

Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

Effetto doppler ed applicazioni Astrofisiche

Tesi di Laurea

Presentata da:
Francesco Lauretta

Relatore:
Chiar.mo Prof. Daniele Dallacasa

Sessione III
Anno Accademico 2017/2018

Indice

1	Introduzione	2
2	Effetto Doppler per le onde sonore	2
2.1	O in moto ed S a riposo	2
2.2	S in moto ed O a riposo	3
2.3	O ed S in moto	4
3	Effetto Doppler per la luce	4
3.1	Situazione fisica	6
4	Conseguenze principali in astrofisica	8
4.1	Allargamento delle righe spettrali	8
4.2	Red-shift cosmologico	10
4.3	Red-shift gravitazionale	13
4.4	Binarie spettroscopiche	15

1 Introduzione

L'effetto doppler fu scoperto dall'austriaco Christian Johann Doppler che nel 1842 fece una pubblicazione, affermando che un oggetto luminoso deve cambiare colore se posto in moto rispetto ad un osservatore. Infatti notò, sfruttando un vagone con alcuni musicisti sopra, come il suono variasse in base al moto relativo tra vagone ed osservatore. Un'analisi più dettagliata mostrò che un ascoltatore in moto verso una sorgente sonora ferma rispetto al mezzo di trasmissione, riceve un suono di frequenza maggiore rispetto a quello che ascolterebbe se anche lui fosse a riposo. Viceversa la frequenza è minore se l'ascoltatore si allontana dalla sorgente. Fenomeni analoghi si manifestano se la sorgente si muove rispetto al mezzo di trasmissione mentre l'ascoltatore resta fermo. Oggi sappiamo che questo fenomeno è verificato per qualsiasi tipo di onda meccanica.

2 Effetto Doppler per le onde sonore

2.1 O in moto ed S a riposo

Si fissi un sistema di riferimento cartesiano e si supponga che S ed O, rispettivamente Sorgente ed Osservatore, possano muoversi lungo la loro congiungente a velocità costante. La sorgente a riposo emette il segnale che si propaga uniformemente tramite fronti d'onda e l'osservatore, andando in contro a questa, li vede in numero più elevato, ovvero con una frequenza più alta dipendente dalla velocità rispettiva tra sorgente ed osservatore.

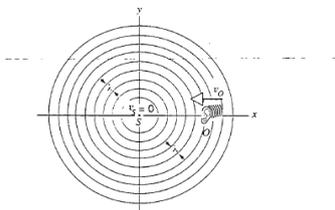


Figura 1: Sorgente a riposo. Osservatore in moto.

Le circonferenze in Figura 1 rappresentano i fronti d'onda emessi dalla sorgente. Ognuno di questi è separato da una certa lunghezza d'onda λ . Se O fosse fermo riceverebbe vt/λ fronti d'onda nel tempo t , ove v è la velocità di propagazione del suono nel mezzo considerato e λ la lunghezza d'onda dei segnali emessi dalla sorgente. Ma essendo O in moto, con velocità v_0 , allora riceve ulteriori v_0t fronti d'onda. Possiamo quindi ottenere la frequenza ν' effettiva vista dall'osservatore sommando i fronti d'onda ricevuti nell'unità di tempo, ovvero

$$\nu' = \frac{\frac{vt}{\lambda} + \frac{v_0 t}{\lambda}}{t} = \frac{v + v_0}{\lambda} \quad (2.1)$$

Riordinando i membri otteniamo

$$\nu' = \nu \frac{v + v_0}{v} = \nu \left(1 + \frac{v_0}{v} \right) \quad (2.2)$$

Si può notare come la frequenza osservata sia pari a quella emessa ma con l'aggiunta di un termine correttivo pari a $\nu(v_0/v)$.

Se l'osservatore si avvicina alla sorgente ($v_0 > 0$) la frequenza osservata da O è quindi maggiore di quella emessa.

Se l'osservatore si allontana dalla sorgente ($v_0 < 0$) la frequenza osservata è quindi minore di quella emessa.

2.2 S in moto ed O a riposo

Intuitivamente potremmo aspettarci che per questo caso valgano le stesse leggi viste in precedenza, magari con un segno variato in qualche formula. Ma in realtà non è così.

Sia v_s la velocità della sorgente e ν la frequenza dell'onda emessa: durante un ciclo S, percorre una distanza pari a v_s/ν riducendo della stessa quantità la lunghezza d'onda.

