9188	0,8139	1,1034	1,1787	1,2220	1,1459	1,1661	1,1375
46	0,8456	0,9505	0,8651	0,7354	0,8555	0,8227	0,9925	1,0764	1,0930	1,0276	1,0775	1,0634
47	0,9838	1,0912	0,9126	0,8880	1,0077	0,9340	1,1728	1,1850	1,2434	1,1647	1,1094	1,2291
48	0,9807	0,8107	0,9885	0,7864	0,7254	0,9317	0,8229	0,9057	0,9161	0,8546	0,8325	0,9522
49	0,9217	1,2016	0,7733	0,8839	1,1689	1,0109	1,2611	1,3685	1,3769	1,3656	1,3484	1,3204
50	0,5762	1,1452	0,5350	0,7138	1,0552	0,8570	1,2348	1,2159	1,2824	1,3536	1,2675	1,2050
51	0,6652	1,0577	0,7258	0,7618	1,0431	0,7353	1,2970	1,1587	1,2964	1,2667	1,2749	1,1390
52	0,6747	1,0877	0,6779	0,7447	1,0256	0,8152	1,3961	1,2199	1,3662	1,3656	1,3866	1,1665
53	0,4916	0,9520	0,5512	0,5697	0,8674	0,6701	1,2642	1,1016	1,2433	1,2330	1,2521	1,0344
54	0,5560	1,0071	0,5783	0,6451	0,9415	0,7446	1,3285	1,1663	1,3206	1,3013	1,3052	1,0892
55	0,5943	1,0764	0,6068	0,7076	1,0363	0,7546	1,3789	1,2071	1,3521	1,3733	1,3814	1,1560
56	0,5767	1,0538	0,5864	0,6865	0,9989	0,7344	1,3520	1,1800	1,3289	1,3256	1,3292	1,1307
57	0,5780	1,0909	0,6270	0,7140	1,0372	0,7957	1,3815	1,2059	1,3650	1,3692	1,3516	1,1684
58	0,5861	1,0435	0,5964	0,6858	0,9561	0,7623	1,3428	1,1664	1,3289	1,3200	1,3220	1,1223
59	0,5969	1,0720	0,6260	0,7143	1,0156	0,8089	1,3780	1,2116	1,3615	1,3731	1,3674	1,1519
60	0,8278	1,2707	0,7843	0,9791	1,2379	0,9994	1,5073	1,3149	1,4581	1,5252	1,4841	1,3064

Tabella A.32: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 7, colonne 13-24.

	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	0,9982	0,8745	0,8842	0,9431	0,9693	0,8853	0,8945	0,9170	1,0094	0,6085	0,9095	0,6607
2	0,5564	0,5906	0,5477	0,5339	0,5444	0,5940	0,5433	0,5532	0,5412	0,6981	0,6602	0,7526
3	1,0147	0,9554	0,8933	0,9540	0,9412	0,8992	0,8571	0,9501	0,9469	0,6340	0,8447	0,6753
4	0,8227	0,6357	0,6076	0,6645	0,6652	0,7235	0,6098	0,6684	0,7289	0,5939	0,6924	0,5792
5	0,6049	0,5400	0,5435	0,5324	0,5137	0,6008	0,4826	0,5209	0,5247	0,6413	0,6299	0,6670
6	0,9434	0,8583	0,8201	0,8387	0,8867	0,8411	0,8513	0,8994	0,9516	0,6373	0,7650	0,6558
7	0,6338	0,6109	0,5735	0,5363	0,5582	0,6673	0,6036	0,5832	0,5642	0,7870	0,5970	0,7126
8	0,5412	0,5733	0,5400	0,5106	0,5428	0,6164	0,5864	0,5829	0,5684	0,6987	0,6321	0,7343
9	0,5868	0,6743	0,5819	0,5524	0,5976	0,6274	0,6376	0,6227	0,6127	0,7613	0,6626	0,7780
10	0,6590	0,6010	0,5570	0,5277	0,5390	0,6777	0,6245	0,5924	0,6044	0,8094	0,6513	0,7711
11	0,6580	0,5852	0,5499	0,5434	0,5590	0,6974	0,5865	0,5639	0,5894	0,8747	0,6674	0,7453
12	0,5687	0,7107	0,6674	0,6362	0,6734	0,6291	0,6637	0,6664	0,6078	0,7834	0,7723	0,8615
13	0	0,6520	0,6177	0,5713	0,5888	0,5712	0,6040	0,5943	0,5615	0,7138	0,6767	0,8009
14	0,6520	0	0,5105	0,5021	0,4885	0,6208	0,5187	0,5201	0,5558	0,6302	0,6483	0,6703
15	0,6177	0,5105	0	0,5034	0,4930	0,5776	0,5291	0,5306	0,5363	0,6293	0,5986	0,6526
16	0,5713	0,5021	0,5034	0	0,4670	0,5501	0,5079	0,5065	0,5153	0,6610	0,5993	0,6791
17	0,5888	0,4885	0,4930	0,4670	0	0,5779	0,5097	0,5201	0,5235	0,7072	0,6345	0,7038
18	0,5712	0,6208	0,5776	0,5501	0,5779	0	0,5843	0,5954	0,6009	0,6018	0,5709	0,6377
19	0,6040	0,5187	0,5291	0,5079	0,5097	0,5843	0	0,5145	0,4942	0,6378	0,6374	0,6728
20	0,5943	0,5201	0,5306	0,5065	0,5201	0,5954	0,5145	0	0,5185	0,6453	0,6096	0,7152
21	0,5615	0,5558	0,5363	0,5153	0,5235	0,6009	0,4942	0,5185	0	0,7151	0,6349	0,7622
22	0,7138	0,6302	0,6293	0,6610	0,7072	0,6018	0,6378	0,6453	0,7151	0	0,6064	0,5554
23	0,6767	0,6483	0,5986	0,5993	0,6345	0,5709	0,6374	0,6096	0,6349	0,6064	0	0,6141
24	0,8009	0,6703	0,6526	0,6791	0,7038	0,6377	0,6728	0,7152	0,7622	0,5554	0,6141	0
25	1,2317	1,1731	1,1158	1,1748	1,1659	1,1642	1,0847	1,1837	1,1935	1,0098	1,1059	0,9672
26	1,2258	1,0892	1,1111	1,1211	1,0459	1,1888	1,0077	1,1060	1,1309	1,0581	1,1962	0,9957
27	0,9359	0,7074	0,7090	0,7512	0,7416	0,8608	0,6783	0,7481	0,7758	0,6340	0,8259	0,6815
28	0,8114	0,6174	0,6084	0,6079	0,6156	0,7410	0,5835	0,6380	0,6396	0,6333	0,6984	0,6173
29	0,8753	0,7949	0,7567	0,8090	0,8272	0,7587	0,7709	0,8074	0,8882	0,5030	0,7293	0,5530
30	0,5934	0,5348	0,5397	0,5128	0,5384	0,5974	0,5314	0,5131	0,5364	0,6629	0,6738	0,7762
31	0,5623	0,5726	0,5710	0,5154	0,5563	0,5872	0,5378	0,5464	0,5463	0,6893	0,6727	0,7641
32	0,9083	0,7387	0,7183	0,7698	0,7168	0,8496	0,7140	0,7522	0,7775	0,8164	0,7382	0,7593
33	0,8431	0,7815	0,7768	0,7728	0,7667	0,7744	0,7527	0,7824	0,7812	0,7911	0,6778	0,7540
34	0,6561	0,6572	0,5488	0,5755	0,5825	0,6465	0,5730	0,6138	0,5770	0,6995	0,5882	0,6919
35	0,6365	0,6558	0,5850	0,5841	0,6129	0,6327	0,6538	0,6569	0,6225	0,7474	0,6088	0,7373
36	0,6492	0,5343	0,5191	0,5118	0,5328	0,6131	0,5536	0,5507	0,5857	0,6342	0,6031	0,6308
37	0,7760	0,6541	0,5948	0,6578	0,6678	0,6345	0,6532	0,7346	0,7123	0,6087	0,5427	0,5782
38	1,0617	0,9507	0,9222	1,0095	1,0231	0,9345	0,8752	1,0043	0,9763	0,6991	0,9577	0,7358
39	0,5708	0,5636	0,5433	0,4985	0,5403	0,5634	0,5232	0,5333	0,5412	0,6636	0,6398	0,7238
40	0,5754	0,6105	0,6026	0,5732	0,5817	0,6002	0,5722	0,5688	0,5664	0,6304	0,6618	0,7326
41	1,1159	1,0777	1,0116	1,0681	1,1093	0,9847	0,9904	1,0758	1,1013	0,6944	0,9830	0,7850
42	0,7361	0,6506	0,6065	0,6361	0,6691	0,6141	0,6286	0,6536	0,7108	0,4429	0,6410	0,5145
43	0,9491	0,8815	0,8175	0,8947	0,9021	0,8507	0,8181	0,8813	0,9093	0,5807	0,8274	0,6548
44	1,2244	1,1628	1,1358	1,1586	1,1607	1,1294	1,1019	1,1629	1,2054	1,0180	1,1175	0,9529
45	1,0546	0,9519	0,9640	1,0239	1,0025	0,9887	0,9185	0,9743	1,0165	0,8301	0,9419	0,7839
46	0,9671	0,8499	0,8623	0,9004	0,9061	0,9018	0,8432	0,8764	0,9359	0,7621	0,8659	0,7447
47	1,1744	1,0346	1,0665	1,0668	1,0417	1,1189	1,0047	1,0592	1,0659	1,0510	1,0754	0,9767
48	0,8626	0,7290	0,7364	0,7713	0,7420	0,8350	0,7034	0,7462	0,7561	0,7998	0,7759	0,8093
49	1,2777	1,2060	1,2056	1,2537	1,2032	1,2192	1,1422	1,2496	1,2544	1,0868	1,1921	1,0134
50	1,1985	1,1037	1,0694	1,1468	1,1202	0,9997	1,0276	1,1645	1,1558	0,8209	1,0453	0,8455
51	1,0939	1,0410	1,0175	1,0404	1,1091	0,9703	1,0195	1,0625	1,1029	0,7250	0,9926	0,8115
52	1,1041	1,0650	1,0414	1,0889	1,1173	1,0326	1,0198	1,0606	1,1237	0,7881	1,0811	0,8604
53	0,9726	0,8837	0,8648	0,9387	0,9801	0,8490	0,8669	0,9010	0,9628	0,5728	0,8869	0,6745
54	1,0272	0,9732	0,9731	1,0219	1,0390	0,9228	0,9319	0,9696	1,0251	0,7151	0,9866	0,7676
55	1,1022	1,0781	1,0445	1,0663	1,1012	0,9570	1,0174	1,0667	1,1155	0,7529	1,0393	0,8028
56	1,0688	1,0282	0,9988	1,0360	1,0863	0,9725	0,9872	1,0357	1,0607	0,7037	1,0032	0,7586
57	1,0924	1,0624	1,0274	1,0861	1,1084	1,0204	1,0104	1,0509	1,0926	0,7677	1,0534	0,8714
58	1,0367	0,9737	0,9790	1,0267	1,0512	0,9622	0,9500	0,9871	1,0376	0,7273	0,9902	0,8159
59	1,0854	1,0604	1,0315	1,0856	1,1108	1,0096	0,9993	1,0402	1,0896	0,7560	1,0384	0,8328
60	1,2757	1,3261	1,2641	1,2500	1,3229	1,1557	1,2308	1,2892	1,2949	0,9562	1,2212	1,0521

Tabella A.33: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 7, colonne 25-36.

	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
1	0,8768	0,8713	0,4787	0,6690	0,4482	0,9510	0,9414	0,9615	0,9363	1,0761	1,1032	0,9206
2	1,1771	1,1236	0,8368	0,7037	0,8320	0,5436	0,5483	0,8111	0,8541	0,6020	0,6094	0,5765
3	0,7567	0,7895	0,6324	0,6976	0,5047	0,9386	0,9962	0,9200	0,8897	0,9687	1,0282	0,8983
4	0,8525	0,8227	0,4814	0,5052	0,4863	0,6956	0,7250	0,6763	0,7861	0,7137	0,7667	0,6232
5	1,1166	1,0594	0,7245	0,5865	0,7835	0,5417	0,5588	0,7611	0,7665	0,6294	0,6919	0,5962
6	0,9268	0,9181	0,6876	0,7298	0,6079	0,8960	0,8974	0,8129	0,8454	0,9069	0,9198	0,7896
7	1,1990	1,2297	0,8063	0,6990	0,8931	0,6501	0,6631	0,7196	0,7457	0,5739	0,5646	0,5826
8	1,2809	1,2660	0,8080	0,7563	0,8750	0,5676	0,5703	0,7919	0,8086	0,5961	0,6118	0,5833
9	1,3059	1,3056	0,8987	0,7924	0,9604	0,6360	0,6242	0,8472	0,8434	0,5954	0,6215	0,6046
10	1,2986	1,2588	0,8533	0,7699	0,9362	0,6001	0,6458	0,7489	0,8129	0,6066	0,5544	0,5945
11	1,2971	1,1748	0,7667	0,6941	0,9297	0,6111	0,6070	0,6845	0,7761	0,5739	0,5859	0,5910
12	1,2845	1,2603	0,9837	0,8780	0,9560	0,6354	0,6148	0,9482	0,9572	0,7012	0,6615	0,6963
13	1,2317	1,2258	0,9359	0,8114	0,8753	0,5934	0,5623	0,9083	0,8431	0,6561	0,6365	0,6492
14	1,1731	1,0892	0,7074	0,6174	0,7949	0,5348	0,5726	0,7387	0,7815	0,6572	0,6558	0,5343
15	1,1158	1,1111	0,7090	0,6084	0,7567	0,5397	0,5710	0,7183	0,7768	0,5488	0,5850	0,5191
16	1,1748	1,1211	0,7512	0,6079	0,8090	0,5128	0,5154	0,7698	0,7728	0,5755	0,5841	0,5118
17	1,1659	1,0459	0,7416	0,6156	0,8272	0,5384	0,5563	0,7168	0,7667	0,5825	0,6129	0,5328
18	1,1642	1,1888	0,8608	0,7410	0,7587	0,5974	0,5872	0,8496	0,7744	0,6465	0,6327	0,6131
19	1,0847	1,0077	0,6783	0,5835	0,7709	0,5314	0,5378	0,7140	0,7527	0,5730	0,6538	0,5536
20	1,1837	1,1060	0,7481	0,6380	0,8074	0,5131	0,5464	0,7522	0,7824	0,6138	0,6569	0,5507
21	1,1935	1,1309	0,7758	0,6396	0,8882	0,5364	0,5463	0,7775	0,7812	0,5770	0,6225	0,5857
22	1,0098	1,0581	0,6340	0,6333	0,5030	0,6629	0,6893	0,8164	0,7911	0,6995	0,7474	0,6342
23	1,1059	1,1962	0,8259	0,6984	0,7293	0,6738	0,6727	0,7382	0,6778	0,5882	0,6088	0,6031
24	0,9672	0,9957	0,6815	0,6173	0,5530	0,7762	0,7641	0,7593	0,7540	0,6919	0,7373	0,6308
25	0	0,3165	0,9012	0,9072	0,7892	1,2470	1,1906	1,0378	1,0967	1,1614	1,2283	1,0974
26	0,3165	0	0,7574	0,8332	0,7909	1,1130	1,1192	0,9801	1,1217	1,2675	1,2965	1,1276
27	0,9012	0,7574	0	0,5323	0,5784	0,7533	0,8117	0,7567	0,9191	0,8850	0,9240	0,7143
28	0,9072	0,8332	0,5323	0	0,5951	0,6576	0,7016	0,6718	0,7293	0,7135	0,7946	0,6345
29	0,7892	0,7909	0,5784	0,5951	0	0,8242	0,8509	0,7990	0,8232	0,8637	0,9013	0,7194
30	1,2470	1,1130	0,7533	0,6576	0,8242	0	0,5378	0,7938	0,8193	0,6481	0,6770	0,5848
31	1,1906	1,1192	0,8117	0,7016	0,8509	0,5378	0	0,7873	0,8229	0,6194	0,6703	0,5790
32	1,0378	0,9801	0,7567	0,6718	0,7990	0,7938	0,7873	0	0,7234	0,7081	0,7607	0,6785
33	1,0967	1,1217	0,9191	0,7293	0,8232	0,8193	0,8229	0,7234	0	0,7288	0,7509	0,7012
34	1,1614	1,2675	0,8850	0,7135	0,8637	0,6481	0,6194	0,7081	0,7288	0	0,5152	0,5593
35	1,2283	1,2965	0,9240	0,7946	0,9013	0,6770	0,6703	0,7607	0,7509	0,5152	0	0,5677
36	1,0974	1,1276	0,7143	0,6345	0,7194	0,5848	0,5790	0,6785	0,7012	0,5593	0,5677	0
37	1,0287	1,1961	0,7425	0,6693	0,6814	0,7864	0,7504	0,7044	0,6849	0,5971	0,5647	0,5576
38	0,8211	0,8406	0,6303	0,7711	0,5825	1,0018	1,0257	0,9258	0,9740	1,0335	1,0841	0,8819
39	1,1620	1,1203	0,7860	0,6566	0,8103	0,5331	0,5448	0,7815	0,7914	0,5902	0,6006	0,5403
40	1,1673	1,1571	0,8452	0,7189	0,7447	0,5548	0,5561	0,8570	0,7867	0,6839	0,6952	0,6404
41	0,7031	0,7833	0,7109	0,8214	0,5867	1,0764	1,0963	0,9760	0,9850	1,1024	1,1664	0,9627
42	1,0264	1,0975	0,5636	0,6079	0,4824	0,6544	0,6671	0,7258	0,7323	0,6270	0,7363	0,5849
43	0,8943	0,9068	0,6198	0,6489	0,5219	0,9196	0,9204	0,8535	0,8304	0,8897	0,9667	0,7724
44	0,3519	0,4086	0,8942	0,9105	0,8030	1,2004	1,1797	0,9946	1,0520	1,2089	1,2727	1,1043
45	0,4728	0,5034	0,7547	0,7167	0,6620	1,0633	1,0231	0,8638	0,8769	1,0515	1,0851	1,0072
46	0,5464	0,6160	0,8588	0,7527	0,7575	0,9600	0,9201	0,8277	0,8252	0,9006	0,9822	0,8485
47	0,6539	0,5622	0,9108	0,8687	0,9299	1,0761	1,0889	0,8968	0,9255	1,1353	1,1818	1,0600
48	0,7403	0,6688	0,8718	0,7438	0,8946	0,7718	0,7983	0,8134	0,8198	0,8426	0,8717	0,7873
49	0,3221	0,3593	0,9421	0,9800	0,8340	1,2952	1,2602	1,2031	1,1448	1,2747	1,2884	1,2377
50	0,7804	0,8383	0,6982	0,9187	0,6116	1,1919	1,1666	1,1515	1,0543	1,1686	1,1574	1,0035
51	0,9602	0,9900	0,7721	0,8592	0,6700	1,0370	1,0454	0,9404	0,9887	1,1469	1,1805	0,9442
52	0,9097	0,9194	0,7548	0,8083	0,7111	1,0832	1,0591	1,0374	1,0238	1,2585	1,2901	1,1030
53	0,8818	0,8795	0,5887	0,6532	0,4735	0,9167	0,9166	0,9287	0,8910	1,0941	1,1099	0,9356
54	0,7728	0,7638	0,6831	0,7163	0,5669	1,0123	0,9888	0,9690	0,9419	1,1784	1,1950	1,0377
55	0,8519	0,8218	0,7348	0,7965	0,6041	1,0612	1,0485	1,0234	1,0231	1,2392	1,2759	1,0465
56	0,8183	0,7996	0,6977	0,7920	0,5919	1,0156	1,0407	1,0096	0,9829	1,1726	1,1995	1,0031
57	0,8258	0,8479	0,7468	0,8187	0,6643	1,0754	1,0710	1,0534	1,0318	1,2291	1,2603	1,0858
58	0,7931	0,8124	0,7267	0,7579	0,6095	1,0204	1,0157	0,9913	0,9678	1,2014	1,2322	1,0490
59	0,8145	0,8329	0,7384	0,7875	0,6500	1,0841	1,0686	1,0387	1,0248	1,2297	1,2519	1,0922
60	0,9646	1,0035	1,0215	1,1057	0,8854	1,2866	1,2582	1,2461	1,2151	1,3325	1,3851	1,1676

Tabella A.34: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 7, colonne 37-48.

	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
1	0,9100	0,5652	0,9217	0,8662	0,5748	0,5726	0,5520	0,9062	0,7451	0,8456	0,9838	0,9807
2	0,7170	1,0117	0,5197	0,5713	1,0745	0,7162	0,9350	1,1677	1,0333	0,9505	1,0912	0,8107
3	0,7692	0,4939	0,9416	0,8887	0,5218	0,6018	0,6007	0,8022	0,7215	0,8651	0,9126	0,9885
4	0,6307	0,6458	0,7053	0,7344	0,6870	0,5389	0,6096	0,8540	0,7054	0,7354	0,8880	0,7864
5	0,7007	0,9262	0,5415	0,5955	1,0072	0,6686	0,8706	1,1084	0,9188	0,8555	1,0077	0,7254
6	0,7181	0,7461	0,8777	0,8193	0,6982	0,5514	0,6698	0,8735	0,8139	0,8227	0,9340	0,9317
7	0,6425	1,1044	0,6041	0,6892	1,1584	0,7624	0,9760	1,3521	1,1034	0,9925	1,1728	0,8229
8	0,6879	1,1253	0,5409	0,6084	1,1405	0,7447	1,0084	1,3264	1,1787	1,0764	1,1850	0,9057
9	0,7155	1,2358	0,5826	0,6312	1,2557	0,7549	1,0817	1,3813	1,2220	1,0930	1,2434	0,9161
10	0,6966	1,1916	0,6129	0,6580	1,2816	0,8123	1,0739	1,3700	1,1459	1,0276	1,1647	0,8546
11	0,6868	1,1595	0,6000	0,6736	1,2799	0,8196	1,0015	1,3368	1,1661	1,0775	1,1094	0,8325
12	0,8447	1,1091	0,5975	0,6484	1,1632	0,8051	1,0411	1,2715	1,1375	1,0634	1,2291	0,9522
13	0,7760	1,0617	0,5708	0,5754	1,1159	0,7361	0,9491	1,2244	1,0546	0,9671	1,1744	0,8626
14	0,6541	0,9507	0,5636	0,6105	1,0777	0,6506	0,8815	1,1628	0,9519	0,8499	1,0346	0,7290
15	0,5948	0,9222	0,5433	0,6026	1,0116	0,6065	0,8175	1,1358	0,9640	0,8623	1,0665	0,7364
16	0,6578	1,0095	0,4985	0,5732	1,0681	0,6361	0,8947	1,1586	1,0239	0,9004	1,0668	0,7713
17	0,6678	1,0231	0,5403	0,5817	1,1093	0,6691	0,9021	1,1607	1,0025	0,9061	1,0417	0,7420
18	0,6345	0,9345	0,5634	0,6002	0,9847	0,6141	0,8507	1,1294	0,9887	0,9018	1,1189	0,8350
19	0,6532	0,8752	0,5232	0,5722	0,9904	0,6286	0,8181	1,1019	0,9185	0,8432	1,0047	0,7034
20	0,7346	1,0043	0,5333	0,5688	1,0758	0,6536	0,8813	1,1629	0,9743	0,8764	1,0592	0,7462
21	0,7123	0,9763	0,5412	0,5664	1,1013	0,7108	0,9093	1,2054	1,0165	0,9359	1,0659	0,7561
22	0,6087	0,6991	0,6636	0,6304	0,6944	0,4429	0,5807	1,0180	0,8301	0,7621	1,0510	0,7998
23	0,5427	0,9577	0,6398	0,6618	0,9830	0,6410	0,8274	1,1175	0,9419	0,8659	1,0754	0,7759
24	0,5782	0,7358	0,7238	0,7326	0,7850	0,5145	0,6548	0,9529	0,7839	0,7447	0,9767	0,8093
25	1,0287	0,8211	1,1620	1,1673	0,7031	1,0264	0,8943	0,3519	0,4728	0,5464	0,6539	0,7403
26	1,1961	0,8406	1,1203	1,1571	0,7833	1,0975	0,9068	0,4086	0,5034	0,6160	0,5622	0,6688
27	0,7425	0,6303	0,7860	0,8452	0,7109	0,5636	0,6198	0,8942	0,7547	0,8588	0,9108	0,8718
28	0,6693	0,7711	0,6566	0,7189	0,8214	0,6079	0,6489	0,9105	0,7167	0,7527	0,8687	0,7438
29	0,6814	0,5825	0,8103	0,7447	0,5867	0,4824	0,5219	0,8030	0,6620	0,7575	0,9299	0,8946
30	0,7864	1,0018	0,5331	0,5548	1,0764	0,6544	0,9196	1,2004	1,0633	0,9600	1,0761	0,7718
31	0,7504	1,0257	0,5448	0,5561	1,0963	0,6671	0,9204	1,1797	1,0231	0,9201	1,0889	0,7983
32	0,7044	0,9258	0,7815	0,8570	0,9760	0,7258	0,8535	0,9946	0,8638	0,8277	0,8968	0,8134
33	0,6849	0,9740	0,7914	0,7867	0,9850	0,7323	0,8304	1,0520	0,8769	0,8252	0,9255	0,8198
34	0,5971	1,0335	0,5902	0,6839	1,1024	0,6270	0,8897	1,2089	1,0515	0,9006	1,1353	0,8426
35	0,5647	1,0841	0,6006	0,6952	1,1664	0,7363	0,9667	1,2727	1,0851	0,9822	1,1818	0,8717
36	0,5576	0,8819	0,5403	0,6404	0,9627	0,5849	0,7724	1,1043	1,0072	0,8485	1,0600	0,7873
37	0	0,8754	0,7020	0,7536	0,9415	0,5373	0,7549	1,0763	0,9416	0,8227	1,0488	0,8229
38	0,8754	0	0,9317	0,9371	0,4584	0,6539	0,5770	0,8128	0,7996	0,9190	0,9461	1,0295
39	0,7020	0,9317	0	0,5657	1,0501	0,6663	0,9061	1,1590	0,9897	0,9113	1,0795	0,7838
40	0,7536	0,9371	0,5657	0	0,9641	0,6465	0,8417	1,1461	0,9768	0,8885	1,0778	0,7852
41	0,9415	0,4584	1,0501	0,9641	0	0,6060	0,6380	0,6984	0,8524	0,9237	0,9390	1,1111
42	0,5373	0,6539	0,6663	0,6465	0,6060	0	0,4969	1,0282	0,9037	0,8010	1,0802	0,8619
43	0,7549	0,5770	0,9061	0,8417	0,6380	0,4969	0	0,8830	0,7618	0,7949	0,8808	0,9280
44	1,0763	0,8128	1,1590	1,1461	0,6984	1,0282	0,8830	0	0,4847	0,5055	0,5940	0,7520
45	0,9416	0,7996	0,9897	0,9768	0,8524	0,9037	0,7618	0,4847	0	0,4026	0,5573	0,5464
46	0,8227	0,9190	0,9113	0,8885	0,9237	0,8010	0,7949	0,5055	0,4026	0	0,5529	0,5032
47	1,0488	0,9461	1,0795	1,0778	0,9390	1,0802	0,8808	0,5940	0,5573	0,5529	0	0,6606
48	0,8229	1,0295	0,7838	0,7852	1,1111	0,8619	0,9280	0,7520	0,5464	0,5032	0,6606	0
49	1,1423	0,7986	1,2104	1,2251	0,7432	1,1101	0,9473	0,4353	0,4639	0,6759	0,6750	0,8043
50	0,9351	0,4996	1,0814	1,1166	0,5109	0,6897	0,7543	0,8901	0,9085	1,0612	1,0864	1,1843
51	0,9922	0,6600	1,0353	0,9607	0,7153	0,6646	0,7411	0,8800	0,9309	0,9263	0,9637	1,1178
52	1,1295	0,7364	1,0558	0,9631	0,7648	0,8217	0,6999	0,9431	0,8135	0,9299	0,8452	1,0824
53	0,9343	0,5784	0,9116	0,8180	0,6453	0,6032	0,5603	0,8809	0,6889	0,8002	0,8952	0,9509
54	1,0421	0,5907	0,9862	0,8907	0,6418	0,7401	0,6238	0,8184	0,7108	0,8586	0,8295	0,9809
55	1,0664	0,6288	1,0626	0,9727	0,6460	0,7026	0,6774	0,7767	0,8295	0,9627	0,8896	1,1156
56	1,0296	0,5483	1,0195	0,9441	0,5544	0,6942	0,6356	0,8001	0,8025	0,8839	0,8885	1,0658
57	1,1008	0,5789	1,0439	0,9562	0,6521	0,7784	0,7057	0,8662	0,8031	0,9318	0,8587	1,0590
58	1,0539	0,5632	1,0000	0,9062	0,6695	0,7520	0,6369	0,8224	0,7375	0,8699	0,8213	1,0013
59	1,0886	0,6228	1,0426	0,9659	0,6790	0,7711	0,7072	0,8626	0,7747	0,9275	0,8472	1,0602
60	1,2473	0,6911	1,2157	1,1829	0,6760	0,8283	0,9807	0,9210	1,0781	1,1429	1,0522	1,2573

Tabella A.35: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 7, colonne 49-60.

