

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI  
BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Matematica

**FRATTALI  
E  
COMPUTER ANIMATION**

**Tesi di Laurea Triennale in Analisi Matematica**

**Relatore:  
Chiar.ma Prof.  
Annamaria Montanari**

**Presentata da:  
Lucia Montanari**

**Terza Sessione  
Anno Accademico 2017/2018**

*Meraviglie senza fine saltano fuori da semplici regole,  
se queste sono ripetute all'infinito.*

*B. Mandelbrot*

# Introduzione

Agli inizi del Novecento il matematico polacco *Benoit Mandelbrot* affrontò alcuni problemi aperti dell'epoca a cui la geometria classica non riusciva a trovare soluzione. Infatti, nonostante la maggior parte dei matematici del XIX secolo ritenessero impossibile qualunque nuova scoperta in ambito geometrico, già nel 1875 il tedesco *Carl Weierstrass* descrisse una particolare curva, a cui diede il nome di curva ellittica, che rappresentava una tale novità da mettere in discussione le nozioni di distanza, area, spazio e addirittura dimensione. Allo stesso modo un suo studente, *Georg Cantor*, e il polacco *Waclaw Sierpinski* ottennero dai loro studi linee e figure di cui non riuscivano a calcolare né lunghezza né area. Inoltre l'italiano *Giuseppe Peano* dimostrò l'esistenza di una curva continua, priva di superficie che, tuttavia, poteva riempire un'intera regione di spazio. In questo scenario Mandelbrot si occupò di studiare le caratteristiche e le applicazioni di tali curve, di cui riconobbe i tratti comuni fondando così una teoria completamente nuova: la *teoria dei frattali*. Coniando il termine *frattale* egli andò ad indicare degli insiemi, apparentemente caotici, governati in realtà da precise regole matematiche, quali avere *proprietà di autosimilarità* e avere una dimensione intermedia, ovvero avere *dimensione di Hausdorff non intera*. All'interno dell'elaborato verranno approfondite tali definizioni fornendo la formalizzazione matematica e le basi teoriche su cui esse si fondano, sottolineando come tali problemi abbiano spinto la ricerca matematica mettendo in discussione le definizioni preesistenti. Uno dei maggiori problemi presi in analisi da Mandelbrot è di natura geografica: il calcolo della lunghezza delle frontiere e delle coste ma-

rine, in particolare quelle della Gran Bretagna. È interessante notare come diversi elementi naturali, non solo le coste marine ma anche nuvole e montagne, siano caratterizzati dalla frastagliatura del bordo, proprietà che li rende oggetti difficili non solo per lo studio, ma anche per la rappresentazione. Allo stesso modo Madelbrot si rese conto che anche altre strutture, come alberi e foglie, mostrano al loro interno proprietà di autosimilarità, ovvero ogni singola parte, ingrandita, appare uguale all'intero. Questo risultò di notevole interesse non solo per i matematici, ma anche per informatici e grafici che, per la prima volta nella storia, furono in grado di creare algoritmi per riprodurre in digitale scenari e paesaggi realistici. Il pioniere di questa rivoluzione fu il giovane *Loren Carpenter*, un informatico che nel 1978 fu incaricato dalla *Boing aircraft* di realizzare un simulatore di volo con uno sfondo montuoso. L'introduzione di algoritmi iterativi e dei nuovi risultati sulla dimensione e misura degli insiemi hanno portato alla realizzazione di immagini digitali sempre più sofisticate, complesse e realistiche.

In questa tesi vengono trattati degli aspetti della teoria frattale, ponendo particolare attenzione ad alcuni dei risultati che sono tutt'oggi utilizzati nella *computer animation*. Partendo dalla definizione formale di frattale vengono descritti gli aspetti analitici e geometrici, mettendo in relazione la scrittura algebrica con la loro rappresentazione sul piano. Inoltre viene presentata la teoria degli *iterated function system*, spazi metrici su cui è applicato un insieme di contrazioni, essendo uno strumento di modellizzazione dei frattali, utile per creare algoritmi che ne relizzano la grafica. L'ultimo capitolo è invece dedicato alle effettive applicazioni, in quanto approfondisce l'uso moderno di queste teorie nel campo dell'informatica.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>1 Descrizione matematica di frattale</b>	<b>1</b>
1.1 Proprietà di autosimilarità . . . . .	1
1.2 Dimensione di Hausdorff . . . . .	6
1.3 Dimensione di un insieme autosimilare . . . . .	10
<b>2 Costruzione geometrica</b>	<b>12</b>
2.1 Dimensione frattale . . . . .	12
2.2 Trasformazioni affini . . . . .	14
2.3 Iterated function system . . . . .	15
2.4 Sistema Dinamico . . . . .	20
<b>3 Computer Animation</b>	<b>23</b>
3.1 Paesaggi frattali . . . . .	23
3.2 Insiemi di Mandelbrot . . . . .	25
3.3 IFS con probabilità . . . . .	29
<b>Bibliografia</b>	<b>31</b>

# Elenco delle figure

1.1	Costruzione del Fiocco di neve di Koch . . . . .	2
1.2	Esempi di $\delta$ -ricoprimenti . . . . .	8
2.1	Trasformazioni su un IFS . . . . .	17
2.2	Triangolo di Sierpinski . . . . .	22
3.1	Fotogramma di Vol Libre . . . . .	24
3.2	Fotogramma di Geri's Game . . . . .	24
3.3	Insieme di Mandelbrot . . . . .	26
3.4	Esempi di frattali al bordo di un insieme Mandelbrot . . . . .	28
3.5	Insieme di Mandelbrot per $z^2 - \lambda$ . . . . .	28

# Capitolo 1

## Descrizione matematica

### 1.1 Proprietà di autosimilarità

Formalmente i frattali sono insiemi autosimili con dimensione di Hausdorff non intera. Una figura frattale, a livello intuitivo, si riconosce perchè contiene al suo interno una ripetizione all'infinito di uno stesso motivo in scala sempre più ridotta. Il modello matematico di questa impressione visiva è la proprietà di autosimilarità, la quale ha come effetto che ad ogni ingrandimento la figura nel dettaglio possiede la stessa struttura del totale. Godere di tale proprietà permette ai frattali di essere costruiti in modo iterativo, ovvero con un metodo basato sulla ripetizione di uno stesso procedimento fisso. Per illustrare meglio questa idea consideriamo l'esempio del *Fiocco di neve di Koch*: la realizzazione consiste nel dividere un segmento in 3 parti congruenti, di cui quella centrale viene poi sostituita da due nuovi segmenti consecutivi di lunghezza pari a quello tolto. Quindi, partendo da un segmento lungo uno, dopo la prima iterazione si ottiene una curva formata da quattro sezioni lunghe  $\frac{1}{3}$ , al secondo passaggio il numero di lati sale a 16 ciascuno di lunghezza  $\frac{1}{9}$ . A partire da questa costruzione risulta evidente come l'estrapolazione di un singolo passaggio abbia la stessa struttura di tutta la curva.

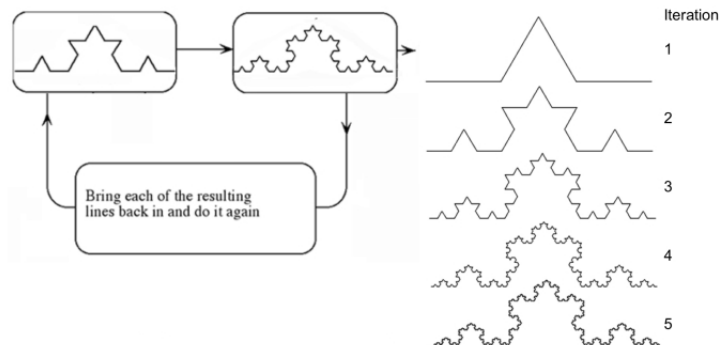


Figura 1.1: Costruzione del Fiocco di neve di Koch

Per dare una formalizzazione e un rigore a questo concetto intuitivo sono tuttavia necessari dei risultati e delle definizioni preliminari.

**Definizione 1.1.** Presa una mappa  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è detta *contrazione* se soddisfa la condizione di lipschizianità con costante  $c \in (0, 1)$ , ovvero se vale  $\|\psi(x) - \psi(y)\| \leq c\|x - y\|$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Poniamo  $L(\psi)$  la costante di contrazione, ovvero la più piccola  $c$  che ne soddisfa la definizione. Un risultato fondamentale sulle contrazioni negli spazi metrici è il seguente teorema:

**Teorema 1.1.** (*Teorema di Banach*)

*In uno spazio metrico completo una contrazione  $\psi$  ha un unico punto fisso, cioè esiste unico un  $\bar{x}$  che soddisfa l'equazione*

$$\bar{x} = \psi(\bar{x}) \quad (1.1)$$

Tale teorema può essere esteso considerando più contrazioni diverse, così da arrivare alla definizione di insieme autosimilare:

**Definizione 1.2.** Sia  $m$  un numero naturale,  $m \geq 2$ ,  $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m\}$  un insieme di contrazioni definite su  $\mathbb{R}^n$  e  $V$  un insieme compatto contenuto in



$\mathbb{R}^n$ , non vuoto. Diciamo che  $V$  è un *insieme autosimilare* se vale

$$V = \bigcup_{i=1}^m \psi_i(V)$$

*Osservazione 1.* Imponendo una condizione aggiuntiva su  $V$ , detta condizione del quadrato, le contrazioni  $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m\}$  trasformano  $V$  in copie in scala di  $V$  stesso, prive di punti comuni.

