

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

IL TEOREMA DI GAUSS-BONNET

Tesi di Laurea in Geometria

Relatore:
Chiar.mo Prof.
SERGIO VENTURINI

Presentata da:
STEFANO BOTTEGHI

II Sessione
Anno Accademico 2016/2017

Alla mia famiglia

Introduzione

La tesi tratta del teorema di Gauss-Bonnet per superfici astratte.

L'elaborato ha come finalità la dimostrazione di tale teorema, sia da un punto di vista locale, sia da un punto di vista globale. Il teorema di Gauss-Bonnet locale studia curve chiuse in un intorno coordinato di una superficie differenziabile orientata qualsiasi, mettendo in relazione la curvatura gaussiana della superficie, la curvatura geodetica della curva e la somma degli angoli nei punti di singolarità della curva. Globalmente invece il teorema esprime una relazione tra l'integrale della curvatura gaussiana rispetto all'elemento d'area della superficie e una costante topologica detta caratteristica di Eulero.

Per raggiungere tali risultati affronteremo lo studio di concetti quali la connessione, il fibrato tangente e il fibrato vettoriale. Vedremo in particolare come introdurre una struttura di fibrato vettoriale in rette complesse sul fibrato tangente di una superficie orientata, e useremo abbondantemente nella dimostrazione questo strumento.

Indice

Introduzione	i
1 Preliminari	1
2 Connessione di Levi-Civita	7
2.1 Coefficienti di Christoffel	7
2.2 Struttura complessa sul fibrato tangente	9
2.2.1 Struttura complessa sul fibrato tangente	12
2.2.2 Coefficienti di Christoffel sul fibrato in rette complesse	13
2.3 Curvatura Gaussiana e Curvatura Geodetica	15
2.3.1 Curvatura gaussiana di una superficie	15
2.3.2 Curvatura geodedetica di una curva	16
3 Teorema di Gauss-Bonnet	19
3.1 Indice tra due sezioni	20
3.2 Teorema di Gauss-Bonnet locale	21
3.2.1 Esempi	24
3.3 Teorema di Gauss-Bonnet globale	25
3.3.1 Indici locali di campi di vettori	27
3.3.2 Caratteristica di Eulero e topologia	28
Bibliografia	33

Capitolo 1

Preliminari

In questo capitolo introdurremo alcuni concetti fondamentali che ci serviranno nel seguito:

Definizione 1.1. Dato uno spazio topologico \mathbf{X} , chiamiamo *atlante* una famiglia di coppie $\mathbf{U} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$, dove $\{U_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto e per ogni i , $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$, è un omeomorfismo con V_i aperto di \mathbb{R}^q ; inoltre per $i, j \in I$ se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ allora la mappa $\phi_j^{-1} \circ \phi_i : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$ è un diffeomorfismo di classe C^∞ .

Le coppie (U_i, ϕ_i) si dicono *carte dell'atlante* \mathbf{U} .

Le funzioni $\phi_j^{-1} \circ \phi_i$ si dicono *funzioni di transizione*.

Definizione 1.2. Sia \mathbf{X} uno spazio topologico di Hausdorff, con Atlante \mathbf{U} . Chiamiamo *q-varietà differenziabile* (\mathbf{X}, \mathbf{U}) , dove $q = \dim(M)$ si dice dimensione della varietà.

Nel seguito chiameremo *varietà differenziabile* o semplicemente *varietà* il solo spazio \mathbf{X} .

Definizione 1.3. Sia (\mathbf{X}, \mathbf{U}) una varietà differenziabile, $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{C}$. Diciamo che f è *differenziabile* se per ogni ϕ_i , $f \circ \phi_i^{-1} : V_i \rightarrow \mathbb{C}$ è differenziabile.

Definizione 1.4. Siano X, Y due varietà, $f : X \rightarrow Y$ si dice *differenziabile* se per ogni funzione differenziabile $g : Y \rightarrow \mathbb{C}$, $g \circ f$ è differenziabile su X nel senso della definizione 1.3.

Se A è aperto in \mathbf{X} , allora la famiglia $\{(U_i \cap A, \phi_i)\}$ forma un atlante su A ; quindi ogni aperto di \mathbf{X} è esso stesso una varietà differenziabile.

Sia \mathcal{F}_p l'insieme delle funzioni differenziabile in un intorno di p . Si definisce su \mathcal{F}_p la somma ed il prodotto come somma e prodotto di funzioni $V_i \rightarrow \mathbb{K}$.

Definizione 1.5. Chiamiamo *Vettore Tangente a p* su una varietà \mathbf{X} una funzione $D : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

D deve essere \mathbb{R} -lineare, i.e. $D(\alpha f + \beta g) = \alpha D(f) + \beta D(g)$ per ogni scalare α, β e per ogni funzione differenziabile f, g ;

$$D(fg) = f(p)D(g) + g(p)D(f)$$

Definizione 1.6. Definiamo *Spazio Tangente a p* su una varietà M e indichiamo con $T_p M$ l'insieme dei vettori tangenti sul punto p

Osservazione 1. La definizione 1.6 è ben posta in quanto $T_p M$ verifica le proprietà di spazio vettoriale su \mathbb{K} , inoltre si può dimostrare che la dimensione di $T_p M$ come spazio vettoriale coincide con la dimensione della varietà. Si veda la proposizione 2.3.21 del testo di Geometria Differenziale [4].

Definizione 1.7. Sia M è una varietà. Chiamiamo TM la famiglia:

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M \quad (1.1)$$

L'applicazione $\pi : TM \rightarrow M$ tale che $\forall p \in M, \forall t \in T_p M$ valga $\pi(t) = p$ è detta *proiezione di TM su M* .

Chiamiamo *fibrato tangente* la coppia (TM, π)

Definizione 1.8. Sia M una varietà differenziabile, un *fibrato vettoriale su \mathbb{K}* , dove $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} , di rango k , è costituito da una coppia (E, π) , dove E è una varietà differenziabile E e $\pi : E \rightarrow M$ è una mappa differenziabile con

le proprietà seguenti:

per ogni $p \in M$ l'insieme $E_p = \pi^{-1}(p)$, detto *fibra*, ha la struttura di spazio vettoriale di dimensione k indipendente da p ;

esiste un ricoprimento di M con aperti U_j e diffeomorfismi $\phi_j : \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times \mathbb{K}^k$ con la proprietà che, per ogni $p \in U_j$, $\phi_j : E_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{K}^k \cong \mathbb{K}^k$ è un isomorfismo lineare, e se $U_{jl} = U_j \cap U_l \neq \emptyset$ le funzioni di transizione

$$\phi_l \circ \phi_j^{-1} : U_{jl} \times \mathbb{K}^k \rightarrow U_{jl} \times \mathbb{K}^k$$

sono della forma $(p, \xi) \mapsto (p, A_{j,l}(p)\xi)$, dove $A_{j,l}(p) \in GL(r, \mathbb{K})$

Osservazione 2. Il fibrato tangente è un esempio di fibrato vettoriale reale di rango pari alla dimensione della varietà.

Definizione 1.9. Una sezione di E sulla varietà M è una applicazione differenziabile $s : M \rightarrow E$ tale che $s \circ \pi = id_M$.

Le sezioni del fibrato tangente TM sono dette *campi di vettori*.

Le sezioni del fibrato banale $M \times \mathbb{K}^n$ sono in corrispondenza con le funzioni $f : M \rightarrow \mathbb{K}^n$.

Le sezioni del fibrato duale di TM sono le 1-forme differenziali.

Indichiamo con $\Gamma(M, E)$ l'insieme delle sezioni $s : M \rightarrow E$.

