ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Matematica

RICERCA DELLE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO PER SISTEMI MECCANICI: METODO DELLE REAZIONI VINCOLARI E PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

Tesi di Laurea in Fisica Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
EMANUELA CALICETI

Presentata da:
GIADA TESTA

II Sessione
Anno Accademico 2009/2010

A Veronica . . .

Introduzione

Questa tesi tratta della ricerca delle condizioni di equilibrio di un sistema meccanico analizzando due diversi metodi: metodo delle reazioni vincolari e principio dei lavori virtuali. In particolare, uno degli obiettivi di questa analisi è mettere in evidenza le differenze tra i due metodi.

Il primo capitolo prevede un'introduzione relativa alle nozioni di base della statica in cui vengono definiti i concetti necessari alla trattazione successiva. Così ad esempio, vengono introdotte le nozioni di grado di libertà di un sistema, di parametri lagrangiani, di vincoli, di reazione vincolare e di forze attive, di sistemi di forze e di spostamenti infinitesimi dei punti.

Nel secondo capitolo vengono illustrate le condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio di un punto materiale e dei corpi rigidi e viene analizzato il metodo delle reazioni vincolari che permette di determinare le configurazioni di equilibrio e le reazioni vincolari in corrispondenza di tali configurazioni. Successivamente si sono analizzati alcuni casi particolari in modo esplicito come, ad esempio, quello di un punto appoggiato su una superficie, di un punto obbligato a descrivere una determinata linea, di un corpo rigido con un punto o con un asse fisso.

Il terzo capitolo si concentra sull'analisi del principio dei lavori virtuali per le forze attive, che offre un metodo anch'esso finalizzato allo studio delle configurazioni di equilibrio. La notevole importanza di questo metodo è data dal fatto che si può procedere alla ricerca delle configurazioni di equilibrio senza dover introdurre le reazioni vincolari che sono generalmente incognite. Successivamente sono stati ripresi gli esempi studiati nel capitolo

precedente e sono stati rianalizzati utilizzando questo metodo, evidenziando come gli stessi risultati possono essere ottenuti in modo più diretto, ignorando le reazioni vincolari. In un ultimo paragrafo è stato enunciato il principio dei lavori virtuali per le reazioni vincolari che vale in ambito molto più generale di quello per le forze attive, non solo nel contesto della statica, e si è dimostrato come dal principio dei lavori virtuali per le reazioni vincolari discenda quello per le forze attive.
Per la stesura di questa tesi si è fatto riferimento a più testi indicati nella bibliografia [1, 2, 3], ma in particolare al trattato di Dario Graffi [1], al quale si rimanda il lettore per qualunque ulteriore approfondimento sull'argomento.

Indice

Capitolo 1

Nozioni generali

1.1 Forze attive e reazioni vincolari

Un punto materiale è un corpo o una porzione di corpo di estensione così piccola da poterla considerare, nei calcoli, come un punto, senza però prescindere dalla materia di cui è formato. Il vettore posizione del punto materiale P ad ogni istante t sarà detta configurazione del punto $P(t)$.
Un corpo rigido è un sistema materiale costituito da infiniti punti materiali che, di fronte a qualsiasi sollecitazione ed in qualsiasi condizione di moto o quiete, si comporti come assolutamente rigido tale che si conservi inalterata la distanza tra due suoi punti qualsiasi. Diremo che un sistema meccanico, cioè un insieme di punti materiali, ha n gradi di libertà quando si può rappresentare la sua configurazione in ogni istante mediante n parametri indipendenti. Questi parametri, che indicheremo con $q_1, q_2, ..., q_n$, si chiamano *parametri lagrangiani*. I parametri lagrangiani possono essere scelti in infiniti modi a seconda del problema che si sta trattando. Un punto materiale libero, ad esempio, ha 3 gradi di libertà e i 3 parametri lagrangiani possono essere rappresentati per esempio dalle coordinate cartesiane o da quelle polari.
I corpi ed i sistemi di corpi si dividono in:

- liberi: quando si può passare da una configurazione ad ogni altra vicina geometricamente possibile

- vincolati: quando esiste un configurazione vicina a cui il sistema non può passare.

Il dispositivo che impedisce il passaggio a una configurazione vicina si dice *vincolo*. Se il vincolo è dovuto a punti interni al sistema meccanico è detto *interno*, altrimenti *esterno*.
Considerando un sistema vincolato è molto importante il seguente postulato:

Postulato 1.1 (Postulato delle reazioni vincolari)**.** *Senza alterare la quiete o il moto di un corpo o di un sistema di corpi, si possono sopprimere alcuni o tutti i vincoli che agiscono sul corpo purchè si applichino al corpo opportune forze dette reazioni vincolari.*

Ogni corpo o punto materiale vincolato può, dunque, essere considerato libero purchè si applichino ad esso tutte le reazioni vincolari.
Le forze si possono, quindi, classificare in:

- reazioni vincolari: dovute all'azione dei vincoli

- forze attive: tutte le altre.

Suddividiamo, ora, gli spostamenti infinitesimi di un punto P in *consentiti* e *proibiti*: uno spostamento può essere proibito a causa della presenza di vincoli, altrimenti si dice consentito. Gli spostamenti consentiti, a loro volta, possono essere divisi in:

- reali: uno spostamento si dice reale se avviene realmente e porta il punto P da una configurazione P_0 ad un'altra P_1. Tale spostamento si indica con dP

- virtuali: si dice virtuale uno spostamento fittizio, che si immagina possa avvenire e pertanto si può pensare che avvenga in un tempo nullo con velocità infinita. Tale spostamento si indica con δP.

Gli spostamenti consentiti possono essere suddivisi in *invertibili*, se esiste lo spostamento opposto ($-dP$ o $-\delta P$), o *non invertibili* in caso contrario. Gli spostamenti proibiti, invece, si dividono in:

- totalmente proibiti: se il punto P verrebbe portato dalla configurazione P_0 alla configurazione P_1 alla quale non ci si può avvicinare in alcun modo

- parzialmente proibito: in caso contrario

Considerando un corpo rigido, ogni suo spostamento virtuale è la somma di una traslazione infinitesima e una rotazione infinitesima. Dunque, lo spostamento virtuale δP di un punto del corpo rigido si può esperimere con:

$$\delta P = \delta O_1 \ + \ \delta\theta\vec{a} \times (P - O_1) \tag{1.1}$$

dove O_1 è un punto del corpo, δO_1 il suo spostamento virtuale, $\delta\theta\vec{a}$ il vettore infinitesimo che definisce la rotazione del corpo.
Mediante queste osservazioni, risulta abbastanza intuitivo che, in assenza di attrito, la reazione vincolare applicata in un punto ha direzione e verso opposto rispetto ad uno spostamento totalmente proibito in quel punto. Questa considerazione permette di formalizzare la nozione di vincolo liscio. Un vincolo si dice *liscio* o privo di attrito se è in grado di esplicare un'azione pari a quella di una sola reazione vincolare avente la stessa direzione e il verso opposto di uno spostamento totalmente proibito. Ricordiamo, inoltre, che una forza è un vettore applicato rappresentato da una coppia $(\vec{F}, P)$, dove $\vec{F}$ è il vettore della forza e P è il punto di applicazione della forza stessa.
Un altro postulato di notevole importanza è il *principio di azione e reazione*:

Postulato 1.2 (principio di azione e reazione)**.** *Se su un punto A agisce una forza dovuta ad un altro punto B, allora A esercita una forza uguale e contraria su B, avente la stessa linea d'azione, che è dunque la retta AB.*

Segue che ogni forza interna (sia reazione vincolare che forza attiva) si può scindere in un certo numero di sistemi di due forze uguali e opposte con la stessa linea d'azione.

1.2 Sistemi di forze

Si abbia un sistema di forze $\vec{F}_1,\ \vec{F}_2,\ ..., \vec{F}_N$ applicate rispettivamente nei punti $A_1,\ A_2,\ ..., A_N$. Chiameremo *vettore risultante* il vettore $\vec{F}$ somma dei vettori $\vec{F}_1,\ \vec{F}_2,\ ..., \vec{F}_N$, ossia:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_N = \sum_{s=1}^{N} \vec{F}_s \tag{1.2}$$

Data una forza $\vec{F}$ applicata nel punto A, diremo *momento di $\vec{F}$ rispetto al punto O* il vettore:

$$\vec{\Omega}(O) = \vec{F} \times (O - A) \tag{1.3}$$

Indicando con α l'angolo fra $O - A$ e $\vec{F}$, si ha che il modulo del momento vale:

$$\Omega(O) = FAO \sin\alpha = Fd$$

essendo d la distanza di O dalla linea d'azione di $\vec{F}$.

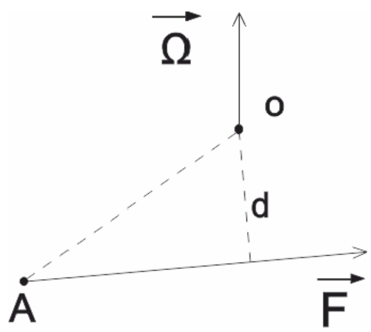

Figura 1.1: Momento di una forza rispetto ad O

Quindi il momento di una forza $\vec{F}$, rispetto a un punto O, è un vettore che ha per modulo il prodotto del modulo di $\vec{F}$ per la distanza tra O e la linea di azione di $\vec{F}$; direzione normale al piano di questa linea e verso tale che un osservatore posto nel punto O nel senso del momento veda la forza andare dalla sua destra alla sua sinistra.