**Proposizione 1.2.** (*Condizione del quadrato*)

*Esiste un quadrato  $Q$  le cui immagini  $Q_1, \dots, Q_m$  ottenute tramite le rispettive contrazioni  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$  sono tutte propriamente contenute in  $Q$  ed hanno in comune a due a due al più due punti del bordo.*

Un ambiente ottimale in cui andare a studiare la geometria frattale è lo spazio degli insiemi compatti, poichè si possono andare a sfruttare le proprietà metriche e topologiche di cui gode. Indichiamo con  $K(\mathbb{R}^n)$  l'insieme di tutti gli insiemi compatti non vuoti di  $\mathbb{R}^n$ :

$$K(\mathbb{R}^n) = \{K \subseteq \mathbb{R}^n : K \text{ compatto}, K \neq \emptyset\} \quad (1.2)$$

noto anche come *iperpiano*. Ricordiamo alcune definizioni di distanza su  $\mathbb{R}^n$ :

**Definizione 1.3.** Siano  $A, B \in K(\mathbb{R}^n)$ ,

1.  $d(p, A) := \inf \{d(p, a) : a \in A\}$  è la distanza tra un punto e l'insieme  $A$ , dove la distanza tra due punti è quella euclidea.
2.  $d(A, B) := \inf \{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$  è la distanza tra due insiemi
3.  $N_\varepsilon(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) \leq \varepsilon\}$  è detto l'insieme  $\varepsilon$ -collare di  $A$ .

Il lavoro di Hausdorff degli inizi del Novecento fu volto a capire se, a partire da queste definizioni, fosse possibile metrizzare l'iperpiano. Il problema principale in cui incorse fu la verifica della disuguaglianza triangolare, condizione necessaria per definire una metrica: considerando tre insiemi  $A, B, C \in K(\mathbb{R}^n)$  tali che  $A \cap C \neq \emptyset$ ,  $C \cap B \neq \emptyset$  vale che  $d(A, C) = d(C, B) = 0$  e

quindi non è vero che  $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ . Dunque Hausdorff provò a formulare una nuova definizione di distanza tra insiemi:

$$d_H(A, B) = \max \{ \sup d(a, B), \sup d(b, A) \}, \quad (1.3)$$

la forza di questa formulazione è che non solo rende metrico l'iperpiano, ma anche completo, ovvero tutte le successioni di Cauchy a termini in  $K(\mathbb{R}^n)$  convergono ad un punto di  $K(\mathbb{R}^n)$  stesso. Ciò rappresenta la base di uno dei principali risultati sugli insiemi autosimiliari.

**Teorema 1.3.**  *$K(\mathbb{R}^n)$  con la distanza di Hausdorff è uno spazio metrico completo.*

*Dimostrazione.* Sia  $\{A_i\}$  una successione di Cauchy arbitraria in  $K(\mathbb{R}^n)$ ,  $\forall \varepsilon > 0$  poniamo  $m = m(\varepsilon)$  tale che valga  $d_H(A_p, A_q) \leq \varepsilon$ ,  $\forall p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $p \geq q \geq m$ . Dobbiamo provare che  $\{A_i\}$  converge, secondo la distanza di Hausdorff, a un punto di  $K(\mathbb{R}^n)$ . Prendiamo  $k$  intero positivo e poniamo

$$E_k = \overline{\bigcup_{i=k}^{\infty} A_i}$$

Dove ogni  $E_k$  è un insieme compatto e la successione  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  è monotona decrescente, e sia

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k.$$

$E$  appartiene a  $K(\mathbb{R}^n)$  e segue che  $E \subset E_q \subset N_\varepsilon(A_q)$ . Osserviamo che dato  $x \in A_q$  esiste una successione  $\{y_p\} \in A_p$  tale che  $\|x - y_p\| \leq \varepsilon$ ,  $\forall p \geq q$ , perchè  $A_q \subset N_\varepsilon(A_p)$ ; quindi considerando  $z$  punto di accumulazione di  $\{y_p\}$  vale che  $\|x - z\| \leq \varepsilon$ . Inoltre preso  $p \geq k$  abbiamo  $y_p \in A_p \subset E_p \subset E_k$ , ma dato che  $E_k$  è compatto e la scelta di  $k$  è arbitraria  $z \in E$ . Si ha dunque  $x \in N_\varepsilon(\{z\}) \subset N_\varepsilon(E)$ , ne segue che  $d_H(E, A_q) \leq \varepsilon$ . La successione  $\{A_i\}$  dunque converge a  $E$ .  $\square$

**Teorema 1.4.** *Data una famiglia di  $m$  contrazioni  $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m\}$ ,  $m \geq 2$ , esiste un unico insieme autosimilare  $V$ .*

*Dimostrazione.* Definiamo una mappa

$$\begin{aligned} \phi : K(\mathbb{R}^n) &\rightarrow K(\mathbb{R}^n) \\ A &\mapsto \bigcup_{i=1}^m \psi_i(A) \end{aligned} \quad (1.4)$$

dove le  $\psi_i(A)$  sono le immagini di  $A$  tramite le contrazioni  $\psi_i$ . Si osservi che  $\phi$  manda  $K(\mathbb{R}^n)$  in  $K(\mathbb{R}^n)$  perchè l'immagine continua di un compatto è compatta e unione finita di insiemi compatti è compatta. Avendo appena dimostrato che  $K(\mathbb{R}^n)$  è uno spazio metrico completo rimane solo da vedere se  $\phi$  è una contrazione su  $K(\mathbb{R}^n)$ , in tal caso l'insieme autosimilare sarebbe esattamente l'unico punto fisso  $F(\phi) \in K(\mathbb{R}^n)$  esistente. Iniziamo considerando le proprietà di cui godono degli insiemi arbitrari  $A_0, A_1, A_2, A_3 \in K(\mathbb{R}^n)$ :

1.  $d_H(\psi_i(A_0), \psi_i(A_1)) \leq L(\psi_i)d_H(A_0, A_1)$ , dove  $L(\psi)$  è la costante di contrazione
2.  $d_H(A_0 \cup A_1, A_2 \cup A_3) \leq \max \{d_H(A_0, A_2), d_H(A_1, A_3)\}$

Per dimostrare la prima poniamo  $s = d_H(A_0, A_1)$ ,  $\forall x \in A_0, \exists y \in A_1$  tale che  $\|x - y\| \leq s$ . Dalla definizione di contrazione segue:

$$\|\psi_i(x) - \psi_i(y)\| \leq L(\psi_i)\|x - y\| \leq L(\psi_i)s$$

quindi  $\psi_i(x) \in N_{L(\psi_i)s}(\psi_i(A_1))$ , dove  $t$  è  $L(\psi_i)s$ . Avendo scelto  $x$  in modo arbitrario possiamo concludere che in generale  $\psi_i(A_0) \subset N_t(\psi_i(A_1))$ ; con lo stesso ragionamento si ottiene anche l'altra inclusione e la tesi è dimostrata. Per provare la seconda proprietà poniamo, invece,  $s = d_H(A_0, A_2)$  e  $t = d_H(A_1, A_3)$ ; dato che valgono le inclusioni  $A_0 \subset N_s(A_2)$  e  $A_1 \subset N_t(A_3)$  se  $r = \max \{s, t\}$  allora  $A_0 \cup A_1 \subset N_s(A_2) \cup N_t(A_3) \subset N_r(A_2 \cup A_3)$ , così allo stesso modo si ottiene anche l'inclusione inversa. Prendendo quindi due qualsiasi  $A, B \in K(\mathbb{R}^n)$  possiamo sfruttare ripetutamente queste due proprietà ottenendo:

$$d_H(\phi(A), \phi(B)) =$$

$$d_H\left(\bigcup_{i=1}^m \phi_i(A), \bigcup_{i=1}^m \phi_i(B)\right) \leq \max_{1 \leq i \leq m} d_H(\psi_i(A), \psi_i(B)) \leq \left(\max_{1 \leq i \leq m} L(\psi_i)\right) d_H(A, B)$$

ma dato che  $\max_{1 \leq i \leq m} L(\psi_i) < 1$ ,  $\phi$  è effettivamente una contrazione.  $\square$

## 1.2 Dimensione di Hausdorff

Possiamo ora occuparci della seconda parte della definizione di frattale, ovvero quella relativa alla dimensione di Hausdorff non intera. Intuitivamente, la dimensione di un insieme è il numero di parametri indipendenti necessari per descrivere un punto dell'insieme stesso; il modello matematico di questo concetto è la dimensione topologica, tuttavia la particolarità dei frattali risiede nel comportamento anomalo che presentano rispetto a questa definizione di dimensione. Hausdorff, studiando le incongruenze che presentavano questi ultimi, si trovò a dover ridefinire il concetto di dimensione, partendo dalla teoria della misura sviluppata da Lebesgue e Caratheodory. Ricordiamo che la misura di un generico insieme  $X$ , non vuoto, è una funzione  $m : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ , con  $\mathcal{P}(X)$  l'insieme delle parti di  $X$ , per cui valgono le seguenti proprietà:

1.  $m(\emptyset) = 0$
2.  $m$  è monotona: se  $A \subseteq B \subseteq X$ ,  $m(A) \leq m(B)$
3.  $m$  è numerabilmente subadditiva:  $\forall A_k \subseteq X, \forall k \in \mathbb{N}$

$$m\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} m(A_k)$$

L'idea di Hausdorff fu partire ricoprendo l'insieme con un numero finito di palle di  $\mathbb{R}^n$ , andandone poi ad approfondire le caratteristiche.