In questo modo l'osservatore vede una lunghezza d'onda pari a $\lambda' = v/\nu - v_s/\nu$, ed una frequenza

$$\nu' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{(v - v_s)/\nu} = \nu \frac{v}{v - v_s} \quad (2.3)$$

In questo caso il termine correttivo è di $\nu(v/v_s)$.

Se la sorgente si allontana dall'osservatore ($v_s < 0$) la frequenza osservata da O è quindi minore di quella emessa.

Se la sorgente si avvicina all'osservatore ($v_s > 0$) la frequenza osservata da O è quindi maggiore di quella emessa.

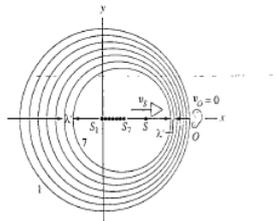


Figura 2: Sorgente in moto. Osservatore a riposo.

2.3 O ed S in moto

In questo caso i due effetti vengono sommati e la frequenza vista dall'osservatore vale

$$\nu' = \nu \frac{v \pm v_0}{(v \mp v_S)} \quad (2.4)$$

dalla quale è possibile ricavare le equazioni (2.2) e (2.3) imponendo $v_0 = 0$ oppure $v_S = 0$ a seconda del caso che vogliamo ricavare.

3 Effetto Doppler per la luce

Saremmo tentati di applicare le equazioni precedenti, imponendo $v = c$, anche nel caso in cui la sorgente emetta un segnale luminoso. Ma giungeremmo ad un errore in quanto il suono si propaga nel mezzo, tramite variazione di pressione del gas, mentre la luce non ha un mezzo di propagazione preferenziale.¹

Questo fa sì che non si possano utilizzare le precedenti equazioni e dobbiamo quindi adottare un ragionamento differente. Partiamo dall'equazione delle onde che nel caso 3-D si può scrivere come:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

Una soluzione di quest'equazione è l'onda piana:

$$\psi = A \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})] \quad (3.2)$$

dove A è l'ampiezza, \vec{k} è il vettore d'onda e ω la pulsazione. Il modulo di \vec{k} è il numero d'onda k , legato alla lunghezza d'onda λ da $\lambda = 2\pi/k$, mentre la frequenza ν è legata alla pulsazione da $\nu = \omega/2\pi$. Possiamo definire la frequenza come il numero di fronti d'onda che passano in un punto P dello spazio nell'intervallo di tempo t .

Le onde si possono dividere in *trasversali* e *longitudinali*: la loro differenza è nella direzione di propagazione dell'onda e delle successive oscillazioni. Nel caso delle onde longitudinali la direzione di propagazione delle oscillazioni è parallela alla direzione del moto. Esempi di onde longitudinali sono le onde sonore e le onde sismiche di tipo P (primarie). Per questo tipo di onde, definito \vec{v} vettore velocità di propagazione e \vec{t}_i , $\forall i = 1, 2$, direzione della propagazione, abbiamo $\vec{v} \cdot \vec{t}_i \neq 0$

Mentre per le onde trasversali, definito \vec{n} direzione normale alla superficie di propagazione, abbiamo $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$. La direzione di propagazione delle oscillazioni è quindi trasversale a quella del moto. Esempi di onde trasversali sono le onde elettromagnetiche, le onde

¹Agli inizi del 900, si pensava che la luce si propagasse nell'*etere* e furono fatti vari esperimenti per verificare la sua esistenza. Tra cui ricordiamo l'esperimento di Michelson-Morley, che dimostrò che la velocità della luce è uguale per qualsiasi sistema di riferimento inerziale e quindi non ha un mezzo preferenziale di propagazione.

sismiche tipo S (secondarie) e le onde magnetosoniche di Alfvén, propagate a seguito di perturbazioni delle linee di campo magnetico.

Esplicitando l'equazione (3.2) dell'onda piana troviamo la funzione d'onda in termini di fase. Per semplicità supponiamo che l'onda si propaghi nel piano xy : $\vec{k} = (k_x, k_y, 0) = (k \cos \theta, k \sin \theta, 0)$. Così facendo otteniamo

$$\begin{aligned}\psi &= A \exp[i(\omega t - kx \cos \theta - ky \sin \theta)] = \\ &= A \exp \left[2\pi i \nu \left(t - \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{c} \right) \right]\end{aligned}\quad (3.3)$$

