

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea Specialistica in Matematica

ANALISI DI MODELLI NON-LINEARI  
PER IL TRASPORTO DI CARICHE  
IN SEMICONDUTTORI

Tesi di Laurea in Fisica Matematica

**Relatore:**  
Chiar.mo Prof.  
MIRKO DEGLI ESPOSTI

**Presentata da:**  
LARA VANDINI

**Correlatore:**  
Chiar.mo Prof.  
ANDREA SACCHETTI

**Seconda Sessione**  
**Anno Accademico 2009/10**



*“Je me demande, dit-il, si  
les étoiles sont éclairées  
afin que chacun  
puisse un jour  
retrouver la sienne”*

*Le Petit Prince  
Antoine de Saint-Exupéry*



# Introduzione

In questa tesi ci si propone di studiare un modello non-lineare di trasporto per cariche elettriche in semi-conduttori. Dal punto di vista matematico questo consiste nell'analisi di sistemi di tipo Schrödinger-Poisson dove il termine non lineare rappresenta l'effetto della mutua interazione tra le cariche. L'esempio cui facciamo riferimento è il modello uni-dimensionale che descrive il diodo a effetto tunnel risonante.

Gli argomenti presentati nella tesi possono essere così suddivisi.

Nella prima parte della tesi vengono richiamate nozioni classiche di analisi spettrale tra cui quelle di operatore di classe traccia, operatore di Hilbert-Schmidt e decomposizione dello spettro di un operatore autoaggiunto che saranno utili all'analisi del nostro modello.

Nella seconda parte della tesi introduciamo le notazioni classiche del problema a cui facciamo riferimento e poniamo delle ipotesi fondamentali. Più precisamente, l'operatore di Schrödinger considerato prende la forma

$$H(\hbar) := -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} + V + \mathcal{B} + V_{NL}^{\hbar}$$

dove  $V(x)$  è il potenziale rappresentante il dispositivo (ad esempio il diodo),  $\mathcal{B}(x)$  rappresenta il campo esterno e  $V_{NL}^{\hbar}$  rappresenta il termine non-lineare. Questo termine non-lineare descrive le interazioni tra i portatori di cariche in un'approssimazione di campo medio e non è esplicitamente noto, infatti esso verifica un'equazione di Poisson:

$$-\Delta V_{NL}^{\hbar} = n^{\hbar}$$

con assegnate condizioni ai bordi, dove la  $n^{\hbar}$  è la densità di carica. Il sistema risultante dall'equazione di Schrödinger associata ad  $H(\hbar)$  e dall'equazione di Poisson prende il nome di sistema di Schrödinger-Poisson.

I principali risultati ottenuti riguardano esistenza e regolarità delle soluzioni di tale sistema, e l'analisi del limite semiclassico sviluppata attraverso la trasformata di Wigner (che porta al problema standard con condizioni al bordo per il sistema di Vlasov-Poisson classico).



# Indice

<b>1</b>	<b>Analisi spettrale</b>	<b>7</b>
1.1	Operatori di classe traccia . . . . .	7
1.2	Operatori di Hilbert-Schmidt . . . . .	9
1.3	Misure spettrali . . . . .	12
1.4	Proiezioni spettrali . . . . .	13
1.5	Teorema spettrale per operatori autoaggiunti non limitati . .	18
1.6	Operatore di Schrödinger con potenziale discontinuo . . . .	20
1.7	Funzione di Green . . . . .	30
1.8	Risoluzione spettrale . . . . .	32
<b>2</b>	<b>Modelli per il trasporto di cariche</b>	<b>41</b>
2.1	Sull'equazione di Schrödinger con non linearità concentrate	41
2.2	Diodo ad effetto tunnel risonante . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Un modello di scattering Schrödinger-Poisson</b>	<b>51</b>
3.1	Introduzione . . . . .	51
3.2	Esistenza delle soluzioni . . . . .	53
3.3	Limite semiclassico per potenziali decrescenti . . . . .	63
3.4	Osservazioni nel caso generale . . . . .	74
3.5	Limite di scala . . . . .	77
	<b>Bibliografia</b>	<b>85</b>



# Capitolo 1

## Analisi spettrale

### 1.1 Operatori di classe traccia

In questa sezione introdurremo alcuni tipi di operatori che sono necessari per definire il concetto di stato quantistico. Tali operatori sono noti in letteratura come operatori di classe traccia.

**Teorema 1.1.1.** *Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert separabile,  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  una base ortonormale. Allora per ogni operatore positivo  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  definiamo*

$$\text{tr} A = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n, A\varphi_n).$$

Il numero  $\text{tr} A$  è detto **traccia di A** ed è indipendente dalla base ortonormale scelta. La traccia ha le seguenti proprietà

- (a)  $\text{tr}(A + B) = \text{tr} A + \text{tr} B$ .
- (b)  $\text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr}(A)$  per ogni  $\lambda \geq 0$ .
- (c)  $\text{tr}(UAU^{-1}) = \text{tr} A$  per ogni operatore unitario  $U$ .
- (d) Se  $0 \leq A \leq B$ , allora  $\text{tr} A \leq \text{tr} B$

*Dimostrazione.* Data una base ortonormale  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ , definiamo

$$\text{tr}_{\varphi} A = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n, A\varphi_n)$$

. Se  $\{\psi_m\}_{m=1}^\infty$  é un' altra base ortonormale allora

$$\begin{aligned}
 tr_\varphi(A) &= \sum_{n=1}^\infty (\varphi_n, A\varphi_n) = \sum_{n=1}^\infty \|A^{1/2}\varphi_n\|^2 \\
 &= \sum_{n=1}^\infty \left( \sum_{m=1}^\infty |(\psi_m, A^{1/2}\varphi_n)|^2 \right) \\
 &= \sum_{m=1}^\infty \left( \sum_{n=1}^\infty |(A^{1/2}\psi_m, \varphi_n)|^2 \right) \\
 &= \sum_{m=1}^\infty \|A^{1/2}\psi_m\|^2 \\
 &= \sum_{m=1}^\infty (\psi_m, A\psi_m) \\
 &= tr_\psi(A)
 \end{aligned}$$

Siccome tutti i termini sono positivi é permesso scambiare le somme. Dimostriamo

(a)

$$\begin{aligned}
 tr_\varphi(A+B) &= \sum_{n=1}^\infty (\varphi_n, (A+B)\varphi_n) \\
 &= \sum_{n=1}^\infty (\varphi_n, A\varphi_n) + \sum_{n=1}^\infty (\varphi_n, B\varphi_n) \\
 &= trA + trB
 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 tr_\varphi(\lambda A) &= \sum_{n=1}^\infty (\varphi_n, \lambda A\varphi_n) \\
 &= \lambda \sum_{n=1}^\infty (\varphi_n, A\varphi_n) \\
 &= \lambda trA
 \end{aligned}$$

(c) Se  $\{\varphi_n\}$  é una base ortonormale, allora lo é anche  $\{U\varphi_n\}$ . Dunque

$$\begin{aligned}
 tr(UAU^{-1}) &= tr_{(U\varphi)}(UAU^{-1}) \\
 &= \sum_{n=1}^\infty (U\varphi, UAU^{-1}U\varphi) \\
 &= tr_\varphi(A) \\
 &= tr(A)
 \end{aligned}$$

(d) Se  $0 \leq A \leq B$  allora  $tr_\varphi(A) \leq tr_\varphi(B)$  quindi  $trA \leq trB$ .  $\square$

**Definizione 1.1.2.** Un operatore  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  é detto di classe traccia se e solo se  $tr|A| \leq \infty$ . La famiglia degli operatori di classe traccia é denotata  $\mathcal{F}_1$ .

## 1.2 Operatori di Hilbert-Schmidt

La seconda classe di operatori di cui parleremo é quella degli operatori di Hilbert-Schmidt che costituisce una classe particolare degli operatori compatti. Ricordiamo che un operatore  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  é di rango finito se é limitato e il suo range é finito dimensionale.

**Definizione 1.2.1.** Un operatore  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  é detto di Hilbert-Schmidt se e solo se  $\text{tr}(T^*T) < \infty$ , dove  $T^*$  indica l'operatore autoaggiunto di  $T$ . La famiglia degli operatori di Hilbert-Schmidt é denotata  $\mathcal{F}_2$

**Teorema 1.2.2.** Per gli operatori di Hilbert-Schmidt valgono le seguenti proprietà

- (a)  $\mathcal{F}_2$  é un ideale bilatero  
 (b) Se  $A, B \in \mathcal{F}_2$ , allora per ogni base ortonormale  $\{\varphi_n\}$ ,

$$(A, B)_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (\varphi_n, A^* B \varphi_n)$$

é assolutamente sommabile e il suo limite é indipendente dalla base ortonormale scelta.

- (c)  $\mathcal{F}_2$  con il prodotto scalare  $(\cdot, \cdot)_2$  é uno spazio di Hilbert.  
 (d) Se  $\|A\|_2 = \sqrt{(A, A)_2} = (\text{tr}(A^* A))^{1/2}$ , allora

$$\|A\| \leq \|A\|_2 \quad e \quad \|A\|_2 = \|A^*\|_2$$

- (e) Ogni  $A \in \mathcal{F}_2$  é compatto e un operatore compatto  $A$ , é in  $\mathcal{F}_2$  se e solo se  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty$  dove  $\lambda_n$  sono gli autovalori non nulli di  $A$ .  
 (f) Gli operatori di rango finito sono  $\|\cdot\|_2$ -densi in  $\mathcal{F}_2$   
 (g)  $A \in \mathcal{F}_2$  se e solo se  $\{\|A\varphi_n\|\} \in l^2$  per una base ortonormale  $\{\varphi_n\}$ .  
 (h)  $A \in \mathcal{F}_1$  se e solo se  $A = BC$  con  $B, C$  in  $\mathcal{F}_2$

Gli operatori di Hilbert-Schmidt sono compatti e formano un ideale bilatero all'interno dello spazio degli operatori limitati, cioè  $\mathcal{F}_2$  é chiuso rispetto alla moltiplicazione per scalare, alla somma di operatori e alla coniugazione hermitiana. Osserviamo che  $\mathcal{F}_2$  non é  $\|\cdot\|$ -chiuso. Un esempio importante é quello dato da alcuni operatori indotti da nuclei integrali (vedi [5], teorema VI.23).

**Teorema 1.2.3.** Sia  $\langle M, \mu \rangle$  uno spazio misurabile (con  $\mu$  misura  $\sigma$ -finita separabile) e  $\mathcal{H} = L^2(M, d\mu)$ . Si dimostra che gli operatori

$$A_K : L^2(M, d\mu) \rightarrow L^2(M, d\mu)$$

indotti dai nuclei integrali  $K \in L^2(M \times M, d\mu \otimes d\mu)$  con

$$(A_K f)(x) := \int K(x, y) f(y) d\mu(y)$$

sono operatori di Hilbert-Schmidt. Inoltre

$$\|A_K\|_2^2 = \int |K(x, y)|^2 d\mu(x) d\mu(y)$$

*Dimostrazione.* Sia  $A_K$  l'operatore integrale indotto dal nucleo integrale  $K \in L^2(M \times M, d\mu \otimes d\mu)$ , dimostriamo che  $\forall f \in L^2(M, d\mu)$

$$\int_M \left( \int_M |K(x, y)| |f(y)| d\mu(y) \right)^2 d\mu(x) < +\infty$$

che dimostrerà che l'integrale  $\int_M K(x, y) f(y) d\mu(y)$  è assolutamente convergente  $\mu$ -q.o.  $x \in M$ . Definiamo l'operatore  $A_K$  ponendo per  $f \in L^2(M, d\mu)$  e per  $x \in M$   $\mu$ -q.o.

$$(A_K f)(x) = \int_M K(x, y) f(y) d\mu(y)$$

Dimostriamo che  $A_K$  è ben definito e che agisce da  $L^2(M, d\mu) \rightarrow L^2(M, d\mu)$ , per Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned} \left( \int_M |K(x, y)| |f(y)| d\mu(y) \right)^2 &\leq \int_M |K(x, y)|^2 d\mu(y) \\ &\cdot \int_M |f(y)|^2 d\mu(y) \end{aligned}$$

e reintegrando si ha

$$\begin{aligned} \int_M \left( \int_M |K(x, y)| |f(y)| d\mu(y) \right)^2 d\mu(x) &\leq \int_{M \times M} |K(x, y)|^2 d\mu(x) d\mu(y) \\ &\cdot \int_M |f(y)|^2 d\mu(y) \end{aligned}$$

che è una quantità finita perché  $K \in L^2(M \times M, d\mu \otimes d\mu)$  e  $f \in L^2(M, d\mu)$ . Quindi

$$\begin{aligned} \int_M |(A_K f)(x)|^2 d\mu(x) &= \int_M \left| \int_M K(x, y) f(y) d\mu(y) \right|^2 d\mu(x) \\ &\leq \int_M \left( \int_M |K(x, y)| |f(y)| d\mu(y) \right)^2 d\mu(x) \\ &\leq \int_{M \times M} |K(x, y)|^2 d\mu(x) d\mu(y) \cdot \int_M |f(y)|^2 d\mu(y) \\ &= \|K\|_2^2 \|f\|^2 \end{aligned}$$

così l'integrale definito da  $A_K$  è assolutamente convergente per  $\mu$ -q.o.  $x \in M$  e

$$\|A_K\| \leq \|K\|_{L^2(M \times M, d\mu \otimes d\mu)}$$

Sia  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una base hilbertiana di  $L^2(M, d\mu)$  allora  $\{u_n \bar{u}_m\}_{n, m \in \mathbb{N}}$  è una base hilbertiana di  $L^2(M \times M, d\mu \otimes d\mu)$  (è l'ordinario prodotto di funzioni punto per punto) e, allora nella topologia di  $L^2(M \times M, d\mu \otimes d\mu)$  si ha la seguente serie assolutamente convergente

$$K = \sum_{n, m} k_{nm} u_n \bar{u}_m$$

dove i numeri  $k_{nm} \in \mathbb{C}$  dipendono da  $K$ . Quindi posto

$$K_p := \sum_{n, m \leq p} k_{nm} u_n \bar{u}_m$$

si ha che  $K_p \rightarrow K$  per  $p \rightarrow +\infty$  nella norma  $L^2(M \times M, d\mu \otimes d\mu)$ . Tenendo conto di  $\|A_K\| \leq \|K\|_{L^2(M \times M, d\mu \otimes d\mu)}$  applicata agli operatori  $A_{K_p - K} = A_{K_p} - A_K$  dove  $A_{K_p}$  è indotto dal nucleo integrale  $K_p$ , segue che, per  $p \rightarrow +\infty$

$$\|A_K - A_{K_p}\| = \left\| \sum_{n, m > p} k_{nm} u_n \bar{u}_m \right\|_{L^2(M \times M, d\mu \otimes d\mu)} \rightarrow 0$$

per cui  $A_K$  è compatto in quanto gli operatori  $A_{K_p}$  sono compatti essendo somme finite di operatori di dimensione finita.

Mostriamo, ora che gli operatori  $A_K : L^2(M, d\mu) \rightarrow L^2(M, d\mu)$  indotti dai nuclei integrali  $K \in L^2(M \times M, d\mu \otimes d\mu)$  (con  $\mu$  misura  $\sigma$ -finita separabile) sono anche di Hilbert-Schmidt. Sia  $f \in L^2(M, d\mu)$  dato che  $(A_K f)(x) \in L^2(M, d\mu)$ , per ogni  $g \in L^2(M, d\mu)$  la funzione  $x \rightarrow g(x)(A_K f)(x)$  è una funzione integrabile (in modo da poter definire il prodotto scalare tra  $g$  e  $A_K f$ ). Il teorema di Fubini-Tonelli assicura, quindi che la funzione  $(x, y) \rightarrow g(x)K(x, y)f(y)$  è in  $L^2(M \times M, d\mu \otimes d\mu)$  e che

$$\begin{aligned} \int_{M \times M} \overline{g(x)} K(x, y) f(y) d\mu(x) \otimes d\mu(y) &= \\ &= \int_M d\mu(x) \overline{g(x)} \int_M K(x, y) f(y) d\mu(y) \\ &= (g, A_K f) \end{aligned}$$

Dato che  $K \in L^2(M \times M, d\mu \otimes d\mu)$  varrà lo sviluppo

$$K = \sum_{i, j} \alpha_{ij} u_i \bar{u}_j$$

con  $\{u_i \bar{u}_j\}_{i, j}$  base hilbertiana di  $L^2(M \times M, d\mu \otimes d\mu)$ . Per cui

$$\|K\|_{L^2}^2 = \sum_{i, j} |\alpha_{ij}|^2 < +\infty \quad (1.2.1)$$

D'altra parte si ha

$$\begin{aligned}(u_i, A_K u_j) &= \int_{M \times M} \overline{u_i(x)} u_j(y) K(x, y) d\mu(x) \otimes d\mu(y) \\ &= (u_i \cdot u_j, K) \\ &= \alpha_{ij}\end{aligned}$$

Per cui (1.2.1) si può riscrivere

$$\|K\|_{L^2}^2 = \sum_{i,j} |(u_i, A_K u_j)|^2 < +\infty$$

Inoltre

$$\text{tr}(A_K^* A_K) = \sum_i \|A_K u_i\|^2 = \sum_j \sum_i |\alpha_{ij}| = \|K\|_{L^2}$$

Per definizione di operatore di Hilbert-Schmidt  $A_K$  é quindi un operatore di Hilbert-Schmidt e vale anche  $\|A_K\|_2 = \|K\|_{L^2}$   $\square$

### 1.3 Misure spettrali

Ricordiamo che ogni misura  $\mu$  su  $\mathbb{R}$  ha un'unica decomposizione in  $\mu = \mu_{pp} + \mu_{ac} + \mu_{sing}$  dove  $\mu_{pp}$  é una misura puramente puntuale,  $\mu_{ac}$  é assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue, e  $\mu_{sing}$  é continua e singolare rispetto alla misura di Lebesgue.

**Definizione 1.3.1.** Sia  $A$  un operatore limitato autoaggiunto su  $\mathcal{H}$ ,  $\psi \in \mathcal{H}$  e  $\mu_\psi$  la corrispondente misura spettrale su  $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ . Sia  $\mathcal{H}_{pp} = \{\psi | \mu_\psi \text{ é puramente puntuale}\}$ ,  $\mathcal{H}_{ac} = \{\psi | \mu_\psi \text{ é assolutamente continuo}\}$ ,  $\mathcal{H}_{sing} = \{\psi | \mu_\psi \text{ é singolare continuo}\}$ .

Con questa decomposizione abbiamo assicurato la validità del seguente teorema.

**Teorema 1.3.2.** ([5], teorema VII.4)

$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{pp} \oplus \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_{sing}$ . Ognuno di questi sottospazi é invariante rispetto all'operatore autoaggiunto  $A$ .  $A \upharpoonright \mathcal{H}_{pp}$  ha un insieme completo di autovettori,  $A \upharpoonright \mathcal{H}_{ac}$  ha solo misure spettrali assolutamente continue e  $A \upharpoonright \mathcal{H}_{sing}$  ha solo misure spettrali singolari continue

Diamo ora la definizione che concerne la suddivisione dello spettro dell'operatore  $A$ :

**Definizione 1.3.3.**

$$\begin{aligned}\sigma_{pp}(A) &= \{\lambda | \lambda \text{ é un autovalore di } A\} \\ \sigma_{cont}(A) &= \sigma(A \upharpoonright \mathcal{H}_{cont} \equiv \mathcal{H}_{sing} \oplus \mathcal{H}_{ac}) \\ \sigma_{ac}(A) &= \sigma(A \upharpoonright \mathcal{H}_{ac}) \\ \sigma_{sing}(A) &= \sigma(A \upharpoonright \mathcal{H}_{sing}).\end{aligned}$$

Questi insiemi sono chiamati rispettivamente *spettro puramente puntuale, continuo, assolutamente continuo, e singolare*.

E bene notare che si potrebbe avere il caso  $\sigma_{ac} \cup \sigma_{sing} \cup \sigma_{pp} \neq \sigma$ . Questo é dovuto alla definizione di  $\sigma_{pp}$  come insieme di autovalori di  $A$  e non  $\sigma(A|\mathcal{H}_{pp})$ . L'affermazione seguente é sempre vera:

**Proposizione 1.3.4.**

$$\begin{aligned}\sigma_{cont}(A) &= \sigma_{ac}(A) \cup \sigma_{sing}(A) \\ \sigma(A) &= \overline{\sigma_{pp}(A)} \cup \sigma_{cont}(A).\end{aligned}$$

## 1.4 Proiezioni spettrali

In questa sezione presentiamo il teorema spettrale nella projection-valued measure form. Dapprima consideriamo un insieme misurabile  $\Omega$  e la funzione caratteristica  $\chi_\Omega$  di questo insieme, che é una funzione boreliana (vedi [5], sezione VII.3). Poniamo l'attenzione sulla nostra prima definizione.

**Definizione 1.4.1.** Sia  $A$  un operatore limitato autoaggiunto e  $\Omega$  un insieme boreliano di  $\mathbb{R}$ .  $P_\Omega \equiv \chi_\Omega(A)$  é detta *proiezione spettrale* di  $A$ .

Possiamo facilmente dimostrare che  $P_\Omega$  é una proiezione ortogonale, cioè  $P_\Omega P_\Omega = P_\Omega = P_\Omega^*$ . Infatti essendo  $\chi_\Omega = 1$  allora  $\chi_\Omega^2 = 1$  e  $\overline{\chi_\Omega} = 1$  da cui segue l'affermazione.

Nella proposizione seguente consideriamo la famiglia di proiezioni  $\{P_\Omega | \Omega \text{ é un insieme Boreliano}\}$  ed enunciamo le sue proprietà.

**Proposizione 1.4.2.** La famiglia  $\{P_\Omega\}$  di proiezioni spettrali di un operatore  $A$  limitato e autoaggiunto ha le seguenti proprietà:

- (a)  $P_\Omega$  é una proiezione ortogonale.
- (b)  $P_\emptyset = 0$ ;  $P_{(-a,a)} = I$  per qualche  $a$ .
- (c) Sia  $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$  con  $\Omega_n \cap \Omega_m = \emptyset \quad \forall n \neq m$   
allora  $P_\Omega = s - \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=1}^N P_{\Omega_n} \right)$
- (d)  $P_{\Omega_1} P_{\Omega_2} = P_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$

*Dimostrazione.* (a) Già dimostrata.

(b) Siccome per definizione  $P_\emptyset = \chi_\emptyset(A)$  sapendo che  $\chi_\emptyset \equiv 0$  segue che  $P_\emptyset = 0$ . Continuiamo ora con la prova della seconda parte dell'affermazione. Il fatto di avere un operatore limitato  $A$  con norma  $\|A\|$  ci permette

di concludere che  $\sigma(A) \subset [-\|A\|, \|A\|]$ . Qui abbiamo usato ([2], teorema 7.3-4) e ([2], teorema 9.1-3). Consideriamo la funzione  $\chi_{\sigma(A)}$  che vale 1 su  $\sigma(A)$ . Per il teorema di continuità del calcolo funzionale ([5], teorema VII.1 (a)) abbiamo  $\chi_{\sigma(A)}(A) = I$ , quindi se prendiamo  $a > \|A\|$  abbiamo  $\chi_{\sigma(A)}(A) = P_{(-a,a)} = I$

(c) Dapprima consideriamo il caso in cui  $N$  é finito. Sia  $\Omega = \bigcup_{n=1}^N \Omega_n$ , allora

$$P_{\Omega} = P_{\bigcup_{n=1}^N \Omega_n} = \chi_{\bigcup_{n=1}^N \Omega_n}(A) = \left( \sum_{n=1}^N \chi_{\Omega_n} \right)(A) = \sum_{n=1}^N \chi_{\Omega_n}(A) = \sum_{n=1}^N P_{\Omega_n}$$

La terza uguaglianza é vera perché gli insiemi considerati sono disgiunti e la quarta uguaglianza é data dalla proprietá di additività dell'omomorfismo. Vediamo ora cosa succede quando  $N$  va all'infinito. Consideriamo la funzione  $\chi_N = \chi_{\bigcup_{n=1}^N \Omega_n}$ . Sappiamo che  $\|\chi_N\|_{\infty} \leq 1$  per ogni  $N$  perché gli insiemi sono disgiunti. Inoltre per ogni  $x \in \mathbb{R}$  fissato

$$\chi_N(x) = \chi_{\bigcup_{n=1}^N \Omega_n}(x) = \sum_{n=1}^N \chi_{\Omega_n}(x) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\Omega_n}(x) = \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n}(x) = \chi_{\Omega}(x)$$

quando  $N$  tende a infinito. La somma infinita é convergente perché gli insiemi considerati sono disgiunti. Se  $\chi_N(x) \rightarrow \chi_{\Omega}(x)$  per  $N \rightarrow \infty$  e  $\|\chi_N\| < 1$  allora

$$P_{\Omega} \equiv \chi_{\Omega} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \chi_{\Omega_n} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N P_{\Omega_n}.$$

(d) Per definizione e per la proprietá di omomorfismo abbiamo che

$$P_{\Omega_1} P_{\Omega_2} = \chi_{\Omega_1}(A) \chi_{\Omega_2}(A) = \chi_{\Omega_1 \Omega_2}(A).$$

Dobbiamo verificare che  $\chi_{\Omega_1} \chi_{\Omega_2} = \chi_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$ . Questo é vero, infatti se il fattore di destra é uguale a uno in un punto allora tale punto deve appartenere sia a  $\Omega_1$  che a  $\Omega_2$ , di conseguenza il membro di sinistra é uguale a uno. Quindi

$$P_{\Omega_1} P_{\Omega_2} = \chi_{\Omega_1}(A) \chi_{\Omega_2}(A) = \chi_{\Omega_1 \cap \Omega_2}(A) = P_{\Omega_1 \cap \Omega_2}.$$

□

Se pensiamo alla definizione di misura in particolare all'addittività numerabile, vediamo una forte connessione con la condizione (c) della proposizione precedente, dunque siamo motivati a dare la definizione seguente:

**Definizione 1.4.3.** Una famiglia di proiezioni  $\{P_{\Omega}\}$  per cui vale (a)-(c) é detta *bounded projection-valued measure* (p.v.m.).

Come ci suggerisce il nome projection-valued measure possiamo utilizzare questa misura per integrare. Data una p.v.m.  $P_\Omega$  allora per ogni insieme boreliano  $\Omega$  possiamo definire un numero reale  $m(\Omega) = (\phi, P_\Omega \phi)$  dove  $m$  dipende dalla scelta del vettore  $\phi \in \mathcal{H}$ . Ricordiamo che  $m(\Omega)$  é reale, perché  $P_\Omega$  é autoaggiunto. Possiamo facilmente dimostrare che  $m$  é una misura boreliana:

$$- m(\emptyset) = (\phi, P_\emptyset \phi) = (\phi, 0\phi) = 0.$$

- Se  $\Omega_1, \Omega_2, \dots$  sono coppie disgiunte di insiemi boreliani allora

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n\right) &= (\phi, P_{\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n} \phi) = \left(\phi, \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N P_{\Omega_n} \phi\right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (\phi, P_{\Omega_n} \phi) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N m(\Omega_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(\Omega_n). \end{aligned}$$

D'ora in avanti utilizziamo il simbolo  $d(\phi, P_\lambda \phi)$  per denotare l'integrazione rispetto alla misura  $m(\Omega) = (\phi, P_\Omega \phi)$ . Per costruzione il supporto di ogni  $(\phi, P_\Omega \phi)$  é un sottoinsieme di  $\sigma(A)$ . Quindi se integriamo rispetto alla misura  $(\phi, P_\Omega \phi)$  integriamo su  $\sigma(A)$ . Se lavoriamo con una qualsiasi p.v.m denoteremo il supporto della misura corrispondente con  $\text{supp}(P_\Omega)$ . In particolare per il lemma di Riesz possiamo trovare un unico operatore  $B$  tale che  $(\phi, B\phi) = \int_{\text{supp}(P_\Omega)} f(\lambda) d(\phi, P_\lambda \phi)$  per ogni vettore  $\phi \in \mathcal{H}$ .