Per arrivare alla definizione formale di misura e dimensione di Hausdorff abbiamo bisogno di alcuni strumenti preliminari:

**Definizione 1.4.**  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0$ , poniamo

$$\omega_\alpha := \frac{\pi^{\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right)},$$

dove  $\Gamma$  indica la *funzione gamma* di Eulero: per  $s > 0$ ,  $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$ .

Inoltre, preso un  $B \subset \mathbb{R}^n$ , poniamo

$$m_\alpha(B) = \begin{cases} 0 & B = \emptyset \\ \omega_\alpha(r(B))^\alpha & B \neq \emptyset \end{cases}$$

dove  $r(B) := \frac{1}{2} \text{diam}(B) = \frac{1}{2} \{\sup |x - y| : x, y \in B\}$

*Osservazione 2.* Se  $\alpha$  è un numero intero positivo  $\omega_\alpha$  è la misura di Lebesgue  $\alpha$  dimensionale del disco unitario.

**Esempio 1.1.** Consideriamo il disco di  $\mathbb{R}^3$  di centro  $(x, y, z)$  e raggio  $r$ :

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$$

In questo caso  $r(B) = r$  e  $m_\alpha(B) = \omega_\alpha r^\alpha$ , in particolare

$$m_\alpha(B) = \begin{cases} \frac{4}{3} \pi r^3 & \alpha = 3, \\ \pi r^2 & \alpha = 2 \\ 2r & \alpha = 1 \end{cases}$$

**Definizione 1.5.** ( $\delta$ -ricoprimento)

Sia  $A \subset \mathbb{R}^n$  e  $\delta \in \mathbb{R}^+$ , si chiama  $\delta$ -ricoprimento di  $A$  una famiglia  $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$  di sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$  tali che:

1.  $\mathcal{A}$  è finito o numerabile
2.  $\text{diam}(B_k) = \{\sup |x - y| : x, y \in B_k\} \leq \delta, \forall k \in \mathcal{A}$
- 3.

$$A \subseteq \bigcup_{k \in \mathcal{A}} B_k$$

Preso un  $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$   $\delta$ -ricoprimento di  $A$ , definiamo *misura di Hausdorff esterna* di dimensione  $\alpha$  il valore reale:

$$H_\alpha^{(\delta)}(A) := \inf \left\{ \sum_{k \in \mathcal{A}} m_\alpha(B_k) \right\} \quad (1.5)$$

Figura 1.2: Esempi di  $\delta$ -ricoprimenti

Possiamo facilmente notare che la funzione  $\delta \mapsto H_\alpha^{(\delta)}(A)$  ammette limite in  $[0, \infty]$  per  $\delta \rightarrow 0^+$ , in quanto è monotona decrescente; il valore reale esteso di tale limite rappresenta proprio la misura di Hausdorff  $\alpha$  dimensionale:

$$H_\alpha := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\alpha^{(\delta)}(A) = \sup_{\delta > 0} H_\alpha^{(\delta)}(A) \quad (1.6)$$

*Osservazione 3.* Sia  $p \geq 1$  esiste un'iniezione naturale di  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}^{n+p}$ , di conseguenza ogni sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  è anche sottoinsieme di  $\mathbb{R}^{n+p}$ , tuttavia la misura di Hausdorff di  $A$  non dipende dallo spazio euclideo al quale appartiene  $A$ ; infatti vale  $\forall B \subseteq \mathbb{R}^{n+p}$ ,  $m_\alpha(B \cap \mathbb{R}^n) \leq m_\alpha(B)$ .

Così definite  $H_\alpha^{(\delta)}$  e  $H_\alpha$  rispettano la definizione di misura e godono di importanti proprietà di regolarità.

**Proposizione 1.5.**  $H_\alpha^{(\delta)}$  e  $H_\alpha$  sono misure su  $\mathbb{R}^n$ , dove  $H_\alpha$  è una misura metrica rispetto alla distanza euclidea. Infatti vale:

- $H_\alpha^{(\delta)}(\emptyset) = H_\alpha(\emptyset) = 0$
- $H_\alpha^{(\delta)}$  e  $H_\alpha$  sono sub-additive
- $d(A, B) > 0 \Rightarrow (H_\alpha(A \cup B) = H_\alpha(A) + H_\alpha(B))$

**Proposizione 1.6.** Sia  $A \in \mathbb{R}^n$  tale che  $H_\alpha < +\infty$  per un certo  $\alpha \geq 0$ , allora  $H_{\alpha+t}(A) = 0, \forall t > 0$

*Dimostrazione.*  $\forall \delta, t > 0$  e  $\forall (B_k)_{k \in \mathcal{A}}$   $\delta$ -ricoprimento di  $A$ , vale:

$$H_{\alpha+t}^{(\delta)}(A) \leq \sum_{K \in \mathcal{A}} m_{\alpha+t}(B_k) =$$

$$\sum_{k \in \mathcal{A}} \omega_{\alpha+t} \left( \frac{\text{diam}(B_k)}{2} \right)^{\alpha+t} \leq \frac{\omega_{\alpha+t}}{\omega_\alpha} \left( \frac{\delta}{2} \right)^t \sum_{k \in \mathcal{A}} \omega_\alpha \left( \frac{\text{diam}(B_k)}{2} \right)^\alpha$$

ricordando che  $\text{diam}(B_k) \leq \delta$ , inoltre possiamo  $c_{\alpha,t} = \frac{\omega_{\alpha+t}}{\omega_\alpha} 2^{-t}$  e prendiamo l'estremo inferiore rispetto a tutti i  $\delta$ -ricoprimenti di  $A$ , dunque risulta:

$$H_{\alpha+t}^{(\delta)}(A) \leq c_{\alpha,t} \delta^t H^{(\delta)}(A) \leq c_{\alpha,t} \delta^t H_\alpha(A).$$

Per  $\delta \rightarrow 0^+$  l'ultimo membro tende a 0; allora

$$H_{\alpha+t}(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_{\alpha+t}^{(\delta)}(A) = 0$$

**Definizione 1.6.** (Dimensione di Hausdorff)

Preso  $A$  sottinsieme di  $\mathbb{R}^n$  si chiama dimensione di Hausdorff il valore reale positivo

$$\alpha(A) := \inf \{s > 0 : H_s(A) = 0\}$$

Dalla preposizione 1.6 segue che preso un generico  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\forall t > 0$  e  $s = n + t$ ,  $H_s(A) = 0$ , dunque  $\alpha(A) \leq n$ .

**Proposizione 1.7.** *Se  $A$  è un sottinsieme di  $\mathbb{R}^n$  avente dimensione di Hausdorff  $\alpha(A) > 0$ , allora*

$$H_t(A) = \begin{cases} 0 & t > \alpha(A) \\ +\infty & 0 \leq t \leq \alpha(A) \end{cases}$$

*Dimostrazione.* Se  $t > \alpha(A)$  esiste  $s < t$  tale che  $H_s(A) = 0$  e, per la proposizione 1.6,  $H_t(A) = 0$ . Se  $0 \leq t \leq \alpha(A)$  supponiamo per assurdo  $H_s(A) < +\infty$ , si avrebbe, sempre per la 1.6,  $H_s(A) = 0$ ,  $\forall s > t$ , ma per la definizione di dimensione di Hausdorff si avrebbe  $\alpha(A) \leq t$ , assurdo.  $\square$

**Esempio 1.2.** *Se  $a \in \mathbb{R}^n$  allora  $H_0(a) = 1$ . Infatti se  $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$  è un  $\delta$ -ricoprimento di  $A$ , allora*

$$\sum_{k \in \mathcal{A}} m_0(B_k) = \sum_{k \in \mathcal{A}} \omega_0(r(A))^0 = \omega_0 \text{card} \mathcal{A} = \text{card} \mathcal{A} \geq 1$$

*Pertanto  $H_0^{(\delta)}(\{a\}) \leq 1$  per ogni  $\delta > 0$ . Possiamo anche osservare che  $(\{a\})$  è un  $\delta$ -ricoprimento di  $\{a\}$  qualunque sia  $\delta > 0$ , risulta  $H_0^{(\delta)}(\{a\}) \leq m_0(\{a\}) = \omega_0(r\{a\})^0 = 1$ . Allora  $H_0^{(\delta)}(A) = 1, \forall \delta > 0$ , e quindi  $H_0(A) = 1$*

Possiamo ora riprendere in considerazione il *Fiocco di neve di Koch* citato all'inizio, come esempio di frattale, per vedere come si comporta la dimensione di Hausdorff in questi casi. Innanzitutto calcoliamo la misura di Lebesgue dell'insieme: possiamo osservare dalla costruzione che la curva, all'iterazione  $k$ -esima, è un'unione di  $2^{2k}$  intervalli chiusi ciascuno di lunghezza  $(\frac{1}{3})^k$ , di conseguenza la lunghezza totale della curva, a tale iterazione, è  $(\frac{4}{3})^k$ . Dunque la misura di Lebesgue del *Fiocco di neve*  $K$  è

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^k = 0,$$

si tratta, dunque, di un insieme non vuoto di misura di Lebesgue nulla. Se invece procediamo con il calcolo formale, sopra descritto, della dimensione di Hausdorff, prendendo come  $\delta_k$ -ricoprimento della curva semplicemente la famiglia  $\mathcal{S}_k = (I_{k,j})_{j=1, \dots, 2^k}$  di intervalli lunghi  $(\frac{1}{3})^k$  ciascuno, si ottiene  $\alpha(K) = \frac{\ln(4)}{\ln 3} \approx 1,2618$ . Questo è il significato della seconda parte della definizione di frattale, il fatto di non avere una dimensione intera ma frazionaria, nonché l'emblema della particolarità di questi insiemi come oggetti matematici.

