Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

Scuola di Scienze

Dipartimento di Fisica e Astronomia

Corso di Laurea in Fisica

Formalismo 3+1 ed approccio hamiltoniano alla relatività generale

Relatore:

Prof. Alexandre Kamenchtchik

Presentata da:

Nicola Menadeo

Anno Accademico 2016/2017

Sommario

Nel primo capitolo di questo elaborato verranno descritti ed analizzati alcuni concetti di base della geometria differenziale generalizzandoli a spazi a dimensione arbitraria, per poi utilizzarli nel caso specifico dello spazio-tempo quadridimensionale in cui opera la relatività generale. Verrà fatto largo uso della nozione di ipersuperficie, fondamentale per l'approccio matematico al formalismo 3+1 e verrà studiato il modo in cui questa evolve, da cui segue il concetto di foliazione dello spazio-tempo. Lo scopo finale sarà quello di decomporre i tensori di Riemann e Ricci che giocano un ruolo centrale nella equazione di campo di Einstein. Il secondo capitolo invece, sarà incentrato sulla fisica e su come il formalismo 3+1 agisce nella teoria della relatività generale. L'argomento principale sarà la decomposizione dell'equazione di Einstein che verrà successivamente trattata come un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali. Sarà introdotto ed utilizzato il concetto di geometrodinamica (introdotto da Wheeler nei primi anni sessanta) per giungere all'approccio hamiltoniano alla relatività generale.

Indice

Capitolo 1

Geometria differenziale per il formalismo 3+1

1.1 Richiami di geometria differenziale

1.1.1 Varietà differenziabili

La prima nozione utile da introdurre è quella di spazio topologico: quest'ultimo è strettamente connesso alla definizione di varietà topologica che vedremo avere un importante ruolo nella matematica che descrive la relatività generale.
Sia X un insieme non vuoto.
Una *topologia* su X è una famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{A} \subseteq X$, detti *aperti* con le seguenti caratteristiche:

- L'insieme vuoto ed X sono aperti

$$\varnothing \in X \qquad X \in \mathcal{A}$$

- L'unione arbitraria di aperti è ancora un aperto:

$$\bigcup_i A_i \in \mathcal{A} \qquad i \in \mathcal{J} \quad \mathcal{J} \textit{ insieme di indici}$$

- L'intersezione di una collezione finita di aperti è ancora un aperto:

$$\bigcap_{i=1}^{N} A_i \in \mathcal{A}$$

L'insieme X con la topologia $\mathcal{A}$ assegnata, viene detto *spazio topologico.*

La nozione di spazio topologico, ci consente di definire formalmente la *varietà topologica*: Sia dato un intero $n \geq 1$, una *varieta topologica $\mathcal{M}$ di dimensione n* è uno spazio topologico che gode delle seguenti caratteristiche:

- $\mathcal{M}$ è uno *spazio separato* (spazio di Hausdorff).

- $\mathcal{M}$ ha una base numerabile, ossia esiste una famiglia di aperti A_i contenuti in $\mathcal{M}$ tale che ogni aperto di $\mathcal{M}$ può essere scritto come una unione (arbitraria) di alcuni membri di tale famiglia.

- Per ogni punto di $\mathcal{M}$, esiste un intorno tale per cui $\mathcal{M}$ è omeomorfo ad un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$

Le seguenti proprietà, sono fondamentali dal punto di vista fisico: il fatto che $\mathcal{M}$ sia uno spazio di Hausdorff, consente infatti di distinguere sempre due punti sulla varietà dopo l'effetto di una perturbazione. A livello matematico, la seconda proprietà elencata è in grado di consentire l'uso della teoria dell'integrazione su $\mathcal{M}$. Per quanto riguarda l'ultima proprietà, questa afferma che localmente è possibile mappare (in modo continuo) ogni punto di $\mathcal{M}$ in una *n-upla* di numeri reali in $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$.
A tale *n-upla* è associata quindi una scelta di *coordinate* che consentono un utilizzo operativo della varietà.
Formalmente, dato un aperto $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$, un *sistema di coordinate* o *carta* su $\mathcal{U}$ è definito come un omeomorfismo:

$$\phi : \ \mathcal{U} \subset \mathcal{M} \longrightarrow \phi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$$

$$p \longmapsto (x^0, ..., x^{n-1})$$

poiché le coordinate coprono solamente una piccola porzione della varietà, sarebbe necessario l'utilizzo di più carte al fine di coprire interamente $\mathcal{M}$. In questo modo è possibile definire un *atlante* come una collezione $\mathcal{A}$ di carte in grado di coprire l'intera varietà:

$$\mathcal{A} = (A_i, \phi_i) \ : \ \mathcal{M} \subseteq \bigcup_i A_i$$

Dove la coppia (A_i, ϕ_i) indica la carta con l'opportuna scelta di coordinate ϕ_i.

Volendo inserire nella geometria differenziale gli strumenti dell'analisi matematica, sarà necessario introdurre il concetto di varietà differenziabile, nozione indispensabile per proseguire il cammino nella geometria differenziale.
Data una collezione di carte ϕ_i tale che si possa definire un atlante in cui ogni punto sia appartenente ad un intorno su cui risulta definita almeno una carta ϕ_i: si definisce $\mathcal{M}$ una *varietà differenziabile* di classe C^k o *liscia* se risulta possibile definire una funzione $f \in C^k$ che connette tutte le carte:

$$f \ : \ \phi_i(U) \longleftrightarrow \phi_j(V) \qquad \textit{con } U, V \subseteq \mathbb{R}^n$$

Osservazione. In generale si assume che la funzione f sia di classe C^∞ e quindi anche $\mathcal{M}$ sarà di classe C^∞.

1.1.2 1-forme e tensori

Sia $\mathcal{M}$ una varietà n-dimensionale e $P \in \mathcal{M}$.

In P saranno definiti n vettori linearmente indipendenti che indicano tutte le possibili direzioni in cui ci si può muovere su $\mathcal{M}$. Lo spazio creato da questi vettori è detto *spazio tangente.*

Una *1-forma* è un funzionale lineare che agisce sui vettori di uno spazio tangente e li mappa in uno scalare:

$$\tilde{\omega} \ : \ T_P \longrightarrow \mathbb{R}$$

Le notazioni utilizzate per l'azione di una 1-forma sono le seguenti:

$$\tilde{\omega}(\vec{v}) = \vec{v}(\tilde{\omega}) = \langle \tilde{\omega}, \vec{v} \rangle$$

Essendo lineare, il funzionale gode delle seguenti proprietà:

$$\tilde{\omega}(\alpha\vec{v} + \beta\vec{u}) = \alpha\tilde{\omega}(\vec{v}) + \beta\tilde{\omega}(\vec{u})$$

$$(\alpha\tilde{\omega})(\vec{v}) = \alpha\tilde{\omega}(\vec{v})$$

$$(\tilde{\omega} + \tilde{\xi})(\vec{v}) = \tilde{\omega}(\vec{v}) + \tilde{\xi}(\vec{v})$$

Le 1-forme che agiscono su uno stesso spazio tangente T_P formano uno spazio vettoriale T_P^* detto *spazio duale di* T_P.

Possiamo così definire un *campo di 1-forme* come un'applicazione che associa ad ogni punto della varietà una 1-forma.

Osservazione. Si assume che tale mappa di classe C^∞.

I vettori di base di T^*_P possono essere messi in corrispondenza[1] con i vettori di base di T_P tramite la seguente relazione[2]:

$$\tilde{e}^i e_j = \delta^i{}_j \tag{1.1}$$

L'equazione 1.1 è particolarmente significativa quando si vuol studiare la trasformazione dei vettori in T^*_P dopo aver effettuato un cambio di base sui vettori dello spazio tangente T_P: il cambio di base viene effettuato da una matrice di trasformazione che appartiene al *gruppo lineare generale GL(n)*:

$$e_{j'} = \Lambda^i{}_{j'} e_i \tag{1.2}$$

Dalla 1.1 è possibile applicare ad ambo i membri la matrice di trasformazione sul vettore e_k:

$$e^i(e_k) = \delta^i{}_k \quad \Longrightarrow \quad e^i(e_k \Lambda^k{}_{j'}) = \delta^i{}_k \Lambda^k{}_{j'} = \delta^i{}_{j'} \tag{1.3}$$

Per avere degli indici liberi al secondo membro, è possibile applicare la matrice di trasformazione inversa tale che:

$$\Lambda^{k^{'}}{}_i \Lambda^i{}_{j'} = \delta^{k'}{}_j{}' \quad \Longrightarrow \quad \Lambda^{-1} = \Lambda^{k'}{}_i \tag{1.4}$$

Applicando Λ^{-1} alla relazione 1.3:

$$\Lambda^{k'}{}_i e^i e_k \Lambda^k{}_{j'} = \delta^{k'}{}_{j'} = e^{k^{'}} e_k \Lambda^k{}_{j'}$$

da cui:

$$\Lambda^{k'}{}_i e^i = e^{k^{'}} \tag{1.5}$$

La matrice di trasformazione $\Lambda^{k'}{}_i$ della equazione 1.5 risulta essere (secondo il ragionamento fatto per giungere alla 1.4) la matrice inversa di $\Lambda^i{}_j$ riportata nella 1.2 .
L'equazione 1.5 suggerisce che le 1-forme si trasformano tramite la matrice inversa Λ^{-1}.