Definizione 1.10. Sia E un fibrato vettoriale di rango r su una varietà M , sia U un aperto. Si definisce *base locale di E su U* , una famiglia di sezioni $\xi_1, \dots, \xi_r \in \Gamma(U, E)$ tali che $\xi_1(p), \dots, \xi_r(p)$ sia una base di E_p per ogni $p \in U$.

Osservazione 3. Se (x_1, \dots, x_n) è un sistema di coordinate locali su M , allora $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ formano una base locale del fibrato tangente.

Proposizione 1.0.1. Sia $X \in \Gamma(M, TM)$ un campo di vettori, poniamo $\tilde{X} : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ l'applicazione definita da:

$$\tilde{X}(f)(p) = X(p)(f) \tag{1.2}$$

allora \tilde{X} è una \mathbb{K} -derivazione di $C^\infty(M)$, cioè:

- è lineare: $\tilde{X}(\alpha f + \beta g) = \alpha \tilde{X}(f) + \beta \tilde{X}(g)$
- soddisfa la regola di Leibniz $\tilde{X}(fg) = \tilde{X}(f)g + f\tilde{X}(g)$

Viceversa, se $\tilde{X} : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ è una \mathbb{K} -derivazione di $C^\infty(M)$, allora \tilde{X} è indotta da un campo di vettori

Dimostrazione. Si veda la proposizione 3.3.2 del testo Geometria Differenziale [4] □

Nel seguito identificheremo X con \tilde{X} .

In modo analogo possiamo identificare le applicazioni $\tilde{\omega} : \Gamma(M, TM) \rightarrow C^\infty(M)$ con le 1-forme $\omega : M \rightarrow T_p^*M = (T_p M)^*$ grazie alla seguente proposizione:

Proposizione 1.0.2. *Sia $\omega \in \Gamma(M, T_p^*M)$ una 1-forma, allora ω induce univocamente una applicazione $\tilde{\omega} : \Gamma(M, TM) \rightarrow C^\infty(M)$, definita come:*

$$\tilde{\omega}(X)(p) = \omega(p)(X(p))$$

che sia lineare:

$$\tilde{\omega}(fX + gY) = f\tilde{\omega}(X) + g\tilde{\omega}(Y)$$

per ogni f, g funzioni scalari, X, Y campi di vettori

Definizione 1.11. Sia (E, π) , dove $\pi : E \rightarrow M$, un fibrato vettoriale, chiamiamo *Derivata Covariante* o *Connessione* su E una mappa

$$\nabla : \Gamma(M, TM) \times \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, E) \quad (1.3)$$

$$(X, s) \mapsto \nabla_X s$$

che verifica le proprietà seguenti:

dati X, Y campi vettoriali, u, v sezioni, e f, g funzioni scalari,

$$\nabla_{(fX+gY)}(u) = f\nabla_X(u) + g\nabla_Y(u) \quad (1.4)$$

$$\nabla_X(u+v) = \nabla_X(u) + \nabla_X(v) \quad (1.5)$$

$$\nabla_X(fu) = f\nabla_X(u) + (Xf)u \quad (1.6)$$

Dati $(E_1, \pi_{E_1}), (E_2, \pi_{E_2})$ due fibrati vettoriali su M , definiamo il prodotto su M tra i due fibrati ponendo:

$$E_1 \times_M E_2 = \{(\xi_1, \xi_2) \in E_1 \times E_2 \mid \pi_{E_1}(\xi_1) = \pi_{E_2}(\xi_2)\} = \bigcup_{p \in M} E_{1p} \times E_{2p}$$

Definizione 1.12. Sia M una varietà. Chiamiamo *metrica Riemanniana* una applicazione differenziabile

$$g : TM \times_M TM \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che

$$\forall p \in M, g|_{T_p M} : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

sia bilineare simmetrica e definita positiva.

Una coppia (M, g) con g metrica sulla varietà M si dice *varietà Riemanniana*. Chiameremo *superfici* le varietà Riemanniane di dimensione 2.

Data una metrica g , e un sistema di coordinate locali (x_1, \dots, x_k) indicheremo con $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$, i coefficienti della matrice associata alla metrica g rispetto alla base $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}\}$.

Notazione 1. Se M è una superficie talvolta useremo le seguenti notazioni:

$$E = g_{11}, F = g_{12}, G = g_{22}$$

Teorema 1.0.3. *Sia M una superficie con metrica g e sia p un punto di M , allora esiste un sistema di coordinate (u, v) intorno a p in cui la metrica si scrive come*

$$\lambda(du^2 + dv^2).$$

Tali coordinate si dicono conformi o isoterme.

Per la dimostrazione si veda il quinto capitolo del Taylor [1].

Teorema 1.0.4. *Sia M una varietà Riemanniana con metrica g . Esiste un'unica connessione ∇ su M che verifica le seguenti proprietà. Per ogni X, Y, Z campi di vettori:*

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) \quad (1.7)$$

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad (1.8)$$

Dove $[X, Y]$ è la parentesi di Lie definita come l'unico campo di vettori che verifica:

$$\widetilde{[X, Y]} = \widetilde{X} \circ \widetilde{Y} - \widetilde{Y} \circ \widetilde{X} \quad (1.9)$$

Tale connessione è detta *connessione di Levi-Civita*

Dimostrazione. Supponiamo prima l'esistenza di una tale connessione ∇ e dimostriamone l'unicità. Calcoliamo:

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \quad (1.10)$$

$$Yg(Z, X) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X), \quad (1.11)$$

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y). \quad (1.12)$$

Sommando 1.10 e 1.11 e sottraendo 1.12, e usando 1.8, otteniamo

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) &= \\ &= g([X, Z], Y) + g([Y, Z], X) + g([X, Y], Z) + 2g(Z, \nabla_Y X). \end{aligned}$$

E dunque

$$\begin{aligned} g(Z, \nabla_Y X) &= \frac{1}{2} (Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ &\quad - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X) - g([X, Y], Z). \end{aligned} \quad (1.13)$$

L'espressione 1.13 mostra che ∇ è univocamente determinata dalla metrica g . Quindi, se esiste, è unica.

L'esistenza si prova facilmente definendo ∇ come in 1.13, mostrando che è ben definita e verificando le condizioni che definiscono una connessione. \square

Enunciamo ora una proposizione che tornerà utile più avanti, per la dimostrazione si fa riferimento al testo di Geometria Riemanniana del Do Carmo [3].

Proposizione 1.0.5. *Sia M una varietà, sia ω una 1-forma su M , allora se X, Y sono campi di vettori, vale la formula:*

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) \quad (1.14)$$

Capitolo 2

Connessione di Levi-Civita

2.1 Coefficienti di Christoffel

Proposizione 2.1.1. *Sia M una varietà, E un fibrato su M di rango r , sia $\{\xi_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,r}$ una base locale, definita su un aperto U . Allora sono univocamente determinate delle 1-forme differenziali Γ_α^β su U , tali che per ogni campo di vettori X vale:*

$$\nabla_X \xi_\alpha = \sum_{\beta=1}^r \Gamma_\alpha^\beta(X) \xi_\beta. \quad (2.1)$$

Chiameremo Γ_α^β le *forme di connessione associate alla base locale* $\{\xi_\alpha\}$

Dimostrazione. $\nabla_X \xi_\alpha$ è un elemento di E , quindi si può scrivere come combinazione lineare degli elementi della base. Le applicazioni Γ_α^β sono lineari per le proprietà della connessione ∇ , e dunque per la proposizione 1.0.2, possiamo identificarle univocamente con le 1-forme. \square