Possiamo apprezzare al secondo membro un termine esponenziale dipendente dal tempo: la fase dell'onda

$$\phi = \nu \left(t - \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{c} \right) \equiv \left(t - \frac{l}{c} \right) \quad (3.4)$$

che dal punto di vista fisico è un conteggio delle creste d'onda che hanno raggiunto un certo punto P di riferimento nel tempo $t - l/c$. Essendo la fase di un'onda invariante sotto trasformazione di coordinate ², possiamo scrivere

$$\nu \left(t - \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{c} \right) = \nu' \left(t' - \frac{x' \cos \theta' + y' \sin \theta'}{c} \right) \quad (3.5)$$

Se applichiamo le trasformazioni di Lorentz all'eq. (3.5) per riesprimere il secondo membro troviamo:

$$\nu = \nu' \frac{1 + \frac{v}{c} \cos \theta'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.6)$$

$$\nu \cos \theta = \nu' \frac{\cos \theta' + \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.7)$$

$$\nu \sin \theta = \nu' \sin \theta' \quad (3.8)$$

Combinando la (3.7) e (3.8) si ottiene la formula dell'aberrazione della luce ³

²Ciò vuol dire che presi due sistemi di riferimento inerziali K e K', con K' in moto a velocità v rispetto a K, la fase resta invariata per i due possibili osservatori.

³Questo fenomeno fù osservato per la prima volta dall'astronomo James Bradley nel 1728. Poichè la velocità della luce è finita e la terra ruota attorno al sole, la posizione delle stelle è falsata rispetto alla loro posizione reale di un angolo θ .

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\cos \theta' + \frac{v}{c}} \quad (3.9)$$

3.1 Situazione fisica

Prendiamo una sorgente S a riposo nell'origine O di un sistema di riferimento inerziale K che emette un raggio luminoso di frequenza ν_0 che si propaga nel piano xy formando un angolo θ con l'asse x . Adesso prendiamo un secondo sistema di riferimento inerziale K' in moto rispetto a K con velocità v (diretta lungo asse x), ed un osservatore R solidale con K', vedi (figura 3).

L'osservatore R vede il segnale luminoso emesso da S con una frequenza $\nu' \neq \nu_0$. Questo è dovuto all'*effetto Doppler*.

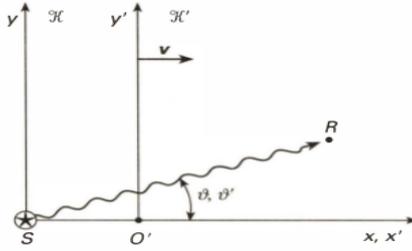


Figura 3: Un raggio luminoso è emesso da una sorgente S posta nell'origine di K. Il ricevitore R è solidale con K' e si allontana dalla sorgente con velocità v .

Invertendo la (3.6) otteniamo una relazione tra ν' , ν_0 e θ' (l'angolo tra la direzione di propagazione del raggio luminoso e il sistema di riferimento dell'osservatore R)

$$\nu' = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta'} \quad (3.10)$$

Dove per $v \ll c$ otteniamo il caso non relativistico

$$\nu' = \frac{\nu_0}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta'} \quad (3.11)$$

Consideriamo adesso il caso in cui il segnale si propaga lungo la direzione del moto relativo della sorgente e del ricevitore, imponendo $\theta' = 0$ nella (3.10).

In questo modo otteniamo l'*Effetto doppler longitudinale*

$$\nu' = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \quad (3.12)$$

dalla quale seguono due casi:

1)ricevitore che si allontana dalla sorgente. In questo caso $v > 0$, quindi la frequenza ch'egli misura risulta essere minore di ν_0 . Parleremo in questo caso di *Redshift*.

2)ricevitore che si avvicina alla sorgente. In questo caso $v < 0$, quindi la frequenza ch'egli misura risulta essere maggiore di ν_0 . Parleremo in questo caso di *Blueshift* ⁴.

Nel caso in cui il segnale si propaga perpendicolarmente alla direzione del moto relativo della sorgente e del ricevitore si ha l'*Effetto Doppler Trasversale*. Imponendo $\theta' = \pi/2$ nella (3.10)

$$\nu' = \nu_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (3.13)$$

Lo stesso risultato non può essere ottenuto dall'equazione non relativistica e nessun cambio di frequenza dovrebbe essere osservato in questo caso. Infatti imponendo $\theta = \pi/2$ nella (3.11) troviamo che $\nu' = \nu$.