---

[1] La relazione tra le due basi è completamente arbitraria.

[2] Viene utilizzata la convenzione di Einstein.

Un tensore di tipo (n, m) su un punto P della varietà $\mathcal{M}$ è un funzionale lineare che agisce su n *1-forme* ed m *vettori*:

$$T \;:\; T_P^* \otimes ... \otimes T_P^* \otimes T_P \otimes ... \otimes T_P \longrightarrow \mathbb{R}$$

dove $\otimes$ indica l'usuale prodotto cartesiano tra spazi vettoriali.

Sia data una base $\{e_i\}$ di T_P e la sua corrispondente base duale $\{e^i\}$ per T_P^*: un tensore generico di tipo (n,m)[3] può essere espresso nella seguente forma:

$$T = T^{i_1 ... i_m}{}_{j_1 ... j_n}\, \vec{e_1} \otimes ... \otimes \vec{e_{i_m}} \otimes \tilde{e}^{i_1} \otimes ... \otimes \tilde{e}^{i_n} \tag{1.6}$$

Dove $\otimes$ in questo caso indica il prodotto tensoriale, mentre $T^{i_1 ... i_m}{}_{j_1 ... j_n}$ sono i coefficienti del tensore.

Osservazione: banalmente si nota che un tensore $(1, 0)$ è un vettore mentre un tensore $(0, 1)$ è un covettore.

Con l'introduzione dei tensori (utilizzati in maniera implicita per giungere alla 1.5) si può estendere la nozione di campo vettoriale a quella di campo tensoriale: un *campo tensoriale* non è altro che una mappa che associa ad ogni punto P della varietà un tensore di tipo (n, m) definito sullo spazio tangente T_P del punto.

1.1.3 Derivata covariante

Pur avendo definito vettori e campi vettoriali con le relative proprietà su una varietà, non si è mai parlato esplicitamente del concetto di parallelismo vettoriale. Su una varietà, infatti, non esiste un concetto globale e preciso di parallelismo, può essere introdotta però la nozione di *trasporto parallelo.*

Per definire il trasporto parallelo bisogna essere in grado di collegare due punti sulla varietà e quindi introdurre il concetto di curva: questo si traduce nella necessità di connettere spazi tangenti di punti differenti.

[3]il numero intero n+m viene detto rango o dimensionalità del tensore

Da questa questione nasce la nozione di connessione su una varietà.
La connessione è in definitiva lo strumento consente di definire un campo vettoriale arbitrario $\boldsymbol{v}$ che viene fatto scivolare lungo la curva definita su $\mathcal{M}$.
Siano definiti un campo vettoriale arbitrario $\boldsymbol{v}$ una curva γ (parametrizzata da un parametro affine λ) su $\mathcal{M}$. Valutando il campo vettoriale in due punti diversi della curva λ_0 e $\lambda_0 + \epsilon$, si ottengono valori generalmente diversi: trasportando parallelamente il vettore calcolato in $\lambda_0 + \epsilon$ in λ_0 e avendo definito un vettore $\boldsymbol{u}$ tangente alla curva in ogni punto, si ottiene:

$$\nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{v} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\boldsymbol{v}_{\lambda_0+\epsilon}(\lambda_0) - \boldsymbol{v}(\lambda_0)}{\epsilon} \tag{1.7}$$

definita *derivata covariante*: questa indica di quanto il campo $\boldsymbol{v}$ si sposta dal suo trasporto parallelo.
La derivata covariante è un operatore differenziale lineare ed ha le seguenti proprietà:

- $\forall\ g$ funzione scalare:

$$\nabla_{g\boldsymbol{u}} \boldsymbol{w} = g \nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{w}$$

- siano $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}$ vettori in P, con $P \in \mathcal{M}$

$$(\nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{w})_P + (\nabla_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{w})_P = (\nabla_{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}} \boldsymbol{w})_P$$

- $\forall\ f, g$ funzioni scalari

$$\nabla_{gu+fw} \boldsymbol{v} = g \nabla_{gu} \boldsymbol{v} + f \nabla_{gw} \boldsymbol{v}$$

- Regola di Leibniz

$$\nabla_{\boldsymbol{u}} f \boldsymbol{w} = f \nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w} \frac{df}{d\lambda}$$

Osservazione. Tramite la regola di Leibniz, la derivata covariante può essere estesa a tensori di tipo generico.

Utilizzando le proprietà sopra elencate ed esplicitando ogni vettore come combinazione lineare di una base, si ottiene:

$$\begin{aligned}\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w} &= v^i\nabla_i w^j e_j \\ &= v^i(w^j\nabla_i e_j + e_j\nabla_i w^j)\end{aligned}$$

Da cui si definisce il *simbolo di Christoffel* o *connessione affine*[4]:

$$\nabla_i e_j = \Gamma^k{}_{ji} e_k \tag{1.8}$$

I simboli di Christoffel identificano completamente una connessione sotto la scelta di una carta. Senza lasciarsi ingannare dall'apparenza, è possibile dimostrare che il simbolo di Christoffel non è un tensore poiché non segue le regole di trasformazione di questi. Il concetto di connessione e derivata covariante sono in generale la stessa cosa poiché formalmente si definisce la connessione come una mappa che prende due vettori nello spazio tangente e li mappa in $\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}$.
Una connessione affine è detta *simmetrica* quando:

$$\Gamma^k{}_{ij} = \Gamma^k{}_{ji} \tag{1.9}$$

Esplicitando l'equazione 1.9 in termini della 1.8, si giunge al seguente risultato:

$$\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w} - \nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v} = 0 \tag{1.10}$$

Si può facilmente notare che la 1.10 non è altro che l'espressione generale di un commutatore: a livello matematico, la simmetria della connessione suggerisce l'annullarsi o meno del commutatore. A livello fisico e geometrico, l'annullarsi o meno di tale grandezza implica il fatto che possa esistere una *torsione* sulla varietà $\mathcal{M}$. Questa nuova nozione è definibile se il commutatore $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ non si annulla, rimarcando il fatto che i due vettori (linearmente indipendenti e definiti in un certo punto $P \in \mathcal{M}$) ed i loro trasporti

[4] $\nabla_i = \nabla_{e_i}$

paralleli non formano un loop. Fisicamente l'esistenza di una torsione si giustifica col fatto che lo spazio-tempo non è piatto, bensì curvo.
In definitiva, se la connessione non è simmetrica esiste una *torsione* sulla varietà definita nel seguente modo:

$$\Gamma^k{}_{ij} - \Gamma^k{}_{ji} = T^k{}_{ji} \tag{1.11}$$

oppure

$$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] \neq 0 \tag{1.12}$$

1.1.4 Connessione di Levi Civita

Nella geometria differenziale esistono vari modi per connettere gli spazi tangenti: il trasporto parallelo è il modo più semplice ed immediato.

Risulta utile ora definire il concetto di lunghezza su una varietà tramite l'introduzione del *tensore metrico* il quale induce un prodotto scalare che a sua volta porterà alla definizione di lunghezza su $\mathcal{M}$.

Il tensore metrico è un tensore di tipo $(0, 2)$ con le seguenti proprietà:

- Simmetrico

$$g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$$

- Non degenere

$$g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \in T_P \quad \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = 0$$

Come affermato in precedenza, il tensore metrico induce un prodotto scalare attraverso il quale è possibile calcolare il modulo di un vettore:

$$g(\boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{e_j}) = g_{ij} \quad \Rightarrow \quad v^2 = g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = g_{ij} v^i v^j \tag{1.13}$$

Per una varietà $(g, \mathcal{M})$ Riemanniana (o pseudo-Riemanniana) esiste ed è unica[5] la connessione che soddisfa le seguenti proprietà:

- È a torsione libera. Ad esempio per un campo scalare f si ha:

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta f = \nabla_\beta \nabla_\alpha \tag{1.14}$$

- Derivata covariante del tensore metrico nulla

$$\nabla \boldsymbol{g} = 0 \tag{1.15}$$

Tale connessione ∇ è detta *connessione di Levi Civita*.
Quest'ultima è l'unica connessione a torsione libera in grado di preservare la metrica su $\mathcal{M}$: grazie a tale connessione è possibile utilizzare il tensore metrico per definire sulla varietà strutture matematiche più elaborate[6].
Dall'identità $\nabla \boldsymbol{g} = 0$ e dalla scelta di un sistema di carte opportuno, è possibile scrivere il simbolo di Christoffel in funzione della metrica:

$$\Gamma^k{}_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\partial_j g_{il} + \partial_i g_{jl} - \partial_l g_{ij} \right) \tag{1.16}$$

1.1.5 Tensore di Riemann

Un esempio utile è il *tensore di curvatura di Riemann*: tensore del tipo $(1, 3)$ definito nel seguente modo:

$$R(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{w} = [\nabla_{\boldsymbol{v}}, \nabla_{\boldsymbol{u}}]\boldsymbol{w} - \nabla_{[\nabla_{\boldsymbol{v}}, \nabla_{\boldsymbol{u}}]}\boldsymbol{w} \tag{1.17}$$

che esplicitato in componenti diventa:

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) w^\gamma = R^\gamma{}_{\mu\alpha\beta} w^\mu \tag{1.18}$$

Il tensore di Riemann produce uno scalare se contratto con 3 *1-forme* ed un vettore.