### 1.3 Dimensione di un insieme autosimilare

Andando a considerare un insieme di contrazioni  $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m\}$  si può definire la dimensione di similarità, indicata con  $\dim_S(V)$ , del corrispondente insieme autosimilare  $V$ , il quale abbiamo visto essere unico, come la radice positiva dell'equazione:

$$\sum_{i=0}^m (L(\psi_i))^d = 1 \tag{1.7}$$

dove  $L(\psi_i)$  sono, ancora una volta, le costanti di lipschizianità delle contrazioni, nonché l'unico parametro da cui dipende l'equazione in  $d$ . Bisogna tener presente che, nonostante il nome questa quantità non rappresenta effettivamente una dimensione, anche se sotto specifiche condizioni può coincidere con la dimensione di Hausdorff dell'insieme autosimilare  $V$ .



*Osservazione 4.* Notiamo che la funzione  $f(x) = \sum_{i=0}^m (L(\psi_i))^x$  è monotona decrescente perchè  $f(0) = m \geq 2 > f(\infty) = 0$  quindi l'equazione 1.7 ha un'unica radice positiva.

**Teorema 1.8.** *Sia  $V$  un insieme autosimilare e  $\alpha(V)$  la sua dimensione di Hausdorff allora  $\alpha(V) \leq \dim_S(V)$ .*

Ovviamente risolvere un'equazione è meno dispendioso che calcolare la dimensione di Hausdorff, quindi è fondamentale capire quando la disuguaglianza del teorema è di fatto un'uguaglianza. Hutchinson si occupò dell'argomento studiando le contrazioni:

**Definizione 1.7.** (Insieme Aperto)

Diciamo che l'insieme di contrazioni  $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m\}$  soddisfa la condizione di *insieme aperto* se esiste un insieme topologicamente aperto  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $U \neq \emptyset$  tale che per  $1 \leq i \leq m$ ,  $\psi_i(U) \subset U$  e  $\psi_i(U) \cap \psi_j(U) = \emptyset$ , per  $i \neq j$

**Definizione 1.8.** (Contrazione Autosimilare)

Una mappa  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una *contrazione autosimilare* se  $\|x - y\| = L(\psi)\|x - y\|$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ .

**Teorema 1.9.** *Per un insieme autosimilare  $V$  definito da una famiglia di contrazioni similari che soddisfano la condizione di insieme aperto, vale l'uguaglianza  $\alpha(V) = \dim_S(V)$ .*

Concludiamo vedendo l'applicazione di questo teorema alla *Curva di Koch*  $K$ , già descritta precedentemente:  $K$  è un insieme autosimilare, corrispondente alle contrazioni di  $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ :

$$\psi_1(z) = \omega\bar{z}, \psi_2(z) = \bar{\omega}(\bar{z} - 1) + 1$$

con  $\omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{6}$ . Siccome  $L(\psi_1) = L(\psi_2) = |\omega| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , risolvendo

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^d + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^d = 1$$

otteniamo  $\dim_S(K) = \frac{\ln 4}{\ln 3}$ , che è esattamente la dimensione di Hausdorff calcolata al termine della sezione 1.2, questo perchè  $K$  soddisfa la condizione di insieme aperto.

# Capitolo 2

## Costruzione geometrica

### 2.1 Dimensione frattale

Introduciamo un'altra definizione di dimensione, la dimensione frattale: una quantità statistica che indica quanto un frattale appare completo nel riempire lo spazio.

**Definizione 2.1.** Sia  $A \in K(\mathbb{R}^n)$  e sia  $\mathcal{N}(A, \varepsilon)$  il più piccolo numero di palle chiuse di raggio  $\varepsilon > 0$  necessario a coprire  $A$ . Se esiste

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mathcal{N}(A, \varepsilon)}{\ln 1/\varepsilon}$$

$D$  è la *dimensione frattale* di  $A$ .

I seguenti teoremi illustrano due processi per calcolare la dimensione  $D$ , dove è interessante osservare come facciamo passare  $\varepsilon$  da variabile continua a discreta.

**Teorema 2.1.** Sia  $A \in K(\mathbb{R}^n)$  e sia  $\varepsilon_n = Cr^n$ , dove  $r$  e  $C$  sono numeri reali tali che  $0 < r < 1$  e  $C > 0$  e  $n=1,2,3,\dots$ . Allora, se esiste,  $D = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mathcal{N}(A, \varepsilon_n)}{\ln 1/\varepsilon_n}$

*Dimostrazione.* Definiamo  $f(\varepsilon) = \{\varepsilon_n < \varepsilon\}$ , supponiamo  $\varepsilon < r$ , allora  $f(\varepsilon) \leq \varepsilon \leq \frac{f(\varepsilon)}{r}$  e  $\mathcal{N}(A, f(\varepsilon)) \leq \mathcal{N}(A, \varepsilon) \leq \mathcal{N}(A, \frac{f(\varepsilon)}{r})$ . Dato che  $\ln(x)$  è una

funzione crescente per  $x > 1$ , segue

$$\frac{\ln(\mathcal{N}(A, f(\varepsilon)/r))}{\ln(1/f(\varepsilon))} \leq \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)} \leq \frac{\ln(\mathcal{N}(A, f(\varepsilon)))}{\ln(r/f(\varepsilon))}. \quad (2.1)$$

Valutiamo il caso in cui  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}(\mathcal{N}(A; \varepsilon)) = \infty$ , altrimenti il teorema è banalmente vero. Per il membro di destra di 2.1 vale

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\ln(\mathcal{N}(A, f(\varepsilon)))}{\ln(r/f(\varepsilon))} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \varepsilon_n))}{\ln(r/\varepsilon_n)} \right) = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \varepsilon_n))}{\ln(r) + \ln(1/\varepsilon_n)} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \varepsilon_n))}{\ln(1/\varepsilon_n)} \right) \end{aligned}$$

Per il membro di sinistra

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\ln(\mathcal{N}(A, f(\varepsilon)/r))}{\ln(1/f(\varepsilon))} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \varepsilon_{n-1}))}{\ln(1/\varepsilon_n)} \right) = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \varepsilon_{n-1}))}{\ln(1/r) + \ln(1/\varepsilon_{n-1})} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \varepsilon_n))}{\ln(1/\varepsilon_n)} \right) \end{aligned}$$

Quindi i due membri tendono allo stesso valore e applicando il teorema dei due carabinieri si conclude la dimostrazione.  $\square$

**Teorema 2.2.** (*The Box Counting Theorem*) Sia  $A \in K(\mathbb{R}^n)$ . Sia  $\mathcal{N}_n(A)$  il numero di quadrati di lato  $\frac{1}{2^n}$  che ricoprono  $A$ . La dimensione frattale di  $A$ , se esiste, è il valore

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathcal{N}_n(A)}{\ln 2^n}$$

*Dimostrazione.* Osserviamo che per  $m = 1, 2, 3, \dots$

$$2^{-m} \mathcal{N}_{n-1} \leq \mathcal{N}(A, 1/2^n) \leq \mathcal{N}_{k(n)}, \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.2)$$

dove  $k(n) = \min\{k \in \mathbb{Z} : k \geq n - 1 + \frac{1}{2} \log_2 m\}$ . La prima parte della disequazione 2.2 è vera perchè una palla di raggio  $\frac{1}{2^n}$  interseca al massimo  $2^m$  quadrati di lato  $\frac{1}{2^{n-1}}$ , la seconda segue dall'applicazione del teorema di Pitagora, dato che un quadrato di lato  $s$  è contenuto in una palla di raggio  $r$  se  $r^2 \leq (s/2)^2 + (s/2)^2 + \dots + (s/2)^2 = m(s/2)^2$ . Dunque, dato che  $\frac{k(n)}{n} \rightarrow 1$ , e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(2^{-m} \mathcal{N}_{n-1})}{\ln(2^n)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(\mathcal{N}_{n-1})}{\ln(2^{n-1})} \right) = D$$

Segue che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(\mathcal{N}_{k(n)})}{\ln(2^n)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(2^{k(n)})}{\ln(2^n)} \frac{\ln(\mathcal{N}_{k(n)})}{\ln(2^{k(n)})} \right) = D$$

Ponendo  $r = 1/2$  la tesi segue dal teorema precedente.