Dato un sistema di forze $\vec{F}_1,\ \vec{F}_2,\ ..., \vec{F}_N$ applicate rispettivamente nei punti $A_1,\ A_2,\ ..., A_N$, chiameremo *momento risultante* $\vec{\Omega}$ del sistema di forze rispetto al punto O, la somma dei momenti $\vec{\Omega}_1(O),\ \vec{\Omega}_2(O),\ ...,\ \vec{\Omega}_N(O)$ rispetto ad O delle singole forze del sistema, ossia:

$$\vec{\Omega}(O) = \vec{\Omega}_1(O) + ... + \vec{\Omega}_N(O) = \vec{F}_1 \times (O - A_1) + ... + \vec{F}_N \times (O - A_N) \quad (1.4)$$

Il momento risultante rispetto ad O di una forza cambia, in generale, al variare di questo punto; è dunque utile la relazione che vi è tra i momenti $\vec{\Omega}$ e $\vec{\Omega}_1$ del sistema rispetto a due punti O e O_1. Si ha subito:

$$\vec{\Omega}_1(O_1) \ = \ \vec{F}_1 \times (O_1 - A_1) \ + \ \vec{F}_2 \times (O_1 - A_2) \ + \ ... \ + \ \vec{F}_N \times (O_1 - A_N)$$

e, aggiungendo e togliendo O in ogni parentesi a secondo membro, si ha:

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}_1(O_1) \ &= \ \vec{F}_1 \times (O_1 - O + O - A_1) \ + \ ... \ + \ \vec{F}_N \times (O_1 - O + O - A_N) = \\ &= (\vec{F}_1 + ... + \vec{F}_N) \times (O_1 - O) + \vec{F}_1 \times (O - A_1) + ... + \vec{F}_N \times (O - A_N). \end{aligned}$$

Applicando la (1.2) e la (1.4) si ha:

$$\vec{\Omega}_1(O_1) = \vec{\Omega}(O) + \vec{F} \times (O_1 - O) \quad (1.5)$$

Il momento risultante è uguale per tutti i punti dello spazio solo quando il termine $\vec{F} \times (O_1 - O)$ è nullo, cioè quando $\vec{F} = 0$. Dunque l'annullarsi del vettore risultante è condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema di forze abbia ugual momento rispetto a tutti i punti dello spazio.
Supponiamo, ora, che tutte le forze considerate siano complanari e definiamo *momento statico* di una forza $\vec{F}$ applicata nel punto A rispetto ad O l'espressione:

$$N = \pm Fd \tag{1.6}$$

dove d rappresenta la distanza tra A e O.
Ora, se indichiamo con $\vec{k}$ un vettore unitario normale al piano e diretto verso l'osservatore, $\vec{\Omega}$ e $N\vec{k}$ hanno uguale modulo, direzione e verso, cioè:

$$\vec{\Omega}(O) = N\vec{k}$$

Se poi si considera un sistema di forze complanari, si ha che

$$\vec{\Omega}(O) = (N_1 + N_2 + ... + N_N)\ \vec{k} \tag{1.7}$$

dove $N_1, ..., N_N$ sono i momenti statici delle singole forze. $\vec{\Omega}$ si annulla se e solo se è nulla la somma dei suoi momenti statici.

1.3 Forze parallele

Per lo studio di forze parallele è necessario suddividere due casi: forze parallele con lo stesso verso e forze parallele con verso opposto.
Ricordiamo, innanzitutto, che due sistemi di forze si dicono equivalenti se hanno lo stesso vettore risultante e lo stesso momento risultante rispetto a qualunque polo.
Consideriamo due forze parallele $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$ con ugual verso applicate rispettivamente nei punti A_1 e A_2 (Figura 1.2). Esse equivalgono ad una sola forza di vettore

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$$

che ha come modulo la somma dei moduli poiché le due forze hanno ugual direzione e verso. Determiniamo, ora, la linea d'azione di $\vec{F}$, che equivale a cercare il suo punto di intersezione A con la retta A_1A_2. Il momento di $\vec{F}$ rispetto ad A è nullo e perciò, per l'equivalenza, deve essere nullo il momento di $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ rispetto ad A: questi due momenti saranno, allora, uguali e contrari ed essendo su un piano, saranno uguali e contrari anche i momenti statici di $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ rispetto ad A. Perciò il punto A deve essere interno al segmento A_1A_2. Dette d_1 e d_2 le distanze di A da $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, deve essere:

$$F_1 d_1 = F_2 d_2$$

e dividendo per $\cos\alpha$ (α angolo formato dal segmento A_1A_2 con la distanza d_1) si ha:

$$F_1 AA_1 = F_2 AA_2$$

ossia

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{AA_2}{AA_1}. \tag{1.8}$$

Ricavando A dalla (1.8) possiamo trovare la linea d'azione di $\vec{F}$, che passa per A ed è parallela alle due forze. Essa divide la congiungente dei punti di applicazione in parti inversamente proporzionali all'intensità delle due forze stesse.

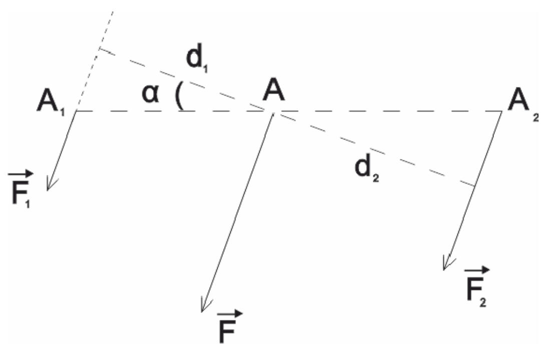

Figura 1.2: Forze parallele con ugual verso

Il punto A si dice *centro delle forze parallele* e non dipende dalla direzione delle forze: gli si può, quindi, applicare la risultante comunque si ruotino le forze, purchè rimangano parallele, con la stessa intensità e con lo stesso punto

di applicazione.
Consideriamo, ora, due forze parallele $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$ di verso opposto applicate rispettivamente nei punti A_1 e A_2 e con vettore risultante $\vec{F_1} + \vec{F_2} \neq 0$ in modo da non costituire una coppia.

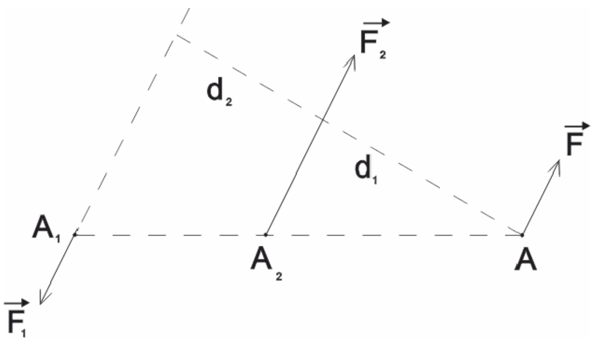

Figura 1.3: Forze parallele con verso opposto

Anche questo sistema equivale ad una forza di vettore

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$$

di intensità uguale alla differenza delle intensità delle due forze, parallela a queste e con verso della maggiore. Se A è l'intersezione della linea d'azione di $\vec{F}$ con la congiungente dei punti A_1 e A_2, i momenti statici delle due forze rispetto ad A devono essere uguali e contrari. In questo caso, A deve essere esterno al segmento A_1A_2 e, ragionando come nel caso di forze con verso uguale, si trova:

$$\frac{A_1A}{A_2A} = \frac{F_2}{F_1} \tag{1.9}$$

da cui si ottiene che la linea d'azione di $\vec{F}$, che passa per A, divide, esternamente, il segmento A_1A_2 in parti inversamente proporzionali all'intensità delle forze e, quindi, A risulta esterno al segmento dalla parte della forza maggiore.
Anche in questo caso A è detto *centro delle forze parallele* e non dipende

dalla direzione delle forze.
È possibile estendere questo ragionamento a N forze parallele. Se tutte le forze hanno stesso verso, esse equivalgono ad un'unica forza (basta, infatti, comporre la prima con la seconda, la risultante così ottenuta con la terza e così via). Se le forze hanno versi diversi, basterà comporre quelle in un verso e quelle nell'altro verso ottenendo così due forze parallele con verso opposto. Se il vettore risultante è nullo, esse costituiscono una coppia, altrimenti si possono comporre nuovamente in un'unica forza.
Si ottiene, dunque, il seguente risultato:

Teorema 1.3. *Un sistema di forze parallele equivale ad una coppia se il vettore risultante è nullo, ad una sola forza se è invece diverso da zero.*