La notazione spesso utilizzata per elencare le sue proprietà è $\boldsymbol{Riem(\omega, w, u, v)}$.

[5]L'unicità della connessione deriva da un risultato fondamentale della geometria riemanniana
[6]esempio fatto sul tensore di Riemann nella 1.19.

- Il tensore di Riemann è antisimmetrico rispetto lo scambio degli ultimi due argomenti:

$$\boldsymbol{Riem(..,..,u,v)} = -\boldsymbol{Riem(..,..,v,u)}$$

- Soddisfa la proprietà ciclica (*prima identità di Bianchi*):

$$\boldsymbol{Riem(..,w,u,v)} + \boldsymbol{Riem(..,u,v,w)} + \boldsymbol{Riem(..,v,w,u)} = 0$$

- La derivata covariante del tensore di Riemann obbedisce alla *seconda identità di Bianchi* [7]:

$$\nabla_\rho R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} + \nabla_\mu R^\alpha{}_{\beta\mu\rho} + \nabla_\mu R^\alpha{}_{\beta\rho\mu} = 0$$

In una connessione di Levi Civita, dalla 1.16 si ottiene la seguente espressione del tensore di Riemann dipendente dalla metrica:

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(\partial_j\partial_k g_{il} - \partial_j\partial_j g_{ik} + \partial_i\partial_l g_{jk} - \partial_i\partial_k g_{jl}\right) \tag{1.19}$$

Se si contraggono due indici del tensore di Riemann si ottiene il *tensore di Ricci* il quale gioca un ruolo centrale nella teoria della relatività generale.

$$R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} = R_{\mu\nu} \tag{1.20}$$

Se la connessione è di Levi Civita, il tensore di Ricci risulta simmetrico:

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} \tag{1.21}$$

Applicando la metrica si può definire la forma scalare del tensore di Ricci:

$$\boldsymbol{R} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{1.22}$$

[7] Si intende in un sistema normale dove $\partial_\mu = \nabla_\mu$

1.2 Geometria delle ipersuperfici

1.2.1 Introduzione alla geometria delle ipersuperfici

Prima di proseguire nello studio delle ipersuperfici, è utile discutere delle notazioni che verranno adottate nello sviluppo di questa trattazione. Verrà assunto che la varietà metrica $(\mathcal{M}, g)$ sarà *orientabile nel tempo*, ossia che sarà sempre possibile dividere il cono spazio-temporale in due parti distinte: passato e futuro.
Il simbolo ∇ identificherà la connessione di Levi Civita dello spazio-tempo (quadridimensionale) associata alla metrica g: questo perchè è necessario distinguerla da altre possibili connessioni che saranno introdotte in seguito.
Se i tensori (Riemann o Ricci) sono definiti nello spazio-tempo verranno denotati nel seguente modo: ${}^4\boldsymbol{Riem}$, ${}^4R$, ${}^4\boldsymbol{R}$.

Si definisce *ipersuperficie* l'immagine di una varietà Σ di una varietà (solitamente 3-dim) $\hat{\Sigma}$ tramite una mappa detta *immersione*

$$\phi : \hat{\Sigma} \longrightarrow \mathcal{M} \tag{1.23}$$

$$\Sigma = \phi(\hat{\Sigma}) \tag{1.24}$$

La funzione di immersione è un omeomorfismo[8] $\phi : \hat{\Sigma} \longrightarrow \Sigma$ con la condizione che ϕ e ϕ^{-1} siano continue in modo da non far intersecare Σ con se stessa. Localmente è possibile definire una ipersuperficie come quel luogo dei punti sulla varietà sul quale è applicato un campo scalare costante (si può porre uguale a zero per comodità):

$$\forall P \in \mathcal{M} \ , \ P \in \Sigma \quad \Leftrightarrow \quad t(P) = a = 0$$

Tramite una scelta di coordinate $x^\alpha = (t, x, y, z)$

$$(x, y, z) \longmapsto (0, x, y, z)$$

[8] L'omeomorfismo è una funzione continua che lega sue spazi topologici affermando che questi sono identici dal punto di vista topologico.

La funzione di immersione trasporta curve e vettori in $\hat{\Sigma}$ in curve e vettori in $\mathcal{M}$: si definisce quindi una mappa tra gli spazi tangenti di $\hat{\Sigma}$ e $\mathcal{M}$: tale mappa è chiamata *push forward mapping*

$$\mathbf{\Phi_*} : T_P(\hat{\Sigma}) \longrightarrow T_P(\mathcal{M}) \tag{1.25}$$

$$\boldsymbol{v} = (v^x, v^y, v^z) \longmapsto \mathbf{\Phi_*}\boldsymbol{v} = (0, v^x, v^y, v^z)$$

Le componenti del vettore $\boldsymbol{v}$ sono trovate in funzione della base naturale di $T_P(\Sigma)$, ossia $\frac{\partial}{\partial x^i}$.

Analogamente al push forward mapping, la funzione di immersione induce naturalmente una mappa detta *pull back mapping* tra forme lineari e definita quindi sugli spazi duali degli spazi tangenti:

$$\mathbf{\Phi^*} : T^*_P(\mathcal{M}) \longrightarrow T^*_P(\hat{\Sigma}) \tag{1.26}$$

$$\omega \longmapsto \mathbf{\Phi^*}\omega \ \ : T_P(\hat{\Sigma}) \mapsto \mathbb{R}$$

$$\boldsymbol{v} \mapsto \langle \omega, \mathbf{\Phi^*} v \rangle$$

Il pull back si definisce anche su forme multilineari.

$$\forall (\boldsymbol{v_1}, ..., \boldsymbol{v_n}) \in T_P(\Sigma)^n \Longrightarrow \mathbf{\Phi^*}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v_1}, ..., \boldsymbol{v_n})$$

dove $\boldsymbol{T}$ è un operatore multilineare.

Osservazione. La funzione di immersione, tramite il push forward e pull back, induce una mappa tra Σ e la varietà $\mathcal{M}$ che lo contiene, in modo da mandare vettori e 1-forme da $T_P(\Sigma)$ in $T_P(\mathcal{M})$. La mappa inversa verrà definita tramite il *proiettore ortogonale* che sarà trattato successivamente.

Un caso molto importante di pull back, si ottiene applicandolo su un operatore bilineare, ossia la metrica $\boldsymbol{g}$ dello spazio-tempo: definiamo così la *metrica indotta* su Σ:

$$\boldsymbol{\gamma} = \Phi^* \boldsymbol{g} \tag{1.27}$$

La metrica γ è chiamata *prima forma fondamentale* di Σ od anche *3-metrica* essendo la versione tridimensionale della metrica dello spazio-tempo.

Se si esplicita tutto tramite una opportuna scelta di coordinate, applicando la definizione di pull back e scrivendo tutto in forma di componenti, si ottiene:

$$\gamma_{ij} = g_{ij} \tag{1.28}$$

La ipersuperficie sarà:

- di *tipo spazio* se la metrica è Riemanniana (+,+,+);
- di *tipo tempo* se la metrica è Lorentziana (-,+,+);
- *nulla* se la metrica è degenere (0,+,+);

Dato un campo scalare t sulla varietà $\mathcal{M}$ in modo tale che la ipersuperficie Σ sia definita come una superficie di livello rispetto t, si avrà che il gradiente del campo $\boldsymbol{\nabla} t$ è normale a Σ:

$$\forall \boldsymbol{v} \text{ tangente a } \Sigma \Rightarrow \langle \nabla t, \boldsymbol{v} \rangle$$

La controparte vettoriale del gradiente del campo scalare $\vec{\boldsymbol{\nabla}} t$ (data dalla metrica) è anch'essa normale a Σ: si introduce così $\boldsymbol{n}$, *vettore normale ed unitario* alla ipersuperficie Σ.

$$\boldsymbol{n} = \left(\pm \vec{\boldsymbol{\nabla}} t \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}} t \right)^{-\frac{1}{2}} \vec{\boldsymbol{\nabla}} t \tag{1.29}$$

- Il segno $+$ è per le ipersuperfici di tipo tempo.
- Il segno $-$ è per le ipersuperfici di tipo spazio.

poiché $\boldsymbol{n}$ è normalizzato, si avrà che:

- se Σ è di tipo spazio:

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} = -1$$

- se Σ è di tipo tempo:

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} = +1$$

Osservazione. Se l'ipersuperficie è nulla tutta la costruzione svanisce poiché $\vec{\boldsymbol{\nabla}} t \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}} t = 0$.