Possiamo enunciare il prossimo teorema:

**Teorema 1.4.4.** *Se  $\{P_\Omega\}$  é una p.v.m. e  $f$  una funzione boreliana limitata su  $\text{supp}(P_\Omega)$ , allora esiste un'unico operatore  $B$  che denotiamo  $\int_{\text{supp}(P_\Omega)} f(\lambda) dP_\lambda$  tale che*

$$(\phi, B\phi) = \int_{\text{supp} P_\Omega} f(\lambda) d(\phi, P_\lambda \phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{H}$$

Ora dimostriamo che se  $P_\Omega(A)$  é una p.v.m associata all'operatore autoaggiunto  $A$  allora

$$f(A) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda) dP_\lambda(A) \quad (1.4.1)$$

Dapprima assumiamo  $f(\lambda) = \chi_\Omega(\lambda)$ , allora

$$\begin{aligned} \int_{\sigma(A)} \chi_\Omega(\lambda) d(\phi, P_\lambda(A), \phi) &= \int_{\sigma(A) \cap \Omega} d(\phi, P_\lambda(A), \phi) \\ &= d(\phi, P_\Omega(A), \phi) \\ &= (\phi, \chi_\Omega(A)\phi) \end{aligned}$$

Quindi (1.4.1) é valida per tutte le funzioni semplici. Se approssimiamo ogni funzione misurabile  $f(\lambda)$  con una successione di funzioni semplici otteniamo (1.4.1) per funzioni boreliane limitate su  $\sigma(A)$ .

**Esempio** Se prendiamo  $f(x) = x$  abbiamo  $A = \int \lambda dP_\lambda$ . Useremo questo fatto nella dimostrazione della proposizione seguente. Siamo ora in grado di enunciare il teorema spettrale per operatori limitati e autoaggiunti nella sua p.v.m. forma.

**Teorema 1.4.5. (Teorema spettrale, p.v.m. limitate)** ([5], teorema VII.8)  
Si ha una corrispondenza uno a uno fra gli operatori  $A$  autoaggiunti e limitati e la famiglia delle p.v.m.  $\{P_\Omega\}$  in  $\mathcal{H}$ . Tale corrispondenza é data da:

$$\begin{aligned} A &\mapsto \{P_\Omega\} = \{\chi_\Omega(A)\} \\ \{P_\Omega\} &\mapsto A = \int \lambda dP_\lambda \end{aligned}$$

Ora utilizziamo le nostre nuove conoscenze sulle proiezioni spettrali per enunciare delle proposizioni che forniscono delle condizioni affinché un numero reale  $\lambda$  sia nello spettro di un operatore autoaggiunto  $A$ .

**Proposizione 1.4.6.**  $\lambda_0 \in \sigma(A)$  se e solo se  $P_{(\lambda_0-\varepsilon, \lambda_0+\varepsilon)} \neq 0$  per ogni  $\varepsilon > 0$

*Dimostrazione.* Dimostriamo solo la condizione necessaria del teorema. Supponiamo che esiste  $\varepsilon_0 > 0$  tale che  $P_{(\lambda_0-\varepsilon_0, \lambda_0+\varepsilon_0)} = 0$  e sia  $\Omega = (\lambda_0 - \varepsilon_0, \lambda_0 + \varepsilon_0)$ . Il nostro obiettivo é quello di dimostrare che  $\lambda_0 \notin \sigma(A)$ , in altre parole  $\lambda_0 \in \rho(A)$  dove  $\rho(A)$  indica l'insieme risolvente di  $A$ . Ora sia  $\phi$  un vettore arbitrario in  $\mathcal{H}$  e sia  $m$  la corrispondente misura boreliana su  $\mathbb{R}$ . Per la nostra ipotesi sappiamo che  $m(\Omega) = (\phi, P_\Omega \phi) = 0$ , quindi  $d(\phi, P_\lambda \phi) = 0$  su  $\Omega$ . Ora utilizziamo l'esempio precedente e abbiamo

$$\begin{aligned} \|(A - \lambda_0)\phi\|^2 &= ((A - \lambda_0)\phi, (A - \lambda_0)\phi) \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\lambda - \lambda_0)^2 d(\phi, P_\lambda \phi) \\ &= \int_{\Omega} (\lambda - \lambda_0)^2 d(\phi, P_\lambda \phi) + \int_{\Omega^c} (\lambda - \lambda_0)^2 d(\phi, P_\lambda \phi) \end{aligned}$$

Il valore di questo integrale su  $\Omega$  é zero perché  $d(\phi, P_\lambda \phi)$  é zero su  $\Omega$ . Inoltre sappiamo che per  $\lambda \notin \Omega$  abbiamo  $(\lambda - \lambda_0)^2 \geq \varepsilon_0^2$  quindi possiamo fare la seguente stima:

$$\|(A - \lambda_0)\phi\|^2 \geq \varepsilon_0^2 \int d(\phi, P_\lambda \phi) = \varepsilon_0^2 \|\phi\|^2$$

da cui otteniamo  $\|(A - \lambda_0)\phi\| \geq \varepsilon_0 \|\phi\|$ , quindi  $\lambda_0 \in \rho(A)$ . ([2], teorema 9.1-2)

□

Possiamo ora definire cosa intendiamo per spettro essenziale e spettro discreto di un operatore. Questa nozione ci permette di decomporre lo spettro di  $A$  in due sottoinsiemi disgiunti.

**Definizione 1.4.7.** Diciamo che  $\lambda$  appartiene allo **spettro essenziale** di  $A$ , che indichiamo con  $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$ , se e solo se  $P_{(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)}$  è infinito dimensionale per ogni  $\varepsilon > 0$ ; dove la frase  $P$  è infinito dimensionale significa che  $\text{Range}(P)$  è infinito dimensionale. Se  $\lambda \in \sigma(A)$  ed esiste  $\varepsilon_0 > 0$  tale che  $P_{(\lambda_0-\varepsilon_0, \lambda_0+\varepsilon_0)}$  è finito dimensionale, diciamo che  $\lambda$  è nello **spettro discreto** di  $A$ , e scriviamo  $\lambda \in \sigma_{disc}(A)$

Come abbiamo già detto precedentemente ora abbiamo una nuova decomposizione di  $\sigma(A)$  in due sottoinsiemi disgiunti. Il teorema che segue afferma che lo spettro essenziale di un operatore autoaggiunto è sempre chiuso.

**Teorema 1.4.8.** Lo spettro essenziale di  $A$ ,  $\sigma_{ess}(A)$ , è sempre chiuso.

*Dimostrazione.* Prendiamo una successione arbitraria  $\{\lambda_n\} \in \sigma_{ess}(A)$  e supponiamo che  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  per  $n \rightarrow \infty$ . Poiché  $\lambda$  è un punto di accumulazione sappiamo che ogni intervallo aperto  $I$  di  $\lambda$  contiene un intervallo aperto  $I_n$  di qualche  $\lambda_n$ . Siccome  $\lambda_n$  è nello spettro essenziale di  $A$  sappiamo che  $P_{(\lambda_n-\varepsilon, \lambda_n+\varepsilon)}(A)$  è infinito dimensionale per ogni  $\varepsilon > 0$  e siccome  $I_n = (\lambda_n - \varepsilon, \lambda_n + \varepsilon)$  è incluso in  $I$  per  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo concludiamo che  $P_I(A)$  è infinito dimensionale. Questo è vero per ogni intervallo aperto  $I$  di  $\lambda$ , quindi  $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$  e dunque  $\sigma_{ess}(A)$  è chiuso.  $\square$

Il teorema seguente fornisce delle condizioni per cui  $\lambda \in \sigma(A)$  appartenga allo spettro discreto.

**Teorema 1.4.9.**  $\lambda$  è nello spettro discreto di  $A$ ,  $\lambda \in \sigma_{disc}(A)$ , se e solo se entrambe le condizioni seguenti sono soddisfatte:

- (a)  $\lambda$  è un punto isolato di  $\sigma(A)$ , cioè esiste  $\varepsilon_0$  tale che  $(\lambda - \varepsilon_0, \lambda + \varepsilon_0) \cap \sigma(A) = \{\lambda\}$ .
- (b)  $\lambda$  è un autovalore di molteplicità finita, cioè  $\{\psi | A\psi = \lambda\psi\}$  è di dimensione finita.

*Dimostrazione.* Supponiamo che entrambe (a) e (b) siano vere; allora esiste un  $\varepsilon_1 > 0$  tale che  $(\lambda - \varepsilon_1, \lambda + \varepsilon_1) \cap \sigma(A) = \{\lambda\}$  e  $\dim(\{\psi | A\psi = \lambda\psi\}) < \infty$ . Per la proprietà (a) abbiamo che  $\text{Range}(P_{(\lambda-\varepsilon_1, \lambda+\varepsilon_1)}(A)) = \{\psi | A\psi = \lambda\psi\}$  e di conseguenza per  $\varepsilon_1 > 0$ ,  $\text{Range}(P_{(\lambda-\varepsilon_1, \lambda+\varepsilon_1)})$  è di dimensione finita. Quindi  $\lambda \in \sigma_{disc}(A)$ .

L'altra parte della dimostrazione viene lasciata al lettore ([5], sezione VII, problema 26).  $\square$

Il prossimo teorema fornisce condizioni alternative affinché un numero reale  $\lambda$  appartenga allo spettro essenziale di un operatore autoaggiunto.

**Teorema 1.4.10.** ([5], teorema VII.11) *Sia  $A$  un operatore autoaggiunto limitato e sia  $\lambda \in \sigma(A)$ . Allora  $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$  se e solo se una o più condizioni sono verificate:*

- (a)  $\lambda \in \sigma_{cont}(A) \equiv \sigma_{ac}(A) \cup \sigma_{sing}(A)$ ,
- (b)  $\lambda$  è un punto limite dello spettro puntuale di  $A$ ,
- (c)  $\lambda$  è un autovalore di molteplicità infinita.

Prima di concludere questa sezione presentiamo un teorema detto criterio di Weyl che precisa le condizioni per cui un numero reale  $\lambda$  appartiene allo spettro di un operatore autoaggiunto. Dimostreremo solo la prima parte del teorema.

**Teorema 1.4.11. Criterio di Weyl** ([5], teorema VII.12)

*Sia  $A$  un operatore autoaggiunto limitato, allora*

-  $\lambda \in \sigma(A)$  se e solo se esiste una successione  $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$  tale che  $\|\psi_n\| = 1$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(A - \lambda)\psi_n\| = 0$

-  $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$  se e solo se  $\{\psi_n\}$  può essere scelta ortogonale.

*Dimostrazione.* Dapprima indichiamo  $\sigma(A)^c = \rho(A)$ . Possiamo provare che  $\lambda \in \rho(A)$  se e solo se il criterio di Weyl non è verificato. Tuttavia questo è equivalente a dire ([2], teorema 9.1-2) che un numero  $\lambda$  appartiene all'insieme risolvente di un operatore se e soltanto se esiste  $c > 0$  tale che per ogni  $x \in \mathcal{H}$ :  $\|(A - \lambda I)x\| \geq c\|x\|$ . Questo prova che se  $\lambda \in \rho(A)$  non ci può essere una successione  $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$  tali che  $\|\psi_n\| = 1$  con la proprietà:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(A - \lambda)\psi_n\| = 0$ .  $\square$

Inoltre lo spettro essenziale rimane invariato nel caso di perturbazioni di dimensione finita. Per il teorema di Kato ([5], sezione XIII) si ha  $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B)$  se  $A - B$  è compatto.

## 1.5 Teorema spettrale per operatori autoaggiunti non limitati

In questa sezione mostreremo come il teorema spettrale per operatori autoaggiunti limitati, sviluppato nella sezione precedente, può essere esteso a operatori autoaggiunti non limitati.

Il calcolo funzionale viene nuovamente utilizzato per costruire projection-valued measure e creare una teoria analoga a quella per gli operatori autoaggiunti limitati. Come nel caso di operatori limitati possiamo suddividere lo spettro dell'operatore autoaggiunto  $A$  in  $\sigma_{ac}(A)$ ,  $\sigma_{pp}(A)$ ,  $\sigma_{sing}(A)$  decomporre lo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  di conseguenza.

**Definizione 1.5.1.** Sia  $P_\Omega$  l'operatore  $\chi_\Omega(A)$  dove  $\chi_\Omega$  è la funzione caratteristica dell'insieme misurabile  $\Omega \subset \mathbb{R}$  e  $A$  un operatore autoaggiunto. La famiglia di operatori  $\{P_\Omega\}$  ha le seguenti proprietà:

- (a) Ogni  $P_\Omega$  è una proiezione ortogonale.
- (b)  $P_\emptyset = 0$ ,  $P_{(-\infty, \infty)} = I$
- (c) Se  $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$  con  $\Omega_n \cap \Omega_m = \emptyset$   
se  $n \neq m$ , allora  $P_\Omega = s\text{-}\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N P_{\Omega_n}$
- (d)  $P_{\Omega_1} P_{\Omega_2} = P_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$

Tale famiglia è detta **projection-valued measure** (p.v.m.).

Questa è una generalizzazione della nozione di bounded projection-valued-measure introdotta nella sezione precedente in cui si richiedeva solo che  $P_{(-a, a)} = I$  per qualche  $a$  mentre ora dobbiamo avere  $P_{(-\infty, \infty)} = I$ . Per  $\varphi \in \mathcal{H}$   $m(\Omega) = (\varphi, P_\Omega \varphi)$  è una misura boreliana ben definita su  $\mathbb{R}$  che denotiamo  $d(\varphi, P_\lambda \varphi)$ . In analogia con il caso degli operatori limitati data una funzione boreliana  $g$  limitata possiamo definire l'operatore  $g(A)$  con

$$(\varphi, g(A)\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) d(\varphi, P_\lambda(A)\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{H}$$

dove  $d(\varphi, P_\lambda(A)\varphi)$  denota l'integrazione rispetto la misura  $(\varphi, P_\Omega(A)\varphi)$ . Ora supponiamo che  $g$  sia una funzione boreliana non limitata a valori complessi e introduciamo il dominio dell'operatore  $g(A)$  come segue

$$D(g(A)) = \left\{ \varphi \in \mathcal{H} \mid \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\lambda)|^2 d(\varphi, P_\lambda(A)\varphi) < \infty \right\}$$

Osserviamo che  $\overline{D(g(A))} = \mathcal{H}$ , dunque l'operatore  $g(A)$  è così definito :

$$(\varphi, g(A)\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) d(\varphi, P_\lambda(A)\varphi), \quad \varphi \in D(g(A))$$

che scriviamo simbolicamente

$$g(A) = \int_{\sigma(A)} g(\lambda) dP_\lambda(A)$$

**Teorema 1.5.2. (teorema spettrale-p.v.m.)** ([5], teorema VIII.6)

Si ha una corrispondenza uno a uno tra gli operatori autoaggiunti  $A$  e le projection-valued measure  $\{P_\Omega\}$  su  $\mathcal{H}$ , tale corrispondenza è data da

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dP_\lambda$$

Se  $g$  è una funzione boreliana a valori reali su  $\mathbb{R}$  allora

$$g(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) dP_\lambda(A)$$

definito su

$$D(g(A)) = \left\{ \varphi \in \mathcal{H} \mid \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\lambda)|^2 d(\varphi, P_\lambda(A)\varphi) < \infty \right\}$$

è autoaggiunto.

## 1.6 Operatore di Schrödinger con potenziale discontinuo

Consideriamo il seguente operatore autoaggiunto non limitato  $H_B$  definito per  $B > 0$  nella maniera seguente:

$$D(H_B) := H^2(\mathbb{R}), \quad e, \quad \forall u \in D(H_B), \quad H_B u := -\frac{d^2 u}{dx^2} + \mathcal{B}_\infty \cdot u \quad (1.6.1)$$

dove la funzione  $\mathcal{B}_\infty$  è data da (vedi Figura 1.1)

$$\mathcal{B}_\infty(x) := -B \cdot \mathbb{1}_{x \geq 0}, \quad \mathcal{B}_\infty \in C^0(\mathbb{R}^*) \cap L^\infty(\mathbb{R}), \quad B > 0 \quad (1.6.2)$$

In un primo momento calcoliamo la sua funzione di Green, ossia il nucleo della risolvete

$$\mathbb{C} - [-B, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}), H^2(\mathbb{R})) \quad z \mapsto R_B(z) := (H_B - z)^{-1}$$

Poiché l'operatore risolvete  $R_B(z)$  è un operatore integrale di nucleo  $R_B(z; x, y)$  che opera tra gli spazi di Sobolev  $H^{-1}(\mathbb{R})$  e  $H^1(\mathbb{R})$ , definito come

$$R_B(z; x, y) = \langle \delta_x, w_y \rangle_{H^{-1}, H^1} \quad (1.6.3)$$

dove  $w_y$  è la soluzione dell'equazione

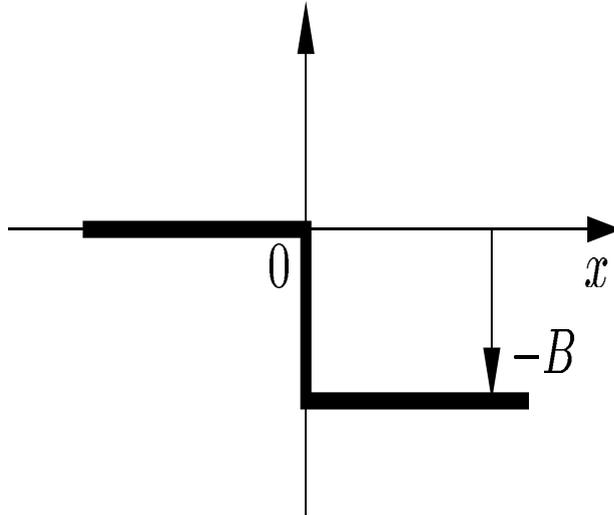
$$(H_B - z)w_y = \delta_y \quad (1.6.4)$$

e  $\delta$  è la delta di Dirac.

### Preliminari: nucleo dell'operatore risolvete

Ci interessiamo all'equazione d'incognita  $u \in H^2(\mathbb{R})$

$$-u'' + (\mathcal{B}_\infty - z)u = f, \quad f \in L^2(\mathbb{R}), \quad z \in \mathbb{C} - \mathbb{R} \quad (1.6.5)$$

Figura 1.1: Grafico del potenziale  $\mathcal{B}_\infty$ 

### Scelta di una radice quadrata olomorfa adattata

Lavoriamo sull' aperto  $\mathbb{C} - \mathbb{R}$  che partizioneremo nella seguente maniera:

**Notazione 1.6.1.** L'aperto  $\mathbb{C} - \mathbb{R}$  é denotato

$$\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-$$

dove  $\Omega_\pm := \{z \in \Omega, |\pm \operatorname{Im}z > 0\}$

Per questo problema é bene considerare la definizione del logaritmo complesso, cioé:

$$\log(z) = \ln|z| + i\alpha,$$

dove  $\alpha$  é l'argomento di  $z$  in  $]0; 2\pi[$ . É bene notare che con la definizione di radice quadrata che ne deriva per  $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_+$ :

$$\begin{aligned} \sqrt{z}^+ &:= \exp\left(\frac{\log(z)}{2}\right) = \exp((\ln|z| + i\alpha)/2) \\ &= \exp(\ln|z|/2) \cdot \exp(i\alpha/2) \\ &= \sqrt{|z|} \exp(i\alpha/2) \end{aligned}$$

la parte immaginaria di  $\sqrt{z}^+$  é positiva. In particolare, se  $k$  é un numero reale, si ha  $\sqrt{k^2 \pm i0}^+ = \pm|k|$  (vedi Figura 1.2-1.3).

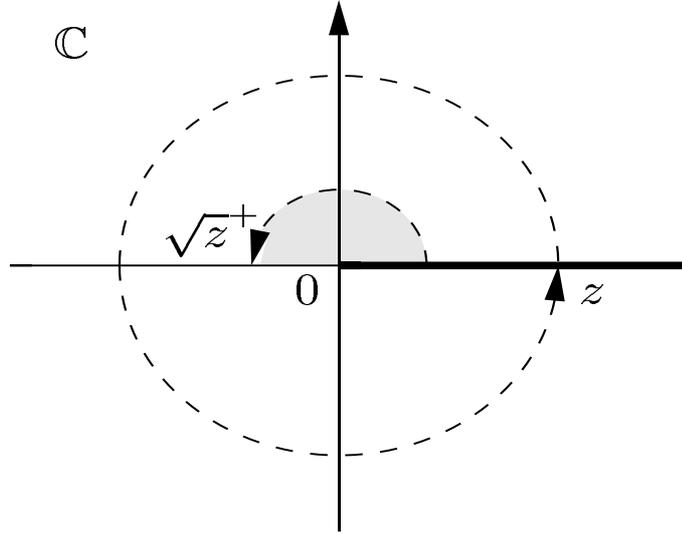


Figura 1.2: Poiché l'argomento di  $z$  tende a  $2\pi$ , l'argomento di  $\sqrt{z}^+$  tende a  $\pi$ . La parte immaginaria di  $\sqrt{z}^+$  è positiva o nulla

### Soluzioni particolari dell'equazione omogenea

Per unicità locale del problema di Cauchy per equazioni lineari, è evidente che ogni soluzione distribuzionale  $u$  dell'equazione 1.6.5 dove  $f \equiv 0$  coincide rispettivamente su  $\mathbb{R}_-$  e  $\mathbb{R}_+$  con le soluzioni massimali su  $\mathbb{R}$  dell'equazione

$$-u'' - zu = 0, \quad (1.6.6)$$

e di

$$-u'' - Bu - zu = 0 \quad (1.6.7)$$

Questo fornisce *a priori* una famiglia a quattro parametri di soluzioni.

**Definizione 1.6.2.** Per  $B > 0$  e  $z$  non reale, introduciamo le funzioni  $u_{\pm}$  definite su  $\mathbb{R}$  da

$$u_+(x) := \begin{cases} e^{-i\sqrt{z+B}^+ x} + r_+(z)e^{i\sqrt{z+B}^+ x} & \text{se } x > 0 \\ t_+(z)e^{-i\sqrt{z}^+ x} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

e

$$u_-(x) := \begin{cases} t_-(z)e^{i\sqrt{z+B}^+ x} & \text{se } x > 0 \\ e^{i\sqrt{z}^+ x} + r_-(z)e^{-i\sqrt{z}^+ x} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

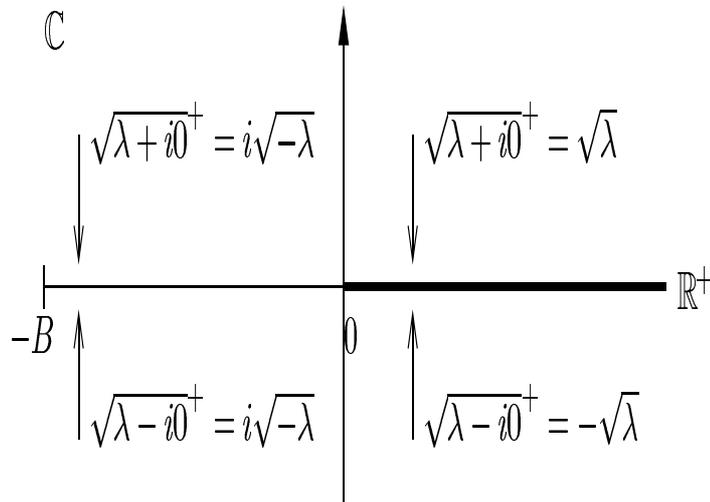


Figura 1.3: Per  $z := \lambda + i\varepsilon$ ,  $\lambda \in ]-B, \infty)$ ,  $\lambda \neq 0$ ; seguendo la posizione di  $\lambda = \text{Re}(z)$  i valori al bordo di  $\sqrt{z}^+$  prendono espressioni differenti

dove per  $z$  fissato, le costanti  $r_{\pm}(z), t_{\pm}(z)$  sono determinate dalla condizione:  $u$  é  $C^1$  in  $x = 0$

**Osservazione 1.6.3.** Con un calcolo esplicito otteniamo:

$$t_+(z) = \frac{2}{B} \sqrt{z+B}^+ (\sqrt{z+B}^+ - \sqrt{z}^+) \quad (1.6.8)$$

$$t_-(z) = \frac{2}{B} \sqrt{z}^+ (\sqrt{z+B}^+ - \sqrt{z}^+) \quad (1.6.9)$$

$$r_{\pm}(z) = t_{\pm}(z) - 1. \quad (1.6.10)$$

Notiamo che il prodotto  $t_+(z)t_-(z)$  é non nullo. Inoltre  $r_{\pm}(z)$  prende la seguente espressione simmetrica:

$$r_+(z) = \frac{\sqrt{z+B}^+ - \sqrt{z}^+}{\sqrt{z+B}^+ + \sqrt{z}^+}, \quad r_-(z) = \frac{\sqrt{z}^+ - \sqrt{z+B}^+}{\sqrt{z}^+ + \sqrt{z+B}^+},$$

dove abbiamo utilizzato che  $B = (\sqrt{z+B}^+)^2 - (\sqrt{z}^+)^2$ . Per  $z$  non reale abbiamo le proprietà seguenti:

- (a)  $u_{\pm} \in H_{loc}^2(\mathbb{R})$   
 (b)  $-u_{\pm}'' + \mathcal{B}_{\infty} \cdot u_{\pm} = zu_{\pm}$  nel senso delle distribuzioni.  
 (c)  $u_{+}(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow -\infty$ .  
 (d)  $u_{-}(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow +\infty$ .  
 (e)  $[u_{+}, u_{-}] := \begin{vmatrix} u_{+}(x) & u_{-}(x) \\ u'_{+}(x) & u'_{-}(x) \end{vmatrix} = 2it_{+}(z)\sqrt{z}^{+} = 2it_{-}(z)\sqrt{z+B}^{+}$ .

Siamo ora in grado di definire la funzione di Green dell'operatore  $H_B$ .  
 Proviamo il seguente risultato:

**Proposizione 1.6.4.** Per  $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$  la funzione di Green dell'operatore  $H_B$  è data dalla formula seguente:

$$R_B(z; x, y) = -\frac{1}{[u_{+}, u_{-}]} [\mathbb{1}_{y \geq x} u_{+}(x) u_{-}(y) + \mathbb{1}_{y \leq x} u_{-}(x) u_{+}(y)]$$

*Dimostrazione.* È una semplice verifica di 1.6.4. Sia  $w_y$  il secondo membro della formula scritta sopra. Fissiamo  $y \in \mathbb{R}$  e deriviamo in senso distribuzionale. Siano

$$\begin{aligned} h_1(x) &= \mathbb{1}_{y \leq x} u_{+}(x) u_{-}(y) \\ \partial_x h_1(x) &= -\delta_y u_{+}(y) u_{-}(y) + \mathbb{1}_{y \leq x} u'_{+}(x) u_{-}(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2(x) &= \mathbb{1}_{y \geq x} u_{-}(x) u_{+}(y) \\ \partial_x h_2 &= \delta_y u_{-}(y) u_{+}(y) + \mathbb{1}_{y \geq x} u'_{-}(x) u_{+}(y) \end{aligned}$$

e

$$\partial_x h_1(x) + \partial_x h_2(x) = \mathbb{1}_{y \leq x} u'_{+}(x) u_{-}(y) + \mathbb{1}_{y \geq x} u'_{-}(x) u_{+}(y).$$

Siccome  $u_{-}(y)$  e  $u_{+}(y)$  sono costanti

$$\begin{aligned} u_{+} \in H^2(\mathbb{R}_{-}) &\Rightarrow u'_{+} \in H^1(\mathbb{R}_{-}) &\Rightarrow \mathbb{1}_{(-\infty, y]} u'_{+} \in H^1(\mathbb{R}) \\ u_{-} \in H^2(\mathbb{R}_{+}) &\Rightarrow u'_{-} \in H^1(\mathbb{R}_{+}) &\Rightarrow \mathbb{1}_{[y, +\infty)} u'_{-} \in H^1(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \mathbb{1}_{(-\infty, y]}(x) u_{-}(y) u'_{+}(x) \\ \partial_x g_1(x) &= -\delta_y u_{-}(y) u'_{+}(x) + \mathbb{1}_{(-\infty, y]} u_{-}(y) u''_{+}(x) \\ g_2(x) &= \mathbb{1}_{[y, +\infty)}(x) u_{+}(y) u'_{-}(x) \\ \partial_x g_2 &= \delta_y u_{+}(y) u'_{-}(x) + \mathbb{1}_{[y, +\infty)}(x) u_{+}(y) u''_{-}(x) \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}
\partial_x g_1(x) + \partial_x g_2(x) &= \delta_y(u_+(y)u'_-(y) - u_-(y)u'_+(y)) + \mathbf{1}_{(-\infty, y]}(x)u_-(y)u''_+(x) \\
&\quad + \mathbf{1}_{[y, +\infty)}(x)u_+(y)u''_-(x) \\
&= [u_+, u_-]\delta_y + \mathbf{1}_{(-\infty, y)}u_-(y)[\mathcal{B}_\infty u_+ - zu_+] \\
&\quad + \mathbf{1}_{[y, +\infty)}u_+(y)[\mathcal{B}_\infty u_- - zu_-] \\
&= [u_+, u_-]\delta_y + (B_\infty - z)[\mathbf{1}_{(-\infty, y]}u_-(y)u_+ + \mathbf{1}_{[y, +\infty)}u_+(y)u_-]
\end{aligned}$$

quindi

$$R(z; x, y) = w_y$$

□

**Osservazione 1.6.5.** Poiché per ogni  $z$  non reale, fissato  $y$ ,  $x \mapsto R_B(z; x, y)$  è una funzione  $H^1$ , deduciamo dalla relazione  $\overline{R_B(z; x, y)} = R_B(\bar{z}; y, x)$  che per ogni funzione  $f$  in  $L^2$ , e per ogni  $x$  reale, l'integrale

$$\int_{y \in \mathbb{R}} R_B(z; x, y) f(y) dy$$

ha senso, poiché l'integrando è prodotto di due funzioni  $L^2$ , quindi è una funzione  $L^1$ . Di conseguenza  $R_B(z)$  è un operatore integrale.