## 2.2 Trasformazioni affini

Per studiare la geometria frattale bisogna avere dimestichezza con le famiglie di trasformazioni di  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{C}$  e  $\overline{\mathbb{C}}$ , avendo ben chiaro il rapporto tra la formula algebrica e la trasformazione geometrica corrispondente, con una particolare attenzione al comportamento di tutto l'insieme piuttosto che del singolo punto. Una generica trasformazione polinomiale è una funzione reale nella forma  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_Nx^N$ , dove gli  $a_i, \forall i = 1, \dots, N$ , sono coefficienti reali; inoltre se  $a_N \neq 0$ ,  $N \in \mathbb{Z}^+$ , è detto *grado* della trasformazione. Nel capitolo precedente abbiamo parlato di iterazione, possiamo ora darle una definizione precisa riguardo le trasformazioni:

**Definizione 2.2.** Sia  $f : X \rightarrow X$  una trasformazione su un generico spazio metrico  $X$ , le *iterazioni* di  $f$  sono le trasformazioni  $f^n : X \rightarrow X$  definite come  $f^0(x) = x$ ,  $f^1(x) = f(x)$ ,  $f^{(n+1)}(x) = f \circ f^n(x) = f(f^n(x))$

Esistono diversi tipi di trasformazioni, citiamo i più rilevanti nella geometria frattale:

**Definizione 2.3.** (Trasformazione Affine Bidimensionale) Si definisce trasformazione affine bidimensionale una  $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che

$$w(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2 + e, cx_1 + dx_2 + f)$$

con  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ . Equivalentemente si può usare la notazione matriciale:

$$w(x) = w \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = Ax + t$$

Una trasformazione affine è composta da una trasformazione lineare, data dalla matrice  $A$ , che dilata, contrae o ruota l'insieme di partenza, e una traslazione, data dal vettore  $t$ . Inoltre si parla di *rototraslazione* se la matrice  $A$  è nella forma

$$\begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \text{ oppure } \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

per un certo  $r \in \mathbb{R}$  e  $\theta$  angolo compreso tra 0 e  $2\pi$ .

**Definizione 2.4.** (Trasformazione di Möbius) Una trasformazione  $f : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  nella forma

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad ad \neq bc \quad (2.3)$$

è chiamata *trasformazione lineare fratta* o *di Möbius*

## 2.3 Iterated function system

Avendo presente come può essere modificato un insieme di  $\mathbb{R}^2$ , possiamo ora riprendere in considerazione i sottoinsiemi compatti di  $\mathbb{R}^n$ ,  $K(\mathbb{R}^n)$ , e le contrazioni. Introduciamo la teoria dell'*iterated function system*, indicato con *IFS*, che rappresenta semplicemente un insieme finito di contrazioni su uno spazio metrico generico, senza particolari condizioni su tali mappe, che permette di esprimere risultati interessanti per la geometria frattale.

**Definizione 2.5.** (IFS) Un *iterated function system* è un insieme composto da uno spazio metrico completo  $(X, d)$  e un insieme finito di contrazioni  $\psi_i : X \rightarrow X$ , di costanti  $s_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Si scrive  $\{X; \psi_i, i = 1, 2, \dots, N\}$  e il suo fattore di contrazione è  $s = \max \{s_i : i = 1, 2, \dots, N\}$

Un altro modo di pensare una mappa di contrazione su  $K(\mathbb{R}^n)$  è attraverso le *condensazioni*, ovvero trasformazioni  $\psi_0 : K(\mathbb{R}^n) \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$  definite a partire da un insieme  $C$  di  $K(\mathbb{R}^n)$  tali che  $\psi_0(B) = C, \forall B \in K(\mathbb{R}^n)$ , in altre parole contrazioni di costante 0.

*Osservazione 5.* Sia  $\{X, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\}$  un IFS di costante di contrazione  $0 \leq s < 1$ , e sia  $\psi_0$  una condensazione, allora  $\{X, \psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\}$  prende il nome di *IFS con condensazione*.

L'IFS è un sistema fondamentale nella trattazione dei frattali. Andiamo a vedere un teorema che ne riassume le principali proprietà, considerando come spazio metrico  $\mathbb{R}^n$ :

**Teorema 2.3.** *Sia  $\{\mathbb{R}^n; \psi_i, i = 0, 1, \dots, N\}$  un IFS di costante contrattiva  $s$ , allora la trasformazione  $W : K(\mathbb{R}^n) \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$  definita come*

$$W(B) = \bigcup_{i=1}^N \psi_i(B), \forall B \in K(\mathbb{R}^n)$$

*è una contrazione di costante  $s$  sullo spazio metrico completo  $K(\mathbb{R}^n)$  con la distanza di Hausdorff  $d_H$ . Ovvero vale*

$$d_H(W(B), W(C)) \leq s \cdot d_H(B, C), \forall B, C \in K(\mathbb{R}^n)$$

*Inoltre per il suo unico punto fisso,  $A \in K(\mathbb{R}^n)$ , vale  $A = W(A) = \bigcup_{i=1}^N \psi_i(A)$  e*

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n(B), \forall B \in K(\mathbb{R}^n)$$

Questo  $A$  prende il nome di *attrattore* per l'IFS e graficamente è l'immagine risultante dalle trasformazioni dell'insieme iniziale.

**Esempio 2.1.** *Consideriamo l'IFS*

$$\left\{ \mathbb{R}^2; \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}.$$

*Sia  $A_0 = \{(\frac{1}{2}, y) : 0 \leq y \leq 1\}$  e  $W^n = A_n$ , con  $W$  definito su  $K(\mathbb{R}^2)$ . Allora l'attrattore è  $A = \{(x, y) : x = y, 0 \leq x \leq 1\}$  e vediamo il processo grafico correlato:*

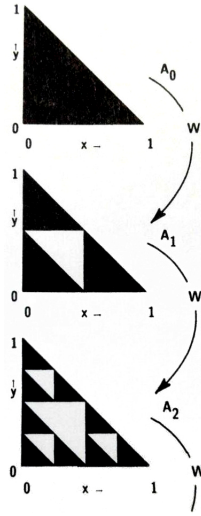


Figura 2.1: Trasformazioni su un IFS

Vediamo come procedere nel caso volessimo determinare l'IFS di cui un certo insieme  $L$  fissato è l'attrattore.

**Teorema 2.4.** (*The Collage Theorem*) Sia  $(\mathbb{R}^n, d)$  spazio metrico completo con la distanza euclidea e sia  $L \in K(\mathbb{R}^n)$ . Prendiamo un  $\varepsilon \geq 0$  e scegliamo un IFS  $\{\mathbb{R}^n; \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\}$  di costante di contrazione  $0 \leq s < 1$ , allora valgono:

$$d_H(L, \bigcup_{i=1}^N \psi_i(L)) \leq \varepsilon d_H(L, A) \leq \frac{\varepsilon}{(1-s)} d_H\left(L, \bigcup_{i=1}^N \psi_i(L)\right) \leq \varepsilon$$

$$d_H(L, A) \leq \frac{\varepsilon}{(1-s)}$$

dove  $d_H$  è la distanza di Hausdorff e  $A$  l'attrattore dell'IFS scelto. Equivalentemente:

$$d_H(L, A) \leq (1-s)^{-1} d_H\left(L, \bigcup_{i=1}^N \psi_i(L)\right) \quad \forall L \in K(\mathbb{R}^n) \quad (2.4)$$

La dimostrazione di questo teorema segue dalla dimostrazione di un lemma generale che vale per ogni spazio metrico:

**Lemma 2.5.** *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico completo e sia  $f : X \rightarrow X$  una contrazione di costante  $0 \leq s < 1$  e sia  $x_f \in X$  il punto fisso di  $f$ . Allora  $\forall x \in X$  vale  $d(x, x_f) \leq (1 - s)^{-1} \cdot d(x, f(x))$*

*Dimostrazione.* La funzione distanza  $d(a, b)$  per un punto  $a \in X$  fissato è continua in  $b \in X$ . Quindi

$$\begin{aligned} d(x, x_f) &= d(x, \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, f^n(x)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n d(f^{(m-1)}(x), f^m(x)) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, f(x))(1 + s + \dots + s^{n-1}) \leq (1 - s)^{-1} d(x, f(x)) \end{aligned}$$

□

Riportiamo ora un altro risultato fondamentale che mostra come piccole variazioni ai parametri comportino piccole variazioni nell'attrattore dell'IFS. Nella realizzazione di modelli e nella creazione di immagini digitali questo fatto assume un valore significativo, in quanto comporta la possibilità di controllare costantemente l'andamento dell'attrattore aggiustando via via i parametri nelle trasformazioni. Questo, inoltre, permette di interpolare tra loro diversi attrattori generando immagini totalmente in digitale, tecnica usata ad esempio nel cinema d'animazione.