	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
1	0,9217	0,5762	0,6652	0,6747	0,4916	0,5560	0,5943	0,5767	0,5780	0,5861	0,5969	0,8278
2	1,2016	1,1452	1,0577	1,0877	0,9520	1,0071	1,0764	1,0538	1,0909	1,0435	1,0720	1,2707
3	0,7733	0,5350	0,7258	0,6779	0,5512	0,5783	0,6068	0,5864	0,6270	0,5964	0,6260	0,7843
4	0,8839	0,7138	0,7618	0,7447	0,5697	0,6451	0,7076	0,6865	0,7140	0,6858	0,7143	0,9791
5	1,1689	1,0552	1,0431	1,0256	0,8674	0,9415	1,0363	0,9989	1,0372	0,9561	1,0156	1,2379
6	1,0109	0,8570	0,7353	0,8152	0,6701	0,7446	0,7546	0,7344	0,7957	0,7623	0,8089	0,9994
7	1,2611	1,2348	1,2970	1,3961	1,2642	1,3285	1,3789	1,3520	1,3815	1,3428	1,3780	1,5073
8	1,3685	1,2159	1,1587	1,2199	1,1016	1,1663	1,2071	1,1800	1,2059	1,1664	1,2116	1,3149
9	1,3769	1,2824	1,2964	1,3662	1,2433	1,3206	1,3521	1,3289	1,3650	1,3289	1,3615	1,4581
10	1,3656	1,3536	1,2667	1,3656	1,2330	1,3013	1,3733	1,3256	1,3692	1,3200	1,3731	1,5252
11	1,3484	1,2675	1,2749	1,3866	1,2521	1,3052	1,3814	1,3292	1,3516	1,3220	1,3674	1,4841
12	1,3204	1,2050	1,1390	1,1665	1,0344	1,0892	1,1560	1,1307	1,1684	1,1223	1,1519	1,3064
13	1,2777	1,1985	1,0939	1,1041	0,9726	1,0272	1,1022	1,0688	1,0924	1,0367	1,0854	1,2757
14	1,2060	1,1037	1,0410	1,0650	0,8837	0,9732	1,0781	1,0282	1,0624	0,9737	1,0604	1,3261
15	1,2056	1,0694	1,0175	1,0414	0,8648	0,9731	1,0445	0,9988	1,0274	0,9790	1,0315	1,2641
16	1,2537	1,1468	1,0404	1,0889	0,9387	1,0219	1,0663	1,0360	1,0861	1,0267	1,0856	1,2500
17	1,2032	1,1202	1,1091	1,1173	0,9801	1,0390	1,1012	1,0863	1,1084	1,0512	1,1108	1,3229
18	1,2192	0,9997	0,9703	1,0326	0,8490	0,9228	0,9570	0,9725	1,0204	0,9622	1,0096	1,1557
19	1,1422	1,0276	1,0195	1,0198	0,8669	0,9319	1,0174	0,9872	1,0104	0,9500	0,9993	1,2308
20	1,2496	1,1645	1,0625	1,0606	0,9010	0,9696	1,0667	1,0357	1,0509	0,9871	1,0402	1,2892
21	1,2544	1,1558	1,1029	1,1237	0,9628	1,0251	1,1155	1,0607	1,0926	1,0376	1,0896	1,2949
22	1,0868	0,8209	0,7250	0,7881	0,5728	0,7151	0,7529	0,7037	0,7677	0,7273	0,7560	0,9562
23	1,1921	1,0453	0,9926	1,0811	0,8869	0,9866	1,0393	1,0032	1,0534	0,9902	1,0384	1,2212
24	1,0134	0,8455	0,8115	0,8604	0,6745	0,7676	0,8028	0,7586	0,8714	0,8159	0,8328	1,0521
25	0,3221	0,7804	0,9602	0,9097	0,8818	0,7728	0,8519	0,8183	0,8258	0,7931	0,8145	0,9646
26	0,3593	0,8383	0,9900	0,9194	0,8795	0,7638	0,8218	0,7996	0,8479	0,8124	0,8329	1,0035
27	0,9421	0,6982	0,7721	0,7548	0,5887	0,6831	0,7348	0,6977	0,7468	0,7267	0,7384	1,0215
28	0,9800	0,9187	0,8592	0,8083	0,6532	0,7163	0,7965	0,7920	0,8187	0,7579	0,7875	1,1057
29	0,8340	0,6116	0,6700	0,7111	0,4735	0,5669	0,6041	0,5919	0,6643	0,6095	0,6500	0,8854
30	1,2952	1,1919	1,0370	1,0832	0,9167	1,0123	1,0612	1,0156	1,0754	1,0204	1,0841	1,2866
31	1,2602	1,1666	1,0454	1,0591	0,9166	0,9888	1,0485	1,0407	1,0710	1,0157	1,0686	1,2582
32	1,2031	1,1515	0,9404	1,0374	0,9287	0,9690	1,0234	1,0096	1,0534	0,9913	1,0387	1,2461
33	1,1448	1,0543	0,9887	1,0238	0,8910	0,9419	1,0231	0,9829	1,0318	0,9678	1,0248	1,2151
34	1,2747	1,1686	1,1469	1,2585	1,0941	1,1784	1,2392	1,1726	1,2291	1,2014	1,2297	1,3325
35	1,2884	1,1574	1,1805	1,2901	1,1099	1,1950	1,2759	1,1995	1,2603	1,2322	1,2519	1,3851
36	1,2377	1,0035	0,9442	1,1030	0,9356	1,0377	1,0465	1,0031	1,0858	1,0490	1,0922	1,1676
37	1,1423	0,9351	0,9922	1,1295	0,9343	1,0421	1,0664	1,0296	1,1008	1,0539	1,0886	1,2473
38	0,7986	0,4996	0,6600	0,7364	0,5784	0,5907	0,6288	0,5483	0,5789	0,5632	0,6228	0,6911
39	1,2104	1,0814	1,0353	1,0558	0,9116	0,9862	1,0626	1,0195	1,0439	1,0000	1,0426	1,2157
40	1,2251	1,1166	0,9607	0,9631	0,8180	0,8907	0,9727	0,9441	0,9562	0,9062	0,9659	1,1829
41	0,7432	0,5109	0,7153	0,7648	0,6453	0,6418	0,6460	0,5544	0,6521	0,6695	0,6790	0,6760
42	1,1101	0,6897	0,6646	0,8217	0,6032	0,7401	0,7026	0,6942	0,7784	0,7520	0,7711	0,8283
43	0,9473	0,7543	0,7411	0,6999	0,5603	0,6238	0,6774	0,6356	0,7057	0,6369	0,7072	0,9807
44	0,4353	0,8901	0,8800	0,9431	0,8809	0,8184	0,7767	0,8001	0,8662	0,8224	0,8626	0,9210
45	0,4639	0,9085	0,9309	0,8135	0,6889	0,7108	0,8295	0,8025	0,8031	0,7375	0,7747	1,0781
46	0,6759	1,0612	0,9263	0,9299	0,8002	0,8586	0,9627	0,8839	0,9318	0,8699	0,9275	1,1429
47	0,6750	1,0864	0,9637	0,8452	0,8952	0,8295	0,8896	0,8885	0,8587	0,8213	0,8472	1,0522
48	0,8043	1,1843	1,1178	1,0824	0,9509	0,9809	1,1156	1,0658	1,0590	1,0013	1,0602	1,2573
49	0	0,5022	1,0982	0,9821	0,9206	0,7826	0,8692	0,9011	0,8597	0,8049	0,8409	0,9413
50	0,5022	0	0,9178	0,8482	0,7105	0,6856	0,6899	0,6655	0,6123	0,7098	0,6716	0,5418
51	1,0982	0,9178	0	0,8375	0,7187	0,7719	0,7345	0,6477	0,8248	0,8229	0,8171	0,9215
52	0,9821	0,8482	0,8375	0	0,6232	0,6166	0,7709	0,6593	0,5605	0,5995	0,5664	1,0774
53	0,9206	0,7105	0,7187	0,6232	0	0,5335	0,5838	0,5807	0,5805	0,5605	0,5949	1,0039
54	0,7826	0,6856	0,7719	0,6166	0,5335	0	0,6310	0,6024	0,5765	0,4975	0,5285	0,9187
55	0,8692	0,6899	0,7345	0,7709	0,5838	0,6310	0	0,6149	0,6787	0,6481	0,6309	0,8420
56	0,9011	0,6655	0,6477	0,6593	0,5807	0,6024	0,6149	0	0,5195	0,5904	0,4559	0,8637
57	0,8597	0,6123	0,8248	0,5605	0,5805	0,5765	0,6787	0,5195	0	0,4841	0,4519	0,9336
58	0,8049	0,7098	0,8229	0,5995	0,5605	0,4975	0,6481	0,5904	0,4841	0	0,5473	0,9026
59	0,8409	0,6716	0,8171	0,5664	0,5949	0,5285	0,6309	0,4559	0,4519	0,5473	0	0,9349
60	0,9413	0,5418	0,9215	1,0774	1,0039	0,9187	0,8420	0,8637	0,9336	0,9026	0,9349	0

Tabella A.36: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma infinito, colonne 1-12.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	0,9066	0,4738	0,4614	0,8149	0,5875	1,1791	1,0486	1,1621	1,1526	1,1659	0,9829
2	0,9066	0	0,8968	0,6644	0,5183	0,8318	0,5533	0,4969	0,5122	0,5442	0,5669	0,5302
3	0,4738	0,8968	0	0,5556	0,7890	0,6532	0,9331	0,9669	1,0351	1,0121	0,9474	0,9924
4	0,4614	0,6644	0,5556	0	0,5802	0,5817	0,6741	0,7007	0,7665	0,7327	0,6425	0,8153
5	0,8149	0,5183	0,7890	0,5802	0	0,7902	0,5719	0,5420	0,5911	0,5843	0,5491	0,6339
6	0,5875	0,8318	0,6532	0,5817	0,7902	0	0,8326	0,8282	0,8604	0,8375	0,8268	0,9505
7	1,1791	0,5533	0,9331	0,6741	0,5719	0,8326	0	0,4887	0,4902	0,4730	0,4465	0,6365
8	1,0486	0,4969	0,9669	0,7007	0,5420	0,8282	0,4887	0	0,4281	0,4673	0,4871	0,5456
9	1,1621	0,5122	1,0351	0,7665	0,5911	0,8604	0,4902	0,4281	0	0,4976	0,5280	0,5602
10	1,1526	0,5442	1,0121	0,7327	0,5843	0,8375	0,4730	0,4673	0,4976	0	0,4755	0,6403
11	1,1659	0,5669	0,9474	0,6425	0,5491	0,8268	0,4465	0,4871	0,5280	0,4755	0	0,6634
12	0,9829	0,5302	0,9924	0,8153	0,6339	0,9505	0,6365	0,5456	0,5602	0,6403	0,6634	0
13	0,9354	0,5103	0,9457	0,7639	0,5555	0,8790	0,5779	0,4994	0,5436	0,6065	0,6062	0,5213
14	0,8136	0,5361	0,8865	0,5864	0,4965	0,8056	0,5578	0,5288	0,6237	0,5512	0,5359	0,6547
15	0,8220	0,5044	0,8345	0,5634	0,5011	0,7639	0,5288	0,5007	0,5375	0,5124	0,5078	0,6141
16	0,8774	0,4909	0,8882	0,6133	0,4861	0,7785	0,4916	0,4696	0,5113	0,4843	0,4984	0,5830
17	0,9012	0,5000	0,8702	0,6167	0,4705	0,8250	0,5177	0,5022	0,5560	0,4974	0,5143	0,6194
18	0,8251	0,5474	0,8343	0,6714	0,5559	0,7773	0,6192	0,5717	0,5821	0,6244	0,6463	0,5805
19	0,8293	0,4982	0,7878	0,5605	0,4433	0,7846	0,5504	0,5437	0,5888	0,5736	0,5383	0,6092
20	0,8552	0,5078	0,8782	0,6210	0,4798	0,8333	0,5355	0,5391	0,5702	0,5478	0,5212	0,6129
21	0,9347	0,4960	0,8792	0,6816	0,4836	0,8776	0,5157	0,5203	0,5652	0,5570	0,5399	0,5562
22	0,5681	0,6445	0,5893	0,5488	0,5892	0,5946	0,7291	0,6512	0,7112	0,7495	0,8121	0,7236
23	0,8517	0,6085	0,7767	0,6358	0,5745	0,7043	0,5491	0,5835	0,6160	0,6023	0,6149	0,7108
24	0,6149	0,6937	0,6250	0,5288	0,6092	0,6102	0,6609	0,6819	0,7294	0,7105	0,6884	0,7961
25	0,8543	1,1215	0,7258	0,8176	1,0645	0,8947	1,1506	1,2318	1,2617	1,2442	1,2469	1,2150
26	0,8419	1,0633	0,7578	0,7822	1,0017	0,8750	1,1754	1,2192	1,2607	1,2025	1,1241	1,1908
27	0,4465	0,7681	0,5875	0,4487	0,6687	0,6463	0,7420	0,7569	0,8284	0,7892	0,7099	0,9116
28	0,6208	0,6421	0,6472	0,4651	0,5335	0,6707	0,6415	0,6936	0,7343	0,7058	0,6458	0,8126
29	0,4215	0,7668	0,4695	0,4472	0,7202	0,5703	0,8137	0,8144	0,8922	0,8573	0,8523	0,8793
30	0,8858	0,4984	0,8715	0,6504	0,5000	0,8416	0,5962	0,5224	0,5791	0,5499	0,5597	0,5855
31	0,8694	0,5057	0,9176	0,6693	0,5136	0,8303	0,6056	0,5279	0,5740	0,5905	0,5575	0,5633
32	0,8877	0,7420	0,8500	0,6255	0,7052	0,7566	0,6673	0,7376	0,7856	0,6938	0,6335	0,8782
33	0,8697	0,7865	0,8270	0,7243	0,7056	0,7804	0,6879	0,7498	0,7830	0,7549	0,7201	0,8827
34	1,0041	0,5519	0,8941	0,6653	0,5755	0,8410	0,5323	0,5498	0,5513	0,5577	0,5289	0,6452
35	1,0215	0,5599	0,9503	0,7049	0,6333	0,8476	0,5171	0,5632	0,5729	0,5106	0,5393	0,6058
36	0,8501	0,5281	0,8391	0,5803	0,5549	0,7342	0,5396	0,5427	0,5616	0,5468	0,5473	0,6444
37	0,8477	0,6628	0,7103	0,5784	0,6518	0,6679	0,5968	0,6457	0,6712	0,6464	0,6346	0,7795
38	0,5289	0,9419	0,4589	0,5939	0,8560	0,7011	1,0350	1,0709	1,1732	1,1211	1,0851	1,0293
39	0,8568	0,4786	0,8750	0,6529	0,4972	0,8176	0,5563	0,4987	0,5381	0,5642	0,5502	0,5522
40	0,8048	0,5192	0,8244	0,6798	0,5438	0,7584	0,6339	0,5643	0,5857	0,6034	0,6207	0,5959
41	0,5400	0,9949	0,4878	0,6361	0,9266	0,6589	1,0760	1,0741	1,1788	1,2000	1,1995	1,0830
42	0,5338	0,6642	0,5581	0,5000	0,6219	0,5128	0,7008	0,6942	0,6935	0,7514	0,7698	0,7429
43	0,5161	0,8627	0,5566	0,5619	0,8075	0,6203	0,8894	0,9373	1,0018	0,9918	0,9219	0,9613
44	0,8758	1,1056	0,7778	0,8106	1,0519	0,8344	1,2941	1,2780	1,3250	1,3206	1,2824	1,2004
45	0,7166	0,9778	0,6938	0,6769	0,8669	0,7766	1,0456	1,1252	1,1611	1,0890	1,1095	1,0681
46	0,8151	0,9020	0,8255	0,7004	0,8070	0,7886	0,9473	1,0357	1,0556	0,9858	1,0295	0,9991
47	0,9583	1,0331	0,8723	0,8409	0,9441	0,8994	1,1206	1,1412	1,1984	1,1152	1,0578	1,1574
48	0,9364	0,7655	0,9318	0,7408	0,6885	0,8716	0,7757	0,8632	0,8793	0,8079	0,7934	0,9019
49	0,8878	1,1447	0,7417	0,8452	1,1042	0,9696	1,2123	1,3161	1,3324	1,3075	1,2878	1,2455
50	0,5476	1,0646	0,5042	0,6710	0,9841	0,8074	1,1659	1,1491	1,2034	1,2700	1,1774	1,1153
51	0,6227	0,9789	0,6801	0,7105	0,9732	0,6951	1,2192	1,0886	1,2185	1,1861	1,2029	1,0674
52	0,6238	1,0063	0,6264	0,6836	0,9492	0,7632	1,2999	1,1503	1,2861	1,2766	1,2876	1,0883
53	0,4590	0,8794	0,5160	0,5262	0,7978	0,6304	1,1874	1,0455	1,1755	1,1631	1,1765	0,9638
54	0,5122	0,9282	0,5365	0,5930	0,8633	0,7000	1,2556	1,1096	1,2518	1,2413	1,2452	1,0067
55	0,5588	0,9975	0,5675	0,6553	0,9585	0,7045	1,2986	1,1395	1,2700	1,2824	1,3056	1,0766
56	0,5353	0,9747	0,5426	0,6311	0,9161	0,6879	1,2693	1,1133	1,2546	1,2500	1,2488	1,0488
57	0,5417	1,0101	0,5775	0,6616	0,9555	0,7548	1,3023	1,1426	1,2954	1,2879	1,2864	1,0879
58	0,5418	0,9651	0,5539	0,6313	0,8773	0,7108	1,2694	1,1111	1,2631	1,2516	1,2611	1,0406
59	0,5548	0,9873	0,5820	0,6595	0,9296	0,7596	1,3018	1,1468	1,2894	1,2987	1,2920	1,0705
60	0,7897	1,1831	0,7323	0,9179	1,1546	0,9409	1,4195	1,2407	1,3775	1,4508	1,3901	1,2137

Tabella A.37: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma infinito, colonne 13-24.

	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	0,9354	0,8136	0,8220	0,8774	0,9012	0,8251	0,8293	0,8552	0,9347	0,5681	0,8517	0,6149
2	0,5103	0,5361	0,5044	0,4909	0,5000	0,5474	0,4982	0,5078	0,4960	0,6445	0,6085	0,6937
3	0,9457	0,8865	0,8345	0,8882	0,8702	0,8343	0,7878	0,8782	0,8792	0,5893	0,7767	0,6250
4	0,7639	0,5864	0,5634	0,6133	0,6167	0,6714	0,5605	0,6210	0,6816	0,5488	0,6358	0,5288
5	0,5555	0,4965	0,5011	0,4861	0,4705	0,5559	0,4433	0,4798	0,4836	0,5892	0,5745	0,6092
6	0,8790	0,8056	0,7639	0,7785	0,8250	0,7773	0,7846	0,8333	0,8776	0,5946	0,7043	0,6102
7	0,5779	0,5578	0,5288	0,4916	0,5177	0,6192	0,5504	0,5355	0,5157	0,7291	0,5491	0,6609
8	0,4994	0,5288	0,5007	0,4696	0,5022	0,5717	0,5437	0,5391	0,5203	0,6512	0,5835	0,6819
9	0,5436	0,6237	0,5375	0,5113	0,5560	0,5821	0,5888	0,5702	0,5652	0,7112	0,6160	0,7294
10	0,6065	0,5512	0,5124	0,4843	0,4974	0,6244	0,5736	0,5478	0,5570	0,7495	0,6023	0,7105
11	0,6062	0,5359	0,5078	0,4984	0,5143	0,6463	0,5383	0,5212	0,5399	0,8121	0,6149	0,6884
12	0,5213	0,6547	0,6141	0,5830	0,6194	0,5805	0,6092	0,6129	0,5562	0,7236	0,7108	0,7961
13	0	0,6040	0,5681	0,5246	0,5422	0,5296	0,5558	0,5468	0,5128	0,6593	0,6221	0,7421
14	0,6040	0	0,4696	0,4637	0,4508	0,5743	0,4773	0,4787	0,5138	0,5831	0,5940	0,6192
15	0,5681	0,4696	0	0,4654	0,4536	0,5335	0,4846	0,4891	0,4941	0,5794	0,5532	0,6045
16	0,5246	0,4637	0,4654	0	0,4300	0,5118	0,4669	0,4662	0,4737	0,6130	0,5475	0,6253
17	0,5422	0,4508	0,4536	0,4300	0	0,5344	0,4660	0,4800	0,4818	0,6539	0,5814	0,6507
18	0,5296	0,5743	0,5335	0,5118	0,5344	0	0,5379	0,5520	0,5538	0,5583	0,5284	0,5895
19	0,5558	0,4773	0,4846	0,4669	0,4660	0,5379	0	0,4722	0,4553	0,5876	0,5861	0,6144
20	0,5468	0,4787	0,4891	0,4662	0,4800	0,5520	0,4722	0	0,4759	0,5952	0,5626	0,6631
21	0,5128	0,5138	0,4941	0,4737	0,4818	0,5538	0,4553	0,4759	0	0,6631	0,5832	0,7029
22	0,6593	0,5831	0,5794	0,6130	0,6539	0,5583	0,5876	0,5952	0,6631	0	0,5565	0,5143
23	0,6221	0,5940	0,5532	0,5475	0,5814	0,5284	0,5861	0,5626	0,5832	0,5565	0	0,5647
24	0,7421	0,6192	0,6045	0,6253	0,6507	0,5895	0,6144	0,6631	0,7029	0,5143	0,5647	0
25	1,1705	1,1172	1,0691	1,1270	1,1082	1,1104	1,0336	1,1237	1,1269	0,9740	1,0520	0,9225
26	1,1599	1,0432	1,0627	1,0743	0,9949	1,1327	0,9425	1,0430	1,0634	1,0149	1,1325	0,9503
27	0,8718	0,6545	0,6592	0,7070	0,6865	0,7978	0,6238	0,6920	0,7237	0,5880	0,7571	0,6323
28	0,7472	0,5678	0,5634	0,5587	0,5663	0,6841	0,5324	0,5875	0,5908	0,5836	0,6463	0,5638
29	0,8129	0,7312	0,6952	0,7507	0,7644	0,6987	0,7059	0,7401	0,8133	0,4668	0,6740	0,5088
30	0,5457	0,4936	0,5020	0,4699	0,4990	0,5504	0,4893	0,4729	0,4929	0,6117	0,6228	0,7194
31	0,5161	0,5310	0,5278	0,4735	0,5135	0,5417	0,4932	0,5019	0,5009	0,6383	0,6203	0,7036
32	0,8380	0,6857	0,6652	0,7114	0,6608	0,7847	0,6546	0,6956	0,7202	0,7557	0,6817	0,7015
33	0,7792	0,7259	0,7216	0,7102	0,7073	0,7186	0,6920	0,7211	0,7232	0,7375	0,6199	0,6935
34	0,6051	0,6033	0,5081	0,5308	0,5394	0,5989	0,5251	0,5656	0,5309	0,6477	0,5414	0,6414
35	0,5832	0,6016	0,5368	0,5409	0,5635	0,5821	0,5962	0,6081	0,5721	0,6914	0,5585	0,6769
36	0,6019	0,4966	0,4798	0,4728	0,4928	0,5659	0,5073	0,5072	0,5452	0,5890	0,5547	0,5862
37	0,7207	0,6035	0,5496	0,6085	0,6181	0,5907	0,6022	0,6795	0,6620	0,5599	0,5049	0,5333
38	0,9916	0,8870	0,8620	0,9399	0,9617	0,8697	0,8066	0,9304	0,9132	0,6561	0,8953	0,6842
39	0,5229	0,5157	0,5019	0,4580	0,4972	0,5217	0,4799	0,4896	0,4948	0,6125	0,5886	0,6686
40	0,5265	0,5604	0,5520	0,5264	0,5318	0,5527	0,5243	0,5182	0,5167	0,5825	0,6086	0,6712
41	1,0383	0,9937	0,9380	0,9906	1,0310	0,9132	0,9149	0,9965	1,0060	0,6413	0,9209	0,7285
42	0,6854	0,6053	0,5655	0,5939	0,6297	0,5687	0,5824	0,6051	0,6596	0,4105	0,5923	0,4784
43	0,8820	0,8193	0,7565	0,8319	0,8359	0,7851	0,7531	0,8230	0,8459	0,5395	0,7659	0,6126
44	1,1582	1,1120	1,0794	1,1059	1,1007	1,0727	1,0333	1,0969	1,1320	0,9764	1,0552	0,9074
45	0,9860	0,9036	0,9148	0,9732	0,9480	0,9394	0,8699	0,9133	0,9528	0,7921	0,8921	0,7444
46	0,9132	0,8111	0,8236	0,8540	0,8593	0,8561	0,7963	0,8324	0,8809	0,7341	0,8199	0,7137
47	1,1061	0,9824	1,0154	1,0089	0,9838	1,0625	0,9400	0,9984	0,9901	1,0081	1,0152	0,9265
48	0,8161	0,6953	0,7012	0,7342	0,7042	0,7979	0,6702	0,7049	0,7168	0,7668	0,7351	0,7722
49	1,2108	1,1511	1,1513	1,2032	1,1411	1,1662	1,0860	1,1855	1,1767	1,0441	1,1309	0,9563
50	1,1208	1,0340	1,0055	1,0762	1,0505	0,9366	0,9534	1,0936	1,0816	0,7731	0,9855	0,7951
51	1,0173	0,9661	0,9530	0,9728	1,0396	0,8991	0,9390	0,9883	1,0159	0,6831	0,9244	0,7638
52	1,0274	0,9939	0,9612	1,0153	1,0384	0,9607	0,9280	0,9780	1,0218	0,7370	1,0000	0,7980
53	0,9082	0,8210	0,8029	0,8746	0,9149	0,7847	0,7952	0,8307	0,8815	0,5323	0,8264	0,6256
54	0,9520	0,9048	0,9028	0,9458	0,9638	0,8405	0,8463	0,8933	0,9411	0,6619	0,9195	0,7100
55	1,0278	0,9979	0,9675	0,9938	1,0222	0,8887	0,9351	0,9896	1,0267	0,6996	0,9698	0,7460
56	0,9925	0,9549	0,9250	0,9645	1,0101	0,8941	0,9028	0,9538	0,9676	0,6525	0,9349	0,7005
57	1,0138	0,9898	0,9518	1,0108	1,0321	0,9471	0,9271	0,9777	1,0044	0,7161	0,9859	0,8151
58	0,9628	0,9038	0,9089	0,9560	0,9751	0,8755	0,8654	0,9160	0,9551	0,6729	0,9240	0,7468
59	1,0076	0,9835	0,9552	1,0108	1,0356	0,9322	0,9111	0,9588	0,9985	0,7064	0,9682	0,7723
60	1,1929	1,2383	1,1820	1,1752	1,2350	1,0806	1,1260	1,2118	1,1855	0,8981	1,1457	0,9722

Tabella A.38: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma infinito, colonne 25-36.

