Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica, Informatico - Computazionale

Esistenza del minimo globale per certi tipi di problemi vincolati in R^n

Tesi di Laurea in Ricerca Operativa

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Angelo Cavallucci

Presentata da:
Annachiara Coviello

II Sessione
Anno Accademico 2009/2010

Alla mia Famiglia:
vicina, lontana e futura.

Introduzione

Uno dei pilastri della Programmazione lineare é costituito dal cosidetto "Teorema fondamentale della programmazione lineare" nel quale si prova che ogni problema di programmazione lineare compatibile e inferiormente limitato é dotato di minimo. Qui vengono esposte varie generalizzazioni di questo importante risultato dovute a vari Autori [1], [2], [4], [7].
Nel capitolo 1 viene presentato il problema generale di programmazione vincolata nelle sue varie definizioni e vengono richiamati alcuni risultati sulle funzioni inferiormente semicontinue, indispensabili per il seguito.
Nel capitolo 2 vengono introdotte alcune definizioni relative al comportamento all'infinito di insiemi e funzioni e successivamente viene esposto il nostro teorema fondamentale, dal quale seguiranno tutti gli altri teoremi di esistenza del minimo che intendiamo esporre.

Indice

Capitolo 1

Condizioni di ottimalitá globale

1.1 Problema di ottimizzazione vincolata

Dal punto di vista matematico si definisce il problema dell' *ottimizzazione globale* in R^n come:

$$f_0(x) \ \rightarrow \ min, \tag{1.1}$$

$$f_i(x) \leq 0, \ i = 1, .., r.$$

dove $f_0 : R^n \rightarrow] - \infty, \infty]$, é la nostra funzione obiettivo,
$f_i : R^n \rightarrow (-\infty, \infty], \ i = 1, .., r$ sono le funzioni che vincolano il problema.
L'insieme $S = \{x \in R^n : f_i(x) \leq 0, i = 1, .., r\}$ é detto *regione ammissibile.*

Il nostro problema (1.1) é chiamato *problema di ottimizzazione vincolata* su $S \subset R^n$. Casi particolari del problema (1.1) sono i seguenti:

- Se la funzione f_0 é convessa, e l'insieme S é convesso, allora si avrá un problema di programmazione convessa.

- Se l' insieme S é un poliedro e la funzione $f_0(x)$ é affine, allora il problema é detto *problema di programmazione lineare.*

- Se la funzione f_0 é quadratica e i vincoli $f_i(x)$ sono funzioni affini, allora si avrá un problema di programmazione quadratica. In questo caso il problema assume la forma:

$$min\{c^Tx + \frac{1}{2}x^TQx|x \in R^n,\ Ax \leq b\}$$

dove $Q \in R^{n\times n}$ é una matrice simmetrica, $A \in R^{m\times n}$ é una matrice assegnata e $b \in R^m,\ c \in R^n$.

1.2 Problemi di esistenza

Partiamo con un risultato base dell'analisi matematica il quale esprime una condizione sufficiente (ma non necessaria) per l'esistenza del minimo globale: il teorema di Weiestrass, che nel campo dell'ottimizzazione é fondamentale.

Teorema 1.2.1 (Teorema di Weierstrass)**.** *Sia $S \subseteq R^n$ insieme compatto e non vuoto e sia $f : S \rightarrow R$ funzione continua. Allora esiste almeno un punto di minimo globale di f in S.*

Questo teorema puó essere esteso alle funzioni f inferiormente semicontinue.

1.2.1 Funzioni semicontinue inferiormente

Introduciamo il concetto di funzione semicontinua inferiormente, che risulterá fondamentale nei capitoli successivi.

Sia T uno spazio metrico e $\bar{R} =]-\infty, +\infty]$. Poniamo

$$dom(f) = \{x \in T|f(x) \in R\}$$

La funzione si dice **propria** se $dom(f) \neq 0$.

Definizione 1.1 (Funzioni semicontinue inferiormente (s.c.i))**.** Siano $x_0 \in T$ e $f : T \rightarrow \bar{R} =]-\infty, +\infty]$.

(a) Diciamo che f é semicontinua inferiormente (s.c.i) nel punto x_0 se

$$\forall\ \alpha \in R \text{ con } \alpha < f(x_0)\ \exists\ U \ \text{ intorno di } x_0 :$$

$$\alpha < f(x) \text{ per ogni } x \in U.$$

(b) Diciamo che f é semicontinua superiormente (s.c.s) in x_0 se

$$\forall \alpha \in R \text{ con } f(x_0) < \alpha,\ \exists U \text{ intorno di } x_0 :$$

$$f(x) < \alpha \text{ per ogni } x \in U.$$

Osservazione. Osserviamo che f é s.c.s in x_0 se e solo se $(-f)$ é s.c.i in x_0. Possiamo, quindi limitarci a studiare soltanto funzioni semicontinue inferiormente.
Ricordiamo che :

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) = \sup_{U \in U(x_0)} \inf_{x \in U \setminus \{x_0\}} f(x),$$

dove $U(x_0)$ denota l'insieme degli intorni del punto x_0.
(É facile vedere che la definizione non cambia se al posto di $U(x_0)$ sostituiamo una qualsiasi base di intorni di x_0).

Proposizione 1.2.2. *Una funzione $f : T \to \bar{R}$ é s.c.i in un punto $x_0 \in T$ se e solo se*

$$f(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} f(x_0).$$

Naturalmente, diciamo che una funzione é s.c.i su T se é s.c.i in ogni punto di T.
Nel teorema seguente abbiamo raccolto alcune caratterizzazioni delle funzioni s.c.i su T.

Teorema 1.2.3. *Per una funzione $f : T \to \bar{R}$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) f é s.c.i su T;

(ii) $f(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} f(x)$ per ogni $x_0 \in T$;

(iii) per ogni $\alpha \in R$, l'insieme $\{x \in T : f(x) \leq \alpha\}$ é chiuso in T;

(iv) per ogni $\alpha \in R$, l'insieme $\{x \in T : f(x) > \alpha\}$ é aperto in T;

(v) l'epigrafo $epi(f) = \{(x, r) \in T \times R : f(x) \leq r\}$ é chiuso in $T \times R$.

Dimostrazione. L'equivalenza (i) $\Leftrightarrow$ (ii) segue dalla Proposizione 1.2.2, mentre (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) é ovvia e (iv)$\Rightarrow$ (i) si vede facilmente.
(ii)$\Rightarrow$ (v) : se supponiamo valida (ii), se $(x_n, r_n) \in epi(f)$ e $(x_n, r_n) \to (x, r)$, allora

$$f(x) \leq \liminf_{t \to x} f(t) \leq \liminf_{n \to \infty} f(x_n) \leq \liminf_{n \to +\infty} r_n = r,$$

per cui $(x, r) \in epi(f)$.
(v) $\Rightarrow$ (iii) : supponiamo (v) e dimostriamo (iii) per $\alpha \in R$. Sia

$$f(x_n) \leq \alpha, x_n \to x.$$

Allora $(x_n, \alpha) \in epi(f)$ e $(x_n, \alpha) \to (x, \alpha)$ e quindi $(x, \alpha) \in epi(f)$, cioé $f(x) \leq \alpha$. □

Segue una proprietá importante per le applicazioni.

Teorema 1.2.4. *Sia T uno spazion metrico compatto e $f : T \to \bar{R}$ una funzione s.c.i su T. Allora f assume il suo minimo su T.*
(cioé $\exists x_0 \in T : f(x_0) \leq f(x)$ per ogni $x \in T$).