Come si può vedere dalla (3.12), l'effetto doppler longitudinale è un effetto del primo ordine in v/c . Sviluppando l'equazione troviamo

$$\nu' = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \simeq \nu_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right) \quad (3.14)$$

Eseguendo lo stesso sviluppo per il caso non relativistico otteniamo il medesimo risultato. Possiamo quindi affermare che, tralasciando i termini di ordine superiore, il cambio di frequenza previsto dalla teoria relativistica è uguale a quello non relativistico

$$\nu' = \frac{\nu_0}{1 + \frac{v}{c}} \simeq \nu_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right) \quad (3.15)$$

Per quanto riguarda l'effetto doppler trasversale il risultato è differente, infatti sviluppando la (3.13) troviamo

$$\nu' \simeq \nu_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) \quad (3.16)$$

Possiamo quindi concludere che l'effetto trasversale è molto più difficile da osservare sia perché è un effetto piccolo, sia perché una minima deviazione dalla perpendicolarità introduce un effetto v/c che tende a mascherare il contributo di v^2/c^2 previsto dall'effetto trasverso.

Per questo tipo di onde non è necessario differenziare i casi in cui è la sorgente oppure

⁴I termini blueshift e redshift derivano dal termine Inglese *shift*, spostamento, e significano rispettivamente: spostamento verso il blu; spostamento verso il rosso. Dove per spostamento intendiamo variazione di frequenza o lunghezza d'onda della radiazione emessa.

l'osservatore a muoversi proprio perché la luce non si propaga in un mezzo preferenziale. Quindi i due casi sono equivalenti.

Un esempio di quanto detto viene rappresentato in Figura 4, dove si può vedere come viene modificato lo spettro di una galassia in base al moto dell'osservatore.

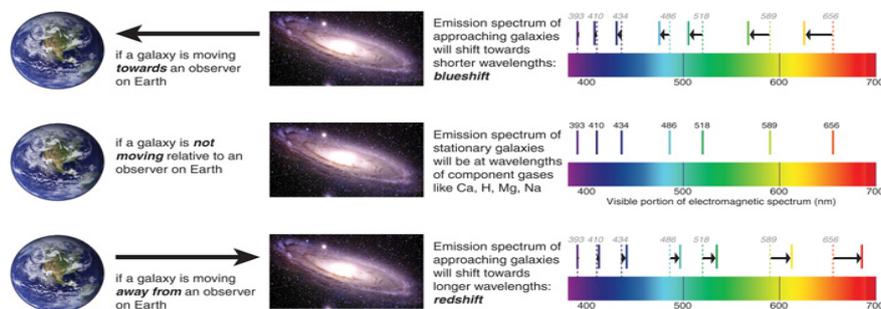


Figura 4: Rappresentazione di come lo spettro di una galassia può variare per via dell'effetto doppler. In alto blueshift. In basso Redshift

4 Conseguenze principali in astrofisica

4.1 Allargamento delle righe spettrali

Quando un sistema effettua una transizione tra due livelli discreti di energia E_2 ed E_1 emette un singolo fotone con frequenza $\nu = (E_2 - E_1)/h$. Questa transizione dovrebbe portare ad una riga spettrale di larghezza ed intensità infinitesima. In realtà la frequenza del fotone emesso non è precisamente determinata e la riga spettrale osservata avrà larghezza ed intensità finita. La larghezza della riga spettrale contiene importanti informazioni sulle caratteristiche del sistema osservato. Per determinare queste righe spettrali utilizziamo uno strumento chiamato spettrografo.

Esistono due tipi di righe (vedi figura 5):

- 1) *Righe in emissione*: gli atomi appartenenti alla sorgente emettono della radiazione che viene assorbita da una nube di gas e poi riemessa.
- 2) *Righe in assorbimento*: tra la sorgente e l'osservatore vi è frapposto un oggetto, quale ad esempio una nube di gas, che assorbe i fotoni emessi dalla sorgente creando delle righe di assorbimento.

La larghezza di una riga spettrale dipende da vari fattori, quali: *allargamento naturale*, o *intrinseco*, dovuto al principio di indeterminazione di Heisenberg; *collisioni* tra atomi e molecole della sorgente che modificano la probabilità di transizione; *allargamento doppler* che in questo caso agisce sulla larghezza della riga. Questi processi agiscono in maniera indipendenti sulla riga spettrale, apportando sostanziali modifiche.