	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
1	0,8543	0,8419	0,4465	0,6208	0,4215	0,8858	0,8694	0,8877	0,8697	1,0041	1,0215	0,8501
2	1,1215	1,0633	0,7681	0,6421	0,7668	0,4984	0,5057	0,7420	0,7865	0,5519	0,5599	0,5281
3	0,7258	0,7578	0,5875	0,6472	0,4695	0,8715	0,9176	0,8500	0,8270	0,8941	0,9503	0,8391
4	0,8176	0,7822	0,4487	0,4651	0,4472	0,6504	0,6693	0,6255	0,7243	0,6653	0,7049	0,5803
5	1,0645	1,0017	0,6687	0,5335	0,7202	0,5000	0,5136	0,7052	0,7056	0,5755	0,6333	0,5549
6	0,8947	0,8750	0,6463	0,6707	0,5703	0,8416	0,8303	0,7566	0,7804	0,8410	0,8476	0,7342
7	1,1506	1,1754	0,7420	0,6415	0,8137	0,5962	0,6056	0,6673	0,6879	0,5323	0,5171	0,5396
8	1,2318	1,2192	0,7569	0,6936	0,8144	0,5224	0,5279	0,7376	0,7498	0,5498	0,5632	0,5427
9	1,2617	1,2607	0,8284	0,7343	0,8922	0,5791	0,5740	0,7856	0,7830	0,5513	0,5729	0,5616
10	1,2442	1,2025	0,7892	0,7058	0,8573	0,5499	0,5905	0,6938	0,7549	0,5577	0,5106	0,5468
11	1,2469	1,1241	0,7099	0,6458	0,8523	0,5597	0,5575	0,6335	0,7201	0,5289	0,5393	0,5473
12	1,2150	1,1908	0,9116	0,8126	0,8793	0,5855	0,5633	0,8782	0,8827	0,6452	0,6058	0,6444
13	1,1705	1,1599	0,8718	0,7472	0,8129	0,5457	0,5161	0,8380	0,7792	0,6051	0,5832	0,6019
14	1,1172	1,0432	0,6545	0,5678	0,7312	0,4936	0,5310	0,6857	0,7259	0,6033	0,6016	0,4966
15	1,0691	1,0627	0,6592	0,5634	0,6952	0,5020	0,5278	0,6652	0,7216	0,5081	0,5368	0,4798
16	1,1270	1,0743	0,7070	0,5587	0,7507	0,4699	0,4735	0,7114	0,7102	0,5308	0,5409	0,4728
17	1,1082	0,9949	0,6865	0,5663	0,7644	0,4990	0,5135	0,6608	0,7073	0,5394	0,5635	0,4928
18	1,1104	1,1327	0,7978	0,6841	0,6987	0,5504	0,5417	0,7847	0,7186	0,5989	0,5821	0,5659
19	1,0336	0,9425	0,6238	0,5324	0,7059	0,4893	0,4932	0,6546	0,6920	0,5251	0,5962	0,5073
20	1,1237	1,0430	0,6920	0,5875	0,7401	0,4729	0,5019	0,6956	0,7211	0,5656	0,6081	0,5072
21	1,1269	1,0634	0,7237	0,5908	0,8133	0,4929	0,5009	0,7202	0,7232	0,5309	0,5721	0,5452
22	0,9740	1,0149	0,5880	0,5836	0,4668	0,6117	0,6383	0,7557	0,7375	0,6477	0,6914	0,5890
23	1,0520	1,1325	0,7571	0,6463	0,6740	0,6228	0,6203	0,6817	0,6199	0,5414	0,5585	0,5547
24	0,9225	0,9503	0,6323	0,5638	0,5088	0,7194	0,7036	0,7015	0,6935	0,6414	0,6769	0,5862
25	0	0,2944	0,8705	0,8648	0,7622	1,1847	1,1269	0,9832	1,0347	1,1129	1,1765	1,0686
26	0,2944	0	0,7273	0,7914	0,7585	1,0608	1,0582	0,9208	1,0462	1,2043	1,2400	1,0792
27	0,8705	0,7273	0	0,4949	0,5391	0,7033	0,7480	0,6930	0,8547	0,8141	0,8501	0,6582
28	0,8648	0,7914	0,4949	0	0,5503	0,6105	0,6460	0,6191	0,6699	0,6573	0,7225	0,5859
29	0,7622	0,7585	0,5391	0,5503	0	0,7587	0,7844	0,7352	0,7578	0,7994	0,8333	0,6667
30	1,1847	1,0608	0,7033	0,6105	0,7587	0	0,4955	0,7347	0,7601	0,5974	0,6206	0,5406
31	1,1269	1,0582	0,7480	0,6460	0,7844	0,4955	0	0,7236	0,7602	0,5713	0,6177	0,5342
32	0,9832	0,9208	0,6930	0,6191	0,7352	0,7347	0,7236	0	0,6649	0,6544	0,7058	0,6293
33	1,0347	1,0462	0,8547	0,6699	0,7578	0,7601	0,7602	0,6649	0	0,6731	0,6922	0,6541
34	1,1129	1,2043	0,8141	0,6573	0,7994	0,5974	0,5713	0,6544	0,6731	0	0,4787	0,5155
35	1,1765	1,2400	0,8501	0,7225	0,8333	0,6206	0,6177	0,7058	0,6922	0,4787	0	0,5238
36	1,0686	1,0792	0,6582	0,5859	0,6667	0,5406	0,5342	0,6293	0,6541	0,5155	0,5238	0
37	0,9870	1,1468	0,6910	0,6098	0,6292	0,7364	0,6950	0,6466	0,6358	0,5526	0,5180	0,5176
38	0,7960	0,8140	0,5901	0,7155	0,5424	0,9338	0,9490	0,8582	0,9083	0,9604	1,0051	0,8178
39	1,1079	1,0605	0,7296	0,6053	0,7467	0,4921	0,5018	0,7243	0,7316	0,5447	0,5532	0,4991
40	1,1144	1,0977	0,7803	0,6627	0,6905	0,5095	0,5104	0,7910	0,7216	0,6302	0,6407	0,5929
41	0,6863	0,7547	0,6667	0,7595	0,5458	1,0015	1,0136	0,8989	0,9127	1,0220	1,0878	0,8960
42	1,0019	1,0637	0,5268	0,5627	0,4505	0,6065	0,6141	0,6726	0,6805	0,5804	0,6883	0,5425
43	0,8623	0,8627	0,5805	0,5979	0,4860	0,8573	0,8566	0,7897	0,7674	0,8234	0,8941	0,7141
44	0,3286	0,3761	0,8617	0,8602	0,7690	1,1418	1,1096	0,9337	0,9828	1,1386	1,2024	1,0532
45	0,4460	0,4720	0,7257	0,6769	0,6313	1,0081	0,9632	0,8116	0,8168	0,9887	1,0209	0,9597
46	0,5117	0,5771	0,8237	0,7159	0,7299	0,9177	0,8697	0,7854	0,7755	0,8669	0,9328	0,8202
47	0,6042	0,5202	0,8782	0,8182	0,8938	1,0143	1,0259	0,8418	0,8650	1,0699	1,1160	1,0047
48	0,6934	0,6113	0,8172	0,6940	0,8445	0,7347	0,7590	0,7633	0,7716	0,8050	0,8268	0,7620
49	0,2980	0,3398	0,9074	0,9194	0,7986	1,2325	1,1911	1,1400	1,0709	1,2238	1,2316	1,1847
50	0,7677	0,8204	0,6667	0,8581	0,5791	1,1079	1,0856	1,0800	0,9823	1,1048	1,0845	0,9356
51	0,9304	0,9580	0,7285	0,8041	0,6355	0,9710	0,9679	0,8743	0,9204	1,0665	1,1057	0,8698
52	0,8744	0,8745	0,7017	0,7463	0,6601	1,0059	0,9779	0,9760	0,9429	1,1786	1,1924	1,0179
53	0,8519	0,8381	0,5468	0,6047	0,4400	0,8521	0,8471	0,8673	0,8266	1,0171	1,0298	0,8671
54	0,7328	0,7167	0,6316	0,6541	0,5256	0,9465	0,9084	0,9089	0,8671	1,0919	1,1120	0,9647
55	0,8238	0,7936	0,6879	0,7298	0,5621	0,9910	0,9700	0,9613	0,9410	1,1495	1,1890	0,9751
56	0,7917	0,7679	0,6563	0,7317	0,5507	0,9467	0,9628	0,9429	0,9080	1,0910	1,1144	0,9227
57	0,7963	0,8036	0,7049	0,7561	0,6149	1,0015	0,9926	0,9837	0,9540	1,1451	1,1729	1,0082
58	0,7533	0,7702	0,6789	0,6962	0,5603	0,9505	0,9312	0,9288	0,8915	1,1153	1,1468	0,9709
59	0,7850	0,8018	0,6888	0,7270	0,6054	1,0119	0,9776	0,9645	0,9416	1,1409	1,1640	1,0198
60	0,9167	0,9512	0,9693	1,0336	0,8347	1,1964	1,1683	1,1591	1,1161	1,2279	1,2861	1,0766

Tabella A.39: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma infinito, colonne 37-48.

	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
1	0,8477	0,5289	0,8568	0,8048	0,5400	0,5338	0,5161	0,8758	0,7166	0,8151	0,9583	0,9364
2	0,6628	0,9419	0,4786	0,5192	0,9949	0,6642	0,8627	1,1056	0,9778	0,9020	1,0331	0,7655
3	0,7103	0,4589	0,8750	0,8244	0,4878	0,5581	0,5566	0,7778	0,6938	0,8255	0,8723	0,9318
4	0,5784	0,5939	0,6529	0,6798	0,6361	0,5000	0,5619	0,8106	0,6769	0,7004	0,8409	0,7408
5	0,6518	0,8560	0,4972	0,5438	0,9266	0,6219	0,8075	1,0519	0,8669	0,8070	0,9441	0,6885
6	0,6679	0,7011	0,8176	0,7584	0,6589	0,5128	0,6203	0,8344	0,7766	0,7886	0,8994	0,8716
7	0,5968	1,0350	0,5563	0,6339	1,0760	0,7008	0,8894	1,2941	1,0456	0,9473	1,1206	0,7757
8	0,6457	1,0709	0,4987	0,5643	1,0741	0,6942	0,9373	1,2780	1,1252	1,0357	1,1412	0,8632
9	0,6712	1,1732	0,5381	0,5857	1,1788	0,6935	1,0018	1,3250	1,1611	1,0556	1,1984	0,8793
10	0,6464	1,1211	0,5642	0,6034	1,2000	0,7514	0,9918	1,3206	1,0890	0,9858	1,1152	0,8079
11	0,6346	1,0851	0,5502	0,6207	1,1995	0,7698	0,9219	1,2824	1,1095	1,0295	1,0578	0,7934
12	0,7795	1,0293	0,5522	0,5959	1,0830	0,7429	0,9613	1,2004	1,0681	0,9991	1,1574	0,9019
13	0,7207	0,9916	0,5229	0,5265	1,0383	0,6854	0,8820	1,1582	0,9860	0,9132	1,1061	0,8161
14	0,6035	0,8870	0,5157	0,5604	0,9937	0,6053	0,8193	1,1120	0,9036	0,8111	0,9824	0,6953
15	0,5496	0,8620	0,5019	0,5520	0,9380	0,5655	0,7565	1,0794	0,9148	0,8236	1,0154	0,7012
16	0,6085	0,9399	0,4580	0,5264	0,9906	0,5939	0,8319	1,1059	0,9732	0,8540	1,0089	0,7342
17	0,6181	0,9617	0,4972	0,5318	1,0310	0,6297	0,8359	1,1007	0,9480	0,8593	0,9838	0,7042
18	0,5907	0,8697	0,5217	0,5527	0,9132	0,5687	0,7851	1,0727	0,9394	0,8561	1,0625	0,7979
19	0,6022	0,8066	0,4799	0,5243	0,9149	0,5824	0,7531	1,0333	0,8699	0,7963	0,9400	0,6702
20	0,6795	0,9304	0,4896	0,5182	0,9965	0,6051	0,8230	1,0969	0,9133	0,8324	0,9984	0,7049
21	0,6620	0,9132	0,4948	0,5167	1,0060	0,6596	0,8459	1,1320	0,9528	0,8809	0,9901	0,7168
22	0,5599	0,6561	0,6125	0,5825	0,6413	0,4105	0,5395	0,9764	0,7921	0,7341	1,0081	0,7668
23	0,5049	0,8953	0,5886	0,6086	0,9209	0,5923	0,7659	1,0552	0,8921	0,8199	1,0152	0,7351
24	0,5333	0,6842	0,6686	0,6712	0,7285	0,4784	0,6126	0,9074	0,7444	0,7137	0,9265	0,7722
25	0,9870	0,7960	1,1079	1,1144	0,6863	1,0019	0,8623	0,3286	0,4460	0,5117	0,6042	0,6934
26	1,1468	0,8140	1,0605	1,0977	0,7547	1,0637	0,8627	0,3761	0,4720	0,5771	0,5202	0,6113
27	0,6910	0,5901	0,7296	0,7803	0,6667	0,5268	0,5805	0,8617	0,7257	0,8237	0,8782	0,8172
28	0,6098	0,7155	0,6053	0,6627	0,7595	0,5627	0,5979	0,8602	0,6769	0,7159	0,8182	0,6940
29	0,6292	0,5424	0,7467	0,6905	0,5458	0,4505	0,4860	0,7690	0,6313	0,7299	0,8938	0,8445
30	0,7364	0,9338	0,4921	0,5095	1,0015	0,6065	0,8573	1,1418	1,0081	0,9177	1,0143	0,7347
31	0,6950	0,9490	0,5018	0,5104	1,0136	0,6141	0,8566	1,1096	0,9632	0,8697	1,0259	0,7590
32	0,6466	0,8582	0,7243	0,7910	0,8989	0,6726	0,7897	0,9337	0,8116	0,7854	0,8418	0,7633
33	0,6358	0,9083	0,7316	0,7216	0,9127	0,6805	0,7674	0,9828	0,8168	0,7755	0,8650	0,7716
34	0,5526	0,9604	0,5447	0,6302	1,0220	0,5804	0,8234	1,1386	0,9887	0,8669	1,0699	0,8050
35	0,5180	1,0051	0,5532	0,6407	1,0878	0,6883	0,8941	1,2024	1,0209	0,9328	1,1160	0,8268
36	0,5176	0,8178	0,4991	0,5929	0,8960	0,5425	0,7141	1,0532	0,9597	0,8202	1,0047	0,7620
37	0	0,8202	0,6497	0,6977	0,8761	0,5038	0,6992	1,0279	0,9007	0,7876	0,9940	0,7857
38	0,8202	0	0,8658	0,8726	0,4274	0,6158	0,5375	0,7874	0,7640	0,8808	0,9155	0,9698
39	0,6497	0,8658	0	0,5164	0,9751	0,6133	0,8426	1,0986	0,9340	0,8662	1,0167	0,7402
40	0,6977	0,8726	0,5164	0	0,8930	0,5967	0,7796	1,0845	0,9221	0,8416	1,0176	0,7433
41	0,8761	0,4274	0,9751	0,8930	0	0,5611	0,5876	0,6731	0,8080	0,8824	0,8992	1,0372
42	0,5038	0,6158	0,6133	0,5967	0,5611	0	0,4664	0,9962	0,8679	0,7749	1,0429	0,8337
43	0,6992	0,5375	0,8426	0,7796	0,5876	0,4664	0	0,8429	0,7184	0,7573	0,8387	0,8723
44	1,0279	0,7874	1,0986	1,0845	0,6731	0,9962	0,8429	0	0,4574	0,4769	0,5574	0,6898
45	0,9007	0,7640	0,9340	0,9221	0,8080	0,8679	0,7184	0,4574	0	0,3768	0,5160	0,5054
46	0,7876	0,8808	0,8662	0,8416	0,8824	0,7749	0,7573	0,4769	0,3768	0	0,5186	0,4630
47	0,9940	0,9155	1,0167	1,0176	0,8992	1,0429	0,8387	0,5574	0,5160	0,5186	0	0,6019
48	0,7857	0,9698	0,7402	0,7433	1,0372	0,8337	0,8723	0,6898	0,5054	0,4630	0,6019	0
49	1,1057	0,7769	1,1534	1,1690	0,7194	1,0792	0,9030	0,4059	0,4370	0,6407	0,6250	0,7469
50	0,8700	0,4711	1,0147	1,0454	0,4796	0,6467	0,7052	0,8762	0,8630	1,0120	1,0431	1,1109
51	0,9259	0,6204	0,9676	0,9001	0,6754	0,6218	0,7033	0,8504	0,9040	0,8907	0,9356	1,0588
52	1,0543	0,6929	0,9801	0,8931	0,7195	0,7643	0,6382	0,9031	0,7695	0,8886	0,8093	1,0099
53	0,8726	0,5478	0,8453	0,7595	0,6119	0,5576	0,5206	0,8394	0,6550	0,7660	0,8618	0,9018
54	0,9754	0,5507	0,9101	0,8262	0,5957	0,6884	0,5728	0,7712	0,6711	0,8125	0,7820	0,9160
55	0,9979	0,5906	0,9884	0,9063	0,6154	0,6547	0,6357	0,7523	0,7979	0,9220	0,8566	1,0449
56	0,9661	0,5192	0,9454	0,8782	0,5187	0,6455	0,5909	0,7682	0,7639	0,8438	0,8520	1,0000
57	1,0254	0,5462	0,9655	0,8904	0,6121	0,7201	0,6573	0,8227	0,7569	0,8835	0,8200	0,9859
58	0,9834	0,5277	0,9264	0,8398	0,6267	0,6947	0,5892	0,7792	0,6957	0,8237	0,7816	0,9310
59	1,0213	0,5814	0,9654	0,8962	0,6368	0,7172	0,6514	0,8303	0,7448	0,8886	0,8105	0,9879
60	1,1553	0,6500	1,1258	1,1055	0,6364	0,7689	0,9248	0,8750	0,9956	1,0582	1,0000	1,1606

Tabella A.40: Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma infinito, colonne 49-60.

	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
1	0,8878	0,5476	0,6227	0,6238	0,4590	0,5122	0,5588	0,5353	0,5417	0,5418	0,5548	0,7897
2	1,1447	1,0646	0,9789	1,0063	0,8794	0,9282	0,9975	0,9747	1,0101	0,9651	0,9873	1,1831
3	0,7417	0,5042	0,6801	0,6264	0,5160	0,5365	0,5675	0,5426	0,5775	0,5539	0,5820	0,7323
4	0,8452	0,6710	0,7105	0,6836	0,5262	0,5930	0,6553	0,6311	0,6616	0,6313	0,6595	0,9179
5	1,1042	0,9841	0,9732	0,9492	0,7978	0,8633	0,9585	0,9161	0,9555	0,8773	0,9296	1,1546
6	0,9696	0,8074	0,6951	0,7632	0,6304	0,7000	0,7045	0,6879	0,7548	0,7108	0,7596	0,9409
7	1,2123	1,1659	1,2192	1,2999	1,1874	1,2556	1,2986	1,2693	1,3023	1,2694	1,3018	1,4195
8	1,3161	1,1491	1,0886	1,1503	1,0455	1,1096	1,1395	1,1133	1,1426	1,1111	1,1468	1,2407
9	1,3324	1,2034	1,2185	1,2861	1,1755	1,2518	1,2700	1,2546	1,2954	1,2631	1,2894	1,3775
10	1,3075	1,2700	1,1861	1,2766	1,1631	1,2413	1,2824	1,2500	1,2879	1,2516	1,2987	1,4508
11	1,2878	1,1774	1,2029	1,2876	1,1765	1,2452	1,3056	1,2488	1,2864	1,2611	1,2920	1,3901
12	1,2455	1,1153	1,0674	1,0883	0,9638	1,0067	1,0766	1,0488	1,0879	1,0406	1,0705	1,2137
13	1,2108	1,1208	1,0173	1,0274	0,9082	0,9520	1,0278	0,9925	1,0138	0,9628	1,0076	1,1929
14	1,1511	1,0340	0,9661	0,9939	0,8210	0,9048	0,9979	0,9549	0,9898	0,9038	0,9835	1,2383
15	1,1513	1,0055	0,9530	0,9612	0,8029	0,9028	0,9675	0,9250	0,9518	0,9089	0,9552	1,1820
16	1,2032	1,0762	0,9728	1,0153	0,8746	0,9458	0,9938	0,9645	1,0108	0,9560	1,0108	1,1752
17	1,1411	1,0505	1,0396	1,0384	0,9149	0,9638	1,0222	1,0101	1,0321	0,9751	1,0356	1,2350
18	1,1662	0,9366	0,8991	0,9607	0,7847	0,8405	0,8887	0,8941	0,9471	0,8755	0,9322	1,0806
19	1,0860	0,9534	0,9390	0,9280	0,7952	0,8463	0,9351	0,9028	0,9271	0,8654	0,9111	1,1260
20	1,1855	1,0936	0,9883	0,9780	0,8307	0,8933	0,9896	0,9538	0,9777	0,9160	0,9588	1,2118
21	1,1767	1,0816	1,0159	1,0218	0,8815	0,9411	1,0267	0,9676	1,0044	0,9551	0,9985	1,1855
22	1,0441	0,7731	0,6831	0,7370	0,5323	0,6619	0,6996	0,6525	0,7161	0,6729	0,7064	0,8981
23	1,1309	0,9855	0,9244	1,0000	0,8264	0,9195	0,9698	0,9349	0,9859	0,9240	0,9682	1,1457
24	0,9563	0,7951	0,7638	0,7980	0,6256	0,7100	0,7460	0,7005	0,8151	0,7468	0,7723	0,9722
25	0,2980	0,7677	0,9304	0,8744	0,8519	0,7328	0,8238	0,7917	0,7963	0,7533	0,7850	0,9167
26	0,3398	0,8204	0,9580	0,8745	0,8381	0,7167	0,7936	0,7679	0,8036	0,7702	0,8018	0,9512
27	0,9074	0,6667	0,7285	0,7017	0,5468	0,6316	0,6879	0,6563	0,7049	0,6789	0,6888	0,9693
28	0,9194	0,8581	0,8041	0,7463	0,6047	0,6541	0,7298	0,7317	0,7561	0,6962	0,7270	1,0336
29	0,7986	0,5791	0,6355	0,6601	0,4400	0,5256	0,5621	0,5507	0,6149	0,5603	0,6054	0,8347
30	1,2325	1,1079	0,9710	1,0059	0,8521	0,9465	0,9910	0,9467	1,0015	0,9505	1,0119	1,1964
31	1,1911	1,0856	0,9679	0,9779	0,8471	0,9084	0,9700	0,9628	0,9926	0,9312	0,9776	1,1683
32	1,1400	1,0800	0,8743	0,9760	0,8673	0,9089	0,9613	0,9429	0,9837	0,9288	0,9645	1,1591
33	1,0709	0,9823	0,9204	0,9429	0,8266	0,8671	0,9410	0,9080	0,9540	0,8915	0,9416	1,1161
34	1,2238	1,1048	1,0665	1,1786	1,0171	1,0919	1,1495	1,0910	1,1451	1,1153	1,1409	1,2279
35	1,2316	1,0845	1,1057	1,1924	1,0298	1,1120	1,1890	1,1144	1,1729	1,1468	1,1640	1,2861
36	1,1847	0,9356	0,8698	1,0179	0,8671	0,9647	0,9751	0,9227	1,0082	0,9709	1,0198	1,0766
37	1,1057	0,8700	0,9259	1,0543	0,8726	0,9754	0,9979	0,9661	1,0254	0,9834	1,0213	1,1553
38	0,7769	0,4711	0,6204	0,6929	0,5478	0,5507	0,5906	0,5192	0,5462	0,5277	0,5814	0,6500
39	1,1534	1,0147	0,9676	0,9801	0,8453	0,9101	0,9884	0,9454	0,9655	0,9264	0,9654	1,1258
40	1,1690	1,0454	0,9001	0,8931	0,7595	0,8262	0,9063	0,8782	0,8904	0,8398	0,8962	1,1055
41	0,7194	0,4796	0,6754	0,7195	0,6119	0,5957	0,6154	0,5187	0,6121	0,6267	0,6368	0,6364
42	1,0792	0,6467	0,6218	0,7643	0,5576	0,6884	0,6547	0,6455	0,7201	0,6947	0,7172	0,7689
43	0,9030	0,7052	0,7033	0,6382	0,5206	0,5728	0,6357	0,5909	0,6573	0,5892	0,6514	0,9248
44	0,4059	0,8762	0,8504	0,9031	0,8394	0,7712	0,7523	0,7682	0,8227	0,7792	0,8303	0,8750
45	0,4370	0,8630	0,9040	0,7695	0,6550	0,6711	0,7979	0,7639	0,7569	0,6957	0,7448	0,9956
46	0,6407	1,0120	0,8907	0,8886	0,7660	0,8125	0,9220	0,8438	0,8835	0,8237	0,8886	1,0582
47	0,6250	1,0431	0,9356	0,8093	0,8618	0,7820	0,8566	0,8520	0,8200	0,7816	0,8105	1,0000
48	0,7469	1,1109	1,0588	1,0099	0,9018	0,9160	1,0449	1,0000	0,9859	0,9310	0,9879	1,1606
49	0	0,5000	1,0586	0,9395	0,8817	0,7411	0,8366	0,8654	0,8269	0,7534	0,7961	0,9189
50	0,5000	0	0,8604	0,8000	0,6718	0,6429	0,6436	0,6298	0,5769	0,6712	0,6311	0,5135
51	1,0586	0,8604	0	0,7895	0,6871	0,7266	0,6923	0,6167	0,7833	0,7769	0,7773	0,8611
52	0,9395	0,8000	0,7895	0	0,5819	0,5703	0,7225	0,6223	0,5193	0,5615	0,5281	1,0173
53	0,8817	0,6718	0,6871	0,5819	0	0,5000	0,5474	0,5429	0,5429	0,5223	0,5540	0,9500
54	0,7411	0,6429	0,7266	0,5703	0,5000	0	0,5890	0,5620	0,5331	0,4625	0,4917	0,8626
55	0,8366	0,6436	0,6923	0,7225	0,5474	0,5890	0	0,5727	0,6273	0,6017	0,5826	0,7938
56	0,8654	0,6298	0,6167	0,6223	0,5429	0,5620	0,5727	0	0,4867	0,5527	0,4330	0,8193
57	0,8269	0,5769	0,7833	0,5193	0,5429	0,5331	0,6273	0,4867	0	0,4515	0,4196	0,8735
58	0,7534	0,6712	0,7769	0,5615	0,5223	0,4625	0,6017	0,5527	0,4515	0	0,5064	0,8531
59	0,7961	0,6311	0,7773	0,5281	0,5540	0,4917	0,5826	0,4330	0,4196	0,5064	0	0,8780
60	0,9189	0,5135	0,8611	1,0173	0,9500	0,8626	0,7938	0,8193	0,8735	0,8531	0,8780	0

Appendice B

Codice

Di seguito è riportato il codice Python (per versione 2.7.10), preceduto dagli autori, utilizzato nella sperimentazione. In tabella B.1 sono riportati tutti i pacchetti Python utilizzati; i pacchetti non nativi di Python sono riportati con la versione utilizzata.

Per una versione accessibile online con commenti in inglese, è disponibile un repository GitLab contenente il codice all'indirizzo:

https://gitlab.com/mpaolizzi/voicereading_analysis.git.

Pacchetto	Versione	Pacchetto	Versione
Collections	1.1	NumPy	1.14.0
DTW	1.3	SciPy	1.0.0
itertools	2.3	String	Nativo
Matplotlib	1.4.3	sys	Nativo
Music 21	4.1.0		

Tabella B.1: Elenco dei pacchetti Python utilizzati nella sperimentazione.