Definizione 2.1. Sia M una varietà, E un fibrato su M , sia $\{\xi_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,r}$ una base locale definite su un aperto U , se fissiamo su M un sistema di coordinate locali (x_1, \dots, x_q) , definiamo i coefficienti di Christoffel $\Gamma_{i\alpha}^\beta$ mediante l'identità:

$$\Gamma_\alpha^\beta = \sum_{i=1}^q \Gamma_{i\alpha}^\beta dx_i \quad (2.2)$$

Osseviamo che vale:

$$\Gamma_{i\alpha}^\beta = \Gamma_\alpha^\beta \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \quad (2.3)$$

Proposizione 2.1.2. *Sia M una superficie con metrica g e siano (u, v) coordinate isoterme su M . Allora i coefficienti di Christoffel della connessione di Levi-Civita associata a g in tale sistema di coordinate, sono dati dalle formule seguenti:*

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{\lambda_u}{2\lambda} & \Gamma_{11}^2 &= -\frac{\lambda_v}{2\lambda} \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{\lambda_v}{2\lambda} & \Gamma_{12}^2 &= \frac{\lambda_u}{2\lambda} \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{\lambda_u}{2\lambda} & \Gamma_{22}^2 &= \frac{\lambda_v}{2\lambda} \end{aligned}$$

Dimostrazione. Per la prima equazione osserviamo che:

$$\begin{aligned} \lambda_u &= \frac{\partial \lambda}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} g \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right) = 2g \left(\frac{\partial}{\partial u}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial u} \right) = \\ &= 2g \left(\frac{\partial}{\partial u}, \Gamma_{11}^1 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial}{\partial v} \right) = 2 \left(\Gamma_{11}^1 g_{11} + \Gamma_{11}^2 g_{12} \right) = 2\Gamma_{11}^1 \lambda \end{aligned}$$

Da cui otteniamo $\Gamma_{11}^1 = \frac{\lambda_u}{2\lambda}$.

Le altre equazioni si ottengono in modo totalmente analogo. \square

2.2 Struttura complessa sul fibrato tangente

Definizione 2.2. Consideriamo una varietà M con atlante \mathbf{U} . \mathbf{U} si dice *orientato* se i determinanti degli Jacobiani delle funzioni di transizione sono funzioni positive.

Se \mathbf{U} è orientato la varietà (M, \mathbf{U}) si dice *orientata*.

Definizione 2.3. Una varietà M si dice *orientabile* se ammette un atlante orientato.

Vogliamo ora introdurre una struttura di fibrato complesso di rango 1 sul fibrato tangente ad ogni superficie orientata.

In ogni punto della varietà il piano tangente è uno spazio vettoriale reale di dimensione 2. Definiamo sullo spazio tangente un operatore di rotazione di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario che chiameremo J , che porti ogni vettore nel suo ortogonale mantenendo costante la norma e l'orientazione. Osserveremo che $J^2 = -I$, dove I è l'identità sul tangente, e questo ci permetterà di identificare lo spazio tangente con uno spazio vettoriale complesso di dimensione 1, andando a costruire una relazione tra l'operatore J e il coefficiente immaginario i .

Proposizione 2.2.1. *Sia M una superficie orientata, e sia g una metrica su M , allora $\exists! J : TM \rightarrow TM$ tale che:*

- $\forall p \in M \ J : T_p M \rightarrow T_p M$
- $\forall \xi \in TM \ g(\xi, J\xi) = 0, \ g(\xi, \xi) = g(J\xi, J\xi)$
- $\forall \xi \in TM, \ \xi \neq 0, \ \{\xi, J\xi\}$ è una base di $T_p M$ orientata positivamente

Dimostrazione. Sia p un punto di M , e sia ξ un elemento di $T_p M$, allora esistono due vettori in $T_p M$, ortogonali a ξ , con la stessa norma di ξ , ma solo uno dei due forma con ξ una base orientata positivamente. \square

Sia M una superficie con metrica g . Sia (u, v) un sistema di coordinate definite in una carta U semplicemente connessa. Fissiamo la base locale di

$TM \left\{ \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\}$.

Sia

$$M(g) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

la matrice associata alla metrica rispetto alla base fissata.

Vogliamo trovare la matrice associata a J rispetto a tale base

$$M(J) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Fissiamo $p \in U$ e siano $v_1 = \frac{\partial}{\partial u}$, $v_2 = \frac{\partial}{\partial v}$ calcolati in p .

$$M(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad M(Jv_1) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Ponendo

$$M(g(Jv_1, v_1)) = {}^T M(Jv_1) M(g) M(v_1) = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Otteniamo

$$\alpha E + \gamma F = 0$$

Esiste dunque un certo λ per cui vale:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -F \\ E \end{pmatrix}$$

Vogliamo inoltre $g(Jv_1, Jv_1) = g(v_1, v_1) = E$:

$$Jv_1 = -\lambda F v_1 + \lambda E v_2,$$

quindi

$$g(Jv_1, Jv_1) = \lambda^2 E(EG - F^2) = g(v_1, v_1) = E,$$

da cui:

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}},$$

Con conti analoghi e partendo da v_2 :

$$\beta F + \delta G = 0$$

Ricordiamo inoltre che se ξ è un vettore di $T_p M$, $\xi \neq 0$, $\{\xi, J\xi\}$ deve essere una base di $T_p M$ orientata positivamente, dunque vogliamo $\det(J) > 0$. Otteniamo dunque che la matrice associata a J rispetto alla base fissata è della forma:

$$M(J) = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{pmatrix} -F & -G \\ E & F \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Osservazione 4. Se (u, v) sono coordinate isoterme in un intorno di p , allora

$$M(J) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

e quindi $J \frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial v}$, e $J \frac{\partial}{\partial v} = -\frac{\partial}{\partial u}$

Proposizione 2.2.2. *Sia M una superficie, X, Y campi di vettori. Allora:*

$$\nabla_X JY = J\nabla_X Y \quad (2.6)$$

Dimostrazione. Sia $Z(X, Y) = \nabla_X JY - J\nabla_X Y$. Mostriamo che, data una funzione scalare f , $Z(fX, Y) = fZ(X, Y)$ e che $Z(X, fY) = fZ(X, Y)$.

$$Z(fX, Y) = \nabla_{fX} JY - J\nabla_{fX} Y = f\nabla_X JY - fJ\nabla_X Y = fZ(X, Y)$$

$$\begin{aligned} Z(X, fY) &= \nabla_X JfY - J\nabla_X fY = f\nabla_X JY + X(f)JY - fJ\nabla_X Y - JX(f)Y = \\ &= f(\nabla_X JY - J\nabla_X Y) = fZ(X, Y) \end{aligned}$$

Z è dunque lineare su entrambi i fattori, quindi basta dimostrare che $Z = 0$ su una base. Prendiamo coordinate isoterme (u, v) , che inducono una base sul tangente $\{\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\}$, proviamo che $Z = 0$ per le seguenti scelte di X e Y : $X = \frac{\partial}{\partial u}, Y = \frac{\partial}{\partial u}$; $X = \frac{\partial}{\partial u}, Y = \frac{\partial}{\partial v}$; $X = \frac{\partial}{\partial v}, Y = \frac{\partial}{\partial u}$; $X = \frac{\partial}{\partial v}, Y = \frac{\partial}{\partial v}$;

Proviamo il primo caso, gli altri sono analoghi.