Dimostrazione. Se f é costante, il teorema risulta evidente. Se, invece, f non é costante si avrá

$$r := \inf f(T) \in [-\infty, +\infty[$$

e quindi esiste una successione strettamente decrescente $\{r_n\}$ in $]r, +\infty[$ tale che $r_n \searrow r$. Allora

$$f^{-1}(r) = \{x : f(x) \leq r\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \{x : f(x) \leq r_n\}.$$

Poiché questi insiemi sono chiusi e non vuoti, la loro intersezione é non vuota per la compattezza di T. □

Riprendiamo il nostro problema (1.1) e supponiamo che le funzioni siano semicontinue inferiormente. Ora grazie al teorema appena dimostrato possiamo dire che l'esistenza del minimo globale é garantita su ogni sottinsieme limitato, chiuso e non vuoto di R^n.

1.2.2 Insiemi di livello

Sia $f : S \to \bar{R}$

Definizione 1.2 (Insieme di livello)**.** Definiamo insieme di livello della funzione f ogni insieme:

$$lev_f(\alpha) := \{x \in S : f(x) \leq \alpha\}, \ \alpha \in R.$$

Dal Teorema 1.2.3 si ottiene il seguente:

Teorema 1.2.5. *Sia $f : R^n \to \bar{R}$ una funzione s.c.i. Se esiste un insieme di livello $lev_f(\alpha)$ di f non vuoto e compatto, allora f possiede almeno un punto di minimo globale in R^n.*

1.2.3 Funzione coerciva

Un'altra condizione di esistenza del minimo globale in R^n puó essere stabilita quando la funzione obiettivo del nostro problema iniziale (1.1) é *coerciva.* Presentiamo ora la definizione.

Definizione 1.3 (funzione coerciva)**.** Un funzione
$f : R^n \to \bar{R}$ si dice coerciva , se :

$$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty$$

.

Come proprietá di queste funzioni si puó dimostrare il seguente teorema.

Teorema 1.2.6. *Sia $f : R^n \to \bar{R}$ una funzione semicontinua inferiormente, continua e coerciva. Allora f possiede almeno un punto di minimo globale in R^n.*

Dimostrazione. Sia $x_0 \in R^n$, per la coercivitá di f esiste una costante $M > 0$ tale che, $\forall x \in R^n$ con $\|x\| > M,$ sia $f(x) \geq f(x_0)$. Allora il problema originale

$$\min_{x \in R^n} f(x)$$

si riduce al problema

$$\min_{x \in S} f(x)$$

dove $S = \{x : \|x\| \leq M\} \subset R^n$ é compatto. Per il Teorema 1.2.1 di Weierstrass, f ha almeno un punto di minimo globale in S, dunque anche in R^n. $\square$

Capitolo 2

Principali risultati di esistenza

2.1 Definizioni

Riprendiamo il problema di programmazione vincolata descritto nel capitolo precedente:

$$\text{(P)} \qquad \begin{array}{l} f_0(x) \ \rightarrow \ min, \\ f_i(x) \leq 0, \ i = 1, .., r, . \end{array} \tag{2.1}$$

e supponiamo che le $f_i : R^n \rightarrow]-\infty, \infty], \ i = 0, 1, ..r$, siano funzioni semicontinue inferiormente.
Prima di iniziare la trattazione diamo alcune definizioni di concetti che verranno utilizzati in seguito.
Definiamo l'insieme ammissibile con

$$D = dom(f_0) \cap C;$$

$$C_i = \{x | f_i(x) \leq 0\}, i = 0, 1, .., r;$$

$$C = R^n, \text{ se } r = 0; \qquad C = \bigcap_{i=1}^{r} C_i, \text{ se } r > 0;$$

e con

$$dom(f_i) = \{x | f_i(x) < \infty\} \neq \emptyset, \text{ per } 0 \leq i \leq r.$$

Poniamo inoltre:

$$L(\gamma) = \{x \in R^n | f_0(x) \leq \gamma\} \cap C.$$

Si definiscono poi:

- **Vettore colonna:** x^T , dove $x = (x_1, .., x_n)$ vettore riga;
- **Prodotto scalare tra vettori:** $x^T y$;
- **2-norma di un vettore:** $\|x\| = (x^T x)^{1/2}$;
- $\infty - norm$ **:** $\|x\|_\infty = max_i |x_i|$,
  dove x_i indica la componente i-esima del vettore x ;
- Per ogni $\gamma \in R$ e $f : R^n \to]-\infty, \infty]$. si definisce

$$lev_f(\gamma) = \{x | f(x) \leq \gamma\};$$

- $\gamma^k \downarrow 0$: successione decrescente, che tende a zero ;
- **Cono asintotico :** per $S \subset R^n$ poniamo

$$S_\infty = \{d \in R^n \; | \exists x^k \in S, \; t^k \to \infty : \frac{x^k}{t^k} \to d\}$$

  chiamiamo S_∞ cono asintotico di S.
  Nel caso di S convesso vale la seguente proposizione.

Proposizione 2.1.1. *Sia $d \in R^n$, S un insieme non vuoto, convesso e chiuso in R^n. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(a) $d \in S_\infty$ *;*

(b) esiste $\bar{x} \in S$ *tale che*

$$\bar{x} + \alpha d \in S, \; \forall \alpha \geq 0;$$

(c) $S + \alpha d \subset S, \; \forall \alpha \geq 0$ *;*

e inoltre S_∞ é convesso e si ha:
se esiste $\bar{x} \in S$ tale che

$$\bar{x} + \alpha d \in S, \; \forall \alpha \in R,$$

allora si ha anche

$$d \in S_\infty, \quad -d \in S_\infty$$

e

$$x + \alpha d \in S, \ \forall x \in S, \ \forall \alpha \in R.$$

Per la dimostrazione di questa proposizione si rimanda a [11].

- **Direzione di recessione:** per ogni funzione $f : R^n \to]-\infty, \infty]$, poniamo

$$f_\infty(d) = \liminf_{\substack{h \to d, \\ t \to \infty}} f \frac{(th)}{t}.$$

Chiamiamo $d \in R^n$ direzione di recessione di f se $f_\infty(d) \leq 0$;

- **Cono di recessione di f :** $R_f = \{d | f_\infty(d) \leq 0\}$.

Nel caso di f convessa vale la seguente proposizione.

Proposizione 2.1.2. *Sia $d \in R^n$ e sia*

$$f : R^n \to]-\infty, +\infty]$$

convessa, s.c.i e con $dom(f) \neq \emptyset$. Allora si ha:

$$f_\infty(d) = \lim_{t \to \infty} \frac{f(x+td) - f(x)}{t}, \ \forall x \in dom(f)$$

$$f_\infty(d) = \sup_{t > 0} \frac{f(x+td) - f(x)}{t}, \ \forall x \in dom(f)$$

$$f_\infty(d) = \sup_{f(x) < \infty} [f(x+d) - f(x)],$$

$$f_\infty(d) = \lim_{t \to \infty} \frac{f(td)}{t}$$

Inoltre sono equivalenti le affermazioni su $\mu \in R$

(a) $f(x+td) = f(x) + t\mu, \ \forall x \in dom(f), \ \forall t \in R$

(b) $-f_\infty(-d) = \mu = f_\infty(d)$

É sufficiente che valga (a) per qualche $\bar{x} \in dom(f)$ perché valga anche (b).

Per la dimostrazione di questa proposizione si rimanda a [11].