1.2.2 Curvatura delle ipersuperfici

Sia Σ una superficie non nulla sulla quale è possibile definire la metrica indotta $\boldsymbol{\gamma}$ (eq. 1.27). Esisterà un'unica connessione $\boldsymbol{D}$ a torsione libera su Σ tale che:

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{\gamma} = 0 \tag{1.30}$$

$\boldsymbol{D}$ è la connessione di Levi Civita sulla ipersuperficie Σ associata alla metrica indotta $\boldsymbol{\gamma}$. Su tale ipersuperficie, è possibile definire il tensore di Riemann (non 4-dimensionale) che misura la non commutatività di due derivate successive:

$$R^k{}_{lij} v^l = (D_i D_j - D_j D_i) v^k \qquad \forall \boldsymbol{v} \in T_P(\Sigma) \tag{1.31}$$

La 1.31 è detta *identità di Ricci* ed il tensore di Riemann è chiamato *curvatura intrinseca*. La costruzione del tensore di Ricci, contraendo due indici del tensore di Riemann definito su Σ, è detta *curvatura gaussiana* di $(\Sigma, \boldsymbol{\gamma})$.

Tuttavia esiste un altro tipo di curvatura che riguarda l'ipersuperficie, ossia quella curvatura che tiene conto anche dello spazio $\mathcal{M}$ in cui viene immersa la Σ. Si definisce la *mappa di Weingarten* come un endomorfismo dello spazio tangente di Σ: questa applicazione mappa ogni vettore dello spazio tangente nella variazione (valutata tramite la connessione sulla ipersuperficie) del vettore normale rispetto il vettore scelto.

$$\forall \boldsymbol{v} \in T_P(\Sigma) \qquad \boldsymbol{\chi} : \boldsymbol{v} \longmapsto \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{n}$$

La proprietà fondamentale di tale mappa è quella di essere *autoaggiunta* rispetto la metrica indotta $\boldsymbol{\gamma}$, ossia[9]:

$$\boldsymbol{u\chi(v)} = \boldsymbol{v\chi(u)} \qquad\qquad \forall(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \in T_P(\Sigma)\times T_P(\Sigma) \tag{1.32}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u\nabla_v n} - \boldsymbol{v\nabla_u n} &= u^\mu v^\nu(\nabla_\nu n_\mu - \nabla_\mu n_\nu)\\ &= u^\mu v^\nu[\nabla_\nu(\alpha\nabla_\mu t) - \nabla_\mu(\alpha\nabla_\nu t)]\\ &= u^\mu v^\nu[\nabla_\mu t\nabla_\nu\alpha + \alpha\nabla_\nu\nabla_\mu t - \nabla_\nu t\nabla_\mu\alpha - \alpha\nabla_\mu\nabla_\nu t]\\ &= v^\nu \underbrace{u^\mu\nabla_\mu t}_{0}\nabla_\nu\alpha - u^\mu \underbrace{v^\nu\nabla_\nu t}_{0}\nabla_\mu\alpha + \alpha\underbrace{(\nabla_\nu\nabla_\mu t - \nabla_\mu\nabla_\nu t)}_{0}v^\nu u^\mu] = 0\end{aligned}$$

Il risultato è stato ottenuto tenendo conto della proprietà della connessione di Levi Civita che annulla $(\nabla_\nu\nabla_\mu t - \nabla_\mu\nabla_\nu t)$ e del fatto che ogni vettore tangente alla ipersuperficie Σ è ortogonale a $\vec{\boldsymbol{\nabla}}t$, infatti $u^\mu\nabla_\mu t = v^\nu\nabla_\nu t = 0$.
Il fatto che la mappa di Weingarten sia autoaggiunta, suggerisce che i suoi autovalori sono sempre dei numeri reali: questi ultimi sono detti *curvature principali* di Σ. Gli autovettori corrispondenti sono chiamati *direzioni principali* di Σ.
Si definisce invece *curvatura media* H della ipersuperficie Σ la media aritmetica delle tre curvature principali (poiché Σ è tridimensionale):

$$H = \frac{1}{3}(\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3) \tag{1.33}$$

Infine, è possibile definire una forma bilineare simmetrica (la simmetria è dovuta al fatto che la mappa di Weingarten sia autoaggiunta) nel seguente modo:

$$\boldsymbol{K}:\ T_P(\Sigma)\times T_P(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \longmapsto -\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{v})$$

[9] $\alpha = \left(\pm\vec{\boldsymbol{\nabla}}t\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}}t\right)^{-\frac{1}{2}}$

Questa costruzione viene chiamata *seconda forma fondamentale* o più comunemente *curvatura estrinseca* della ipersuperficie Σ.
Dalla definizione della seconda forma fondamentale, esplicitando la forma di χ, si ottiene facilmente il seguente risultato[10]:

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{n} \tag{1.34}$$

$\boldsymbol{K}$ potrebbe essere considerata come una estensione della mappa di Weingarten, infatti contiene tutte le informazioni date da quest'ultima. Prendendo la traccia rispetto la metrica $\boldsymbol{\gamma}$ ed utilizzando la relazione 1.33 si ottiene:

$$\boldsymbol{K} = \gamma^{ij} K_{ij} = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = -3H \tag{1.35}$$

Si è sfruttato il fatto che la traccia di $\boldsymbol{K}$ fosse la stessa della mappa di Weingarten.

1.2.3 Il proiettore ortogonale

Con l'introduzione del *proiettore ortogonale* nella geometria delle ipersuperfici, si giunge a delle conclusioni molto importanti nel formalismo $3+1$: questo sarà l'operatore chiave in grado di trovare un ponte tra le grandezze dello spazio-tempo e le grandezze definite sulla ipersuperficie con dimensionalità minore.

In ogni punto di Σ lo spazio di tutti i vettori dello spazio-tempo può essere decomposto nel seguente modo:

$$T_P(\mathcal{M}) = T_P(\Sigma) \oplus \; span(\boldsymbol{n}) \tag{1.36}$$

[10] Il segno meno nella definizione di $\boldsymbol{K}$ è una convenzione, non ha nessun significato fisico.

Si definisce *proiettore ortogonale* su Σ l'operatore $\vec{\gamma}$ associato alla decomposizione 1.36.
Formalmente:

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}: \ T_P(\mathcal{M}) &\longrightarrow T_P(\Sigma) \\ \boldsymbol{v} &\longmapsto \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{n} \end{aligned} \tag{1.37}$$

I casi limite sono:

- $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n}$

$$\vec{\gamma}(\boldsymbol{n}) = 0$$

- $\forall \boldsymbol{v} \in T_P(\Sigma)$ si riduce alla funzione identità:

$$\vec{\gamma}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$$

In componenti, la metrica indotta può essere espansa nel seguente modo:

$$\gamma^i{}_j = \delta^i{}_j + n^i n_j \tag{1.38}$$

Il proiettore ortogonale, per definizione, induce una mappa che risulta essere l'inversa di quella indotta dalla funzione di immersione, ossia:

$$T_P(\mathcal{M}) \longrightarrow T_P(\Sigma)$$

Si può così costruire una mappa agente su operatori multilineari utilizzando gli spazi tangenti duali:

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_{\mathcal{M}} \boldsymbol{A} : T_P(\mathcal{M})^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{v_1}, ..., \boldsymbol{v_n}) &\longmapsto \boldsymbol{A}(\vec{\gamma}(\boldsymbol{v_1}), ..., \vec{\gamma}(\boldsymbol{v_n})) \end{aligned}$$

Applicando la definizione ad una forma bilineare, ossia la metrica indotta su Σ, $\vec{\gamma}_{\mathcal{M}}\boldsymbol{\gamma}$ sarà in seguito una forma bilineare anche su $\mathcal{M}$.

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_{\mathcal{M}} : T_P(\mathcal{M})^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}) &\longmapsto \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{v_1}), \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{v_2}))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{v_1} + (\boldsymbol{v_1}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v_2} + (\boldsymbol{v_2}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}) &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}) + (\boldsymbol{v_1}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{v_2}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}) \\ &\quad + (\boldsymbol{v_1}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{n}) + (\boldsymbol{v_2}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{n})\end{aligned}$$

Ora:

- se $\boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{v_2} = n$ si avrà:
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{n}), \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{n})) = 0$$
Avendo anche utilizzato la proprietà $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n} = -1$.

- Se invece $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \in T_P(\Sigma)$ allora $(\boldsymbol{v_1}\cdot\boldsymbol{n}) = (\boldsymbol{v_2}\cdot\boldsymbol{n}) = 0$
Si riduce quindi a $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{v_1}), \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{v_2})) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2})$.