**Teorema 2.6.** *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico,  $\{X; \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\}$  un IFS di costante  $s$ . Per  $n = 1, 2, \dots, N$  supponiamo che  $\psi_i$  dipenda in modo continuo da un parametro  $p \in P$ , dove  $P$  è uno spazio metrico compatto. Allora l'attrattore  $A(p)$ , che è un sottoinsieme compatto di  $X$ , dipende in modo continuo da  $p$ , rispettando la metrica di Hausdorff.*

Facciamo ora alcune considerazioni sulla dimensione frattale relativa agli attrattori degli IFS.

**Teorema 2.7.** *Sia  $\{\mathbb{R}^n; \psi_1, \dots, \psi_N\}$  un IFS e sia  $A$  il suo attrattore. Supponiamo che  $\psi_i$  sia una trasformazione di fattore di scalatura  $s_i$  per ogni  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ . Se l'IFS è totalmente sconnesso o connesso solo per un*



punto, allora l'attrattore ha dimensione frattale  $D(A) \in [0, n]$  che è data dalla soluzione unica di

$$\sum_{i=1}^N |s_i|^{D(A)} = 1$$

Se ci restringiamo al caso in cui l'IFS è totalmente sconnesso e i fattori di scala  $s_i$  sono non nulli, possiamo considerare un  $\varepsilon > 0$  e fare due osservazioni:

*Osservazione 6.* Per  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $\psi_i$  è una mappa che manda le palle chiuse di  $\mathbb{R}^n$  in se stesse nel modo seguente:

$$\psi_i(B(x, \varepsilon)) = B(\psi_i(x), |s_i|\varepsilon)$$

Assumendo che ogni  $s_i \neq 0$  e, di conseguenza le  $\psi_i$  siano invertibili, otteniamo:

$$\psi_i^{-1}(B(x, \varepsilon)) = B(\psi_i^{-1}(x), |s_i|^{-1}\varepsilon)$$

Da cui possiamo dedurre che  $\forall \varepsilon > 0$ :  $\mathcal{N}(A, \varepsilon) = \mathcal{N}(\psi_i(A), \varepsilon|s_i|)$ , da cui segue

$$\mathcal{N}(\psi_i(A), \varepsilon) = \mathcal{N}(A, |s_i|^{-1}\varepsilon) \quad (2.5)$$

*Osservazione 7.* L'attrattore  $A$  dell'IFS è l'unione disgiunta delle  $\psi_i$ , ovvero vale:

$$A = \psi_1(A) \cup \psi_2(A) \cup \dots \cup \psi_N(A)$$

dove ogni  $\psi_i(A)$  è un insieme compatto; quindi scegliendo un  $\varepsilon$  appropriato, per un  $x \in \mathbb{R}^2$  e un certo  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$  si trova  $B(x, \varepsilon) \cap \psi_i(A) \neq \emptyset$  tale che  $B(x, \varepsilon) \cap \psi_j(A) = \emptyset, \forall j \neq i$

Ne segue che se  $\varepsilon$  è sufficientemente piccolo vale

$$\mathcal{N}(A, \varepsilon) = \mathcal{N}(\psi_1(A), \varepsilon) + \mathcal{N}(\psi_2(A), \varepsilon) + \dots + \mathcal{N}(\psi_N(A), \varepsilon) \quad (2.6)$$

Quindi mettendo insieme 2.5 e 2.6 si ottiene:

$$\mathcal{N}(A, \varepsilon) = \mathcal{N}(A, \varepsilon|s_1|^{-1}) + \mathcal{N}(A, \varepsilon|s_2|^{-1}) + \dots + \mathcal{N}(A, \varepsilon|s_N|^{-1}) \quad (2.7)$$

Esistono degli algoritmi che generano graficamente l'immagine dell'attrattore di un IFS, di cui due esempi sono l'*algoritmo deterministico* e l'*algoritmo di iterazione random*.

## 1. Algoritmo deterministico

Sia  $\{X; \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\}$  un IFS. Si scelga un insieme compatto  $A_0 \subset \mathbb{R}^2$  e si calcoli ricorsivamente  $A_n = W^n(A)$  nel modo seguente

$$A_{n+1} = \bigcup_{j=1}^n \psi_j(A_n) \quad \text{per } n=1,2,\dots$$

In questo modo si costruisce una sequenza  $\{A_n : n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$ , sottoinsieme compatto di  $X$ , che converge all'attrattore dell'IFS nella metrica di Hausdorff per il teorema 2.3.

## 2. Algoritmo di iterazione random

Sia  $\{X; \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\}$  un IFS. Si scelga  $x_0 \in X$  e si scelga ricorsivamente in modo indipendente

$$x_n \in \{\psi_1(x_{n-1}), \psi_2(x_{n-1}), \dots, \psi_N(x_{n-1})\} \quad \text{per } n=1,2,3,\dots$$

Si costruisce così la sequenza  $\{x_n : n = 0, 1, 2, \dots\} \subset X$ , la quale, sotto specifiche ipotesi di misura, converge all'attrattore dell'IFS.

## 2.4 Sistema Dinamico

Tutta la teoria fino ad ora riportata trova applicazione diretta nella modellizzazione di elementi naturali come montagne, nuvole e altre strutture che non sono geometricamente regolari. Tuttavia, nell'analisi di elementi fisici, bisogna tenere presente la natura dinamica dei fenomeni.

**Definizione 2.6.** Un sistema dinamico è una trasformazione  $f : X \rightarrow X$  su uno spazio metrico  $(X, d)$  e si indica con  $\{X; f\}$ . L'orbita di un punto  $x \in X$  è la successione  $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$

Sia  $\{X; f\}$  un sistema dinamico, allora

1. Se esiste un  $x \in X$  per cui  $f^n(x) = x$ , per un certo  $n$ ,  $x$  è detto *punto periodico di periodo  $n$* , la cui orbita si chiama *ciclo di  $f$* .

2. Un punto di  $X$  si dice *eventualmente periodico* per  $f$  se  $f^m(x)$  è periodico per qualche  $m > 0$ .
3. Sia  $x_f \in X$  il punto fisso di  $X$ , se esiste un  $\varepsilon > 0$  tale che  $f$  manda la palla  $B(x_f, \varepsilon)$  in se stessa ed è una contrazione sulla palla stessa,  $x_f$  si chiama *punto fisso attrattivo*.
4.  $x_f$  è invece detto *punto fisso repulsivo* se esiste un  $\varepsilon > 0$  e  $C > 1$  tale che

$$d(f(x_f), f(y)) \geq Cd(x_f, y), \forall y \in B(x_f, \varepsilon)$$

**Definizione 2.7.** Sia  $\{X, \psi_i, i = 1, 2, \dots, n\}$  un IFS totalmente sconnesso con attrattore  $A$ , la *trasformazione shiftata* di  $A$  è la trasformazione

$$\begin{aligned} S : A &\rightarrow A \\ a &\mapsto \psi_i^{-1}(a) \quad \text{per } a \in \psi_i(A) \end{aligned}$$

Il sistema dinamico  $\{A; S\}$  è detto *sistema dinamico shiftato* associato all'IFS.

Nella teoria dei sistemi dinamici ciò che viene studiato è il movimento, ovvero come si muovono i singoli punti e il comportamento delle loro orbite.

**Esempio 2.2.** Consideriamo il sistema dinamico  $\{\mathbb{R}^2; f\}$  dove  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  è definita nel modo seguente:

$$f(x, y) = \begin{cases} (2x, 2y - 1) & \text{se } y \geq 0.5 \\ (2x - 1, 2y) & \text{se } x \leq 0.5 \text{ e } y < 0.5 \\ (2x, 2y) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il sistema dinamico è associato all'IFS

$$\{\mathbb{R}^2; \psi_1(x, y) = (0.5x, 0.5y+0.5), \psi_2(x, y) = (0.5x+0.5, 0.5y), \psi_3(x, y) = (0.5x, 0.5y)\},$$

il cui attrattore è il triangolo di Sierpinski  $S$  di vertici  $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$ . La relazione tra il sistema dinamico e l'IFS è data dal fatto che  $\{S, f\}$  è il sistema

*dinamico shiftato dell'IFS. Inoltre il sistema dinamico  $\{\mathbb{R}^2; f\}$  è l'estensione a tutto  $\mathbb{R}^2$  del sistema dinamico shiftato  $\{S; f\}$ , infatti è immediatamente verificabile che  $f$  mappa  $S$  in se stesso.*