2.2 Principale risultato di esistenza

L'esistenza del minimo globale é strettamente legata al comportamento all'infinito delle funzioni f_i. Piú precisamente utilizzeremo i seguenti insiemi.

$$Rec(f,S) := \{d \in R^n | \forall x \in S, \exists \bar{\alpha} \geq 0, \forall \alpha \geq \bar{\alpha} : f(x+\alpha d) \leq 0\}$$

$$AND(f) := \{d \in R^n | \exists x^k \in dom(f) : \|x^k\| \to +\infty, \frac{x^k}{\|x^k\|} \to d, \limsup_{k\to\infty} f(x^k) \leq 0\}$$

Diremo la successione x^k *associata* a d se verifica le condizioni della definizione di AND(f).

$$Retr(f,d) := \{S \subset domf| \text{ per ogni } x^k \in S, \text{ tale che}$$
$$\|x^k\| \to \infty, \frac{x^k}{\|x^k\|} \to d,$$

si ha per un certo $\bar{k} \geq 1$,

$$f(x^k - d) \leq max\{0, f(x^k)\}, \forall k \geq \bar{k}\}$$

$$Retr\_str(f,d) := \{S \subset domf| \text{ per ogni } x^k \in S, \text{ tale che}$$
$$\|x^k\| \to \infty, \frac{x^k}{\|x^k\|} \to d,$$

si ha per un certo $\bar{k} \geq 1$,

$$f(x^k - d) \leq f(x^k), \forall k \geq \bar{k}\}$$

Per f convessa vale la seguente proposizione.

Proposizione 2.2.1. *Sia $d \in R^n$ con $\|d\| = 1$ e*

$$f : R^n \to]-\infty, \infty]$$

convessa, s.c.i, con $dom(f) \neq \emptyset$ e con $\inf_{x\in R^n} f(x) \leq 0$. Allora si ha

$$d \in R_f \Leftrightarrow d \in AND(f)$$

Dimostrazione. Se $d \in AND(f)$ e (x_k) é associata a d, si ha per ogni $\varepsilon > 0$ fissato

$$\|x_k\| \to \infty, \quad \frac{x_k}{\|x_k\|} \to d,$$

$$f(x_k) \leq \varepsilon, \text{per } k \geq \bar{k} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\|x_k\|} f(\|x_k\| \frac{x_k}{\|x_k\|}) \leq \frac{\varepsilon}{\|x_k\|} \Rightarrow$$

$$f_\infty(d) \leq \liminf_{k\to\infty} [\frac{1}{\|x_k\|} f(\|x_k\| \frac{x_k}{\|x_k\|})] \leq \liminf_{k\to\infty} \frac{\varepsilon}{\|x_k\|} = 0$$

e quindi $d \in R_f$, anche in assenza di convessitá di f.
Supponiamo ora $d \in R_f$. Osserviamo che esiste $y^k \in R^n$ tale che

$$\lim_{k\to\infty} f(y^k) = \inf_{x\in R^n} f(x) \leq 0.$$

Poniamo

$$t^k = \|y^k\|^2 + k,$$

$$x^k = y^k + t^k d$$

Si verifica che

$$\frac{\|y^k\|}{t^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

$$\|x^k\| \to \infty,$$

$$\frac{x^k}{\|x^k\|} \to d$$

e dalla convessitá e s.c.i di f segue

$$f(y^k + t^k d) \leq f(y^k), \text{ per } k \geq 1 \Rightarrow$$

$$\limsup_{k\to\infty} f(x^k) \leq \limsup_{k\to\infty} f(y^k) \leq 0$$

Ne segue che $d \in AND(f)$. □

Partendo da questi dati passiamo a trattare la questione dell'esistenza del minimo globale. Iniziamo con la seguente condizione.

(A1) Sia $0 \leq i \leq r, d \in AND(f_i)$. Allora valgono le seguenti affermazioni:

(a) $d \in Rec(f_i, dom(f_i))$
oppure $[dom(f_i) \in Retr(f_i, d)$ e inoltre $d \in Rec(f_i, C_i)$ se $r \geq 1]$;

(b) $r \geq 1 \Rightarrow C_0 \subset dom(f_i)$.

Il nostro risultato principale é il seguente.

Teorema 2.2.2 (Esistenza del minimo globale)**.** *Se le funzioni* $f_i : R^n \rightarrow]-\infty, \infty]$, $i = 0, 1, .., r$, *del problema (P) soddisfano la condizione (A1) e se* $L(\gamma) \neq \emptyset$, $\forall \gamma > 0$, *allora si ha* $L(0) \neq \emptyset$.

Dal teorema segue che quando $f_0, f_1, .., f_r$ soddisfano la condizione (A1), allora esiste il minimo globale del problema (P), se é inferiormente limitato.

Dimostrazione. Proviamo il teorema per induzione su r. Per questo basta provare che per r=0 il teorema é vero e che dall'ipotesi che sia vero per problemi con un numero di vincoli minore di r, si deduce che é vero anche nel caso di r vincoli. Prendiamo una qualunque successione di scalari $\gamma^k \downarrow 0$; per ipotesi $L(\gamma^k) \neq \emptyset$ per ogni k. Poiché f_i é inferiormente semicontinua per tutti gli i, $L(\gamma^k)$ é chiuso. Quindi esiste

$$x^k \in argmin\{\|x\| | x \in L(\gamma^k)\}$$

Se x^k ha una sottosuccessione convergente, allora il punto limite di questa successione deve essere in L(0), poiché le f_i sono tutte inferiormente semicontinue. Cosí é sufficiente considerare il caso di $\|x^k\| \rightarrow \infty$. Siccome $x^k/\|x^k\|$ é limitata , essa ha una sottosuccessione convergente a qualche limite $d \neq 0$. Passando eventualmente ad una sottosuccessione, possiamo supporre che $x^k/\|x^k\| \rightarrow d$, per $k \rightarrow \infty$. Poiché $f_0(x^k) \leq \gamma^k$ mentre $f_i(x^k) \leq 0$, per $i = 1, .., r$, questo implica che $d \in AND(f_i)$, $i = 0, .., r$. Allora, per l'ipotesi (A1)(a) , per ciascun i, $d \in Rec(f_i, dom(f_i))$ oppure $dom(f_i) \in Retr(f_i, d)$, inoltre se $r \neq 0$, allora $d \in Rec(f_i, C_i)$. Se $d \in Rec(f_0, dom(f_0))$ allora per ogni $\bar{x} \in D \neq \emptyset$, abbiamo $\bar{x} \in dom(f_0)$ cosí che $f_0(\bar{x} + \alpha d) \leq 0$ per ogni α abbastanza grande. Nel caso $r \neq 0$, per ogni $i \in (1, .., r)$ abbiamo $\bar{x} \in C_i$ e quindi $f_i(\bar{x} + \alpha d) \leq 0$ per ogni α abbastanza grande. Cosí sará $\bar{x} + \alpha d \in L(0)$ per tutti gli α abbastanza grandi, e quindi

$L(0) \neq \emptyset$.

Pertanto rimane da considerare il caso di $dom(f_0) \in Retr(f_0, d)$.

Se $dom(f_i) \in Retr(f_i, d)$ per ogni i=1,..,r, allora per ogni $i \in (0, 1, .., r)$ esiste $\bar{k}_i$ tale che

$$x^k - d \in lev f_i(\gamma^{k,i}), \ \forall k \geq \bar{k}_i,$$

dove $\gamma^{k,0} = \gamma^k$ e $\gamma^{k,i} = 0$ per $i = 1, .., r$.. Quindi per ogni $k \geq \bar{k}_i, \ i = 0, 1, .., r,$

$$\tilde{x}^k = x^k - d,$$

soddisferá la condizione $\tilde{x}^k \in L(\gamma^k)$. Allora dalla convergenza $x^k/\|x^k\| \to d$, noi abbiamo $d^T x^k/\|x^k\| \to \|d\|^2 = 1$, ció implica $d^T x^k \to \infty$, e quindi $2d^T x^k > 1$ per k abbastanza grande e quindi anche

$$\|\tilde{x}^k\|^2 = \|x^k\|^2 - 2d^T x^k + 1 < \|x^k\|^2,$$

per tutti i k abbastanza grandi, Questo contraddice il fatto che $x^k \in L(\gamma^k)$ ha norma minima. Cosí si ha $L(0) \neq \emptyset$ oppure

$r \geq 1$ e $d \in Rec(f_{\bar{i}}, dom(f_{\bar{i}}))$ per qualche

$\bar{i} \in \{1, .., r\}$. Quanto provato sopra dimostra che il teorema é vero quando $r = 0$.