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} J \frac{\partial}{\partial u} - J \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial u} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial v} - J \left(\Gamma_{11}^1 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial}{\partial v} \right) = \\ &= \Gamma_{12}^1 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial}{\partial v} - \Gamma_{11}^1 \frac{\partial}{\partial v} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial}{\partial u} = (\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2) \frac{\partial}{\partial u} + (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) \frac{\partial}{\partial v} \\ &= \left(\frac{\lambda_v}{2\lambda} - \frac{\lambda_v}{2\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial u} + \left(\frac{\lambda_u}{2\lambda} - \frac{\lambda_u}{2\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial v} = 0 \end{aligned}$$

□

Osserviamo che $J^2 = -I$, dove I è l'identità su TM .

2.2.1 Struttura complessa sul fibrato tangente

Abbiamo ora tutti gli strumenti necessari per introdurre la struttura di \mathbb{C} -spazio vettoriale.

Dati $z = x + iy$, $z \in \mathbb{C}$, $\xi \in TM$, poniamo

$$z\xi = x\xi + yJ\xi \tag{2.7}$$

Verifichiamo che, per ogni $p \in M$ lo spazio appena definito sia effettivamente uno spazio vettoriale. La linearità è ovvia, la parte non banale da dimostrare è che, dati $z, w \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, $w = x' + iy'$, $\xi \in TM$, $(zw)\xi = z(w\xi)$

$$\begin{aligned} (zw)\xi &= ((x + iy)(x' + iy'))\xi = (xx' - yy' + i(xy' + yx'))\xi = \\ &= (xx' - yy')\xi + (xy' + yx')J\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(w\xi) &= (x + iy)((x' + iy')\xi) = (x + iy)(x'\xi + y'J\xi) = \\ &= xx'\xi + xy'J\xi + yx'J\xi + yy'J^2\xi = (xx' - yy')\xi + (xy' + yx')J\xi \end{aligned}$$

Mostriamo che la connessione di Levi-Civita è compatibile con la struttura di fibrato vettoriale in rette complesse. Le proprietà 1.4 e 1.5 sono banali, mostriamo 1.6:

Sia $X \in \Gamma(M, TM)$, $Y \in \Gamma(M, E)$, $f = u + iv$ una funzione scalare su \mathbb{C} .

Dobbiamo mostrare che $\nabla_X fY = X(f)Y + f\nabla_X Y$. Svolgendo il primo membro otteniamo:

$$\begin{aligned}\nabla_X fY &= \nabla_X(uY + vJY) = \nabla_X uY + v\nabla_X vJY = \\ &= X(u)Y + u\nabla_X Y + X(v)JY + v\nabla_X JY = \\ &= X(u)Y + u\nabla_X Y + iX(v)Y + vJ\nabla_X Y = \\ &= X(u)Y + u\nabla_X Y + iX(v)Y + iv\nabla_X Y\end{aligned}$$

Svolgendo il secondo otteniamo:

$$\begin{aligned}X(f)Y + f\nabla_X Y &= X(u + iv) + (u + iv)\nabla_X Y = \\ &= X(u)Y + iX(v)Y + u\nabla_X Y + iv\nabla_X Y.\end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto così lo stesso risultato, come richiesto.

2.2.2 Coefficienti di Christoffel sul fibrato in rette complesse

Riprendiamo ora le 1-forme definite nella proposizione.

Data una varietà M ed una base locale su un fibrato E di rango r , esistono r^2 forme differenziali definite come in 2.1.1. Se M è una superficie ed E è il fibrato tangente con struttura di fibrato complesso, allora $r = 1$ e abbiamo quindi una sola 1-forma differenziale.

Chiamo Γ tale forma associata alla base ξ di E . Γ è dunque definita da:

$$\nabla_X \xi = \Gamma(X)\xi \quad (2.8)$$

Se inoltre fissiamo un sistema di coordinate locali (u, v) e $\xi = \frac{\partial}{\partial u}$, allora

$$\Gamma = \Gamma_1 du + \Gamma_2 dv$$

Vogliamo ora scrivere Γ_1 e Γ_2 in modo simile a quanto fatto in 2.1.2.

Proposizione 2.2.3. *Sia M una superficie, sia (u, v) un sistema di coordinate conformi, $g = \lambda(du^2 + dv^2)$, allora valgono le seguenti relazioni:*

$$\Gamma_1 = \frac{\lambda_u - i\lambda_v}{2\lambda} \quad (2.9)$$

$$\Gamma_2 = \frac{\lambda_v + i\lambda_u}{2\lambda} \quad (2.10)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \Gamma(X) \frac{\partial}{\partial u} &= \nabla_X \frac{\partial}{\partial u} = \Gamma_1^1(X) \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_1^2(X) \frac{\partial}{\partial v} = \\ &= \Gamma_1^1(X) \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_1^2(X) J \frac{\partial}{\partial u} = [\Gamma_1^1(X) + i\Gamma_1^2(X)] \frac{\partial}{\partial u} \end{aligned}$$

Ponendo $X = \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}$

Sfruttiamo ora 2.1.2 e otteniamo il risultato. \square

Vale in particolare:

$$\Gamma = \frac{\lambda_u - i\lambda_v}{2\lambda} du + \frac{\lambda_v + i\lambda_u}{2\lambda} dv \quad (2.11)$$

Vediamo ora alcuni strumenti che ci permettono di semplificare le formule appena ottenute.

Sia $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, $dz = dx + idy$, $d\bar{z} = dx - idy$, osserviamo che

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}), \quad dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z})$$

Sia $f = u + iv$ una funzione complessa, $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$.

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\bar{z} \end{aligned}$$

Da cui:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (2.13)$$

Osserviamo in particolare che

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial z} &= \frac{1}{2}(\lambda_u - i\lambda_v) = \lambda \Gamma_1 \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2}(\Gamma_1 + i\Gamma_2) = \frac{1}{2}(\lambda_u - i\lambda_v + i(\lambda_v + i\lambda_u)) = 0 \end{aligned}$$

Da cui:

$$\Gamma = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \Gamma}{\partial z} dz \quad (2.14)$$

2.3 Curvatura Gaussiana e Curvatura Geodetica

2.3.1 Curvatura gaussiana di una superficie

Definizione 2.4. Sia M una varietà con fibrato vettoriale E . Definiamo il tensore di Riemann, ponendo per ogni X, Y campi di vettori, ξ sezione di E :

$$R(X, Y)\xi = [\nabla_X, \nabla_Y]\xi - \nabla_{[X, Y]}\xi \quad (2.15)$$

Si dimostra che $R(X, Y)$ è lineare su X, Y, ξ

$$R(fX, Y)\xi = R(X, fY)\xi = R(X, Y)(f\xi) = fR(X, Y)\xi$$

Osservazione 5. Il tensore di Riemann è antisimmetrico, cioè vale:

$$R(X, Y) = -R(Y, X) \quad (2.16)$$

Sia M una superficie, E il fibrato in rette complesse definito precedentemente, fissiamo un sistema di coordinate isoterme (u, v) , e sia Γ la forma di connessione associata al sistema di coordinate.

Osserviamo che

$$\nabla_X \nabla_Y \xi = \nabla_X \Gamma(Y)\xi = X(\Gamma(Y))\xi + \Gamma(Y)\nabla_X \xi = [X(\Gamma(Y)) + \Gamma(Y)\Gamma(X)]\xi \quad (2.17)$$

$$\nabla_Y \nabla_X \xi = \nabla_Y \Gamma(X)\xi = Y(\Gamma(X))\xi + \Gamma(X)\nabla_Y \xi = [Y(\Gamma(X)) + \Gamma(X)\Gamma(Y)]\xi \quad (2.18)$$

Quindi, usando 1.0.5

$$R(X, Y) = [X(\Gamma(Y)) + \Gamma(Y)\Gamma(X) - Y(\Gamma(X)) + \Gamma(X)\Gamma(Y) - \Gamma([X, Y])]\xi = \quad (2.19)$$

$$= [X(\Gamma(Y)) - Y(\Gamma(X)) - \Gamma([X, Y])]\xi = d\Gamma(X, Y)\xi \quad (2.20)$$

Sia M una superficie e sia E il fibrato tangente con la struttura complessa, quanto osservato ci permette di definire $\Omega(X, Y)$ come l'unica 2-forma

differenziale tale che, per ogni X, Y campi di vettori, per ogni ξ sezione di E ,

$$\Omega(X, Y)\xi = R(X, Y)\xi \quad (2.21)$$

Per quanto osservato basta porre $\Omega(X, Y) = d\Gamma(X, Y)$.