**Proposizione 1.6.6.** Per  $s > \frac{1}{2}$  la funzione definita per  $z \in \Omega_\pm$  da

$$z \in \Omega_\pm \rightarrow L^2(\mathbb{R}), \quad z \mapsto \langle x \rangle^{-s} R_B(z) \langle y \rangle^{-s}$$

definisce un operatore integrale di Hilbert-Schmidt, olomorfa su  $\Omega_\pm$ , e continua su  $\overline{\Omega_\pm} \setminus \{0, -B\}$  in norma Hilbert-Schmidt

**Notazione 1.6.7.**  $\langle x \rangle = (1 + x^2)^{1/2}$

**Notazione 1.6.8.** Poniamo per  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ,  $\lambda \neq -B$

$$(H_B - (\lambda \pm i0))^{-1} := s - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (H_B - (\lambda \pm i\varepsilon))^{-1}$$

definito su  $L^2(\mathbb{R}, \langle x \rangle^{2s} dx)$

*Dimostrazione.* È conseguenza dello studio delle proprietà del nucleo

$$(x, y) \mapsto G_B(z; x, y) = \langle x \rangle^{-s} R_B(z) \langle y \rangle^{-s}$$

che verranno affrontate nel lemma seguente. □

**Lemma 1.6.9.** Per  $z \in \mathbb{C}$  qualunque, il nucleo  $G_B(z; x, y)$  è un elemento  $L^2(dx \otimes dy)$  e definisce un'applicazione olomorfa su  $\Omega_\pm$  e continua su  $\overline{\Omega_\pm}$

*Dimostrazione.* Poiché  $\overline{G_B(x, y; z)} = G_B(y, x; \bar{z})$ , ne esaminiamo il carattere  $L^2$  partizionando il piano  $(x, y)$  negli insiemi. Nella zona  $0 \geq y \geq x$  si ha

$$\begin{aligned} \langle x \rangle^{-s} R_B(z) \langle y \rangle^{-s} &= \langle x \rangle^{-s} \left[ -\frac{1}{[u_+, u_-]} u_+(x) u_+(y) \right] \langle y \rangle^{-s} \\ &= \langle x \rangle^{-s} \left[ \frac{1}{[u_+, u_-]} t_-(z) e^{i\sqrt{z+B^+}x} (e^{-i\sqrt{z+B^+}y} + r_+(z) e^{i\sqrt{z+B^+}x}) \right] \langle y \rangle^{-s} \\ &= \mathcal{O}(\langle x \rangle^{-s} \langle y \rangle^{-s}) \text{ localmente uniformemente in } z \end{aligned}$$

perché le funzioni  $t_{\pm}(z), r_{\pm}(z)$  sono limitate, infatti

$$\begin{aligned} t_+(z) &= \frac{2}{B} \sqrt{z+B^+} (\sqrt{z+B^+} - \sqrt{z}) \cdot \frac{\sqrt{z+B^+} + \sqrt{z}}{\sqrt{z+B^+} + \sqrt{z}} \\ &= \frac{2}{B} \frac{\sqrt{z+B^+}}{\sqrt{z+B^+} + \sqrt{z}} \cdot B \end{aligned}$$

e

$$|t_+(z)| < 1$$

Analogamente si dimostra la limitatezza di  $t_-(z)$  e di conseguenza quella di  $r_{\pm}(z)$ . Quanto all'olomorfia questa deriva in maniera evidente dalla definizione delle funzioni  $t_{\pm}(z)$ . Si procede in maniera analoga per le altre zone della figura.  $\square$

**Corollario 1.6.10.** *Si ha*

$$\sigma(H_B) = \sigma_{ac}(H_B) = \sigma_{ess}(H_B) = [-B, \infty)$$

*Dimostrazione.* (vedi [3], dimostrazione corollario 3.10)  $\square$

### 1.6.1 Sullo spettro dell'operatore perturbato

In questa sezione discutiamo le proprietà spettrali per l'operatore perturbato

$$H = H_{\infty} + v^1$$

dove

$$H_{\infty} = \tau_b H_B \tau_b^*, \quad (1.6.11)$$

e dove l'operatore  $\tau_b$  designa l'isometria di  $L^2$  definita da  $u \mapsto u(\cdot - b)$ . Quindi:

$$H = \tau_b H_B \tau_b^* + v^1 = H_B^b + v^1 \quad (1.6.12)$$

**Osservazione 1.6.11.** *Per i risultati della sezione precedente, sono evidenti i seguenti risultati:*

1. Il nucleo della risolvente di  $\tau_b H_B \tau_b^*$  è dato da:

$$G_b(x, y; z) = -\frac{1}{[u_+, u_-]} \left[ \mathbf{1}_{y \geq x} u_+^b(x) u_-^b(y) + \mathbf{1}_{y \leq x} u_-^b(x) u_+^b(y) \right]$$

dove le funzioni  $u_\pm^b$  sono definite da  $u_\pm^b := \tau_b u_\pm$ .

2.  $\sigma = \sigma_{ac} = \sigma_{ess} = [-B; \infty)$

3. Per il principio di absorption limite per l'operatore di Schrödinger con potenziale discontinuo (proposizione 1.6.6), per  $s > 1/2$ , la funzione

$$z \mapsto \langle x \rangle^{-s} (\tau_b H_B \tau_b^* - z)^{-1} \langle y \rangle^{-s} = \langle x \rangle^{-s} \tau_b (H_B - z)^{-1} \tau_b^* \langle y \rangle^{-s}$$

è a valori Hilbert-Schmidt, olomorfa su  $\Omega_\pm$  e continua su  $\overline{\Omega}_\pm$ .

**Notazione 1.6.12.** Sia  $z \in \Omega$  e  $s > 1/2$ , poniamo

$$\mathcal{R}_B^b(z) = (\tau_b H_B \tau_b^* - z)^{-1}$$

$$\mathcal{R}_B^b(z) := \langle x \rangle^{-s} \mathcal{R}_B^b(z) \langle y \rangle^{-s}, \quad \mathcal{R}(z) := \langle x \rangle^{-s} \mathcal{R}(z) \langle y \rangle^{-s}$$

e dove  $\mathcal{R}(z)$  demota il nucleo dell'operatore risolvente di  $H$ .

Quindi abbiamo il seguente risultato (vedi [7]):

**Proposizione 1.6.13.** Per  $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ , e  $s > 1/2$ , l'operatore limitato  $A_s(z)$  così definito

$$A_s(z) := 1 + \mathcal{R}_B^b(z) \langle x \rangle^{2s} \nu$$

è invertibile e si ha

$$\mathcal{R}(z) = A_s(z)^{-1} \mathcal{R}_B^b(z) \quad (1.6.13)$$

Inoltre la funzione di membro a destra è a valori Hilbert-Schmidt, olomorfa su  $\Omega_\pm$ , continua su  $\overline{\Omega}_\pm - \{-B, 0\}$

*Dimostrazione.* Dimostriamo prima che l'operatore  $A_s(z)$  è invertibile e che vale la (1.6.13). Per l'identità della risolvente che deriva da (1.6.12) si ha

$$R(z) = \tau_b R_B \tau_b^* - \tau_b R_B \tau_b^* \nu R(z)$$

moltiplicando a destra e a sinistra per  $\langle x \rangle^{-s}$ , abbiamo

$$\begin{aligned} \langle x \rangle^{-s} R(z) \langle x \rangle^{-s} &= \langle x \rangle^{-s} \tau_b R_B \tau_b^* \langle x \rangle^{-s} - \langle x \rangle^{-s} \tau_b R_B \tau_b^* \nu R(z) \langle x \rangle^{-s} \\ \mathcal{R}(z) &= \mathcal{R}_B^b(z) - \langle x \rangle^{-s} - \langle x \rangle^{-s} \tau_b R_B \tau_b^* \langle x \rangle^{-s} \langle x \rangle^s \nu \langle x \rangle^{-s} \langle x \rangle^s R(z) \langle x \rangle^{-s} \\ \mathcal{R}(z) &= \mathcal{R}_B^b(z) - \mathcal{R}_B^b(z) \langle x \rangle^{2s} \nu \mathcal{R}(z) \\ \mathcal{R}_B^b(z) &= \mathcal{R}(z) (1 + \mathcal{R}_B^b(z) \langle x \rangle^{2s} \nu) \end{aligned}$$

Osserviamo che l'operatore  $\mathcal{R}_B^b(z)$  essendo di classe Hilbert-Schmidt (punto 3 dell'osservazione precedente), è compatto. È quindi sufficiente provare

che  $-1$  non é autovalore di  $\mathcal{R}_B^b(z)\langle x \rangle^{2s}\nu$ , da cui segue che l'inverso della proposizione ha un senso per  $z$  non reale. Se  $f$  é una soluzione  $L^2$  non triviale dell'equazione

$$f + \mathcal{R}_B^b(z)\langle x \rangle^{2s}\nu \cdot f = 0 \quad (1.6.14)$$

ponendo

$$w(z) := \mathcal{R}_B^b(z)\langle x \rangle^{2s}\nu f \quad (1.6.15)$$

segue che  $w \in H^2$  poiché  $\langle x \rangle^{2s}\nu f \in L^2$ . Mediante un calcolo diretto, utilizzando (1.6.14) si ha

$$Hw(z) = zw(z) \quad (1.6.16)$$

Infatti

$$\begin{aligned} (H_B^b + \nu)w(z) &= zw(z) \\ (H_B^b + \nu)(\mathcal{R}_B^b(z)\langle x \rangle^{2s}\nu f) &= z(\mathcal{R}_B^b(z)\langle x \rangle^{2s}\nu f) \\ (H_B^b - z)(\mathcal{R}_B^b(z)\langle x \rangle^{2s}\nu f) + \nu\mathcal{R}_B^b(z)\langle x \rangle^{2s}\nu f &= 0 \\ f + \frac{\langle x \rangle^{-s}}{\nu}\nu\mathcal{R}_B^b(z)\langle x \rangle^{-s}\langle x \rangle^s\langle x \rangle^s\nu f &= 0 \end{aligned}$$

Poiché  $z$  non é reale e  $H$  autoggiunto, si ha  $w(z) = 0$ , poi  $\nu f = 0$  e infine  $f = 0$  per (1.6.14). Per dimostrare che é associato ad un operatore Hilbert-Schmidt premettiamo il seguente lemma:

□

**Lemma 1.6.14.** *Sia  $\mathcal{N}_\pm$  l'insieme dei  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ,  $\lambda \neq -B$  tali che l'operatore  $1 + \mathcal{R}_B^b(\lambda \pm i0)\langle x \rangle^{rs}\nu$  non é invertibile. Allora*

$$\mathcal{N}_+ = \mathcal{N}_- = \emptyset$$

*Dimostrazione.* Poiché gli operatori  $\mathcal{R}_B^b(\lambda \pm i0)$  sono compatti, la non-invertibilitá di  $1 + \mathcal{R}_B^b(\lambda \pm i0)\langle x \rangle^{rs}\nu$  equivale alla sua non-iniettivitá. Per una soluzione  $f$  non triviale dell'equazione (1.6.14) dove  $z = \lambda \pm i0$  consideriamo la funzione  $w(z) \in L^2 \cap H_{loc}^2$  definita in (1.6.15). Il calcolo che conduce a (1.6.16) si traduce in termini di equazione differenziale con

$$Hw(\lambda \pm i0) = \lambda w(\lambda \pm i0) \quad (1.6.17)$$

e al di fuori di  $]a; b[$ , poiché  $w(z) \in L^2$ , una risoluzione esplicita da, conservando le forme esponenziali ammissibili, e per delle costanti complesse  $\alpha_\pm$ ,  $\beta_\pm$  convenevoli ( $Im\sqrt{z^+} > 0$ ):

$$w(\lambda \pm i0) = \begin{cases} \beta_\pm e^{\pm i\sqrt{\lambda \pm i0 + B^+}x} & \text{se } x \leq b \\ \alpha_\pm e^{\pm i\sqrt{\lambda \pm i0^+}x} & \text{se } x \geq a \end{cases}$$

É bene notare che questi problemi si riformulano come problemi ai limiti su  $]a; b[$  (vedi figura) con

$$(H - \lambda)w(\lambda \pm i0) = 0$$

e

$$\begin{cases} w'(a) - i\sqrt{\lambda \pm i0^+} w(a) = 0 \\ w'(b) + i\sqrt{\lambda + B \pm i0^+} w(b) = 0 \end{cases}$$

Vedremo in seguito che questi problemi omogenei non ammettono soluzioni non triviali. Di conseguenza  $w(\lambda \pm i0) = 0$  e  $f = 0$   $\square$

**Corollario 1.6.15.** Per  $\lambda \in \Omega_{\pm}$ , la funzione

$$z \mapsto \langle x \rangle^{-s} R(z) \langle y \rangle^{-s}$$

é a valori Hilbert-Schmidt, olomorfa su  $\Omega_{\pm}$ , continua fino al bordo salvo in  $\lambda = -B$  e  $\lambda = 0$ .

*Dimostrazione.* É un corollario delle proposizioni (1.6.6) e (1.6.13)  $\square$

**Corollario 1.6.16.** Per ogni compatto  $K \subset \mathbb{R}$  la risoluzione spettrale ristretta a  $K$

$$]-B; \infty] - \{0\} \ni \lambda \mapsto \mathbb{1}_K \frac{\partial E}{\partial \lambda}(\lambda) \mathbb{1}_K$$

é una funzione continua a valori Hilbert-Schmidt.

*Dimostrazione.* É sufficiente osservare che per  $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$

$$\mathbb{1}_K R(z) \mathbb{1}_K = \mathbb{1}_K \langle x \rangle^s [\langle x \rangle^{-s} R(z) \langle y \rangle^{-s}] \langle y \rangle^s \mathbb{1}_K$$

é prodotto dell'operatore limitato  $\mathbb{1}_K \langle x \rangle^s$  per una funzione a valori Hilbert-Schmidt continua salvo in  $\lambda = -B$  e  $\lambda = 0$ . Quindi  $\mathbb{1}_K R(z) \mathbb{1}_K$  é a valori Hilbert-Schmidt, olomorfa su  $\Omega_{\pm}$  e continua fino al bordo salvo in  $\lambda = -B$  e  $\lambda = 0$ . Applicando in seguito la formula di Stone otteniamo

$$\mathbb{1}_K \frac{\partial E}{\partial \lambda}(\lambda) \mathbb{1}_K = \mathbb{1}_K \frac{1}{2\pi i} [R(\lambda + i0) - R(\lambda - i0)] \mathbb{1}_K$$

essendo l'ideale di Hilbert-Schmidt chiuso rispetto alla moltiplicazione, si ha il risultato cioè una funzione continua a valori Hilbert-Schmidt.  $\square$

**Corollario 1.6.17.** Per ogni funzione continua  $f \in C_c^0(\mathbb{R}^* - \{-B\})$  e  $K \subset \mathbb{R}$ , l'operatore  $f(H) \mathbb{1}_K$  é di tipo Hilbert-Schmidt.

*Dimostrazione.* Sia  $f \in C_c^0(\mathbb{R}^* - \{-B\})$  e  $K \subset \mathbb{R}$  un compatto, allora come conseguenza del teorema spettrale e della formula di Stone si ha

$$f(H) \mathbb{1}_K = \int_{\Lambda} f(\lambda) \frac{\partial E}{\partial \lambda}(\lambda) d\lambda \mathbb{1}_K$$

dove  $\frac{\partial E}{\partial \lambda}(\lambda)$  é la densità spettrale legata alla risolvente dell'operatore  $H$ . Applicando il corollario precedente si ottiene il risultato.  $\square$

## 1.6.2 Assenza di spettro singolare

Diamo ora un'espressione della risoluzione spettrale dell'operatore di Schrödinger  $H$ . Questa ci permette d'identificare il suo spettro. Se  $H$  è l'Hamiltoniano di un sistema quantistico (per esempio quello di un elettrone che interagisce con un protone), lo spettro discreto descrive gli stati collegati dell'elettrone, mentre lo spettro assolutamente continuo ne descrive gli stati di diffusione. Lo spettro singolare continuo non traduce una situazione pertinente nel nostro contesto, resta dunque importante la questione dello spettro singolare.

Come nel caso del salto di potenziale discontinuo (capitolo precedente), una maniera di procedere consiste nel calcolare esplicitamente la risoluzione spettrale e d'identificare i sottospazi spettrali assolutamente continuo, ecc. Il principio di absorption limite stabilito nella sezione 4.2 del capitolo precedente, è sufficiente per ottenere una formula diretta per la risolvete.

## 1.7 Funzione di Green

Riprendiamo i calcoli fatti per  $H_B$ . Siamo interessati per  $z$  non reale alle soluzioni in senso distribuzionale  $v$  dell'equazione

$$Hv = zv \quad z \in \mathbb{C} - \mathbb{R} \quad (1.7.1)$$

che sono, a causa della regolarità del potenziale, di classe  $C^1$  su  $\mathbb{R}$ , e  $C^2$  su  $\mathbb{R} - \{a, b\}$ . É ragionevole, poiché gli operatori  $H$  e  $H_\infty$  non differiscono che su  $I$ , cercare delle soluzioni particolari nella forma

$$v_\pm := \tau_b u_\pm + \varphi_\pm \quad (1.7.2)$$

le funzioni  $\varphi_\pm$  sono da determinare mentre le funzioni  $u_\pm$  sono state introdotte nella definizione (1.6.2). Osserviamo che per (1.6.12) e (1.6.11),  $\varphi_\pm$  verificano l'equazione nel senso delle distribuzioni:

$$\left[ \tau_b \left( -\frac{d^2}{dx^2} + \mathcal{B}_\infty \right) \tau_b^* + v^1 - z \right] \varphi_\pm = -v^1 \tau_b u_\pm \quad (1.7.3)$$

Il secondo membro di questa equazione essendo una funzione  $L^2$  otteniamo per (1.6.12):

$$\varphi_\pm = -R(z) v^1 \tau_b u_\pm \quad (1.7.4)$$

e  $\varphi_\pm$  sono funzioni  $H^2$ . É facile risolvere l'equazione qui sopra al di fuori di  $[a; b]$ , in generale per le funzioni  $\varphi_\pm$  abbiamo il seguente comportamento asintotico:

$$\begin{aligned} \alpha_\pm \exp(i\sqrt{z}^+ \cdot x) + \beta_\pm \exp(-i\sqrt{z}^+ \cdot x), \quad x \rightarrow -\infty, \quad \alpha_\pm, \beta_\pm \in \mathbb{C} \\ \alpha'_\pm \exp(i\sqrt{z+B}^+ \cdot x) + \beta'_\pm \exp(-i\sqrt{z+B}^+ \cdot x), \quad x \rightarrow \infty, \quad \alpha'_\pm, \beta'_\pm \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

La condizione  $\varphi_{\pm} \in L^2$  permette di eliminare i moduli esponenzialmente crescenti, così si ha  $\alpha_{\pm} = \beta'_{\pm} = 0$ . Tenuto conto di (1.7.2) e della definizione (1.6.2) di  $u_{\pm}$  otteniamo:

$$v_+(x) := \begin{cases} e^{-i\sqrt{z+B^+}x} + \rho_+(z)e^{i\sqrt{z+B^+}x} & \text{se } x > b \\ \tau_+(z)e^{-i\sqrt{z^+}x} & \text{se } x \leq a \end{cases} \quad (1.7.5)$$

$$v_-(x) := \begin{cases} \tau_-(z)e^{i\sqrt{z+B^+}x} & \text{se } x > b \\ e^{i\sqrt{z^+}x} + \rho_-(z)e^{-i\sqrt{z^+}x} & \text{se } x \leq a \end{cases} \quad (1.7.6)$$

dove le costanti  $\rho_{\pm}, \tau_{\pm}$  sono determinate dalla condizione  $\varphi_{\pm} \in H_{loc}^2(\mathbb{R})$ . È bene notare i punti seguenti:

1. Per  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ,  $\lambda \neq -B$ , si hanno quattro funzioni  $v_{\pm}(\lambda \pm i0)$  tutte e quattro soluzioni nel senso delle distribuzioni dell'equazione a coefficienti reali

$$Hv = -v'' + (v^1 + B)v = \lambda v, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*, \quad \lambda \neq -B \quad (1.7.7)$$

2. Le proprietà (a)-(e) enunciate nell'osservazione 2 del capitolo precedente sono verificate rimpiazzando  $H_B$  con  $H(1)$ ,  $u_{\pm}$  con  $v_{\pm}$  e  $t_{\pm}$  con  $\tau_{\pm}$ .
3. Le funzioni  $\tau_+(z)$  e  $\tau_-(z)$  ammettono valori al bordo salvo per  $\lambda \in \{-B; 0\}$ .

L'ultima osservazione ci permette di definire le seguenti funzioni:

**Definizione 1.7.1.** Per  $z$  non reale introduciamo le seguenti funzioni  $H_{loc}^2$ :

$$\Psi_+(z, \cdot) := \frac{1}{\tau_+(z)}v_+(z, \cdot), \quad e \quad \Psi_-(z, \cdot) := v_-(z, \cdot) \quad (1.7.8)$$

In particolare abbiamo  $[\Psi_+(z, \cdot), \Psi_-(z, \cdot)] = 2i\sqrt{z^+}$

Ricordiamo che la notazione utilizzata nella definizione sopra denota il Wronskiano di  $\Psi_+(z, \cdot)$  e di  $\Psi_-(z, \cdot)$  che presenta la proprietà di essere costante dato  $z$ . Più generalmente si ha il risultato seguente:

**Lemma 1.7.2.** Sia  $z \notin \mathbb{R}$ . Il Wronskiano  $[\Psi_+(z, \cdot), \Psi_-(z, \cdot)]$  è costante. Inoltre per  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ,  $\lambda \neq -B$ , le quattro funzioni  $\Psi_{\pm}(\lambda \pm i0, \cdot)$  sono ben definite.

*Dimostrazione.* Per  $z$  non reale, le funzioni  $\Psi$  verificano l'equazione differenziale (1.7.1). Per la regolarità delle  $\Psi$ , il Wronskiano è una funzione derivabile su  $\mathbb{R} - \{a, b\}$ , di derivata nulla, dunque è costante. D'altra parte, per  $z$  reale,  $z \notin \{-B, 0\}$ , i punti 1 e 3 dell'osservazione precedente implicano che le funzioni  $\Psi_{\pm}(\lambda \pm i0)$  sono ben definite e soluzioni di (1.7.7).  $\square$

Di conseguenza si può ottenere il valore del Wronskiano calcolandolo esplicitamente nelle regioni non limitate della retta reale. questo sarà utile nel calcolo della risoluzione spettrale.

**Lemma 1.7.3.** *Sia  $u$  una soluzione massimale non nulla dell'equazione differenziale data da (1.7.7) con  $\lambda \neq -B$ . Allora gli zeri di  $u$  sono isolati.*

*Dimostrazione.* La funzione  $u$  ristretta a ciascuno degli insiemi  $\{x \leq a\}$ ,  $\{a < x \leq b\}$ ,  $\{x > b\}$  è soluzione di un problema di Cauchy classico. In seguito è sufficiente notare che se  $x_0$  è un punto di accumulazione dell'insieme  $\{u = 0\}$ , allora  $u'(x_0) = 0$ . Così  $u$  verifica un problema di Cauchy in  $x_0$  con dati iniziali nulli. Per unicità del problema di Cauchy,  $u \equiv 0$  sull'unico insieme dei tre insiemi sopra che contiene  $x_0$ . Dato che  $u$  è  $H_{loc}^2$  per ellitticità, deduciamo che  $u \equiv 0$  per continuità.  $\square$

**Corollario 1.7.4.** *L'operatore  $H$  non ha autovalori nell'intervallo  $[-B, \infty)$ :*

$$\sigma_{pp}(H) \subset (-\infty, -B[$$

*Dimostrazione.* Consideriamo l'equazione agli autovalori

$$Hu = \lambda u \quad \lambda \geq -B \quad (1.7.9)$$

Supponiamo per assurdo che esista  $u$  non identicamente nulla soluzione di (1.7.9), cioè esiste un autovalore  $\lambda \geq -B$ . In questo caso, un autovettore  $u$  essendo in  $L^2$ , è identicamente nullo per  $x \geq b$ . Questo è un assurdo perché per il lemma precedente  $u$  si annulla solo in punti isolati.  $\square$

Un calcolo analogo a quello fatto per l'operatore  $H_B$  nel capitolo precedente ci fornisce il nucleo della risolvente dell'operatore  $H(1)$ .

**Proposizione 1.7.5.** *Per  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z$  non reale, il nucleo della risolvente dell'operatore  $H(1)$  è dato da*

$$R(x, y; z) = -\frac{1}{[\Psi_+, \Psi_-]} [\mathbb{1}_{y \geq x} \Psi_+(x) \Psi_-(y) + \mathbb{1}_{y \leq x} \Psi_-(x) \Psi_+(y)]$$

## 1.8 Risoluzione spettrale

Siamo ora in grado di calcolare la risoluzione spettrale dell'operatore  $H$  definito nella formula (1.6.12).