Per il problema

$$(\tilde{P}) \qquad \begin{array}{l} f_0(x) \to min \\ f(x) \leq 0, \ \text{per } 0 \leq i \leq r, \quad i \neq \bar{i} \end{array}$$

continua a valere la condizione (A1) e si ha per

$$\tilde{L}(\gamma) = \{x \in R^n \mid f_0(x) \leq \gamma, f_i(x) \leq 0, \ \text{per } 1 \leq i \leq r, \ i \neq \bar{i}\}$$

$$\tilde{L}(\gamma) \supset L(\gamma) \neq \emptyset, \ \forall \gamma > 0$$

L'ipotesi di induzione assicura che $\tilde{L}(0) \neq \emptyset$. Per ogni $\tilde{x} \in \tilde{L}(0)$, siccome $d \in Rec(f_i, C_i)$, per tutti gli $i \neq \bar{i}$ abbiamo $\tilde{x} + \alpha d \in \tilde{L}(0)$, $\forall \alpha$ abbastanza grandi. Di piú l'ipotesi (A1)(b) implica $\tilde{x} \in C_0 \subseteq dom(f_{\bar{i}})$, e quindi da $d \in Rec(f_{\bar{i}}, dom(f_{\bar{i}}))$ segue $f_{\bar{i}}(\tilde{x} + \alpha d) \leq 0$, $\forall \alpha$ abbastanza grande e questo fornisce $\tilde{x} + \alpha_i d \in L(0)$ □

Il teorema mostra che quando $f_0, f_1, ..f_r$ soddisfano l'ipotesi (A1) e l'estremo inferiore del problema (P) é finito, che noi supponiamo senza perdita di generalitá che sia zero, esiste il minimo globale di (P). Facciamo alcune considerazioni su questo teorema e sulle ipotesi in maggior dettaglio qui di seguito.

Osservazione 1. Si puó vedere dalla dimostrazione che il teorema vale ancora se noi rilassiamo l'ipotesi (A1)(b) in modo tale che $C_0 \subseteq dom(f_i)$ solo gli $i \in \{0, 1, ..r\}$, per i quali esiste qualche $d \in AND(f_i)$ tale che $dom(f_i) \notin Retr(f_i, d)$.Per esempio se ogni vincolo f_i é di tipo affine, allora si puó dimostrare che per ogni $d \in AND(f_i)$ si ha $dom(f_i) \in Retr(f_i, d)$ e quindi la (A1)(b) puó essere cancellata del tutto.
In generale l'ipotesi (A1)(b) non puó essere cancellata come dimostreremo nell'Esempio 2.1.

Osservazione 2. Il teorema vale ancora se noi rilassiamo l'ipotesi su f_0 nella condizione (A1)(a) nel seguente modo:
per ogni $d \in AND(f_0)$ esiste $F \subset dom(f_0)$ tale che:

a) $d \in Rec(f_0, dom(f_0) \backslash F)$,

b) $F \in Retr(f_0, d)$,

c) Nel caso $r \neq 0, d \in Rec(f_0, C_0)$.

(L' ipotesi su f_0 nella condizione (A1)(a) corrisponde al caso di $F = \emptyset$ oppure $F = dom(f_0)$). La validitá di questa osservazione é dovuta al fatto che, come nella dimostrazione del teorema, noi possiamo distinguere i seguenti casi:

i) Se $D \backslash F \neq \emptyset$ allora per ogni $\bar{x} \in D \backslash F$ noi abbiamo $f_0(\bar{x}) + \alpha d \leq 0$ per α sufficientemente grande,

ii) $d \in F$ e allora possiamo procedere come prima.

Questa non é una mera generalizzazione tecnica del teorema. Noi lo applicheremo nelle sezioni 2.4 e 2.5.

Il seguente esempio mostra che le ipotesi sui vincoli $f_1, f_2, ..f_r$, non possono essere rilassate alla stessa maniera di f_0.

Esempio 2.1. Poniamo

$$f_0(x,y) = \begin{cases} 1/(|y|+1) - 1/2, \text{ se } |y| < 1 \text{ e } x \geq 0, \\ 0, \text{ se } |y| \geq 1 \text{ e } x \geq 0, \\ \infty, \text{ altrimenti} \end{cases}$$

$$f_1(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ se } |y| \leq 1 - e^{-k} \text{ e } x \geq 0, \\ 1, \text{ se } |y| > 1 - e^{-k} \text{ e } x \geq 0, \\ \infty, \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Allora sia f_0 che f_1 sono proprie e inferiormente semicontinue. Ogni d con $\|d\| = 1$ e $d_1 \geq 0$ appartiene a $AND(f_0)$. Si puó vedere che per ogni $d \in AND(f_0)$, $dom(f_0) \in Retr(f_0, d)$ e anche $d \in Rec(f_0, C_0)$. L'unico $d \in AND(f_1)$ é $d = (0,1)$ e $f_1 \notin Rec(f_1, dom(f_1))$. Di piú la successione $\{(k, 1-e^{-k})\}$ é una successione associata a $d = (0,1)$, e $dom(f_1) \notin Retr(f_1, d)$. Ma f_1 soddisfa la seguente ipotesi rilassata (che é analoga all'ipotesi rilassata su f_0). Sia

$$F_1 = \{(x,y) | x \geq 0, |y| \geq 1\}.$$

allora

$$d \in Rec(f_1, dom(f_1 \backslash F_1),$$

$$F_1 \in Retr(f_1, d),$$

$$d \in Rec(f_1, C_0).$$

D'altra parte per il punto

$$(x^k, y^k) = (k, 1 - e^{-k})$$

si ha

$$f_1(x^k, y^k) = 0 \text{ e } f_0(x^k, y^k) \to 0,$$

ma non c'é nessuna soluzione al sistema

$$f_1(x,y) \leq 0$$

$$f_0(x,y) \leq 0,$$

Osservazione 3. Se per ogni i= 1,..,r e ciascun $d \in AND(f_i)$ si ha $dom(f_i) \in Retr(f_i, d)$ e $d \in Rec(f, C_i)$ allora il teorema vale ancora se in (A1) la condizione 'nel caso $r \neq 0$, $d \in Rec(f_0, C_0)$' é cancellata. Infatti in questo caso il nostro problema (P) puó essere ridotto al caso di r = 0, lavorando con la seguente funzione obiettivo:
$\tilde{f}_0(x) = \begin{cases} f_0(x), \text{ se } x \in D, \\ \infty, \text{ altrimenti.} \end{cases}$
Si puó vedere che per questo problema equivalente l'ipotesi (A1)(a) é soddisfatta.
Un altro controesempio é dato dal seguente

Esempio 2.2. Sia

$$f_0(x,y) = \begin{cases} 1/(|y|+1), \text{ se } x > 0 \text{ e } |y| < 2\sqrt{x}, \\ 0, \text{ altrimenti} \end{cases}$$

$$f_1(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ se} x \geq 1 \text{ e } |y| \leq \sqrt{x}, \\ 1, \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Allora sia f_0 che f_1 sono proprie e inferiormente semicontinue; di piú per ogni d con $\|d\| = 1$, si ha $d \in AND(f_0)$ e $dom(f_0) \in Retr(f_0, d)$. Il solo $d \in AND(f_1)$, é d=(1,0) e $d \in Rec(f_1, dom(f_1))$. Il punto

$$x^k = k, y^k = \sqrt{k}$$

soddisfa

$$f_1(x^k, y^k) = 0 \text{ e } f_0(x^k, y^k) = 1/(\sqrt{k}+1) \to 0$$

Tuttavia non c'é nessuna soluzione a

$$f_1(x,y) \leq 0$$

$$f_0(x,y) \leq 0.$$

Il problema é che $d = (1,0) \notin Rec(f_0, C_0)$.