Definizione 2.5. Sia M una superficie orientata con metrica g , sia (u, v) un sistema di coordinate locali. Sia $M(g)$ la matrice associata a g rispetto al sistema fissato. Definiamo la *forma di area* Λ come la 2-forma, definita su tutta M , che localmente si scrive come:

$$\Lambda = \sqrt{\det(M(g))} du \wedge dv, \quad (2.22)$$

scriveremo, a volte, $d\sigma$ al posto di Λ .

Siamo ora pronti per definire la curvatura gaussiana su una superficie.

Definizione 2.6. Sia M una superficie, sia E il fibrato tangente con struttura complessa, sia Ω definita come in 2.21, definiamo la *curvatura gaussiana* come l'unica funzione $K : M \rightarrow \mathbb{R}$ per cui vale:

$$\Omega = -iK\Lambda \quad (2.23)$$

Osserviamo che localmente, se (u, v) sono coordinate isoterme e la metrica g è data da $\lambda(du^2 + dv^2)$, allora $d\sigma = \lambda du \wedge dv$, e inoltre:

$$d\Gamma = -iKd\sigma \quad (2.24)$$

2.3.2 Curvatura geodetica di una curva

Definiamo ora il concetto di curva su una superficie e di curvatura di una curva.

Definizione 2.7. Sia M una 2-varietà Riemanniana. Una curva su M è una funzione liscia e iniettiva $\gamma :]a, b[\rightarrow M$, dove con liscia si intende continua e con derivata continua. Denotiamo inoltre $T = \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|}$, dove $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt}$. Diciamo che γ è *parametrizzata a velocità unitaria*, se $\|\dot{\gamma}\| = 1$

Osservazione 6. $\nabla_T T = k_g J T$ per un certo coefficiente k_g .

Dimostrazione. Basta dimostrare che $\nabla_T T \parallel J T$, cioè che $\nabla_T T \perp T$, ma $0 = T(g(T, T)) = 2g(\nabla_T T, T)$ \square

Definizione 2.8. Il coefficiente k_g per cui vale l'osservazione si dice *curvatura geodetica della curva* γ . Se $k_g = 0$ la curva è detta *geodetica*.

Osserviamo che se γ è una retta su un piano con la metrica euclidea standard $k_g = 0$.

Capitolo 3

Teorema di Gauss-Bonnet

Dimostriamo preliminarmente il seguente risultato che useremo nel seguito

Teorema 3.0.1. *Sia $A =]a, b[\setminus \{x_1, \dots, x_k\}$, dove $\{x_1, \dots, x_k\}$ è un insieme finito di punti. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ continua, derivabile e limitata, allora*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx + \sum_{j=1}^k \delta f(x_j) \quad (3.1)$$

dove, posto $f(x_j^-) = \lim_{x \rightarrow x_j^-} f|_{]a, x_j[}(x)$, $f(x_j^+) = \lim_{x \rightarrow x_j^+} f|_{]x_j, b[}(x)$, definiamo $\delta f(x_j)$ come: $\delta f(x_j) = f(x_j^+) - f(x_j^-)$

Dimostrazione. Chiamiamo $a = x_0$, $b = x_{k+1}$, su ogni intervallo $]x_j, x_{j+1}[$ per $j = 0, \dots, k$ è possibile applicare il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale, quindi

$$f(x_{j+1}^-) - f(x_j^+) = \int_{x_j}^{x_{j+1}} f'|_{]x_j, x_{j+1}[}(x)dx$$

Sommando per $j = 0, \dots, k$ otteniamo:

$$f(b) + \sum_{j=1}^k -(f(x_j^+) - f(x_j^-)) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$$

da cui il risultato. □

3.1 Indice tra due sezioni

Nel seguito useremo la seguente proposizione di cui omettiamo la dimostrazione

Proposizione 3.1.1. *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ continua, allora esiste $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continua, tale che $f = e^u$, inoltre $\operatorname{Re}(u) = \log |f|$*

Definizione 3.1. Sia M una varietà, E un fibrato in rette complesse su M , sia $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una curva liscia su M . Una funzione $\xi : [a, b] \rightarrow E$ tale che per ogni $t \in [a, b]$, $\xi(t) \in E_{\gamma(t)}$, si dice *sezione di E lungo γ*

Proposizione 3.1.2. *Sia M una varietà, E un fibrato in rette complesse su M , sia $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una curva liscia su M , siano ξ_1, ξ_2 sezioni di E lungo γ , sia $\xi_1(t) \neq 0$ per ogni $t \in [a, b]$, allora esiste un'unica $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ tale che:*

$$\xi_2(t) = f(t)\xi_1(t) \quad (3.2)$$

Inoltre $\xi_2(t) \neq 0 \Leftrightarrow f(t) \neq 0$

Corollario 3.1.3. *Sia M una varietà, E un fibrato in rette complesse su M , sia $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una curva liscia su M , se $\xi_1(t) \neq 0$, $\xi_2(t) \neq 0$ per ogni $t \in [a, b]$, allora esiste $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, tale che $\xi_2(t) = e^{u(t)}\xi_1(t)$*

Proposizione 3.1.4. *Sia M una varietà, E un fibrato su M , sia $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una curva liscia su M , sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continua a tratti. Siano t_1, \dots, t_k i punti di discontinuità, dove $a < t_1 < \dots < t_k < b$ e*

1. $f(t_j^+) := \lim_{s \rightarrow t_j^+} f(s) \neq 0$
2. $f(t_j^-) := \lim_{s \rightarrow t_j^-} f(s) \neq 0$
3. $\frac{f(t_j^+)}{f(t_j^-)} \notin \mathbb{R}^-$

allora esiste un'unica funzione $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ continua a tratti,

$$f(t) = e^{u(t)}, \quad (3.3)$$

e per ogni j , $|u(t_j^+) - u(t_j^-)| < \pi$

Dimostrazione. Sia $t_0 = a$, $t_{k+1} = b$, su ogni tratto $]t_i, t_{i+1}[$, per $i = 0, \dots, k$, è possibile applicare 3.1.1. Inoltre dall'ipotesi 3 segue $|u(t_j^+) - u(t_j^-)| < \pi$. \square

Proposizione 3.1.5. *Sia M una varietà, E un fibrato in rette complesse su M . Siano $\xi_1, \xi_2 \in \Gamma(M, E)$, $\xi_1(p) \neq 0 \quad \forall p \in M$, allora $\exists! f : M \rightarrow \mathbb{C} \quad \xi_2 = f\xi_1$.*

Vogliamo ora definire un indice che chiameremo $Ind_\gamma(\xi_1, \xi_2)$ fra due sezioni lungo una curva γ .

Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una curva continua e chiusa, e siano ξ_1, ξ_2 sezioni di E lungo γ con $\xi_1(t), \xi_2(t) \neq 0$ per ogni $t \in [a, b]$. Allora, per la proposizione 3.1.2 esiste un'unica $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^*$ tale che

$$\xi_2 = f\xi_1.$$

Supponiamo che la f verifichi le ipotesi di 3.1.4, esiste quindi un'unica funzione $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ continua a tratti,

$$f(t) = e^{u(t)},$$

come in 3.1.4. Definiamo:

$$Ind_\gamma(\xi_1, \xi_2) = \frac{u(b) - u(a)}{2\pi i} \quad (3.4)$$

3.2 Teorema di Gauss-Bonnet locale

Indichiamo con dl l'elemento di linea di una sottovarietà orientata di dimensione 1.

Lemma 3.2.1. *Sia M una superficie con curvatura geodetica K , sia A un sottoinsieme di M semplicemente connesso, contenuto in una carta locale U semplicemente connessa. Sia ∂A una curva liscia a tratti. Siano θ_j gli angoli esterni misurati in radianti di ∂A nei punti di discontinuità, allora:*

$$\int_A K d\sigma + \int_{\partial A} k_g dl + \sum_{j=1}^n \theta_j = 2\pi Ind_{\partial A}(\xi, T) \quad (3.5)$$

Dimostrazione. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, tale che $\gamma = \partial A$, parametrizzata a velocità unitaria, continua e derivabile su $[a, b] \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ e tale che a e b siano diversi da ogni x_j . Sia $T = \dot{\gamma}$, definita dove esiste la derivata. Sia $\xi = \frac{\partial}{\partial u}$. Possiamo dunque scrivere $T = e^{i\theta}\xi$ per una certa funzione θ . Si ha:

$$\nabla_T T = k_g J T = i k_g e^{i\theta} \xi.$$

Ma anche:

$$\nabla_T T = \nabla_T e^{i\theta} \xi = i \dot{\theta} e^{i\theta} \xi + e^{i\theta} \nabla_T \xi = e^{i\theta} \left[i \dot{\theta} + \Gamma(T) \right] \xi.$$

Uguagliando i coefficienti e semplificando l'esponenziale otteniamo:

$$\dot{\theta} = k_g + i\Gamma(T) \quad (3.6)$$

Sfruttando 3.0.1 e la formula 3.6 otteniamo:

$$\begin{aligned} 2\pi i \text{Ind}_{\partial A}(\xi, T) &= \theta(b) - \theta(a) = \int_a^b \dot{\theta} ds + \sum_{j=1}^n \delta\theta(x_j) = \\ &= \int_a^b k_g ds + \int_a^b i\Gamma(T(s)) ds + \sum_{j=1}^n \theta_j = \\ &= \int_{\partial A} k_g dl + \int_{\gamma} i\Gamma + \sum_{j=1}^n \theta_j = \int_{\partial A} k_g dl + \int_A i d\Gamma + \sum_{j=1}^n \theta_j = \\ &= \int_{\partial A} k_g dl + \int_A K d\sigma + \sum_{j=1}^n \theta_j \end{aligned}$$

Riassumendo si ha:

$$2\pi \text{Ind}_{\partial A}(\xi, T) = \int_{\partial A} k_g dl + \int_A K d\sigma + \sum_{j=1}^n \theta_j \quad (3.7)$$

□

Vogliamo calcolare ora calcolare $\text{Ind}_{\partial A}(\xi, T)$.

Sia E il fibrato tangente con struttura complessa. Ricordiamo che E ha struttura di varietà differenziabile, quindi possiamo considerare \tilde{T} una curva

continua su E tale che $\tilde{T} = T$ nei punti dove γ è derivabile, mentre nei punti di non derivabilità x_j , \tilde{T} si muove con continuità su E_{x_j} .

Studiamo ora alcuni strumenti che ci permettano di calcolare l'indice su una curva chiusa e continua su E .

Proposizione 3.2.2. *Sia M una varietà, consideriamo il fibrato tangente con struttura complessa TM , sia U una carta di TM semplicemente connessa, sia ξ una base locale di TM definita su U , sia $p \in U$ allora esiste un'unica $f : TU \rightarrow \mathbb{C}$ tale che per ogni $t \in T_pU$,*

$$t = f(t)\xi(p),$$

inoltre

$$f(t) \neq 0 \Leftrightarrow t \neq 0.$$

Dimostrazione. Basta osservare che $\xi(p)$ è una base di T_pU con un solo elemento. \square

Consideriamo lo spazio $TM^* = \{t \in TM | t \neq 0\}$.

Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow TU^*$ una curva su TU , sia f come nella proposizione 3.2.2, allora $f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^*$ ed esiste $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continua, tale che $f \circ \gamma = e^u$.

Possiamo ora definire:

$$Ind(\gamma, \xi) = \frac{u(b) - u(a)}{2\pi i} \quad (3.8)$$

Sia M una superficie, E il fibrato tangente in rette complesse, A un sottoinsieme di M semplicemente connesso contenuto in una carta locale U semplicemente connessa. Sia il bordo ∂A una curva liscia a tratti su M , sia \tilde{T} la curva continua su E indotta da ∂A . Siamo ora pronti a calcolare $Ind(\tilde{T}, \xi)$.

Osserviamo che $Ind(\tilde{T}, \xi)$ è un numero intero che varia con continuità, quindi rimane costante su curve omotope. Sia p un punto interno ad A , possiamo

far collassare tramite un'omotopia A al punto $\{p\}$. Osserviamo che su $\{p\}$, la curva \tilde{T} forma una circonferenza unitaria su E_p , e dunque se $u(b) - u(a) = 2\pi i$ e dunque $Ind(\tilde{T}, \xi) = 1$.

Osserviamo inoltre che $Ind(\tilde{T}, \xi) = Ind_{\partial A}(\xi, T)$. Perché per ogni x_j , la variazione di \tilde{T} su E_{x_j} è data dal valore dell'angolo esterno θ_j

Vale dunque il seguente teorema:

Teorema 3.2.3. *Sia M una superficie con curvatura geodetica K , sia A un sottoinsieme di M semplicemente connesso, contenuto in una carta locale U semplicemente connessa. Sia ∂A una curva liscia a tratti. Siano θ_j gli angoli esterni misurati in radianti di ∂A nei punti di discontinuità, allora:*

$$\int_A K d\sigma + \int_{\partial A} k_g ds + \sum_{j=1}^n \theta_j = 2\pi \quad (3.9)$$

3.2.1 Esempi

La formula ottenuta è una generalizzazione della formula sulla somma degli angoli interni di un poligono. Infatti possiamo vedere A come un poligono a n facce, non necessariamente con lati formati da geodetiche, se α_i sono gli angoli interni, allora vale $\theta_i = \pi - \alpha_i$, e dunque:

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j = \int_A K d\sigma + \int_{\partial A} k_g ds + (n - 2)\pi \quad (3.10)$$

Il seguente esempio sarà molto importante perché ci permetterà di ottenere risultati che studieremo nel seguito su tutta la varietà M .

Esempio 3.1. Per triangoli qualsiasi, con angoli interni α, β, γ , si ottiene:

$$\alpha + \beta + \gamma = \int_A K d\sigma + \int_{\partial A} k_g ds + \pi \quad (3.11)$$

Esempio 3.2. Per triangoli geodetici, con angoli interni α, β, γ , si ottiene:

$$\alpha + \beta + \gamma = \int_A K d\sigma + \pi \quad (3.12)$$

3.3 Teorema di Gauss-Bonnet globale

In questa sezione studieremo superfici connesse, compatte, orientabili e senza bordo. Vedremo in particolare che l'integrale su tutta la superficie della curvatura gaussiana K sarà una costante che dipende solo dalla topologia e non dalla metrica sulla varietà.