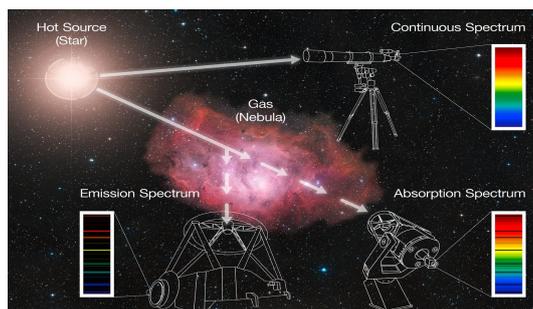


Figura 5: Esempio di riga in emissione; riga in assorbimento; spettro continuo.

La frequenza osservata ν , di un fotone emesso, e la frequenza nel sistema di riferimento a riposo ν_0 , sono legate dalla relazione

$$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{v_r}{c}\right) \quad (4.1)$$

Le sorgenti astrofisiche emettono un numero molto elevato di fotoni che in una classica situazione seguono una distribuzione Maxwelliana delle velocità attorno ad un certo valor medio \bar{v} . In questo caso la probabilità di osservare un fotone con una certa frequenza ν è legato alla probabilità di avere una certa velocità v_r che possiamo ottenere invertendo la (4.1)

$$v_r = c \frac{(\nu - \nu_0)}{\nu_0} \quad (4.2)$$

e quindi ricavare la probabilità

$$P(\nu) \propto \exp\left[-\frac{m_a[v_r - \bar{v}]^2}{2k_B T}\right] \Big|_{v_r=c[\frac{\nu-\nu_0}{\nu_0}]} = \exp\left[-\frac{m_a c^2}{2k_B T} \left(\frac{\nu - \bar{\nu}}{\nu_0}\right)^2\right] \equiv \phi(\nu) \quad (4.3)$$

con

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\Delta\nu\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(\nu - \bar{\nu})^2}{(\Delta\nu)^2}\right] \quad (4.4)$$

dove m_a è la massa dell'atomo che è coinvolto nella transizione e $\bar{\nu} = \nu_0[1 + \frac{\bar{v}}{c}]$. $\phi(\nu)$ definisce la *line profile function*, ovvero il profilo della riga spettrale che segue una distribuzione Gaussiana con picco in $\bar{\nu}$ e costante di normalizzazione $1/(\Delta\nu\sqrt{\pi})$. Dalla (4.4) è possibile dedurre la larghezza della gaussiana, e quindi della riga spettrale che dipende solamente dal modulo della velocità della sorgente. Maggiore sarà la velocità e a frequenze più alte si sposterà il cut-off della riga che quindi vuol dire righe più larghe (vedi figura 6).

In termini di frequenza invece abbiamo

$$(\Delta\nu)^2 = \nu_0^2 \left(\frac{2k_B T}{m_a c^2} \right) \quad (4.5)$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m_a c^2}} \quad (4.6)$$

Dove possiamo ottenere la corrispondente FWHM moltiplicando questo risultato per $2(\ln 2)^{1/2}$.

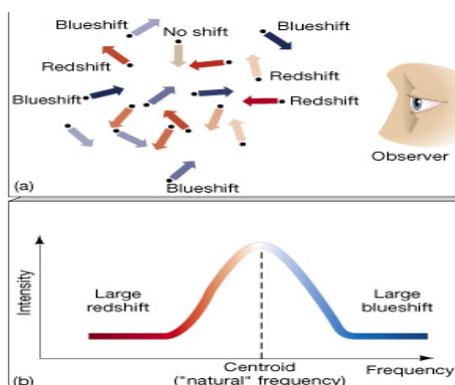


Figura 6: Allargamento della riga dovuto al moto casuale delle particelle

Il profilo della riga viene anche modificato dalla temperatura della sorgente, che più elevata sarà e maggiormente sarà allargata la riga. Facendo il ragionamento inverso si può quindi, tramite l'effetto doppler, calcolare la temperatura della sorgente che ha emesso quei fotoni.

4.2 Red-shift cosmologico

Il modello del big bang prevede che l'universo si sia formato circa 15 milioni di anni fa da una distribuzione omogenea ed isotropa di materia, con temperature e densità molto elevate e da allora è in continua espansione e raffreddamento. La scoperta dell'espansione dell'universo viene attribuita ad Edwin Hubble che, nel 1929 facendo degli studi sulle galassie, si accorse che queste sono quasi tutte in allontanamento da noi, ma non solo, le galassie si allontanano l'una dall'altra con una relazione lineare tra distanza dell'oggetto e velocità di allontanamento. Questo lo si deduce dallo spostamento verso il rosso della radiazione emessa dalle galassie, difatti come precedentemente osservato, una sorgente che si allontana dall'osservatore emette radiazione che produce uno spettro affetto da redshift. Per questo caso l'effetto ultimo sarà uguale ai casi discussi in precedenza ma il

motivo per il quale questo effetto si verifica è differente, poiché adesso è dovuto ad una vera e propria espansione dello spazio e con esso tutto ciò che c'è sopra, onde elettromagnetiche comprese.