Un altro teorema di esistenza del minimo globale di (P) é il seguente.

Teorema 2.2.3. *Consideriamo il problema (P) e supponiamo che $D \neq \emptyset$ e, per ciascuna direzione $d \in AND(f_i), i = 0, 1, .., r$ abbiamo che $dom(f_0) \in Retr\_str(f_0, d)$ e $dom(f_i) \in Retr(f_i, d)$ per i=1,..r. Allora (P) ha un punto di minimo globale.*

Dimostrazione. Sia γ^* l'estremo inferiore del problema (P) che noi assumiamo senza perdita di generalitá essere 0 oppure $-\infty$. Allora per ogni successione $\gamma^k \downarrow \gamma^*$, si ha $L(\gamma^k) \neq \emptyset$ per ogni k. Sia x^k un elemento di $L(\gamma^k)$ di 2-norma minima. Noi affermiamo che x^k ha una qualche sottosuccessione convergente e che il limite di queste sottosuccessioni é un punto di minimo globale per (P). Ragioniamo per assurdo e supponiamo che $\|x^k\| \to \infty$. Passando ad una sottosuccesione, se necessario, possiamo assumere che $x^k/\|x^k\|$ converga a qualche d. Allora $d \in AND(f_i)$, per $i = 0, 1, .., r$ e siccome $dom(f_0) \in Retr\_str(f_0, d)$ si ha

$$f_0(x^k - d) \leq f_0(x^k) \leq \gamma^k,$$

per tutti i k. Per ogni $i = 1, .., r$, siccome $dom(f_i) \in Retr(f_i, d)$ e $x^k \in C_i$, si ha anche

$$f_i(x^k - d) \leq max\{0,\ f_i(x^k)\} \leq 0,$$

per ogni k sufficientemente grande, di modo che $x^k - d \in L(\gamma^k)$ per ogni k, ma come prima $\|x^k - d\|^2 < \|x^k\|^2$, per ogni k sufficientemente grande, e questa é una contraddizione come si é visto nella dimostrazione del Teorema 2.2.2. □

2.3 Funzioni a recessione lineare

In questa sezione introduciamo una importante classe di funzioni, che soddisfano la proprietá (A1)(a). Diciamo che f recede linearmente secondo d se esiste $\theta \in R$ (dipendente da d) tale che $\theta \leq 0$ e

$$f(x + \alpha d) = f(x) + \alpha\theta \text{ per ogni } \alpha \in R, x \in dom f \qquad (2.2)$$

.

Diciamo che f é costante lungo d, se possiamo prendere $\theta = 0$ nella precedente espressione.

Consideriamo la seguente ipotesi sulla funzione $f : R^n \to]-\infty, \infty]$:

(A2) Per ogni $d \in AND(f)$, f recede linearmente secondo d.

L'ipotesi (A2) ci dice che f é affine su ciascuna linea che interseca dom(f) ed é parallela ad una $d \in AND(f)$

Il seguente lemma mostra che é sufficiente verificare l'ipotesi (A2) per ciascuna f_i in luogo dell'ipotesi (A1)(a).

Lemma 2.3.1. *Se le funzioni $f_0, f_1, .., f_r$ sono tali che ciascuna soddisfa l'ipotesi (A2), allora queste soddisfano l'ipotesi (A1)(a).*

Dimostrazione. Consideriamo $f : R^n \to]-\infty, \infty]$ che soddisfa l'ipotesi (A2) e fissiamo $d \in AND(f)$. Per l'ipotesi (A2), f recede linearmente lungo d, cioé esiste $\theta \in R$ con $\theta \leq 0$ che verifica (2.2). Se $\theta < 0$ allora per ogni $x \in dom(f)$, abbiamo da (2.2)

$$f(x + \alpha d) \to -\infty \text{ per } \alpha \to \infty.$$

Ne segue che $d \in Rec(f, dom(f))$. Se $\theta = 0$ allora per ogni $x \in dom f$, abbiamo da (2.2) che

$$f(x - \alpha d) = f(x), \text{ per ogni } \alpha \in R.$$

Ne segue che $dom(f) \in Retr(f, d)$ e che $d \in Rec(f, lev_f(0))$. Applicando il risultato precedente a $f_0, f_1, .., f_r$ vediamo che tali funzioni soddisfano l'ipotesi (A1)(a) □

Usando il Lemma 2.3.1 noi diamo un esempio che prova che il Teorema 2.2.2 é falso se la condizione (A1)(b) non é soddisfatta.

Esempio 2.3. Poniamo

$$\phi(t) = \begin{cases} -\log t - \log(1-t), \text{ se } 0 < t < 1, \\ \infty, \text{ altrimenti,} \end{cases}$$

$$f_0(x_1, x_2) = x_1,$$

$$f_1(x_1, x_2) = \phi(x_1) - x_2.$$

Allora f_0 é lineare, e quindi f_0 soddisfa l'ipotesi (A2). Siccome ϕ é inferiormente semicontinua, allora f_1 é inferiormente semicontinua e convessa. Siccome ϕ ha supporto limitato, ne segue che per ogni $d \in AND(f_1)$, noi abbiamo $d_1 = 0$ e $d_2 \geq 0$. Allora f_1 recede linearmente secondo d. Cosí f_0, f_1 soddisfano l'ipotesi (A2). E per il Lemma

2.3.1 soddisfano l'ipotesi (A1)(a).
Per $x_1 \to 0^+$ e ponendo $x_2 = \phi(x_1)$, noi abbiamo che

$$f_0(x_1, x_2) \to 0 \text{ e } f_1(x_1, x_2) \leq 0.$$

Tuttavia non c'é nessun $x \in R^2$ che soddisfa le condizioni $f_0(x) = 0$ e $f_1(x) \leq 0$. (poiché $f_1(x) \leq 0$ implica $x_1 > 0$). Qui il problema é che il $dom(f_1)$ non contiene C_0 e cosí é violata l'ipotesi (A1)(b).

Diamo ora un esempio di funzioni che soddisfano l'ipotesi (A2).
Consideriamo la seguente ipotesi su f :

(A3) $f(x) = h(Ax) + b^T x + c$,

dove $A \in R^{m\times n}$, $b \in R^n$, $c \in R$ e $h : R^m \to]-\infty, \infty]$
é una funzione tale che $h_\infty(d) > -\infty, \forall d \in R^n$. e vale una delle condizioni seguenti:

(i) $b = 0, \lim_{\|y\|\to\infty} h(y) = \infty$, oppure

(ii) $b \neq 0, \lim_{\|y\|\to\infty} h(y)/\|y\| = \infty$.

Mostriamo che l'ipotesi (A3) implica l'ipotesi (A2).