B.1 Lettura file esterni

B.1.1 Lettura file TXT

```
"""
@author: Michele Paolizzi
"""
##Codice relativo alla lettura dei file in formato TXT
##I file txt vengono letti da Python tramite readlines prima
##dell'inserimento in funzione

##Dato un file in formato TXT contenente SOLO stringhe,
##genera una matrice dove le righe sono le righe del file TXT,
##e gli elementi interni alla riga sono suddivisi in base alla
##stringa ", "
def convertistr(mat):
    nocap=[]
    splitt=[]
```

```

for x in mat:
    if x[-1]=='\n':
        nocap.append(x[:-1])
    else:
        nocap.append(x)
for x in nocap:
    splitt.append(x.split(',\u0000'))
return splitt

##Dato un file in formato TXT contenente SOLO elementi numerici,
##genera una matrice dove le righe sono le righe del file TXT,
##e gli elementi interni alla riga sono suddivisi in base alla
##stringa ", ", convertendoli in float
def convertifloat(mat):
    nocap=[]
    splitt=[]
    floatt=[]
    for x in mat:
        if x[-1]=='\n':
            nocap.append(x[:-1])
        else:
            nocap.append(x)
    for x in nocap:
        splitt.append(x.split(',\u0000'))
    for x in splitt:
        for i in range(len(x)):
            x[i]=float(x[i])
        floatt.append(x)
    return floatt

```

B.1.2 Lettura file MIDI

```

"""
@author: Michele Paolizzi
"""
##Codice relativo alla conversione dei file MIDI.
##Gestisce sia file MIDI contenenti tutte le voci (con canali MIDI
##separati) che file MIDI con le voci separate.

from music21 import *

##Dato il file MIDI gia' letto dal pacchetto Music21, restituisce
##una lista di liste annidate contenente i pitch relativi alle voci
def pitches(track):
    pitch=[]
    for p in track:
        pitchs=[]
        for n in p.flat.notes:
            pitchs.append(n.pitch.midi)
        pitch.append(pitchs)
    return pitch

##Funzione che riconosce le pause codificate come descritto nel

```

```

##corso della tesi e le aumenta di 500
def pause(track):
    if len(track)==1:
        track=track[0]
        for i in range(len(track)):
            if track[i]<=20:
                track[i]+=500
    else:
        for t in track:
            for i in range(len(t)):
                if t[i]<=20:
                    t[i]+=500
    return track

##Dato in input il percorso del file MIDI da leggere, restituisce
##la lista dei pitch per ogni voce del file MIDI
##converter.parse e' la funzione nativa di Music21 necessaria per
##la lettura
def converting(url):
    if len(url)<4:
        return None
    else:
        return pause(pitches(converter.parse(url)))

```

B.2 Riduzione della specie del contrappunto

```

"""
@author: Michele Paolizzi
"""
##Codice che riporta la valutazione del peso dei valori ritmici
##di un brano per deciderne la suddivisione ritmica.
##Il file fondamentale e' un file formato TXT contenente percorso
##e nomi dei file MIDI relativi ai brani da analizzare.
##I file MIDI, in formato .mid, sono stati generati con
##Finale2012, senza Human Playback, con ogni voce su un canale
##distinto.
##In questo algoritmo, non sono gestiti gruppi irregolari
##(terzine, cinque, ecc.)

from music21 import converter, duration
import numpy as np
from collections import Counter
from string import digits

##Dato in input il file MIDI convertito secondo la funzione
##converter.parse di Music21, esporta le durate delle note
##eseguite.
def conv_length(midi):
    durate=[]
    for p in midi:
        d=[]
        for n in p.flat.notes:

```

```

        d.append(n.quarterLength)
    durate.append(d)
durcomp=[]
for i in durate:
    for j in i:
        durcomp.append(j)
return durate, durcomp

##Lista contenente i valori ritmici di riferimento
dur=range(-6,3)
for i in range(len(dura)):
    dur[i]=2.**dur[i]

##"Scompone" i tempi composti inferiori alla breve, e unisce i
##valori degli elementi trovati ai corrispondenti elementi semplici.
def riducicomposti(dic):
    notescomp={}
    for x in dic:
        notescomp[x]=dic[x]

    for k in notescomp.keys():
        (frac, partint)=np.modf(k)
        if k not in dur and k<8:
            if frac!=0 and partint!=0:
                notescomp[frac]+=notescomp[k]
                notescomp[partint]+=notescomp[k]
                del notescomp[k]
            else:
                for y in dur:
                    if k-y in dur:
                        notescomp[k-y]+=notescomp[k]
                        notescomp[y]+=notescomp[k]
                        del notescomp[k]
                    break
    return notescomp

##Funzione che pesa i valori in base al tempo di effettiva
##esecuzione totale
def pesanotetempo(dic):
    notepes={}
    for x in dic:
        notepes[x]=x*dic[x]
    base=sum(notepes.values())

    for x in notepes:
        notepes[x]=(float(notepes[x])/base)*100
    return notepes

##Funzione ausiliaria che permette di capire al codice
##se si vuole analizzare un brano solo o tutti.
def verifica(inp):

```

```

char=[]
for x in inp:
    char.append(x not in digits)
rif=[True]*len(char)
return char==rif

##Peso in base al tempo:
##I valori sotto l'1% li trascuro,
##Valori dalla cromia in giu', fino al 4% riduzione locale
##sopra il 4%, durata principale
def valutapeso(midi):
    durate, durcomp=conv_length(converter.parse(x))

    note=dict(Counter(durcomp))
    notescomp=riducicomposti(note)

    notepes=pesanotetempo(notescomp)

    (low,med,high)=(0,1,4)

    trascura=[]
    locale=[]
    totale=0
    for (k, val) in sorted(notepes.items()):
        if low<=val<=med and k<=4:
            trascura.append((k,val))
        elif med<val<=high:
            locale.append((k,val))
        elif val>high:
            totale=(k,val)
            break
    return durate, note, notepes, trascura, locale, totale

doc=open(##file TXT contenente i nomi dei file midi)

##Si legge il file txt secondo la funzione gia' descritta
lista=convertistr(doc.readlines())
for i in range(len(lista)):
    if len(lista[i])==1:
        lista[i]=lista[i][0]

##Chiudiamo il file TXT appena letto
lista.close()

for i in range(len(lista)):
    print "Digitare", i+1, "per il MIDI", lista[i][9:].upper()

##E' data la possibilita' di analizzare un solo brano, o tutti
print('_')
j=raw_input('Quale midi si desidera? Tper tutto...')
print('_')

```

```

if verifica(j):
    for x in lista:
        durate, note, notepes, trasc, loc, tot = valutapeso(x)
        print('␣')
        print x[9:-8].upper(), note
        print('␣')

        print "Suddivisione␣principale:"
        print tot[0], "di␣percentuale", np.round(tot[1], decimals=2)

        if len(loc)!=0:
            print ('␣')
            print "Suddividere␣localmente␣i␣valori␣corrispondenti␣a:"
            for i in loc:
                print i[0], "di␣percentuale", np.round(i[1], decimals=2)
        if len(trasc)!=0:
            print('␣')
            print "E'␣possibile␣trascurare:"
            for i in trasc:
                print i[0], "di␣percentuale", np.round(i[1], decimals=2)

else:
    x=lista[int(j)-1]

    durate, note, notepes, trasc, loc, tot = valutapeso(x)

    print('␣')
    print x[9:-8].upper(), note
    print ('␣')

    print "Suddivisione␣principale:"
    print tot[0], "di␣percentuale", np.round(tot[1], decimals=2)

    if len(loc)!=0:
        print ('␣')
        print "Suddividere␣localmente␣i␣valori␣corrispondenti␣a:"
        for i in loc:
            print i[0], "di␣percentuale", np.round(i[1], decimals=2)
    if len(trasc)!=0:
        print ('␣')
        print "E'␣possibile␣trascurare:"
        for i in trasc:
            print i[0], "di␣percentuale", np.round(i[1], decimals=2)

```

B.3 Analisi del brano

B.3.1 Permutazione parziale e creazione vettore di complessità

```

"""
@author: Pierre Talbot & Mattia G. Bergomi
@edit: Michele Paolizzi
"""
##Codice utilizzato dal dott. Bergomi nella sua tesi.

```

```

##I commenti segnati con un solo # sono gli originali, quelli con
##2 # sono personali.

import numpy as np
from dtw import dtw
from collections import Counter
from itertools import combinations

# Wrap pitch value in a class 'Pitch', 'next' is a member containing
# the next pitch (of type 'Pitch') to be played in the voice leading
# sequence.
# It is 'None' if it is the end of the sequence.
class Pitch:
    def __init__(self, value, offset):
        self.value = value
        self.offset = offset
        self.source_offset = offset
    def __repr__(self):
        return "("+str(self.value)+",""+str(self.offset)+",""+
            +str(self.source_offset)+")"

def merge_max_multiset(res, from_multiset):
    for (e,n) in from_multiset.items():
        res[e] = max(res[e], n)

def map_source_to_target(sources, targets, pitches, target_idx, test):
    for (s, t) in zip(sources, targets):
        if test(s,t):
            source = pitches[s]
            target = pitches[t]
            target_idx[source.source_offset] = target.offset
            target.offset += 1
            source.source_offset += 1

def is_unison(s, t):
    return s == t

def is_not_unison(s, t):
    return not is_unison(s, t)

##Funzione ausiliare, creata per eliminare righe e colonne relative
##alle pause nella matrice di permutazione parziale
def zeropause(M):
    res=np.zeros((M.shape[0],M.shape[1]))
    for s in range(M.shape[0]):
        for t in range(M.shape[1]):
            if M[s][t]!=-1:
                res[s][t]=M[s][t]
    return res

##Funzione che crea l'elemento prob_cross, necessario per il
##voice crossing su piu' voice leading

```

```

def creacross(sources, targets, v11, v12):
    lead=zip(sources, targets, range(len(sources)))
    v1=(-1,(0,0))
    v2=(-1,(0,0))
    diff=1
    for x in lead:
        if x[:-1]==v11 and v2[0]!=x[-1]:
            v1=(x[-1],v11)
    for x in lead:
        if x[:-1]==v12 and v1[0]!=x[-1]:
            v2=(x[-1],v12)
    if v1!=-1 and v2!=-1:
        v12=(v1,v2)
        v12=sorted(v12)
        diff_s=np.sign(v12[0][1][0]-v12[1][1][0])
        diff_t=np.sign(v12[0][1][1]-v12[1][1][1])
        if diff_s==0:
            diff=diff_t
        if diff_t==0:
            diff=diff_s
    prob_cross=[(v12[0][0],v12[1][0]),diff]
    return prob_cross

##Dato in input un voice leading sources->targets, e i valori di
##prob_cross e unipause, restituisce il vettore di complessita'
##relativo al voice leading
prob_cross=[]
unipause=0
def partial_permut(sources, targets, prob_cross, unipause):
    multi_sources = Counter(sources)
    multi_targets = Counter(targets)

    v = Counter()
    merge_max_multiset(v, multi_sources)
    merge_max_multiset(v, multi_targets)

    counted_pitches = sorted(v.items())

    pitches = {}
    counting_sum = 0
    for p, n in counted_pitches:
        pitches[p] = Pitch(p, counting_sum)
        counting_sum += n

    v = sorted(v.elements())

    target_idx = {}
    map_source_to_target(sources, targets, pitches, target_idx, is_unison)
    map_source_to_target(sources, targets, pitches, target_idx, is_not_unison)

# Create the matrix 'M' where 'M[i][j] == 1' if the pitch at index
# 'i' leads to the pitch at index 'j'.

```



```

dim = len(v)
paused = []
M = np.zeros((dim, dim))
for (s, t) in target_idx.items():
    if v[s] < 500 and v[t] < 500:
        M[s][t] = 1
    else:
        M[s][t] = -1
        paused.append([s,t])

if paused:
    Minor = zeropause(M)
else:
    Minor = M

##Inizio della formazione del vettore di complessita'
c = [np.count_nonzero(np.triu(Minor,1)),
      np.count_nonzero(np.tril(Minor,-1)),
      np.count_nonzero(np.diag(Minor)), 0, 0, 0]
cross = 0
unison = unipause
unipause=0

non_zero = np.nonzero(Minor)
couple = zip(non_zero[0] , non_zero[1])

##Controllo del voice crossing
for ((i,j),(k,l)) in combinations(couple,2):
##Voice crossing semplice su un voice leading
    if v[i]!=v[k] and v[j]!=v[l]:
        if (i<j and k>l) and (i<k and j>l) or (i<=j and k>l) and
            (i<k and j>l) or (i<j and k>=l) and (i<k and j>l):
            cross+=1
        elif (i<k and j>l):
            cross+=1

##Unisono e voice crossing su piu' voice leading
    else:
        if v[i]!=v[k] and v[j]==v[l]:
            prob_cross.append(creacross(sources,targets,
                                       (v[i],v[j]),(v[k],v[l])))

            unison+=1
        elif v[i]==v[k] and v[j]==v[l]:
            unison+=1
            prob_cross2=creacross(sources,targets,(v[i],v[j]),(v[k],v[l]))

##Controllo necessario, in caso di unisono iniziale
    if prob_cross==[]:
        prob_cross.append(prob_cross2)
    else:
        voci=[]
        for x in prob_cross:

```

```

        voci.append(x[0])
##Altro controllo per l'unisono iniziale
        if prob_cross2[0] not in voci:
            prob_cross.append(prob_cross2)

##Controllo effettivo dell'avvenuto crossing
        elif v[i]==v[k] and v[j]!=v[l]:
            prob_cross2=creacross(sources,targets,(v[i],v[j]),(v[k],v[l]))
            i=0
            voce=0
            while i<len(prob_cross):
                if prob_cross[i][0]==prob_cross2[0]:
                    if prob_cross[i][1]==-prob_cross2[1]:
                        voce=prob_cross2[0]
                        cross+=1
                        del prob_cross[i]
                    else:
                        i+=1

##Controllo del passaggio da unisono a pausa e viceversa, perche'
##non sia conteggiato unisono (la voce che parte o arriva da una
##pausa e' sempre esclusa dal conteggio della complessita')
            i=0
            while i<len(prob_cross):
                if targets[prob_cross[i][0][0]]>500 or
                    targets[prob_cross[i][0][1]]>500:
                    del prob_cross[i]
                else:
                    i+=1
            for i in range(len(sources)):
                for j in range(i+1,len(sources)):
                    if sources[i]>500 or sources[j]>500:
                        if targets[i]==targets[j]:
                            prob_cross.append([(i,j),1])
                            unipause+=1

            c[3] = cross
            c[4] = unison
            c[5] = len(paused)

            return c, prob_cross, unipause

```

B.3.2 Script di analisi

```

"""
@author: Pierre Talbot & Mattia G. Bergomi
@edit: Michele Paolizzi
"""

##Script che consente l'analisi dei voice leading di un brano e
##inserisce i vettori di complessita' in un unico array.
##I commenti segnati con un solo # sono gli originali, quelli con
##2 # sono personali.

```

```

##Lettura di file TXT contenenti i nomi dei brani e i MIDI relativi,
##usando le funzioni gia' descritte.
##Nel caso di file MIDI separati per ogni voce, nel file TXT
##relativo i file riferiti a un unico brano devono stare nella
##stessa riga, divisi da ', '.
label=open(##File TXT contenente i nomi dei brani)
lab=convertistr(label.readlines())
for i in range(len(lab)):
    lab[i]=lab[i][0]

Bdoc=open(##File TXT contenente il percorso e i nomi dei file MIDI)
Btot=convertistr(Bdoc.readlines())

Bdoc.close()
label.close()

##Scelta del brano
for i in range(len(lab)):
    print 'Digitare', i+1, 'per', lab[i]
print('□')
test=int(raw_input('Quale□brano□vuoi□analizzare?□'))
print('□')

B_inp=Btot[test-1]

##Conversione dei file, secondo le funzioni gia' descritte
B=[]
if len(B_inp)!=1:
    for x in B_inp:
        B.append(converting(x))
else:
    B=converting(B_inp[0])

##Analisi dei voice leading. I vettori di complessita' risultanti
##saranno inseriti in array.
array = []
for i in range(len(B[0])-1):
    C1=[]
    C2=[]
    for j in range(len(B)):
        C1.append(B[j][i])
        C2.append(B[j][i+1])
    print C1, C2
    c, prob_cross, unipause=partial_permut(C1,C2,prob_cross,unipause)
    print(c)
    array.append(c)

# Compute paradigmatic complexity vectors and their multiplicity,
# print them as a multiset, compute multiplicity for each vector
# and give a 3d scatter of these arrays as cloud of massive points.
uniq_complex_groups = [list(t) for t in set(map(tuple, array))]
multiplicity = []

```

```

for p in uniq_complex_groups:
    mult = array.count(p)
    multiplicity.append(mult)
print multiplicity
print zip(uniq_complex_groups, multiplicity)

print uniq_complex_groups

##Visualizzazione della nuvola di punti associata al multiinsieme
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

##Verso l'alto, verso il basso, costanti
x1 = []
y1 = []
z1 = []
for e1 in uniq_complex_groups1:
    x1 += [e1[0]]
    y1 += [e1[1]]
    z1 += [e1[2]]

fig1 = plt.figure()
ax1 = fig1.add_subplot(111, projection='3d')

s = [np.divide(1000*m, len(B[0])) for m in multiplicity]

ax1.scatter(x1, y1, z1, c='r', marker='o',s=s)

ax1.set_xlabel('#voices_moving_upward')
ax1.set_ylabel('#voices_moving_downward')
ax1.set_zlabel('#fixed_voices')

##verso l'alto, verso il basso e crossing
x2 = []
y2 = []
z2 = []
for e1 in uniq_complex_groups:
    x2 += [e1[0]]
    y2 += [e1[1]]
    z2 += [e1[3]]
fig2 = plt.figure()
ax2 = fig2.add_subplot(111, projection='3d')

s = [np.divide(1000*m, len(B[0])) for m in multiplicity]

ax2.scatter(x2, y2, z2, c='r', marker='o',s=s)

ax2.set_xlabel('#voices_moving_upward')
ax2.set_ylabel('#voices_moving_downward')
ax2.set_zlabel('#voice_crossing')

##verso l'alto, verso il basso e unisono

```

```

x3 = []
y3 = []
z3 = []
for e1 in uniq_complex_groups:
    x3 += [e1[0]]
    y3 += [e1[1]]
    z3 += [e1[4]]
fig3 = plt.figure()
ax3 = fig3.add_subplot(111, projection='3d')

s = [np.divide(1000*m, len(B[0])) for m in multiplicity]

ax3.scatter(x3, y3, z3, c='r', marker='o',s=s)

ax3.set_xlabel('#voices_moving_upward')
ax3.set_ylabel('#voices_moving_downward')
ax3.set_zlabel('#unison')

##verso l'alto, verso il basso e in pausa
x4 = []
y4 = []
z4 = []
for e1 in uniq_complex_groups:
    x4 += [e1[0]]
    y4 += [e1[1]]
    z4 += [e1[5]]
fig4 = plt.figure()
ax4 = fig4.add_subplot(111, projection='3d')

s = [np.divide(1000*m, len(B[0])) for m in multiplicity]

ax4.scatter(x4, y4, z4, c='r', marker='o',s=s)

ax4.set_xlabel('#voices_moving_upward')
ax4.set_ylabel('#voices_moving_downward')
ax4.set_zlabel('#rests')

plt.show()

```

B.3.3 Norme e DTW

```

"""
@author: Michele Paolizzi
"""
##Codice che descrive il calcolo della distanza DTW tra le
##concatenazioni di voce leading di due brani, rappresentate dalle
##collezioni di vettori di complessita' (array1 e array2).

##Avendo utilizzato diversi ordini della metrica di Minkowski, abbiamo
##costruito una funzione per ogni metrica, utilizzando pdist.
from scipy.spatial.distance import pdist

##Norma 1

```

```

def norm1(x,y):
    return pdist((x,y), 'minkowski', p=1)
##Norma euclidea
def norm2(x,y):
    return pdist((x,y), 'euclidean')
##Norma 3
def norm3(x,y):
    return pdist((x,y), 'minkowski', p=3)
##Norma 4
def norm4(x,y):
    return pdist((x,y), 'minkowski', p=4)
##Norma 5
def norm5(x,y):
    return pdist((x,y), 'minkowski', p=5)
##Norma 6
def norm6(x,y):
    return pdist((x,y), 'minkowski', p=6)
##Norma 7
def norm7(x,y):
    return pdist((x,y), 'minkowski', p=7)
##Norma infinito
def infnty(x,y):
    return pdist((x,y), 'chebyshev')

norme=[norm1,norm2,norm3,norm4,
        norm5,norm6,norm7,infnty]

##Scelta della norma per la DTW
print('□')
print('Che□norma□vuoi□utilizzare□per□la□DTW?')
p=int(raw_input('(0□per□infinito)...□'))
norma=norme[p-1]

import numpy as np
from dtw import dtw
import matplotlib.pyplot as plt

##Calcolo della DTW:
##dist e' il valore del costo totale;
##cost e' la matrice di costo;
##acc e' la matrice accumulativa di costo;
##path e' il valore contenente gli elementi relativi agli assi del
##cammino.
dist, cost, acc, path = dtw(np.asarray(array1),np.asarray(array2),norma)
print dist

##Creazione del grafico del cammino di warping ottimale
plt.imshow(cost.T,origin='lower',cmap='bone',interpolation='bicubic')
plt.plot(path[0], path[1], 'w')
plt.xlim((-0.5, cost.shape[0]-0.5))
plt.ylim((-0.5, cost.shape[1]-0.5))
plt.show()

```

B.4 Creazione dendrogramma

```

"""
@author: Michele Paolizzi
"""

##Codice relativo alla creazione dei dendrogrammi.
##Creati dei file .txt contenenti le matrici e le etichette che
##si vogliono mostrare nel dendrogramma, l'algoritmo legge i
##file .txt e genera il dendrogramma, secondo i metodi di linkage
##singolo, completo, mediato e pesato

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.cluster.hierarchy import dendrogram, linkage
from scipy.spatial.distance import pdist

docs=##Lista con i nomi dei file .txt contenenti le matrici
labels=##Lista con i nomi dei file .txt contenenti le etichette
      ##per le matrici in docs

##Scelta del documento da usare
for i in range(len(docs)):
    print 'Digitare', i+1, 'per', docs[i][:4]
    print('□')
    ind=int(raw_input('Quale□documento□vuoi□usare?□'))

##Conversione TXT con le funzioni mostrate in precedenza
doc=open(docs[ind-1])
mat=convertifloat(doc.readlines())

label=open(labels[ind-1])
lab1=label.readlines()
lablist=convertistr(lab1)
lab=[]
for x in lablist:
    if x[0][-1]==',':
        lab.append(x[0][:1])
    else:
        lab.append(x[0])

##Chiudiamo i file letti, poiche' non sono piu' necessari
doc.close()
label.close()

##Creazione matrice Z contenente le distanze
Z=np.asarray(mat)

methods=['complete','single','average','weighted']

##Creazione linkage (riordino ottimale delle foglie attivo);
##La matrice delle distanze e' prima resa matrice di distanze

```

```
##condensata dalla funzione pdist. Si visualizza poi il dendrogramma.
for x in methods:
    ZZ=linkage(pdist(Z),method=x,optimal_ordering=True)

    plt.figure(figsize=(25,10))
    plt.xlabel('Opere')
    plt.ylabel('Distance')
    dendrogram(ZZ,leaf_rotation=90., leaf_font_size=10., labels=lab)
plt.show()
```


Appendice C

Spartiti

In questa appendice sono riportati gli spartiti delle versioni dei brani analizzati, riportati nello stesso ordine di tabella 3.1 a pagina 59. In alcuni spartiti le voci sono rappresentate con le chiavi antiche, non esposte nella sezione 1.1.1: sono chiavi che indicano la linea del Do.

Per motivi di spazio, gli spartiti sono stati impaginati in orizzontale, con due pagine per foglio.

Au - sa - lon, Ab - sa - lon fi - li
 Ab - sa - lon fi - li mi, . . .
 Ab - sa - lon fi - li mi, Ab - sa -
 fi - li mi, . . . fi - li mi,

mi, . . . fi - li mi, . . .
 Ab - sa - lon . . . fi - li
 - lon
 fi - li mi Ab - sa - lon, Ab - sa -
 - lon fi - li

- li mi, fi - li
 mi, Ab
 mi, Ab - sa - lon fi - li mi, Ab
 - lon, Ab - sa - lon, Ab - sa -

mi, Ab - sa - lon, quis det ut mo -
 lon, Ab - sa - lon, . . .
 - lon fi - li mi, quis det ut

ri - ar pro te?
 quis det ut mo - ri - ar pro
 mo - ri - ar pro te, pro te? fi - li mi Ab -
 quis det ut mo - ri -

. fi - li mi Ab - sa - lon, . . .
 pro te? fi - li mi Ab - sa - lon,
 - ar pro te? fi - li mi Ab - sa - lon,
 - sa - lon, fi - li mi Ab - sa - lon,

..... non vi - vam ni tra,

Ab - ga - lon fi - li, fi - li mi,

non vi - vam ni tra, ni tra,.....

non vi - vam ni tra, ni tra,.....

non vi - vam ni tra, non,..... sed de - scen -

non vi vam ni tra,.....

non vi vam ni tra, sed de - scen -

tra vi - vam ni tra, sed de -

dum in in - fer - num, in in - fer - num..... plo -

de - scen - dum in in - fer - num plo -

dum in in - fer - num, in..... fer - num plo -

scen - dum in in - fer - num plo - raus,

x) Montanus hat

- raus, non vi - vam ni tra,

- raus, plo - raus, plo - raus, plo - raus,..... plo - raus,..... non

in - fer - num plo - raus, non

vi - vam ni tra, non,..... vi - vam sed de - scendam,

vi - vam ni tra,..... tra, sed de - scen - dum, in

vi - vam ni tra, sed de - scen - dum, in

vi - vam ni tra, tra, sed de - scen -

in in - fer - num, in in - fer - num..... plo - raus,

- dum in in - fer - num plo - raus,

in - fer - num, in in - fer - num plo - raus,

- dum in in - fer - num plo - raus,

Josquin Depress.

O salutaris hostia

Pierre De La Rue
(ca.1460-1518)

Discantus

O sa - lu - ta - ris Ho - sti - a, Ho - - - sti - a,
 U ni tri - no - que Do - mi - no, Do - - - mi - no,

Cantus

O sa - lu - ta - ris Ho - sti - a, Ho - - - sti - a,
 U ni tri - no - que Do - mi - no, Do - - - mi - no,

Tenor

O sa - lu - ta - ris Ho - sti - a, Ho - - - sti - a,
 U ni tri - no - que Do - mi - no, Do - - - mi - no,

Bassus

O sa - lu - ta - ris Ho - sti - a, Ho - - - sti - a,
 U ni tri - no - que Do - mi - no, Do - - - mi - no,

Quae sem - pi - ter - na glo - ri - a,

Sit sem - pi - ter - na glo - ri - a,

Quae sem - pi - ter - na glo - ri - a,

Sit sem - pi - ter - na glo - ri - a,

Quae sem - pi - ter - na glo - ri - a,

Sit sem - pi - ter - na glo - ri - a,

15

um, Bel - la pre - munt ho - - - sti - a,
 Qui vi - tam si - ne ter - - -

um, Bel - la pre - munt ho - - - sti - a,
 Qui vi - tam si - ne ter - - -

um, Bel - la pre - munt ho - - - sti - a,
 Qui vi - tam si - ne ter - - -

um, Bel - la pre - munt ho - - - sti - a,
 Qui vi - tam si - ne ter - - -

22

li - a, Da - ro - bur, da - ro - - -
 - - - mi - no No - bis do - - -

li - a, Da - ro - bur, da - ro - - -
 - - - mi - no No - bis do - - -

li - a, Da - ro - bur, da - ro - - -
 - - - mi - no No - bis do - - -

li - a, Da - ro - bur, da - ro - - -
 - - - mi - no No - bis do - - -

29

bur, fer - au - xi - li - um, A - men.
 net in pa - - - tri - a.

bur, fer - au - xi - li - um, A - men.
 net in pa - - - tri - a.

bur, fer - au - xi - li - um, A - men.
 net in pa - - - tri - a.

bur, fer - au - xi - li - um, A - men.
 net in pa - - - tri - a.

Pas - si - o do - mi - ni - no - stri - Je - su - Chri - si - se - cun -
 Ve - xil - la - re - gis - pro - de -
 Ve - xil - la - re - gis - pro - de -

- ri - um, - Quo - car - ne - car - a - ni - ma - me -
 - ri - um, - Quo - car - ne - car -
 ri - um, - Quo - car - ne - car -

prod - e - unt, - dum Mat - thae - um, In il - lo
 prod - e - unt, - Full - get Cru -
 prod - e - unt, - Full - get Cru -

mis Con - di - tor Su -
 a - us - que - ad - mor - tem Je - sus - a - um - tor -
 ne - car - nis Con - di - tor Su -
 mis Con - di - tor Su -

Full - get - Cru - cis - my - ste - tem - po - re - di - xit Je - sus - di - sci - pu - lis - su - is :
 Full - get - Cru - cis - my - ste - Full - get - Cru - cis - my - ste -
 Full - get - Cru - cis - my - ste - ri - um, Full - get - Cru - cis - my - ste -

sus est pa - ti - bu - lo, rum vo - ce ma - gna cla - mans e - mi - si - spi - ri - tum.
 Sus - pen - sus est pa - ti - bu - lo, spen - sus est pa - ti - bu - lo, -
 spen - sus est pa - ti - bu - lo, spen - sus est pa - ti - bu - lo.

O Jesu, fili David

„Über die deutsche Volkswaise „Wohlauf, gut G'sell, von hinnen“)

Original eine kleine Terz höher

Josquin des Prés

5

Sopran

Instrument oder hoher Tenor

Tenor

Instrument oder Bariton

20

35

30

Musical score for Soprano, Instrument/High Tenor, Tenor, and Instrument/Baritone. The lyrics are in German and Latin. The score includes notes, rests, and dynamic markings.

Lyrics (German):
 Je - su, fi - li Da - vid, mi - se - re - re me - dich mei -
 Je - su, fi - li Da - vid, mi - se - re - re me - dich mei -
 Je - su, fi - li Da - vid, mi - se - re - re me - dich mei -
 Je - su, fi - li Da - vid, mi - se - re - re me - dich mei -
 Je - su, fi - li Da - vid, mi - se - re - re me - dich mei -

Lyrics (Latin):
 Je - su, fi - li Da - vid, mi - se - re - re me - dich mei -
 Je - su, fi - li Da - vid, mi - se - re - re me - dich mei -
 Je - su, fi - li Da - vid, mi - se - re - re me - dich mei -
 Je - su, fi - li Da - vid, mi - se - re - re me - dich mei -
 Je - su, fi - li Da - vid, mi - se - re - re me - dich mei -

Musical score for Soprano, Instrument/High Tenor, Tenor, and Instrument/Baritone. The lyrics are in German and Latin. The score includes notes, rests, and dynamic markings.