**Proposizione 1.8.1.** *Sia  $\lambda > -B$ ,  $\lambda \neq 0$ . La risoluzione spettrale di  $H$  è data da*

$$\begin{aligned} dE(\lambda)[x; y] &= \frac{1}{2\pi} v_+(\lambda + i0, x) \overline{v_+(\lambda + i0, y)} \frac{d\lambda}{2\sqrt{\lambda + B}} \\ &+ \frac{1}{2\pi} v_-(\lambda + i0, x) \overline{v_-(\lambda + i0, y)} \mathbb{1}_{\lambda > 0} \frac{d\lambda}{2\sqrt{\lambda}} \end{aligned}$$

*Dimostrazione.* Dapprima ricordiamo che  $[\Psi_+(z, \cdot), \Psi_-(z, \cdot)] = 2i\sqrt{z}^+$ . Per la formula di Stone e il principio d'absorption limite abbiamo :

$$dE(\lambda)[x, y] = \frac{1}{2i\pi} [R(\lambda + i0; x, y) - R(\lambda - i0; x, y)], \quad \lambda \in \mathbb{R}^*, \lambda > -B.$$

Sapendo che

$$R(x, y; z) = -\frac{1}{[\Psi_+, \Psi_-]} [\mathbb{1}_{y \geq x} \Psi_+(x) \Psi_-(y) + \mathbb{1}_{y \leq x} \Psi_-(x) \Psi_+(y)]$$

otteniamo

$$\begin{aligned} dE(\lambda) &= \mathbb{1}_{y \geq x} \frac{\Psi_+(\lambda + i0; x) \Psi_-(\lambda + i0; y)}{4\pi\sqrt{\lambda + i0}^+} + \mathbb{1}_{y \leq x} \frac{\Psi_-(\lambda + i0; x) \Psi_+(\lambda + i0; y)}{4\pi\sqrt{\lambda + i0}^+} \\ &- \mathbb{1}_{y \geq x} \frac{\Psi_+(\lambda - i0; x) \Psi_-(\lambda - i0; y)}{4\pi\sqrt{\lambda - i0}^+} + \mathbb{1}_{y \leq x} \frac{\Psi_-(\lambda - i0; x) \Psi_+(\lambda - i0; y)}{4\pi\sqrt{\lambda - i0}^+} \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} 4\pi dE(\lambda) &= \mathbb{1}_{y \geq x} \left[ \frac{\Psi_+(\lambda + i0; x) \Psi_-(\lambda + i0; y)}{\sqrt{\lambda + i0}^+} - \frac{\Psi_+(\lambda - i0; x) \Psi_-(\lambda - i0; y)}{\sqrt{\lambda - i0}^+} \right] \\ &+ \mathbb{1}_{y \leq x} \left[ \frac{\Psi_-(\lambda + i0; x) \Psi_+(\lambda + i0; y)}{\sqrt{\lambda + i0}^+} - \frac{\Psi_-(\lambda - i0; x) \Psi_+(\lambda - i0; y)}{\sqrt{\lambda - i0}^+} \right] \end{aligned}$$

In seguito passiamo al limite in  $\sqrt{z}^+$  (vedi figura). Distinguiamo, dunque due casi:

**Primo caso:**  $\lambda \in ]-B, 0[$ . In questo caso si ha

$$\sqrt{\lambda + i0}^+ = \sqrt{\lambda - i0}^+ = i\sqrt{|\lambda|} \quad (1.8.1)$$

e la formula precedente si riscrive

$$\begin{aligned} 4i\pi\sqrt{|\lambda|} dE_\lambda &= \mathbb{1}_{y \geq x} [\Psi_+(\lambda + i0; x) \Psi_-(\lambda + i0; y) - \Psi_+(\lambda - i0; x) \Psi_-(\lambda - i0; y)] \\ &+ \mathbb{1}_{y \leq x} [\Psi_-(\lambda + i0; x) \Psi_+(\lambda + i0; y) - \Psi_-(\lambda - i0; x) \Psi_+(\lambda - i0; y)] \end{aligned}$$

Fattorizziamo ciascun termine tra parentesi. Introduciamo la seguente notazione:

**Notazione 1.8.2.** Poniamo per  $\lambda \in [-B, +\infty[$ ,  $\lambda \neq 0$ ,

$$K(\lambda; x, y) = \Psi_+(\lambda + i0; x) \Psi_-(\lambda + i0; y) - \Psi_+(\lambda - i0; x) \Psi_-(\lambda - i0; y) \quad (1.8.2)$$

Di conseguenza l'equazione precedente si scrive:

$$4i\pi\sqrt{|\lambda|} dE_\lambda = \mathbb{1}_{y \geq x} K(\lambda; x, y) + \mathbb{1}_{y \leq x} K(\lambda; y, x) \quad (1.8.3)$$

Cominciamo con il primo termine, il secondo si tratta scambiando i ruoli di  $x$  e  $y$ : osserviamo, in questo caso, che le funzioni  $\Psi_{\pm}(\lambda \pm i0)$  prendono le espressioni seguenti

$$\Psi_+(\lambda + i0; x) := \begin{cases} \frac{1}{\tau_+(\lambda + i0)} e^{-i\sqrt{\lambda+Bx}} + \frac{\rho_+(\lambda + i0)}{\tau_+(\lambda + i0)} e^{i\sqrt{\lambda+Bx}} & \text{se } x > b \\ e^{\sqrt{|\lambda|x}} & \text{se } x \leq a \end{cases}$$

$$\Psi_+(\lambda - i0; x) := \begin{cases} \frac{1}{\tau_+(\lambda - i0)} e^{-i\sqrt{\lambda+Bx}} + \frac{\rho_+(\lambda - i0)}{\tau_+(\lambda - i0)} e^{-i\sqrt{\lambda+Bx}} & \text{se } x > b \\ e^{\sqrt{|\lambda|x}} & \text{se } x \leq a \end{cases}$$

$$\Psi_-(\lambda + i0; x) := \begin{cases} \tau_-(\lambda + i0) e^{i\sqrt{\lambda+Bx}} & \text{se } x > b \\ e^{-\sqrt{|\lambda|x}} + \rho_-(\lambda + i0) e^{\sqrt{|\lambda|x}} & \text{se } x \leq a \end{cases}$$

$$\Psi_-(\lambda - i0; x) := \begin{cases} \tau_-(\lambda - i0) e^{-i\sqrt{\lambda+Bx}} & \text{se } x > b \\ e^{-\sqrt{|\lambda|x}} + \rho_-(\lambda - i0) e^{\sqrt{|\lambda|x}} & \text{se } x \leq a \end{cases}$$

Considerando l'espressione di  $\Psi_+(\lambda \pm i0)$  per  $x \leq a$ , vediamo che queste due funzioni coincidono. Per il lemma precedente deduciamo:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Psi_+(\lambda + i0, x) = \Psi_+(\lambda - i0, x) \quad \lambda < 0, \quad \lambda \neq B \quad (1.8.4)$$

Analogamente per  $x \geq b$  otteniamo

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Psi_+(\lambda + i0, x) = \overline{\Psi_+(\lambda - i0, x)} \quad \lambda < 0, \quad \lambda \neq B \quad (1.8.5)$$

di conseguenza

$$\tau_+(\lambda + i0) = \overline{\tau_+(\lambda - i0)} \quad (1.8.6)$$

D'altronde osserviamo che per  $y \leq a$ , abbiamo

$$\begin{aligned} \Psi_-(\lambda + i0; y) - \Psi_-(\lambda - i0; y) &= e^{-\sqrt{|\lambda|x}} + \rho_-(\lambda + i0) e^{\sqrt{|\lambda|x}} \\ &\quad - e^{-\sqrt{|\lambda|x}} - \rho_-(\lambda - i0) e^{\sqrt{|\lambda|x}} \end{aligned}$$

quindi

$$\Psi_-(\lambda + i0; y) - \Psi_-(\lambda - i0; y) = [\rho_-(\lambda + i0) - \rho_-(\lambda - i0)] \Psi_+(\lambda + i0; y) \quad (1.8.7)$$

e con la stessa argomentazione precedente si ha l'uguaglianza su  $\mathbb{R}$ . Di conseguenza (1.8.2) diviene con (1.8.4) e (1.8.7):

$$K(\lambda; x, y) = [\rho_-(\lambda + i0) - \rho_-(\lambda - i0)] \Psi_+(\lambda + i0; x) \Psi_+(\lambda + i0; y) \quad (1.8.8)$$

forma simmetrica sotto la quale vediamo che

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad K(\lambda; x, y) = K(\lambda; y, x), \quad \lambda < 0, \quad \lambda \neq -B, \quad (1.8.9)$$

e (1.8.3) prende la forma più semplice

$$4i\pi\sqrt{|\lambda|}dE_\lambda = K(\lambda; x, y) \quad (1.8.10)$$

ci poniamo come obiettivo di ottenere delle espressioni indipendenti dei coefficienti  $\rho_\pm$ ,  $\tau_\pm$ . Per fare questo é sufficiente calcolare il Wronksiano e di utilizzare il lemma precedente; così con l'espressione di  $\Psi_-$  per  $x \leq a$  abbiamo

$$[\Psi_-(\lambda + i0; ), \Psi_-(\lambda - i0; )] = -2\sqrt{|\lambda|}[\rho_-(\lambda + i0) - \rho_-(\lambda - i0)], \quad (1.8.11)$$

invece le espressioni di queste funzioni per  $x \geq b$  danno

$$[\Psi_-(\lambda + i0; ), \Psi_-(\lambda - i0; )] = -2i\sqrt{\lambda + B}\tau_-(\lambda + i0) - \tau_-(\lambda - i0) \quad (1.8.12)$$

sia

$$\rho_-(\lambda + i0) - \rho_-(\lambda - i0) = \frac{i\sqrt{\lambda + B}}{\sqrt{|\lambda|}}\tau_-(\lambda + i0) - \tau_-(\lambda - i0) \quad (1.8.13)$$

Leghiamo  $\tau_-$  a  $\tau_+$  calcolando per due diversi valori il Wronksiano

$$\begin{aligned} [\Psi_-(\lambda + i0; ), \Psi_+(\lambda + i0; )] &= -2i\sqrt{\lambda + B}^+ \frac{\tau_-(\lambda + i0)}{\tau_+(\lambda + i0)} \quad \text{se } x \geq b \\ &= 2\sqrt{|\lambda|} \quad \text{se } x \leq a \end{aligned}$$

e otteniamo la relazione seguente tra  $\tau_-$  e  $\tau_+$ :

$$\tau_-(\lambda + i0) = -\frac{\sqrt{|\lambda|}}{i\sqrt{\lambda + B}^+}\tau_+(\lambda + i0). \quad (1.8.14)$$

Analogamente, cacolando il Wronksiano  $[\Psi_-(\lambda - i0; ), \Psi_+(\lambda - i0; )]$  troviamo

$$\tau_-(\lambda - i0) = -\frac{\sqrt{|\lambda|}}{i\sqrt{\lambda + B}}\tau_+(\lambda - i0) \quad (1.8.15)$$

Combinando (1.8.13),(1.8.14) e (1.8.15), otteniamo la seguente espressione di (1.8.8):

$$K(\lambda; x, y) = -\frac{\sqrt{|\lambda|}}{i\sqrt{\lambda + B}}\tau_+(\lambda + i0)\Psi_+(\lambda + i0; x)\tau_+(\lambda - i0)\Psi_+(\lambda - i0; y),$$

da cui ricaviamo la densità spettrale tenendo conto di (1.8.10) e della normalizzazione di  $\Psi_+$

$$dE(\lambda) = \frac{1}{4\pi\sqrt{\lambda + B}}v_+(\lambda + i0, x)\overline{v_+(\lambda + i0, y)}, \quad \lambda < 0, \quad \lambda \neq B \quad (1.8.16)$$

così abbiamo terminato il primo caso.

**Secondo caso:**  $\lambda > 0$ . In questo caso

$$\sqrt{\lambda + i0^+} = -\sqrt{\lambda - i0^+} = \sqrt{|\lambda|} \quad (1.8.17)$$

La densità spettrale é data da

$$4\pi\sqrt{|\lambda|}dE_\lambda = \mathbb{1}_{y \geq x}K'(\lambda; y, x) + \mathbb{1}_{y \leq x}K'(\lambda; x, y) \quad \forall \lambda > 0 \quad (1.8.18)$$

dove

$$K'(\lambda; x, y) := \Psi_-(\lambda + i0; x)\Psi_+(\lambda + i0; y) + \Psi_-(\lambda - i0; x)\Psi_+(\lambda - i0; y) \quad (1.8.19)$$

Poiché il proiettore  $dE_\lambda$  é autoaggiunto abbiamo la seguente relazione di simmetria su  $K'$ :

$$K'(\lambda; x, y) = \overline{K'(\lambda; y, x)} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \forall \lambda > 0 \quad (1.8.20)$$

Le funzioni  $\Psi$  per  $\lambda > 0$  prendono le espressioni seguenti:

$$\Psi_+(\lambda + i0; x) := \begin{cases} \frac{1}{\tau_+(\lambda + i0)}e^{-i\sqrt{\lambda+B}x} + \frac{\rho_+(\lambda + i0)}{\tau_+(\lambda + i0)}e^{i\sqrt{\lambda+B}x} & \text{se } x > b \\ e^{-i\sqrt{|\lambda|x}} & \text{se } x \leq a \end{cases}$$

$$\Psi_+(\lambda - i0; x) := \begin{cases} \frac{1}{\tau_+(\lambda - i0)}e^{i\sqrt{\lambda+B}x} + \frac{\rho_+(\lambda - i0)}{\tau_+(\lambda - i0)}e^{-i\sqrt{\lambda+B}x} & \text{se } x > b \\ e^{i\sqrt{|\lambda|x}} & \text{se } x \leq a \end{cases}$$

$$\Psi_-(\lambda + i0; x) := \begin{cases} \tau_-(\lambda + i0)e^{i\sqrt{\lambda+B}x} & \text{se } x > b \\ e^{i\sqrt{\lambda}x} + \rho_-(\lambda + i0)e^{-i\sqrt{\lambda}x} & \text{se } x \leq a \end{cases}$$

$$\Psi_-(\lambda - i0; x) := \begin{cases} \tau_-(\lambda - i0)e^{-i\sqrt{\lambda+B}x} & \text{se } x > b \\ e^{-i\sqrt{\lambda}x} + \rho_-(\lambda - i0)e^{i\sqrt{\lambda}x} & \text{se } x \leq a \end{cases}$$

In particolare otteniamo

$$\Psi_+(\lambda - i0; \cdot) = \overline{\Psi_+(\lambda + i0; \cdot)}. \quad (1.8.21)$$

e

$$\tau_+(\lambda - i0) = \overline{\tau_+(\lambda + i0)}, \quad \rho_+(\lambda - i0) = \overline{\rho_+(\lambda + i0)} \quad (1.8.22)$$

Analogamente, scambiando i ruoli di  $\Psi_-$  e  $\Psi_+$  nella normalizzazione per  $\tau^{-1}$  otteniamo

$$\tau_-(\lambda - i0) = \overline{\tau_-(\lambda + i0)}, \quad \rho_-(\lambda - i0) = \overline{\rho_-(\lambda + i0)} \quad (1.8.23)$$

e infine

$$\Psi_-(\lambda - i0; \cdot) = \overline{\Psi_-(\lambda + i0; \cdot)}. \quad (1.8.24)$$

Dalle identità (1.8.21) e (1.8.24) si ha che il nucleo  $K'$  é reale, quindi vale

$$K'(\lambda; x, y) = \overline{K'(\lambda; x, y)} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \lambda > 0 \quad (1.8.25)$$

Quindi per (1.8.20)

$$K'(\lambda; x, y) = K'(\lambda; x, y) \quad \forall \lambda > 0 \quad (1.8.26)$$

e per (1.8.18)

$$4\pi\sqrt{|\lambda|}dE_\lambda = K'(\lambda; x, y) \quad \forall \lambda > 0 \quad (1.8.27)$$

Ora trasformiamo  $K'$ . Dapprima osserviamo che

$$\begin{aligned} e^{-i\sqrt{\lambda}y} + \rho_-(\lambda - i0)e^{i\sqrt{\lambda}x} - e^{-i\sqrt{\lambda}y} &= \rho_-(\lambda - i0)e^{i\sqrt{\lambda}y} \\ &= \rho_-(\lambda - i0)\Psi_+(\lambda - i0; y) \end{aligned}$$

da cui otteniamo questa identità:

$$\Psi_-(\lambda - i0; y) - \Psi_+(\lambda + i0; y) = \rho_-(\lambda - i0)\Psi_+(\lambda - i0; y) \quad (1.8.28)$$

vera per ogni  $y$  reale; cosicché sostituendo questa espressione di  $\Psi_+(\lambda + i0; y)$  nell'espressione di  $K'(\lambda; x, y)$ , troviamo

$$\begin{aligned} K'(\lambda; x, y) &= \Psi_-(\lambda + i0; x)[\Psi_-(\lambda - i0; y) - \rho_-(\lambda - i0)\Psi_+(\lambda - i0; y)] \\ &\quad + \Psi_-(\lambda - i0; x)\Psi_+(\lambda - i0; y) \end{aligned}$$

poi fattorizzando per  $\Psi_+(\lambda - i0; y)$

$$\begin{aligned} K'(\lambda; x, y) &= \Psi_-(\lambda + i0; x)\Psi_-(\lambda - i0; y) \\ &\quad + [\Psi_-(\lambda - i0; x) - \rho_-(\lambda - i0)\Psi_-(\lambda + i0; x)]\Psi_+(\lambda - i0; y) \end{aligned}$$

da (1.8.21) e (1.8.24) si ha la seguente uguaglianza:

$$\begin{aligned} K'(\lambda; x, y) &= \Psi_-(\lambda + i0; x)\overline{\Psi_-(\lambda + i0; y)} \\ &\quad + [\Psi_-(\lambda - i0; x) - \rho_-(\lambda - i0)\Psi_-(\lambda + i0; x)]\overline{\Psi_+(\lambda + i0; y)} \end{aligned}$$

Osserviamo che il termine tra parentesi nell'espressione precedente per  $x \leq a$  si scrive

$$\Psi_-(\lambda - i0; \cdot) - \rho_-(\lambda - i0)\Psi_-(\lambda + i0; \cdot) = [1 - \rho_-(\lambda - i0)\rho_-(\lambda + i0)]\Psi_+(\lambda + i0; \cdot), \quad (1.8.29)$$

e l'identità é finalmente valida su  $\mathbb{R}$ . Analogamente al caso precedente vogliamo definire i coefficienti tra parentesi di  $\Psi_+(\lambda + i0; \cdot)$  in (1.8.29). Dapprima calcoliamo l'espressione di  $v_+$  in (1.7.5)

$$\begin{aligned} [v_+(\lambda + i0; \cdot), v_+(\lambda - i0; \cdot)] &= 2i(1 - \rho_-(\lambda + i0)\rho_-(\lambda - i0))\sqrt{\lambda + B} \quad \text{se } x \geq b \\ &= 2i\tau_+(\lambda + i0)\tau_+(\lambda - i0)\sqrt{\lambda} \quad \text{se } x \leq a \end{aligned}$$

da cui ricaviamo

$$1 - \rho_-(\lambda + i0)\rho_-(\lambda - i0) = \tau_+(\lambda + i0)\tau_+(\lambda - i0)\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda + B}} \quad (1.8.30)$$

Considerando (1.8.29) e tenendo conto della normalizzazione di  $\Psi_{\pm}$  in (1.7.8) abbiamo

$$\begin{aligned} K'(\lambda; x, y) &= \Psi_-(\lambda + i0; x)\overline{\Psi_-(\lambda + i0; y)} \\ &+ [1 - \rho_-(\lambda + i0)\rho_-(\lambda - i0)]\Psi_+(\lambda + i0; x)\overline{\Psi_+(\lambda + i0; y)} \\ &= v_-(\lambda + i0; x)\overline{v_-(\lambda + i0; y)} \\ &+ \tau_+(\lambda + i0)\tau_+(\lambda - i0)\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda + B}}\frac{1}{\tau_+(\lambda + i0)}v_+(\lambda + i0, x)\frac{1}{\tau_+(\lambda - i0)}\overline{v_+(\lambda - i0, y)} \end{aligned}$$

quindi risulta

$$K'(\lambda; x, y) = v_-(\lambda + i0; x)\overline{v_-(\lambda + i0; y)} \quad (1.8.31)$$

$$+ \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda + B}}v_+(\lambda + i0, x)v_+(\lambda - i0, y) \quad (1.8.32)$$

Otteniamo la seguente forma esplicita per la risoluzione spettrale per  $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} dE_{\lambda} &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\lambda + B}}v_+(\lambda + i0; x)\overline{v_+(\lambda + i0; y)} \\ &+ \frac{1}{2\pi}v_-(\lambda + i0; x)\overline{v_-(\lambda + i0; y)}, \quad \forall \lambda > 0 \end{aligned}$$

Dalla risoluzione spettrale si ha l'espressione delle funzioni di energia per una funzione  $f$  continua a supporto compatto in  $\mathbb{R} - \{-B, 0\}$

$$\begin{aligned} f(H)(x, y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\lambda > -B} f(\lambda)v_+(\lambda + i0; x)\overline{v_+(\lambda + i0; y)}\frac{d\lambda}{2\sqrt{\lambda + B}} \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{\lambda > 0} f(\lambda)v_-(\lambda + i0; x)\overline{v_-(\lambda + i0; y)}\frac{d\lambda}{2\sqrt{\lambda}} \end{aligned}$$

□

L'espressione esplicita della risoluzione spettrale del hamiltoniano  $H$  ottenuta ci permette di identificare il suo spettro.

**Corollario 1.8.3.** *Lo spettro continuo di  $H$  é assolutamente continuo.*

$$\sigma_c(H) = \sigma_{ac}(H), \quad \text{i.e.} \quad \sigma_{sc}(H) = \emptyset$$

*Dimostrazione.* vedi [3], corollario 4.9 □

**Corollario 1.8.4.** *Gli eventuali autovalori di  $H$  sono in  $(-\infty; -B[$ . Inoltre*

$$\sigma_{ess}(H) = \sigma_{ac}(H) = [-B; \infty).$$

*Dimostrazione.* Per il corollario 7.1.4  $\sigma_{pp}(H) \subset (-\infty, -B[$ , quindi per definizione di  $\sigma_{pp}$ , gli eventuali autovalori di  $H$  sono in  $(-\infty, -B[$ . Per definizione abbiamo

$$\begin{aligned} \sigma(H) &= \sigma_c(H) \cap \overline{\sigma_{pp}(H)} \\ \sigma_c(H) &\subset \sigma_{ess}(H) \end{aligned}$$

Per il teorema di Kato e dal capitolo precedente

$$\sigma_{ess}(H) = [-B, \infty)$$

Per il corollario precedente

$$\sigma_{ac}(H) = \sigma_c(H) \subseteq \sigma_{ess}(H) = [-B, \infty)$$

□



## Capitolo 2

# Modelli per il trasporto di cariche

Recentemente sono stati proposti diversi modelli per il trasporto quantistico di cariche. In questi modelli l'interazione tra le cariche viene rappresentato mediante un termine di interazione non lineare.

In questo capitolo sono brevemente descritti due importanti modelli.

### 2.1 Sull'equazione di Schrödinger con non-linearità concentrate

In un recente articolo (vedi [4]) è stato proposto un modello per descrivere l'effetto dell'accumulo di cariche elettriche attraverso una doppia barriera. L'equazione a cui facciamo riferimento è il prototipo di una classe di equazioni di Schrödinger non-lineari. La non-linearità è concentrata solo nella regione dove è localizzato lo stato di risonanza, ovvero tra le due barriere.

Richiamiamo brevemente l'origine fisica del nostro modello. Consideriamo una nube di elettroni che si muove attraverso una doppia barriera di potenziale. La buca confinata tra le due barriere di potenziale agisce come un condensatore la cui energia cambia a seconda della carica elettronica contenente. L'interazione fra le particelle è localizzata, vista l'esistenza di uno stato di risonanza che permette una lunga sosta all'interno della doppia barriera, quindi un'accumulazione di cariche. L'evoluzione temporale del nostro sistema è descritto dall'equazione seguente:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}(r, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x) + \int \frac{e^2}{\epsilon |r - r'|} \overline{\hat{\psi}(r', t)} \hat{\psi}(r', t) dr' \right] \hat{\psi}(r, t) \quad (2.1.1)$$

dove il potenziale esterno  $V(x) = V_0(\mathbb{1}_{[a,b]} + \mathbb{1}_{[c,d]})$  con  $a < b < c < d$  dipende solo dalla coordinata  $x$  ortogonale alle interfacce. Possiamo assumere un disaccoppiamento tra i gradi di libertà longitudinali (nella direzione del moto perpendicolare alla doppia barriera) e trasversali alle interfacce. Questo ci permette una descrizione unidimensionale approssimata del nostro modello mediante una funzione d'onda di una particella che dipende dalla coordinata ortogonale  $x$ . Più precisamente fattorizziamo il campo medio di una singola particella come:

$$\psi(r, t) = \langle \hat{\psi}(r, t) \rangle \simeq u(x, t) \phi(y, z) e^{-\left(\frac{i}{\hbar}\right) E t} \quad (2.1.2)$$

dove  $\langle \ \rangle$  è il valore atteso dello stato di molti corpi al tempo  $t$ ;  $\phi(y, z)$  è una soluzione dell'equazione di Schrödinger per una particella libera nel piano parallelo alle interfacce. Consideriamo il termine dell'interazione effettiva solo all'interno della buca  $[b, c]$  e lo approssimiamo con l'espressione

$$\int \frac{e}{\varepsilon |r - r'|} |u(x', t)|^2 |\phi(y', z')|^2 dr' \simeq \alpha Q [u] \mathbb{1}_{[b,c]} \quad (2.1.3)$$

La costante  $\alpha$  vale  $\frac{e^2}{C}$  dove  $C$  riassume i risultati dell'integrazione sul piano  $yz$  e una media del potenziale sull'ampiezza della buca. Dimensionalmente  $C$  è una lunghezza e definisce la capacità della doppia barriera. Il termine

$$Q [u] = \int_b^c |u(x, t)|^2 dx \quad (2.1.4)$$

è la carica adimensionale intrappolata nella buca  $[b, c]$  al tempo  $t$ . Dalle precedenti approssimazioni otteniamo la seguente equazione di Schrödinger non lineare unidimensionale:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) + \alpha Q [u] \mathbb{1}_{[b,c]} \right] u(x, t) \quad (2.1.5)$$

che descrive la dinamica del nostro condensatore. Per definire la condizione iniziale  $u(x, 0)$  supponiamo che inizialmente il pacchetto di onde gaussiane che si muova attraverso la doppia barriera e siano centrate lontano dalla buca  $[b, c]$  in modo tale che  $Q \simeq 0$  al tempo  $t = 0$ . L'equazione (2.1.5) ha due quantità che si conservano, il numero totale di particelle

$$N = \int_{+\infty}^{-\infty} \overline{u(x, t)} u(x, t) dx \quad (2.1.6)$$

e l'energia

$$E = \int_{+\infty}^{-\infty} \overline{u(x, t)} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] u(x, t) dx + \frac{1}{2} \alpha Q [u]^2 \quad (2.1.7)$$

## 2.2 Diodo ad effetto tunnel risonante

### 2.2.1 Notazioni

In questa breve sezione introduciamo i principali oggetti utili all'analisi lineare del nostro modello.

**Notazione 2.2.1.** *In tutto il testo,  $I := [a; b]$  designerà un'intervallo di  $\mathbb{R}$  non vuoto.*

Consideriamo l'operatore differenziale

$$P_{rif} \equiv P_{rif}(h) := -h^2 \frac{d^2}{dx^2} + \mathcal{B} \quad (2.2.1)$$

dove la funzione  $\mathcal{B}$ , che rappresenta la differenza di potenziale applicata al dispositivo, é definita da

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{B}(x) := \mathcal{B}_0(x) + \mathcal{B}_\infty(x - b) \quad (2.2.2)$$

Le funzioni  $\mathcal{B}_0$  e  $\mathcal{B}_\infty$  sono cosí definite

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{B}_\infty(x) := -B \cdot \mathbb{1}_{x \geq 0}(x) \quad \mathcal{B}_0(x) := -B \cdot \mathbb{1}_{[a; b]} \cdot \frac{x - a}{b - a} \quad (2.2.3)$$

dove la costante nota  $B > 0$  rappresenta l'ampiezza della barriera (vedi Figura 2.1). Analogamente introduciamo l'operatore  $P_\infty(h)$  definito da

$$P_\infty \equiv P_\infty(h) := -h^2 \frac{d^2}{dx^2} + \mathcal{B}_\infty(\cdot - b) \quad (2.2.4)$$

cosicché

$$P_{rif}(h) = P_\infty(h) + \mathcal{B}_0 \quad (2.2.5)$$

L'operatore  $P_\infty(h)$  corrisponde al problema del salto del potenziale. In seguito definiamo l'operatore

$$\tilde{P} \equiv \tilde{P}(h) := P_\infty(h, x, h \frac{d}{dx}) + \tilde{v}^h \quad (2.2.6)$$

Il potenziale  $\tilde{v}^h$  si decompone in :

$$\tilde{v}^h := \tilde{V}_0 + V_{NL}^h. \quad (2.2.7)$$

e quindi abbiamo

$$\tilde{P}(h) = P_\infty(h) + \tilde{V}_0 + \tilde{V}_{NL}. \quad (2.2.8)$$

Facciamo, ora qualche ipotesi sui termini che abbiamo definito.

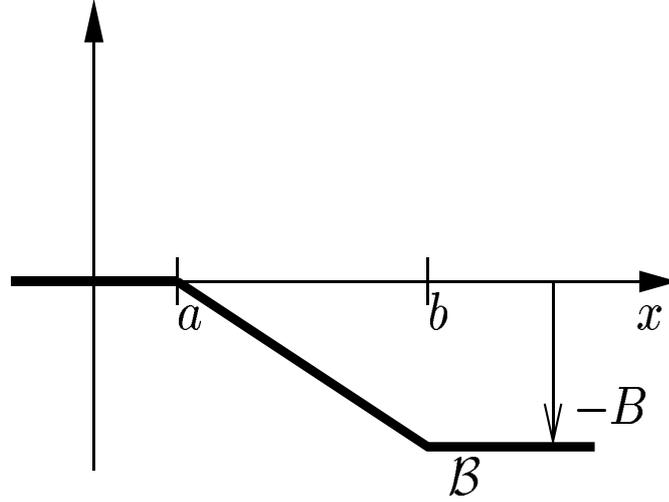


Figura 2.1: Grafico della funzione  $\mathcal{B} := \mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_\infty$

**Ipotesi 2.2.2.** La funzione  $\tilde{V}_0$  è una funzione lipschitziana positiva o nulla data, a supporto compatto in  $I = [a, b]$  :

$$\tilde{V}_0 \in W^{1,\infty}(I), \quad \tilde{V}_0 \geq 0. \quad (2.2.9)$$

Supponiamo che

$$\Lambda_0 := \inf_{x \in [a,b]} \tilde{V}_0(x) > 0. \quad (2.2.10)$$

Tipicamente il potenziale  $\tilde{V}_0$  è della forma  $V_0 \cdot \mathbf{1}_I + \mathcal{B}_0$  dove  $V_0 > 0$  è una costante. Nello studio del problema, fisseremo il seguente dominio spettrale ( detto dominio di energia ) compatto.