Lemma 2.3.2. *Sia $f : R^n \to]-\infty, \infty]$ una funzione semicontinua inferiormente propria che soddisfa l'ipotesi (A3). Allora* f *soddisfa l'ipotesi (A2).*

Dimostrazione. Proviamo dapprima che

$$d \in AND(f) \Rightarrow Ad = 0,\ b^T d \leq 0. \tag{2.3}$$

Per provarlo fissiamo $d \in AND(f)$ e una successione x^k associata a d
Se b=0, allora $f(x^k) = h(Ax^k) + c$ é limitata superiormente, e quindi $\|Ax^k\|$ é limitata. Pertanto $\|Ax^k\|/\|x^k\| \to 0$, e quindi $Ad = 0$. Siccome b=0, abbiamo anche $b^T d \leq 0$.
Se invece $b \neq 0$, abbiamo

$$\lim_{k\to\infty} sup\ [h(Ax^k)/\|x^k\| + (b^T x^k + c)/\|x^k\|] = \lim_{k\to\infty} sup\ f(x^k)/\|x^k\| \leq 0.$$

Ne segue che $h(Ax^k)/\|x^k\|$ é limitata superiormente. Se $\|Ax^k\| \to \infty$ secondo una sottosuccessione di x^k allora la limitatezza superiore di

$$h(Ax^k)/\|x^k\| = [h(Ax^k)/\|Ax^k\|][\|Ax^k\|/\|x^k\|]$$

e $h(Ax^k)/\|Ax^k\| \to \infty$ implica
$\|Ax^k\|/\|x^k\| \to 0$ secondo questa sottosuccessione. Se $\|Ax^k\|$ é limitata secondo una sottosuccessione allora $\|x^k\| \to \infty$ implica $\|Ax^k\|/\|x^k\| \to 0$ lungo la stessa sottosuccessione. In ogni caso $\|Ax^k\|/\|x^k\| \to 0$ e quindi $Ad = 0$. Inoltre noi abbiamo da $f(x^k)$ funzione limitata superiormente (per esempio da κ)

$$b^T x^k/\|x^k\| \leq -h(Ax^k)/\|x^k\| + (\kappa - c)/\|x^k\|,$$

che insieme con

$$\lim_{k\to\infty} inf\ h(Ax^k)/\|x^k\| \ \geq 0,$$

fornisce

$$\lim_{k\to\infty} sup\ b^T x^k/\|x^k\| \leq 0,$$

in modo che $b^T d \leq 0$, e pertanto d verifica le condizioni $Ad = 0, b^T d \leq 0$. Segue da

$$f(x) = h(Ax) + b^T x + c$$

e da (2.3) che f soddisfa l'ipotesi (A2). □

Pertanto se ciascuna di $f_0, f_1, ..f_r$ soddisfa l'ipotesi (A3), allora soddisfa l'ipotesi (A2) e per il Lemma 2.3.1 esse collettivamente soddisfano l'ipotesi (A1)(a) e quindi se in aggiunta esse soddisfano anche l'ipotesi (A1)(b), allora dal Teorema 2.2.2 segue che il problema (P) ha minimo globale ogni qual volta il suo estremo inferiore é finito.
Dunque vale la seguente proposizione.

Proposizione 2.3.3. *Se il problema (P) é inferiormente limitato, se vale la condizione (A1)(b) e se ciascuna funzione f_i per $0 \leq i \leq r$, verifica la condizione (A3), allora esiste il minimo globale per (P).*

Definizione 2.1. Un insieme X si dice *asintoticamente multipoliedrale* se si puó rappresentare come:

$$X = S + K,$$

dove S é compatto in R^n e $K = \cup_{j=1}^{l} K^j$ dove ciascun K^j é un cono poliedrico.

Consideriamo il seguente problema:

$$g(x) \to min, \quad x \in X, \tag{2.4}$$

dove X é un insieme asintoticamente multipoliedrale in R^n e
$g : R^n \to]-\infty, \infty]$ é una funzione inferiormente semicontinua propria.

Proposizione 2.3.4. *Consideriamo il problema (2.4) e supponiamo che valga la seguente condizione:*

$$dom(g) \cap X \neq \emptyset, \quad g_\infty(d) \geq 0, \quad \forall d \in X_\infty, \tag{2.5}$$

e supponiamo inoltre che g verifichi una delle seguenti condizioni:

(i) g recede linearmente lungo ciascun $d \in X_\infty \cap R_g$

(ii) epi(g) é un insieme asintoticamente multipoliedrale.

Allora il problema (2.4) ha un minimo globale tutte le volte che é inferiormente limitato.

Dimostrazione. Supponiamo che g receda linearmente lungo ciascun $d \in X_\infty \cap R_g$. Siccome X é asintoticamente multipoliedrale lo si puó scrivere:

$$X = S + K,$$

dove S é compatto in R^n e $K = \cup_{j=1}^{l} K^j$ dove ciascun K^j é un cono poliedrico.
Allora il problema (2.4) é equivalente al seguente problema:

$$f_0(x_1, x_2) \to min,$$

$$f_1(x_1, x_2) \leq 0,$$

essendo

$$f_0(x_1, x_2) = \begin{cases} g(x_1 + x_2), \text{ se } x_1 \in S, \\ \infty \text{ altrimenti,} \end{cases}$$

$$f_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, \text{ se } x_2 \in K, \\ \infty \text{ altrimenti,} \end{cases}$$

Osserviamo che f_0, f_1 sono funzioni proprie, inferiormente semicontinue. Ora verifichiamo che questo problema soddisfa le ipotesi del Teorema 2.2.3 e pertanto che ha minimo globale. Da (2.5) si ha che $dom(g) \cap X \neq \emptyset$ e quindi $D = dom(f_0) \cap C_1 \neq \emptyset$. Fissiamo $(d_1, d_2) \in AND(f_0) \cap AND(f_1)$, questa é una direzione di recessione di f_i , cioé si ha

$$(f_i)_\infty(d_1, d_2) \leq 0, \quad \text{per } i = 1, 2.$$

Si verifica che

$$(f_0)_\infty(d_1, d_2) = \begin{cases} g_\infty(d_2) \text{ se } d_1 = 0, \\ \infty \text{ altrimenti,} \end{cases}$$

$$(f_1)_\infty(d_1, d_2) = \begin{cases} 0 \text{ se } d_2 \in K, \\ \infty \text{ altrimenti,} \end{cases}$$

Questo implica

$$d_1 = 0, \quad d_2 \in K, \text{ e } g_\infty(d_2) \leq 0.$$

Ne segue che $d_2 \in X_\infty \cap R_g$ e la nostra condizione (2.5) su g implica $g_\infty(d_2) \geq 0$ e che g recede linearmente lungo d_2. Ne segue che esiste $\theta \leq 0$ tale che

$$g(x + \alpha d_2) = g(x) + \alpha\theta, \quad \forall \alpha \in R, \quad \forall x \in dom(g).$$

Siccome $g_\infty(d_2) \geq 0$, deve essere $\theta = 0$. Questo fatto e $d_1 = 0$ implica che f_0 é costante lungo la direzione (d_1, d_2) e quindi $dom(f_0) \in Retr\_str(f_0, (d_1, d_2))$, inoltre usando il fatto che $d_2 \in K$ e K é l'unione di coni poliedrali, ne segue che $dom(f_1) \in Retr(f_1, (d_1, d_2))$. Questo dimostra quanto richiesto nel caso (i). Supponiamo ora che *epi(g)* sia un insieme asintoticamente multipoliedrale. Allora il problema (2.4) é equivalente a

$$h(x, \mu) \to min$$

$$(x, \mu) \in Y,$$

dove

$$h(x, \mu) = \mu \ \text{ e } Y = epi(g) \cap (X \times R).$$

L'ipotesi (2.5) implica che

$$dom(h) \cap Y \neq \emptyset \text{ e } h_\infty(d, \delta) = \delta \geq 0, \ \forall (d, \delta) \in Y_\infty.$$

Inoltre $\delta \leq 0,\ \forall(d,\delta) \in R_h$, implica $\delta = 0$ e quindi che h é costante lungo la direzione (d,δ). Si puó vedere che l'intersezione di due insiemi asintoticamente multipoliedrali é ancora asintoticamente multipoliedrale. Con questo il caso (ii) é ricondotto al caso (i). □

2.4 Funzioni polinomiali quasi convesse su insiemi poliedrici

Diremo che una funzione $f : R^n \to]-\infty,\infty]$ é quasi convessa su X se $lev_f(\gamma)$ é convesso per ogni γ. Consideriamo la seguente ipotesi di tipo polinomiale su f.

(A4)

$$f(x) = \begin{cases} g(x), \text{se } x \in X \\ \infty, \text{ in caso contrario} \end{cases}$$

ove $g : R^n \to R$ é una funzione polinomiale e

$$X = \{x|Bx \leq b\} \neq \emptyset,$$

per qualche $B \in R^{m\times n}, b \in R^m$. Inoltre si suppone che g sia quasiconvessa su X.