Nel caso in cui il vettore risultante sia diverso da zero, le forze ammettono un centro C cioè un punto dove si può applicare la risultante delle forze e che resta invariato comunque si ruotino le forze purché restino sempre parallele, con uguale intensità e punto di applicazione. L'asse centrale del sistema sarà, perciò, la retta che passa per il centro e parallela alla direzione delle forze.
Ricaviamo, ora, analiticamente le coordinate del centro C di un sistema di N forze parallele $\vec{F}_1,\ \vec{F}_2,\ ...,\ \vec{F}_N$ applicate rispettivamente nei punti $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_N$ che abbia vettore risultante non nullo.
Sia $\vec{a}$ un vettore unitario parallelo alle forze date, cioè valga:

$$\vec{F}_1 = F_1\vec{a}, \qquad \vec{F}_2 = F_2\vec{a}, \quad ..., \quad \vec{F}_N = F_N\vec{a} \tag{1.10}$$

dove $F_1,\ F_2,\ ...,\ F_N$ rappresentano i moduli delle N forze.
Il momento della forza equivalente al sistema rispetto a C è nullo, quindi sarà nullo il momento risultante del sistema dato (sempre rispetto a C). Vale, cioè:

$$\vec{F}_1 \times (C - A_1) + \vec{F}_2 \times (C - A_2) + ... + \vec{F}_N \times (C - A_N) = 0 \tag{1.11}$$

e per le (1.10)

$$\begin{aligned} &F_1\vec{a} \times (C - A_1) + F_2\vec{a} \times (C - A_2) + ... + F_N\vec{a} \times (C - A_N) = \\ &= \vec{a} \times [F_1(C - A_1) + F_2(C - A_2) + ... + F_N(C - A_N)] = 0 \end{aligned}$$

da cui si ottiene:

$$F_1(C - A_1) + F_2(C - A_2) + ... + F_N(C - A_N) = 0. \tag{1.12}$$

Per identificare la posizione del centro C fissiamo un sistema di coordinate $(Oxyz)$ e determiniamo il vettore $(C - O)$. Aggiungiamo e togliamo dentro ogni parentesi della (1.12) il punto O:

$$F_1(C - O + O - A_1) + F_2(C - O + O - A_2) + ... + F_N(C - O + O - A_N) = 0$$

da cui si ricava:

$$(F_1 + F_2 + ... + F_N)(C - O) = F_1(A_1 - O) + F_2(A_2 - O) + ... + F_N(A_N - O),$$

da cui

$$C - O = \frac{\sum_{s=1}^{N} F_s(A_s - O)}{\sum_{s=1}^{N} F_s}. \tag{1.13}$$

Poichè le componenti di $(A_s - O)$ sono le coordinate $x_s,\ y_s,\ z_s$ di A_s, abbiamo per le coordinate $x_C,\ y_C,\ z_C$ del centro C le espressioni:

$$x_C = \frac{\sum_{s=1}^{N} F_s x_s}{\sum_{s=1}^{N} F_s}, \qquad y_C = \frac{\sum_{s=1}^{N} F_s y_s}{\sum_{s=1}^{N} F_s}, \qquad z_C = \frac{\sum_{s=1}^{N} F_s z_s}{\sum_{s=1}^{N} F_s}. \tag{1.14}$$

È possibile, anche, fare il processo inverso cioè data una forza costruirne due o tre parallele che abbiano come risultante la forza data. Analizziamo, innanzitutto, la decomposizione in due forze parallele. Sia $\vec{F}$ una forza applicata nel punto A e vediamo come decomporla in due forze $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ applicate nei punti A_1 e A_2 complanari con la linea d'azione di $\vec{F}$ e allineati con A.
Se A è *interno* al segmento A_1A_2, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ avranno lo stesso verso di $\vec{F}$ e soddisferanno:

$$F = F_1 + F_2, \qquad \frac{F_1}{F_2} = \frac{AA_2}{AA_1}.$$

Da queste, con semplici passaggi algebrici, si ottiene:

$$F_1 = \frac{AA_2}{A_1A_2}F, \qquad F_2 = \frac{AA_1}{A_1A_2}F \tag{1.15}$$

Se A è *esterno* si ragiona in modo analogo.
Analizziamo ora la decomposizione di una forza $\vec{F}$ applicata nel punto A in tre forze parallele $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ applicate rispettivamente nei punti non allineati A_1, A_2, A_3, complanari con A ma non con $\vec{F}$ (si hanno così le linee d'azione parallele alla forza data). Sia A' l'intersezione di AA_1 con A_2A_3; decomponiamo allora $\vec{F}$ in due forze $\vec{F}_1$ e $\vec{F}'$ applicate rispettivamente in A_1 e A'. Decomponiamo, poi, $\vec{F}'$ in due forze $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$ applicate in A_2 e A_3. Abbiamo costruito, così, tre forze $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ equivalenti ad $\vec{F}$ che sono univocamente determinate. Se A è interno al triangolo $A_1A_2A_3$ (Figura 1.4) le tre forze avranno lo stesso verso.

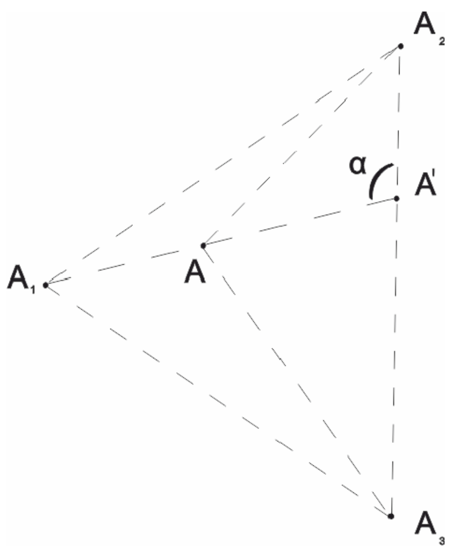

Figura 1.4: Triangolo $A_1A_2A_3$

Per quanto riguarda i moduli, possiamo dire, per quanto visto prima, che:

$$F_1 = \frac{AA'}{A_1A'}F. \tag{1.16}$$

Indicando con T_1 e T le aree rispettivamente dei triangoli AA_2A_3 e $A_1A_2A_3$ e con h_1, h le loro altezze relative a A_2A_3, $\alpha = \widehat{A_1A'A_2}$, si ha:

$$F_1 = \frac{AA'A_2A_3 \sin\alpha}{A_1A'A_2A_3 \sin\alpha}F = \frac{A_2A_3h_1}{A_2A_3h}F = \frac{T_1}{T}F \tag{1.17}$$

e analogamente:

$$F_2 = \frac{T_2}{T} F, \qquad F_3 = \frac{T_3}{T} F \tag{1.18}$$

essendo T_2 e T_3 rispettivamente le aree dei triangoli AA_1A_3 e AA_1A_2.

Capitolo 2

Metodo delle reazioni vincolari

In questo capitolo tratteremo le condizioni di equilibrio per un punto materiale e per un corpo rigido, ricavandone le condizioni necessarie e sufficienti. Illustreremo successivamente il metodo delle reazioni vincolari che permette di determinare le configurazioni di equilibrio di un corpo rigido e il valore delle reazioni vincolari in corrispondenza a tali configurazioni, analizzando poi esplicitamente alcuni casi particolari.

2.1 Condizioni di equilibrio per un punto materiale

Una configurazione P_0 si dice di equilibrio per un punto materiale P se posto P nella configurazione P_0 all'istante iniziale con velocità nulla, esso ivi rimane a tutti gli istanti successivi. In altre parole P_0 è una configurazione di equilibrio se e solo se $P(t) = P_0$ $\forall t \geq t_0$ (t_0 è l'istante iniziale) è la soluzione dell'equazione del moto:

$$m\frac{d^2P(t)}{dt^2} = \vec{F} \tag{2.1}$$

con dato iniziale $P(t_0) = P_0$ e $\frac{dP(t_0)}{dt} = \vec{v}(t_0) = 0$. Qui m denota la massa del punto P e $\vec{F}$ il vettore risultante del sistema di forze che agiscono su P.
È facile verificare il seguente teorema che offre un importante criterio per

l'equilibrio di un punto materiale. Per i dettagli si veda [1]. Ci limiteremo ad enunciarlo nel caso di forze posizionali; una forza $(\vec{F}, P)$ si dice posizionale se il vettore $\vec{F}$ dipende solo dalla posizione del punto P e non, come avviene nel caso più generale, anche dalla velocità $\vec{v}(P)$ e dal tempo: $\vec{F} = \vec{v}(P)$.

Teorema 2.1. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè P_0 sia una configurazione di equilibrio per un punto P è che si annulli il vettore risultante $\vec{R}$ di tutte le forze agenti su P:*

$$\vec{R}(P_0) = \vec{F}(P_0) + \vec{\Phi}(P_0) = 0. \tag{2.2}$$

Qui $\vec{F}(P)$ e $\vec{\Phi}(P)$ indicano rispettivamente il vettore risultante di tutte le forze attive e di tutte le reazioni vincolari agenti su P.

Dimostrazione. Sia P_0 una configurazione di equilibrio per P; allora
$P(t) = P_0$ è soluzione di (2.1) con $P(t_0) = P_0$ e $\vec{v}(t_0) = 0$. Essendo $\frac{d^2P(t)}{dt^2} = 0$, segue $\vec{R}(P(T)) = \vec{R}(P_0) = 0$.
Viceversa se $\vec{R}(P_0) = 0$ la (2.1) è soddisfatta dalla soluzione costante
$P(t) = P_0$, $\forall t \geq t_0$. □

Se poi il punto materiale è libero, non essendoci reazioni vincolari, la condizione del Teorema 2.1 si riduce a $\vec{F}(P_0) = 0$.