**Ipotesi 2.2.3.** Fissiamo i reali  $\Lambda_*$  e  $\Lambda^*$  tali che

$$0 < \Lambda_* < \Lambda^* < \Lambda_0 \quad (2.2.11)$$

La banda di energia  $[\Lambda_*; \Lambda^*]$  è fissata, e ci interesseremo all'hamiltoniano localizzato in questa finestra. È bene notare che abbiamo evitato l'energia zero.

**Ipotesi 2.2.4.** La famiglia delle funzioni  $(V_{NL}^h)_{h>0}$  è una famiglia di funzioni positive o nulle in  $W^{1,\infty}(I)$  e uniformemente limitate:

$$\exists C > 0 \quad \text{tale che} \quad \forall h > 0 \quad \|V_{NL}^h\|_{W^{1,\infty}} \leq C \quad (2.2.12)$$

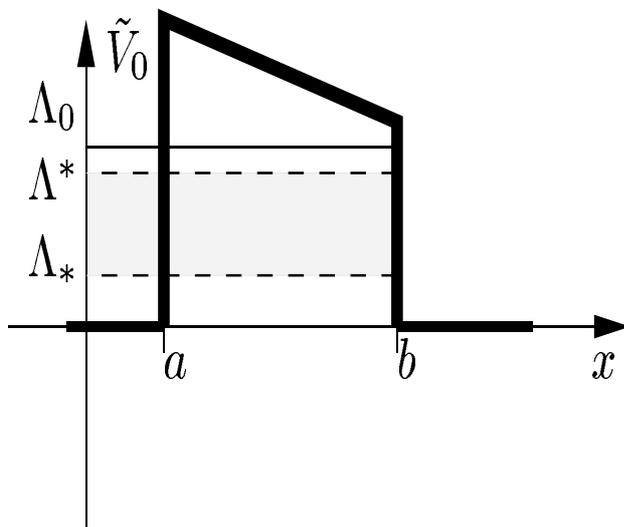


Figura 2.2: Esempio di potenziale  $\tilde{V}_0 \equiv V_0 \cdot \mathbf{1}_I + \mathcal{B}_0, V_0 \in \mathbb{R}^+$

Il potenziale  $V_{NL}^h$  é *a priori* non noto ed é il termine che contiene la non-linearitá nel problema non-lineare che stiamo affrontando. Introduciamo, ora, il problema delle buche quantistiche in un'isola classica.

**Ipotesi 2.2.5.** Fissiamo un intero  $N \in \mathbb{N}^*$ , e  $c_1 < \dots < c_N$ ,  $N$  punti in  $]a; b[$ . Introduciamo per  $i = 1 \dots N$ ,  $N$  funzioni  $w_i \in C_c^\infty(-1; 1]$ ,  $w_i \geq 0$ . Supponiamo che le buche di potenziale siano date da

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad W^h(x) := \sum_{i=1}^N w_i \left( \frac{x - c_i}{h} \right) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.2.13)$$

Denoteremo

$$U^h := \text{supp} W^h \quad (2.2.14)$$

l'insieme delle buche quantistiche

Cosí le buche quantistiche consistono nell'unione di  $N$   $h$ -intorni compatti dei punti  $c_i$ . Le funzioni  $w_i$  sono note e definiscono il profilo delle buche di potenziale.

**Notazione 2.2.6.** Designeremo con  $P(h)$  l'operatore

$$P(h) := \tilde{P}(h) - W^h = P_\infty(h) + v^h, \quad v^h := \tilde{v}^h - W^h \quad (2.2.15)$$

che corrisponde al problema delle buche quantistiche in un'isola semi-classica

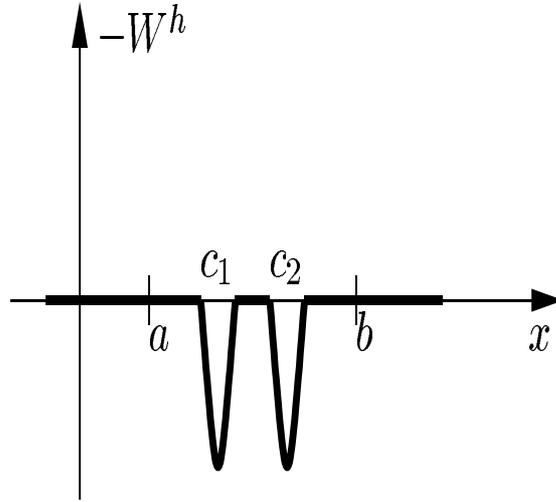


Figura 2.3: Buche di potenziale

Gli operatori introdotti  $P_\infty(h)$ ,  $P_{rif}(h)$ ,  $\tilde{P}_\infty(h)$  e  $P_\bullet(h)$ , visti come operatori non limitati su  $L^2(\mathbb{R})$  e di dominio  $H^2(\mathbb{R})$ , sono autoaggiunti, [6].

**Notazione 2.2.7.** Denoteremo  $H(h)$  (risp.  $\tilde{H}(h)$ ) l' hamiltoniano operante sullo spazio di Hilbert  $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R})$  con

$$H(h)u = P(h)u$$

(risp.  $\tilde{H}(h)u = \tilde{P}(h)u$ ) e di dominio  $D(H) = H^2(\mathbb{R})$  (risp.  $D(\tilde{H}) = H^2(\mathbb{R})$ ). Analogamente definiamo  $H_\bullet(h)$  con

$$H_\bullet(h)u := P_\bullet(h)u, \quad u \in D(H_\bullet(h)) = H^2(\mathbb{R})$$

dove

$$H_{rif}(h)u := P_{rif}(h)u, \quad u \in D(H_{rif}(h)) = H^2(\mathbb{R})$$

e

$$H_\infty(h)u := P_{rif}(h)u, \quad u \in D(H_\infty(h)) = H^2(\mathbb{R})$$

### 2.2.2 Proprietá spettrali

Presentiamo, ora le proprietà spettrali dell'operatore  $H(h)$  che analizzeremo nei capitoli seguenti. Osservando che  $H(h)$  é una perturbazione

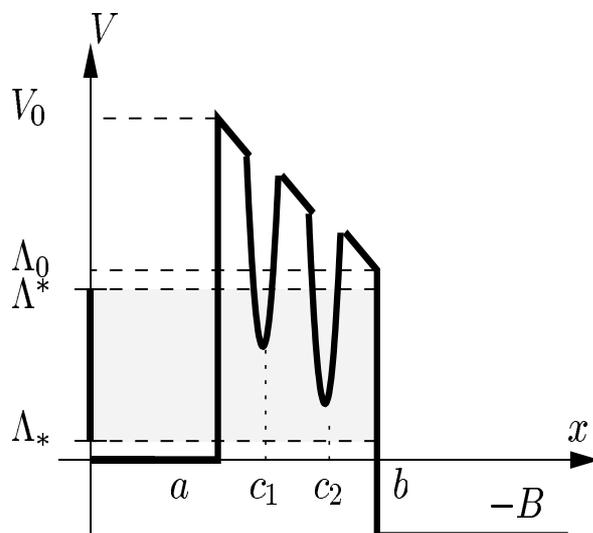


Figura 2.4: Esempio di potenziale dove  $\tilde{V}_0 = V_0 \cdot \mathbb{1}_{[a;b]}$ ,  $V_{NL}^h \equiv 0$

relativamente compatta di  $H_\infty$ , per il teorema di Kato, (vedi [6]) si ha che gli spettri essenziali di questi due operatori sono gli stessi, in particolare

$$\sigma_{ess}(H(h)) = \sigma_{ess}(H_\infty(h)) = [-B; +\infty), \quad (2.2.16)$$

l'ultima uguaglianza verrà dimostrata nei capitoli seguenti. Vedremo ugualmente che

$$\sigma_{ac}(H(h)) = \sigma_{ess}(H(h))$$

In un primo tempo ci poniamo come obiettivo di calcolare le funzioni dell'operatore Hamiltoniano  $H(h)$  attraverso funzioni a supporto compatto in un dominio  $\Lambda \subset [\Lambda_*; \Lambda^*]$ , quindi per il calcolo funzionale calcoliamo

$$f(H(h)) = \int_\Lambda f(\lambda) \frac{\partial E}{\partial \lambda}(\lambda; h) d\lambda, \quad \forall f \in C^0(\Lambda) \quad (2.2.17)$$

dove abbiamo denotato  $(E(\lambda; h))_\lambda$  la risoluzione spettrale di  $H(h)$ . In particolare cerchiamo di ottenere una formula asintotica precisa per la risolvete  $R(z; h)$  dell'operatore  $H(h)$ . Infatti, per la formula di Stone e il principio d'absortion limite, la densità spettrale é legata alla risolvete  $R(z; h)$  dell'operatore  $H(h)$  dalla formula seguente:

$$\frac{\partial E}{\partial \lambda}(\lambda; h) = \frac{1}{2i\pi} [R(\lambda + i0; h) - R(\lambda - i0; h)] \quad (2.2.18)$$

Notiamo che la densità spettrale é fornita dai valori al bordo della risolvete.

### 2.2.3 Sistema di Schrödinger-Poisson

Introduciamo il sistema di Schrödinger-Poisson. Tale sistema consiste nell'accoppiamento dell'equazione di Liouville stazionaria con l'equazione di Poisson.

Consideriamo il seguente problema non-lineare :

$$\begin{cases} [H(h), \rho^h] = 0 \\ H(h) = H_{rif}(h) + \tilde{V}^h - W^h \\ \tilde{V}^h = \tilde{V}_{int} + V_{NL}^h \\ V_{NL}^h = V[\rho^h] \end{cases} \quad (2.2.19)$$

dove  $[H(h), \rho^h] = H(h)\rho^h - \rho^h H(h)$  é il commutatore degli operatori  $H(h)$  e  $\rho^h$ . Il potenziale  $\tilde{V}_{int} \in W^{1,\infty}(I)$  é un dato del problema (tipicamente  $\tilde{V}_{int}$  é una funzione costante su  $I$ ). L'operatore  $\rho^h$  é chiamato matrice densità e descrive la distribuzione delle particelle iniettate nell'isola. Osserviamo che l'Hamiltoniano  $H(h)$ , che compare nel sistema 2.2.19, risulta

$$H(h) \equiv H_\infty(h) + \tilde{v}^h - W^h, \quad \text{con } \tilde{v}^h = \tilde{V}^h + \mathcal{B}_0$$

Facciamo allora delle ipotesi.

**Ipotesi 2.2.8.** Il potenziale  $\tilde{V}_0 := \tilde{V}_{int} + \mathcal{B}_0$  soddisfa l'ipotesi 2.2.2

**Ipotesi 2.2.9.** Supponiamo che per  $i = 1 \dots N$ , si ha

$$\inf \sigma(-\Delta - w_i) \geq -\inf \tilde{V}_0,$$

dove  $-\Delta$  denota il Laplaciano libero su  $\mathbb{R}$

La non-linearità del problema é contenuta nel termine  $V[\rho^h]$ , e il potenziale  $\tilde{V}_0$ , che é noto soddisfa l'ipotesi 2.2.8. In questo contesto la matrice densità  $\rho^h$  verifica la proprietà seguente:

**Proposizione 2.2.10.** La matrice densità  $\rho^h \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  é un operatore positivo e localmente a traccia, i.e. per ogni funzione  $\varphi$  a supporto compatto in  $\mathbb{R}$ , l'operatore  $\varphi \rho^h \varphi$  é a traccia

**Osservazione 2.2.11.** La condizione di normalizzazione usuale della matrice densità, ossia  $\text{Tr}[\rho^h] = 1$  non ha senso nel contesto dei sistemi aperti, poiché la quantità totale di particelle é infinita.

Definiamo, ora, la densità di cariche con la relazione seguente:

**Definizione 2.2.12.** Denoteremo  $dn[\rho^h]$  la misura di Randon positiva definita dalla relazione:

$$\forall \varphi \in C^0([a; b]), \quad dn[\rho^h] = \text{Tr}[\mathbb{1}_{[a; b]} \rho^h \mathbb{1}_{[a; b]} \varphi] \equiv \int_{[a; b]} \varphi(x) dn[\rho^h](x).$$

Precisiamo la natura del termine  $V_{NL}^h$ . Questo termine non-lineare descrive le interazioni elettrostatiche tra i portatori di cariche in un' approssimazione di campo medio. In questa descrizione statistica il potenziale  $V_{NL}^h$ , detto potenziale auto-consistente, è dovuto alla repulsione elettrostatica di una particella in un campo creato dalle particelle vicine. Così il potenziale  $V_{NL}^h$  verifica un' equazione di Poisson :

$$\begin{cases} -\Delta V_{NL}^h = n[\rho^h] \\ V_{NL}^h(a) = 0 = V_{NL}^h(b) \end{cases}$$

**Osservazione 2.2.13.** *Osserviamo che la misura  $n[\rho^h]$  essendo positiva, l'equazione di Laplace implica che la funzione  $V[\rho^h]$  è concava e positiva.*



## Capitolo 3

# Un modello di scattering Schrödinger-Poisson

### 3.1 Introduzione

In questo capitolo ci si propone di studiare un modello non-lineare di trasporto che descrive l'effetto dell'accumulo di cariche elettriche in semiconduttori.

Inizialmente abbiamo preso in considerazione un sistema di Schrödinger-Poisson uno-dimensionale, con condizioni al bordo miste, che descrive il comportamento stazionario di un dispositivo quantistico in equilibrio.

I principali risultati ottenuti riguardano esistenza e regolarità delle soluzioni di tale sistema, e l'analisi del limite semiclassico sviluppata attraverso la trasformata di Wigner (che porta al problema standard con condizioni al bordo per il sistema di Vlasov-Poisson classico).

Più precisamente sia  $I = (0, 1)$  il dominio del semiconduttore. Ai lati applichiamo un potenziale

$$V(x) = 0 \quad \text{per } x < 0, \quad V(x) = V_1 < 0 \quad \text{per } x > 1$$

Sia  $\Psi_k$  uno stato di scattering dell'operatore di Schrödinger  $-h^2 \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$  su  $\mathbb{R}$ , corrispondente al vettore d'onda  $k$ :

$$-h^2 \Psi_k'' + V \Psi_k = k^2 \Psi_k. \quad (3.1.1)$$

con  $x, k \in \mathbb{R}$ . Supponiamo, inoltre, che  $\Psi_k$  sia un'onda proveniente da  $-\infty$  di ampiezza 1. Una parte di questa è riflessa dal potenziale e ritorna a  $-\infty$ , mentre l'altra parte è trasmessa e viaggia a  $+\infty$ .

Siccome  $V = 0$  su  $(-\infty, 0)$  l'equazione di Schrödinger può essere risolta esplicitamente su questo intervallo e risulta

$$\Psi_k(x) = 1e^{ikx/h} + R_k e^{-ikx/h} \quad \text{per } x < 0 \quad (3.1.2)$$

dove il vettore d'onda  $k$  è non negativo. Analogamente per  $x > 1$  abbiamo

$$\Psi_k(x) = T_k e^{ix\sqrt{k^2 - V_1}/h} \quad \text{per } x > 1 \quad (3.1.3)$$

Il coefficiente 1 in (3.1.2) esprime il fatto che  $\Psi_k$  è un'onda proveniente da  $-\infty$  con ampiezza uno, mentre l'assenza di un esponenziale con parte reale negativa in (3.1.3) significa che nessun elettrone proviene da  $+\infty$ . Inoltre i coefficienti  $R_k$  e  $T_k$  non sono noti a priori ma dedotti dalla risoluzione dell'equazione di Schrödinger. Essi sono rispettivamente il coefficiente di Riflessione e quello di Trasmissione. Il nostro obiettivo è quello di dedurre dalle formule precedenti una condizione al bordo per  $x = 0$  e  $x = 1$  in cui compaiono i coefficienti  $R_k$  e  $T_k$ . Questo può essere fatto dopo una semplice manipolazione algebrica da cui otteniamo

$$\begin{aligned} h\Psi_k'(0) + ik\Psi_k(0) &= 2ik \\ h\Psi_k'(1) - i\sqrt{k^2 - V_1}\Psi_k(1) &= 0 \end{aligned}$$

La densità di elettroni è pari a

$$n(x) = \int_0^{+\infty} \Phi(k) |\Psi_k(x)|^2 dk$$

dove  $\phi$  è una funzione assegnata tale che

$$\Phi \geq 0 \quad \int_0^{+\infty} (1 + k^2)\Phi(k) dk < \infty$$

e la densità di corrente è data da

$$J(x) = h \int_0^{+\infty} \Phi(k) \text{Im}(\overline{\Psi_k(x)} \Psi_k'(x)) dk$$

Da un semplice calcolo risulta  $J' = 0$  quindi  $J = \text{costante}$ . Infine il potenziale elettrico  $V$  non è noto a priori, ma è soluzione dell'equazione di Poisson su  $(0, 1)$

$$-V'' = n \quad V(0) = 0, \quad V(1) = V_1 \quad (3.1.4)$$

Nelle sezioni che seguono, dimostriamo che il sistema di Schrödinger-Poisson ottenuto accoppiando (3.1.4) e (??) ammette una soluzione. Il parametro  $h$  che compare nell'equazione è per la costante di Planck e lo assumeremo piccolo nelle sezioni 3.3 e 3.4 dove una parte della nostra analisi corrisponde allo studio del limite semiclassico ( $h \rightarrow 0$ ), mentre nella sezione 3.5 il parametro  $h$  è fissato.

### 3.2 Esistenza delle soluzioni

Consideriamo il problem unidimensionale

$$-h^2\Psi_k'' + V\Psi_k = k^2\Psi_k, \quad x \in [0, 1] \quad (3.2.1)$$

con condizioni al contorno

$$h\Psi_k'(0) + ik\Psi_k(0) = 2ik \quad (3.2.2)$$

$$h\Psi_k'(1) - i\sqrt{k^2 - V_1}\Psi_k(1) = 0 \quad (3.2.3)$$

dove il potenziale  $V$  non é dato in forma esplicita ma soddisfa l'equazione di Poisson

$$-V''(x) = n(x), \quad x \in [0, 1] \quad (3.2.4)$$

$$V(0) = 0, \quad V(1) = V_1 \quad (3.2.5)$$

dove la densità  $n$  é data da

$$n(x) = \int_0^{+\infty} \Phi(k) |\Psi_k(x)|^2 dk \quad (3.2.6)$$

Supponiamo che

$$\Phi \geq 0 \quad \int_0^{+\infty} (1+k^2)\Phi(k)dk < \infty \quad (3.2.7)$$

si hanno i seguenti teoremi di esistenza delle soluzioni:

**Teorema 3.2.1.** *Sotto l'ipotesi (3.2.7), il sistema (3.2.1)-(3.2.6) ammette una soluzione  $((\Psi_k)_{k \in \mathbb{R}^+}, V)$  tale che*

$$\Psi_k \in W^{4,\infty}(0,1). \quad V \in W^{2,\infty}(0,1)$$

**Teorema 3.2.2.** *Assumiamo che (3.2.7) sia verificata e che  $V_1 < 0$  sia tale che  $\int_0^{+\infty} \Phi(k)dk \leq -\frac{V_1}{4}$ . Allora (3.2.1)-(3.2.6) ammette una soluzione  $V \in W^{2,\infty}(0,1)$ ,  $\Psi_k \in W^{4,\infty}(0,1)$  tale che  $V$  é decrescente su  $(0,1)$ .*

Per dimostrare i teoremi 3.2.1 3.2.2 dapprima mostriamo che l'equazione lineare di Schrödinger (3.2.1) con le condizioni al bordo (3.2.2) e (3.2.3) ammette un' unica soluzione. Questo sarà fatto nella sottosezione seguente.

Dapprima ricordiamo che

$W^{j,p}(U)$  coincide con l'insieme delle funzioni  $u \in L^1(U)$  tali che per ogni  $i = 1, \dots, j$  esiste  $D^i u \in L^p(U)$  dove  $D^i$  sono le derivate parziali deboli di  $u$  e

$U$  aperto di  $\mathbb{R}$ .

Supponiamo  $u, v \in L^1(U)$  e  $i$  un multindice, allora  $v$  è la  $i$ -esima derivata parziale debole di  $u$  e scriviamo

$$D^i(u) = v$$

se

$$\int_U u D^i \phi dx = (-1)^{|i|} \int_U v \phi dx$$

per ogni funzione test  $\phi \in C_c^\infty(U)$

Definiamo le norme

$$\|u\|_{W^{1,\infty}} = |u(0)| + \|u'\|_{L^\infty} \quad \text{se } u \in W^{1,\infty}(0,1)$$

$$\|u\|_{W^{2,\infty}} = |u(0)| + |u'(0)| + \|u''\|_{L^\infty} \quad \text{se } u \in W^{2,\infty}(0,1)$$

### 3.2.1 L'equazione lineare

Consideriamo l'equazione (3.2.1) con le condizioni al bordo

$$h\Psi_k'(0) + ik\Psi_k(0) = S \quad (3.2.8)$$

$$h\Psi_k'(1) - i\sqrt{k^2 - V_1}\Psi_k(1) = R \quad (3.2.9)$$

**Proposizione 3.2.3.** *Sia  $V$  in  $L^\infty(0,1)$  a valori reali. Allora per ogni  $(S, R) \in \mathbb{C}^2$ , (3.2.1),(3.2.8),(3.2.9) ammette un'unica soluzione  $\Psi_k \in W^{2,\infty}(0,1)$ , con  $k \geq 0$*

*Dimostrazione.* Consideriamo le basi  $(\varphi_1, \varphi_2)$  soluzioni di (3.2.1), soddisfacenti alle condizioni iniziali

$$\begin{cases} \varphi_1(0) = 1, & \varphi_1'(0) = 0 \\ \varphi_2(0) = 0, & \varphi_2'(0) = 1 \end{cases}$$

Una soluzione di (3.2.1) è una combinazione lineare di  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , cioè  $\Psi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$  dove  $c_1$  e  $c_2$  sono incognite da trovare utilizzando (3.2.8), (3.2.9). Si ha, dunque, il seguente sistema lineare nei coefficienti della combinazione:

$$\begin{cases} hc_1\varphi_1'(0) + hc_2\varphi_2'(0) + ikc_1\varphi_1(0) + ikc_2\varphi_2(0) = S \\ hc_1\varphi_1'(1) + hc_2\varphi_2'(1) - i\sqrt{k^2 - V_1}[c_1\varphi_1(1) + c_2\varphi_2(1)] = R \end{cases}$$

Dobbiamo dimostrare che per ogni  $(R, S)$  il sistema precedente ha soluzione unica, ossia è un sistema di Cramer. È sufficiente far vedere che per  $R = S = 0$  l'unica soluzione è quella identicamente nulla. Moltiplichiamo (3.2.1) per  $\overline{\Psi}$  e integriamo su  $(0,1)$

$$-h^2 \int_0^1 \Psi''(x) \overline{\Psi(x)} dx + \int_0^1 (V - k^2) |\Psi(x)|^2 dx = 0$$

Integrando per parti si ha

$$[-h^2 \Psi'(x) \overline{\Psi(x)}]_0^1 + h^2 \int_0^1 \Psi'(x) \overline{\Psi'(x)} dx + \int_0^1 (V - k^2) |\Psi(x)|^2 dx = 0$$

$$\begin{aligned} & -h^2 \Psi'(1) \overline{\Psi(1)} + h^2 \Psi'(0) \overline{\Psi(0)} \\ & + h^2 \int_0^1 \Psi'(x) \overline{\Psi'(x)} dx + \int_0^1 (V - k^2) |\Psi(x)|^2 dx = 0 \end{aligned}$$

Utilizzando la versione omogenea di (3.2.8) e (3.2.9) otteniamo

$$\begin{aligned} & -hi \sqrt{k^2 - V_1} \Psi(1) \overline{\Psi(1)} - hik \Psi(0) \overline{\Psi(0)} \\ & + h^2 \int_0^1 \Psi'(x) \overline{\Psi'(x)} dx + \int_0^1 (V - k^2) |\Psi(x)|^2 dx = 0 \end{aligned}$$

Prendendo la parte immaginaria dell'equazione ottenuta concludiamo con l'identità

$$\sqrt{k^2 - V_1} |\Psi(1)|^2 + k |\Psi(0)|^2 = 0$$

che implica  $\Psi(1) = 0$  (se fosse diverso da 0 allora la quantità al primo membro dell'uguaglianza precedente sarebbe strettamente positiva) e, per la versione omogenea di (3.2.9)  $\Psi'(1) = 0$ . Quindi per il teorema di Cauchy Lipschitz  $\Psi$  è identicamente nulla perciò il sistema

$$\begin{cases} -h^2 \Psi'' + V \Psi = k^2 \Psi \\ \Psi(1) = 0 \\ \Psi'(1) = 0 \end{cases}$$

ammette soluzione unica ( $\Psi \equiv 0$ ) □

**Proposizione 3.2.4.** Sia  $V$  in  $L^\infty(0, 1)$ , concava e  $V(0) = 0, V(1) = V_1 < 0$

(i) Esiste una costante  $C > 0$ , indipendente da  $V, k$  e  $h \leq 1$  tale che

$$\begin{aligned} \|\Psi_k\|_{W^{1,\infty}} &\leq C \frac{k}{h^2}, \quad \forall k \in \mathbb{R}_+ \\ \|\Psi_k\|_{W^{1,\infty}} &\leq C \frac{1+k}{h}, \quad \forall k \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

(ii) Supponiamo  $V$  decrescente allora

$$\|\Psi_k\|_{L^\infty}^2 \leq 20, \quad h^2 \|\Psi_k\|_{L^\infty}^2 \leq \min[20, 20(k^2 - V_1)]$$

Osserviamo che ogni soluzione  $V$  del problema (3.2.1)-(3.2.6) é concava per (3.2.4).

*Dimostrazione.* Dapprima moltiplichiamo (3.2.1) per  $\bar{\Psi}_k$  e integriamo tra 0 e  $x$ . Prendendo la parte reale otteniamo

$$h^2 \int_0^x |\Psi'_k(t)|^2 dt + \int_0^x (V - k^2) |\Psi_k(t)|^2 dt = h^2 [\text{Re} \Psi'_k \bar{\Psi}_k]_0^x \quad (3.2.10)$$

In seguito, moltiplichiamo (3.2.1) per  $\bar{\Psi}_k$  e integriamo per parti tra 0 e 1:

$$\begin{aligned} [-h^2 \Psi'_k \bar{\Psi}_k]_0^1 + h^2 \int_0^1 |\Psi'_k(t)|^2 dt + \int_0^1 (V - k^2) |\Psi_k(t)|^2 dt &= 0 \\ -h^2 \Psi'_k(1) \bar{\Psi}_k(1) + h^2 \Psi'_k(0) \bar{\Psi}_k(0) + h^2 \int_0^1 |\Psi'_k(t)|^2 dt + \int_0^1 (V - k^2) |\Psi_k(t)|^2 dt &= 0 \end{aligned}$$

Utilizzando (3.2.2) e (3.2.3) si ha

$$\begin{aligned} -hi\sqrt{k^2 - V_1} \Psi(1) \bar{\Psi}(1) + h[2ik - ik\Psi(0)] \bar{\Psi}(0) + \\ h^2 \int_0^1 |\Psi'_k(t)|^2 dt + \int_0^1 (V - k^2) |\Psi_k(t)|^2 dt &= 0 \\ -hi\sqrt{k^2 - V_1} \Psi_1 \bar{\Psi}(1) + 2ihk \text{Re}(\Psi(0)) + 2hk \text{Im}(\Psi(0)) - ihk |\Psi(0)|^2 + \\ h^2 \int_0^1 |\Psi'_k(t)|^2 dt + \int_0^1 (V - k^2) |\Psi_k(t)|^2 dt &= 0 \end{aligned}$$

Prendendo la parte immaginaria troviamo

$$\sqrt{k^2 - V_1} |\Psi_k(1)|^2 + k |\Psi_k(0)|^2 = 2k \text{Re}(\Psi_k(0)) \quad (3.2.11)$$

Immediatamente deduciamo

$$|\Psi_k(0)|^2 \leq 2 \text{Re}(\Psi_k(0)), \quad |\Psi_k(0)| \leq 2 \quad (3.2.12)$$

$$|\Psi_k(1)|^2 \leq \frac{2k}{\sqrt{k^2 - V_1}} \text{Re}(\Psi_k(0)) \quad (3.2.13)$$

(la seconda equazione nella (3.2.12) si ottiene osservando che  $|\Psi_k(0)|^2 \leq 2 \text{Re}(\Psi_k(0)) \leq 2 |\Psi_k(0)|$ ) Deduciamo da queste stime e da (3.2.2), (3.2.3) che

$$|h \Psi'_k(0)| = |2ik - ik \Psi_k(0)| \leq |2ik| + |ik \Psi_k(0)| \leq 2k + 2k = 4k \quad (3.2.14)$$

$$h^2 |\Psi'_k(1)|^2 \leq 2k \sqrt{k^2 - V_1} \text{Re}(\Psi_k(0)) \quad (3.2.15)$$

Per provare (i) introduciamo la funzione

$$g_R(x) = h^2 |\text{Re} \Psi'_k(x)|^2 + (k^2 - V) |\text{Re}(\Psi_k(x))|^2 \quad (3.2.16)$$

Possiamo differenziare (3.2.16) e ottenere per (3.2.1) che

$$\begin{aligned} g'_R(x) &= 2h^2 |Re\Psi'_k(x)| |Re\Psi''_k(x)| + 2(k^2 - V) |Re\Psi_k(x)| |Re\Psi'_k(x)| - \\ &\quad V' |Re\Psi_k(x)|^2 \\ &= 2 |Re\Psi'(k)| (h^2 |Re\Psi''(x)| + (k^2 - V) |Re\Psi_k(x)|) - V' |Re\Psi_k(x)|^2 \\ &= V' |Re\Psi_k(x)|^2 \end{aligned}$$

Ora osserviamo che, essendo  $V$  concavo,  $V'$  é decrescente. Si possono quindi avere due casi:

- Se  $V'(x) < 0 \quad \forall x$ , allora  $g'_R(x) > 0$  e quindi  $g_R(x) \leq g_R(1) \leq g_R(1) + g_R(0)$  (essendo  $g_R(0) \geq 0$ )
- Altrimenti esiste  $x_0 \in (0, 1)$  tale che  $V'(x) > 0 \quad \forall x \in (0, x_0)$ ,  $V'(x) < 0 \quad \forall x \in (x_0, 1)$ . Di conseguenza  $g'_R$  é negativo in  $(0, x_0)$  ed é positivo in  $(x_0, 1)$  e dunque  $g_R$  assume valore massimo al bordo.