Questo è un risultato molto importante poiché $\vec{\gamma}_{\mathcal{M}}\boldsymbol{\gamma}$ costituisce una estensione della metrica indotta e delle sue proprietà per tutti i vettori di $T_P(\mathcal{M})$.
L'estensione di $\boldsymbol{\gamma}$ viene così espressa nel seguente modo:

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{g} + \boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n} \tag{1.39}$$

In componenti:

$$\gamma_{ij} = g_{ij} + n_i n_j \tag{1.40}$$

Questa costruzione risulta utile per estendere sullo spazio-tempo $\mathcal{M}$ ogni grandezza tensoriale definita su Σ.

$$(\vec{\gamma}^{*}T)^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}{}_{\beta_1,\ldots,\beta_q} = \gamma^{\alpha_1}{}_{\mu_1}\cdots\gamma^{\alpha_p}{}_{\mu_p}\gamma^{\nu_1}{}_{\beta_1}\cdots\gamma^{\nu_q}{}_{\beta_q}T^{\mu_1,\ldots,\mu_p}{}_{\nu_1\ldots,\nu_q} \tag{1.41}$$

Tenendo ora conto delle definizioni $\boldsymbol{K}$ e del proiettore ortogonale, si può trovare esplicitamente l'estensione della curvatura sullo spazio-tempo $\mathcal{M}$. Si definisce innanzitutto:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{n} \tag{1.42}$$

vettore ortogonale ad $\boldsymbol{n}$.

$$\forall(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in T_P(\mathcal{M})$$

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{K}(\vec{\gamma}(\boldsymbol{u}), \vec{\gamma}(\boldsymbol{v})) = -\vec{\gamma}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\vec{\gamma}(\boldsymbol{v})}\boldsymbol{n}$$

Esplicitando $\vec{\gamma}(\bullet)$ tramite la 1.37 si ottiene:

$$-[\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{n}] \cdot [\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{n} + (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{n}]$$

Distribuendo tutti i prodotti, utilizzando la 1.42 ed il fatto che $\boldsymbol{n}$ sia ortogonale a $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{n}$ si ottiene:

$$-\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{n} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u})(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}) \tag{1.43}$$

In definitiva, si ottiene la seguente espressione:

$$\nabla_\beta n_\alpha = -K_{\alpha\beta} - a_\alpha n_\beta \tag{1.44}$$

Prendendo la traccia di tale equazione, contraendo tutti e due i membri con la metrica $g^{\alpha\beta}$ si ottiene:

$$\boldsymbol{K} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{n} \tag{1.45}$$

Dalla 1.44 è possibile notare che la curvatura $\boldsymbol{K}$ è l'applicazione del proiettore ortogonale sulla 1-forma $\boldsymbol{\nabla n}$:

$$K = \vec{\gamma}^*(\boldsymbol{\nabla n}) \tag{1.46}$$

Un risultato fondamentale dell'applicazione del proiettore ortogonale è quello di riuscire a collegare le connessione dello spazio-tempo $\boldsymbol{\nabla}$ e la connessione di Levi Civita $\boldsymbol{D}$ rispetto la metrica $\boldsymbol{\gamma}$ definita sulla ipersuperficie Σ:

$$\vec{\gamma}^*\boldsymbol{\nabla T} = \boldsymbol{DT} \tag{1.47}$$

Inprimis bisogna dimostrare che $\vec{\boldsymbol{\gamma}}^{*}\boldsymbol{\nabla}$ è una connessione a torsione libera su Σ[11]: bisogna quindi dimostrare che anche la 1.15 sia valida, ossia $\vec{\boldsymbol{\gamma}}^{*}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\gamma} = 0$.
Dalla 1.41 è possibile scrivere:

$$\begin{aligned}
(\vec{\boldsymbol{\gamma}}^{*}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\gamma})_{\alpha\beta\gamma} &= \gamma^{\mu}{}_{\alpha}\gamma^{\nu}{}_{\beta}\gamma^{\rho}{}_{\gamma}\nabla_{\rho}\gamma_{\mu\nu} \\
&= \gamma^{\mu}{}_{\alpha}\gamma^{\nu}{}_{\beta}\gamma^{\rho}{}_{\gamma}\nabla_{\rho}(g_{\mu\nu} + n_{\mu}n_{\nu}) \\
&= \gamma^{\mu}{}_{\alpha}\gamma^{\nu}{}_{\beta}\gamma^{\rho}{}_{\gamma}\underbrace{\nabla_{\rho}g_{\mu\nu}}_{0} + \gamma^{\mu}{}_{\alpha}\gamma^{\nu}{}_{\beta}\gamma^{\rho}{}_{\gamma}(\nabla_{\rho}n_{\mu}n_{\nu}) \\
&= \underbrace{n_{\mu}\gamma^{\mu}{}_{\alpha}}_{0}\gamma^{\nu}{}_{\beta}\gamma^{\rho}{}_{\gamma}(\nabla_{\rho}n_{\nu}) + \gamma^{\mu}{}_{\alpha}\underbrace{n_{\nu}\gamma^{\nu}{}_{\beta}}_{0}\gamma^{\rho}{}_{\gamma}(\nabla_{\rho}n_{\mu}) = 0
\end{aligned}$$

poiché la connessione a torsione libera esiste ed è unica, si ha che:

$$\boldsymbol{D} = \vec{\boldsymbol{\gamma}}^{*}\boldsymbol{\nabla} \tag{1.48}$$

In definitiva, sia T un campo tensoriale generico sulla ipersuperficie Σ, allora dalla 1.48:

$$D_{\rho}T^{\alpha_1,\dots,\alpha_p}{}_{\beta_1,\dots,\beta_q} = \gamma^{\alpha_1}{}_{\mu_1}\cdots\gamma^{\alpha_p}{}_{\mu_p}\gamma^{\nu_1}{}_{\beta_1}\cdots\gamma^{\nu_q}{}_{\beta_q}\gamma^{\sigma}{}_{\rho}\nabla_{\sigma}T^{\mu_1,\dots,\mu_p}{}_{\nu_1\dots,\nu_q} \tag{1.49}$$

Da queste espressioni inizia ad emergere in maniera più dettagliata il motivo per cui la curvatura estrinseca della ipersuperficie Σ dipenda dall'immersione in $\mathcal{M}$. Avendo collegato tramite il proiettore ortogonale le connessioni $\boldsymbol{D}$ e $\boldsymbol{\nabla}$, esiste una particolare situazione in cui queste due connessioni sono a loro volta legate alla curvatura $\boldsymbol{K}$.
Siano $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ campi vettoriali tangenti a Σ, quindi $n_{\mu}v^{\mu} = 0$:

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v})^{\alpha} = u^{\sigma}\nabla_{\sigma}v^{\alpha} &= u^{\sigma}\gamma^{\nu}{}_{\sigma}\gamma^{\alpha}{}_{\mu}\nabla_{\nu}v^{\mu} \\
&= u^{\nu}(\delta^{\alpha}{}_{\mu} + n^{\alpha}n_{\mu})\nabla_{\nu}v^{\mu} \\
&= u^{\nu}\nabla_{\nu}v^{\alpha} + u^{\nu}n^{\alpha}n_{\mu}\nabla_{\nu}v^{\mu} \\
&= u^{\nu}\nabla_{\nu}v^{\alpha} - n^{\alpha}u^{\nu}v^{\mu}\nabla_{\nu}n_{\mu}
\end{aligned}$$

[11] La definizione di connessione a torsione libera è data nella sezione dedicata alla connessione di Levi Civita.

L'ultimo passaggio della ultima riga sfrutta la regola di Leibniz della derivata covariante di $n_\mu v^\mu = 0$

$$\nabla_\nu(n_\mu v^\mu) = n^\alpha n_\mu \nabla_\nu v^\mu + n^\alpha v^\mu \nabla_\nu n_\mu = 0$$
$$\Rightarrow n^\alpha n_\mu \nabla_\nu v^\mu = -n^\alpha v^\mu \nabla_\nu n_\mu$$

Dalla 1.34 in componenti, si riesce ad inserire $\boldsymbol{K}$ all'interno della relazione precedente, arrivando alla seguente forma vettoriale:

$$\boldsymbol{D_u v} = \boldsymbol{\nabla_u v} + \boldsymbol{K}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{n} \tag{1.50}$$

Il risultato riportato nella 1.50 indica che la curvatura estrinseca dipende esplicitamente dall'ambiente di immersione.
$\boldsymbol{K}$ indica quindi quanto una geodetica in Σ devia da una geodetica in $\mathcal{M}$. Ad esempio se Σ fosse un piano immerso in $\mathbb{R}^3$, le due connessioni $\boldsymbol{\nabla}$ e $\boldsymbol{D}$ coinciderebbero e la curvatura estrinseca da una misura nulla di questa deviazione: nel tal caso si parla di *ipersuperfici totalmente geodetiche*. Se invece si avesse una sfera immersa in $\mathbb{R}^3$, le due geodetiche non coinciderebbero.

1.2.4 Relazioni di Gauss-Codazzi-Mainardi

Tramite gli strumenti introdotti precedentemente, si giunge finalmente al cuore della teoria delle ipersuperfici. Le relazioni di Gauss-Codazzi-Mainardi decompongono $^4\boldsymbol{Riem}$ definito sullo spazio-temporispetto a grandezze definite su Σ.
La prima relazione che verrà trattata sarà quella di Gauss.

Il punto di partenza è la 1.31 definito su Σ e considerando la connessione $\boldsymbol{D}$ associata alla metrica $\boldsymbol{\gamma}$

$$(D_\alpha D_\beta - D_\beta D_\alpha)v^\gamma = R^\gamma{}_{\mu\alpha\beta} v^\mu$$

con $\boldsymbol{v}$ vettore tangente a Σ.