Le proprietà geometriche dello spazio tempo possono essere descritte tramite una metrica e nel nostro caso, per un universo omogeneo ed isotropo che si espande, useremo la metrica di Robertson-Walker semplificata con $d\theta = d\phi = 0$

$$ds^2 = (cdt)^2 - a^2(t) \frac{dr^2}{1 - Kr^2} \quad (4.7)$$

Vogliamo descrivere la distanza relativa tra due osservatori situati in un universo con tali caratteristiche. Integrando la radice della (4.7) tra i punti $P_0 = (0, 0, 0)$ e $P = (r, 0, 0)$, statici ($dt = 0$), troviamo la *distanza propria*

$$d_p = \int_0^r \frac{adr'}{\sqrt{1 - Kr'^2}} = a(t)f(r) \quad (4.8)$$

dove $a(t)$ è una funzione del tempo ed è chiamata parametro di espansione; K è il parametro di curvatura; la funzione $f(r)$ descrive la parte spaziale della metrica, ed assume i seguenti valori a seconda del valore di K :

$$\begin{aligned} f(r) &= \text{sen}^{-1}r & (K = 1) \\ f(r) &= r & (K = 0) \\ f(r) &= \text{senh}^{-1}r & (K = -1) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Posso quindi derivare rispetto al tempo la (4.8) in modo da trovare la velocità radiale del punto P rispetto all'origine P_0

$$v_R = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} d_p = H(t) d_p \quad (4.10)$$

quest'ultima equazione è la legge di Hubble, e la quantità

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (4.11)$$

è chiamata costante di Hubble o, più accuratamente, parametro di Hubble poiché non è costante nel tempo essendo dipendente dal fattore di scala $a(t)$.

Il motivo per il quale viene definita come costante è dovuta al fatto che è un valore costante nello spazio. Ciò vuol dire che qualunque osservatore, in qualsiasi punto del-

l'universo esso si trovi ⁵, vedrà gli oggetti allontanarsi da lui con una velocità pari al valore di $H(t)$ che al giorno d'oggi vale

$$H(t_0) = H_0 \simeq 70 \left[\frac{km}{sMpc} \right] \quad (4.12)$$

Definiamo finalmente il redshift di una sorgente luminosa, come ad esempio una galassia distante, con la seguente relazione

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} \quad (4.13)$$

dove λ_0 è la lunghezza d'onda della radiazione della sorgente osservata al tempo t_0 , mentre λ_e è la lunghezza d'onda della radiazione emessa al tempo di emissione t_e con $t_e < t_0$. Vogliamo vedere come si comporta un fotone che viaggia in uno spazio descritto dalla metrica di Robertson-Walker (4.7) e dato che questi viaggiano su geodetiche ⁶ nulle, $ds^2 = 0$. Quindi integrando la radice della (4.7), otteniamo:

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = f(r) \quad (4.14)$$

Se dalla stessa sorgente viene emesso un secondo fotone dopo un tempo δt_e questo verrà ricevuto dall'osservatore ad un tempo $t_0 + \delta t_0$ e supponendo che lo spazio percorso dai due fotoni sia uguale possiamo scrivere

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e + \delta t_e}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (4.15)$$

dove la costante c è stata semplificata da entrambi i membri. Risolvendo l'integrale si ottiene la seguente

$$\frac{t_0}{a_0} - \frac{t_e}{a(t)} = \frac{t_0}{a_0} + \frac{\delta t_0}{a_0} - \frac{t_e}{a(t)} - \frac{\delta t_e}{a(t)} \quad (4.16)$$

$$\frac{\delta t_0}{a_0} = \frac{\delta t_e}{a(t)} \Rightarrow \frac{1}{a_0 \nu_0} = \frac{1}{a(t) \nu_e} \quad (4.17)$$

dove abbiamo assunto $\delta t_0 = 1/\nu_0$ e $\delta t_e = 1/\nu_e$ poichè ν_0 e ν_e sono rispettivamente la frequenza osservata e quella emessa. Posso quindi scrivere

$$a_0 \nu_0 = a(t) \nu_e \Rightarrow \frac{a_0}{\lambda_0} = \frac{a(t)}{\lambda_e} \Rightarrow \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{a_0}{a(t)} \quad (4.18)$$

⁵Questa è una conseguenza naturale del presupposto di partire da un condensato di materia isotropo ed omogeneo.