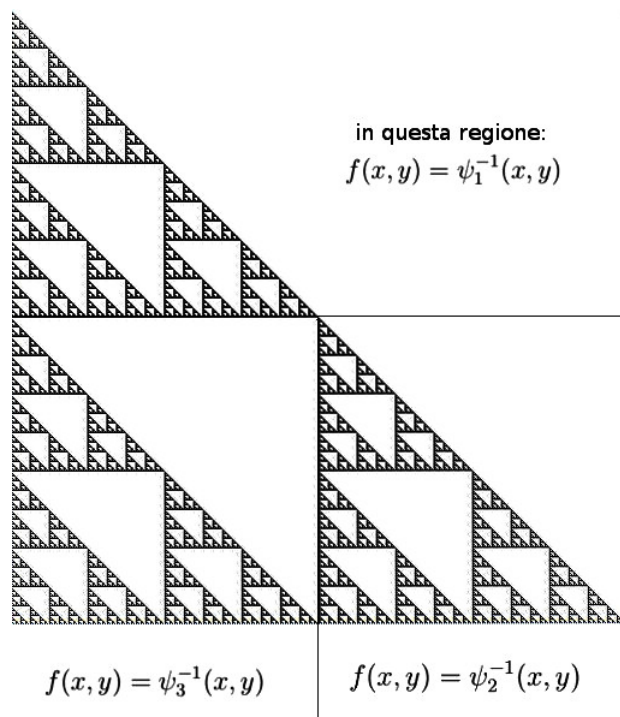


Figura 2.2: Triangolo di Sierpinski

# Capitolo 3

## Computer Animation

### 3.1 Paesaggi frattali

L'opera di Mandelbrot *Les Objets Fractales* del 1975, in cui ha presentato le proprie teorie sui frattali, fu alla base di una rivoluzione nell'animazione digitale. Infatti, a pochi anni dalla pubblicazione di Mandelbrot, il giovane informatico Loren Carpenter, incaricato dalla *Boing aircraft* di realizzare un simulatore di volo, sviluppò degli algoritmi totalmente innovativi, basati sull'iterazione frattale, per creare uno sfondo montuoso. Invece di creare ogni increspatura singolarmente, Carpenter prese un paesaggio composto da quattro macro triangoli, che andò poi a suddividere in quattro triangoli ciascuno, ognuno dei quali venne nuovamente suddiviso in quattro e così via per un alto numero di iterazioni. Il risultato sorprendente di questo processo è una montagna frastagliata, apparentemente irregolare, e decisamente verosimile, che nel 1980 fu poi presentata nel cortometraggio animato *Vol libre*. Il risultato impressionò a tal punto il pubblico che Carpenter fu chiamato presso il set cinematografico di *Star Trek II: L'ira di Khan*, per generare in computer grafica un intero pianeta.





Figura 3.1: Fotogramma di Vol Libre

Un'altra tecnica usata nella computer animation moderna, che sfrutta anch'essa un algoritmo iterativo, è basata sullo *split and average*. Ovvero, a partire da un poligono regolare, si identifica per ogni lato il punto medio, processo di *split*, il quale viene successivamente traslato di un vettore fissato  $v$ , *average*; procedendo iterativamente in questo modo e componendo più poligoni modificati è possibile creare strutture complesse come addirittura figure umane. Uno dei primi esempi dell'uso di questa tecnica è il cortometraggio animato Pixar *Geri's Game* del 1997.

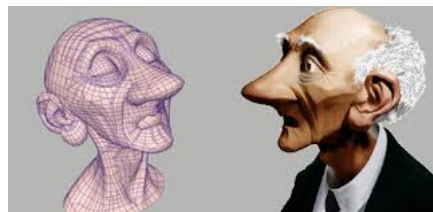


Figura 3.2: Fotogramma di Geri's Game

Questi esperimenti hanno aperto la strada allo studio di algoritmi sempre più sofisticati per manipolare immagini digitali. Vediamo, ad esempio, l'algoritmo iterativo, scritto in linguaggio Python, che realizza il *Triangolo di Sierpinski*:

```
l=int(input('Lato? '))
```

```
#n=int(input('Ordine? '))
import turtle
import math
turtle.goto(-1/2,-1/(2*math.sqrt(2)))
turtle.clear()
def sierpinski(n,l=100):
    '''Disegna il triangolo di sierpinski di ordine n e lato l.'''
    for e in range(3):
        if n>0:
            sierpinski(n-1,l/2)
        turtle.forward(l)
        turtle.left(120)
#sierpinski(n,l)

def sierpinski_hyperadvanced(L):
    i=0
    while True:
        sierpinski(i,L)
        i+=1
turtle.speed(0)
sierpinski_hyperadvanced(1)
```

## 3.2 Insiemi di Mandelbrot

Un procedimento largamente usato in computer grafica sfrutta gli *insiemi di Mandelbrot*. Sia  $P \subset \mathbb{R}^2$  lo spazio dei parametri di una famiglia di frattali, prendiamo la funzione  $A : P \rightarrow K(\mathbb{R}^2)$  tale che  $\forall \lambda \in P$  corrisponde un insieme  $A(\lambda) \in K(\mathbb{R}^2)$ , un modo di vedere come lavora graficamente questa mappa è colorare in modo diverso lo spazio in cui  $A(\lambda)$  è o non è connesso. In questo senso è molto importante il seguente risultato:

**Teorema 3.1.** *Sia  $\{X; \psi_1, \psi_2\}$  un IFS di attrattore  $A$ ,  $\psi_1, \psi_2$  mappe iniettive.*

- Se  $\psi_1(A) \cap \psi_2(A) = \emptyset$  allora  $A$  è totalmente sconnesso.
- Se  $\psi_1(A) \cap \psi_2(A) \neq \emptyset$  allora  $A$  è connesso.

**Definizione 3.1.** (Insieme di Mandelbrot)

Sia  $\{X; \psi_1, \psi_2\}$  una famiglia di IFS che dipende da un parametro  $\lambda \in P \subset \mathbb{R}^2$ , di cui  $A(\lambda)$  rappresenta l'attrattore. Si definisce insieme di Mandelbrot per la famiglia di IFS l'insieme di punti

$$M = \{\lambda \in P : A(\lambda) \text{ è connesso}\}$$

**Esempio 3.1.** Si consideri l'IFS  $\{\mathbb{C}; \lambda z - 1, \lambda z + 1\}$ , dove  $\lambda$  appartiene all'insieme  $P = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C} : \lambda_1^2 + \lambda_2^2 < 1\}$  l'immagine associata all'insieme di Mandelbrot  $M$  è:

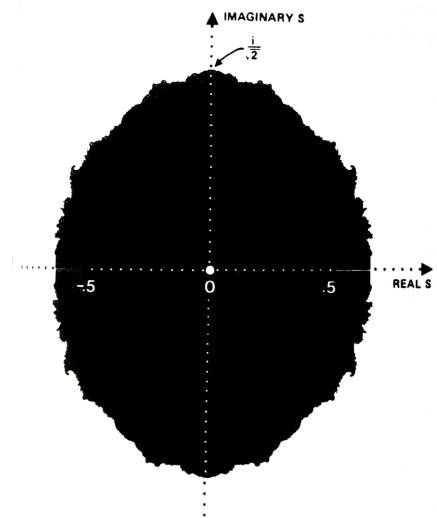


Figura 3.3: Insieme di Mandelbrot

Vediamo l'algoritmo generatore di 3.3, come risultato del teorema 3.1:

1. Scegliere un intero positivo arbitrario  $L$ , che indica il numero di iterazioni volute, tenendo presente che più il valore  $L$  è elevato più l'immagine risultante è accurata.



2. Rappresentare lo spazio di parametri  $P = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$  con una sequenza di pixel.
3. Calcolare il raggio  $R$  della palla centrata nell'origine che contiene l'attrattore, quindi un  $R > 0$  tale che  $A(\lambda) \subset B(0, R)$ .
4. Considerando  $\Psi = \psi_1 \cup \psi_2$ . Calcolare

$$H = \min \{d(x, y) : x \in \psi_1(\Psi^L(\{0\})), y \in \psi_2(\Psi^L(\{0\}))\}.$$

Se  $H \leq 2|\lambda|^{L+1}R$  allora il pixel relativo a  $\lambda$  si assume appartenga ad  $M$  e viene colorato.

*Osservazione 8.* Si tenga presente che l'attrattore dell'IFS è contenuto nell'insieme  $\Psi^{(L+1)}(B(0, R))$ , che consiste in  $2^{L+1}$  palle di raggio  $|\lambda|^{L+1}R$ , i cui centri appartengono a  $\psi_1(\Psi^{L(0)}) \cup \psi_2(\Psi^{L(0)})$ . Se  $H > 2|\lambda|^{L+1}R$  allora  $A(\lambda)$  deve essere disconnesso.

Riportiamo un teorema che descrive il comportamento di  $M$  e della sua frontiera, la cui dimostrazione è basata su stime della dimensione frattale.

**Teorema 3.2.** (*Barnsley 1985*)

*L'attrattore  $A(\lambda)$  di un IFS nella forma  $\{\mathbb{C}; \lambda z - 1, \lambda z + 1\}$  è totalmente sconnesso se  $|\lambda| < 0.5$  ed è connesso se  $1/\sqrt{2} < |\lambda| < 1$ . Il bordo dell'insieme di Mandelbrot associato è contenuto nella corona circolare  $1/2 < |\lambda| < 1/\sqrt{2}$ .*

*Dimostrazione.* Poniamo  $A$  l'attrattore dell'IFS e sia  $D(A)$  la sua dimensione frattale. Le due mappe dell'IFS sono contrazioni di fattore  $|\lambda|$ , quindi si può applicare il teorema 2.7. Supponiamo che  $A$  sia totalmente sconnesso, allora l'IFS è totalmente sconnesso e  $D(A) = \frac{\log(1/2)}{\log(|\lambda|)}$ , ma si può dimostrare che  $D(A) \leq 2$ , quindi  $\frac{\log(1/2)}{\log(|\lambda|)} \leq 2$ , ciò implica che  $|\lambda| \leq 1/\sqrt{2}$ . Supponiamo che  $A$  sia connesso, allora contiene un cammino che congiunge due qualunque punti distinti, la dimensione frattale di un cammino è maggiore o uguale ad 1. Quindi  $D(A) \geq 1$ , da cui segue, dal teorema 2.7,  $1 \leq \frac{\log(1/2)}{\log(|\lambda|)}$ . Da cui segue  $|\lambda| \geq 1/2$ .