Definizione 3.2. Sia M una superficie differenziabile, chiamiamo n -agono un insieme A , sottovarietà di M , semplicemente connesso e contenuto in una carta semplicemente connessa U , e tale che il bordo di A sia differenziabile a tratti con n punti di non derivabilità.

Chiamiamo *vertici* i punti di non derivabilità, *lati* i tratti dove la curva è differenziabile, e *faccia* l'interno di A .

Se i lati sono curve geodetiche l' n -agono è detto *n -agono geodetico*.

Definizione 3.3. Sia M una superficie differenziabile, chiamiamo *triangolazione di M* un ricoprimento $\{T_i\}_{i=1,\dots,n}$ di M con le seguenti proprietà:

- Ogni T_i è un triangolo contenuto in una carta locale semplicemente connessa,
- Se $i \neq j$, l'intersezione tra T_i e T_j o è vuota, o è un lato, o è un vertice,
- Ogni lato è lato di esattamente due triangoli.

Notazione 2. Nel seguito M sarà sempre una superficie differenziabile connessa, compatta, orientabile e senza bordo, con una triangolazione $\{T_i\}_{i=1,\dots,n}$ con F faccie, E lati e V vertici.

Su ogni triangolo T_i con angoli interni $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ si ha:

$$\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = \int_{T_i} K d\sigma + \int_{\partial T_i} k_g dl + \pi \quad (3.13)$$

Se sommiamo su tutti gli F triangoli e osserviamo che $\sum_i (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) = 2\pi V$, otteniamo

$$2\pi V = \sum_i (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) = \int_M K d\sigma + \sum_i \int_{\partial T_i} k_g dl + F\pi \quad (3.14)$$

Quindi

$$\pi(2V - F) = \int_M K d\sigma + \sum_i \int_{\partial T_i} k_g dl \quad (3.15)$$

Ogni faccia è un triangolo, ad ogni faccia corrispondo tre lati, ma ogni lato è bordo di due faccie, si ha dunque la relazione $3F = 2E$, quindi

$$2\pi(V - E + F) = \int_M K d\sigma + \sum_i \int_{\partial T_i} k_g dl \quad (3.16)$$

Consideriamo un lato l , l è bordo di due triangoli che chiamiamo T_a, T_b , l viene dunque percorso due volte quando sommiamo gli integrali sui bordi dei triangoli, ma viene percorso una volta in un verso, una volta nell'altro verso, otteniamo dunque che

$$\sum_i \int_{\partial T_i} k_g dl = 0 \quad (3.17)$$

Otteniamo dunque un risultato molto importante:

$$2\pi(V - E + F) = \int_M K d\sigma \quad (3.18)$$

Osserviamo infatti che $\int_M K d\sigma$ dipende da M , ma non dalla triangolazione, quindi anche $2\pi(V - E + F)$ deve essere indipendente dalla triangolazione. Chiamiamo $\chi(M) = V - E + F$, $\chi(M)$ è detta *caratteristica di Eulero*. Allo stesso tempo si ha che $\chi(M)$ non dipende dalla metrica, quindi anche $\int_M K d\sigma$ deve essere indipendente dalla metrica.

Osservazione 7. Se esiste una suddivisione di M in n -agoni, allora il conto $V - E + F$ fornisce lo stesso risultato che si ottiene mediante una triangolazione, infatti, sfruttando 3.10, e osservando che $nF = 2E$, si ha

$$2\pi V = \int_M K d\sigma + \sum_i \int_{\partial T_i} k_g dl + (n - 2)\pi F \quad (3.19)$$

Da cui

$$2\pi(V - \frac{n}{2}F + F) = 2\pi(V - E + F) = \int_M K d\sigma \quad (3.20)$$

3.3.1 Indici locali di campi di vettori

Sia M una varietà, sia U una carta semplicemente connessa di M , sia E il fibrato tangente con la struttura complessa. Sia $p \in U$, sia $\xi \in \Gamma(M, E)$ $\xi \neq 0$ in un intorno di p meno il punto, sia γ una piccola curva chiusa in U , bordo di una sottovarietà contenente p . Sia $\{\gamma_\epsilon\}_{\epsilon \in [0,1]}$ una famiglia di curve omotope tali che $\gamma_1 = \gamma$, e per $\epsilon \rightarrow 0$, $\gamma_\epsilon \rightarrow \{p\}$.

Sia $\xi_0 \in \Gamma(M, E)$, $\xi_0 \neq 0$ su U . Osserviamo che $Ind_{\gamma_\epsilon}(\xi_0, \xi)$ è un intero che varia con continuità, quindi è indipendente da ϵ . Mostriamo inoltre che è indipendente da ξ_0 . Prendiamo $\xi_1 \in \Gamma(M, E)$ $\xi_1 \neq 0$ su U , $\xi_1 = g\xi_0$ dove $g : U \rightarrow \mathbb{C}^*$ è una funzione continua non nulla, U è semplicemente connesso, quindi esiste una funzione h tale che $g = e^h$. Inoltre esiste $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $\xi = f\xi_1$, e, fuori da p $f \neq 0$ quindi esiste u tale che $f = e^u$. Vale dunque:

$$\xi(\gamma(t)) = f(t)\xi_1(\gamma(t)) = e^u(t)e^{h(\gamma(t))}\xi_0(\gamma(t)) = e^{u(t)+h(\gamma(t))}.$$

Poiché $\gamma(a) = \gamma(b)$, $u(b) + h(\gamma(b)) - u(a) - h(\gamma(a)) = u(b) - u(a)$, quindi $Ind_{\gamma_\epsilon}(\xi_0, \xi)$ non dipende neanche da ξ_0 .

Definiamo:

$$Ind_\xi(p) = Ind_{\gamma_\epsilon}(\xi_0, \xi) \quad (3.21)$$

Osserviamo che se $\xi(p) \neq 0$ $Ind_\xi(p) = 0$

Sia M una superficie differenziabile, compatta, senza bordo e orientata, con un fibrato in rette complesse E . Sia ξ un campo di vettori su M con al più un numero finito di zeri nei punti p_1, \dots, p_k , sia $\{T_j\}_{j=1, \dots, n}$, $n > k$ una triangolazione di M tale che $p_j \in int(T_j)$ per ogni $j = 1, \dots, k$. Facendo collassare tramite un'omotopia $\gamma_j = \partial T_j$ al punto $\{p_j\}$ in modo simile a quanto già visto, si può osservare che $Ind_\xi(p_j) = Ind_{\gamma_j}(\xi_j, \xi)$, dove ξ_j è una base locale di E definita su un aperto che contiene T_j .

Vale inoltre la seguente uguaglianza:

$$Ind_{\gamma_j}(T_j, \xi_j) = Ind_{\gamma_j}(T_j, \xi) + Ind_{\gamma_j}(\xi, \xi_j) \quad (3.22)$$

Inoltre, se $\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j$ sono gli angoli esterni, L_1^j, L_2^j, L_3^j i lati di T_j , vale

$$\begin{cases} \text{Ind}_{\gamma_j}(T_j, \xi_j) = \sum_{i=1,2,3} \frac{1}{2\pi} \int_{L_i^j} k_g dl + \frac{1}{2\pi} \int_{T_j} K d\sigma + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1,2,3} \alpha_i^j \\ \text{Ind}_{\gamma_j}(T_j, \xi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1,2,3} \alpha_i^j + \sum_{i=1,2,3} \text{Ind}_{L_i^j}(T_j, \xi) \\ \text{Ind}_{\gamma_j}(\xi, \xi_j) = \text{Ind}_{\xi}(p_j) \end{cases} \quad (3.23)$$

Sostituendo 3.23 a 3.22 otteniamo:

$$\sum_{i=1,2,3} \frac{1}{2\pi} \int_{L_i^j} k_g dl + \frac{1}{2\pi} \int_{T_j} K d\sigma = \sum_{i=1,2,3} \text{Ind}_{L_i^j}(T_j, \xi) + \text{Ind}_{\xi}(p_j) \quad (3.24)$$

Se sommiamo il risultato ottenuto su tutti i triangoli otteniamo:

$$\sum_{j=1}^k \text{Ind}_{\xi}(p_j) = \frac{1}{2\pi} \int_M K d\sigma = \chi(M) \quad (3.25)$$

Per ogni campo di vettori ξ con al più un numero finito di zeri.