⁶Per descrivere il moto di corpi nello spazio viene usato il concetto di geodetica. Questa è la curva (se in una varietà curva ci troviamo) di minor lunghezza che coingunge due punti dello spazio.

e dunque λ_e è una misura di quanto sia variato il fattore di scala dall'emissione all'osservazione. Possiamo adesso ricavare z che risulta essere una funzione crescente andando indietro nel tempo, in quanto $a(t_1) < a(t_2)$ con $t_1 < t_2$

$$1 + z = \frac{a_0}{a(t)} \quad (4.19)$$

In questo caso il redshift cosmologico non può essere correlato con l'effetto doppler relativistico, anche se partendo da questo si può ottenere lo stesso risultato. Ciò che cambia è il significato fisico, in quanto un certo spostamento di lunghezza d'onda oppure di frequenza è da associare alla dilatazione dello spazio. Cosa importante è che si prendano in considerazione oggetti molto distanti e quindi ad alto redshift.

4.3 Red-shift gravitazionale

Nel 1783 John Michell e nel 1796 Simon Laplace, utilizzando il concetto di corpuscoli di luce di Isaac Newton, predissero che alcune stelle avrebbero avuto una massa talmente elevata da non permettere alla radiazione di sfuggire. Oggi sappiamo che questo è vero per i buchi neri, mentre è vero in parte per oggetti di massa inferiore ma comunque molto alta. Stiamo parlando dei quasar. Per questi oggetti infatti, la radiazione riesce a fuggire ma viene comunque modificata e perde energia prima di fuggire dal campo gravitazionale della sorgente. L'effetto ha come conseguenza uno spostamento verso il rosso della radiazione emessa. Studieremo questo fenomeno nel caso di uno spazio tempo statico. In questo caso le coordinate sono date da:

$$(x^a) = (x^0, x^\alpha) \quad (4.20)$$

Dove x^0 è il tempo universale, x^α sono le 3 coordinate spaziali. Consideriamo due osservatori che portano orologi atomici ideali le cui linee di universo sono rispettivamente $x^\alpha = x_1^\alpha$ e $x^\alpha = x_2^\alpha$. Supponiamo i due sistemi in relazione, ovvero il primo osservatore mandi radiazione al secondo osservatore. Indichiamo l'intervallo di tempo tra due successive creste d'onda come misurato dal primo orologio con $d\tau$ in funzione del tempo proprio e con dx_1^0 in funzione del tempo coordinato. Segue dalla definizione di tempo proprio che

$$d\tau^2 = g_{ab}(x_1^\alpha) dx_1^a dx_1^b = g_{00}(x_1^\alpha) (dx_1^0)^2 \quad (4.21)$$

Indichiamo il secondo intervallo registrato in ricezione dal secondo osservatore con $\alpha d\tau$ nel tempo proprio e con dx_2^0 nel tempo coordinato. Allora, analogamente

$$(\alpha d\tau)^2 = g_{00}(x_2^\alpha) (dx_2^0)^2 \quad (4.22)$$

L'assunzione che lo spazio tempo sia statico significa che

$$dx_1^0 = dx_2^0 \quad (4.23)$$

perché altrimenti vi sarebbe un aumento o decremento delle creste d'onda tra i due osservatori, violando l'ipotesi di staticità. Dividendo le equazioni (4.21) e (4.22) troviamo

$$\alpha = \left(\frac{g_{00}(x_2^\alpha)}{g_{00}(x_1^\alpha)} \right)^{1/2} \quad (4.24)$$

Questo fattore determina il tempo misurato dal secondo orologio tra la ricezione delle due creste d'onda. Ne segue che se il sistema atomico ha frequenza caratteristica ν_0 , allora il secondo osservatore misurerà una frequenza $\bar{\nu}_0$ per il primo orologio, dove

$$\bar{\nu}_0 = \frac{\nu_0}{\alpha} = \nu_0 \left(\frac{g_{00}(x_1^\alpha)}{g_{00}(x_2^\alpha)} \right)^{1/2} \quad (4.25)$$

In particolare allora

$$g_{00}(x_1^\alpha) < g_{00}(x_2^\alpha) \Rightarrow \bar{\nu}_0 < \nu_0 \quad (4.26)$$

che significa che la frequenza è stata spostata verso il rosso. Abbiamo definito lo spostamento di frequenza come