Dalla 1.49:

$$D_\alpha D_\beta v^\gamma = D_\alpha(D_\beta v^\gamma) = \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \gamma^\gamma{}_\rho \nabla_\mu (D_\nu v^\rho)$$
$$= \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \gamma^\gamma{}_\rho \nabla_\mu (\gamma^\sigma{}_\nu \gamma^\rho{}_\lambda \nabla_\sigma v^\lambda)$$

Utilizzando le relazioni:

- $\gamma^\mu{}_\nu v_\mu = 0$
- $\gamma^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + n^\mu n_\nu$

$$\begin{aligned}
D_\alpha D_\beta v^\gamma &= \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \gamma^\gamma{}_\rho [\gamma^\sigma{}_\nu \gamma^\rho{}_\lambda \nabla_\mu \nabla_\sigma v^\lambda + (\gamma^\sigma{}_\nu \nabla_\sigma v^\lambda) \nabla_\mu \gamma^\rho{}_\lambda + (\gamma^\rho{}_\lambda \nabla_\sigma v^\lambda) \nabla_\mu \gamma^\sigma{}_\nu] \\
&= \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \gamma^\gamma{}_\rho [\gamma^\sigma{}_\nu \gamma^\rho{}_\lambda \nabla_\mu \nabla_\sigma v^\lambda + (\gamma^\sigma{}_\nu \nabla_\sigma v^\lambda) \nabla_\mu (\delta^\sigma{}_\nu + n^\sigma n_\nu) + \\
&\quad + (\gamma^\rho{}_\lambda \nabla_\sigma v^\lambda) \nabla_\mu (\delta^\rho{}_\lambda + n^\rho n_\lambda)] \\
&= \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \gamma^\gamma{}_\rho [\gamma^\sigma{}_\nu \gamma^\rho{}_\lambda \nabla_\mu \nabla_\sigma v^\lambda + (\gamma^\sigma{}_\nu \nabla_\sigma v^\lambda)(n^\rho \nabla_\mu n_\lambda + n_\lambda \nabla_\mu n^\rho) \\
&\quad + (\gamma^\rho{}_\lambda \nabla_\sigma v^\lambda)(n^\sigma \nabla_\mu n_\nu + n_\nu \nabla_\mu n^\sigma)] \\
&= \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \gamma^\gamma{}_\rho [\gamma^\sigma{}_\nu \gamma^\rho{}_\lambda \nabla_\mu \nabla_\sigma v^\lambda + (\gamma^\sigma{}_\nu \nabla_\sigma v^\lambda) n^\rho \nabla_\mu n_\lambda + (\gamma^\sigma{}_\nu \nabla_\sigma v^\lambda) n_\lambda \nabla_\mu n^\rho \\
&\quad + (\gamma^\rho{}_\lambda \nabla_\sigma v^\lambda) n^\sigma \nabla_\mu n_\nu + (\gamma^\rho{}_\lambda \nabla_\sigma v^\lambda) n_\nu \nabla_\mu n^\sigma)] \\
&= \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \gamma^\gamma{}_\rho \gamma^\sigma{}_\nu \gamma^\rho{}_\lambda \nabla_\mu \nabla_\sigma v^\lambda + \underbrace{\gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \gamma^\gamma{}_\rho \gamma^\sigma{}_\nu (\nabla_\sigma v^\lambda) n^\rho \nabla_\mu n_\lambda}_{0} \\
&\quad + \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \gamma^\gamma{}_\rho \gamma^\sigma{}_\nu (\nabla_\sigma v^\lambda) n_\lambda \nabla_\mu n^\rho + \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \gamma^\gamma{}_\rho \gamma^\rho{}_\lambda (\nabla_\sigma v^\lambda) n^\sigma \nabla_\mu n_\nu + \\
&\quad + \underbrace{\gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \gamma^\gamma{}_\rho \gamma^\rho{}_\lambda (\nabla_\sigma v^\lambda) n_\nu \nabla_\mu n^\sigma)}_{0}
\end{aligned}$$

Sfruttando la relazione $\gamma^\mu{}_\nu n^\nu = n^\mu$ ed il fatto di poter portare la metrica dentro la derivata, si ottiene:

$$D_\alpha D_\beta v^\gamma = \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \gamma^\gamma{}_\rho \gamma^\sigma{}_\nu \gamma^\rho{}_\lambda \nabla_\mu \nabla_\sigma v^\lambda + \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \gamma^\gamma{}_\rho \gamma^\rho{}_\lambda (\nabla_\sigma v^\lambda) n^\sigma \nabla_\mu n_\nu$$
$$- \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \gamma^\gamma{}_\rho \gamma^\sigma{}_\nu (\nabla_\mu n^\rho) v^\lambda \nabla_\sigma n_\lambda$$

Da questi tre termini si riesce a trovare l'espressione, in componenti, della curvatura estrinseca $K_{\alpha\beta}$.

Infatti:

- $\gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \nabla_\mu n_\nu = -K_{\alpha\beta}$
- $\gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\gamma{}_\rho = K^\gamma{}_\alpha \gamma^\sigma{}_\beta$

Riscrivendo il tutto, si avrà che:

$$D_\alpha D_\beta v^\gamma = -K_{\alpha\beta}\gamma^\gamma{}_\lambda n^\sigma \nabla_\sigma v^\lambda - K^\gamma{}_\alpha K_{\beta\gamma} + \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\gamma{}_\lambda \nabla_\mu \nabla_\sigma v^\lambda \tag{1.51}$$

Permutando gli indici, si ottiene la seconda parte della differenza delle doppie derivate $D_\beta D_\alpha v^\gamma$. Mettendo quindi insieme i due termini della differenza, si ottiene

$$\underbrace{D_\alpha D_\beta v^\gamma - D_\beta D_\alpha v^\gamma}_{R^\gamma{}_{\mu\alpha\beta} v^\mu} = (K_{\alpha\mu}K^\gamma{}_\beta - K_{\beta\mu}K^\gamma{}_\alpha)v^\mu + \gamma^\rho{}_\alpha \sigma^\mu{}_\beta \gamma^\gamma{}_\lambda \underbrace{(\nabla_\rho \nabla_\sigma - \nabla_\sigma \nabla_\rho) v^\lambda}_{{}^4R^\gamma{}_{\mu\rho\sigma} v^\mu}$$

poiché questa relazione è valida per ogni vettore, è possibile togliere la dipendenza da quest'ultimo:

$$\gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \gamma^\gamma{}_\rho \gamma^\sigma{}_\delta {}^4R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = R^\gamma{}_{\delta\alpha\beta} + K_{\beta\delta}K^\gamma{}_\alpha - K_{\alpha\delta}K^\gamma{}_\beta \tag{1.52}$$

La 1.52 è detta *relazione di Gauss*: tale equazione mette in relazione ${}^4R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$ definito sullo spazio-tempo con grandezze definite sulla ipersuperficie Σ tra cui $\boldsymbol{K}$ e il tensore di Riemann sotto la connessione $\boldsymbol{D}$ associata alla 3-metrica $\boldsymbol{\gamma}$. Risulta possibile anche trovare la 1.52 in funzione del tensore di Ricci contraendo due indici del tensore di Riemann ed utilizzando l'idempotenza del proiettore ortogonale:

$$\gamma^\mu{}_\beta \gamma^\beta{}_\nu = \gamma^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + n^\mu n_\nu$$

Si ha infine:

$$\gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta {}^4R_{\mu\nu} + \gamma_{\alpha\mu} n^\nu \gamma^\rho{}_\beta n^{\sigma 4} R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = R_{\alpha\beta} + K K_{\alpha\beta} - K_{\alpha\mu}K^\mu{}_\beta \tag{1.53}$$

con $K = K^\mu{}_\mu$.