3.3.2 Caratteristica di Eulero e topologia

Consideriamo superfici M compatte, orientabili, senza bordo e immerse in \mathbb{R}^n . Abbiamo visto che la caratteristica di Eulero dipende solo dalla topologia della superficie. In questa ultima sezione dimostriamo un teorema che mette in relazione $\chi(M)$ con il numero di buchi della superficie. Indichiamo con g il numero di buchi, g è detto *genere di M* .

Teorema 3.3.1. *Sia M è una superficie immersa, connessa, compatta, orientata e senza bordo, con g buchi, allora*

$$\chi(M) = 2 - 2g \quad (3.26)$$

Vedremo due approcci distinti per dimostrare il teorema, entrambi poco rigorosi.

Il primo approccio prevede di calcolare la caratteristica di Eulero tramite l'equazione 3.25. Enunciamo prima il seguente lemma:

Lemma 3.3.2. *Sia M una varietà con metrica g , e sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Allora esiste un'unica funzione $\nabla f \in \Gamma(M, TM)$ tale che, per ogni $X \in \Gamma(M, TM)$,*

$$df(X) = g(\nabla f, X)$$

Sia M una superficie immersa, sappiamo che $\chi(M)$ è indipendente dalla metrica, possiamo quindi immaginare di deformare M in una superficie i cui buchi siano disposti in fila lungo l'asse x_1 come in figura 3.1. Sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione che associa ad ogni punto di M il valore della prima coordinata. Inoltre ∇f è una sezione di TM che si annulla due volte in ogni buco in punti di sella, e nei due punti in cui la funzione prima coordinata assume rispettivamente valore massimo e minimo. Inoltre si può dimostrare che nei punti di sella, a curvatura negativa, l'indice vale -1 ; mentre nel massimo e nel minimo, dove la curvatura è positiva, l'indice vale $+1$.

Otteniamo dunque:

$$\chi(M) = \sum_{j=1}^k \text{Ind}_{\xi}(p_j) = 2 - 2g \quad (3.27)$$

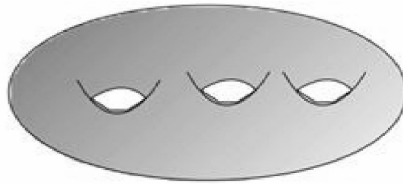


Figura 3.1:

Il secondo approccio sfrutta l'equazione 3.18.

Consideriamo una superficie omeomorfa a S^2 , poiché $\chi(M)$ non dipende dalla metrica possiamo calcolare la costante di Eulero su S^2 con la metrica

standard e $K = 1$, allora sappiamo che

$$\int_{S^2} K d\sigma = 4\pi \quad (3.28)$$

Quindi $\chi(M) = 2$.

Rimandiamo all'esempio 3.3 ulteriori dettagli di quanto appena affermato.

Aggiungiamo ora g maniglie a S^2 come in figura 3.2.

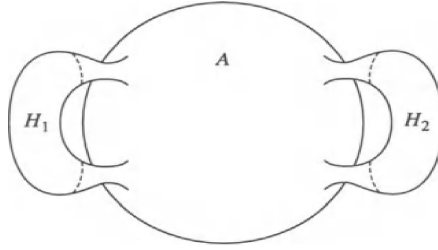


Figura 3.2:

Ogni maniglia H_i è omeomorfa a un cilindro, possiamo immaginare di chiudere il cilindro con due tappi ottenendo una superficie omeomorfa a una sfera, abbiamo dunque:

$$4\pi = \int_{H_i \cup \text{tappi}} K d\sigma = \int_{H_i} K d\sigma + \int_{\text{tappi}} K d\sigma \quad (3.29)$$

Ma i tappi insieme formano una sfera, quindi $\int_{\text{tappi}} K d\sigma = 4\pi$, quindi per ogni i si ha

$$\int_{H_i} K d\sigma = 0 \quad (3.30)$$

Torniamo a considerare la superficie M con g maniglie, chiamiamo A il corpo principale di M , se chiudiamo A con un ragionamento simile a quello di prima, si ottiene:

$$4\pi = \int_{A \cup \text{tappi}} K d\sigma = \int_A K d\sigma + 2g(2\pi) \quad (3.31)$$

Da cui

$$\int_A K d\sigma = 2\pi(2 - 2g) \quad (3.32)$$

$$\int_M K d\sigma = \int_A K d\sigma + \sum_i \int_{H_i} K d\sigma = 2\pi(2 - 2g) \quad (3.33)$$

Sfruttando 3.18 e la definizione di $\chi(M)$ otteniamo il risultato .

Esempio 3.3. Se M è una sfera, $\chi(M) = 2$.

Consideriamo la sfera unitaria $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Parametrizziamo S^2 con coordinate polari:

$$h(\phi, \theta) = (\cos\phi\cos\theta, \sin\phi\cos\theta, \sin\theta) \quad (3.34)$$

Da cui:

$$h_\phi = (-\sin\phi\cos\theta, \cos\phi\cos\theta, 0) \quad (3.35)$$

$$h_\theta = (-\cos\phi\sin\theta, -\sin\phi\sin\theta, \cos\theta) \quad (3.36)$$

Da cui:

$$E = g(h_\phi, h_\phi) = \cos^2\theta \quad (3.37)$$

$$F = g(h_\phi, h_\theta) = 0 \quad (3.38)$$

$$G = g(h_\theta, h_\theta) = 1 \quad (3.39)$$

Sfruttando il fatto che $d\Gamma = -iKd\sigma$ e i conti visti nella sezione 2.2.2, si ottiene $K = 1$, da cui:

$$\chi(M) = \frac{1}{2\pi} \int_M K d\sigma = \frac{1}{2\pi} 4\pi = 2 \quad (3.40)$$

Esempio 3.4. La caratteristica di Eulero di un toro è zero. Lo possiamo vedere nel seguente modo:

Sia $M = S^1 \times S^1 \subseteq \mathbb{R}^4$, i.e. $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1^2 + x_2^2 = 1 = x_3^2 + x_4^2\}$

Parametrizziamo il toro come:

$$h : (u, v) \mapsto (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v) \quad (3.41)$$

$$h_u = (-\sin u, \cos u, 0, 0) \quad (3.42)$$

$$h_v = (0, 0, -\sin v, \cos v) \quad (3.43)$$

Da cui:

$$E = g(h_u, h_u) = 1 \quad (3.44)$$

$$F = g(h_u, h_v) = 0 \quad (3.45)$$

$$G = g(h_v, h_v) = 1 \quad (3.46)$$

Quindi la curvatura gaussiana è $K = 0$ ovunque.

Bibliografia

- [1] Taylor Michael E. *Partial Differential Equations I*. Springer, 2011.
- [2] Taylor Michael E. *Partial Differential Equations II*. Springer, 1996
- [3] Do Carmo Manfredo P. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, 1992.
- [4] Marco Abate, Francesca Tovena, *Geometria Differenziale*, Springer 2011.
- [5] Pressley Andrew, *Elementary Differential Geometry*, Springer, 2012.