Ogni funzione polinomiale f convessa soddisfa questa ipotesi.
Un esempio di funzione non convessa é dato da

$$g(x_1,x_2) = x_1x_2, \quad X = [0,\infty[\times]-\infty,0].$$

Il lemma seguente prova che f soddisfa l'ipotesi rilassata dell'Osservazione 2, del Teorema 2.2.2.

Lemma 2.4.1. *Sia $f : R^n \to]-\infty,\infty]$ una funzione che soddisfa la proprietá (A4). Allora per ogni $d \in AND(f)$ esiste $F \subseteq X$ tale che:*

(i) $d \in Rec(f, X\backslash F)$,

(ii) $dom(f) \in Retr(F,d)$,

(iii) $d \in Rec(f, lev_f(0))$.

Dimostrazione. Fissata $d \in AND(f)$, sia x^k una successione associata a d e sia

$$\gamma^k = \sup_{l \geq k} max[0, f(x^l)], \forall k.$$

Allora $\{\gamma^k\} \downarrow 0$ e , per ogni $k, x^l \in lev_f(\gamma^k)$ per ogni $l \geq k$. Poiché g é una funzione semicontinua inferiormente quasiconvessa su X, gli insiemi $lev_f(\gamma^k)$ sono chiusi e convessi. e $x^l/\|x^l\| \to d$, di conseguenza $d \in [lev_f(\gamma^k)]_\infty$. Cosí γ é nell'intersezione di tutti gli insiemi $[lev_f(\gamma^k)]_\infty$. Poiché la successione γ^k é monotona questo implica che $d \in [lev_f(\gamma)]_\infty$ per ogni $\gamma > 0$. Fissiamo $x \in X$. Allora $x \in lev_f(\gamma)$ per qualche $\gamma > 0,$ quindi $x + \alpha d \in lev_f(\gamma)$ per tutti gli $\alpha \geq 0$. Dunque

$$B(x + \alpha d) \leq c \ \text{ e } g(x + \alpha d) \leq \gamma, \text{ per tutti gli } \alpha \geq 0.$$

La prima condizione implica $Bd \leq 0$ cioé $d \in X_\infty$.Poiché $g(x + \alpha d)$ é un polinomio in α la seconda affermazione implica una delle due affermazioni seguenti

$$g(x + \alpha d) \to -\infty, \text{per } \alpha \to \infty \tag{2.6}$$

$$g(x + \alpha d) = g(x), \text{ per ogni } \alpha \in R. \tag{2.7}$$

Definiamo

$$F = \{x \in X | g(x + \alpha d) = g(x), \text{per ogni } \alpha \in R\}.$$

Allora per ogni $x \in X \backslash F$, noi abbiamo da $Bd \leq 0$ che

$$x + \alpha d \in X, \text{ per ogni } \alpha \geq 0$$

in modo che (2.6), (2.7) fornisce

$$f(x + \alpha d) = g(x + \alpha d) \to -\infty, \text{per } \alpha \to \infty.$$

Di qui segue che $d \in Rec(f, X \backslash F)$. Fissiamo ora una successione illimitata x^k associata a d. Per ciascun $i \in \{1, .., m\}$, B_i e b_i denotano la i-esima riga di B e b. Se $B_i d = 0$, allora

$$B_i(x^k - d) = B_i x^k \leq b_i, \forall k.$$

Se $B_i d < 0$, allora si ha $B_i x^k / \|x^k\| \to B_i d$ e $\|x^k\| \to \infty$, e quindi esiste un $\bar{k}_i$, tale che

$$B_i(x^k - d) < b_i, \text{ per ogni } k \geq \bar{k}_i.$$

Sia

$$\bar{k} = \max_{\{i|B_i d<0\}} \bar{k}_i.$$

Siccome $x^k \in F$, ne segue

$$f(x^k - d) = g(x^k - d) = g(x^k) = f(x^k), \text{ per ogni } k \geq \bar{k},$$

questo implica che $F \in Retr(f, d)$. Dalla condizione $Bd \leq 0$ e da (2.6), (2.7) per ogni $x \in lev_f(0)$ esiste $\bar{\alpha} \geq 0$

$$x + \alpha d \in X, g(x + \alpha d) \leq g(x) \leq 0 \text{ per ogni } \alpha \geq \bar{\alpha}.$$

Quindi

$$f(x + \alpha d) \leq 0, \quad \text{per tutti gli } \alpha \geq \bar{\alpha},$$

e ció significa che $d \in Rec(f, lev_f(0))$. □

Nel caso speciale in cui f é un polinomio convesso su R^n il Lemma 2.4.1 puó essere migliorato come segue.

Lemma 2.4.2. *Sia $f : R^n \to R$ una funzione polinomiale convessa. Allora per ogni $d \in AND(f)$ si verifica una delle due affermazioni seguenti:*

(i) $d \in Rec(f, R^n)$

(ii) $R^n \in Retr(f, d)$ *e inoltre* $d \in Rec(f, lev_f(0))$.

Dimostrazione. Fissiamo $d \in AND(f)$. Allora d é una direzione di recessione di f. Siccome f é convessa ció implica che , per ogni $x \in R^n$,

$$f(x + \alpha d) \leq f(x), \forall \alpha \geq 0,$$

Poiché $f(x + \alpha d)$ é un polinomio in α, questo implica che vale una delle affermazioni seguenti:

1. $\lim_{\alpha\to\infty} f(x+\alpha d) = -\infty$

2. $f(x+\alpha d) = f(x), \forall \alpha \in R.$

Se

$$\lim_{\alpha\to\infty} = -\infty, \forall x \in R^n,$$

allora $d \in Rec(f, R^n)$ Cosí resta da considerare il caso in cui, per qualche $\bar{x} \in R^n$

$$f(\bar{x}+\alpha d) = f(\bar{x}), \forall \alpha \in R.$$

Poiché f é convessa , questo implica che $d \in R_f \cap (-R_f)$ e quindi che per $x \in R^n$

$$f(x+\alpha d) = f(x), \text{per ogni } \alpha \in R.$$

Quindi $R^n \in Retr(f, d)$. Inoltre $d \in Rec(f, lev_f(0))$. □

Proposizione 2.4.3. *Supponiamo che f_0 verifichi l'ipotesi (A4) e che ciascuna delle funzioni $f_1, .., f_r$ verifichi l'ipotesi (A3), allora se é soddisfatta anche l'ipotesi (A1)(b) il problema (P) ammette una soluzione, tutte le volte che é inferiormente limitato.*

La dimostrazione di questa proposizione si ottiene osservando che, per il Lemma 2.3.1, f_0 soddisfa l'ipotesi rilassata nell'Osservazione 2 che segue il Teorema 2.2.2, dal Lemma 2.3.2 e dal Lemma 2.3.1 $f_0, f_1, .., f_r$ soddisfano l'ipotesi (A1)(a), modificata mediante l'Osservazione 2, allora questo basta per provare la nostra proposizione.

Proposizione 2.4.4. *Supponiamo che f_0 soddisfi l'ipotesi del Lemma 2.4.2 e che $f_1, .., f_r$ siano polinomi convessi su R^n. Se il problema (P), é inferiormente limitato, ha un minimo globale.*

Questo é il risultato fondamentale contenuto in [5].
La dimostrazione si basa sul fatto che per il Lemma 2.3.1 f_0 soddisfa l'ipotesi rilassata nell'Osservazione 2 che segue il Teorema 2.2.2 e per il Lemma 2.3.2 $f_0, f_1, ..f_r$ soddisfano l'ipotesi (A1) soggetta a questa modifica. Cosí dal Teorema 2.2.2 e dall'Osservazione 2, segue che il problema (P), supposto inferiormente limitato, ha un minimo globale.