In entrambi i casi vale

$$g_R(x) \leq g_R(1) + g_R(0)$$

Prendiamo ora  $x_0 \in [0, 1]$  tale che  $|Re\Psi'_k|$  ha il suo massimo in  $x_0$ . Se  $x_0 = 0$  o  $x_0 = 1$  allora (3.2.14) e (3.2.15) implicano che

$$|h\Psi'_k(x_0)|^2 \leq |h\Psi'_k(0)|^2 + |h\Psi'_k(1)|^2 \leq 16k^2 + 2k\sqrt{k^2 - V_1} |Re\Psi_k(0)| \quad (3.2.17)$$

Se  $x_0 \in (0, 1)$ , allora  $Re\Psi''_k(x_0) = 0$  perché  $x_0$  punto di massimo interno e questo implica  $(k^2 - V)Re\Psi_k(x_0) = 0$  per la (3.2.1) prendendo la parte reale che ci da per la (3.2.16)

$$|hRe\Psi'_k(x_0)|^2 = g_R(x_0) \leq g_R(1) + g_R(0)$$

Ma

$$g_R(0) = h^2 |Re\Psi'_k(0)|^2 + (k^2 - V) |Re\Psi_k(0)|^2$$

e per la (3.2.15), (3.2.13)

$$\begin{aligned} g_R(1) &= h^2 |Re\Psi'_k(1)|^2 + (k^2 - V) |Re(\Psi_k(1))|^2 \\ &\leq 2k\sqrt{k^2 - V_1} |Re(\Psi_k(0))| + (k^2 - V) \frac{2k}{\sqrt{k^2 - V_1}} |Re(\Psi_k(0))| \\ &\leq 4k\sqrt{k^2 - V_1} |Re(\Psi_k(0))| \end{aligned}$$

Quindi in entrambi i casi abbiamo

$$\sup_{x \in [0,1]} h^2 |Re\Psi'(x)|^2 \leq g_R(x) \leq Ck^2 + 4k\sqrt{k^2 - V_1} |Re\Psi_k(0)| \quad (3.2.18)$$

Gli stessi calcoli si possono ripetere considerando

$$g_I(x) = h^2 |Im\Psi'_k|^2 + (k^2 - V)|Im\Psi_k|^2$$

da cui otteniamo

$$\sup_{x \in [0,1]} h^2 |Im\Psi'(x)|^2 \leq Ck^2 + 4k\sqrt{k^2 - V_1} Im\Psi_k(0) \quad (3.2.19)$$

Infine

$$\begin{aligned} \|h\Psi'_k\|_{L^\infty}^2 &= \sup_{x \in (0,1)} |h\Psi'_k|^2 \\ &\leq \sup_{x \in (0,1)} h^2 |Re\Psi'_k|^2 + \sup_{x \in (0,1)} h^2 |Im\Psi'_k|^2 \\ &\leq Ck^2 + 4k\sqrt{k^2 - V_1} Re\Psi_k(0) + Ck^2 + 4k\sqrt{k^2 - V_1} Im\Psi_k(0) \\ &\leq Ck^2 + 4k\sqrt{k^2 - V_1} |\Psi_k(0)| \\ &\leq Ck^2 + 4k[k + C] |\Psi_k(0)| \\ &\leq Ck^2 + 4kC[k + 1] |\Psi_k(0)| \end{aligned}$$

quindi

$$\|h\Psi'_k\|_{L^\infty} \leq C[k + k^{1/2}(k^{1/2} + 1)] |\Psi_k(0)|^{1/2} \quad (3.2.20)$$

Integrando  $\Psi'_k$  tra 0 e 1 per (3.2.20) e (3.2.13) si ha

$$\begin{aligned} |h\Psi_k(0)| &\leq |h\Psi_k(1) - h \int_0^1 \Psi'_k dt| \\ &\leq |h\Psi_k(1)| + |h \int_0^1 \Psi'_k(t) dt| \\ &\leq h \left[ \frac{2k}{\sqrt{k^2 - V_1}} |\Psi_k(0)| \right]^{1/2} + C \left[ k + k^{1/2}(k^{1/2} + 1) |\Psi_k(0)|^{1/2} \right] \\ &\leq C \left[ k + k^{1/2}(k^{1/2} + 1) |\Psi_k(0)|^{1/2} + h \frac{k^{1/2}}{(\sqrt{k^2 - V_1})^{1/2}} |\Psi_k(0)|^{1/2} \right] \\ &\leq C \left[ k + k^{1/2} \left[ (k^{1/2} + 1) + \frac{h}{k^{1/2} + 1} \right] |\Psi_k(0)|^{1/2} \right] \end{aligned}$$

(dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che, essendo  $V_1 \leq 0$ , vale  $(\sqrt{k^2 - V_1})^{1/2} \geq k^{1/2}$  e dunque  $\frac{1}{(\sqrt{k^2 - V_1})^{1/2}} \leq \frac{1}{k^{1/2} + 1}$ ). questo può essere riscritto nel modo seguente

$$\begin{aligned} |h\Psi_k(0)|^2 &\leq C [k^2 + k |\Psi_k(0)|] \quad \text{per } k \leq 1 \\ |h\Psi_k(0)|^2 &\leq C [k^2 + k^2 |\Psi_k(0)|] \quad \text{per } k \geq 1 \end{aligned}$$

che dopo aver svolto alcuni calcoli si ottiene (i).(DA DIMOSTRARE) Per dimostrare (ii) introduciamo la seguente funzione ausiliaria

$$H(x) = |\Psi_k(x)|^2 + \frac{h^2 |\Psi_k'(x)|^2}{k^2 - V(x)}$$

La derivata di  $H$  risulta per la (3.2.1)

$$\begin{aligned} H'(x) &= 2|\Psi_k(x)||\Psi_k'(x)| + \frac{2h^2 |\Psi_k'(x)||\Psi_k''(x)|(k^2 - V(x)) + V'(x)h^2 |\Psi_k'(x)|^2}{(k^2 - V(x))^2} \\ &= 2|\Psi_k(x)||\Psi_k'(x)| + (k^2 - V(x)) \frac{2h^2 |\Psi_k'(x)||\Psi_k''(x)|}{(k^2 - V(x))^2} + \frac{V'(x)h^2 |\Psi_k'(x)|^2}{(k^2 - V(x))^2} \\ &= 2|\Psi_k'(x)| \left( |\Psi_k(x)| + \frac{h^2 |\Psi_k''(x)|}{k^2 - V(x)} \right) + \frac{V'(x)h^2 |\Psi_k'(x)|^2}{(k^2 - V(x))^2} \\ &= \frac{V'(x)h^2 |\Psi_k'(x)|^2}{(k^2 - V(x))^2} \leq 0 \end{aligned}$$

perché  $V$  é decrescente. Quindi  $|\Psi_k(x)|^2 \leq H(x) \leq H(0)$  perché  $H$  é decrescente ma  $H(0) \leq |\Psi_k(0)|^2 + \frac{h^2}{k^2} |\Psi_k'(0)|^2 \leq 20$  per (3.2.12) e (3.2.14).

Analogamente  $\frac{h^2 |\Psi_k'(x)|^2}{k^2 - V(x)} \leq H(x) \leq H(0) \leq 20$  quindi  $h^2 |\Psi_k'(x)|^2_{L^\infty} \leq 20(k^2 - V_1)$  perché  $V$  é decrescente.  $\square$

Si ha anche un risultato di stabilità per le soluzioni di (3.2.1),(3.2.2),(3.2.3) per cambiamenti del potenziale  $V$ , quindi abbiamo la seguente proposizione:

**Proposizione 3.2.5.** *Sia  $V_n$  una sequenza di potenziali  $L^\infty$  convergenti a  $V$  nella topologia debole\* di  $L^\infty$ , cioè  $\int_0^1 V_n \Phi dx \rightarrow \int_0^1 V \Phi dx$  per  $n \rightarrow +\infty \quad \forall \Phi \in L^1(0,1)$ . Siano  $\Psi_k(V_n)$  e  $\Psi_k(V)$  le soluzioni di (3.2.1),(3.2.2),(3.2.3) rispettivamente con  $V_n$  e  $V$  come potenziale. Allora  $\Psi_k(V_n)$  converge in  $C^1[0,1]$  a  $\Psi_k(V)$  uniformemente rispetto a  $k$  su intervalli limitati.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $|k| \leq K$  e  $\|V\|_{L^\infty} \leq M$ , dimostriamo che esiste  $C$  tale che  $\|\Psi_k\|_{W^{2,\infty}} \leq C(K, M)$  dove  $C$  dipende solo da  $k$  e da  $M$ . Infatti  $\Psi_k \in C(0,1)$  é soluzione dell'equazione  $-h^2 \Psi_k'' + V \Psi_k = k^2 \Psi_k$ . Dalle equazioni (3.2.12), (3.2.14) e dalle ipotesi fatte su  $k$  e su  $V$  segue

$$\begin{aligned} \|\Psi_k\|_{W^{2,\infty}} &= |\Psi_k(0)| + |\Psi_k'(0)| + \|\Psi_k''\|_{L^\infty} \\ &= 2 + \frac{4k}{h} + \left\| \frac{(k^2 - V)\Psi_k}{h^2} \right\|_{L^\infty} \\ &= 2 + \frac{4K}{h} + \frac{(K^2 + M)}{h^2} \|\Psi_k\|_{L^\infty} \\ &= 2 + \frac{4K}{h} + \left( \frac{k^2 + M}{h^2} \right) \frac{CK}{h^2} = C(K, M) \end{aligned}$$

Ora siano  $|k_n| \rightarrow k$ ,  $V_n \rightarrow V$  in  $L^\infty$  debole\* allora  $|k_n| \leq K$  e  $\|V_n\|_{L^\infty} \leq M$  perché una successione convergente nella topologia debole\* è limitata in  $L^\infty$  (Brezis, proposizione III.12 (iii)). Per quanto osservato all'inizio della dimostrazione  $\|\Psi_{k_n}(V_n)\|_{W^{2,\infty}}^2 \leq C(K, M)$ . Di conseguenza posso estrarre una sottosuccessione, che chiamo nello stesso modo, convergente in  $C^1$

$$\Psi_{k_n}(V_n) \rightarrow u \quad \text{in } C^1$$

per il teorema di Ascoli-Arzelá. Non ci resta altro che dimostrare che  $u = \Psi_k(V)$ . Sia  $\Psi_n = \Psi_{k_n}(V_n)$  si ha

$$\begin{aligned} -h^2 \Psi_n'' + V_n \Psi_n &= k_n^2 \Psi_n \\ h \Psi_n'(0) + i k_n \Psi_n(0) &= 2i k_n \\ h \Psi_n'(1) - i \sqrt{k_n^2 - V_1} \Psi_n(1) &= 0 \end{aligned}$$

Per poter passare al limite nell'equazione dobbiamo prima ottenere la convergenza di  $\Psi_n''$  a  $u''$ . Posto  $f_n = \Psi_n'$  e  $f = u'$  si ha dall'equazione che

$$-h^2 f_n' = (k_n^2 - V_n) \Psi_n$$

e dunque  $f_n'$  converge uniformemente,  $f_n$  converge uniformemente a  $f$ ; si possono quindi scambiare limiti e derivate e ottenere che esiste  $f'$  e  $f_n' \rightarrow f'$  uniformemente cioè

$$\Psi_n'' = f_n' \rightarrow u'' = f'$$

Ora possiamo passare al limite le equazioni precedenti e otteniamo:

$$\begin{aligned} -h^2 u'' + V u &= k^2 u \\ h u'(0) + i k u(0) &= 2i k \\ h u'(1) - i \sqrt{k^2 - V_1} u(1) &= 0 \end{aligned}$$

cioè  $u$  è soluzione di questo problema e per unicità della soluzione  $u = \Psi_k(V)$  □

Procediamo ora con il problema non lineare.

*dimostrazione teorema(3.2.1).* Dapprima notiamo che se  $(\Psi_k, V)$  è una soluzione di (3.2.1)-(3.2.6), allora  $V$  è concavo per l'equazione (3.2.4) visto che  $n(x) \geq 0$  e  $V \in C([0, 1])$  in quanto soluzione di un'equazione differenziale del secondo ordine, quindi  $V$  è nell'insieme

$$F = \{V \in C([0, 1]), V \text{ concavo}, V(0) = 0, V(1) = V_1, \|V\|_{L^\infty} \leq M\}$$

dove  $M$  sarà fissata piú avanti. Una soluzione del problema è una coppia  $(\Psi_k, V)$  che costruiamo in maniera costruttiva. Consideriamo un potenziale  $V$  in  $F$ , per la proposizione (3.2.3) il sistema (3.2.1)-(3.2.3) ha soluzione

unica che chiamiamo  $\Psi_k(V) \in W^{2,\infty}(0,1)$  tale che  $\|\Psi_k\|_{L^\infty} \leq Ck$  (C dipende da  $h$  ma non da  $V$  e  $k$ ) (vedi proposizione 3.2.4). La funzione

$$N(V)(x) = \int_0^{+\infty} \Phi(k) |\Psi_k(V)(x)|^2 dk$$

é in  $L^\infty$  e

$$\|N(V)\|_{L^\infty} \leq C_1$$

dove  $C_1$  non dipende da  $V$ , perché per (3.2.7)

$$\begin{aligned} |N(V)(x)| &\leq \int_0^{+\infty} \Phi(k) |\Psi_k(V)(x)|^2 dk \\ &\leq \int_0^{+\infty} \Phi(k) k^2 dk = C_1 < +\infty \end{aligned}$$

Sia  $W$  la soluzione di

$$\begin{cases} -W'' = N(V) \\ W(0) = 0, \quad W(1) = V_1 \end{cases}$$

Partendo da  $V \in F$  gli abbiamo associato un elemento  $S(V) := W$  con la procedura descritta, quindi abbiamo un'operatore  $S : F \rightarrow L^\infty(0,1)$  e una soluzione  $V$  del sistema di Schrödinger-Poisson é un punto fisso di  $S$ . Solo dimostrando che  $S$  é un punto fisso dimostriamo l'esistenza della soluzione del problema. Si ha che  $W(1) = W(0) + W'(0) + \frac{1}{2}W''(\xi)$  con  $\xi \in (0,1)$ , da cui otteniamo la stima

$$\begin{aligned} \|S(V)\|_{W^{2,\infty}} &= \|W\|_{W^{2,\infty}} = |W(0)| + |W'(0)| + \|W''\|_{L^\infty} \\ &= |W(1) - \frac{1}{2}W''(\xi)| + \|N(V)\|_{L^\infty} \\ &\leq |W(1)| + \frac{1}{2}\|W''\|_{L^\infty} + \|N(V)\|_{L^\infty} \\ &\leq |V_1| + \frac{1}{2}C_1 + C_1 = |V_1| + \frac{3}{2}C_1 \end{aligned}$$

concludiamo fissando  $M = |V_1| + \frac{3}{2}C_1$  allora l'insieme  $F$  é invariante sotto l'azione di  $S$  e dunque  $W = S(V) \in F$ . Per di piú  $S : L^\infty(0,1) \rightarrow L^\infty(0,1)$  é compatto.

Ricordiamo che dato  $X$  spazio di Banach, un operatore  $G : X \rightarrow X$  é compatto se per ogni successione  $(x_n)_n$  limitata in  $X$  ( $\|x_n\| \leq C \quad \forall n$ ) la successione  $(G(x_n))_n$  ha una sottosuccessione convergente.

Infatti sia  $(V_n)_n$  una successione in  $F$  limitata in  $L^\infty(0,1)$ :  $\|V_n\|_{L^\infty} \leq C$ . Dobbiamo

dimostrare che  $S(V)_n$  ha una sottosuccessione convergente in  $L^\infty$ . Per quanto osservato precedentemente

$$\|S(V_n)\|_{W^{2,\infty}} \leq |V_1| + \frac{3}{2}C_1$$

dove la costante al secondo membro non dipende da  $n$  quindi da questo segue che si può estrarre una sottosuccessione  $S(V_{n_j})$  convergente in  $C^1$  a un elemento  $W$  e dunque in  $L^\infty$ :

$$\|S(V_{n_j} - W)\|_{L^\infty} = \sup_x |V_{n_j} - W(x)| \leq \|V_{n_j} - W\|_{C^1} \rightarrow 0$$

Inoltre  $S$  é continuo perché  $N(V)$  é continuo rispetto a  $V$  per la proposizione 3.2.5 e per la stima uniforme della proposizione 3.2.4. Inoltre  $F \subset L^\infty(0,1)$  é chiuso e convesso e  $S(F) \subset F$  quindi applichiamo il teorema del punto fisso di Schauder che richiameremo al termine della dimostrazione. Questo ci da l'esistenza di una soluzione  $(\Psi_k, V)$  di (3.2.1)-(3.2.6). Inoltre  $V = S(V) \in W^{2,\infty}$  per le stime provate in precedenza e  $\Psi_k \in W^{4,\infty}$ . Quest'ultima proprietà segue dal fatto che  $\Psi_k \in W^{2,\infty}$  (si veda proposizione 3.2.3) e che derivando l'equazione (3.2.1) si trova:

$$\begin{aligned} -h^2\Psi_k''' &= (k^2 - V)\Psi_k' - V'\Psi_k \\ -h^2\Psi_k'''' &= (k^2 - V)\Psi_k'' - 2V'\Psi_k' - V''\Psi_k \end{aligned}$$

e infine

$$\begin{aligned} \|\Psi_k\|_{W^{4,\infty}} &\leq \|\Psi_k\|_{W^{2,\infty}} + \|\Psi_k'''\|_{L^\infty} + \|\Psi_k''''\|_{L^\infty} \\ &\leq \|\Psi_k\|_{W^{2,\infty}} + c\|V\|_{W^{2,\infty}} + c\|\Psi_k\|_{W^{2,\infty}} < +\infty \end{aligned}$$

□

### Teorema del punto fisso di Schauder

Sia  $X$  uno spazio di Banach e sia  $G : X \rightarrow X$  tale che

- i)  $G$  continuo,
- ii)  $G$  compatto,
- iii)  $B \subset X$  chiuso e convesso tale che  $G(B) \subset B$

allora  $G$  ha un punto fisso.

teorema(3.2.2). Consideriamo la mappa  $S$  come nella dimostrazione del teorema precedente e dimostriamo che l'insieme

$$F' = \{V \in C([0,1]), V \text{ concava e decrescente}, V(0) = 0, V(1) = V_1\}$$

é invariante rispetto a  $S$ , allora per il teorema del punto fisso seguirà l'esistenza di una soluzione  $V$  in  $F'$ . Per il punto ii) della proposizione (3.2.4) dato che  $V$  é decrescente

$$\begin{aligned}\|N(V)\|_{L^\infty} &= \sup_{x \in (0,1)} \int_0^{+\infty} \Phi(k) |\Psi_k(V)(x)|^2 dk \\ &\leq 8 \int_0^{+\infty} \Phi(k) \\ &\leq 8 \cdot \left(-\frac{V_1}{4}\right)\end{aligned}$$

Ora  $U(x) = S(V)(x) - V_1 x^2$  é soluzione dell'equazione

$$\begin{cases} -U'' = N(V) + 2V_1, & N(V) + 2V_1 \leq 0 \\ U(0) = 0, & U(1) = 0 \end{cases}$$

per il principio di massimo per il quale se  $U \in C^2(0,1)$  é tale che

$$\begin{cases} -U'' \leq 0 & \text{in } (0,1) \\ U(0) = 0, & U(1) = 0 \end{cases}$$

allora  $U \leq 0$  in  $(0,1)$ , si ha  $U(x) \leq 0$  per ogni  $x$ , cioè

$$S(V)(x) \leq V_1 x^2 < 0$$

che implica  $S(V)$  negativo e concavo, quindi necessariamente decrescente. Questo prova che  $S(V) \in F'$   $\square$

### 3.3 Limite semiclassico per potenziali decrescenti

In questa sezione consideriamo il caso

$$\int_0^{+\infty} \Phi(k) dx \leq \frac{-V_1}{4} \quad (3.3.1)$$

e cerchiamo il limite di  $(\Psi_k^h, V_h)$  quando  $h \rightarrow 0$  dove  $\Psi_k^h, V_h$  sono le soluzioni del Teorema 3.2.2, poiché vale (3.3.1). Dapprima ricordiamo che il sistema di Vlasov-Poisson

$$v \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{dV}{dx} \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \quad x \in [0,1], \quad v \in \mathbb{R} \quad (3.3.2)$$

$$f(0, v) = \Phi(v), v > 0 \quad (3.3.3)$$

$$f(1, v) = 0, v < 0 \quad (3.3.4)$$

$$-V'' = n(x) \quad (3.3.5)$$

$$n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v) dv \quad (3.3.6)$$

$$V(0) = 0 \quad V(1) = V_1 \quad (3.3.7)$$

ammette una soluzione  $(f_0, V_0)$  (si veda [1]). Questa soluzione é unica quando  $\Phi$  é decrescente. In questo paragrafo dimostriamo che il sistema di Schrödinger-Poisson tende al sistema di Vlasov-Poisson quando  $h$  tende a zero. Per fare questo introduciamo la trasformata di Wigner

$$w_h(x, v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \Phi(k) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta v} (\overline{\mathcal{O}\Psi_k^h})(x + \frac{h}{2}\eta) (\mathcal{O}\Psi_k^h)(x - \frac{h}{2}\eta) d\eta dk \quad (3.3.8)$$

dove  $\mathcal{O}$  é una funzione cut-off

$$\mathcal{O} \in \mathcal{D}^+(\mathbb{R}) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \text{supp } \varphi \text{ é compatto, } \varphi \geq 0\}$$

$$\mathcal{O} \equiv 1, \quad \text{su } [-1, +2], \quad 0 \leq \mathcal{O} \leq 1$$

(qui  $\mathcal{O}f(x)$  significa  $\mathcal{O}(x)f(x)$ ). In questo modo la funzione  $w_h$  é ben definita, in quanto grazie all'uso della funzione cut-off  $\mathcal{O}$  l'integrale nella (3.3.8) rispetto alla variabile  $\eta$  viene fatto su un compatto (il supporto di  $\mathcal{O}$ ). Inoltre possiamo provare il seguente risultato di regolarità per la funzione  $w_h$ .

**Lemma 3.3.1.** *Nell'ipotesi che valga (3.2.7), si ha che  $w_h \in W_{loc}^{3,\infty}(\mathbb{R})$*

*Dimostrazione.* Dal teorema (3.2.1) sappiamo che  $V_h \in W^{2,\infty}(0,1)$  e  $\Psi_k^h \in W^{4,\infty}(0,1)$  da questo segue che  $V_h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$  e  $\Psi_k^h \in W^{3,\infty}(\mathbb{R})$ ; per la (3.3.8) la regolarità di  $w_h$  é la stessa di  $\Psi_k^h$ .  $\square$

Per definizione di delta di Dirac si ha la seguente proprietà

*Proprietà* Per ogni  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\eta) \varphi(\eta) d\eta = \varphi(0),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(\eta) \varphi(\eta) d\eta = -\varphi'(0),$$

Tenendo conto di questa proprietà; deduciamo le uguaglianze seguenti:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} w_h(x, v) dv &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \Phi(k) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i\eta v} dv) (\overline{\mathcal{O}\Psi_k^h})(x + \frac{h}{2}\eta) (\mathcal{O}\Psi_k^h)(x - \frac{h}{2}\eta) d\eta dk \\ &= \int_0^{+\infty} \Phi(k) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\eta) (\overline{\mathcal{O}\Psi_k^h})(x + \frac{h}{2}\eta) (\mathcal{O}\Psi_k^h)(x - \frac{h}{2}\eta) d\eta dk \\ &= \int_0^{+\infty} \Phi(k) (\overline{\mathcal{O}\Psi_k^h})(x) (\mathcal{O}\Psi_k^h)(x) dk \\ &= \int_0^{+\infty} \Phi(k) |\mathcal{O}\Psi_k^h(x)|^2 dk \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} v w_h(x, v) dv &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \Phi(k) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (v e^{i\eta v} dv) (\overline{\mathcal{O}\Psi_k^h})(x + \frac{h}{2}\eta) (\mathcal{O}\Psi_k^h)(x - \frac{h}{2}\eta) d\eta dk \\
&= \int_0^{+\infty} \Phi(k) \int_{-\infty}^{+\infty} i\delta'(\eta) \overline{(\mathcal{O}\Psi_k^h)}(x + \frac{h}{2}\eta) (\mathcal{O}\Psi_k^h)(x - \frac{h}{2}\eta) d\eta dk \\
&= \int_0^{+\infty} \Phi(k) i \left[ -(\overline{\mathcal{O}\Psi_k^h})'(x) \mathcal{O}\Psi_k^h(x) + \overline{\mathcal{O}\Psi_k^h}(x) (\mathcal{O}\Psi_k^h)'(x) \right] \frac{h}{2} dk \\
&= \int_0^{+\infty} \Phi(k) i(-2i) \operatorname{Im} \left[ \overline{\mathcal{O}\Psi_k^h}(x) (\mathcal{O}\Psi_k^h)'(x) \right] \frac{h}{2} dk \\
&= h \int_0^{+\infty} \Phi(k) \operatorname{Im} \left[ \overline{\mathcal{O}\Psi_k^h}(x) (\mathcal{O}\Psi_k^h)'(x) \right] dk,
\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo usato la relazione

$$\overline{f}' f - \overline{f} f' = -2i \operatorname{Im}(\overline{f} f')$$

Prima di enunciare il teorema principale di questa sezione, introduciamo il seguente spazio test  $\mathcal{A} = \{\varphi = \varphi(x, v) | \widehat{\varphi}(x, \eta) \in L^1(\mathbb{R}_\eta, C[0, 1]_x)\}$ , dove fissato  $\eta$  la funzione  $\widehat{\varphi}(x, \eta)$  é continua in  $x \in [0, 1]$  e si richiede che tale funzione della variabile  $\eta$  sia integrabile. Qui  $\widehat{\varphi}$  denota l'antitrasformata di Fourier rispetto a  $v$ .

$$\widehat{\varphi}(x, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta v} \varphi(x, v) dv.$$

La norma su  $\mathcal{A}$  é cosí definita

$$\|\varphi\|_{\mathcal{A}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sup_{x \in (0, 1)} |\widehat{\varphi}(x, \eta)| d\eta$$

(questa espressione ha senso per  $\varphi \in \mathcal{A}$  perché stiamo chiedendo che  $\widehat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R}_\eta, C[0, 1]_x)$ , e dunque  $\sup_{x \in (0, 1)} |\widehat{\varphi}(x, \eta)| = \|\widehat{\varphi}(\cdot, \eta)\|_{C[0, 1]}$  é integrabile).