2.2 Condizioni di equilibrio per i corpi rigidi

Una configurazione $q = (q_1,\ q_2,\ ...,\ q_n)$ di un corpo si dice configurazione di equilibrio se posto il sistema in quiete in quella configurazione all'istante iniziale, esso rimane in quiete in q agli istanti successivi. In particolare il sistema è in equilibrio nella configurazione q se e solo se lo è ogni suo punto. Consideriamo un corpo costituito da N punti materiali e sia A_s uno di essi. Sia $\vec{F}_s$ il vettore risultante delle forze attive agenti su A_s e sia $\vec{\Phi}$ il vettore risultante delle reazioni vincolari che agiscono su A_s. Allora per il Teorema 2.1 in corrispondenza a una configurazione di equilibrio q deve essere:

$$\vec{F}_s + \vec{\Phi}_s = 0, \quad \forall s = 1, ..., N. \tag{2.3}$$

É possibile decomporre le forze e le reazioni vincolari agenti su ogni punto del corpo in interne ed esterne senza alterare lo stato di quiete o di moto del punto a cui sono applicate.
Siano, dunque, $\vec{F}_{es}, \vec{F}_{is}, \vec{\Phi}_{es}, \vec{\Phi}_{is}$ rispettivamente la risultante delle forze attive esterne, delle forze attive interne, delle reazioni vincolari esterne, delle reazioni vincolari interne agenti sul generico punto A_s del corpo.
Si ha allora:

$$\vec{F}_s = \vec{F}_{es} + \vec{F}_{is} \tag{2.4}$$

$$\vec{\Phi}_s = \vec{\Phi}_{es} + \vec{\Phi}_{is} \tag{2.5}$$

e sostituendole nella (2.3) si ottiene:

$$\vec{F}_{es} + \vec{F}_{is} + \vec{\Phi}_{is} + \vec{\Phi}_{es} = 0. \tag{2.6}$$

Facendo variare l'indice s da 1 a N si ottiene:

$$\vec{F}_e + \vec{F}_i + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_i = 0 \tag{2.7}$$

dove $\vec{F}_e$ è la risultante delle forze attive esterne, $\vec{F}_i$ quella delle forze attive interne, $\vec{\Phi}_e$ quella delle reazioni vincolari esterne e $\vec{\Phi}_i$ quella delle reazioni vincolari interne. Per il principio di azione e reazione (Postulato 1.2) le forze e le reazioni interne si possono sempre scindere in un certo numero di sistemi di due forze uguali e opposte. La risultante di tale forza sarà nulla, quindi la (2.7) si riduce a:

$$\vec{F}_e + \vec{\Phi}_e = 0 \tag{2.8}$$

Moltiplicando vettorialmente la (2.6) per $(O - A_s)$, sommando rispetto all'indice s, si ottiene:

$$\vec{\Omega}_e(O) + \vec{\Psi}_e(O) = 0 \tag{2.9}$$

dove $\vec{\Omega}_e(O)$ è il momento risultante delle forze attive esterne e $\vec{\Psi}_e(O)$ quello delle reazioni esterne rispetto ad un polo O.
Possiamo, allora, concludere che, per la quiete di un corpo è *necessario*, per la (2.8) e per la (2.9), che siano nulle la somma dei vettori risultanti delle forze attive esterne e delle reazioni vincolari esterne e la somma dei momenti risultanti delle forze attive esterne e delle reazioni vincolari esterne rispetto a un qualunque polo O. In particolare, se il corpo è libero, condizione necessaria per la sua quiete consiste nell'annullarsi del vettore risultante $\vec{F}_e$ e del momento risultante $\vec{\Omega}_e$ delle forze attive esterne.
In generale le equazioni (2.8) e (2.9) non sono condizioni sufficienti per l'equilibrio di un sistema meccanico. Si può, però, dimostrare che lo sono nel caso di un corpo rigido (si veda [1] per ulteriori approfondimenti). Si ha, quindi, il seguente criterio per l'equilibrio di un corpo rigido:

Teorema 2.2. *Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un corpo rigido è che siano soddisfatte le seguenti equazioni:*

$$\begin{cases} \vec{F}_e + \vec{\Phi}_e = 0 \\ \vec{\Omega}_e + \vec{\Psi}_e = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

dette equazioni cardinali della statica.

Le incognite di queste equazioni sono i parametri lagrangiani $q = (q_1, ..., q_n)$ corrispondenti alle configurazioni di equilibrio e le reazioni vincolari $\vec{\Phi}_e$. Siccome le (2.10) corrispondono a 6 equazioni scalari, nel caso di corpo rigido libero, abbiamo un sistema di 6 equazioni in 6 incognite che sono i 6 parametri lagrangiani corrispondenti ai 6 gradi di libertà di un corpo rigido libero.
Nel caso di un corpo rigido vincolato, subentrano come incognite anche

le reazioni vincolari ma si riduce il grado di libertà e quindi il numero di parametri lagrangiani incogniti.

2.3 Metodo generale per lo studio dell'equilibrio

Consideriamo un sistema di corpi rigidi vincolati fra loro e in equilibrio. È possibile renderli liberi togliendo tutti i vincoli e sostituendoli con le loro reazioni. Scrivendo per ogni corpo le condizioni per l'equilibrio (2.10), si otterrà un certo numero di equazioni fra le forze attive e le reazioni vincolari. Dalle equazioni tra le forze attive si otterranno le condizioni necessarie per l'equilibrio. Dalle rimanenti equazioni, se in numero sufficiente, potremo ricavare le reazioni vincolari.
Viceversa, se è possibile trovare per ogni corpo o più in generale per ogni punto del sistema un insieme di reazioni compatibili con la natura dei vincoli soddisfacenti alle condizioni di equilibrio, il sistema risulterà in equilibrio. Vi è equilibrio anche quando il problema è statiticamente indeterminato, cioè le reazioni sono indeterminate.
Più in generale, ammetteremo che qualunque sistema di corpi, anche non rigidi, è in equilibrio se è possibile trovare un sistema di reazioni vincolari compatibili con i vincoli tale che per ogni punto del sistema sia soddisfatta la (2.3).

Esempio 2.3 (Punto appoggiato ad una superficie materiale liscia)**.** Ricerchiamo le condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio di un punto materiale P appoggiato ad una superficie materiale liscia che chiamiamo, per brevità, appoggio. Precisiamo, innanzitutto, che una superficie si dice *liscia* quando su di essa è possibile lo spostamento di un punto materiale senza incontrare alcuna resistenza.
Gli spostamenti totalmente proibiti da questo vincolo sono normali all'appoggio e diretti verso di esso, quindi la reazione vincolare (che si applica al

corpo per sopprimere il vincolo) sarà normale alla superficie e diretta dall'appoggio verso il punto.
Allora, poichè dal Teorema 2.1 si ha:

$$\vec{F} = -\vec{\Phi}$$

si deduce subito che condizione necessaria per l'equilibrio di un punto appoggiato ad una superficie liscia è che la risultante delle forze attive sia normale alla superficie e diretta dal punto verso l'appoggio. Inoltre, poiché per questi valori di $\vec{F}$ è possibile trovare un valore di $\vec{\Phi}$ compatibile con i vincoli, che soddisfi il Teorema 2.1, possiamo concludere che la suddetta condizione è anche sufficiente per l'equilibrio.
Un vincolo dello stesso tipo di quello ora considerato si ottiene attaccando il punto ad un estremo di un filo flessibile, inestendibile, di lunghezza l, con l'altro estremo fissato in un punto O.
Allora il punto P si comporta come se fosse appoggiato in una sfera di centro O e raggio l, quindi, per l'equilibrio, la forza $\vec{F}$ deve essere diretta lungo il filo con senso da O verso l'altro estremo P del filo.
Se al posto del filo si pone una sbarretta ridiga, il vincolo cambia natura perchè, ora, non permette al punto di uscire dalla sfera. Si ha, così, un nuovo vincolo che obbliga un punto a restare su una superficie senza poterne uscire. In questo caso sono totalmente proibiti gli spostamenti in direzione normale alla superficie in ambedue i versi; la reazione è normale alla superficie con senso indeterminato. Quindi, seguendo lo stesso ragionamento fatto per l'appoggio, si trova che condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio è che la risultante delle forze attive sia normale alla superficie.

Esempio 2.4 (Punto obbligato a descrivere una determinata linea)**.** Un vincolo di questo tipo può essere dato, ad esempio, da un pallina obbligata a muoversi entro un tubicino, da un anello obbligato a scorrere su un filo o da un punto attaccato ad una sbarretta fissata in un punto O e obbligata a muoversi in un piano.

Se il punto è vincolato su una linea e il vincolo si suppone liscio, sono completamente proibiti solo gli spostamenti normali alla linea; la reazione dovrà essere, perciò, normale alla linea stessa. Quindi, essendo per il Teorema 2.1:

$$\vec{F} \ = \ - \ \vec{\Phi}$$

si ricava facilmente che condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio è che la forza attiva sia normale alla linea, cioè sia nulla la sua componente tangenziale (componente lungo la direzione tangente in P alla linea) lungo la linea stessa.

Esempio 2.5 (Corpo rigido con un punto fisso)**.** Consideriamo un corpo rigido con un punto fisso, che indichiamo con O. L'unica reazione vincolare esterna è una forza $\vec{\Phi}$ applicata in O. Se il corpo è in equilibrio, deve essere tale il sistema delle forze attive e $\vec{\Phi}$. Quindi se $\vec{F}$ è il vettore risultante delle forza attive si ha:

$$\vec{F} \ + \ \vec{\Phi} \ = \ 0 \tag{2.11}$$

Calcoliamo poi il momento risultante delle forze rispetto al punto O. Poiché il momento di $\vec{\Phi}$ rispetto ad O è nullo (perchè applicata proprio in O), deve essere:

$$\vec{\Omega}(O) \ = \ 0 \tag{2.12}$$

dove $\vec{\Omega}$ è il momento risultante delle forze attive rispetto ad O.
Dunque, condizione necessaria per l'equilibrio di un corpo rigido con un punto fisso è che si annulli, rispetto a quel punto, il momento delle forze attive (condizione (2.12)). Poichè, se questo si verifica, ponendo $\vec{F} = -\vec{\Phi}$, è soddisfatta anche la (2.11), possiamo dire che la (2.12) è anche condizione sufficiente.
Se le forze attive applicate al corpo si riducono ad una sola, il suo momento sarà nullo se la sua linea d'azione passa per O. Cioè un corpo rigido con un punto fisso, soggetto all'azione di una sola forza, è in equilibrio se e solo se la linea d'azione della forza passa per il punto fisso. Si noti, anche,

come le (2.11) e (2.12) consentono di determinare le incognite del problema: dalla (2.11) si ricava la reazione vincolare $\vec{\Phi} = -\vec{F}$, mentre dalla (2.12), corrispondente a 3 equazioni scalari, si ricavano le configurazioni di equilibrio rappresentate da 3 parametri lagrangiani. Infatti per un corpo rigido con punto fisso il grado di libertà è 3 e i parametri lagrangiani possono essere rappresentati dagli angoli di Eulero.