2.5 Teorema di Frank-Wolfe

In questa sezione noi assumiamo che f_0 sia una funzione quadratica su un poliedro, caso studiato da Frank - Wolfe (Cf.[7]) e poi da molti altri. Consideriamo l'ipotesi

$$\textbf{(A5)} \qquad f(x) = \begin{cases} g(x), \text{se } x \in X \\ \infty, \text{ altrimenti} \end{cases}$$

$$\text{dove } g(x) = (1/2)x^T Qx + q^T x,$$

$$\text{per qualche } Q \in R^{n\times n} \text{simmetrica e } q \in R^n, \text{ e}$$

$$X = \{x|Bx \le b\} \text{ per } B \in R^{m\times n} \text{ e } b \in R^m.$$

Il lemma che segue mostra che f_0 soddisfa l'Osservazione 2, che segue il Teorema 2.2.2, per il caso r = 0.

Lemma 2.5.1. *Sia $f : R^n \to]-\infty, \infty]$ che soddisfa l'ipotesi (A5). Allora per ogni $d \in AND(f)$ esiste $F \subseteq X$ tale che*

(i) $d \in Rec(f, X\backslash F)$

(ii) $F \in Retr(f, d)$

Dimostrazione. Fissiamo $d \in AND(f)$ e x^k una successione associata a d. É immediato verificare che $d^T Qd \le 0$ e $d \in X_\infty$.
(Si puó procedere come nella dimostrazione del Lemma 2.3.1).
Poniamo

$$F = \{x \in X |\bigtriangledown g(x)^T d \ge 0\}.$$

Da $d^T Qd \le 0$ e $d \in X_\infty$ segue che $d \in Rec(f, X\backslash F)$. Inoltre se $\{x^k\} \subseteq F$, allora

$$f(x^k - d) \le f(x^k),$$

per tutti i k sufficientemente grandi, di modo che $F \in Retr(f, d)$ □

Proposizione 2.5.2. *Supponiamo che f_0 soddisfi l'ipotesi (A5) e $r = 0$. Se (P) é inferiormente limitato allora esiste il minimo globale.*

La dimostrazione si ottiene dal Lemma 2.5.1 che prova che f_0 soddisfa l'Osservazione 2, che segue il Teorema 2.2.2. Questo é il classico teorema di Frank-Wolfe (Cf. [7]).
In Ref.[4] si afferma che il teorema di Frank-Wolfe é stato esteso al caso di f_0 polinomio di terzo grado su un poliedro.
Il seguente esempio prova che l'estensione non si puó fare per i polinomi di quarto grado.

Esempio 2.4.

$$x_1^2 + (x_1, x_2 - 1)^2 \rightarrow min$$

$$(x_1, x_2) \in R^2$$

Bibliografia

[1] AUSLENDER, A., e TEBOULLE, M., *Asymptotic Cones and Functions in Optimization and Variational Inequalities*, Springer Verlage, New York, NY, 2003.

[2] ANDRONOV, V.G., BELOUSOV, E.G., e SHIRONIN, V.M., *On Solvability of the Problem of Polynomial Programming*, Izvestija Akademii Nauk SSSR, Tekhnicheskaja Kibernetika, No 4, pp. 194-197, 1982 (in Russian). Traslation appeared in News of the Academy of Science of USSR, Department of Technical Sciences, Technical Cybernetics, No. 4, pp. 194-197, 1982.

[3] BAIOCCHI, C., BUTTAZZO, G. GASTALDI, F., e TOMARELLI, F., *General Existence Thorems for Unilateral Problems in Continuum Mechanics*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 100, pp. 149-189, 1998.

[4] BELOUSOV, E.G., e KLATTE, D., *A Frank-Wolfe Type Theorem for Convex Polynomial Programs*, Computational Optimization and Applications, Vol. 22, pp. 37-48, 2002.

[5] BERTEKAS, D.P.,NEDIC, A., e OZDAGLAR,A. E., *Convex Analysis and Optimization*, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 2003.

[6] V.CHECCUCCI, A. TOGNOLI, e E. VESENTINI, *Lezioni di topologia generale* , Feltrinelli, Milano, 1968.

[7] FRANK, M. e WOLFE, P., *An Algorithm for Quadratic Programming*, Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 3, pp. 95-110, 1956.

[8] MANGASARIAN, O., L., *Nonlinear Programming*, McGraw-Hill, New York, NY, 1969.

[9] OZDAGLAR A.E. e TSENG P., *Existence of Global Minima for Constrained Optimization* , Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.128, No.3, pp. 523-546, March 2006.

[10] ROCKAFELLAR, R.T., e WETS, R.J.B., *Variational Analysis*, Springer Verlag, New York, NY, 1998.

[11] ROCKAFELLAR, R.T., *Convex Analysis*, Princeton University Press Princeton, New Jersey, 1970.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare, in primo luogo, il mio relatore Professor Angelo Cavallucci che mi ha permesso di svolgere questa tesi e la disponibilitá dimostrata nei miei confronti.
Ringrazio i miei genitori, che mi hanno sostenuta in questo lungo percorso: mia madre, che ha sempre saputo che ci sarei riuscita e non ha mai smesso di dirmelo e mio padre che con pazienza ha seguito le mie tante scelte.
Ringrazio mia sorella Benedetta che ha sempre gioito con me per le mie vittorie e pianto per le mie sconfitte e che piú di tutti ha dovuto sopportare i miei sbalzi di umore.
Ringrazio mio fratello Riccardo e mia cognata Ylenia per le loro battute, che mi hanno sempre fatto sorridere, ma anche, a modo loro, spronato a continuare, e soprattutto per avermi donato tre splendidi nipoti: un loro sorriso ti ricarica a pieno.
Ringrazio Matteo, che con un solo messaggio é riuscito a farmi capire quello che realmente volevo; per tutte le serate passate a interrogarmi e per le sgridate quando non facevo niente, per gli abbracci quando un esame non passava e i sorrisi quando invece andavano bene.
Vorrei ringraziare la mia numerosa famiglia sparsa per l'Italia e per il mondo: prima di tutto i miei zii, che sempre si sono interessati al mio percorso, consigliandomi e capendomi, in particolare zia Giuliana con la quale voglio condividere questo traguardo, zio Nicola e zia Tiziana che pur a chilometri di distanza mi accompagnano sempre nel mio cammino, zia Maria che mi ha accompagnata da piú vicino. Poi i miei cugini, in particolare Rossella e Daria, la prima perché bastano quelle due volte all'anno che ci vediamo per essere una delle persone che mi conosce di piú, e la seconda perché mi ha sostenuta e sopportata in questo ultimo periodo di universitá.
Ora vorrei ringraziare i miei amici, quelli di Casalecchio di Reno, in particolare,

Tacco, Fulvia, Miriam, Laura, Vanessa, Veronica, Romano, Nico, Glenda, Lara, il gruppo di Anzola, Maury, Mery, Marche, i fratelli Bacco (Manu, Paolo, Marco), Turra, Silvia, Giulia, Alessia, gli amici bolognesi, Agnese, Gabriele e i miei ragazzi della parrocchia, Elisabetta, Francesca, Silvia, Ambra, Jessica, Claudia, Tommaso, Davide, Daniele.
Tutti, a loro modo, sono stati e sono sempre presenti nelle mie avventure, regalandomi un po' di loro.
Infine ringrazio i compagni dell'universitá, in particolare Stefania e Chiara, che mi sono state di fondamentale aiuto con gli esami, ma soprattutto amiche.
Ringrazio il Signore per tutte queste persone che ha messo sul mio cammino e per avermi donato le capacitá per arrivare a questo traguardo, un po' lungo, un po' travagliato, sicuramente tosto, ma senza dubbio importante e che porterá con sé tanti insegnamenti.
GRAZIE.