Lyrics (German):
 Ma - le - re - re me - dich mei -
 Ma - le - re - re me - dich mei -
 Ma - le - re - re me - dich mei -
 Ma - le - re - re me - dich mei -
 Ma - le - re - re me - dich mei -

Lyrics (Latin):
 Ma - le - re - re me - dich mei -
 Ma - le - re - re me - dich mei -
 Ma - le - re - re me - dich mei -
 Ma - le - re - re me - dich mei -
 Ma - le - re - re me - dich mei -

Alle Rechte vorbehalten

- tis sup - pli - ci - um. - - Da vir - tu - tem et sa - - lu - tem, et
 - tis sup - pli - ci - um. Da vir - tu - tem et sa - lu - tem, et -
 8 - tis sup - pli - ci - um. Da vir - tu -
 - tis sup - pli - ci - um. Da vir - tu -

- sa - lu - - - tem, Chris - te re - demp - tor om - ni -
 - sa - lu - - - tem, Chris - te re - demp - tor om - ni - um, re - demp
 8 - tem et sa - lu - lu - tem, Chris - te re - demp - tor om - ni - um,
 - tem et sa - lu - - - tem, Chris - te re - demp - tor om - ni -

- um. Ho - nor et be - ne - dic - - ti -
 tor, re - demp - tor om - ni - um. Ho - nor et be - ne - dic - - ti -
 8 re - demp - tor om - ni - um. Ho - nor et be - ne - dic - - ti -
 - um, re - demp - tor om - ni - um. Ho - nor et be - ne - dic - - ti -

- o sit cru - - ci - fi - xo Fi - li - o, qui su - o sup -
 - o sit cru - - ci - fi - xo Fi - li - o, qui su - o sup -
 8 - o sit cru - - ci - fi - xo Fi - li - o, qui su - o sup -
 - o sit cru - - ci - fi - xo Fi - li - o, qui su - o sup -

- pli - ci - o nos re - de - mit ab In - fer - no.
 - pli - ci - o nos re - de - mit ab In - fer - no.
 8 - pli - ci - o nos re - de - mit ab In - fer - no.
 - pli - ci - o nos re - de - mit ab In - fer - no.

Ecce tu pulchra es

1

Original eine große Tenorstimme

Original score for the first system of 'Ecce tu pulchra es'. It features a vocal line and a piano accompaniment. The vocal line includes the lyrics: 'Ecce tu pulchra es, Sie - he, wie schön bist'. The piano accompaniment includes the lyrics: 'A - mi - Du, mei - pul - chra bist'. The score is in G major and 4/4 time. It includes a first ending bracket and a second ending marked '2. a. dm.'. The system ends with a measure containing the number 8.

Continuation of the musical score for 'Ecce tu pulchra es'. It features a vocal line and a piano accompaniment. The vocal line includes the lyrics: 'Ecce tu pulchra es, Sie - he, wie schön bist'. The piano accompaniment includes the lyrics: 'A - mi - Du, mei - pul - chra bist'. The score is in G major and 4/4 time. It includes a first ending bracket and a second ending marked '2. a. dm.'. The system ends with a measure containing the number 8.

45

si - na. *si - na. sen.*

E - go flos cam - des Fel - *E - go flos cam - des Fel -*

Riu - me das Fel - *Riu - me das Fel -*

cam - des bin ich *cam - des bin ich*

pi *pi*

ich *ich*

30

et *et*

und *und*

li - li - um con - val - li - um, *li - li - um con - val - li - um,*

et - ne Ro - se in dem Thal *et - ne Ro - se in dem Thal*

et *et*

und *und*

li - li - um con - val - li - um, *li - li - um con - val - li - um,*

et - ne Ro - se in dem Thal *et - ne Ro - se in dem Thal*

35

li - um, *li - um,*

dem Thal *dem Thal*

In - ter spi - nas, *In - ter spi - nas,*

Da - ter mem, *Da - ter mem,*

30

Sic - ut *Sic - ut*

li - li - um *li - li - um*

in - ter spi - *in - ter spi -*

Da - ter *Da - ter*

mem, *mem,*

35

ut *ut*

li - li - um *li - li - um*

in - ter spi - *in - ter spi -*

Da - ter *Da - ter*

mem, *mem,*

40

ml - *ml -*

ca me - *ca me -*

ne *ne*

Freun - *Freun -*

den *den*

35

in - ter fi - *in - ter fi -*

un - ter den *un - ter den*

30

in - ter *in - ter*

spi - *spi -*

Da - *Da -*

ter *ter*

mem, *mem,*

40

in - ter *in - ter*

spi - *spi -*

Da - *Da -*

ter *ter*

mem, *mem,*

45

30

fi - li - as, *fi - li - as,*

den *den*

Tuch - *Tuch -*

lein, *lein,*

35

In - tro - du - xit *In - tro - du - xit*

me *me*

rex. *rex.*

Der Ko - nig *Der Ko - nig*

gab *gab*

rei - *rei -*

tel *tel*

30

In - tro - du - xit *In - tro - du - xit*

me *me*

rex. *rex.*

Der Ko - nig *Der Ko - nig*

gab *gab*

rei - *rei -*

tel *tel*

35

In *In*

cu - bi - cu - lum *cu - bi - cu - lum*

in *in*

set - ne Hoch - *set - ne Hoch -*

seits *seits*

40

Or - di - na - vit *Or - di - na - vit*

in *in*

me *me*

ca - *ca -*

ri - *ri -*

ta - *ta -*

tem. *tem.*

U - ber mir *U - ber mir*

ist *ist*

sein *sein*

Pa - *Pa -*

mer. *mer.*

die *die*

Lie - *Lie -*

be. *be.*

35

lum su - *lum su -*

ca - *ca -*

ris - *ris -*

kan - *kan -*

um. *um.*

su - *su -*

um. *um.*

kan - *kan -*

mer. *mer.*

40

30

ful - ci - te me *ful - ci - te me*

in *in*

flu - *flu -*

via - *via -*

ri - *ri -*

bus, *bus,*

Su - pa - te me *Su - pa - te me*

na - *na -*

La - *La -*

bet *bet*

mit *mit*

Ap - *Ap -*

35

ful - ci - te me *ful - ci - te me*

in *in*

flu - *flu -*

via - *via -*

ri - *ri -*

bus, *bus,*

Su - pa - te me *Su - pa - te me*

na - *na -*

La - *La -*

bet *bet*

mit *mit*

Ap - *Ap -*

40

30

qui - a *qui - a*

den *den*

ich *ich*

bin *bin*

krank *krank*

35

qui - a *qui - a*

den *den*

ich *ich*

bin *bin*

krank *krank*

vor *vor*

40

qui - a *qui - a*

den *den*

ich *ich*

bin *bin*

krank *krank*

vor *vor*

45

qui - a *qui - a*

den *den*

ich *ich*

bin *bin*

krank *krank*

vor *vor*

50

80

rum, sa-lus et spes in-fir-mo-rum, sa-lus et spes in-
 der Schwachen Heil und Hoffnung du, der Schwachen Heil und
 pa-lus an-ge-lo-rum, pa-lus in-fir-mo-rum, sa-lus et spes in-
 la-ben-dig brot der Bn-ge-l, der Schwachen Heil und Hoffnung du,
 an-ge-lo-rum, Brod der Bn-gel du,
 pa-lus an-ge-lo-rum, sa-lus in-fir-mo-rum, sa-lus et spes in-
 la-ben-dig brot der Bn-gel du, der Schwachen Heil du,

81

fir-mo-rum, me-di-ci-na pec-ca-
 Hoff-mung du, der Sün-der
 sa-lus et spes in-fir-mo-rum, me-di-ci-na pec-ca-
 der Schwachen Heil und Hoff-mung du, der Sün-der ein-ger-Trod
 sa-lus et spes in-fir-mo-rum, me-di-ci-na
 der Schwachen Heil und Hoff-mung du, der Sün-der ein-ger-Trod
 me-di-ci-na pec-ca-
 der Sün-der ein-ger-Trod

82

to-rum, Sal-ve cor-pus Je-su Chri-
 ster du, Sei-ge-ge-zel-heit, de-
 pec-ca-to-rum, Sal-ve cor-pus Je-su Chri-
 ster du, Sei-ge-ge-zel-heit, de-
 to-rum, Sal-ve cor-pus Je-su Chri-
 ster du, Sei-ge-ge-zel-heit, de-
 pec-ca-to-rum, Sal-ve cor-pus Je-su Chri-
 ster du, Sei-ge-ge-zel-heit, de-
 rum, Sal-ve cor-pus Je-su Chri-
 ster du, Sei-ge-ge-zel-heit, de-

83

quod de cor-lo de-scen-di-sti, de scen-di-
 der du vom Himmel bist ge-kom-men, de
 quod de cor-lo de-scen-di-sti, de scen-di-
 der du vom Himmel bist ge-kom-

84

di-sti, et po-pu-lum red-e-mi-red-e-
 kom-men, aus der Sün-de uns er-lö-
 et po-pu-lum red-e-mi-red-e-
 aus der Sün-de uns er-lö-
 et po-pu-lum red-e-mi-red-e-
 aus der Sün-de uns er-lö-
 et po-pu-lum red-e-mi-red-e-
 aus der Sün-de uns er-lö-

85

mi-sti, qui in cru-ce pe-n-di-sti, Je-
 lo, sei, Kreuz und Leid auf dich ge-nom-men, Je-
 mi-sti, qui in cru-ce pe-n-di-sti, Je-
 lo, sei, Kreuz und Leid auf dich ge-nom-men, Je-
 mi-sti, qui in cru-ce pe-n-di-sti, Je-
 lo, sei, Kreuz und Leid auf dich ge-nom-men, Je-
 mi-sti, qui in cru-ce pe-n-di-sti, Je-
 lo, sei, Kreuz und Leid auf dich ge-nom-men, Je-

86

su-bo-ne, fons pi-e-tis, laus an-ge-lo-rum glo-ri-
 su-ge-zel-heit, Quell du der Gna-de, Lob an-ge-lo-rum
 su-bo-ne, fons pi-e-tis, laus an-ge-lo-rum glo-ri-
 su-ge-zel-heit, Quell du der Gna-de, Lob an-ge-lo-rum
 su-bo-ne, fons pi-e-tis, laus an-ge-lo-rum glo-ri-
 su-ge-zel-heit, Quell du der Gna-de, Lob an-ge-lo-rum
 su-bo-ne, fons pi-e-tis, laus an-ge-lo-rum glo-ri-
 su-ge-zel-heit, Quell du der Gna-de, Lob an-ge-lo-rum

87

ri-a Sancto-rum, mi-se-re-re no-bis, mi-se-re-re no-bis
 Hei-li-gen, Trost du der Sün-der, er-bar-mie dich un-ser
 ri-a Sancto-rum, mi-se-re-re no-bis, mi-se-re-re no-bis
 Hei-li-gen, Trost du der Sün-der, er-bar-mie dich un-ser
 ri-a Sancto-rum, mi-se-re-re no-bis, mi-se-re-re no-bis
 Hei-li-gen, Trost du der Sün-der, er-bar-mie dich un-ser
 ri-a Sancto-rum, mi-se-re-re no-bis, mi-se-re-re no-bis
 Hei-li-gen, Trost du der Sün-der, er-bar-mie dich un-ser

Secunda pars

5 Sal - ve lux mun Sal - ve lux mun
Heil, Licht der Heil, Licht der
Sai - lux mun
Heil, Licht der

10 Ver - di, pa - tris, ho - sti - a ve - ra, vi -
um des buni - tatis, uach - res Op - fer - lamm, fleisch -
mum Heil, Licht der buni - tatis, uach - res Op - fer - lamm

15 Vi - va cae - ro, De - i -
Op - fer - lamm, fleischlich ro, sen, geitlich
- sti - a ve - ra, vi - va cae - ro, De - i -
- ras Op - fer - lamm, fleischlich ro, sen, geitlich
- va hoch Heil, Licht der, geitlich
vi - va cae - ro, De - i -
fleschlich ro, sen, geitlich

20 De - i - tas in - te - gra, ve - nus ho -
Heil - kom - me - ner, geitlich lich Heil - kom - me - ner, Mensch Ge - woord
tas in - te - gra, ve - nus ho -
Heil - kom - me - ner, geitlich lich Heil - kom - me - ner, Mensch Ge - woord
De - i - tas in - te - gra, ve - nus ho -
Heil - kom - me - ner, geitlich lich Heil - kom - me - ner, Mensch Ge - woord
tas in - te - gra, ve - nus ho -
Heil - kom - me - ner, geitlich lich Heil - kom - me - ner, Mensch Ge - woord

30 A - ve prin - ci - pi - um no - strae cre - a - ti - o -
nis, ge - spri - chel sei, du Grund und An - fang al - ler Schip -
mo, mer, A - ve prin - ci - pi - um no - strae cre - a - ti - o -
nis, ge - spri - chel sei, du Grund und An - fang al - ler Schip -
mo, mer, A - ve prin - ci - pi - um no - strae cre - a - ti - o -
nis, ge - spri - chel sei, du Grund und An - fang al - ler Schip -
mo, mer, A - ve prin - ci - pi - um no - strae cre - a - ti - o -
nis, ge - spri - chel sei, du Grund und An - fang al - ler Schip -
mo, mer, A - ve prin - ci - pi - um no - strae cre - a - ti - o -
nis, ge - spri - chel sei, du Grund und An - fang al - ler Schip -

35 A - ve pre - ti - um no - strae red - emp - ti - o -
nis, fang, Preis uns - ser - rer Heil -
ti - o - nis, ge - spri - chel sei, du Grund und An - fang al - ler Schip -
0 nis, ge - spri - chel sei, du Grund und An - fang al - ler Schip -

40 A - ve vi - a - ti - cum no - strae per - o - gri -
ge - spri - chel sei, du Weg, trost und Heil -
a - ve vi - a - ti - cum no - strae per - o - gri -
ge - spri - chel sei, du Weg, trost und Heil -
a - ve vi - a - ti - cum no - strae per - o - gri -
ge - spri - chel sei, du Weg, trost und Heil -

50 A - ve so - la - ci - um no - strae ex - pe -
nis, singel, sei, du Licht uns - ser - rer
a - ve so - la - ci - um no - strae ex - pe -
nis, singel, sei, du Licht uns - ser - rer
a - ve so - la - ci - um no - strae ex - pe -
nis, singel, sei, du Licht uns - ser - rer
a - ve so - la - ci - um no - strae ex - pe -
nis, singel, sei, du Licht uns - ser - rer
a - ve so - la - ci - um no - strae ex - pe -
nis, singel, sei, du Licht uns - ser - rer

657

no - stra ex - pe - cta - ti - o - nis, a - ve sa - lus no - stra sal - va -
licht *un - ser* *Zu - ver -* *den* *sich* *set* *was ge - gen* *hat, du Heil uns -*

stra ex - pe - cta - ti - o - nis, a - ve sa - lus no - stra sal - va -
un - ser *Zu - ver -* *den* *sich* *set* *was ge - gen* *hat, du Heil uns -*

cta - ti - o - nis, a - ve sa - lus no - stra sal - va -
Zu - ver - *den* *sich* *set* *was ge - gen* *hat, du Heil*

658

in - va di - es no - stros in pa - ce dis - po - ni -
helf *den* *uns - re* *Te - ge* *in* *Frei - den* *sich* *en* *den*

no - stros in pa - ce dis - po - ni -
in *Freuden* *sich* *en* *den*

pa - ce dis - po - ni -
den *sich* *en* *den*

659

et nos e - le - cto - rum tu - o - rum gre - g -
und *der* *Aus - er - wähl - ten* *Schar* *un -* *ser* *erst* *bet -*

et nos e - le - cto - rum tu - o - rum gre - g -
und *der* *Aus - er - wähl - ten* *Schar* *un -* *ser* *erst* *bet -*

et nos e - le - cto - rum tu - o - rum gre - g -
und *der* *Aus - er - wähl - ten* *Schar* *un -* *ser* *erst* *bet -*

660

me - ra - ti - ni, e - le - cto - rum tu - o - rum gre - g -
let *wor - den* *bet - ge - sel* *den* *Aus - er - wähl - ten* *Schar* *un -* *ser* *erst* *bet -*

me - ra - ti - ni, e - le - cto - rum tu - o - rum gre - g -
let *wor - den* *bet - ge - sel* *den* *Aus - er - wähl - ten* *Schar* *un -* *ser* *erst* *bet -*

me - ra - ti - ni, e - le - cto - rum tu - o - rum gre - g -
let *wor - den* *bet - ge - sel* *den* *Aus - er - wähl - ten* *Schar* *un -* *ser* *erst* *bet -*

661

qui hic im - mo - la - ris pro no - bis
der *für* *uns* *ge - op - fert* *am* *Kreu - ze*

qui hic im - mo - la - ris pro no - bis
der *für* *uns* *ge - op - fert* *am* *Kreu - ze*

qui hic im - mo - la - ris pro no - bis
der *für* *uns* *ge - op - fert* *am* *Kreu - ze*

662

qui hic im - mo - la - ris pro no - bis
der *für* *uns* *ge - op - fert* *am* *Kreu - ze*

qui hic im - mo - la - ris pro no - bis
der *für* *uns* *ge - op - fert* *am* *Kreu - ze*

qui hic im - mo - la - ris pro no - bis
der *für* *uns* *ge - op - fert* *am* *Kreu - ze*

2

De profundis

(Ps. 129)

Orgelbegleitung

De profundis clamavit ad te Domine, Deus der Herr, aus der Tiefe schreie ich dich an, Herr, aus der Tiefe schreie ich dich an, Herr

De profundis clamavit ad te Domine, Deus der Herr, aus der Tiefe schreie ich dich an, Herr, aus der Tiefe schreie ich dich an, Herr

In vo-cem de-um, in vo-cem de-um, in vo-cem de-um, in vo-cem de-um

In vo-cem de-um, in vo-cem de-um, in vo-cem de-um, in vo-cem de-um

In-qui-ta-tes ob-ser-va-ve-ris, Domine, in-qui-ta-tes ob-ser-va-ve-ris, Domine

80

1 - qui - ta - les ob - ser - va - ve - ris, Do - mi - ne
 Herr, und ich bin die, die du beobachtest, Gott, Herr.

1 - qui - ta - les ob - ser - va - ve - ris, Do - mi - ne,
 Herr, und ich bin die, die du beobachtest, Gott, Herr.

Do - mi - ne, quis sus - ti - ne -
 Herr, und wer wird be -

Do - mi - ne, quis sus - ti - ne -
 Herr, und wer wird be -

Do - mi - ne, quis sus - ti - ne -
 Herr, und wer wird be -

81

ne - bit? Qui - a - pud te
 sie - kam? Dem in der Hand

ne, quis sus - ti - ne - bit? Qui - a - pud te
 der, wer wird be - stehen? Dem in der Hand

bit? hem? Qui - a - pud te
 kam? Dem in der Hand

sus - ti - ne - bit? Qui - a - pud te
 und? Dem in der Hand

pro - pi - ti - a -
 ist die Erb -

pro - pi - ti - a -
 ist die Erb -

pro - pi - ti - a -
 ist die Erb -

82

ti - o est: et pro - pter le - gem tu - am
 hung: und dem Ge - setzschafft tu - a - de,

ti - o est: et pro - pter le - gem tu - am
 hung: und dem Ge - setzschafft tu - a - de,

ti - o est: et pro - pter le - gem tu - am
 hung: und dem Ge - setzschafft tu - a - de,

ti - o est: et pro - pter le - gem tu - am
 hung: und dem Ge - setzschafft tu - a - de,

pro - pi - ti - a - ti - o est: et pro - pter le - gem tu - am
 ist und dem Ge - setzschafft tu - a - de,

sus - ti - nu - i te, Do - mi -
 ich man dich, Firsichte, Herr -

sus - ti - nu - i te, Do - mi -
 ich man dich, Firsichte, Herr -

sus - ti - nu - i te, Do - mi -
 ich man dich, Firsichte, Herr -

83

Sus - ti - nu - i a - ni - ma me - a in ver - bo
 Gott Ich man - re auf dem Herrn, mei - ne See - le har - ret auf

Sus - ti - nu - i a - ni - ma me - a in ver - bo
 Gott Ich man - re auf dem Herrn, mei - ne See - le har - ret auf

Sus - ti - nu - i a - ni - ma me - a in ver - bo
 Gott Ich man - re auf dem Herrn, mei - ne See - le har - ret auf

Sus - ti - nu - i a - ni - ma me - a in ver - bo
 Gott Ich man - re auf dem Herrn, mei - ne See - le har - ret auf

84

ius - ti - ti - a - ni - ma me - a in ver - bo e -
 Herr, und ich man - re auf dem Herrn, mei - ne See - le har - ret auf

ius - ti - ti - a - ni - ma me - a in ver - bo e -
 Herr, und ich man - re auf dem Herrn, mei - ne See - le har - ret auf

ius - ti - ti - a - ni - ma me - a in ver - bo e -
 Herr, und ich man - re auf dem Herrn, mei - ne See - le har - ret auf

ius - ti - ti - a - ni - ma me - a in ver - bo e -
 Herr, und ich man - re auf dem Herrn, mei - ne See - le har - ret auf

85

ra - vit a - ni - ma me - a in ver - bo e -
 der, man - re auf dem Herrn, mei - ne See - le har - ret auf

ra - vit a - ni - ma me - a in ver - bo e -
 der, man - re auf dem Herrn, mei - ne See - le har - ret auf

ra - vit a - ni - ma me - a in ver - bo e -
 der, man - re auf dem Herrn, mei - ne See - le har - ret auf

ra - vit a - ni - ma me - a in ver - bo e -
 der, man - re auf dem Herrn, mei - ne See - le har - ret auf

86

ra - vit a - ni - ma me - a in ver - bo e -
 der, man - re auf dem Herrn, mei - ne See - le har - ret auf

ra - vit a - ni - ma me - a in ver - bo e -
 der, man - re auf dem Herrn, mei - ne See - le har - ret auf

ra - vit a - ni - ma me - a in ver - bo e -
 der, man - re auf dem Herrn, mei - ne See - le har - ret auf

ra - vit a - ni - ma me - a in ver - bo e -
 der, man - re auf dem Herrn, mei - ne See - le har - ret auf

87

Secunda pars

ra - vit a - ni - ma me - a in ver - bo e -
 der, man - re auf dem Herrn, mei - ne See - le har - ret auf

ra - vit a - ni - ma me - a in ver - bo e -
 der, man - re auf dem Herrn, mei - ne See - le har - ret auf

ra - vit a - ni - ma me - a in ver - bo e -
 der, man - re auf dem Herrn, mei - ne See - le har - ret auf

ra - vit a - ni - ma me - a in ver - bo e -
 der, man - re auf dem Herrn, mei - ne See - le har - ret auf

19

20

21

22

23

24

25

26



AVE MARIA, GRATIA PLENA

W 1539 a No. 1

Pa - tri et Fi - li - o - et Spi - ri - tu - i San - cto. Si - cut e -
te - ter und dem Sohn und dem he - li - gen Gei - ste. So wie es
ge - ri - t Pa - tri et Fi - li - o et Spi - ri - tu - i San - cto.
für den Pa - tri - um, und dem Sohn, und dem Gei - ste.
8 Il - o et Spi - ri - tu - i San - cto.
und dem he - li - gen Gei - ste.

(76)

(77)

rat in - pi - ti - o - ni - o et - mine, et - sem -
nor in - stant von der heiligen, jetzt und son -
der in - stant von der heiligen, jetzt und son -
8 Et in sae - cu - la et in sae - cu - la et in sae - cu - la.
Und von je - zeit und von je - zeit und von je - zeit.
8 Et in sae - cu - la et in sae - cu - la et in sae - cu - la.
Und von je - zeit und von je - zeit und von je - zeit.
8 Et in sae - cu - la et in sae - cu - la et in sae - cu - la.
Und von je - zeit und von je - zeit und von je - zeit.
8 Et in sae - cu - la et in sae - cu - la et in sae - cu - la.
Und von je - zeit und von je - zeit und von je - zeit.

Do - minus te - cum, Do - minus te - cum, Do - minus te - cum.
Do - minus te - cum, Do - minus te - cum, Do - minus te - cum.
8 Do - minus te - cum, Do - minus te - cum, Do - minus te - cum.
Do - minus te - cum, Do - minus te - cum, Do - minus te - cum.
8 Do - minus te - cum, Do - minus te - cum, Do - minus te - cum.
Do - minus te - cum, Do - minus te - cum, Do - minus te - cum.
8 Do - minus te - cum, Do - minus te - cum, Do - minus te - cum.
Do - minus te - cum, Do - minus te - cum, Do - minus te - cum.

Be - ne - di - cta tu, Be - ne - di - cta tu, Be - ne - di - cta tu.
Be - ne - di - cta tu, Be - ne - di - cta tu, Be - ne - di - cta tu.
8 Be - ne - di - cta tu, Be - ne - di - cta tu, Be - ne - di - cta tu.
Be - ne - di - cta tu, Be - ne - di - cta tu, Be - ne - di - cta tu.
8 Be - ne - di - cta tu, Be - ne - di - cta tu, Be - ne - di - cta tu.
Be - ne - di - cta tu, Be - ne - di - cta tu, Be - ne - di - cta tu.
8 Be - ne - di - cta tu, Be - ne - di - cta tu, Be - ne - di - cta tu.
Be - ne - di - cta tu, Be - ne - di - cta tu, Be - ne - di - cta tu.

Et in sae - cu - la et in sae - cu - la et in sae - cu - la.
Und von je - zeit und von je - zeit und von je - zeit.
8 Et in sae - cu - la et in sae - cu - la et in sae - cu - la.
Und von je - zeit und von je - zeit und von je - zeit.
8 Et in sae - cu - la et in sae - cu - la et in sae - cu - la.
Und von je - zeit und von je - zeit und von je - zeit.
8 Et in sae - cu - la et in sae - cu - la et in sae - cu - la.
Und von je - zeit und von je - zeit und von je - zeit.

Et in sae - cu - la et in sae - cu - la et in sae - cu - la.
Und von je - zeit und von je - zeit und von je - zeit.
8 Et in sae - cu - la et in sae - cu - la et in sae - cu - la.
Und von je - zeit und von je - zeit und von je - zeit.
8 Et in sae - cu - la et in sae - cu - la et in sae - cu - la.
Und von je - zeit und von je - zeit und von je - zeit.
8 Et in sae - cu - la et in sae - cu - la et in sae - cu - la.
Und von je - zeit und von je - zeit und von je - zeit.