Esempio 2.6 (Corpo rigido con un asse fisso)**.** Assumiamo che l'asse fisso coincida con l'asse z. Poiché, se il corpo è in equilibrio, il momento risultante delle forze attive e delle reazioni vincolari deve essere nullo, dovrà essere tale anche la sua componente lungo l'asse z. Le reazioni vincolari sono, però, applicate all'asse, perciò il loro momento rispetto a questa retta è nullo. Quindi, condizione necessaria per l'equilibrio di un corpo rigido con asse fisso è che si annulli il momento rispetto all'asse delle forze attive, cioè:

$$\Omega_z = 0 \tag{2.13}$$

dove $\Omega_z = \vec{\Omega}(O)\vec{k}$, essendo O un punto dell'asse z e $\vec{k}$ un versore diretto come l'asse z. Per verificare che questa condizione è anche sufficiente per l'equilibrio, supponiamo che l'asse sia stato reso immobile fissando il suo punto O e rendendo impossibile ad un altro suo punto O_1 gli spostamenti in direzione normale all'asse (tutto ciò può essere realizzato con vincoli opportuni). Allora, posto in O l'origine del sistema di assi $x,\ y,\ z$ (z ovviamente lungo OO_1), la componente Φ_{1z} della reazione di O_1 sarà nulla perchè tale reazione dovrà essere normale all'asse; mentre saranno, in generale, non nulle le altre due componenti Φ_{1x} e Φ_{1y}. Quindi, dette $\vec{\Phi}$ la reazione di O, Φ_x, Φ_y e Φ_z le sue componenti, $F_x,\ F_y,\ F_z$ le componenti del vettore risultante delle forze attive, per la prima equazione delle (2.10), si ha:

$$\begin{cases} F_x + \Phi_x + \Phi_{1x} = 0 \\ F_y + \Phi_y + \Phi_{1y} = 0 \\ F_z + \Phi_z = 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

Il momento di $\vec{\Phi}$ rispetto ad O è nullo, mentre il momento di $\vec{\Phi}_1$ vale, se d è la distanza OO_1:

$$\vec{\Phi}_1 \times (O - O_1) = (O_1 - O) \times \vec{\Phi}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & d \\ \Phi_{1x} & \Phi_{1y} & 0 \end{vmatrix} = -\Phi_{1y} d\vec{i} + \Phi_{1x} d\vec{j}.$$

Si ottiene, allora, dalla seconda delle (2.10), indicando con $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ le componenti del momento risultante rispetto ad O delle forze attive:

$$\begin{cases} \Omega_x - \Phi_{1y} d = 0 \\ \Omega_y + \Phi_{1x} d = 0 \\ \Omega_z = 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

Ora, l'ultima equazione è soddisfatta perchè coincide con la (2.13); dalle prime, invece, si ha:

$$\Phi_{1x} = -\frac{\Omega_y}{d} \qquad \Phi_{1y} = \frac{\Omega_x}{d} \tag{2.16}$$

perciò dalle (2.14) si trae:

$$\Phi_x = -F_x + \frac{\Omega_y}{d}, \qquad \Phi_y = -F_y - \frac{\Omega_x}{d}, \qquad \Phi_z = -F_z. \tag{2.17}$$

È quindi possibile soddisfare le equazioni di equilibrio e, avendo trovato un sistema di reazioni compatibili con la natura dei vincoli, l'equilibrio è assicurato. Quanto alla determinazione delle incognite: le (2.16) e (2.17) determinano le reazioni vincolari, mentre la (2.13) è un'equazione scalare che consente di determinare l'unico parametro lagrangiano del sistema che è l'angolo di rotazione attorno all'asse z.

È da notare che l'asse si poteva rendere immobile fissando completamente anche il punto O_1 (cioè agendo su questo punto con un vincolo che impedisca tutti i suoi movimenti indipendentemente dai suoi legami con altri punti del corpo) o, meglio ancora, fissando altri punti dell'asse oltre O e O_1. In questo caso, l'equazione (2.13) assicura l'equilibrio in quanto l'equilibrio di un corpo non viene turbato dall'aggiunta di vincoli.

Se consideriamo, però, il caso in cui ambedue i punti O e O_1 siano resi fissi e vogliamo calcolare le loro reazioni vincolari, non possiamo ammettere che Φ_{1z} sia uguale a zero e dobbiamo tener conto, nelle (2.14) e (2.15) anche di questo termine; in altre parole, quando ricaviamo queste equazioni dobbiamo aggiungere alle reazioni precedenti un'altra uguale a $\Phi_{1z}\vec{k}$. Questa forza ha la linea d'azione passante per O, il suo momento rispetto a tale punto è nullo, perciò la sua presenza non altera le (2.15) e neppure le prime due equazioni delle (2.14). Come è ovvio, solo l'ultima rimane modificata e diventa

$$\Phi_z + \Phi_{1z} + F_z = 0; \tag{2.18}$$

non è possibile conoscere Φ_z e Φ_{1z} separatamente perchè la (2.18) ce ne dà solo la somma. Le componenti lungo l'asse delle reazioni di O e O_1 sono perciò indeterminate. Questa indeterminazione è, però, solo apparente in quanto noi abbiamo considerato i copri rigidi schematizzando i fenomeni reali in una maniera che in questo caso è insufficiente. Se si tiene conto della pur piccola deformabilità dei corpi reali, si trova un'altra equazione da cui è possibile ricavare in modo completo le reazioni vincolari.

Esempio 2.7 (Equilibrio della leva)**.** Ricaviamo la condizione di equilibrio della leva, che si può considerare come un corpo rigido con un asse fisso, soggetto a due forze, dette rispettivamente potenza e resistenza, che giacciono in un piano normale all'asse e che indicheremo con $\vec{P}$ e $\vec{F}$. Se p e r sono rispettivamente le distanze delle due forze dal fulcro O, cioè dal punto di intersezione del loro piano con l'asse, avremo dalla (2.13) come condizione di equilibrio:

$$Pp - Rr = 0 \tag{2.19}$$

da cui

$$\frac{P}{R} = \frac{r}{p} \tag{2.20}$$

cioè, detti p e r rispettivamente braccio della potenza e braccio della resistenza, la (2.20) si può enunciare nella seguente forma: *in una leva in equilibrio* *la potenza sta alla resistenza come il braccio della resistenza sta al braccio della potenza.*

Esempio 2.8 (Due leve a contatto). Consideriamo ora due leve orizzontali di peso trascurabile con fulcro rispettivamente in O_1 e O_2.
La prima leva è soggetta nell'estremo A alla forza verticale $\vec{F_1}$ diretta verso il basso, la seconda nell'estremo B alla forza, anch'essa verticale ma diretta verso l'alto, $\vec{F_2}$. Le due leve sono poi a contatto nell'estremo C (vedi Figura 2.1).

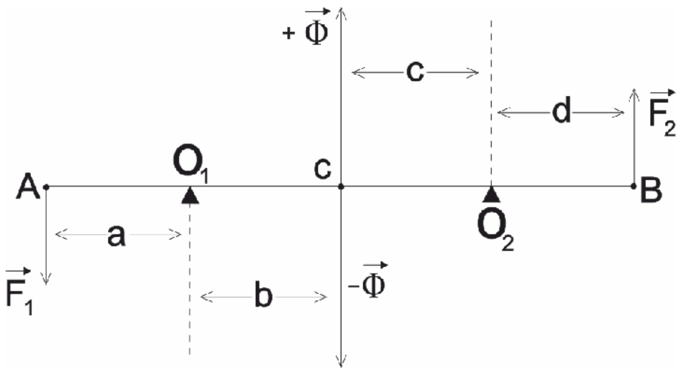

Figura 2.1: Due leve orizzontali

Per trovare le condizioni di equilibrio, osserviamo che la prima leva esercita sulla seconda la reazione Φ, l'altra sulla prima una reazione uguale e contraria. Allora, se vi è equilibrio, il momento statico di $\vec{F_1}$ e della reazione $-\vec{\Phi}$ rispetto ad O_1 deve essere nullo, cioè, se $AO_1 = a$ e $CO_1 = b$, vale:

$$F_1 a = \Phi b \tag{2.21}$$

e in modo analogo dalla seconda leva, si ha che se $CO_2 = c$ e $O_2 B = d$,

$$F_2 d = \Phi c \tag{2.22}$$

Dividendo membro a membro la (2.21) e la (2.22), si può eliminare la Φ, ottenendo:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{bd}{ac} \tag{2.23}$$

che esprime la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio del sistema delle due leve.