### Definizione 3.3.2.

$$\mathcal{A}' = \{f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineari e continui}\}$$

Per  $f \in \mathcal{A}'$  e  $w \in \mathcal{A}$ , indichiamo con  $\langle f, w \rangle$  il valore che  $f$  assume su  $w$ . Ricordiamo che  $w_h$  tende a  $f_0$  in  $\mathcal{A}'$  debole\* se per ogni  $\varphi \in \mathcal{A}$   $\langle w_h, \varphi \rangle \mapsto \langle f_0, \varphi \rangle$  per  $h$  che tende a 0.

**Teorema 3.3.3.** Sia  $\Phi$  che soddisfa la (3.2.7) e  $\int_0^{+\infty} \Phi(k) dk \leq -\frac{V_1}{4}$ . Siano  $(V_h, \Psi_h^k)$  soluzioni di (3.2.1)-(3.2.6),  $w_h$  la trasformata di Wigner di  $\Psi_h^k, (V_0, f_0)$  soluzioni di (3.3.2)-(3.3.7). Allora:

$V_h \rightarrow V_0$  per  $h \rightarrow 0$  in  $C^1([0, 1])$ ;

$w_h \rightarrow f_0$  per  $h \rightarrow 0$  in  $\mathcal{A}'$  debole\* con  $\mathcal{A}'$  duale di  $\mathcal{A}$ .

Inoltre  $f_0(t, v)$  é non negativa su  $[0, 1] \times \mathbb{R}$ .

*Dimostrazione.* In seguito ometteremo a volte di scrivere  $h$  in  $\Psi_k^h$ . Dapprima proviamo che  $(V_h, w_h)$  sono limitati:  $V_h$  limitato in  $C^1$  e  $w_h$  limitato in  $\mathcal{A}'$ . Anzitutto per la proposizione (3.2.4) (ii) le funzioni  $\Psi_k^h$  sono limitate in  $L^\infty$ , inoltre essendo la famiglia  $V_h$  limitata in  $W^{2,\infty}$ , per il teorema di Ascoli-Arzelà se ne può estrarre una sottosuccessione convergente in  $C^1$ . Proviamo ora che  $w_h$  è limitato in  $\mathcal{A}'$ . Moltiplichiamo per una funzione test  $Q$  in  $\mathcal{A}$  e integriamo

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} w_h(x, v) Q(x, v) dv dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \Phi(k) \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta v} Q(x, v) dv \right) (\overline{\Theta\Psi_k^h})(x + \frac{h}{2}\eta) (\Theta\Psi_k^h)(x - \frac{h}{2}\eta) dx d\eta dk \\ &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \Phi(k) \widehat{Q}(x, \eta) (\overline{\Theta\Psi_k^h})(x + \frac{h}{2}\eta) (\Theta\Psi_k^h)(x - \frac{h}{2}\eta) dx d\eta dk \quad (3.3.11) \end{aligned}$$

Utilizzando la limitatezza di  $\Psi_k$  in  $L^\infty$  (la proposizione (3.2.4) (ii)), otteniamo

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} w_h(x, v) Q(x, v) dv dx \right| &\leq \\ &\leq \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \Phi(k) |\widehat{Q}(x, \eta)| |(\overline{\Theta\Psi_k^h})(x + \frac{h}{2}\eta)| \\ &\quad |(\Theta\Psi_k^h)(x - \frac{h}{2}\eta)| dx d\eta dk \\ &\leq \int_0^{+\infty} \Phi(k) \int_{\mathbb{R}} \sup_{x \in (0,1)} |\widehat{Q}(x, \eta)| 20 d\eta dk \\ &= 20 \|Q\|_{\mathcal{A}} \int_0^{+\infty} \Phi(k) dk \leq +\infty \end{aligned}$$

Quindi, per definizione di norma nel duale

$$\begin{aligned} \|w_h\|_{\mathcal{A}'} &= \left( \sup_{Q \in \mathcal{A}, \|Q\|_{\mathcal{A}} \leq 1} |w_h(Q)| \right) \\ &= \sup_{Q \in \mathcal{A}, \|Q\|_{\mathcal{A}} \leq 1} \left| \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} w_h(x, v) Q(x, v) dv dx \right| \\ &\leq \sup_{Q \in \mathcal{A}, \|Q\|_{\mathcal{A}} \leq 1} 20 \|Q\|_{\mathcal{A}} \int_0^{+\infty} \Phi(k) dk \\ &= 20 \int_0^{+\infty} \Phi(k) dk \\ &\leq C \end{aligned}$$

quindi  $w_h$  è equilimitata in  $\mathcal{A}'$ . Quindi per il teorema di Banach-Alaoglu, dalla successione  $(w_h)_h$  si può estrarre una sottosuccessione convergente

in  $\mathcal{A}'$  debole\*.

Calcoliamo ora  $v \cdot \frac{\partial w_h}{\partial x}$ . A questo scopo portiamo anzitutto la derivata sotto segno di integrale; poi, con un' integrazione per parti rispetto alla variabile  $\eta$  (dove si sfrutta il fatto che il termine di bordo é nullo essendo  $\mathcal{O}$  a supporto compatto) e usando l'equazione (3.2.1) (per sostituire l'espressione di  $\Psi_k''$ ), dopo alcuni passaggi si trova:

$$v \cdot \frac{\partial w_h}{\partial x} = \frac{i}{4\pi} \int_0^{+\infty} \Phi(k) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta v} \delta_h V_h(x, \eta) (\overline{\mathcal{O}\Psi_k})(x + \frac{h}{2}\eta) (\mathcal{O}\Psi_k)(x - \frac{h}{2}\eta) d\eta dk + R_h^1(x, v) + R_h^2(x, v) \quad (3.3.12)$$

dove

$$\delta_h V_h(x, \eta) = \frac{V_h\left(x + \frac{h}{2}\eta\right) - V_h\left(x - \frac{h}{2}\eta\right)}{h} \quad (3.3.13)$$

$$R_h^1(x, v) = \frac{hi}{4\pi} \int_0^{+\infty} \Phi(k) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta v} \left[ \mathcal{O}''\left(x + \frac{h}{2}\eta\right) \mathcal{O}\left(x - \frac{h}{2}\eta\right) - \mathcal{O}\left(x + \frac{h}{2}\eta\right) \mathcal{O}''\left(x - \frac{h}{2}\eta\right) \right] \overline{\Psi_k}\left(x + \frac{h}{2}\eta\right) \Psi_k\left(x - \frac{h}{2}\eta\right) d\eta dk$$

e

$$R_h^2 = \frac{hi}{2\pi} \int_0^{+\infty} \Phi(k) dk \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta v} \left[ \mathcal{O}'\overline{\Psi}'_k\left(x + \frac{h}{2}\eta\right) \mathcal{O}\Psi_k\left(x - \frac{h}{2}\eta\right) - \mathcal{O}\overline{\Psi}_k\left(x + \frac{h}{2}\eta\right) \mathcal{O}'\Psi'_k\left(x - \frac{h}{2}\eta\right) \right] d\eta$$

Sia  $Q(x, v)$  in  $\mathcal{A}$ . Moltiplichiamo (3.3.12) per  $Q$  e integriamo su  $(0, 1) \times \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} v Q(x, v) \frac{\partial w_h}{\partial x} dx dv \\ & - \frac{i}{4\pi} \iiint e^{i\eta v} \delta_h V_h(x, \eta) \overline{\mathcal{O}\Psi_k}\left(x + \frac{h}{2}\eta\right) \mathcal{O}\Psi_k\left(x - \frac{h}{2}\eta\right) \Phi(k) Q(x, v) dk dx d\eta dv = \\ & = \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \left( R_h^1(x, v) + R_h^2(x, v) \right) Q(x, v) dx dv \end{aligned}$$

Denotiamo con

$$R_h^3(x, v) = + \frac{i}{4\pi} \int_0^{+\infty} \Phi(k) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta v} \left[ \delta_h V_h(x, \eta) - \eta V_h'(x) \right] \overline{\mathcal{O}\Psi_k}\left(x + \frac{h}{2}\eta\right) \mathcal{O}\Psi_k\left(x - \frac{h}{2}\eta\right) d\eta dk \quad (3.3.14)$$

Possiamo riscrivere l'equazione precedente nel seguente modo

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} vQ(x, v) \frac{\partial w_h}{\partial x} dx dv - \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} R_h^3(x, v) Q(x, v) dx dv + \\ & + \frac{i}{4\pi} \iiint \Phi(k) e^{i\eta v} \eta V_h'(x) \overline{\Theta \Psi_k} \left(x + \frac{h}{2}\eta\right) \Theta \Psi_k \left(x - \frac{h}{2}\eta\right) Q(x, v) dk d\eta dx dv = \\ & = \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} (R_h^1(x, v) + R_h^2(x, v)) Q(x, v) dx dv \end{aligned}$$

Integrando per parti rispetto a  $x$  il primo termine del primo membro si ha

$$\begin{aligned} & \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} vQ(x, v) w_h(x, v) dv \right]_0^1 - \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} v \frac{\partial Q}{\partial x} w_h(x, v) dx dv + \\ & + \frac{i}{4\pi} \iiint \Phi(k) e^{i\eta v} \eta V_h'(x) \overline{\Theta \Psi_k} \left(x + \frac{h}{2}\eta\right) \Theta \Psi_k \left(x - \frac{h}{2}\eta\right) Q(x, v) dk d\eta dx dv = \\ & = \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^3 R_h^i(x, v) Q(x, v) dx dv \end{aligned}$$

Ora integriamo per parti rispetto a  $v$  l'ultimo termine al primo membro dell'equazione precedente e abbiamo

$$\begin{aligned} & \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} vQ(x, v) w_h(x, v) dv \right]_0^1 - \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} v \frac{\partial Q}{\partial x} w_h(x, v) dx dv + \\ & + \left[ \frac{i}{4\pi} \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(k) \frac{1}{i\eta} e^{i\eta v} \eta V_h'(x) \overline{\Theta \Psi_k} \left(x + \frac{h}{2}\eta\right) \Theta \Psi_k \left(x - \frac{h}{2}\eta\right) Q(x, v) dk d\eta dx \right]_{-\infty}^{+\infty} - \\ & - \frac{i}{4\pi} \iiint \Phi(k) e^{i\eta v} \eta V_h'(x) \overline{\Theta \Psi_k} \left(x + \frac{h}{2}\eta\right) \Theta \Psi_k \left(x - \frac{h}{2}\eta\right) \frac{\partial Q}{\partial v}(x, v) dk d\eta dx dv = \\ & = \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^3 R_h^i(x, v) Q(x, v) dx dv \end{aligned}$$

Poiché  $Q$  é a supporto compatto, il terzo addendo della somma precedente é nullo; utilizzando anche la definizione di  $w_h$  ( nel quarto addendo) otteniamo

$$\begin{aligned} & \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} vQ(x, v) w_h(x, v) dv \right]_0^1 - \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} v \frac{\partial Q}{\partial x} w_h(x, v) dx dv + \\ & - \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} w_h(x, v) V_h'(x) \frac{\partial Q}{\partial v} dx dv = \\ & = \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^3 R_h^i(x, v) Q(x, v) dx dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} vQ(1,v)w_h(1,v)dv - \int_{-\infty}^{+\infty} vQ(0,v)w_h(0,v)dv \\
& - \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} w_h(x,v) \left[ v \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial v_h}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial v} \right] dx dv \quad (3.3.15) \\
& = \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^3 R_h^i(x,v) Q(x,v) dx dv
\end{aligned}$$

Utilizziamo ora il seguente lemma

**Lemma 3.3.4.** *Supponiamo che  $Q(0,v)$  s'annulli per  $v$  negative e  $Q(1,v)$  s'annulli per  $v$  positive. Allora quando  $h$  tende a 0 abbiamo*

$$\begin{aligned}
(i) \quad & \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} R_h^i(x,v) Q(x,v) dx dv = 0, \quad i = 1, 2, 3 \\
(ii) \quad & \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} vQ(0,v)w_h(0,v)dv = \int_0^{+\infty} v\Phi(v)Q(0,v)dv \\
(iii) \quad & \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} vQ(1,v)w_h(1,v)dv = 0
\end{aligned}$$

FINE DELLA DIMOSTRAZIONE del teorema (3.3.3)

Possiamo passare al limite per  $h \rightarrow 0$  in (3.3.15) con una funzione test  $Q(x,v)$  a supporto compatto che soddisfa le condizioni del lemma precedente. Il termine non-lineare

$$\int w_h \frac{dV_h}{dx} \frac{\partial Q}{\partial v} dx dv$$

tende al suo limite formale perché  $V_h$  converge fortemente in  $C^1$  e  $w_h$  converge in  $\mathcal{A}'$  debole\*. Denotiamo  $(V, f)$  il limite di  $(V_h, w_h)$ ; per il lemma (3.3.4) passando al limite per  $h$  che tende a 0 in (3.3.15) si ha

$$- \int_0^{+\infty} v\Phi(v)Q(0,v)dv - \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,v) \left[ v \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial v} \right] dx dv = 0$$

cioé  $f$  é una soluzione debole di (3.3.2)-(3.3.4). Ma siccome  $n_h(x) = \int w_h(x,v)dv$  su  $[0, 1]$ ,  $V$  risolve (3.3.5)-(3.3.7).  $\square$

*Dimostrazione.* Lemma (3.3.4)

Per dimostrare (i) osserviamo che

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} R_h^i(x,v) Q(x,v) dx dv = \\
& \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \int_0^{+\infty} \Phi(k) \widehat{Q}(x,\eta) S_h^i(x,\eta,k) dk dx d\eta
\end{aligned}$$

dove

$$S_h^1(x, \eta, k) = \frac{ih}{2} \left[ \mathcal{O}'' \mathcal{O} \left( x + \frac{h}{2} \eta \right) \mathcal{O}'' \mathcal{O} \left( x - \frac{h}{2} \eta \right) \right] \overline{\Psi}_k \left( x + \frac{h}{2} \eta \right) \Psi_k \left( x - \frac{h}{2} \eta \right) \quad (3.3.16)$$

$$S_h^2(x, \eta, k) = ih \left[ \mathcal{O}' \overline{\Psi}'_k \left( x + \frac{h}{2} \eta \right) \mathcal{O} \Psi_k \left( x - \frac{h}{2} \eta \right) - \mathcal{O} \overline{\Psi}_k \left( x + \frac{h}{2} \eta \right) \mathcal{O}' \Psi'_k \left( x + \frac{h}{2} \eta \right) \right] \quad (3.3.17)$$

$$S_h^3(x, \eta, k) = \frac{i}{2} [\delta_h V_h(x, \eta) - \eta V'_h(x)] \overline{\mathcal{O}} \overline{\Psi}_k \left( x + \frac{h}{2} \eta \right) \mathcal{O} \Psi_k \left( x - \frac{h}{2} \eta \right) \quad (3.3.18)$$

(Si veda la (3.3.13 per la definizione di  $\delta_h V_h$ ). Per la proposizione (3.2.4)

$$\|\Psi_k^h\|_{L^\infty} \leq C \quad \|(\Psi_k^h)'\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{h}(1+k)$$

inoltre per il teorema di Lagrange esiste  $\bar{x} \in \left( x - \frac{h}{2} \eta, x + \frac{h}{2} \eta \right)$  tale che

$$\delta_h V_h(x, \eta) = \frac{V_h \left( x + \frac{h}{2} \eta \right) - V_h \left( x - \frac{h}{2} \eta \right)}{\frac{h}{2} \eta} \frac{\eta}{2} = V'_h(\bar{x}) \frac{\eta}{2} \quad (3.3.19)$$

$$|\delta_h V_h(x, \eta) - \eta V_h(x)| \leq |\eta| \left[ V'_h(\bar{x}) - V_h(x) \right] \leq C|\eta|$$

e poiché la funzione cut-off con le sue derivate é limitata, é ovvio che

$$|S_h^1(x, \eta, k)| \leq Ch \quad (3.3.20)$$

$$|S_h^2(x, \eta, k)| \leq C(1+k) \quad (3.3.21)$$

$$|S_h^3(x, \eta, k)| \leq C|\eta| \quad (3.3.22)$$

(3.3.20) implica che

$$\left| \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} R_h^1(x, v) Q(x, v) dx dv \right| \leq Ch \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \int_0^{+\infty} |\Phi(k) \widehat{Q}(x, \eta)| dk dx d\eta \rightarrow 0$$

quando  $h \rightarrow 0$  quindi (i) é vera per  $R_h^1$ . Inoltre

$$\int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} R_h^2(x, v) Q(x, v) dx dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \int_0^{+\infty} \Phi(k) \widehat{Q}(x, \eta) S_h^2(x, \eta, k) dk dx d\eta \rightarrow 0$$

per  $h \rightarrow 0$  per il teorema di convergenza dominata di Lebesgue:

$$\begin{aligned} - S_h^2(x, \eta, k) &\rightarrow 0 \text{ per } h \rightarrow 0 \text{ q.o. in } [0, 1]_x \times \mathbb{R}_\eta \times \mathbb{R}_k \text{ perché } \mathcal{O}'(x) \equiv 0 \\ &\text{in } ] - 1, 2[ \text{ e per } h \text{ piccolo } x \pm \frac{h}{2} \eta \in ] - 1, 2[ \end{aligned}$$

- per (3.3.21)

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \int_0^{+\infty} |\Phi(k) \widehat{Q}(x, \eta) S_h^2(x, \eta, k)| dk dx d\eta \\ & \leq C \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \int_0^{+\infty} \Phi(k) (1+k) |\widehat{Q}(x, \eta)| dx d\eta dk \\ & < +\infty \end{aligned}$$

quindi (i) é vera per  $R_h^2$ . Dimostriamo che (i) vale anche per  $R_h^3$ , infatti

$$\int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} R_h^3(x, v) Q(x, v) dx dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \int_0^{+\infty} \Phi(k) \widehat{Q}(x, \eta) S_h^3(x, \eta, k) dk dx d\eta \rightarrow 0$$

per  $h \rightarrow 0$  per il teorema di convergenza dominata di Lebesgue:

-  $S_h^3(x, \eta, k) \rightarrow 0$  quando  $h \rightarrow 0$  q.o. in  $[0, 1]_x \times \mathbb{R}_\eta \times \mathbb{R}_k$  perché, grazie alle (3.3.19)

$$\delta_h V_h(x, \eta) - \eta V_h'(x) = \eta V_h'(\bar{x}) - \eta V_h'(x) \rightarrow 0, \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

(in quanto  $\bar{x} \rightarrow x$  e  $V_h \rightarrow V$  in  $C^1$ )

-

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} R_h^3 Q(x, v) dx dv \right| & \leq C \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \int_0^{+\infty} \Phi(k) |\widehat{Q}(x, \eta)| |\eta| dk d\eta dx \\ & = \int_0^{+\infty} \Phi(k) dk \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{Q}(x, \eta)| |\eta| dx d\eta \\ & < +\infty \end{aligned}$$

perché  $Q$  é a supporto compatto.

Per dimostrare (ii) e (iii) dapprima utilizziamo il seguente teorema:

**Lemma 3.3.5.** *Valgono i seguenti limiti*

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\Psi_k^h(h\eta) - e^{ik\eta} - R_k^h e^{-ik\eta}) = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\Psi_k^h(1 + h\eta) - T_k^h e^{i\sqrt{k^2 - V_1}\eta}) = 0$$

uniformemente rispetto a  $\eta$  su ogni intervallo limitato

*Dimostrazione.* La prova di questo lemma si basa su risultati di stabilità per le equazioni differenziali. Fissiamo

$$\varphi_h(\eta) = \Psi_k^h(h\eta) \quad U_h(\eta) = V_h(h\eta)$$

e abbiamo

$$\begin{aligned} -\varphi_h'' + U_h \varphi_h &= -h^2(\Psi_k^h)''(h\eta) + V_h(h\eta)\Psi_k^h(h\eta) \\ &= k^2\Psi_k^h(h\eta) = k^2\varphi_h(\eta) \end{aligned}$$

con i dati di Cauchy

$$\begin{aligned} \varphi_h(0) &= \Psi_k^h(0) = 1 + R_k^h \\ \varphi_h'(0) &= h(\Psi_k^h)'(0) = 2ik - ik\Psi_k^h(0) = 2ik - ik - ikR_k^h = ik(1 - R_k^h) \end{aligned}$$

dove  $R_k^h$  é il coefficiente di riflessione ed é limitato. Siccome per  $h \rightarrow 0$  la funzione  $U_h(\eta) = V_h(h\eta)$  tende a  $V(0) = 0$  uniformemente per  $\eta$  in intervalli limitati, allora  $U_h$  converge uniformemente a 0 sugli intervalli limitati. Passando al limite nell'equazione verificata da  $\varphi_h$  troviamo che  $\varphi_h$  converge alla soluzione di

$$-\varphi_h'' = k^2\varphi_h$$

con i precedenti dati di Cauchy, la cui unica soluzione é

$$e^{ik\eta} + R_k^h e^{-ik\eta}.$$

Abbiamo dunque ottenuto il primo risultato del lemma. Si procede analogamente per il secondo limite, infatti fissiamo

$$\varphi_h(\eta) = \Psi_k^h(1 + h\eta) \quad U_h(\eta) = V_h(1 + h\eta)$$

e abbiamo

$$\begin{aligned} -\varphi_h'' + U_h \varphi_h &= -h^2(\Psi_k^h)''(1 + h\eta) + V_h(1 + h\eta)\Psi_k^h(1 + h\eta) \\ &= k^2\Psi_k^h(1 + h\eta) = k^2\varphi_h(\eta) \end{aligned}$$

con i dati di Cauchy

$$\begin{aligned} \varphi_h(0) &= \Psi_k^h(1) = T_k^h e^{i/h\sqrt{k^2 - V_1}} \\ \varphi_h'(0) &= h(\Psi_k^h)'(1) = i\sqrt{k^2 - V_1}\Psi_k^h(1) = T_k^h i\sqrt{k^2 - V_1} e^{i/h\sqrt{k^2 - V_1}} \end{aligned}$$

dove  $T_k^h$  é limitato. Siccome per  $h$  che tende a 0,  $V_h(1 + h\eta)$  tende a  $V(1) = V_1$  uniformemente per  $\eta$  in intervalli limitati, allora passando al limite nell'equazione verificata da  $\varphi_h$  troviamo che  $\varphi_h$  converge alla soluzione di

$$\begin{aligned} -\varphi_h'' &= (k^2 - V_1)\varphi_h \\ \varphi_h(0) &= T_k^h \\ \varphi_h'(0) &= i\sqrt{k^2 - V_1}T_k^h \end{aligned}$$

con i precedenti dati di Cauchy e l'unica soluzione é

$$T_k^h e^{i\sqrt{k^2 - V_1}\eta}$$

□

Terminiamo ,ora, la dimostrazione del lemma (3.3.4). Per provare il punto (ii) scriviamo per una generica funzione  $\gamma(v)$  che si annulla per  $v$  negative

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(v) w_h(0, v) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \Phi(k) \hat{\gamma}(\eta) \overline{\Psi_k^h\left(\frac{h}{2}\eta\right)} \Psi_k^h\left(-\frac{h}{2}\eta\right) dk d\eta$$

dove  $\hat{\gamma}(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta v} \gamma(v) dv$ . Osserviamo per il lemma (3.3.5) che

$$\begin{aligned} \Psi_k\left(\frac{h\eta}{2}\right) &\sim e^{ik\eta/2} + R_k e^{-ik\eta/2} \\ \Psi_k\left(-\frac{h\eta}{2}\right) &\sim e^{-ik\eta/2} + R_k e^{ik\eta/2} \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} \overline{\Psi_k\left(\frac{h\eta}{2}\right)} \Psi_k\left(\frac{h\eta}{2}\right) &\sim \left(e^{-ik\eta/2} + \overline{R_k} e^{ik\eta/2}\right) \cdot \left(e^{-ik\eta/2} + R_k e^{ik\eta/2}\right) \\ &= e^{-ik\eta} + |R_k|^2 e^{ik\eta} + (R_k \overline{R_k}) = e^{-ik\eta} + |R_k|^2 e^{ik\eta} + 2\text{Re}(R_k) \end{aligned}$$

Utilizzando dapprima il teorema di convergenza dominata di Lebesgue per  $h$  che tende a 0 e nel secondo passaggio la definizione di trasformata di Fourier si ha :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(v) w_h(0, v) dv &\sim \int_0^{+\infty} \Phi(k) \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\gamma}(\eta) [e^{-ik\eta} + |R_k|^2 e^{ik\eta} + 2\text{Re}(R_k)] d\eta dk \\ &= \int_0^{+\infty} \Phi(k) [\gamma(k) + |R_k|^2 \gamma(-k) + 2\text{Re}(R_k) \gamma(0)] dk \end{aligned}$$

Passando al limite questo implica ( si osservi che , per l'ipotesi fatta che  $\gamma$  si annulli per  $v$  negative, gli ultimi due termini nell'integrale sono nulli)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(v) w_h(0, v) dv = \int_0^{+\infty} \Phi(k) \gamma(k) dk$$

scegliendo  $\gamma(v) = vQ(0, v)$  ( che si annulla per  $v$  negative), otteniamo la (ii).

Per dimostrare (iii) si procede analogamente: sia  $\gamma(v)$  una qualunque funzione che si annulla per  $v$  positive , e scriviamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(v) w_h(1, v) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \Phi(k) \hat{\gamma}(\eta) \overline{\Psi_k^h\left(1 + \frac{h}{2}\eta\right)} \Psi_k^h\left(1 - \frac{h}{2}\eta\right) dk d\eta$$

Per il lemma precedente

$$\begin{aligned} \Psi_k^h\left(1 + \frac{h}{2}\eta\right) &\sim T_k^h e^{i\sqrt{k^2 - V_1}\eta/2} \\ \Psi_k^h\left(1 - \frac{h}{2}\eta\right) &\sim T_k^h e^{-i\sqrt{k^2 - V_1}\eta/2} \end{aligned}$$

quindi

$$\overline{\Psi_k^h} \left(1 + \frac{h}{2}\eta\right) \Psi_k^h \left(1 - \frac{h}{2}\eta\right) \sim |T_k^h|^2 e^{-i\sqrt{k^2 - V_1}\eta}$$

Come prima, usando il teorema di convergenza dominata di Lebesgue e la definizione di trasformata di Fourier, troviamo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(v) w_h(1, v) dv &\sim \int_0^{+\infty} \Phi(k) \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\gamma}(\eta) |T_k^h|^2 e^{-i\sqrt{k^2 - V_1}\eta} d\eta dk \\ &= \int_0^{+\infty} \Phi(k) \gamma(\sqrt{k^2 - V_1}) dk \end{aligned}$$

e dunque, passando al limite ( qui l'ultimo integrale é nullo perché  $\gamma(v)$  si annulla per  $v$  positive )

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(v) w_h(1, v) dv = 0,$$

scegliendo  $\gamma(v) = vQ(1, v)$  ( che si annulla per  $v$  positive), otteniamo la (iii).  $\square$

### 3.4 Osservazioni nel caso generale

Nel caso generale, quando  $\Phi$  é arbitrariamente grande cioè quando rimuoviamo l'ipotesi (3.3.1), non abbiamo un bound  $L^\infty$  uniforme sulle  $\Psi_k$  in  $h$  in quanto vengono a mancare le stime provate nella proposizione 3.2.4 (ii), che sono state poi utilizzate per dimostrare il teorema 3.3.3. I risultati ottenuti sotto l'ipotesi (3.3.1) non sono più validi nel caso generale. Tuttavia, possiamo dimostrare, quando  $\Phi$  é a supporto compatto, che il potenziale elettrostatico  $V_h$  é limitato in  $W^{1,\infty}$  che implica che il lemma (3.3.5) rimane valido come i punti (i) e (ii) del lemma (3.3.4). Osserviamo che l'ipotesi  $\Phi$  a supporto compatto garantisce che valga ancora la (3.3.9).

**Proposizione 3.4.1.** *Supponiamo  $\Phi$  sia a supporto compatto. Allora la famiglia  $(V_h)_h$  é limitata in  $W^{1,\infty}(0,1)$  e  $(n_h)_h$  é limitata in  $L^1(0,1)$  quando  $h$  é sufficientemente piccolo.*

*Dimostrazione.* Per dimostrare la proposizione dobbiamo solo provare la limitatezza di  $|V_h'(0)| + |V_h'(1)|$ . Infatti per (3.2.4)

$$\begin{aligned} \|n_h\|_{L^1} &= \int_0^1 n_h(x) dx = \int_0^1 -V_h''(x) dx \\ &= -V_h'(1) + V_h'(0) \leq C \end{aligned}$$

dove  $C$  é una costante, cioè  $n_h$  é limitato in  $L^1$  e da questo segue che  $V_h$  é limitato in  $W^{1,\infty}$  per le stime di regolarità.