30
O - - - ra pro no - bis De - - - um, o - - - ra pro no - bis De - - - um, o - - - ra pro no - bis De - - - um,
O - - - ra pro no - bis De - - - um, o - - - ra pro no - bis De - - - um, o - - - ra pro no - bis De - - - um,
lu - ia: O - - - ra pro no - bis De - - - um, o - - - ra pro no - bis De - - - um, o - - - ra pro no - bis De - - - um,

40
De - um, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia,
- um, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia,
De - - - um, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia,

45
- ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia,
le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia,
al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia,

50
- ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia,
al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia,
lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia,

55
al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia,
al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia,
al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia, al - le - lu - ia,

In nativitate Domini Angelus ad pastores ait

Andrea Gabrieli

Soprano
An - ge - lus ad pa - sto - res a - it

Contralto
An - ge - lus ad pa - sto - res a - it ad pa - sto - res a -

Tenore
An - ge - lus ad pa - sto - res a -

Basso
An - ge - lus ad pa - sto - res

S
an - num - ti - o vo - bis gau - di - um ma -

C.
it an - num - ti - o vo - bis gau - di - um ma -

T
it an - num - ti - o vo - bis gau - di - um ma -

B
a - it an - num - ti - o vo - bis gau - di - um ma -

S
gnum an - num - ti - o vo - bis gau - di - um ma -

C.
gnum an - num - ti - o vo - bis gau - di - um ma -

T
gnum an - num - ti - o vo - bis gau - di - um ma -

B
gnum an - num - ti - o vo - bis gau - di - um ma -

S
ma - tus est qui - a na - tus est vo - bis ho - di - e

C.
gnum qui - a na - tus est vo - bis ho - di - e qui - a

T
qui - a na - tus est vo - bis ho - di - e qui - a

B
ma - tus est vo - bis ho - di - e qui - a

S
qui - a na - tus est vo - bis ho - di - e Sal - va - tor mun -

C.
ma - tus est qui - a na - tus est vo - bis ho - di - e Sal - va - tor mun -

T
a na - tus est vo - bis ho - di - e Sal - va - tor mun -

B
ma - tus est vo - bis ho - di - e Sal - va - tor mun -

S
di Sal - va - tor mun - di ad - le - lu - ia -

C.
di Sal - va - tor mun - di ad - le - lu - ia -

T
di Sal - va - tor mun - di ad - le - lu - ia -

B
di Sal - va - tor mun - di ad - le - lu - ia -

S
ia ad - le - lu - ia -

C.
ia ad - le - lu - ia -

T
ia ad - le - lu - ia -

B
ia ad - le - lu - ia -

S
le - lu - ia ad - le - lu - ia -

C.
le - lu - ia ad - le - lu - ia -

T
ia ad - le - lu - ia -

B
le - lu - ia ad - le - lu - ia -

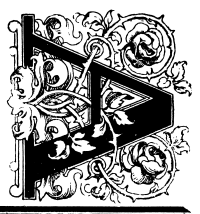
lan - da - mus, lan - da - mus, at - que be - ne - di - ci - mus: ti - bi
 - le - mur, lan - da - mus, lan - da - mus, at - que be - ne - di - ci - mus: ti -
 lan - da - mus, lan - da - mus, at - que be - ne - di - ci - mus:
 - - - mur, lan - da - mus, lan - da - mus, at - que be - ne - di - ci - mus:

glo - ri - a in sae - - cu - la,
 ti - hi
 - - hi glo - ri - a in sae - cu - la, ti - bi glo - ri - a
 ti - hi glo - ri - a in sae - - cu - la, ti - hi
 ti - hi glo - ri - a in sae - - cu - la, in sae - - cu - la, in sae - - cu - la,
 in sae - - cu - la, in sae - - cu - la,
 glo - ri - a, ti - bi glo - ri - a, ti - bi glo - ri - a in sae - - cu - la,
 in
 ti - hi glo - ri - a, ti - hi glo - ri - a in sae - cu - la, in

glo - ri - a, ti - hi glo - ri - a in sae - - cu - la, in sae - - cu - la,
 in sae - - cu - la, in sae - - cu - la,
 glo - ri - a, ti - bi glo - ri - a, ti - bi glo - ri - a in sae - - cu - la,
 in
 ti - hi glo - ri - a, ti - hi glo - ri - a in sae - cu - la, in

- - - cu - la, in sae - - cu - la.
 - - - cu - la, in sae - - cu - la.
 sae - - cu - la, in sae - - cu - la.
 sae - - cu - la, in sae - - cu - la.

CANTUS. **CXXV.** Andrea Gabrieli.



ALTIUS.

Musical notation for the Alto voice part. Lyrics: An - ge - li, Ar - chan - ge -

TENOR.

Musical notation for the Tenor voice part. Lyrics: An - ge - li, Ar - change - li,

BASSUS.

Musical notation for the Bass voice part.

Musical notation for the Soprano voice part. Lyrics: li, Throni et Do - mi - na - ti - o - nes, Prin - ci -

Musical notation for the Alto voice part. Lyrics: - na - ti - o - nes, Thro - ni et Do - mi - na - ti - o - nes,

Musical notation for the Tenor voice part. Lyrics: Throni et Do - mi - na - ti - o - nes, Throni et Do - mi - na - ti - o - nes,

Musical notation for the Bass voice part. Lyrics: An - ge - li, Ar - change - li, Thro - ni et Do - mi - na - ti -

Musical notation for the Soprano voice part. Lyrics: - pa - tus, et Po - te - sta - tes,

Musical notation for the Alto voice part. Lyrics: Pin - ci - pa - tus, et Po - te - sta - tes, Vir - tu - tes coe - lo -

Musical notation for the Tenor voice part. Lyrics: nes, Vir - tu - tes coe - lo -

Musical notation for the Bass voice part. Lyrics: - o - nes, Vir - tu - tes coe - lo -

Musical notation for the Soprano voice part. Lyrics: Cheru - bim at - que Se - ra - phim, Pa - tri - ar - chae et

Musical notation for the Alto voice part. Lyrics: - rum, Cheru - bim at - que Se - ra - phim, Pa - tri - ar - chae et

Musical notation for the Tenor voice part. Lyrics: - rum, Cheru - bim at - que Se - ra - phim, Pa - tri - ar - chae,

Musical notation for the Bass voice part. Lyrics: - rum, Cheru - bim at - que Se - ra - phim, Pa - tri - ar - chae,

Musical notation for the Soprano voice part. Lyrics: Prophe - tae, san - cti le - gis Do - cto - res, A -

Musical notation for the Alto voice part. Lyrics: Prophe - tae, san - cti le - gis Do - cto - res,

Musical notation for the Tenor voice part. Lyrics: san - cti le - gis Do - cto - res, A - po - sto -

Musical notation for the Bass voice part. Lyrics: san - cti le - gis Do - cto - res, A - po - sto -

Musical notation for the Soprano voice part. Lyrics: - po - sto - li, omnes Christi Mar - ty - res,

Musical notation for the Alto voice part. Lyrics: A - po - sto - li, omnes Christi Mar - ty - res,

Musical notation for the Tenor voice part. Lyrics: - li, omnes Christi Mar - ty - res, san - cti Confes - so -

Musical notation for the Bass voice part. Lyrics: - li, omnes Christi Mar - ty - res, san - cti Confes -

san - cti Con-fes - so - res, Vir - gi - nes Do - mi -
 san - cti Con-fes-so - res, Vir - gi - nes Do - mi -
 - res, san - cti Con-fes - so - res, Vir - gi - nes Do - mi -
 - so - res, Vir - gi - nes Do - mi -
 - ni, A-na-cho - ri - tae, A - na-cho-ri - tae, San - cti - que o -
 - ni, A-na-cho - ri - tae, A - na - cho-ri - tae, San - cti - que o -
 - ni, A-na-cho - ri - tae, A - na - cho-ri - tae, San - cti - que o -
 - ni,
 A - na - cho-ri - tae, San - cti - que o -
 - mnes in - ter - ce - di - te pro no - bis,
 - mnes in - ter - ce - di - te pro no - bis, San - cti -
 - mnes in - ter - ce - di - te pro no - bis, in - ter -
 - mnes in - ter - ce - di - te pro no - bis, in - ter -
 - mnes in - ter - ce - di - te pro no - bis, San - cti -

in - ter - ce - di - te pro no - bis, in - ter - ce - di - te pro no - bis, pro
 - que o - mnes in - ter - ce - di - te pro no - bis, pro
 - ce - di - te pro no - bis, in - ter - ce - di - te pro no - bis, San -
 - que o - mnes San - cti - que o - mnes
 no - bis, in - ter - ce - di - te pro no - bis, pro
 - bis, in - ter - ce - di - te pro no - bis, pro
 in - ter - ce - di - te pro no - bis, in - ter - ce - di - te pro no - bis,
 - - - - bis,
 no - bis, in - ter - ce - di - te pro no - bis,
 - bis, in - ter - ce - di - te pro no - bis,
 in - ter - ce - di - te pro no - bis.

Tollite jugum meum

Andrea Gabrieli
(c. 1510-1586)

Soprano
Tolli - te ju-⁵ gum me - um su- per vos,

Alto
Tol - li - te ju- gum me - um su- per vos, di-

Tenor
Di - cit Do -

Bass
Di - cit

S
di-¹⁰ cit Do - mi - nus, Do- mi - nus,

A
cit Do - mi - nus, di - cit Do - mi - nus,

T
mi - nus, tol - li - te ju- gum me - um su-

B
Do - mi - nus, tol - li - te ju- gum me -

S
di - cit Do - mi - nus, di-¹⁵ cit Do- mi - nus,

A
di-cit-Do- mi-nus, di - cit Do- mi - nus, et

T
per vos, di-²⁰ cit Do-mi - nus,

B
um su- per vos, di- cit Do - mi - nus, et di-

Tollite jugum meum - Gabrieli

S
et di - sci - te a me, qui - a mi-²⁵ tis sum, et di - sci -

A
di - sci - te a me, qui - a mi- tis sum, et di - sci - te a

T
qui - a mi - tis sum, qui - a mi- tis sum, qui -

B
sci - te a me, et di- sci - te a me,

S
te a me, qui - a mi-³⁰ tis sum, qui - a mi- tis sum,

A
me, et di- sci - te a me, qui - a mi - tis sum, qui - a mi -

T
a mi- tis sum, et di - sci - te a me, qui - a mi -

B
qui - a mi - tis sum, et di- sci - te a

S
et hu-³⁵ mi-lis cor- de, et hu - mi -

A
tis sum, et hu - mi - lis cor- de, et hu- mi - lis

T
tis sum et hu - mi - lis cor- de, et hu- mi - lis

B
me, qui - a mi- tis sum et hu - mi - lis cor - de, et hu - mi -

Tollite jugum meum - Gabrieli

te cum be ne di eta tu be ne di eta tu in mu li
cum be ne di eta tu be ne di eta tu in mu li
Dominus te cum be ne di eta tu in mu li

e ri bus in mu li e ri bus et be ne di ctus fru ctus
e ri bus in mu li e ri bus et be ne di ctus fru ctus
e ri bus in mu li e ri bus et be ne di ctus fru ctus

fru ctus ven tris tu i Je sus. San cta Ma ri a, San cta Mari
ctu ven tris tu i Je sus. San cta Ma ri a, San cta Mari
ven tris tu i Je sus. San cta Ma ri a, San cta Mari

a, re gi na coe li, dul cis et pi a dul cis et
a, re gi na coe li, dul cis et pi a dul cis et
a, re gi na coe li, dul cis et pi a dul cis et

pi a, o ma ter De i o ma ter De i, o ma ter De i, o ma ter De i
pi a, o ma ter De i o ma ter De i, o ma ter De i, o ma ter De i
pi a, o ma ter De i o ma ter De i, o ma ter De i, o ma ter De i

no bis pec ca to ri bus pec ca to ri bus, ut cum e le ctis te
ra pro no bis pec ca to ri bus, ut cum e le ctis te
ra pro no bis pec ca to ri bus, ut cum e le ctis te

vi de a mus ut cum e le ctis te
te vi de a mus ut cum e le ctis te
te vi de a mus ut cum e le ctis te

de a mus, te vi de a mus, te vi de a mus
vi de a mus, te vi de a mus, te vi de a mus
vi de a mus, te vi de a mus, te vi de a mus

Sicut Cervus

Prima Pars.

Giovanni Pierluigi da Palestrina

Sic - ut cer - vus de - si - derat ad fon - tes a -
 Sic - ut cer - vus de - si - derat ad fon - tes a - qua -
 Sic - ut cer - vus de - si - derat ad fon - tes a - qua - rum sic -
 Sic - ut cer - vus de -

qua - rum a - qua - rum sic - ut
 - rum sic - ut cer - vus de - si - derat ad fon - tes a - qua -
 - ut cer - vus de - si - derat ad fon - tes a - qua -
 sic - ut cer - vus de - si - derat ad

cer - vus de - si - derat ad fon - tes a - qua - rum,
 rum de - si - derat ad fon - tes a - qua -
 - rum de si - derat ad fon - tes a - qua - rum, i -
 fon - tes de - si - de - rat ad fon - tes a - qua - rum, i - ta

i - ta de - si - de - rat
 i - ta de - si - de - rat
 rum, i - ta de - si - de - rat
 ta de - si - de - rat i - ta de - si - de - rat
 de - si - de - rat i - ta de - si - de - rat

i - ta de - si - de - rat a - ni - ma
 - ta i - ta de - si - de - rat a -
 - derat i - ta de - si - de - rat i - ta de - si - de - rat
 - de - rat i - ta de - si - de - rat

me - a ad te De - us a - ni -
 - ni - ma me - a ad te De - us a - ni - ma me - a ad te
 a - ni - ma me - a ad te De - us
 rat de - si - de - rat a - ni - ma me - a ad te De - us

ma me - a ad te, De - us.
 De - us ad te De - us ad te, De - us.
 a - ni - ma me - a ad te De - us ad te, De - us.
 a - ni - ma me - a ad te De - us ad te, De - us.

Secunda Pars.

Si - ti - vit a - ni - ma me - a ad De - um for - tem vi - vum a -
 Si - ti - vit a - ni - ma me - a ad De - um for - tem vi - vum a -
 Si - ti - vit a - ni - ma me - a ad De - um for - tem vi - vum a -
 Si - ti - vit a - ni - ma me - a ad De - um for - tem vi - vum a -

ni - ma me - a ad De - um for - tem vi - vum ad De - um for - tem vi - a
 ni - ma me - a si - ti - vit a - nimam e - a ad De - um ad De - um
 ad De - um for - tem vi - vum ad De - um for - tem
 vit a - nimam e - a ad De - um for - tem vi - vum
 vum vi - vum: quan - do ve - ni - am et ap - pa - re - bo quan -
 tum vi - vum: quan - do ve - ni - am et ap - pa - re - bo quan -
 tum vi - vum: quan - do ve - ni - am et ap - pa - re - bo
 De um For - tem vi - vum: quan - do ve - ni - am quan -
 do ve - ni - am et ap - pa - re - bo an - te fa - ciem De - i an - te fa - ciem
 ni - am et ap - pa - re - bo an - te fa - ciem De - i
 et ap - pa - re - bo an - te - fa - ciem De - i an -
 do ve - ni - am et ap - pa - re - bo an - te fa - ciem
 De - i? Fu - er - unt mi - hi La - cry -
 an - te fa - ciem De - i? Fu - er - unt mi - hi la - cry - mae me - ae
 fa - ci - em De - i? Fu - er - unt mi - hi la - cry - mae me - ae
 De - i? Fu - er - unt mi - hi la - cry - mae me - ae

mae me - ae pa - nes di - e ac no - cte, dum di - ci - tur mi - hi quo - ti - di -
 pa - nes di - e ac no - cte, dum di - ci - tur mi - hi quo - ti - di -
 pa - nes di - e ac no - cte, dum di - ci - tur mi - hi quo - ti - di -
 pa - nes di - e ac no - cte, dum di - ci - tur mi - hi quo - ti - di -
 pa - nes di - e ac no - cte, dum di - ci - tur mi - hi quo - ti - di -
 U - bi est De - us tu - us
 e: U - bi est De - us tu - us
 e quo - ti - di - e: U - bi est De - us tu - us
 e quo - ti - di - e: U - bi est De - us tu - us
 quo - ti - di - e: U - bi est De - us tu - us
 dum di - ci - tur mi - hi quo - ti - di - e u - bi est De - us tu - us?
 us dum di - ci - tur mi - hi quo - ti - di - e u - bi est De - us tu - us?
 us dum di - ci - tur mi - hi quo - ti - di - e u - bi est De - us tu - us?
 us dum di - ci - tur mi - hi quo - ti - di - e u - bi est De - us tu - us?
 us dum di - ci - tur mi - hi quo - ti - di - e u - bi est De - us tu - us?

SUPER FLUMINA BABYLONIS

Giovanni Pierluigi da Palestrina
(1525 - 1594)

$\text{♩} = 60$

CANTUS Su - per flu-mi-na Ba-
ALTUS Su - per flu-mi-na Ba - by-lo
TENOR
BASSUS Su - per flu-mi-na Ba - by-lo - nis, su - per flu-mi-
S by-lo - nis, su - per flu - mi - na Ba - by - lo -
C nis, su - per flu - mi - na Ba - by - lo -
T Su - per flu - mi - na Ba - by - lo - nis,
B na Ba-bi - lo - - nis, _____

S 14 nis, il - lic se - di-mus et fle - vi - mus, il - lic se - di-mus et fle-
C nis, il - lic se - di-mus et fle - vi - mus, il - lic se - di-mus et fle-
T il - lic se - di-mus et fle - vi - mus, il - lic se - di - mus _____ et
B il - lic se - di-mus et fle - vi - mus il - lic se - di-mus et

S 22 - - vi - mus dum re-cor - da-re-mur tu - i, Si - on
C - - vi - mus dum re-cor-da-re - mur tu - i, Si -
T fle - vi - mus dum re-cor - da-re-mus tu - i, Si - on, dum re-cro-
B fle - vi - mus dum re-cor -

S 26 dum re-cor - da-re - mur tu - i, _____ Si - on
C dum re-cor - da - re-mur tu - i, Si - on
T 8 da-re-mur tu - i, Si - on, dum re-cor - da-re-mur tu - i, Si - on
B - da-re-mur ti - i, Si - on, _____ dum

S 34 dum re-cor - da-re-mur tu - i, Si - on
C - dum re - cor - da - re - mur _____ tu - i, Si - on, in sa - li - ci-bus
T dum re-cor - da - re - mur tu - i, Si - on, in sa - li - ci-bus
B re-cor - da - re-mur tu - i, Si - on in sa - li - ci-bus

41

S in sa - li - ci-bus in me - di - o e - jus, in me - di - o e -

C in me - di - o in sa - li - ci-bus in me - di - o e -

T in me - di - o e - jus, in me - di - o e - jus

B in me - di - o e - jus in sa -

47

S jus in sa - li - ci-bus in me -

C jus, in sa - li - ci-bus in me - di - o e - jus, in me - di - o e -

T in sa - li - ci-bus in me - di - o e - jus, in me - di - o e -

B li - ci-bus in me - di - o e - jus in

53

S - di - o e - jus sus - pen - di - mus or -

C - jus sus - pen - di - mus or - ga - na no - stra, sus - pen - di -

T jus sus - pen - di - mus or - ga - na no - stra, sus - pen - di -

B me - di - o e - jus sus - pen - di - mus or - ga - na no - stra,

59

S - ga - na no - stra, or - ga - na no - stra

C mus or - ga - na no - stra or - ga - na no - stra, sus - pen - di - mus or - ga - na

T mus or - ga - na no - stra, or - ga - na no - stra, sus - pen - di - mus or -

B sus - pen - di - mus or - ga - na no - stra, sus - pen - di - mus or -

65

S sus - pen - di - mus or - ga - na no - stra, or - ga - na no - stra. *[rit.]*

C no - stra, sus - pen - di - mus or - ga - na no - stra, or - ga - na no - stra.

T - ga - na no - stra, sus - pen - di - mus or - ga - na no - stra, or - ga - na no - stra.

B - ga - na no - stra, sus - pen - di - mus or - ga - na no - stra.

Attr. Giovanni Pierluigi da Palestrina
ALMA REDEMPTORIS MATER
Antifona mariana del tempo di Avvento

Da un manoscritto dell'Archivio dell'Oratorio di S. Filippo
in S. Maria in Vallicella, Roma
Revisione di L. Mandelli

S
b
Al - - - ma
Re - dem - pió - ris má - - - ter, que per - vi - a cae -

C
Re - dem - pió - ris má - - - ter, que per - vi - a cae -

T
8
Re - dem - pió - ris má - - - ter, que per - vi - a cae -

B
8
Re - dem - pió - ris má - - - ter, que per - vi - a cae -

S
li pór - ta má - nes, et sícl - la má - ris, suc - cūr - re ca -

C
li pór - ta má - nes, et sícl - la má - ris, suc - cūr - re ca -

T
8
li pór - ta má - nes, et sícl - la má - ris, suc - cūr - re ca -

B
8
li pór - ta má - nes, et sícl - la má - ris, suc - cūr - re ca -

S
den - ti sír - ge - re qui cū - rat pó - - - pu - lo.

C
den - ti sír - ge - re qui cū - rat pó - - - pu - lo.

T
8
den - ti sír - ge - re qui cū - rat pó - - - pu - lo.

B
8
den - ti sír - ge - re qui cū - rat pó - - - pu - lo.

S
Tu, que ge - nu - i - sí, ma - tú - ra mi - rān - te, tú - um

C
Tu, que ge - nu - i - sí ma - tú - ra mi - rān - te, tú - um

T
8
Tu, que ge - nu - i - sí, ma - tú - ra mi - rān - te, tú - um

B
8
Tu, que ge - nu - i - sí, ma - tú - ra mi - rān - te, tú - um

S
sān - ctum ge - ni - tó - rem, Vir - go pri - us ac - po -

C
sān - ctum ge - ni - tó - rem, Vir - go pri - us, ac -

T
8
sān - ctum ge - ni - tó - rem, Vir - go pri - us,

B
8
sān - ctum ge - ni - tó - rem, Vir - go pri -

S
sís - ri - us, ac - po - sí - ri - us, Ga - bri - é - lis ab ó - - - re

C
po - sí - ri - us, Ga - bri - é - lis ab ó - - - re

T
8
ac - po - sí - ri - us, Ga - bri - é - lis ab ó - - - re

B
8
us, ac - po - sí - ri - us, Ga - bri - é - lis ab ó - - - re

5. „Regina coeli“

4 VOCUM.

Collectio An. author. n. P. A. Praenestina.

si - mens il - lud A - ve, pec - ca - rum mi - se - re, pec - ca - tum mi - se - re, pec - ca - tum mi - se - re, pec - ca - tum mi - se - re.

ca - to - rum mi - se - re, pec - ca - tum mi - se - re, pec - ca - tum mi - se - re, pec - ca - tum mi - se - re, pec - ca - tum mi - se - re, pec - ca - tum mi - se - re.

ca - to - rum mi - se - re, pec - ca - tum mi - se - re, pec - ca - tum mi - se - re, pec - ca - tum mi - se - re, pec - ca - tum mi - se - re, pec - ca - tum mi - se - re.

Cantus, Alnus, Tenor, Bassus. Re - gi - na coe - li lae - ta - re, al - le - lu - ia, lae - ta - re, al - le - lu - ia, lae - ta - re, al - le - lu - ia, lae - ta - re, al - le - lu - ia.

qui - bus in cae - lis et in terra, qui - bus in cae - lis et in terra, qui - bus in cae - lis et in terra, qui - bus in cae - lis et in terra.

qui - bus in cae - lis et in terra, qui - bus in cae - lis et in terra, qui - bus in cae - lis et in terra, qui - bus in cae - lis et in terra.

qui - bus in cae - lis et in terra, qui - bus in cae - lis et in terra, qui - bus in cae - lis et in terra, qui - bus in cae - lis et in terra.

*) Vocem Tenoris, quae peritit perfecti Rev. Michael Haller Ratishonensis.

A. Ex collectionibus impressis saeculi XVI. et XVII.

I. Cantiones sacrae.

1.

Dilecto spirituale. Canonique ... recolle de Sim. Vercio. Roma 1586. pag. 7. id. 1590. id. 1592. Joan. Petri Aloysii Praenostitini.

Cant. I.

(I) Je - sus! Rex ad - mi - ra - bi - lis et tri - um - phator no - bi - lis, dul - ce - do - in - ef -
 (II) Ma - ne no - biscum Do - mi - ne et nos il - lustra lu - mi - ne, pul - sa - men - tis ca -

Cant. II.

(I) Je - sus! Rex ad - mi - ra - bi - lis et tri - um - phator no - bi - lis, dul - ce - do - in - ef -
 (II) Ma - ne no - biscum Do - mi - ne et nos il - lustra lu - mi - ne, pul - sa - men - tis ca -

Altus.

(I) Je - sus! Rex ad - mi - ra - bi - lis et tri - um - phator no - bi - lis, dul - ce - do - in - ef -
 (II) Ma - ne no - biscum Do - mi - ne et nos il - lustra lu - mi - ne, pul - sa - men - tis ca -

fa - bi - lis, to - tus de - si - de - ra - bi - lis, de - si - de - ra - bi - lis
 - li - gi - ne, mun - dum re - ple - dul - ce - di - ne, mun - dum re - ple - dul - ce - di - ne
 - fa - bi - lis, to - tus de - si - de - ra - bi - lis, to - tus de - si - de - ra - bi - lis
 - li - gi - ne, mun - dum re - ple - dul - ce - di - ne, mun - dum re - ple - dul - ce - di - ne
 - fa - bi - lis, to - tus de - si - de - ra - bi - lis, de - si - de - ra - bi - lis
 - li - gi - ne, mun - dum re - ple - dul - ce - di - ne, mun - dum re - ple - dul - ce - di - ne

3.

Dilecto spirituale. Roma 1586. fol. 17. id. 1590. id. 1592. Joannis Petri Aloysii Praenostitini.

Cant. I.

(I) Tu - a Je - su di - le - cti - o, gra - tia qui bi - bunt tis re - fe - cti - o,
 (II) Qui te - sta - nt e - su - ri - unt, qui bi - bunt tis re - fe - cti - o,
 (I) Tu - a Je - su di - le - cti - o, gra - tia qui bi - bunt tis re - fe - cti - o,
 (II) Qui te - sta - nt e - su - ri - unt, qui bi - bunt tis re - fe - cti - o,

Cant. II.

(I) Tu - a Je - su di - le - cti - o, gra - tia qui bi - bunt tis re - fe - cti - o,
 (II) Qui te - sta - nt e - su - ri - unt, qui bi - bunt tis re - fe - cti - o,

Altus.

(I) Tu - a Je - su di - le - cti - o, gra - tia qui bi - bunt tis re - fe - cti - o,
 (II) Qui te - sta - nt e - su - ri - unt, qui bi - bunt tis re - fe - cti - o,

re - plet si - ne fa - sti - di - o, dans fa - mem de - si - de - ri - o,
 de - si - de - ra - re ne - sci - unt, ni - si Je - sum quem di - li - gunt.
 re - plet si - ne fa - sti - di - o, dans fa - mem de - si - de - ri - o,
 de - si - de - ra - re ne - sci - unt, ni - si Je - sum quem di - li - gunt.

5.

Dilecto spirituale. Roma 1586. pag. 23. id. 1590. id. 1592. Joannis Petri Aloysii Praenostitini.

A 4 voci.

Cantus. Je - su, flos ma - tris Vir - gi - nis, Je - su, flos ma - tris Vir - gi - nis,
 Altus. Je - su, flos ma - tris Vir - gi - nis, Je - su, flos ma - tris Vir - gi - nis,
 Tenor. Je - su, flos ma - tris Vir - gi - nis, Je - su, flos ma - tris Vir - gi - nis,
 Bassus. Je - su, flos ma - tris Vir - gi - nis, Je - su, flos ma - tris Vir - gi - nis,

A - mor no - strae dul - ce - di - nis, Ti - bi laus, ho - nor nu - mi - nis, re - gnum be -
 A - mor no - strae dul - ce - di - nis, Ti - bi laus, ho - nor nu - mi - nis, re - gnum be -
 A - mor no - strae dul - ce - di - nis, Ti - bi laus, ho - nor nu - mi - nis, re - gnum be -
 A - mor no - strae dul - ce - di - nis, Ti - bi laus, ho - nor nu - mi - nis, re - gnum be -
 A - mor no - strae dul - ce - di - nis, Ti - bi laus, ho - nor nu - mi - nis, re - gnum be -
 a - ti - tu - di - nis, re - gnum be - a - ti - tu - di - nis, Ti - bi
 a - ti - tu - di - nis, re - gnum be - a - ti - tu - di - nis, Ti - bi
 a - ti - tu - di - nis, re - gnum be - a - ti - tu - di - nis, Ti - bi
 re - gnum be - a - ti - tu - di - nis, re - gnum be - a - ti - tu - di - nis, Ti - bi
 laus, ho - nor nu - mi - nis, re - gnum be - a - ti - tu - di - nis,
 laus, ho - nor nu - mi - nis, re - gnum be - a - ti - tu - di - nis,
 laus, ho - nor nu - mi - nis, re - gnum be - a - ti - tu - di - nis,
 laus, ho - nor nu - mi - nis, re - gnum be - a - ti - tu - di - nis,

O Magnum Mysterium

In Circumcisione Domini

1572, 1583b, 1589a, 1589b, 1603

Tomás Luis de Victoria (c.1548-1611)

Cantus
O ma - gnum mys-te-ri - um et ad-mi-ra - bi - le sa-cra-men -
Alto
O ma - gnum mys - te-ri - um et ad-mi - ra - bi - le sa -
Tenor
Bassus

8
- - - tum, o ma - gnum mys - - - ste - ri - um et ad - mi -
cra - men - tum, o ma - gnum mys - te - ri - um, et ad - mi - ra - bi - le sa - cra - men -
O ma - gnum mys - te - ri - um et ad - mi - ra - bi - le sa - cra - men -
et ad - mi - ra - bi - le sa - cra - men - tum, et ad - mi - ra - bi - le sa - cra - men -

16
ra - bi - le, et ad - mi - ra - bi - le sa - cra - men - tum ut a - ni - ma - li - a vi - de - rent Do - mi -
tum, et ad - mi - ra - bi - le sa - cra - men - tum ut a - ni - ma - li - a vi - de - rent Do - mi -
tum, et ad - mi - ra - bi - le sa - cra - men - tum, ut a - ni - ma - li - a, ut a - ni - ma - li - a vi - de - rent Do - mi -
men - tum, et ad - mi - ra - bi - le sa - cra - men - tum, ut a - ni - ma - li - a vi - de - rent Do - mi -

2

O magnum mysterium

Victoria

24
num na - tum, vi - de - rent Do - mi - num na - - - tum ia - cen - tem in pre -
num na - tum, vi - de - rent Do - mi - num na - - - tum, ia - cen - - - tem ia - cen - tem in
num na - tum, vi - de - rent Do - mi - num na - tum iac - cen - tem in pre - se - - - pi -
num na - tum ia - cen - tem in pre - se - - - pi - o

32
se - pi - o ia - cen - tem in pre - se - - - pi - o.
pre - se - - - pi - o ia - cen - tem in pre - se - - - pi - o.
o ia - cen - tem in pre - se - - - pi - o, in pre - se - - - pi - o.
iac - cen - tem in pre - se - - - pi - o, in pre - se - - - pi - o.