Esempio 2.9 (Corpo rigido con una retta che scorre su una retta fissa)**.** Si abbia un corpo vincolato in modo che una sua retta r possa scorrere senza attrito su una retta fissa che supporremmo coincidente con l'asse z. Ciò si può ottenere vincolando almeno due punti O e O_1 di r in modo da impedire i loro movimenti in direzione normale all'asse delle z.
Le reazioni vincolari sono perciò applicate ai punti O e O_1 e normali all'asse z. Quindi il momento delle reazioni rispetto all'asse z e la somma delle loro componenti lungo quest'asse sono nulle. Perciò per l'equilibrio, considerando le componenti lungo l'asse delle z delle (2.10), si ha la condizione necessaria:

$$\Omega_z = 0 \qquad\qquad F_z = 0. \tag{2.24}$$

Queste condizioni sono anche sufficienti per l'equilibrio. Si supponga il corpo vincolato in O e O_1 e siano Φ_x e Φ_y, Φ_{1x} e Φ_{1y} le reazioni di O e O_1. Ragionando come nell'Esempio 2.6 e usando le stesse notazioni, le equazioni si riducono a:

$$\begin{cases} F_x + \Phi_x + \Phi_{1x} = 0 \\ F_y + \Phi_y + \Phi_{1y} = 0 \\ F_z = 0 \end{cases} \tag{2.25}$$

$$\begin{cases} \Omega_x - \Phi_{1y} d = 0 \\ \Omega_y + \Phi_{1x} d = 0 \\ \Omega_z = 0. \end{cases} \tag{2.26}$$

Le due ultime condizioni di (2.25) e (2.26) sono identicamente soddisfatte per le (2.24) e consentono di determinare i due parametri lagrangiani in corrispondenza alle configurazioni di equilibrio; le altre si possono soddisfare

mediante le espressioni (2.16) e (2.17) delle componenti delle reazioni vincolari.
Se poi il corpo è vincolato anche in altri punti, le (2.24) ne assicurano l'equilibrio. Il problema diventa, però, staticamente indeterminato perchè si aggiungono nuove reazioni incognite.
Concludendo, un corpo vincolato ad avere una retta che scorre su una retta fissa è in equilibrio quando sono nulle la componente del vettore risultante delle forze attive lungo quella retta e il momento delle forze attive sempre rispetto a quella retta.

Esempio 2.10 (Corpo rigido appoggiato in un punto)**.** Si abbia un corpo C appoggiato su un corpo C_1 in un solo punto O. Supponendo l'appoggio liscio, avremo che la reazione vincolare $\vec{\Phi}$ di C su C_1 è applicata in O, normale alla superficie di contatto dei due corpi e diretta da C_1 verso C.
Allora se C è in equilibrio, per il Teorema 2.2 avremo, ricordando che il momento di $\vec{\Phi}$ rispetto ad O è nullo,

$$\vec{F} + \vec{\Phi} = 0 \qquad\qquad \vec{\Omega} = 0, \tag{2.27}$$

dove $\vec{F}$ è il vettore risultante delle forze attive, $\vec{\Omega}$ il momento risultante rispetto ad O. Dalla prima delle (2.27) si ha:

$$\vec{F} = -\vec{\Phi} \tag{2.28}$$

cioè, per l'equilibrio, il vettore risultante delle forze attive deve essere normale alle superfici dei due corpi nel loro punto di contatto e diretto verso l'appoggio C_1, mentre il momento rispetto al punto d'appoggio deve essere nullo. Dalla (2.28) si ricava, poi, che la reazione vincolare vale il vettore risultante col segno cambiato; il problema è perciò staticamente determinato.
Viceversa se $\vec{F}$ e $\vec{\Omega}$ soddisfano le condizioni sovraesposte, è possibile, ponendo $\vec{\Phi} = -\vec{F}$, soddisfare le (2.27).
Le condizioni necessarie sono, dunque, anche sufficienti per l'equilibrio.
Se il sistema si riduce ad una sola forza, essa deve passare per O altrimenti il suo momento non sarebbe nullo, ed essere diretta dal corpo verso l'appoggio.

Esempio 2.11 (Corpo appoggiato su più punti)**.** Supponiamo di avere un corpo appoggiato su un altro in più punti. Per semplificare i calcoli e per stare nei casi più comuni, assumiamo che tutti questi punti di contatto siano su un piano che chiamiamo piano d'appoggio. Se sono in numero finito, diremo perimetro d'appoggio il perimetro di un poligono convesso i cui vertici sono punti d'appoggio e che contiene al suo interno gli altri eventuali appoggi. Al contrario, se il numero di appoggi è infinito, assumeremo come perimetro d'appoggio una linea convessa, che contenga nel suo interno tutti i punti d'appoggio, e formata, nei suoi tratti curvi e nei suoi vertici, da punti d'appoggio.

Ora, le reazioni vincolari sono tutte normali al piano d'appoggio e dirette verso il corpo; sono perciò forze parallele e con lo stesso verso. Esse equivalgono ad un'unica forza normale al piano d'appoggio e applicata in un punto interno al perimetro d'appoggio. Allora, per l'equilibrio, le forze attive devono essere equivalenti ad una sola forza normale al piano d'appoggio con linea d'azione interna al perimetro e diretta verso l'appoggio stesso.

Se le forze attive si riducono al solo peso del corpo, condizione necessaria per l'equilibrio è che il piano d'appoggio risulti orizzontale (perchè deve essere normale al peso) e che la verticale tirata dal baricentro (cioè la linea d'azione del peso) cada entro il perimetro d'appoggio.

Vediamo di provare se queste condizioni sono anche sufficienti. Consideriamo inizialmente il caso in cui gli appoggi siano solo due nei punti A e B. Il perimetro d'appoggio si riduce al segmento AB. Allora l'unica forza $\vec{F}$ a cui sono equivalenti le forze attive deve passare per AB ed essere normale a questo segmento. Se questa forza è il peso, AB deve essere orizzontale e la verticale tirata dal baricentro deve passare entro AB. Le reazioni vincolari $\vec{\Phi}_A$ e $\vec{\Phi}_B$ di AB devono equilibrare $\vec{F}$, cioè essere equivalenti a $-\vec{F}$; in altre parole, $\vec{\Phi}_A$ e $\vec{\Phi}_B$ sono le componenti di $-\vec{F}$ lungo due parallele passanti per A e per B. Se a e b sono le distanze di $\vec{F}$ da A e B, si ha, per le considerazioni fatte nel Paragrafo 1.3 sulle forze parallele:

$$\Phi_A = \frac{b}{a+b}F, \qquad \Phi_B = \frac{a}{a+b}F. \tag{2.29}$$

Queste formule esprimono le reazioni vincolari dei due appoggi, sicchè il problema è staticamente determinato.
Ora, con questi valori di Φ_A e Φ_B, tenendo presenti le direzioni e i versi delle reazioni, si soddisfa alle equazioni dell'equilibrio (perchè si ottiene una forza uguale a $-\vec{F}$) e allora le condizioni necessarie sono anche sufficienti per l'equilibrio.
Ovviamente, se agli appoggi A e B se ne aggiungono altri allineati con A e B ed interni ad AB (in modo che il perimetro d'appoggio sia ancora AB), si aggiungono nuovi vincoli perciò il sistema rimane ancora in equilibrio. Si conclude che le condizioni necessarie sono sufficienti per l'equilibrio quando gli appoggi sono tutti allineati. In questo ultimo caso, però, il problema non è staticamente determinato.
Se gli appoggi sono tre A, B, C e non allineati, il perimetro di appoggio si riduce al triangolo ABC. Le tre reazioni $\vec{\Phi}_A$, $\vec{\Phi}_B$, $\vec{\Phi}_C$ devono essere parallele ed equivalenti a $-\vec{F}$, la $-\vec{F}$ si deve perciò decomporre in tre forze ad essa parallele e passanti per A, B, C. Per i risultati sulle forze parallele e con notazioni analoghe, si avrà:

$$\vec{\Phi}_A = \frac{T_A}{T}F, \qquad \vec{\Phi}_B = \frac{T_B}{T}F, \qquad \vec{\Phi}_C = \frac{T_C}{T}F \tag{2.30}$$

e anche in questo caso il problema è staticamente determinato.
Poichè con questi valori delle reazioni si soddisfano le equazioni dell' equilibrio, si conclude che anche in questo caso il sistema è in equilibrio.
Infine, nel caso in cui gli appoggi sono più di tre, la linea d'azione della forza $\vec{F}$, incontrando un punto Q interno al perimetro d'appoggio, cade almeno entro un triangolo formato da tre appoggi. Questo risultato è ovvio se il perimetro d'appoggio è un poligono rettilineo poiché Q, che è uno dei suoi punti interni, cade certamente entro un triangolo in cui il poligono si può scindere tirando da un vertice le diagonali. Se il perimetro del poligono contiene tratti curvi, il punto Q cade certamente nel poligono rettilineo che si ottiene sostituendo a quei tratti una opportuna poligonale.
Per l'equilibrio sono sufficienti questi tre appoggi (vertici del triangolo), a maggior ragione l'equilibrio sussisterà aggiungendo gli altri appoggi. Il pro-

blema però, in questo caso, è staticamente indeterminato e il calcolo delle reazioni si può fare solo tenendo conto delle piccola deformabilità dei corpi.