La 1.53 è definita *relazione di Gauss contratta.*

Se invece si prende la traccia rispetto la metrica $\boldsymbol{\gamma}$, si ottiene la *relazione di Gauss scalare* che costituisce una generalizzazione del *teorema Egregium* (formulato dallo stesso Gauss solamente e valido solamente se l'ambiente di immersione è $\mathbb{R}^3$).

$$ {}^4R + 2\,{}^4R_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = R + K^2 - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} \tag{1.54} $$

Se invece l'identità di Ricci venisse applicata al vettore normale a Σ, si giungerebbe alla relazione di Codazzi-Mainardi.

$$ (\nabla_\alpha\nabla_\beta - \nabla_\beta\nabla_\alpha)n^\gamma = {}^4R^\gamma{}_{\mu\alpha\beta}n^\gamma \tag{1.55} $$

Utilizzando la relazione di Gauss (eq.1.52), si ottiene:

$$ \begin{aligned} \gamma^\mu{}_\alpha\gamma^\nu{}_\beta\gamma^\gamma{}_\rho{}^4R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}n^\sigma &= \gamma^\mu{}_\alpha\gamma^\nu{}_\beta\gamma^\gamma{}_\rho(\nabla_\mu\nabla_\nu - \nabla_\nu\nabla_\mu)n^\rho \\ &= \gamma^\mu{}_\alpha\gamma^\nu{}_\beta\gamma^\gamma{}_\rho[\nabla_\mu(\nabla_\nu n^\rho) - \nabla_\nu(\nabla_\mu n^\rho)] \end{aligned} $$

Inserendo la 1.44 e tenendo in considerazione solamente un termine della differenza tra le derivate doppie, si ha:

$$ \begin{aligned} \gamma^\mu{}_\alpha\gamma^\nu{}_\beta\gamma^\gamma{}_\rho\nabla_\mu(-K^\rho{}_\nu - a^\rho n_\nu) &= -\gamma^\mu{}_\alpha\gamma^\nu{}_\beta\gamma^\gamma{}_\rho\nabla_\mu K^\rho{}_\nu - \gamma^\mu{}_\alpha\gamma^\nu{}_\beta\gamma^\gamma{}_\rho(\nabla_\mu a^\rho n_\nu) \\ &= \underbrace{-\gamma^\mu{}_\alpha\gamma^\nu{}_\beta\gamma^\gamma{}_\rho\nabla_\mu K^\rho{}_\nu}_{-D_\alpha K^\gamma{}_\beta} - \gamma^\mu{}_\alpha\underbrace{\gamma^\nu{}_\beta n_\nu}_{0}\gamma^\gamma{}_\rho(\nabla_\mu a^\rho) + \\ &\quad \underbrace{-\gamma^\mu{}_\alpha\gamma^\nu{}_\beta(\nabla_\mu n_\nu)}_{K_{\alpha\beta}}\gamma^\gamma{}_\rho a^\rho \\ &= -D_\alpha K^\gamma{}_\beta - K_{\alpha\beta}a^\gamma \end{aligned} $$

Permutando gli indici per ottenere il secondo termine delle derivate miste, si trova che grazie all'antisimmetria di $K_{\alpha\beta}$ il secondo termine dell'ultima riga si elide con il suo corrispettivo con gli indici permutati.
Si giunge così:

$$ \gamma^\mu{}_\alpha\gamma^\nu{}_\beta\gamma^\gamma{}_\rho{}^4R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = D_\beta K^\gamma{}_\alpha - D_\alpha K^\gamma{}_\beta \tag{1.56} $$

La 1.56 è la *relazione di Codazzi-Mainardi.* Come con la relazione di Gauss, è possibile contrarre due indici del tensore di Riemann e giungere alla relazione di Codazzi-Mainardi contratta:

$$\gamma^{\mu}{}_{\alpha} n^{\nu 4} R_{\mu\nu} = D_{\alpha} K - D_{\mu} K^{\mu}{}_{\alpha} \tag{1.57}$$

Tale risultato si raggiunge sfruttando l'idempotenza del proiettore ortogonale e sviluppando e distribuendo a tutti i termini in gioco la metrica espansa secondo la 1.38.

1.3 Geometria delle foliazioni

Questa sezione sarà dedicata ad ampliare lo studio delle ipersuperfici, intese come una famiglia ad un parametro continuo (il tempo) che folierà tutto lo spazio-tempo. Verranno introdotti nuovi strumenti matematici utili all'evoluzione temporale delle grandezze definite sulla ipersuperficie ad un tempo fissato.
Tutti i risultati sono indipendenti dalla fisica descritta dall'equazione di campo di Einstein e, come nella sezione precedente, dalla scelta di opportune carte.

1.3.1 Spazi-tempi globalmente iperbolici

La foliazione di $(\mathcal{M}, \boldsymbol{g})$ tramite una famiglia di ipersuperfici di tipo spazio ad un parametro è valida per una ampia classe di spazi-tempi detti *globalmente iperbolici.*
Per questa classe è possibile definire una *superficie di Cauchy* come una ipersuperficie Σ immersa in $\mathcal{M}$ tale che ogni curva di tipo tempo (o nulla) intersechi una ed una sola volta ogni ipersuperficie Σ_t. Formalmente si definisce *slice* o *foliazione* l'esistenza di un campo scalare regolare su tutto $\mathcal{M}$ tale che Σ può essere definita superficie di livello; un fatto fondamentale è quello di avere ipersuperfici che non si intersechino tra loro:

$$\Sigma_{t_1} \cap \Sigma_{t_2} = \emptyset \ , \quad t_1 \neq t_2$$

Come già definito nella 1.29, è possibile associare ad ogni slice il suo *vettore normale* di tipo tempo e, poiché si sta lavorando solamente con ipersuperfici di tipo spazio verrà solamente utilizzata la relazione:

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} = -1 \tag{1.58}$$

Sempre dalla 1.29 si definisce:

$$N = \left(-\vec{\boldsymbol{\nabla}}t \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}}t\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{1.59}$$

N è chiamata *funzione di lapse* ed è sempre positiva per ipersuperfici regolari di tipo spazio. Applicando la metrica e passando dalla forma vettoriale a quella duale, si nota (1.29) che il vettore $\boldsymbol{n}$ è collineare al vettore $\vec{\boldsymbol{\nabla}}t$ associato alla 1-forma ∇t.
Utile alla teoria delle foliazioni è definire il *vettore di evoluzione normale* $\boldsymbol{m}$:

$$\boldsymbol{m} = -N\boldsymbol{n} \tag{1.60}$$

il cui modulo quadro è:

$$\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{m} = -N^2 \tag{1.61}$$

La proprietà di questo vettore che viene dalla sua stessa definizione è quella di dare come risultato 1 nel prodotto scalare con ∇t:

$$\langle \nabla t, \boldsymbol{m} \rangle = N \langle \nabla t, \boldsymbol{n} \rangle = N^2 \left\langle \nabla t, \vec{\nabla} t \right\rangle = 1 \tag{1.62}$$

Dall'unitarietà del prodotto scalare con ∇t, si giunge al fatto che $\boldsymbol{m}$ è adattato al campo scalare: questo aspetto suggerisce che ogni punto punto della ipersuperficie $\Sigma_{t+\delta t}$ può essere ottenuto a partire un intorno di Σ_t trasportato dal vettore $\delta t\boldsymbol{m}$. In definitiva il vettore di evoluzione normale è responsabile del *trasporto secondo Lie* (*Lie dragging*) delle ipersuperfici. L'evoluzione temporale delle ipersuperfici è accompagnata quindi da uno strumento noto alla geometria differenziale detto *derivata di Lie*: quest'ultima a differenza della derivata covariante necessita dell'esistenza di *congruenze* (definite in questo caso da $\delta t\boldsymbol{m}$) sulla varietà.

1.3.2 Osservatori euleriani

Considerando lo spazio-tempo foliato da una famiglia di superfici di Cauchy ed una curva di tipo tempo immersa in $\mathcal{M}$, si può considerare il vettore $\boldsymbol{n}$ come la 4-velocità[12] di un qualche osservatore: in questo modo ogni ipersuperficie diventa localmente il luogo in cui gli eventi sono simultanei. Questa famiglia di sistemi di riferimento è quella degli *osservatori euleriani*.

L'accelerazione di un osservatore euleriano è definita come:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\nabla_n n} \tag{1.63}$$

Dalla definizione di $\boldsymbol{a}$ si nota immediatamente che 4-velocità e 4-accelerazione sono ortogonali. Esprimendo la 1.63 esplicitando la definizione di $\boldsymbol{n}$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
a_\alpha &= n^\mu (\nabla_\mu n_\alpha) \\
&= -n^\mu [(\nabla_\alpha t) \nabla_\mu N + N \underbrace{\nabla_\mu \nabla_\alpha t}_{\nabla_\alpha \nabla_\mu t}] \\
&= -n^\mu (-n_\alpha \frac{1}{N} \nabla_\mu N + N \nabla_\alpha \nabla_\mu t) \\
&= n^\mu n_\alpha \frac{1}{N} \nabla_\mu N + N \nabla_\alpha \left(\frac{1}{N} n_\mu \right) n^\mu \\
&= \frac{1}{N} n^\mu n_\alpha \nabla_\mu N + N \left(-\underbrace{n^\mu n_\mu}_{-1} \nabla_\alpha \frac{1}{N} - \frac{1}{N} \underbrace{n^\mu \nabla_\alpha n_\mu}_{0} \right) \\
&= \frac{1}{N} n^\mu n_\alpha \nabla_\mu N + N \nabla_\alpha \frac{1}{N} \\
&= \frac{1}{N} (n^\mu n_\alpha \nabla_\mu N + \nabla_\alpha N) \\
&= \frac{1}{N} \gamma^\mu{}_\alpha \nabla_\mu N
\end{aligned}$$

Avendo trovato nell'ultima riga la dipendenza dalla metrica, dalla 1.49 che collega le connesioni dello spazio-tempo $\boldsymbol{\nabla}$ e della ipersuperficie $\boldsymbol{D}$, si può giungere alla seguente

[12] Intuitivamente è possibile considerare la velocità come il vettore tangente alla curva (di tipo tempo) immersa nello spazio-tempo.