40
O be - a - ta Vir - - - go, cu - ius vi - scer - a me - - - ru - e -
O be - a - ta Vir - - - go, cu - ius vi - scer - a me - - - ru - e -
O be - a - ta Vir - - - go, cu - ius vi - scer - a me - - - ru - e -
O be - a - ta Vir - - - go, cu - ius vi - scer - a me - - - ru - e -

20

ple - - - - - vit ho - mi - ci - di - um.
 ple - - - - - vit ho - mi - ci - di - um.
 ad - im - ple - - - - - vit ho - mi - ci - di - um.
 ple - - - - - vit ho - mi - ci - di - um.

25

In - fe - lix pae - ter - mi - sit pre - ti - um san - gui - nis et in
 In - fe - lix pae - ter - mi - sit pre - ti - um san - gui - nis et in
 In - fe - lix pae - ter - mi - sit pre - ti - um san - gui - nis et in
 et in

35

fi - ne la - que - o , se su - spen - dit.
 fi - ne la - que - o se su - spen - dit, se su - spen - dit.
 fi - ne la - que - o se su - spen - dit, se su - spen - dit.
 fi - ne la - que - o se su - spen - dit.

Fine

2 voci (Responsorio)

40

Bo - num e - rat e - - - - - i, si na - tus
 Bo - num e - rat e - - - - - i, si

45

non fu - is - set ho - mo il - - - - - le.
 na - tus non fu - is - set ho - mo il - - - - - le.

D.S. al Fine

3 voci (Responsorio)

40
 S Ex - cía - mans Jé - sus vó - ce má - gna. á - ce má - gna.
 C Ex - cía - mans Jé - sus vó - ce má - gna.
 B á - ce má - gna.

25
 us mé - us, ut quid me de - re - li - qui - us.
 ut quid me de - re - li - qui - sti,
 ut quid me de - re - li - qui - sti,
 de - re - li - qui - us, ut quid me de - re - li - qui - sti,
 de - re - li - qui - us.

30
 sti, de - re - li - qui - sti?
 Et in - cli - ná - to
 me de - re - li - qui - sti?
 Et in - cli - ná -
 sti, de - re - li - qui - sti?
 Et in - cli - ná -

35
 e - mi - sit spi - ri - tum.
 e - mi - sit spi - ri - tum.
 e - mi - sit spi - ri - tum.
 e - mi - sit spi - ri - tum.
 e - mi - sit spi - ri - tum.
 Fine

50
 it: Pá - ter, in má - nus tú - as.
 Pá - ter, in má - nus tú - as.

55
 Dá a Fine
 tú - as com - mén - do spi - ri - tum mé - um.
 tú - as com - mén - do spi - ri - tum mé - um.
 tú - as com - mén - do spi - ri - tum mé - um.

Tenebre factae sunt, dum crucifixissent Jesum Iudaei;
 et circa horam nonam exclamavit Iesus
 voce magna: Deus meus,
 ut quid me dereliquisti?
 Et inclinatio capite, emisit spiritum.
 Exclamans Iesus voce magna, ait:
 Pater, in manus tuas commendo spiritum meum.

*Si fece buio, quando i Giudei crocifissero Gesù
 e verso le tre del pomeriggio Gesù gridò
 a gran voce: «Dio mio,
 perché mi hai abbandonato?»
 E chinato il capo, spirò.
 Gridando a gran voce, Gesù disse:
 «Padre, nelle tue mani affido il mio spirito».*

40

et h̄a - x̄i s̄i - per me om̄ - nis t̄er - ra.
 et h̄a - x̄i s̄i - per me om̄ - nis t̄er - ra.
 nis, et h̄a - x̄i s̄i - per me om̄ - nis t̄er - ra.

45

Qui - a non est in - v̄en - tus
 Qui - a non est in - v̄en - tus
 Qui - a non est in - v̄en - tus

50

qui me a - gn̄o - sce - ret, et f̄a - ce - ret h̄e -
 qui me a - gn̄o - sce - ret, et f̄a - ce - ret h̄e -
 qui me a - gn̄o - sce - ret, et f̄a - ce - ret h̄e -

Fine

- ne, et f̄a - ce - ret h̄e - ne.
 et f̄a - ce - ret h̄e - ne.
 et f̄a - ce - ret h̄e - ne.
 et f̄a - ce - ret h̄e - ne.

3 voci (Responsorio)

55

In - sur - re - x̄e - runt in me v̄i - ri abs - que mi - se - ri - cōr - di - a, et
 In - sur - re - x̄e - runt in me v̄i - ri abs - que mi - se - ri - cōr - di - a, et non
 abs - que mi - se - ri - cōr - di - a, et non

65

non pe - per - c̄e - runt à - ni - m̄a - me - a,
 a, et non pe - per - c̄e - runt à - ni - m̄a - me - a,
 pe - per - c̄e - runt à - ni - m̄a - me - a, et non

Tomás Luis de Victoria
CALIGAVERUNT OCCULI MEI
Responsorio IX del Venerdi Santo

Traito da "Officium Hebdomadae Sanctae" (Gardano, Venezia, 1585)

5

S Ca - li - ga - vé - runt ó - cu - li mé - i a té - tu

C Ca - li - ga - vé - runt ó - cu - li mé - i a té - tu

T Ca - li - ga - vé - runt ó - cu - li mé - i a té - tu

B Ca - li - ga - vé - runt ó - cu - li mé - i

10

tu mé - o, qui - a e - lon - gá - tus est a me qui con - so - la - mé - o, qui - a e - lon - gá - tus est a me qui con - so - la -

15

bá - tur me, qui con - so - la - há - tur me

so - la - há - tur me, qui con - so - la - há - tur me

8 tur - me. qui con - so - la - há - tur me

qui con - so - la - há - tur me, con - so - la - há - tur me

20

Vi - de - te óm - nes pó - pu - li

óm - nes pó - pu - li

óm - nes pó - pu - li

óm - nes pó - pu - li

25

si est dó - lor sí - mi - lis si - est dó - lor sí - mi - lis

si est dó - lor sí - mi - lis si - est dó - lor sí - mi - lis

30

si est dó - lor sí - mi - lis si - est dó - lor sí - mi - lis

35

si est dó - lor sí - mi - lis si - est dó - lor sí - mi - lis

Fine

3 voci (Responsorio)

40

Da a Fine ⁵⁰

Tomás Luis de Victoria
ASTITERUNT REGES
Responsorio VII del Sabato Santo

Tratto da "Officium Hebdomadae Sanctae" (Gardano, Venezia, 1585)

5

a
10

15

Popule meus, quid feci tibi?

Tomás Luis Da Victoria

ad - vér - sus Chri - stum é - - - - - ius.
vér - sus Chri - stum é - - - - - ius.
et ad - vér - sus Chri - stum é - - - - - ius.

20 Fine

3 voci (Responsorio)
25
Quá - - - re fre - mu - é - runt gën - tes et pó - pu - li me - di -
- - - - - et pó - pu - li me - - - - -

30
Da Fine
di - tá - ti sunt i - ná - - - - - mi - a?
tá - ti sunt i - ná - - - - - ni - a?
di - tá - ti sunt i - ná - - - - - ni - a?

2º CORO o TUTTI
5
Soprano: Po - pu - le me - us, quid fe - ci tibi?
Contralto: Po - pu - le me - us, quid fe - ci tibi?
Tenore: Po - pu - le me - us, quid fe - ci tibi?
Basso: Po - pu - le me - us, quid fe - ci tibi?

9
Soprano: in quo con - tri - sta - vi - te? Re - spon - de mi - bi?
Alto: in quo con - tri - sta - vi - te? Re - spon - de mi - bi?
Tenore: in quo con - tri - sta - vi - te? Re - spon - de mi - bi?
Basso: in quo con - tri - sta - vi - te? Re - spon - de mi - bi?

9
1º CORO
2º CORO
Soprano: A - gi os o Thé - os! San - ctus
Alto: A - gi os o Thé - os! San - ctus
Tenore: A - gi os o Thé - os! San - ctus
Basso: A - gi os o Thé - os! San - ctus

CV.

Luca Marozzi.



CANTUS.

Quem dicunt

Es - se Fi - li - um ho -

MINUS.

Uem di - cunt ho - mines es - se Fi - li -

TENOR.

Quem di - cunt

BASSUS.

Quem di - cunt ho - mi - nes es -

um ho - mi - nis? Quem di - cunt ho - mines es - se Fi - li - um

um? Quem di - cunt ho - mines es - se Fi - li - um

es - se Fi - li - um ho - mi - nis? Quem di - cunt

di - cunt ho - mi - nes es - se Fi - li - um, es -

- cunt ho - mi - nes, quem di - cunt ho - mi - nes es -

16 *f* *mf* 1° CORO 2° CORO *p*

S A - gi - os, i - selhy - rosi! San - ctus, for -

T A - gi - os, i - selhy - rosi! San - ctus, for -

C A - gi - os, i - selhy - rosi! San - ctus, for -

B A - gi - os, i - selhy - rosi! San - ctus, for -

23 *mf* 1° CORO 2° CORO *f*

S A - gi - os, a - tha - na - tos, le - i - son

T A - gi - os, a - tha - na - tos, le - i - son

C A - gi - os, a - tha - na - tos, le - i - son

B A - gi - os, a - tha - na - tos, le - i - son

27 *p*

S San - ctus et im - mor - ta -

T San - ctus et im - mor - ta -

C San - ctus et im - mor - ta -

B San - ctus et im - mor - ta -

31 *f* *espress.*

S lis - mi - se - re - re no - mi - se - re - re no -

T lis - mi - se - re - re no - mi - se - re - re no -

C lis - mi - se - re - re no - mi - se - re - re no -

B lis - mi - se - re - re no - mi - se - re - re no -

ae-di-fi-ca - - ho, ae-di-fi-ca - - ho
 Pe - - trus, et su - - per hanc
 - - - - - tram ae-di-fi-ca - - ho, ae-di-fi-ca -
 Pe - - trus, et su - - per hanc
 Ec-cle-siam me - - - - - am, ae-di-fi-ca -
 pe - - tram ae-di-fi-ca - - ho
 - - ho Ec-cle-siam me - - - - - am, ae-di-fi-
 Ec-cle - - si-am me - - am, Ec-cle - si-am
 - ca - - ho, ae-di-fi-ca - - ho Ec - - cle - si-am
 ae-di-fi-ca - - ho, ae-di-fi-ca - - ho Ec - - cle - si-

- - - - - am.
 me - am, Ec - - cle - si - am me - - - - - am.
 me - - - - - am.
 - am me - - - - - am.

Estote fortes

Luca Marenzio
(1553-1599)

5

Soprano
E - so - te for - tes in bel - lo, in bel -

Contralto
E - so - te for - tes in bel - lo, in bel -

Tenore
E - so - te for - tes in bel - lo, in bel -

Basso
E - so - te for - tes in bel - lo,

S.
Io, e - so - te for - tes in bel - lo et pu - gna - te, et -

A.
Io, in bel - lo, in bel - lo et pu - gna - te, et -

T.
Io, in bel - lo, in bel - lo et pu - gna -

B.
in bel - lo, in bel - lo, in bel - lo et pu - gna -

15

S.
— pu - gna - te, et — pu - gna - te cum — an - ti quo ser - pen -

A.
pu - gna - te, et pu - gna - te cum — an - ti quo

T.
te, et pu - gna - te, et pu - gna - te cum an - ti quo ser -

B.
te, et pu - gna - te, et pu - gna - te cum an - ti quo ser - pen -

20

S.
e - so - te for - tes in bel - lo, in bel -

A.
ser - pen - te; e - so - te for - tes in bel - lo, in —

T.
pen - te; e - so - te for - tes in —

B.
te; e - so - te for - tes in bel -

25

S.
Io, in bel - lo et pu - gna - te, et pu - gna - te cum an -

A.
— bel - lo, in bel - lo et pu - gna - te, et pu - gna - te, et pu -

T.
bel - lo, in bel - lo et pu - gna - te, et pu - gna - te

B.
Io, in bel - lo et pu - gna - te, et pu - gna - te, et pu - gna - te

30

S.
ti quo ser - pen - te; —

A.
gna - te cum an - ti quo ser - pen - te; —

T.
cum an - ti quo ser - pen - te; et ac - ci - pi - e -

B.
cum an - ti quo ser - pen - te; et ac - ci - pi - e -

35

S.
et ac - ci - pi - e - tis gnum et ac - ci - pi - e - tis

A.
et ac - ci - pi - e - tis re - gnum et ac - ci - pi - e -

T.
tis re - gnum ac - ter - num, et ac - ci - pi - e - tis re -

B.
tis re - gnum ac - ter - num, et ac - ci - pi - e - tis re -

40

S.
et ac - ci - pi - e - tis re - gnum ac - ter -

A.
e - tis re - gnum et ac - ci - pi - e - tis re - gnum ac -

T.
gnum ac - ter - num, et ac - ci - pi - e - tis re - gnum

B.
gnum ac - ter - num, et ac - ci - pi - e - tis re - gnum

45

O bone Jesu!

Marco Antonio Ingegneri

50
S. - numm, et ac - ci - pi - e - tis re - gum ae - ter - num!
A. - ter - num, et ac - ci - pi - e - tis re - gum ae - ter - num!
T. et ac - ci - pi - e - tis re - gum ae - ter - num!
B. et ac - ci - pi - e - tis re - gum ae - ter - num!
53

55
S. Al - le - lu - ja!
A. Al - le - lu - ja!
T. Al - le - lu - ja!
B. Al - le - lu - ja!
60

65
S. Al - le - lu - ja!
A. Al - le - lu - ja!
T. Al - le - lu - ja!
B. Al - le - lu - ja!
70

9
Soprano *p* O bo - ne Je - su!
Alto *p* O bo - ne Je - su!
Tenore *p* O bo - ne Je - su!
Basso *p* O bo - ne Je - su!
17

17
S. *mf* mi - sti nos san - gui - ne Tu - o pre - ti - o - sis - si
A. *mf* mi - sti nos san - gui - ne Tu - o pre - ti - o - sis - si
T. *mf* mi - sti nos san - gui - ne Tu - o pre - ti - o - sis - si
B. *mf* mi - sti nos san - gui - ne Tu - o pre - ti - o - sis - si
20

20
S. *mf* qui - a Tu cre - a - sti nos, Tu re - de -
A. *mf* qui - a Tu cre - a - sti nos, Tu re - de -
T. *mf* qui - a Tu cre - a - sti nos, Tu re - de -
B. *mf* qui - a Tu cre - a - sti nos, Tu re - de -
23

Amicus meus

Responsorium IV quatuor vocibus

Cantus
A - mi - cus me - us - - - os - cu - li me - tra - di - dit si - - -

Altus
A - mi - cus me - us - - - os - cu - li me - tra - di - dit si - - -

Tenor
A - mi - cus me - us - - - os - cu - li me - tra - di - dit - - - si - - -

Bassus
A - mi - cus me - us - - - os - cu - li me - tra - di - dit si - - -

13

Cantus I
gro: Quem os - cu - la - tus fu - e - ro, ip - se est, te - ne - te e - um;

Cantus II
gro: Quem os - cu - la - tus fu - re - ro, ip - se est, te - ne - te e - um;

Altus
gro: Quem os - cu - la - tus fu - e - ro, ip - se est, te - ne - te e - um;

25

hoc ma - lum fe - cit si - gnum, qui - per os - cu - lum ad - im - ple - vit -

hoc ma - lum fe - cit si - gnum, qui - per os - cu - lum ad - im - ple - vit -

hoc ma - lum fe - cit si - gnum, qui - per os - cu - lum ad - im - ple - vit -

hoc ma - lum fe - cit si - gnum, qui - per os - cu - lum ad - im - ple - vit -

35

ho - mi - ci - - - di - um - - - In - - - fe - lix pne - ter - mi - sit

mi - ci - - - di - um - - - In - - - fe - lix pne - ter - mi - sit

ho - mi - ci - - - di - um - - - In - - - fe - lix pne - ter - mi - sit

pre - fi - um - sun - gui - nis, et - in - fi - ne la - que - o - se - sus - pen - dit.

pre - fi - um - sun - gui - nis, et - in - fi - ne la - que - o - se - sus - pen - dit.

pre - fi - um - sun - gui - nis, et - in - fi - ne la - que - o - se - sus - pen - dit.

pre - fi - um - sun - gui - nis, et - in - fi - ne la - que - o - se - sus - pen - dit.

62

Versus iustus vocibus

Cantus I
Bo - num e - rat e - i, bo - num e - rat e - i,

Cantus II
Bo - num e - rat e - i, bo - num e - rat e - i,

Altus
Bo - num e - rat e - i, bo - num e - rat e - i,

72

si ma - tus non fu - is - set ho - mo il - le.

si ma - tus non fu - is - set ho - mo il - le.

si ma - tus non fu - is - set ho - mo il - le.

si ma - tus non fu - is - set ho - mo il - le.

Eram quasi agnus innocens

Responsorium VII quatuor vocibus

Cantus
E - ram qua - si a - gnus in - no - cens: duc - tus

Altus
E - ram qua - si a - gnus in - no - cens: duc - tus

Tenor
E - ram qua - si a - gnus in - no - cens: duc - tus

Bassus
E - ram qua - si a - gnus in - no - cens: duc -

EN 2014-00

10
sum ad in - mo - lan - dum, et nes - ci - e - bam: con -

sum ad in - mo - lan - dum, et nes - ci - e - bam: con -

sum ad in - mo - lan - dum, et nes - ci - e - bam: con -

20
si - li - um fe - ce - runt ad - ver - sum me, di - cen - tes: -

si - li - um fe - ce - runt ad - ver - sum me, di - cen - tes: -

si - li - um fe - ce - runt ad - ver - sum me, di - cen - tes: -

si - li - um fe - ce - runt ad - ver - sum me, di - cen - tes: -

31
Ve - ni - te, mit - ta - mus li - gum in pa - nem e - jus, et

Ve - ni - te, mit - ta - mus li - gum in pa - nem e - jus, et

Ve - ni - te, mit - ta - mus li - gum in pa - nem e - jus, et

42
e - ra - da - mus e - um de ter - ra vi - ven - ti - um.

e - ra - da - mus e - um de ter - ra vi - ven - ti - um.

e - ra - da - mus e - um de ter - ra vi - ven - ti - um.

53
e - na - da - mus e - um de ter - ra vi - ven - ti - um.

e - na - da - mus e - um de ter - ra vi - ven - ti - um.

Versus tribus vocibus

52
Cantus I
Om - nes i - ni - mi - ci me - i ad - ver - sum me co -

53
Cantus II
Om - nes i - ni - mi - ci me - i ad - ver - sum me co -

Altus
Om - nes i - ni - mi - ci me - i ad - ver - sum me co -

60
gi - ta - bant ma - la mi - hi.

gi - ta - bant ma - la mi - hi.

gi - ta - bant ma - la mi - hi.

Venite militum, ut supra

Anonimo

INTERNA SETE ARDENTE

Dialogo del Christo e della Samaritana

Traito da *Il quinto libro delle Laudi Spirituali a tre et a quattro voci*
 Redatto da padre F. Soto de Langa (Gardano, Roma, 1591)
 Trascrizione di L. Mandelli

S
In - ter - na se - te ar - den - te ne l'a - sciu - ta mia lin - gua
Deh, Si - gnor, fam - mi do - mo che più se - te non ab - ba;

C
In - ter - na se - te ar - den - te ne l'a - sciu - ta mia lin - gua
Deh, Si - gnor, fam - mi do - mo che più se - te non ab - ba;

T/B
In - ter - na se - te ar - den - te ne l'a - sciu - ta mia lin - gua
Deh, Si - gnor, fam - mi do - mo che più se - te non ab - ba;

S
don - na per te s'e - sin - guai, se - te che per tuo be - ne più che per
mie fe - li - ci lab - bia sia - te a ba - guar - vi pron - te in que - sto

C
don - na per te s'e - sin - guai, se - te che per tuo be - ne più che per
mie fe - li - ci lab - bia sia - te a ba - guar - vi pron - te in que - sto

T/B
don - na per te s'e - sin - guai, se - te che per tuo be - ne più che per
mie fe - li - ci lab - bia sia - te a ba - guar - vi pron - te in que - sto

S
lun - go fa - ti - car mi vie - ne, fa - ti - car mi vien, mi vie - ne
do - gni gra - zia, e - ter - no fon - tel gra - zia, e - ter - no fon - tel

C
lun - go fa - ti - car mi vie - ne, fa - ti - car mi vien, mi vie - ne
do - gni gra - zia, e - ter - no fon - tel gra - zia, e - ter - no fon - tel

T/B
lun - go fa - ti - car mi vie - ne, fa - ti - car mi vien, mi vie - ne
do - gni gra - zia, e - ter - no fon - tel gra - zia, e - ter - no fon - tel

Anonimo (P. Francesco Soto de Langa?)

O CÔR SOAVE

Laudes de' dolori del cuor de Christo

Traito da "Il quarto libro delle Laudi a tre e quattro voci"
 Redatto da Padre Francesco Soto (Gardano, Roma, 1591)
 Trascrizione di Pippo Molino

S
O côr so - a - ve, côr del mio Si - gno - re, fe - ri - to gra - ve - men -
O côr so - a - ve, côr del mio Si - gno - re, fe - ri - to gra - ve - men -

C
O côr so - a - ve, côr del mio Si - gno - re, fe - ri - to gra - ve - men -
O côr so - a - ve, côr del mio Si - gno - re, fe - ri - to gra - ve - men -

T
O côr so - a - ve, côr del mio Si - gno - re, fe - ri - to gra - ve - men -
O côr so - a - ve, côr del mio Si - gno - re, fe - ri - to gra - ve - men -

S
te, te, non da col - tel pun - gen - te, ma da lo stral che fâb - bri -
te, te, non da col - tel pun - gen - te, ma da lo stral che fâb - bri -

C
te, te, non da col - tel pun - gen - te, ma da lo stral che fâb - bri -
te, te, non da col - tel pun - gen - te, ma da lo stral che fâb - bri -

T
te, te, non da col - tel pun - gen - te, ma da lo stral che fâb - bri -
te, te, non da col - tel pun - gen - te, ma da lo stral che fâb - bri -

S
cò l'a - mo - re, che fâb - bri - cò l'a - mo - re. Non mo - re.
cò l'a - mo - re, che fâb - bri - cò l'a - mo - re. Non mo - re.

C
cò l'a - mo - re, che fâb - bri - cò l'a - mo - re. Non mo - re.
cò l'a - mo - re, che fâb - bri - cò l'a - mo - re. Non mo - re.

T
cò l'a - mo - re, che fâb - bri - cò l'a - mo - re. Non mo - re.
cò l'a - mo - re, che fâb - bri - cò l'a - mo - re. Non mo - re.

Anonimo

STAVA A' PIE' DELLA CROCE

Tratta da "Il terzo libro delle Laudi Spirituali a tre e quattro voci"
 Redatto da Padre Francesco Soto de Langea (Gardano, Roma, 1588)

Musical score for 'STAVA A' PIE' DELLA CROCE' in G major, 3/4 time. The score is for three voices: Soprano (S), Contralto (C), and Tenore (T). The lyrics are: 'Sta - va_a' pie' del - la cro - ce on - de pen - dea_ 'i fi - glio - lo la'. The score includes a repeat sign with first and second endings. The first ending leads to the second ending, which concludes with a double bar line and repeat sign. The lyrics are: 'ma - dre_ in pian - to_ e_ in duo - lo stu - pi - da_ e sen - za vo - ce, stu - pi - da_ e sen - za vo - ce, ma - dre_ in pian - to_ e_ in duo - lo stu - pi - da_ e sen - za vo - ce, stu - pi - da_ e sen - za vo - ce.' The score is numbered 5 and 10.

S'acceso ha del suo foco

Il quarto libro delle Laudi. 3-4v. F. Soto.
 In Roma, A. Gardanum / A. & H. Donangeli, 1591
 I-Bc R.263/B [RISM 1591/3]

Musical score for 'S'acceso ha del suo foco' in G major, 3/4 time. The score is for three voices: Cantor (Cant), Alto, and Basso. The lyrics are: 'S'ac - ce - so_ hà del suo fo - co Chri - sto Gie - su_ il mio co - re Chri - sto Gie - su_ il mio co - re'. The score includes a repeat sign with first and second endings. The first ending leads to the second ending, which concludes with a double bar line and repeat sign. The lyrics are: 'co - re Co - me voi ch'al - tro_ar - do - re In me sen - so cru - del ri - tro - vi lo - co in me sen - so cru - del ri - tro - vi lo - co, cru - del ri - tro - vi lo - co in me sen - so cru - del ri - tro - vi lo - co, cru - del ri - tro - vi lo - co in me sen - so cru - del ri - tro - vi lo - co, cru - del ri - tro - vi lo - co in me sen - so cru - del ri - tro - vi lo - co'. The score is numbered 7, 8, and 15.

Fra Marc' Antonio da San Germano
CRISTO AL MORIR TENDEA

Tratta dal "Tempio Armonico della Beata Vergine"
Redatto dal Beato Padre Giovenale Ancina (Muti), Roma, 1599)
Revisione e trascrizione di don Pietro Damilano

S
Chi - sto, Cri - sto_al mo - rit ten - de - a, Chi -

C
Cri - - - sto, Cri - sto_al mo - rit ten -de - a,

B
Cri - - - sto_al mo - rit ten -de - a

sio_al mo - rit ten - de - a, ed ai più ca - ri suoi Ma - ria di - ce - a: a:
5

Chi - sto_al mo - rit ten - de - a, ed ai più ca - ri suoi Ma - ria di - ce - a: a:
5

Chi - sto_al mo - rit _____ ten - de - a, ed ai più ca - ri suoi Ma - ria di - ce - a: a:

«Or, se per trar - vi_al ciel dà l'alma e'l co - - - re
«Or, se per trar - vi_al ciel dà l'al - ma_e'l co - - - re, la - scie -
«Or, se per trar - vi_al ciel dà l'al - ma_e'l co - - - re, la - scie -

10
la - scie - re - te - lo voi, la - scie - re - te - lo voi, la - scie - re - re - te - lo voi, la - scie -
re - te - lo voi, la - scie - re - te - lo voi, la - scie - re - re - te - lo voi, la - scie -
re - te - lo voi, la - scie - re - te - lo voi, la - scie - re - re - te - lo voi, la - scie - re -
15
re - - - te - lo voi per al - tro_a - mo - - - re?»,
re - te - lo voi, la - scie - re - - - te - lo voi per al - tro_a - mo - - - re?»,
re - te - lo voi, la - scie - re - - - te - lo voi per al - tro_a - mo - - - re?».

Francesco Soto de Langa

NELL' APPARIR DEL SEMPITERNO SOLE

(Alla Madonna del Presepio in Santa Maria Maggiore di Roma)

Tratto da *Tempio armonico della Beatissima Vergine*
Roma, Niccolò Maffei, 1599
Trascrizione di L. Mandelli

Musical score for Soprano (S), Contralto (C), and Tenor/Bass (T/B) parts. The lyrics are: Nell' ap - pa - rir del sem - pi - ter - no so - le ch' a mez - za - not - te Nell' ap - pa - rir del sem - pi - ter - no so - le ch' a mez - za - not - te Nell' ap - pa - rir del sem - pi - ter - no so - le ch' a mez - za - not - te

Musical score for Soprano (S) and Tenor/Bass (T/B) parts. The lyrics are: più ri - lu - ce in - tor - no che l' al - tro non fa - ria di mez - zo - gior - no. più ri - lu - ce in - tor - no che l' al - tro non fa - ria di mez - zo - gior - no. più ri - lu - ce in - tor - no che l' al - tro non fa - ria di mez - zo - gior - no.