Capitolo 3

Il principio dei lavori virtuali

3.1 Lavoro virtuale e principio dei lavori virtuali

Si abbia una forza $\vec{F}$ applicata nel punto P che subisce uno spostamento virtuale δP. Si chiama *lavoro della forza* $\vec{F}$ *per lo spostamento* P il prodotto scalare del vettore $\vec{F}$ per il vettore δP:

$$\delta L = \vec{F} \cdot \delta P. \tag{3.1}$$

Sia α l'angolo formato dai vettori $\vec{F}$ e δP, $0 \leq \alpha \leq \pi$, e siano F e $\delta\tau$ i loro rispettivi moduli. Allora si ha:

$$\delta L = F\ \delta\tau\ \cos\alpha \tag{3.2}$$

da cui segue immediatamente che δL è positivo se e solo se $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\delta L < 0$ se e solo se $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$ e $\delta L = 0$ se e solo se $\alpha = \frac{\pi}{2}$.
Siano ora $X,\ Y,\ Z,\ \delta x,\ \delta y,\ \delta z$ le componenti di $\vec{F}$ e δP rispettivamente sui tre assi. Avremo:

$$\delta L = X\delta x\ +\ Y\delta y\ +\ Z\delta z. \tag{3.3}$$

In particolare, se la forza $\vec{F}$ è il solo peso di modulo π applicato in P, posto l'asse z verticale e diretto verso l'alto, si ha $X = Y = 0$, $Z = -\pi$ e quindi:

$$\delta L = -\pi\delta z. \tag{3.4}$$

Consideriamo, ora, un sistema meccanico formato da N punti materiali $P_1, P_2, ..., P_N$ sui quali agiscono rispettivamente le forze $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_N$. Supponiamo che il sistema compia uno spostamento virtuale per cui gli N punti materiali subiscano lo spostamento rispettivamente $\delta P_1, \delta P_2, ..., \delta P_N$. Chiameremo *lavoro virtuale delle forze applicate al sistema per quello spostamento* la somma dei lavori virtuali delle singole forze, cioè:

$$\delta L = \vec{F}_1 \cdot \delta P_1 \ + \ \vec{F}_2 \cdot \delta P_2 \ + \ ... \ + \ \vec{F}_N \cdot \delta P_N$$

e, più sinteticamente:

$$\delta L = \sum_{s=1}^{N} \vec{F}_s \delta P_s \ = \ \sum_{s=1}^{N} F_s \delta\tau_s \cos\alpha_s \ = \ \sum_{s=1}^{N} (X_s \delta x_s + Y_s \delta y_s + Z_s \delta z_s) \quad (3.5)$$

dove con F_s, $\delta\tau_s$ sono indicati i moduli di $\vec{F}_s$ e δP_s, con α_s l'angolo fra essi compreso, con X_s, Y_s, Z_s e $\delta x_s, \delta y_s, \delta z_s$ le componenti di $\vec{F}_s$ e δP_s lungo assi cartesiani arbitrariamente scelti.
Enunciamo ora il principio dei lavori virtuali, di cui non è possibile dare una dimostrazione generale e che, dunque, accetteremo come postulato poiché tutte le deduzioni che se ne traggono sono in accordo con l'esperienza:

Postulato 3.1. *Affinchè un sistema meccanico inizialmente in quiete in una certa configurazione rimanga sempre in quiete, occorre e basta che il lavoro virtuale delle forze attive applicate al sistema sia nullo per gli spostamenti virtuali invertibili, negativo (o eccezionalmente nullo) per tutti gli spostamenti virtuali non invertibili.*

Questo principio vale solo supponendo i vincoli lisci.
In questo enunciato del principio dei lavori virtuali si tiene conto solo del lavoro delle forze attive, mentre non interviene affatto quello delle reazioni vincolari. Si può, infatti, procedere alla ricerca delle condizioni di equilibrio evitando l'introduzione delle reazioni vincolari.
Applichiamo, ora, questo postulato in alcuni casi di equilibrio studiati nel capitolo precedente.

Esempio 3.2 (Punto materiale libero)**.** Consideriamo un punto materiale P e il vettore risultante $\vec{F}$ delle forze attive applicate al punto. Il lavoro virtuale δL di tali forze attive per uno spostamento δP vale per la (3.5):

$$\delta L = \vec{F} \cdot \delta P = X\delta x \ + \ Y\delta y \ + \ Z\delta z, \tag{3.6}$$

essendo X, Y, Z le componenti cartesiane del vettore $\vec{F}$. Ora, se il punto è libero e in equilibrio, deve essere δL nullo per qualunque spostamento invertibile δP, quindi, per la (3.6), deve essere $\vec{F} = 0$ perchè δP, avendo direzione arbitraria, può essere scelto non ortogonale a $\vec{F}$.
Viceversa, se si ha $\vec{F} = 0$, sarà $\delta L = 0$ per ogni spostamento e il punto è in equilibrio.

Esempio 3.3 (Punto appoggiato ad una superficie materiale liscia)**.** Se il punto P è appoggiato ad una superficie liscia ed è in equilibrio, δL è nullo per gli spostamenti δP in direzione tangente alla superficie (perchè sono i soli invertibili), perciò $\vec{F}$ deve essere normale alla superficie. Per gli spostamenti di distacco, che non sono invertibili, δL deve essere negativo quindi l'angolo tra $\vec{F}$ e δP sarà ottuso. $\vec{F}$ sarà, dunque, diretta dal punto verso l'appoggio. Viceversa, se $\vec{F}$ è normale alla superficie e diretta verso di essa, il punto è in equilibrio perchè $\delta L = 0$ per gli spostamenti δP invertibili, cioè quelli tangenti alla superficie, negativo per gli spostamenti di distacco non invertibili. Si ritrovano così i risultati dell'Esempio 2.3.

Esempio 3.4 (Punto obbligato a descrivere una determinta linea)**.** In questo caso gli spostamenti sono tutti invertibili e tangenti alla linea stessa: $\delta L = 0$ quando $\vec{F}$ è normale alla linea, e viceversa se $\vec{F}$ è normale alla linea si ha $\delta L = 0$. Si ritrovano così le condizioni necessarie e sufficienti viste nell'Esempio 2.4.

Esempio 3.5 (Corpo rigido libero)**.** Calcoliamo innanzitutto il lavoro delle forze per uno spostamento virtuale di un corpo rigido. Per l'equazione (1.1) si ha:

$$\delta L = \sum_{s=1}^{N} \vec{F}_s \cdot \delta P_s = \sum_{s=1}^{N} \vec{F}_s \cdot [\delta O_1 + \delta\theta\vec{a} \times (P_s - O_1)] =$$

$$= \sum_{s=1}^{N} \vec{F}_s \cdot \delta O_1 + \sum_{s=1}^{N} \vec{F}_s \cdot \delta\theta\vec{a} \times (P_s - O_1). \tag{3.7}$$

Indicando con $\vec{F}$ il vettore risultante delle forze attive agenti sul corpo: $\vec{F} = \sum_{s=1}^{N} \vec{F}_s$ e con $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}(O_1) = \sum_{s=1}^{N} \vec{F}_s \times (O_1 - P_s)$ il momento risultante delle forze attive rispetto al polo O_1, dopo aver scambiato il prodotto scalare e il prodotto vettoriale nell'ultimo prodotto misto della (3.7), si ottiene:

$$\delta L = \vec{F} \cdot \delta O_1 + \delta\theta\vec{a} \cdot \vec{\Omega}. \tag{3.8}$$

Cerchiamo ora le condizioni di equilibrio per un corpo rigido libero. Essendo libero, tutti gli spostamenti virtuali sono invertibili, perciò, se il corpo è in equilibrio, dovrà essere $\delta L = 0$ per ogni spostamento. Diamo al corpo uno spostamento virtuale di rotazione definito dal vettore applicato $(\delta\theta\vec{a}, O_1)$. Per la (3.8) si ha ($\delta O_1 = 0$ perchè manca la traslazione):

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{a}\delta\theta = 0$$

e, poiché $\delta\theta\vec{a}$ può avere qualunque direzione, è

$$\vec{\Omega} = 0.$$

Consideriamo poi una traslazione definita dallo spostamento δO_1 di O_1; si ha, ricordando ancora la (3.8) ,

$$\vec{F} \cdot \delta O_1 = 0.$$

Poiché δO_1 è arbitrario, si ha:

$$\vec{F} = 0.$$

Perciò condizione necessaria per l'equilibrio di un corpo rigido libero è che siano nulli vettore risultante e momento risultante delle forze attive applicate al corpo. Viceversa, se è:

$$\vec{\Omega} = \vec{F} = 0$$

sarà per la (3.8)

$$\delta L = 0$$

per qualunque spostamento virtuale del corpo. La condizione data è, quindi, anche sufficiente per l'equilibrio.

Esempio 3.6 (Corpo rigido con un punto fisso)**.** Il lavoro delle forze per uno spostamento virtuale di un corpo rigido con un punto fisso O_1 è:

$$\delta L = \vec{\Omega} \cdot \vec{a}\delta\theta \tag{3.9}$$

perchè $\delta O_1 = 0$. Essendo tutti gli spostamenti invertibili, dalla (3.9) si ha:

$$\delta L = \vec{\Omega} \cdot \vec{a}\delta\theta = 0,$$

da cui, ragionando come nell'esempio precedente, si deduce la condizione necessaria per l'equilibrio:

$$\vec{\Omega} = 0.$$

Se poi $\vec{\Omega}$ è nullo, risultano nulli i lavori virtuali per tutti gli spostamenti del sistema, perciò il corpo è in equilibrio.
Si conclude che condizione necessaria e sufficiente affinchè un corpo rigido con un punto fisso sia in equilibrio è che sia nullo il momento risultante delle forze attive rispetto al punto fisso, come visto anche nell'Esempio 2.5.