Concludiamo mostrando la rappresentazione di alcuni frattali che si trovano alla frontiera dell'insieme di Mandelbrot:

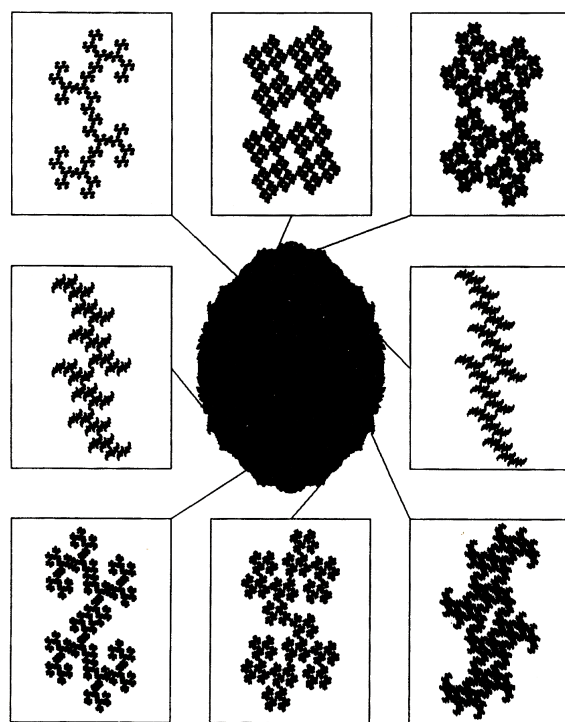


Figura 3.4: Esempi di frattali al bordo di un insieme Mandelbrot

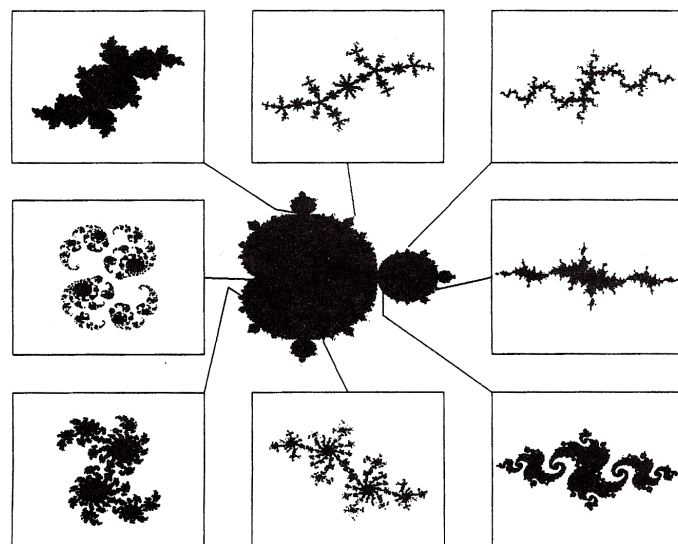


Figura 3.5: Insiemi di Mandelbrot per  $z^2 - \lambda$

### 3.3 IFS con probabilità

Concludendo prendiamo in analisi un particolare tipo di IFS, il quale coinvolge aspetti della teoria della misura e della probabilità. Esso risulta uno strumento essenziale nella generazione di frattali computerizzati, sia per quanto riguarda la creazione dell'immagine sia la sua colorazione.

**Definizione 3.2.** Un *iterated function system* con probabilità è un IFS  $\{X; \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\}$  unito ad un insieme ordinato di numeri  $\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$  tali che  $p_1 + p_2 + \dots + p_N = 1$  e  $p_i > 0, \forall i = 1, \dots, N$ , dove le  $p_i$  sono le probabilità associate alle trasformazioni.

**Esempio 3.2.** Supponendo di considerare trasformazioni nella forma

$$\psi_i \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Il codice dell'IFS di cui l'attrattore è il triangolo di Sierpinski:

$\psi$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$p$
1	0.5	0	0	0.5	1	1	0.33
2	0.5	0	0	0.5	1	50	0.33
3	0.5	0	0	0.5	50	50	0.34

L'algoritmo di iterazione random, nel caso di questi IFS, lavora prima selezionando un arbitrario punto iniziale  $z_0 \in \mathbb{C}$ , poi scegliendo randomicamente una trasformazione tra  $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\}$ , tenendo conto che ogni trasformazione  $\psi_i$  ha probabilità  $p_i$  di essere scelta. La trasformazione scelta viene applicata al punto iniziale trovando un nuovo punto  $z_1 \in \mathbb{C}$ , alla quale poi viene applicata una nuova trasformazione scelta indipendentemente dalla precedente. Tale procedimento continua generando una sequenza di punti, detta *orbita*,  $\{z_0, z_1, \dots, z_k\}$ , dove  $k$  è un intero arbitrario, imposto inizialmente come numero massimo di iterazioni.

Nella rappresentazione di immagini digitali gioca un ruolo molto importante anche l'uso del colore, la cui attribuzione è arbitraria alla base, ma anch'essa sfrutta pesantemente la teoria degli IFS e della misura.

**Teorema 3.3.** *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico compatto e sia*

$$\{X; \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N; p_1, p_2, \dots, p_N\}$$

*un IFS con probabilità. Sia  $(x_n)_{n=0}^{\infty}$  l'orbita di un punto prodotta dall'algoritmo di iterazione random di punto iniziale  $x_0$ , dunque*

$$x_n = \psi_{\sigma_n} \circ \psi_{\sigma_{n-1}} \circ \dots \circ \psi_{\sigma_1}(x_0)$$

*con  $\sigma_i$  permutazioni sugli indici delle mappe che sono scelte in accordo con le rispettive probabilità  $p_i$ . Allora con probabilità 1 vale*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) = \int_X f(x) d\mu(x)$$

*per ogni funzione continua  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e per ogni  $x_0$ .*

**Corollario 3.4.** *Siano  $B \in X$  boreliano e  $\mu(\partial B) = 0$ , inoltre sia  $N(B, n)$  il numero di punti in  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \cap B$ , per  $n = 1, 2, \dots$ . Allora, con probabilità 1, si ha*

$$\mu(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{N(B, n)}{(n+1)} \right\}$$

*per ogni punto iniziale  $x_0$ .*

Attraverso questi risultati possiamo illustrare come viene prodotta un'immagine a colori di un IFS. Partendo da un IFS generico, ad esempio  $\{\mathbb{C}; 0.5z + 24 + 24i, 0.5z; 0.25, 0.5\}$ , una finestra di programmazione e una sequenza di pixel  $P_{ij}$  fissati, si applica inizialmente l'algoritmo di iterazione random che genera l'orbita  $\{z_n : n = 1, \dots, k\}$ . Per ogni coppia  $(i, j)$  il numero di punti,  $N(P_{ij})$ , che sono in relazione con i pixel  $P_{ij}$  sono finiti quindi, ad ogni pixel  $P_{ij}$ , viene assegnato il valore  $\frac{N(P_{ij})}{k}$  e al teorema precedente segue che più  $k$  è grande più il valore attribuito è una buona approssimazione della misura dei pixel. Infine i pixel sono plottati sullo schermo con colori fissati in base alla loro misura.

# Bibliografia

- [1] [Lanconelli, 1997] Ermanno Lanconelli, Lezioni di Analisi Matematica 2, Seconda parte, Pitagora Editrice Bologna, 1997.
- [2] [Yamaguti, Hata, Kigami, 1993] Masaya Yamaguti, Masayoshi Hata, Jun Kigami, Mathematics of Fractals, American Mathematical Society, vol. 167, 1993.
- [3] [Falconer, 1985] K.J. Falconer, The geometry of fractal sets, Cambridge University Press, 1985.
- [4] [Mandelbrot, 1982] Benoit B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature, W.H. Freeman and Company, 1982.
- [5] [Barnsley, 2012] Michael F. Barnsley, Fractals Everywhere New Edition, Dover Publications, 2012

## SITI WEB

- [6] Luigi Orsina, Teorema delle contrazioni e sistemi di funzioni iterate,  
URL:<http://www1.mat.uniroma1.it/people/orsina/Frattali.pdf>
- [7] Alessandro Fonda, Elementi di analisi superiore, Appunti del corso  
URL:<http://www.dmi.units.it/fonda-elementi-analisi-superiore.html>
- [8] Frattali autosimili  
URL: <http://www-dimat.unipv.it/gilardi/WEBGG/PSPDF/frattali.pdf>