Versione a 4 voci

Musical score for Soprano (S), Contralto (C), Tenor (T), and Bass (B) parts. The lyrics are: Nell' ap - pa - rir del sem - pi - ter - no so - le ch' a mez - za - not - te Nell' ap - pa - rir del sem - pi - ter - no so - le ch' a mez - za - not - te Nell' ap - pa - rir del sem - pi - ter - no so - le ch' a mez - za - not - te Nell' ap - pa - rir del sem - pi - ter - no so - le ch' a mez - za - not - te

Musical score for Soprano (S), Contralto (C), Tenor (T), and Bass (B) parts. The lyrics are: più ri - lu - ce in - tor - no che l' al - tro non fa - ria di mez - zo - gior - no. più ri - lu - ce in - tor - no che l' al - tro non fa - ria di mez - zo - gior - no. più ri - lu - ce in - tor - no che l' al - tro non fa - ria di mez - zo - gior - no. più ri - lu - ce in - tor - no che l' al - tro non fa - ria di mez - zo - gior - no.

ACCETTA QUESTO PANE

(Tempo per annum)

S. (♩ = 76)

1. Ac - cet - ta que - sto pa - ne, o Pa - dre, ti pre -
 2. Ac - cet - ta an - co - ra il vi - no, o Pa - dre, do - mi - ni -
 - gnam, per - ché di - ven - ga il cor - po san - gue di - ven - ga sul - tal -
 - tar. Che no - stra sa - cri - fi - ci - o - stia gra - ti - ta - ta. te; la
 - fer - ti sia del Cri - sto, (o) o o san - ta Tri - ni - - - - - ta.
 dal tuo Cri - sto, (o) o o san - ta Tri - ni - - - - - ta.

12. Allein Gott in der Höh' sei Ehr' (B. A. 39, No 8)
 Valentin Schumannschos G. B. 1310 (1820)

Al - lein Gott in der Höh' sei Ehr' und Dank für sei - ne Gna - de,
 da - rum, dass nun und nimmermehr uns rüh - ren kann kein Schk - del

Ein Wohl - ge - fall'n Gott an uns hat, nun ist Gross Fried ohn'

Un - ter - lass, all' Feind' hat nun ein En - de -
 (A. Str.)

Mic. Deetman 1828

30. Aus meines Herzens Grunde (B. A. 39, No 11)
 Dav. Wolder 1838

Aus mei - nes Her - zens Grün - de sag' ich dir Lob und Dank,
 in die - ser Mor - gen - stun - de dar' zu mein Le - be - lang,

o Gott in dei - nem Thron, dir zu Lob, Preis und Eh - ren, durch

Chri - stum, un - sern Her - ren, dein' ein - ge - bor - nen Sohn.
 (7 str.)

O Caput Cruentatum

Johann Sebastian Bach

1

Soprano
O - Ca - put cru - en - ta - tum spi - na - rum - a - ci - e, tam - du - re ver - be -
Su - pre - mae Ma - je - sta - ti hoc sa - cri - fi - ci - um of - fe - ri - mus pro -

Contralto
O - Ca - put cru - en - ta - tum spi - na - rum - a - ci - e, tam - du - re ver - be -
Su - pre - mae Ma - je - sta - ti hoc sa - cri - fi - ci - um of - fe - ri - mus pro -

Tenore
O - Ca - put cru - en - ta - tum spi - na - rum - a - ci - e, tam - du - re ver - be -
Su - pre - mae Ma - je - sta - ti hoc sa - cri - fi - ci - um of - fe - ri - mus pro -

Basso
O - Ca - put cru - en - ta - tum spi - na - rum - a - ci - e, tam - du - re ver - be -
Su - pre - mae Ma - je - sta - ti hoc sa - cri - fi - ci - um of - fe - ri - mus pro -

S
ra - tum or - ba - tum spe - ci - e, Fac - ul - cru - de - le - ser - tum cor - me - um lu - ge -
stra - ti do - lo - re cri - mi - num. A - gni mo - tus cru - o - re dat - Pa - ter - ve - ni -

C
ra - tum or - ba - tum spe - ci - e, Fac - ul - cru - de - le - ser - tum cor - me - um lu - ge -
stra - ti do - lo - re cri - mi - num. A - gni mo - tus cru - o - re dat - Pa - ter - ve - ni -

T
ra - tum or - ba - tum spe - ci - e, Fac - ul - cru - de - le - ser - tum cor - me - um lu - ge -
stra - ti do - lo - re cri - mi - num. A - gni mo - tus cru - o - re dat - Pa - ter - ve - ni -

B
ra - tum or - ba - tum spe - ci - e, Fac - ul - cru - de - le - ser - tum cor - me - um lu - ge -
stra - ti do - lo - re cri - mi - num. A - gni mo - tus cru - o - re dat - Pa - ter - ve - ni -

S
at am tu - ae ve - niae cer - tum in - di - cium ha - be - at.
at am tu - ae ve - niae cer - tum in - di - cium ha - be - at.

C
at am tu - ae ve - niae cer - tum in - di - cium ha - be - at.
at am tu - ae ve - niae cer - tum in - di - cium ha - be - at.

T
at am tu - ae ve - niae cer - tum in - di - cium ha - be - at.
at am tu - ae ve - niae cer - tum in - di - cium ha - be - at.

B
at am tu - ae ve - niae cer - tum in - di - cium ha - be - at.
at am tu - ae ve - niae cer - tum in - di - cium ha - be - at.

Johann Sebastian Bach PER TE, SIGNORE

Tratto dal 371 *Covalli* (BWV 374)
Teso italiano di Marenca Campi

S
Per Te, Si - gno - re, pa - dro - ne po - ten - te e glo - rio - so,
tut - ta la ter - ra sia co - me un u - ni - co co - ro

C
Per Te, Si - gno - re, pa - dro - ne po - ten - te e glo - rio - so,
tut - ta la ter - ra sia co - me un u - ni - co co - ro

T
Per Te, Si - gno - re, pa - dro - ne po - ten - te e glo - rio - so,
tut - ta la ter - ra sia co - me un u - ni - co co - ro

B
Per Te, Si - gno - re, pa - dro - ne po - ten - te e glo - rio - so,
tut - ta la ter - ra sia co - me un u - ni - co co - ro

S
di lo - de - a Te. È il no - stro can - to per Te: vo - ce del po - po - lo tu - o.

C
di lo - de - a Te. È il no - stro can - to per Te: vo - ce del po - po - lo tu - o.

T
di lo - de - a Te. È il no - stro can - to per Te: vo - ce del po - po - lo tu - o.

B
di lo - de - a Te. È il no - stro can - to per Te: vo - ce del po - po - lo tu - o.

370. Wer nur den lieben Gott lässt walten

(Trauungscharte. Gott ist unsere Zuversicht. B. A. 13 I, 144)

G. Neumann 1810

G. Neumann 1810

367. Wer nur den lieben Gott lässt walten. (B. A. 39 Nr. 180)

Georg Neumann 1810

G. Neumann 1810

371. Wer nur den lieben Gott lässt walten

(Cont. 179. Siehe an, dass deine Gottesfurcht nicht Kechelot sei. B. A. 53, 292)

G. Neumann 1810

Christoph Tietze 1863

368. Wer nur den lieben Gott lässt walten

(Cont. 88. Siehe, ich will viel Fischer aussenden. B. A. 20 I, 178)

G. Neumann 1810

G. Neumann 1810

Albert Schweitzer
DISCENDI SANTO SPIRITO

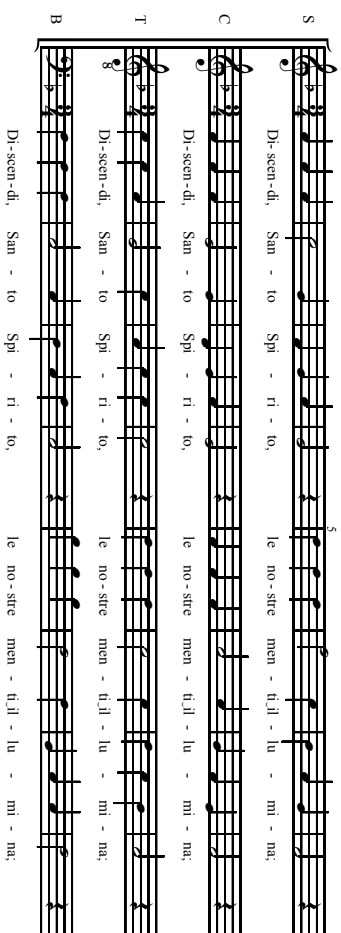
Testo originale: *O salutaris Hostia*
Traduzione italiana del *Fenit Cremona*: *Spiritus di E. Calbiati*

S
Di-scen-di, San - to Spi - ri - to, le no - stre men - ti, Ji - lu - mi - na;

C
Di-scen-di, San - to Spi - ri - to, le no - stre men - ti, Ji - lu - mi - na;

T
Di-scen-di, San - to Spi - ri - to, le no - stre men - ti, Ji - lu - mi - na;

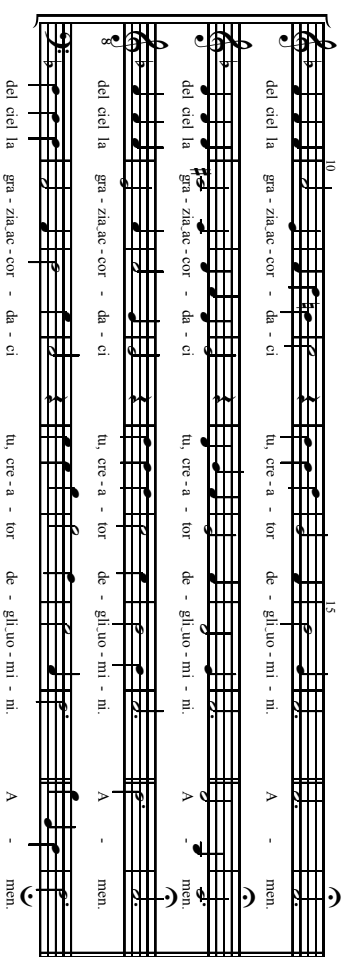
B
Di-scen-di, San - to Spi - ri - to, le no - stre men - ti, Ji - lu - mi - na;



del ciel la gra - zia ac - cor - da - ci tu, cre - a - tor de - gli uo - mi - ni. A - men.

del ciel la gra - zia ac - cor - da - ci tu, cre - a - tor de - gli uo - mi - ni. A - men.

del ciel la gra - zia ac - cor - da - ci tu, cre - a - tor de - gli uo - mi - ni. A - men.



Elenco delle figure

1.1	Le note rappresentate su due pentagrammi, con le chiavi più utilizzate.	3
1.2	Numerazione delle ottave sull'estensione normale di un pianoforte.	4
1.3	Le scale immediatamente osservabili dalla figura 1.1.	4
1.4	Le scale di La minore armonica e melodica.	5
1.5	Frammento di <i>Fra Martino</i> riportato in diverse tonalità. Si noti la diversa armatura di chiave di ogni esempio.	6
1.6	Esempi di alcuni tra i ritmi più utilizzati. In ognuna delle battute indicate è rappresentata la quantità di valori ritmici di riferimento che essa può contenere.	7
1.7	Tipologie di triadi.	8
1.8	Triadi costruite sui gradi della scala di Do maggiore, utilizzando le note presenti nella scala.	8
1.9	Esempi di disposizione di una triade di Fa maggiore: in ordine, allo stato fondamentale, in primo rivolto e in secondo rivolto.	9
1.10	Esempio di armonizzazione su linea di basso.	9
1.11	Cinque differenti gradi di indipendenza tra le voci.	10
1.12	L'estensione vocale di soprano, contralto, tenore e basso.	11
1.13	Esempio di raddoppio in caso di accordo con la sensibile.	12
1.14	I movimenti per intervalli più ampi della terza necessitano di essere seguiti da un cambio di movimento.	12
1.15	Le classi di movimento per due voci.	13
1.16	Un esempio di incrocio delle parti, a sinistra, e uno di sovrapposizione all'unisono, a destra.	13
1.17	Esempi di <i>organa</i> da <i>Musica enchiriadis</i>	15
1.18	Esempi di <i>organa</i> melismatici.	16
1.19	<i>Sicut cervus</i> , Giovanni Pierluigi da Palestrina (1525-1594), battute 1-7.	19
1.20	<i>Eram quasi agnus</i> , Tomás Luis de Victoria (1548-1611), battute 40-49.	20
1.21	<i>Giù per la mala via</i> , tratto dal <i>Terzo libro delle laudi spirituali stampate ad istantia delli Reverendi Padri della Congregazione dell'Oratorio</i> , del 1577.	21
1.22	Brano tratto da <i>Euridice</i> , melodramma musicato da Jacopo Peri (1561-1633).	23
1.23	<i>Wer nur den lieben Gott läßt walten</i> (<i>Se Tu m'accogli</i>), Johann Sebastian Bach (1685-1750), battute 1-5.	24
2.1	Lo spazio lineare dei pitch e quello delle classi di pitch.	27

2.2	I <i>gluing diagram</i> del toro \mathbb{T}^2 , del nastro di Möbius M , del piano proiettivo \mathbb{RP}^2 e della bottiglia di Klein K	28
2.3	Lo spazio \mathbb{A}_3	29
2.4	Il tavolo da biliardo orbifold è generato dal gruppo di isometrie di \mathbb{R}^2 che riflettono un rettangolo lungo i suoi quattro lati.	30
2.5	Un esempio di voice leading a 5 voci.	32
2.6	Voice leading e la corrispondente geodetica definita a tratti.	35
2.7	I quattro possibili voice leading tra le note dello spartito rappresentato sopra. Si osservi la natura simmetrica dei cammini rispetto alla linea tratteggiata ($y = x$).	36
2.8	I cammini di voice leading nello spazio di classi dei pitch \mathbb{T}^2 e nel suo relativo spazio degli accordi \mathbb{A}_2	37
2.9	Esempi di voice crossing in cui le voci si incrociano passando per un unisono.	39
2.10	<i>Discendi Santo Spirito</i> , Albert Schweitzer (1875-1965), battute 1-8.	42
2.11	Le proiezioni tridimensionali delle nuvole di punti create dai vettori di complessità del voice leading del frammento di <i>Discendi Santo Spirito</i>	43
2.12	Riduzione di voci ritmicamente indipendenti a un contrappunto della prima specie.	44
2.13	<i>Estote fortes</i> , Luca Marenzio (1553-1599), battute 1-6.	45
2.14	Proiezioni tridimensionali della nuvola di punti 6-dimensionali che rappresenta la complessità dell' <i>Estote fortes</i>	46
2.15	Dynamic Time Warping tra due serie di osservazioni.	47
2.16	Cammino di warping ottimale su <i>Estote fortes</i> e <i>Discendi, Santo Spirito</i>	48
2.17	Dendrogramma che riporta la dissomiglianza tra dati.	49
2.18	Dendrogramma che rappresenta il clustering tra i quattro brani polifonici analizzati in precedenza.	51
3.1	Esempio di semplificazione di una coppia di semicrome.	56
3.2	Esempio di suddivisione locale e globale; il frammento originale è tratto da <i>In flagellis</i> , di Josquin Desprez (1440-1521).	56
3.3	Approssimazione della terzina di <i>Absalon, fili mi</i> , battuta 47.	56
3.4	Cammino di warping ottimale sulle armonizzazioni a tre e quattro voci di <i>Nel-l'apparir del sempiterno sole</i>	64
3.5	Inizio di ogni armonizzazione di <i>Se Tu m'accogli</i>	65
3.6	Variazioni del dendrogramma relativo alla norma euclidea, calcolato con linkage completo, da un clustering su 25 brani a uno su 40 brani.	67
3.7	Dendrogramma calcolato con linkage completo relativo alla norma euclidea.	69
3.8	Dendrogramma calcolato con linkage completo relativo alla norma 1.	71
3.9	Dendrogramma calcolato con linkage completo relativo alla norma 3.	73
3.10	Dendrogramma calcolato con linkage completo relativo alla norma 4.	74
3.11	Dendrogramma calcolato con linkage completo relativo alla norma 5.	76
3.12	Dendrogramma calcolato con linkage completo relativo alla norma 6.	77
3.13	Dendrogramma calcolato con linkage completo relativo alla norma 7.	78
3.14	Dendrogramma calcolato con linkage completo relativo alla norma infinito.	79

3.15	Dendrogramma calcolato con linkage singolo relativo alla norma euclidea.	81
3.16	Dendrogramma calcolato con linkage singolo relativo alla norma 1.	82
3.17	Dendrogramma calcolato con linkage singolo relativo alla norma 3.	84
3.18	Dendrogramma calcolato con linkage singolo relativo alla norma 4.	85
3.19	Dendrogramma calcolato con linkage singolo relativo alla norma 5.	86
3.20	Dendrogramma calcolato con linkage singolo relativo alla norma 6.	87
3.21	Dendrogramma calcolato con linkage singolo relativo alla norma 7.	88
3.22	Dendrogramma calcolato con linkage singolo relativo alla norma infinito.	89
3.23	Dendrogramma calcolato con linkage medio relativo alla norma euclidea.	91
3.24	Dendrogramma calcolato con linkage medio relativo alla norma 1.	92
3.25	Dendrogramma calcolato con linkage medio relativo alla norma 3.	94
3.26	Dendrogramma calcolato con linkage medio relativo alla norma 4.	95
3.27	Dendrogramma calcolato con linkage medio relativo alla norma 5.	97
3.28	Dendrogramma calcolato con linkage medio relativo alla norma 6.	98
3.29	Dendrogramma calcolato con linkage medio relativo alla norma 7.	99
3.30	Dendrogramma calcolato con linkage medio relativo alla norma infinito.	100
3.31	Dendrogramma calcolato con linkage pesato relativo alla norma euclidea.	102
3.32	Dendrogramma calcolato con linkage pesato relativo alla norma 1.	103
3.33	Dendrogramma calcolato con linkage pesato relativo alla norma 3.	105
3.34	Dendrogramma calcolato con linkage pesato relativo alla norma 4.	106
3.35	Dendrogramma calcolato con linkage pesato relativo alla norma 5.	107
3.36	Dendrogramma calcolato con linkage pesato relativo alla norma 6.	109
3.37	Dendrogramma calcolato con linkage pesato relativo alla norma 7.	110
3.38	Dendrogramma calcolato con linkage pesato relativo alla norma infinito.	111

Elenco delle tabelle

1.1	Nomenclatura delle note, in alto è riportata quella italiana, in basso quella anglosassone.	2
1.2	I valori ritmici usati più frequentemente.	7
2.1	Tabella che associa ogni nota al pitch corrispondente, seguendo la convenzione sulle ottave utilizzata in questa tesi e indicata nella figura 1.2 a pagina 4.	26
2.2	Vettori di complessità del frammento analizzato e la loro occorrenza.	42
2.3	Vettori di complessità del brano e la loro occorrenza.	46
2.4	La matrice delle distanze DTW per le tre serie temporali di vettori di complessità.	48
2.5	Matrice delle distanze DTW tra i brani analizzati in questi esempi.	50
3.1	Elenco dei brani analizzati.	59
3.2	Risultati della valutazione del peso dei valori ritmici.	61
3.3	Matrice delle distanze DTW tra le armonizzazioni di <i>Se Tu m'accogli</i> calcolate con la norma euclidea.	65
A.1	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma euclidea, colonne 1-12.	116
A.2	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma euclidea, colonne 13-24.	117
A.3	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma euclidea, colonne 25-36.	118
A.4	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma euclidea, colonne 37-48.	119
A.5	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma euclidea, colonne 49-60.	120
A.6	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 1, colonne 1-12.	121
A.7	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 1, colonne 13-24.	122
A.8	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 1, colonne 25-36.	123
A.9	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 1, colonne 37-48.	124
A.10	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 1, colonne 49-60.	125
A.11	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 3, colonne 1-12.	126
A.12	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 3, colonne 13-24.	127
A.13	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 3, colonne 25-36.	128
A.14	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 3, colonne 37-48.	129
A.15	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 3, colonne 49-60.	130
A.16	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 4, colonne 1-12.	131
A.17	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 4, colonne 13-24.	132
A.18	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 4, colonne 25-36.	133

A.19	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 4, colonne 37-48.	134
A.20	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 4, colonne 49-60.	135
A.21	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 5, colonne 1-12.	136
A.22	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 5, colonne 13-24.	137
A.23	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 5, colonne 25-36.	138
A.24	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 5, colonne 37-48.	139
A.25	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 5, colonne 49-60.	140
A.26	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 6, colonne 1-12.	141
A.27	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 6, colonne 13-24.	142
A.28	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 6, colonne 25-36.	143
A.29	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 6, colonne 37-48.	144
A.30	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 6, colonne 49-60.	145
A.31	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 7, colonne 1-12.	146
A.32	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 7, colonne 13-24.	147
A.33	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 7, colonne 25-36.	148
A.34	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 7, colonne 37-48.	149
A.35	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma 7, colonne 49-60.	150
A.36	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma infinito, colonne 1-12.	151
A.37	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma infinito, colonne 13-24.	152
A.38	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma infinito, colonne 25-36.	153
A.39	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma infinito, colonne 37-48.	154
A.40	Matrice delle distanze DTW calcolate con la norma infinito, colonne 49-60.	155
B.1	Elenco dei pacchetti Python utilizzati nella sperimentazione.	157

Bibliografia

- Aldwell, Edward e Carl Schachter (2002). *Harmony and Voice Leading, 3rd edition*. Schirmer Books.
- Apel, Willi (1958). *Gregorian Chant, vol. 601*. Indiana University Press.
- Bach, Johann Sebastian e Bernard Friedrich Richter (curatore) (1912). *389 Choralgesänge für vierstimmigen gemischten Chor*. Breitkopf und Härtel. URL: [http://imslp.org/wiki/389_Choralges%C3%A4nge_\(Bach%2C_Johann_Sebastian\)](http://imslp.org/wiki/389_Choralges%C3%A4nge_(Bach%2C_Johann_Sebastian)).
- Bar-Joseph, Zif, David K. Gifford e Tommi S. Jaakkola (2001). «Fast optimal leaf ordering for hierarchical clustering». In: *Bioinformatics* 17.suppl.1, pp. 22–29.
- Bergomi, Mattia G. (2015). «Dynamical and Topological Tools for (Modern) Music Analysis». Tesi di dottorato. Université Pierre et Marie Curie-Paris VI.
- Bergomi, Mattia G., Riccardo D. Jadanza e Alessandro Portaluri (2013). «Modelli geometrici e dinamici per spazi musicali». In: *Conferenze e Seminari dell'Associazione Subalpina Mathesis 2014*, pp. 179–196.
- (2014). «Una geometrizzazione dello spazio degli accordi». In: *Ithaca: Viaggio nella Scienza 2014.3*, pp. 33–46.
- (2015). «A mathematical model for voice leading and its complexity». In: *arXiv preprint arXiv:1508.05833*.
- Boland, Marguerite e John Link (2012). *Elliott Carter Studies*. Cambridge University Press.
- Burgoyne, John Ashley, Ichiro Fujinaga e J. Stephen Downie (2016). «Music information retrieval». In: *A new companion to digital humanities*, pp. 213–228.
- Callender, Clifton, Ian Quinn e Dmitri Tymoczko (2008). «Generalized Voice-Leading Spaces». In: *Science* 320, pp. 346–348.
- Chanan, Michael (1994). *Musica practica: The social practice of Western music from Gregorian chant to postmodernism*. Verso.
- Comotti, Giovanni (1996). *La musica nella cultura greca e romana, seconda edizione*. Torino: EDT.
- d'Arezzo, Guido, Marie-Noël Colette e Jean-Christophe Jolivet (1993). *Micrologus*. Ed. IPMC.
- Dionisi, Renato (1982). *Lezioni di armonia complementare*. Milano: Edizioni Curci.
- Dionisi, Renato, Massimo Toffoletti e Gian Luigi Dardo (1993). *Studi sul corale: Storia, tecnica, analisi, esercitazioni*. Milano: Zanibon.
- Erickson, Raymon e Claude Victor Palisca (1995). *Musica Enchiriadis And Scolica Enchiriadis*. Yale University Press.
- Esling, Philippe (2012). «Multiobjective time series matching and classification». Tesi di dottorato. Paris 6. URL: <http://www.theses.fr/2012PA066704>.
- Ferguson, Kitty (2009). *La musica di Pitagora*. Varese: Longanesi.

- Gasparini, Emanuele (2009). «Tra musica e architettura: il *Nuper rosarum flores* di Dufay e la brunelleschiana cupola di Santa Maria del Fiore». In: *Musica/Realtà* 88, pp. 29–59.
- Hahn, Rasmus et al. (2010). «Faceted Wikipedia search». In: *International Conference on Business Information Systems*. Springer, pp. 1–11.
- Hatcher, Allen (2002). *Algebraic topology*. Cambridge University Press.
- Horn, Roger A. e Charles R. Johnson (1991). *Topics in matrix analysis*. Cambridge University Press.
- Hughes, Anselm e Gerald Abraham (1960). *The New Oxford History of Music*. Vol. III - Ars Nova and the Renaissance (1300-1540). Oxford University Press.
- Jain, Anil K. e Richard C. Dubes (1988). *Algorithms for Clustering Data*. New Jersey: Prentice Hall.
- Jeppesen, Knud (1972). *Compendio di una storia della teoria del contrappunto*. Bologna: A.M.I.S.
- Langfelder, Peter, Bin Zhang e Steve Horvath (2008). «Defining clusters from a hierarchical cluster tree: the Dynamic Tree Cut package for R». In: *Bioinformatics* 24.5, pp. 719–720.
- Martinez, Wendy L., Angel R. Martinez e Jeffrey Solka (2010). *Exploratory data analysis with MATLAB*. CRC Press.
- Mazzi, Maria Chiara (2008). *Il racconto della musica: dal Gregoriano a Debussy*. Bologna: Paredes Edizioni.
- Notley, Margareth (2007). *Lateness and Brahms: music and culture in the twilight of Viennese liberalism*. USA: Oxford University Press.
- Ott, Niels (2009). *Visualization of Hierarchical Clustering: Graph Types and Software Tools*. GRIN Verlag.
- Proske, Carl (1854). *Musica Divina*. Vol. II - Liber motetorum. URL: [http://imslp.org/wiki/Musica_Divina_\(Proske,_Carl\)](http://imslp.org/wiki/Musica_Divina_(Proske,_Carl)).
- Prout, Ebenezer (2012). *The orchestra: orchestral techniques and combinations*. Courier Dover Publications.
- Quaranta, Elena (1998). *Oltre San Marco. Organizzazione e prassi della musica nelle chiese di Venezia nel Rinascimento*. Firenze: Olschki.
- Russo, William (1997). *Jazz composition and orchestration*. University of Chicago Press.
- Scipy Community, cur. (2017). *Linkage Reference Guide*. URL: <http://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.cluster.hierarchy.linkage.html>.
- Senin, Pavel (2008). *Dynamic time warping algorithm review*. Report. University of Hawaii.
- Slavich, Leone (2010). «Strutture algebriche e topologiche nella musica del ventesimo secolo». Tesi di laurea specialistica. Università di Pisa.
- Surian, Elvidio (2010). *Manuale di Storia della Musica*. Vol. II - Dalla musica strumentale del Cinquecento al “periodo classico”. Milano: Rugginenti.
- (2012). *Manuale di Storia della Musica*. Vol. I - Dalle origini alla musica vocale del Cinquecento. Milano: Rugginenti.
- Sussman, Richard e Michael Abene (2012). *Jazz composition and arranging in the digital age*. Oxford University Press.
- Thurston, William P. (2002). *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*. Electronic version 1.1. URL: <http://library.msri.org/nonmsri/gt3m>.

- Trachtenberg, Marvin (2001). «Architecture and Music Reunited: A New Reading of Dufay's *Nuper Rosarum Flores* and the Cathedral of Florence». In: *Renaissance Quarterly* 54.3, pp. 740–775.
- Tymoczko, Dmitri (2006). «The geometry of musical chords». In: *Science* 313, pp. 72–74.
- (2008). «Scale theory, serial theory and voice leading». In: *Music Analysis* 27.1, pp. 1–49.
- (2011). *A geometry of music: harmony and counterpoint in the extended common practice*. Oxford University Press.
- Vincent, John (1951). *The diatonic modes in modern music*. Vol. 4. Mills Music by arrangement with the University of California Press Berkeley.
- Warren, Charles W. (1973). «Brunelleschi's Dome and Dufay's Motet». In: *The Musical Quarterly* 59.1, pp. 92–105.
- Wright, Craig (1994). «Dufay's *Nuper rosarum flores*, King Solomon's Temple, and the Veneration of the Virgin». In: *Journal of the American Musicological Society* 47.3, pp. 395–441.