Esempio 3.7 (Corpo rigido con un asse fisso)**.** Supponiamo che l'asse fisso sia coincidente con l'asse z. Allora si ha che $\vec{a} = \vec{k}$ e:

$$\delta L = \delta\theta\vec{\Omega} \cdot \vec{k} = \Omega_z\delta\theta \tag{3.10}$$

con Ω_z il momento delle forze rispetto all'asse z.
Con un ragionamento analogo a quello dell'esempio precedente, si prova, utilizzando la (3.10), che condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un corpo con asse fisso è che sia nullo il momento risultante Ω_z delle forze attive rispetto all'asse, in analogia con il risultato dell'Esempio 2.6

Esempio 3.8 (Corpo rigido con una retta che scorre su una retta fissa)**.** Supponiamo che i vincoli permettano solo che una retta del corpo scorra su una retta fissa passante per O_1 e coincidente con l'asse z. Lo spostamento del corpo rigido sarà una rototraslazione infinitesima per la quale si ha:

$$\delta P_s = \delta O_1 + \delta\theta\vec{k} \times (P_s - O_1) = \delta z\vec{k} + \delta\theta\vec{k} \times (P_s - O_1) \tag{3.11}$$

dove δz è la componente di δO_1 sull'asse z.
Per il lavoro δL si ha allora:

$$\delta L = \delta z\vec{k} \cdot \sum_{s=1}^{N} \vec{F}_s + \delta\theta \sum_{s=1}^{N} \vec{F}_s \cdot \vec{k} \times (P_s - O_1) = R_z\delta z + \Omega_z\delta\theta, \tag{3.12}$$

essendo R_z la componente del vettore risultante delle forze attive lungo l'asse delle z e Ω_z il momento risultante delle forze attive rispetto all'asse z.
Applicando la (3.12) si ottiene che per l'equilibrio di un corpo rigido con una retta che scorre su un'altra fissa, deve essere:

$$R_z\ \delta z\ +\ \Omega_z\ \delta\theta\ =\ 0 \tag{3.13}$$

perché tutti gli spostamenti sono invertibili. Se imprimiamo al corpo un moto di pura rotazione, deve essere $\delta z = 0$, quindi l'equazione (3.13) dà luogo alla relazione $\Omega_z = 0$. Considerando poi lo spostamento per cui è $\delta\theta = 0$, si ottiene $R_z = 0$.
Viceversa, se è

$$R_z = 0 \qquad\qquad \Omega_z = 0, \tag{3.14}$$

per la (3.12) sono nulli i lavori virtuali per tutti gli spostamenti del corpo; esso è perciò in equilibrio. Quindi le condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio di un corpo rigido, vincolato nel modo ora esposto, sono espresse dalle espressioni (3.14); risultato che conferma quanto visto nell'Esempio 2.9.

Esempio 3.9 (Corpo rigido appoggiato in un punto)**.** Si abbia un corpo C appoggiato in O_1 sul corpo C_1. Per ricercare le condizioni necessarie per l'equilibrio, si cominci con l'imprimere al corpo uno spostamento di rotazione intorno al punto O_1, definito dal vettore applicato $(\delta\theta\vec{a}, O_1)$; questi spostamenti sono invertibili perchè infinitesimi e perchè i due corpi sono a contatto in un solo punto. Per la (3.8) e ricordando che $\delta O_1 = 0$ si ha:

$$\delta L = \vec{\Omega} \cdot \vec{a}\delta\theta = 0$$

e poiché $\vec{a}\delta\theta$ è arbitrario, si ottiene

$$\vec{\Omega} = 0. \tag{3.15}$$

Consideriamo poi gli spostamenti di traslazione per i quali δO_1 ha direzione tangenziale alla superficie di contatto. Questi spostamenti sono invertibili, per cui si ha:

$$\delta L \;=\; \vec{F} \cdot \delta O_1 \;=\; 0,$$

quindi il vettore risultante $\vec{F}$ delle forze attive deve essere nullo, oppure diretto normalmente a δO_1, ossia al piano tangente comune ai due corpi in O_1.

Per uno spostamento che produca distacco (non invertibile) si ha:

$$\delta L \;=\; \vec{F} \cdot \delta O_1 < 0$$

quindi $\vec{F}$ e δO_1 devono formare un angolo ottuso, perciò $\vec{F}$ dovrà essere diretto da C verso C_1.

Si conclude, pertanto, che condizioni necessarie per l'equilibrio sono l'annullarsi del momento risultante $\vec{\Omega}$ delle forze attive rispetto al punto di contatto O_1 e l'essere il vettore risultante $\vec{F}$ delle stesse forze attive diretto normalmente alla superficie di contatto, dal corpo appoggiato verso quello fisso.

Tali condizioni sono anche sufficienti: essendo $\vec{\Omega} = 0$, il lavoro virtuale, per qualunque spostamento, è dato da

$$\delta L = \vec{F} \cdot \delta O_1. \tag{3.16}$$

Ora δO_1 per ogni spostamento invertibile deve essere tangente alla superficie di contatto, ossia normale ad $\vec{F}$, e ne risulta nullo il lavoro virtuale corrispondente. Per ogni spostamento non invertibile δO_1 forma un angolo ottuso con

$\vec{F}$ e quindi $\delta L < 0$. Si verifica così l'equilibrio e si ritrovano i risultati dell'Esempio 2.10.

3.2 Lavoro delle reazioni vincolari

Nell'enunciato del principio dei lavori virtuali, Postulato 3.1, si tiene conto solo del lavoro delle forze attive, mentre non interviene affatto quello delle reazioni vincolari. La notevole importanza di tale principio è data, quindi, anche dal fatto che si può procedere alla ricerca delle condizioni di equilibrio evitando l'introduzione delle reazioni vincolari che sono incognite.
É possibile, tuttavia, enunciare un postulato equivalente al Postulato 3.1 nel quale intervengono solo le reazioni vincolari:

Postulato 3.10. *Supposti i vincoli lisci, condizione necessaria e sufficiente affinchè le reazioni vincolari agenti sui punti di un sistema meccanico siano compatibili con la natura dei vincoli è che il loro lavoro virtuale sia nullo per spostamenti invertibili, positivo o al più nullo per spostamenti non invertibili.*

In formule:

$$\delta\rho \;:=\; \sum_{s=1}^{N} \vec{\Phi}_s \cdot \delta P_s \;\geq\; 0 \tag{3.17}$$

dove $\vec{\Phi}_s$ è la reazione vincolare del punto P_s del sistema e $\delta\rho$ il lavoro virtuale delle reazioni vincolari.
Si può dimostrare che dalla (3.17) segue il principio dei lavori virtuali per le forze attive. Supponiamo, innanzitutto, che il sistema sia in equilibrio. Per ogni punto del sistema P_s, allora, per la (2.3), varrà:

$$\vec{F}_s \;+\; \vec{\Phi}_s \;=\; 0. \tag{3.18}$$

Consideriamo uno spostamento virtuale del sistema per cui P_s si sposta di δP_s; moltiplicando scalarmente la (3.18) per δP_s e sommando su tutti i punti del sistema, avremo:

$$\sum_{s=1}^{N} \vec{F}_s \cdot \delta P_s \;+\; \sum_{s=1}^{N} \vec{\Phi}_s \cdot \delta P_s \;=\; 0 \tag{3.19}$$

e da questa relazione, ricordando la (3.17), si ha subito:

$$\delta L \;=\; \sum_{s=1}^{N} \vec{F}_s \cdot \delta P_s \;\leq 0. \tag{3.20}$$

Abbiamo, così, provato che la (3.20) è necessaria per l'equilibrio. La dimostrazione che la (3.17) è anche sufficiente per l'equilibrio offre alcune difficoltà (si veda [1] per approfondimenti su questo argomento); ci limiteremo a giustificare il risultato con le seguenti considerazioni: attribuiamo alla reazione $\vec{\Phi}_s$ nel punto generico P_s del sistema il valore $-\vec{F}_s$. In questo modo si soddisfa la (3.17) perchè si ha:

$$\delta\rho \;=\; \sum_{s=1}^{N} \vec{\Phi}_s \cdot \delta P_s \;=\; -\sum_{s=1}^{N} \vec{F}_s \cdot \delta P_s \;=\; -\,\delta L \;\geq 0. \tag{3.21}$$

Si è così costruito un sistema di reazioni vincolari compatibili con la natura dei vincoli e in equilibrio in ogni punto con le forze attive. Dunque l'equazione dei lavori virtuali (3.17) è sufficiente per l'equilibrio.

Bibliografia

[1] D.Graffi - *Elementi di Meccanica Razionale* - Patron, Bologna 1973.

[2] S.Graffi, Appunti dalle lezioni di Fisica Matematica II - http://www.dm.unibo.it/fismat/didattica/html.

[3] T.Levi Civita, U.Amaldi - *Lezioni di meccanica razionale* vol.I - Zanichelli, Bologna 1948.

Ringraziamenti

Il primo ringraziamento va a Tommy che mi è sempre stato vicino nei momenti belli e in quelli più difficili, con pazienza e allegria.
Ringrazio la mia famiglia per il sostegno in ogni campo durante questo percorso universitario e Veronica per la gioia che mi ha trasmesso che mi ha permesso di affrontare meglio tutti e 3 gli anni.
Ringrazio la professoressa Caliceti per il tempo che mi ha dedicato e per la disponibilità che ha dimostrato.
Un ringraziamento sincero va alla professoressa Vagni che oltre ad avermi trasmesso la passione per la matematica, ha continuato a sostenermi anche dopo il liceo.
Per ultimi, ma non per importanza, ringrazio i miei amici, compagni di corso e non, che hanno gioito con me per i traguardi raggiunti.