Dimostriamo ora la limitatezza di  $|V'_h(0)| + |V'_h(1)|$ . Dapprima consideriamo l'identità (3.2.10) con  $x = 1$ , moltiplichiamo per  $\Phi(k)$  e integriamo rispetto a  $k$

$$\begin{aligned} h^2 \int_0^1 \int_0^{+\infty} \Phi(k) |\Psi'_k(t)|^2 dk dt + \int_0^1 \int_0^{+\infty} \Phi(k) (V_h - k^2) |\Psi_k(t)|^2 dk dt \\ = -h^2 \int_0^{+\infty} \Phi(k) [Re \Psi'_k \bar{\Psi}_k]_0^1 dk \end{aligned}$$

dove il termine al secondo membro é limitato per  $h$  che tende a 0, infatti

$$\begin{aligned} [Re \Psi'_k \bar{\Psi}_k]_0^1 &= Re \Psi'_k(1) \bar{\Psi}_k(1) - Re \Psi'_k(0) \bar{\Psi}_k(0) = \\ &= Re \frac{i}{h} \sqrt{k^2 - V_1} \Psi_k(1) \bar{\Psi}_k(1) - Re \left( \frac{2ik}{h} - \frac{ik}{h} \Psi_k(0) \right) \bar{\Psi}_k(0) = \\ &= -Re \frac{2ik}{h} \bar{\Psi}_k(0) = \frac{2k}{h} Im \bar{\Psi}_k(0) \end{aligned}$$

quindi

$$-h^2 \int_0^{+\infty} \Phi(k) [Re \Psi'_k \bar{\Psi}_k]_0^1 dk = -2h \int_0^{+\infty} \Phi(k) dk \leq C$$

Infine otteniamo che

$$\begin{aligned} K_h + \int_0^1 \left( \int_0^{+\infty} \Phi(k) |\Psi_k(t)|^2 dk \right) V_h(t) dt - \int_0^1 \int_0^{+\infty} k^2 \Phi(k) |\Psi_k(t)|^2 dk dt = \\ = K_h + \int_0^1 V_h n_h(x) dx - \int_0^1 \int_0^{+\infty} k^2 \Phi(k) |\Psi_k(x)|^2 dx dk \leq C \quad (3.4.1) \end{aligned}$$

dove

$$K_h = h^2 \int_0^1 \int_0^{+\infty} \Phi(k) |\Psi'_k(x)|^2 dx dk$$

Siccome  $\Phi$  é a supporto compatto integriamo su  $Supp \Phi \subset [0, M]$  e si ha

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{+\infty} k^2 \Phi(k) |\Psi_k(x)|^2 dx dk &= \int_0^1 \int_0^M k^2 \Phi(k) |\Psi_k(x)|^2 dx dk \\ &\leq M^2 \int_0^1 \int_0^M \Phi(k) |\Psi_k(x)|^2 dx dk \\ &\leq M^2 \int_0^1 \int_0^{+\infty} \Phi(k) |\Psi_k(x)|^2 dx dk \\ &\leq M^2 \int_0^1 n(x) dx \\ &= M^2 \|n(x)\|_{L^1} \leq C(|V'_h(0)| + |V'_h(1)|) \end{aligned}$$

Inoltre per la proposizione (3.2.4) e per la (3.2.7) si ha

$$\begin{aligned} K_h = h^2 \int_0^1 \int_0^{+\infty} \Phi(k) |\Psi_k(x)|^2 dx dk &\leq h^2 \int_0^1 \int_0^{+\infty} \Phi(k) C \left( \frac{1+k}{h} \right)^2 dx dk \\ &\leq C \int_0^{+\infty} \Phi(k) (1+k)^2 dk \leq C \end{aligned}$$

e integrando per parti

$$\begin{aligned} \int_0^1 V_h n_h(x) dx &= - \int_0^1 V_h(x) V_h''(x) dx \\ &= [-V_h(x) V_h'(x)]_0^1 + \int_0^1 |V_h'(x)|^2 dx \\ &= -V_h'(1) V_1 + \int_0^1 |V_h'(x)|^2 dx \end{aligned}$$

Per la (3.4.1) e le stime precedenti

$$\int_0^1 |V_h'(x)|^2 dx = O(1 + |V_h'(0) + V_h'(1)|) \quad (3.4.2)$$

dove con la scrittura  $f(h) = O(g(h))$  intendiamo  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{g(h)} \leq C$  Inoltre, fissiamo

$$G_h(x) = \int_0^\infty \Phi(k) (h^2 |\Psi_k'(x)|^2 + (k^2 - V_h(x)) |\Psi_k(x)|^2) dk \quad (3.4.3)$$

Utilizzando l'equazione di Schrödinger (3.2.1)

$$\begin{aligned} G_h'(x) &= \int_0^{+\infty} \Phi(k) (h^2 2\Psi_k'(x) \Psi_k''(x) + (k^2 - V_h(x)) 2\Psi_k(x) \Psi_k'(x) \\ &\quad - V_h'(x) |\Psi_k(x)|^2) dk \\ &= \int_0^{+\infty} 2\Phi(k) \Psi_k'(x) [h^2 \Psi_k''(x) + (k^2 - V_h(x)) \Psi_k(x)] dk \\ &\quad - \int_0^{+\infty} \Phi(k) V_h'(x) |\Psi_k(x)|^2 dk \\ &= -V_h'(x) n_h(x) = V_h' V_h''(x) = \frac{d}{dx} \frac{(V_h'(x))^2}{2} \end{aligned}$$

da cui abbiamo

$$G_h(x) - G_h(0) = \frac{1}{2} ((V_h'(x))^2 - (V_h'(0))^2). \quad (3.4.4)$$

Inoltre per la (3.2.3)

$$\begin{aligned} G_h(1) &= \int_0^\infty \Phi(k) (h^2 |\Psi_k'(1)|^2 + (k^2 - V_1) |\Psi_k(1)|^2) dk \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \Phi(k) (k^2 - V_1) |\Psi_k(1)|^2 dk \leq C \end{aligned}$$

e per la (3.2.2)

$$\begin{aligned} G_h(0) &= \int_0^\infty \Phi(k) (h^2 |\Psi_k(0)|^2 + k^2 |\Psi_k(0)|^2) dk \\ &\leq 4 \int_0^{+\infty} \Phi(k) k^2 dk + 2 \int_0^{+\infty} \Phi(k) k^2 |\Psi(0)|^2 dk \leq C \end{aligned}$$

Dapprima dalla limitatezza di  $G_h(1)$  e  $G_h(0)$  deduciamo che

$$(V'_h(1))^2 = (V'_h(0))^2 + O(1) \quad (3.4.5)$$

ora integrando (3.4.4) su  $(0, 1)$ , troviamo

$$\int_0^1 G_h(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (V'_h(x))^2 dx - \frac{1}{2} (V'_h(0))^2 + O(1)$$

ma siccome

$$\int_0^1 G_h(x) dx = - \int_0^1 (V'_h(x))^2 dx + O(1 + |V'_h(0)| + |V'_h(1)|)$$

infine deduciamo dalla precedente identità

$$3 \int_0^1 V'_h(x)^2 dx = (V'_h(0))^2 + O(1 + |V'_h(0)| + |V'_h(1)|) \quad (3.4.6)$$

Quindi per la (3.4.2),(3.4.5),(3.4.6)

$$\begin{aligned} (V'_h(0))^2 + (V'_h(1))^2 &= 2(V'_h(0))^2 + O(1) \\ &= 6 \int_0^1 (V'_h(x))^2 dx + O(1 + |V'_h(0)| + |V'_h(1)|) \\ &= O(1 + |V'_h(0)| + |V'_h(1)|) \end{aligned}$$

questo conclude la prova.  $\square$

Nella dimostrazione precedente, abbiamo ottenuto una stima a priori per il potenziale senza utilizzare esplicitamente il fatto che  $V_h$  è concavo. Stime analoghe possono essere ottenute quando l'equazione di Poisson viene modificata prendendo in conto doping o smooth potenziali esterni. Queste stime permettono l'uso del teorema del punto fisso di Leray-Schauder e provano l'esistenza di soluzioni del sistema di Schrödinger-Poisson ottenuto.

### 3.5 Limite di scala

In questa sezione il parametro  $h$  è fissato e la funzione di densità  $\Phi$  è viene riscalata come segue:

$$\Phi_\varepsilon(k) = \frac{1}{\varepsilon^3} \Phi\left(\frac{k}{\varepsilon}\right) \quad (3.5.1)$$

Sia  $(\Psi_k^\varepsilon, V^\varepsilon)$  una soluzione di (3.2.1)-(3.2.6) dove  $\Phi$  è rimpiazzata con la (3.5.1), allora abbiamo il seguente teorema analogo al teorema (3.3.3) in quanto descrive il comportamento della soluzione di (3.2.1)-(3.2.6) per  $\varepsilon$  che tende a 0.

**Teorema 3.5.1.** Supponiamo  $\int_0^{+\infty} (1+k^2)\Phi(k)dk < +\infty$ , sia  $((\Psi_k^\varepsilon)_{k>0}, V^\varepsilon)$  una soluzione di (3.2.1)-(3.2.6) e  $W^\varepsilon$  la funzione di Wigner (3.3.8). Allora, quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $(V^\varepsilon, W^\varepsilon)$  converge a  $(V, W)$  dove  $V$  è soluzione del seguente problema e  $W$  è definito dalla (3.5.2)

$$\begin{aligned} -h^2\varphi_0'' + V\varphi_0 &= 0 \\ h\varphi_0'(0) &= 2i \\ h\varphi_0'(1) &= i\sqrt{-V_1}\varphi_0(1) \\ -V'' &= \lambda^2|\varphi_0|^2, \quad \lambda^2 = \int_0^{+\infty} k^2\Phi(k)dk \\ V(0) &= 0 \quad V(1) = V_1 \\ W(x, v) &= \frac{\lambda^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta v} \overline{\varphi_0}\left(x + \frac{h}{2}\eta\right) \varphi_0\left(x - \frac{h}{2}\eta\right) d\eta \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

La convergenza è  $C^1$  per  $V^\varepsilon$  su  $[0, 1]$  e  $L^\infty$  debole\* per  $W^\varepsilon$  su  $(0, 1) \times \mathbb{R}$

*Dimostrazione.* Per dimostrare questo teorema dapprima deduciamo dalle stime della proposizione (3.2.4) (i) (che valgono uniformemente in  $\varepsilon$ , perché la costante  $C$  è indipendente dalla forma particolare del potenziale  $V$ )

$$\begin{aligned} n^\varepsilon(x) &= \int_0^{+\infty} \Phi_\varepsilon(k) |\Psi_k^\varepsilon(x)|^2 dk \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\varepsilon^3} \Phi\left(\frac{k}{\varepsilon}\right) |\Psi_k^\varepsilon(x)|^2 dk \\ &\leq \frac{C}{h^4} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\varepsilon^3} \Phi\left(\frac{k}{\varepsilon}\right) k^2 dk \\ &= \frac{C}{h^4} \int_0^{+\infty} t^2 \Phi(t) dt \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è effettuato un cambio di variabili, ponendo  $t = \frac{k}{\varepsilon}$ .

Siccome vale  $\|n^\varepsilon\|_{L^\infty} \leq C$ ,  $V^\varepsilon$  è limitato in  $W^{2,\infty}$  perché valgono le stime di regolarità, possiamo quindi estrarre una sottosuccessione che converge in  $C^1[0, 1]: V^\varepsilon \rightarrow V$  in  $C^1$ . Poniamo

$$\frac{1}{k} \Psi_k^\varepsilon = \varphi_k^\varepsilon$$

e per la proposizione (3.2.4) si deduce facilmente che  $\varphi_k^\varepsilon$  è limitata in  $L^\infty(\mathbb{R}_k^+, W^{1,\infty}(0, 1)_x)$  infatti

$$\begin{aligned} \sup_{k \in \mathbb{R}^+} \|\varphi_k^\varepsilon(x)\|_{W^{1,\infty}(0,1)_x} &= \sup_{k \in \mathbb{R}^+} \frac{1}{k} \|\Psi_k^\varepsilon\|_{W^{1,\infty}(0,1)_x} \\ &\leq \sup_{k \in \mathbb{R}^+} \frac{1}{k} C \frac{k}{h^2} \leq C \end{aligned}$$

Allora dimostriamo il lemma seguente:

**Lemma 3.5.2.** Sia  $k_\varepsilon$  una successione di indici convergente a un indice  $k$ . Allora  $\varphi_{k_\varepsilon}^\varepsilon$  converge uniformemente su  $[0, 1]$  all'unica soluzione  $\varphi_k$  di

$$\begin{cases} -h^2 \varphi_k'' + V \varphi_k = k^2 \varphi_k \\ h\varphi_k'(0) + ik\varphi_k(0) = 2i \quad h\varphi_k'(1) = i\sqrt{k^2 - V_1} \varphi_k(1) \end{cases} \quad (3.5.3)$$

dove  $V$  è il limite  $C^1$  di  $V^\varepsilon$

*Dimostrazione.* Poiché  $\Psi_{k_\varepsilon}^\varepsilon$  è soluzione di (3.2.1)-(3.2.3) con  $k_\varepsilon$  e  $V_\varepsilon$  allora  $\varphi_{k_\varepsilon}^\varepsilon$  è soluzione di (3.5.3) con  $k_\varepsilon$  e  $V_\varepsilon$  al posto di  $k$  e  $V$ . Per la stima precedente si può estrarre una sottosuccessione che converge uniformemente su  $[0, 1]$  e il limite è soluzione dell'equazione (3.5.3). Poiché la soluzione di (3.5.3) è unica per la proposizione (3.2.3) allora l'intera successione converge a quel limite.  $\square$

FINE DELLA DIMOSTRAZIONE del teorema (3.5.1)

Dapprima abbiamo per la (3.3.8)

$$\begin{aligned} W_\varepsilon(x, v) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \Phi_\varepsilon(k) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta v} \overline{\Psi_\varepsilon^k} \left(x + \frac{h}{2}\eta\right) \Psi_\varepsilon^k \left(x - \frac{h}{2}\eta\right) d\eta dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\varepsilon^3} \Phi \left(\frac{k}{\varepsilon}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta v} k^2 \overline{\varphi_k^\varepsilon} \left(x + \frac{h}{2}\eta\right) \varphi_k^\varepsilon \left(x - \frac{h}{2}\eta\right) d\eta dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\varepsilon^3} \Phi(t) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta v} \varepsilon^2 t^2 \overline{\varphi_{\varepsilon t}^\varepsilon} \left(x + \frac{h}{2}\eta\right) \varphi_{\varepsilon t}^\varepsilon \left(x - \frac{h}{2}\eta\right) \varepsilon d\eta dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} t^2 \Phi(t) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta v} \overline{\varphi_{\varepsilon t}^\varepsilon} \left(x + \frac{h}{2}\eta\right) \varphi_{\varepsilon t}^\varepsilon \left(x - \frac{h}{2}\eta\right) d\eta dt \quad (3.5.4) \end{aligned}$$

Applichiamo il lemma (3.5.2) con  $k_\varepsilon = \varepsilon k$  che tende a 0 (con  $k > 0$  fissato); allora  $\varphi_{\varepsilon k}^\varepsilon$  tende a  $\varphi_0$  uniformemente in  $[0, 1]$  con  $\varphi_0$  soluzione di

$$\begin{cases} -h^2 \varphi_0'' + V \varphi_0 = 0 \\ h\varphi_0'(0) = 2i \\ h\varphi_0'(1) = i\sqrt{-V_1} \varphi_0(1) \end{cases}$$

e quindi  $W_\varepsilon$  converge a  $W$ :

$$W = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} k^2 \Phi(k) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta v} \overline{\varphi_0} \left(x + \frac{h}{2}\eta\right) \varphi_0 \left(x - \frac{h}{2}\eta\right) d\eta dk$$

Ora mostriamo che  $V$  risolve l'equazione dell'enunciato. Abbiamo

$$-V_\varepsilon'' = n^\varepsilon(x),$$

con

$$\begin{aligned} n^\varepsilon(x) &= \int_0^{+\infty} \Phi_\varepsilon(k) |\Psi_k^\varepsilon(x)|^2 dk \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\varepsilon^3} \Phi\left(\frac{k}{\varepsilon}\right) k^2 |\varphi_k^\varepsilon(x)|^2 dk \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\varepsilon^3} \Phi(t) \varepsilon^2 t^2 |\varphi_{\varepsilon t}^\varepsilon(x)|^2 \varepsilon dt \end{aligned}$$

che per  $\varepsilon$  che tende a 0 (lemma (3.5.2)) tende

$$\int_0^{+\infty} \Phi(t) t^2 |\varphi_0(x)|^2 dt = \lambda^2 |\varphi_0(x)|^2$$

quindi anche  $V$  è soluzione dell'equazione

$$-V'' = \lambda^2 |\varphi_0|^2$$

□

In Child-Langmuir asymptotics per il sistema semiclassico di Vlasov-Poisson, si dimostra che la corrente associata al problema limite non può superare un certo valore detto corrente di Child-Langmuir ed è uguale a questo valore quando la injected current

$$j_\Phi = \int_0^{+\infty} v \Phi(v) dv$$

è grande. Una domanda legittima nel caso quantistico, è se il limite della corrente può essere arbitrariamente grande o meno. Nel seguente teorema, dimostriamo che il limite della corrente

$$j_\lambda = \lambda^2 \text{Im}(\varphi'_\lambda \bar{\varphi}_\lambda) \quad (3.5.5)$$

è limitato indipendentemente da  $\lambda$  e che tende a 0 quando  $\lambda$  tende a infinito. Più precisamente abbiamo:

**Teorema 3.5.3.** *Sia  $(\varphi_\lambda, V_\lambda)$  una soluzione di*

$$\begin{cases} -h^2 \varphi_\lambda'' + V_\lambda \varphi_\lambda = 0 \\ h \varphi_\lambda'(0) = 2i \\ h \varphi_\lambda'(1) = i \sqrt{-V_1} \varphi_\lambda(1) \\ -V_\lambda'' = \lambda^2 |\varphi_\lambda|^2 \\ V_\lambda(0) = 0 \quad V_\lambda(1) = V_1 \end{cases} \quad (3.5.6)$$

e sia  $j_\lambda$  dato da (3.5.5). Allora

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} j_\lambda = 0 \quad e \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} V_\lambda(x) = +\infty \quad (\forall x \in (0, 1))$$

*Dimostrazione.* Dapprima supponiamo che  $V_\lambda$  tende all' infinito quando  $\lambda \mapsto +\infty$  all'interno dell'intervallo  $(0,1)$  e da questo deduciamo che la corrente  $j_\lambda$  tende a 0. Ponendo  $\Psi_\lambda(x) = \varphi_\lambda(x) \setminus \varphi_{\lambda(1)}$  si ha che  $\Psi_\lambda$  verifica il sistema:

$$\begin{cases} -h^2 \Psi_\lambda'' + V_\lambda \Psi_\lambda = 0 \\ \Psi_\lambda(1) = 1, \quad h \Psi_\lambda'(1) = i \sqrt{-V_1} \end{cases} \quad (3.5.7)$$

Sia, ora  $x_\lambda$  l'unico punto positivo dove  $V_\lambda$  s'annulla. Siccome  $V_\lambda$  é concava,  $x_\lambda$  tende a 1 quando  $\lambda$  tende a infinito e per i risultati di stabilità delle equazioni differenziali si ha

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi_\lambda(x_\lambda) = 1, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} h \varphi_\lambda'(x_\lambda) = i \sqrt{-V_1}$$

per di più, siccome  $V_\lambda$  é concavo abbiamo

$$V_\lambda(x) \leq V_\lambda^{\max}(x_\lambda - x), \quad x \in \left(\frac{x_\lambda}{2}, x_\lambda\right) \quad (3.5.8)$$

Fissiamo, ora

$$g_\lambda(y) = \operatorname{Re}\left(\Psi_\lambda\left(x_\lambda - \frac{y}{(V_\lambda^{\max})^{1/3}}\right)\right), \quad y \in (0, x_\lambda (V_\lambda^{\max})^{1/3}) \quad (3.5.9)$$

Allora per la (3.5.7) e (3.5.8)

$$\begin{aligned} h^2 g_\lambda''(y) &= h^2 \operatorname{Re}\left(\Psi_\lambda''\left(x_\lambda - \frac{y}{(V_\lambda^{\max})^{1/3}}\right)\right) \cdot \frac{1}{(V_\lambda^{\max})^{2/3}} \\ &= \frac{1}{(V_\lambda^{\max})^{2/3}} V_\lambda\left(x_\lambda - \frac{y}{(V_\lambda^{\max})^{1/3}}\right) \cdot \operatorname{Re}\left(\Psi_\lambda\left(x_\lambda - \frac{y}{(V_\lambda^{\max})^{1/3}}\right)\right) \\ &= \frac{1}{(V_\lambda^{\max})^{2/3}} V_\lambda\left(x_\lambda - \frac{y}{(V_\lambda^{\max})^{1/3}}\right) g_\lambda(y) \\ &\leq \frac{1}{(V_\lambda^{\max})^{2/3}} V_\lambda^{\max} \cdot \left(x_\lambda - x_\lambda + \frac{y}{(V_\lambda^{\max})^{1/3}}\right) g_\lambda(y) \\ &= \frac{V_\lambda^{\max}}{(V_\lambda^{\max})^{2/3}} \cdot \frac{y}{(V_\lambda^{\max})^{1/3}} g_\lambda(y) = y g_\lambda(y) \end{aligned}$$

di conseguenza

$$\begin{cases} h^2 g_\lambda'' \geq y g_\lambda, & y \in (0, \frac{x_\lambda}{2} (V_\lambda^{\max})^{1/3}) \\ g_\lambda(0) = \operatorname{Re}(\Psi_\lambda(x_\lambda)) \rightarrow 1 \\ g_\lambda'(0) = \operatorname{Re}(\Psi_\lambda'(x_\lambda)) \cdot \left(-\frac{1}{(V_\lambda^{\max})^{1/3}}\right) \rightarrow 0 \end{cases} \quad (3.5.10)$$

quindi  $g_\lambda$  é asintoticamente più grande della Airy function  $A_i$ , soluzione di (3.5.10), dove  $'' \rightarrow ''$  e  $'' \leq ''$  sono rimpiazzati con delle uguaglian-

ze. Siccome esiste una costante  $C > 0$  tale che  $A_i(y) \leq \frac{1}{2} \exp(Cy)$  deduciamo che

$$\begin{aligned}
 |\varphi_\lambda(x)|^2 &= |\varphi_\lambda(1)|^2 |\Psi_\lambda(x)|^2 \geq |\varphi_\lambda(1)|^2 (\operatorname{Re} \Psi_\lambda(x))^2 \quad x \in \left(\frac{x_\lambda}{2}, x_\lambda\right) \\
 &= |\varphi_\lambda(1)|^2 g_\lambda((V_\lambda^{max})^{1/3}(x_\lambda - x))^2 \\
 &\geq |\varphi_\lambda(1)|^2 A_i((V_\lambda^{max})^{1/3}(x_\lambda - x))^2 \\
 &\geq |\varphi_\lambda(1)|^2 \frac{1}{4} \exp[C(V_\lambda^{max})^{1/3}(x_\lambda - x)]
 \end{aligned} \tag{3.5.11}$$

deduciamo da questa uguaglianza e dall'equazione di Poisson che esiste una costante  $c > 0$  tale che

$$V_\lambda^{max} \leq C\lambda^2 |\varphi_\lambda(1)|^2 \exp(C(V_\lambda^{max})^{1/3})$$

Infine

$$\begin{aligned}
 j_\lambda &= \lambda^2 \operatorname{Im}(\varphi'_\lambda \bar{\varphi}_\lambda) \\
 &= \lambda^2 \operatorname{Im}(\varphi'_\lambda(1) \bar{\varphi}_\lambda(1)) \\
 &= \frac{1}{h} \lambda^2 \operatorname{Im}(i\sqrt{-V_1} \varphi_\lambda(1) \bar{\varphi}_\lambda(1)) \\
 &= \frac{1}{h} \lambda^2 \sqrt{-V_1} |\varphi_\lambda|^2
 \end{aligned}$$

da questo segue che

$$\begin{aligned}
 0 \leq j_\lambda &\leq \frac{1}{h} \lambda^2 \sqrt{-V_1} |\varphi_\lambda(1)|^2 \\
 &\leq \frac{1}{h} \sqrt{-V_1} C V_\lambda^{max} \exp(-C(V_\lambda^{max})^{1/3})
 \end{aligned}$$

che tende a 0 per  $\lambda$  che tende a  $+\infty$  e  $j_\lambda$  tende a 0 siccome  $V_\lambda^{max}$  tende a  $\infty$ .

Proviamo ora che  $V_\lambda$  tende all'infinito nell'interno di  $(0, 1)$  che é equivalente a dimostrare che  $V_\lambda^{max}$  tende all'infinito. Supponiamo per assurdo che  $V_\lambda$  sia limitato in  $L^\infty$ , allora  $V_\lambda$  converge in  $L^\infty$  debole\* a un potenziale  $V$  ( per il teorema di Banach-Alaoglu). Tuttavia la soluzione  $\Psi_\lambda$  di (3.5.7) converge in  $C^1[0, 1]$  alla soluzione  $\Psi$  di (3.5.7) con  $V$  al posto di  $V_\lambda$ . Quindi utilizzando l'equazione di Poisson otteniamo il seguente comportamento asintotico

$$\begin{aligned}
 V_\lambda''(x) &= -\lambda^2 |\varphi_\lambda(x)|^2 \\
 &\sim -\lambda^2 |\varphi_\lambda(1)|^2 |\Psi_\lambda(x)|^2
 \end{aligned}$$

questo implica che  $\lambda\varphi_\lambda(1)$  é limitato, altrimenti  $V_\lambda$  non sarebbe limitato il  $L^\infty$ . Quindi  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \varphi_\lambda(1) = 0$  e anche

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \varphi'_\lambda(1) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{h} \sqrt{-V_1} \varphi_\lambda(1) = 0$$

Da questo otteniamo che  $\varphi_\lambda = \varphi_\lambda(1)\Psi_\lambda$  converge a 0 in  $C^1[0, 1]$ . Ma questo é in contraddizione che la condizione al bordo  $h\varphi'_\lambda(0) = 2i$ .

□



# Bibliografia

- [1] GREENGARD,C. RAVIART,P.A.: *A boundary value problem for the stationary Vlasov-Poisson equations:The plane diode* Comm. Pure. Appl. Math.43 (1990), 473-507
- [2] KREYSZIG,E.: *Introductory functional analysis with applications* Wiley Classics Library Edition,1989
- [3] PATEL,M. : *Developpement des modeles macroscopiques pour des systemes quantiques non-lineaires hors-equilibre* Ecole doctorale MATISSE, 2005
- [4] PRESILLA,C. JONA-LASINIO, G. CAPASSO,F.: *Nonlinear feedback oscillations in resonant tunneling through double barriers* Phys. Rev. B 43 (1991), 5200.
- [5] REED,M. SIMON,B.: *Methods of Modern Mathematical Physics, Tome 1, Functional Analysis* Academic Press, 1978
- [6] REED,M. SIMON,B.: *Methods of Modern Mathematical Physics, Tome 2, Fourier Analysis, SelfAdjointness* Academic Press, 1978
- [7] YAFAEV,D.R.: *Scattering Theory: some Old and New Problems, Lecture Notes in Mathematics* Springer-Verlag, vol.1735



# Ringraziamenti

Un particolare ringraziamento al professore Mirko Degli Esposti per il suo cortese interesse; al professore Andrea Sacchetti per la pazienza e la professionalità nell'avermi seguito nella stesura della tesi; al professore André Martinez per i suoi illuminanti corsi di meccanica superiore e analisi semiclassica.

Un grazie di cuore al carissimo amico e professore Arnak S. Dalalyan per i suoi brillanti insegnamenti, che hanno influito profondamente nella scelta di fare della matematica la mia vita; per aver sempre creduto in me; per i preziosi aiuti e la comprensione mostratami durante il mio lungo percorso di studio.

Il ringraziamento più sentito va ai miei genitori per aver assecondato e sostenuto con immensa fiducia la mia passione; il loro incoraggiamento è stato fondamentale.