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\bar{\nu}_0 - \nu_0}{\nu_0} \quad (4.27)$$

Nel caso di campo localmente debole ⁷ abbiamo una metrica così fatta

$$g_{00} \simeq 1 + 2\phi/c^2 \quad (4.28)$$

che inserita nella (4.25) e ci dà

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \simeq \frac{\phi_1 - \phi_2}{c^2} \quad (4.29)$$

Questa mette in evidenza la dipendenza tra la frequenza e il campo, che nel nostro caso sarà gravitazionale. Infatti nel caso particolare della soluzione di Shwarzschild ⁸ diventa

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \simeq -\frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (4.30)$$

Dove r_1 è il raggio della sorgente ed r_2 distanza tra sorgente ed osservatore. Se

$$r_1 < r_2 \Rightarrow \Delta\nu < 0 \quad (4.31)$$

⁷Stiamo assumendo: al di fuori della sorgente considerata uno spazio tempo piatto; la sorgente non generi sul fotone test una forza gravitazionale eccessivamente forte da non permettergli di fuggire dal campo di forze.

⁸Il potenziale può essere approssimato a quello Newtoniano: $\phi = -\frac{GM}{r}$

e quindi la frequenza è spostata verso il rosso. Se consideriamo r_1 come il raggio del Sole e r_2 il raggio dell'orbita terrestre abbiamo

$$\Delta\nu/\nu \simeq -2.12 \times 10^{-6} \quad (4.32)$$

Sorgenti di dimensioni minori, ad esempio le nane bianche, causano uno spostamento doppler più evidente.

4.4 Binarie spettroscopiche

Tramite la radiazione emessa dai corpi è possibile ricavare informazioni sulla temperatura, luminosità, composizione chimica ed altri parametri, ma l'unico modo per determinare la massa di una stella è di studiare l'interazione gravitazionale con altre masse, ad esempio nei sistemi di stelle binarie. In questi sistemi le due stelle ruotano attorno al centro di massa e, nel caso in cui la normale al piano orbitale non sia parallela alla linea di vista di un osservatore esterno, si noterà una variazione periodica della luminosità. Ci sono vari tipi di sistemi binari, ma noi siamo interessati al sistema denominato *binarie spettroscopiche*. In questi casi le righe spettrali di entrambe le stelle del sistema si spostano prima verso il blu, poi verso il rosso, mentre ognuna delle due si muove prima verso di noi e poi allontanandosi da noi, nel suo moto intorno al comune centro di massa. Possiamo quindi sfruttare l'effetto doppler utilizzando la velocità radiale (Eq. 4.2).

Sfruttando le seguenti relazioni riusciamo a ricavare la massa delle stelle del sistema binario

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} \quad (4.33)$$

$$v_{r1} = 2\pi a_1/P \quad (4.34)$$

$$v_{r2} = 2\pi a_2/P \quad (4.35)$$

dove abbiamo assunto una velocità radiale costante, a_1 e a_2 semiasse maggiore delle orbite, P periodo dell'orbita. Risolvendo ripetuto ad a_1 ed a_2 otteniamo seguente relazione

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_{r2}}{v_{r1}} \quad (4.36)$$

Tramite questa possiamo calcolare la massa delle stelle, poiché la velocità può essere calcolata tramite l'effetto doppler.

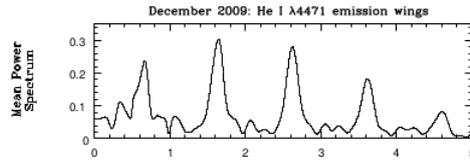


Figura 7: Periodo del sistema binario spettroscopico Plaskett's star (HD 47129).

Riferimenti bibliografici

- [1] Resnick, Halliday, Krane. Fisica 1.
- [2] V. Barone. Relatività Principi e Applicazioni.
- [3] Appunti di lezione del corso di Meccanica dei Continui.
- [4] T. Padmanabhan. Theoretical Astrophysics, Volume I.
- [5] P. Coles, F. Lucchin. The Origin and Evolution of Cosmic Structure.
- [6] Appunti di lezione del corso di Cosmologia.
- [7] R. D'Inverno. Introduzione alla Relatività di Einstein.
- [8] K. Lang. Essential Astrophysics.
- [9] B. Carroll, O. Dale. Introduction to Modern Astrophysics.
- [10] Cornell University Library. arXiv.org. Grafico in Figure 7.