forma in funzione della funzione di lapse:

$$a_\alpha = D_\alpha \ln N \tag{1.64}$$

che espressa in forma vettoriale:

$$\boldsymbol{a} = \vec{\boldsymbol{D}} \ln N \tag{1.65}$$

Con questo nuovo risultato, è utile calcolare il gradiente di $\underline{\boldsymbol{n}}$ ed $\underline{\boldsymbol{m}}$ per osservatori euleriani. Dalla dualità delle grandezze tramite la metrica, la 1.64 può essere scritta:

$$\underline{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{D} \ln N \tag{1.66}$$

mentre la 1.44 assume la forma:

$$\boldsymbol{\nabla}\underline{\boldsymbol{n}} = -\boldsymbol{K} - \underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{n}} \tag{1.67}$$

Inserendo quindi la 1.66 nella 1.67 si ottiene una nuova espressione per il gradiente di $\underline{\boldsymbol{n}}$ che in forma di componenti appare nel seguente modo:

$$\nabla_\beta n_\alpha = -K_{\alpha\beta} - n_\beta D_\alpha \ln N \tag{1.68}$$

Una volta trovata la relazione per n, facilmente questa si estende ad m poiché sono la stessa grandezza a meno di un riscalamento per una funzione di lapse.

$$\nabla_\beta m^\alpha = -N K^\alpha{}_\beta - D^\alpha N n_\beta + n^\alpha \nabla_\beta N \tag{1.69}$$

Il termine in più è dovuto all'applicazione della regola di Leibniz a $\boldsymbol{\nabla}(N\boldsymbol{n})$.

1.3.3 Evoluzione della metrica e del proiettore ortogonale

Come detto in precedenza, l'evoluzione temporale delle ipersuperfici e delle grandezze su esse definite, sono legate alla derivata di Lie. L'evoluzione della metrica $\boldsymbol{\gamma}$ della ipersuperficie Σ_t è data dalla derivata di Lie lungo $\boldsymbol{m}$ della 3-metrica stessa. Prima di mostrare i risultati di questa sezione, è conveniente richiamare la relazione tra la derivata di Lie e la connessione ∇ a torsione nulla:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_u T^{\alpha_1,\dots,\alpha_k}{}_{\beta_1,\dots,\beta_l} &= u^\mu \nabla_\mu T^{\alpha_1,\dots,\alpha_k}{}_{\beta_1,\dots,\beta_l} - \sum_{i=1}^{k} T^{\alpha_1,\dots,\sigma\dots,\alpha_k}{}_{\beta_1,\dots,\beta_l} \nabla_\sigma u^{\alpha_1} + \\ &+ \sum_{i=1}^{l} T^{\alpha_1,\dots,\alpha_k}{}_{\beta_1,\dots,\sigma,\dots,\beta_l} \nabla_{\beta_i} u^\sigma\end{aligned} \tag{1.70}$$

Applicando esplicitamente la 1.70 per valutare la derivata di Lie della 3-metrica si ha:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\boldsymbol{m}}\gamma_{\alpha\beta} &= n^\mu \nabla_\mu \gamma_{\alpha\beta} + \gamma_{\mu\beta}\nabla_\alpha m^\mu + \gamma_{\alpha\mu}\nabla_\beta m^\mu \\ &= N m^\mu \nabla_\mu \gamma_{\alpha\beta} - \gamma_{\mu\beta}(N K^\mu{}_\alpha + D^\mu N n_\alpha - n^\mu \nabla_\alpha N) + \\ &\quad - \gamma_{\alpha\mu}(N K^\mu{}_\beta + D^\mu N n_\beta - n^\mu \nabla_\beta N) \\ &= \underbrace{N m^\mu \nabla_\mu (\delta_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta)}_{0} - \gamma_{\mu\beta}(N K^\mu{}_\alpha + D^\mu N n_\alpha - n^\mu \nabla_\alpha N) \\ &\quad - \gamma_{\alpha\mu}(N K^\mu{}_\beta + D^\mu N n_\beta - n^\mu \nabla_\beta N) \\ &= -\gamma_{\mu\beta} N K^\mu{}_\alpha - \gamma_{\mu\beta} D^\mu N n_\alpha + \underbrace{n^\mu \gamma_{\mu\beta}}_{0} \nabla_\alpha N - \gamma_{\alpha\mu} N K^\mu{}_\beta - \gamma_{\alpha\mu} D^\mu N n_\beta + \\ &\quad + \underbrace{\gamma_{\alpha\mu} n^\mu}_{0} \nabla_\beta N \\ &= -N K_{\alpha\beta} - N K_{\beta\alpha} - n_\alpha D_\beta N - n_\beta D_\alpha N \\ &= -2N K_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

in forma vettoriale:

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{\gamma} = -2N\boldsymbol{K} \tag{1.71}$$

Esplicitando $\boldsymbol{m}$ in funzione di $\boldsymbol{n}$, si trova:

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{m}}\gamma_{\alpha\beta} = N\mathcal{L}_{\boldsymbol{n}}\gamma_{\alpha\beta} \tag{1.72}$$

Di conseguenza, si ricava l'espressione per $\boldsymbol{K}$:

$$\boldsymbol{K} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{\gamma} \tag{1.73}$$

La 1.73 è la definizione maggiormente utilizzata in relatività numerica per definire il tensore di curvatura estrinseca. Quest'ultima definizione ha significato solamente se la Σ_t è parte di una foliazione dello spazio-tempo.

Utilizzando il vettore normale di evoluzione è possibile valutare anche il comportamento del proiettore ortogonale lungo una foglia dello spazio tempo[13]. Applicando la 1.70, svolgendo gli stessi calcoli ed utilizzando le stesse relazioni per giungere alla 1.71, si verifica che:

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{m}}\vec{\boldsymbol{\gamma}} = \mathcal{L}_{\boldsymbol{m}}\gamma^{\alpha}{}_{\beta} = 0 \tag{1.74}$$

Questa relazione ha un significato abbastanza profondo poiché la derivata di Lie di un generico campo tensoriale tangente a Σ_t rimane tangente alla ipersuperficie stessa. Il proiettore agisce in questo caso come l'operatore identità poiché, non avendo nulla da proiettare, lascia invariato il tensore.
Formalmente:

$$\vec{\boldsymbol{\gamma}}^{*}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T} \tag{1.75}$$

che in forma di componenti si traduce nella seguente relazione:

$$\gamma^{\alpha}{}_{\mu}\gamma^{\nu}{}_{\beta}T^{\mu}{}_{\nu} = T^{\alpha}{}_{\beta} \tag{1.76}$$

Computando la derivata di Lie per il campo tensoriale proiettato $\gamma^{\alpha}{}_{\mu}\gamma^{\nu}{}_{\beta}T^{\mu}{}_{\nu}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\boldsymbol{m}}(\gamma^{\alpha}{}_{\mu}\gamma^{\nu}{}_{\beta}T^{\mu}{}_{\nu}) &= \gamma^{\nu}{}_{\beta}T^{\mu}{}_{\nu}\underbrace{\mathcal{L}_{\boldsymbol{m}}\gamma^{\alpha}{}_{\mu}}_{0} + \gamma^{\alpha}{}_{\mu}T^{\mu}{}_{\nu}\underbrace{\mathcal{L}_{\boldsymbol{m}}\gamma^{\nu}{}_{\beta}}_{0} + \gamma^{\alpha}{}_{\mu}\gamma^{\nu}{}_{\beta}\mathcal{L}_{\boldsymbol{m}}T^{\mu}{}_{\nu} \\ &= \mathcal{L}_{\boldsymbol{m}}T^{\alpha}{}_{\beta}\end{aligned}$$

Si nota quindi che il proiettore agisce come operatore di identità anche sulle derivate di Lie, infatti:

$$\vec{\boldsymbol{\gamma}}^{*}\mathcal{L}_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{T} = \mathcal{L}_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{T} \tag{1.77}$$

[13] Ogni ipersuperficie che crea una foliazione dello spazio-tempo è detta *foglia*.

Facendo invece la derivata di Lie del proiettore rispetto $\boldsymbol{n}$, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\boldsymbol{n}}\gamma^{\alpha}{}_{\beta} &= n^{\mu}\nabla_{\mu}\gamma^{\alpha}{}_{\beta} + \gamma^{\mu}{}_{\beta}\nabla_{\mu}n^{\alpha} - \gamma^{\alpha}{}_{\mu}\nabla_{\beta}n^{\mu} \\
&= \underbrace{n^{\mu}\nabla_{\mu}\gamma^{\alpha}{}_{\beta}}_{0} + \gamma^{\mu}{}_{\beta}(-K^{\alpha}{}_{\mu} - n_{\mu}D^{\alpha}\ln N) - \gamma^{\alpha}{}_{\mu}(-K^{\mu}{}_{\beta} - n_{\beta}D^{\mu}\ln N) \\
&= -\underbrace{\gamma^{\mu}{}_{\beta}K^{\alpha}{}_{\mu}}_{K^{\alpha}{}_{\beta}} - K^{\alpha}{}_{\beta} - \underbrace{\gamma^{\mu}{}_{\beta}n_{\mu}}_{0}D^{\alpha}\ln N + \underbrace{\gamma^{\alpha}{}_{\mu}K^{\mu}{}_{\beta}}_{K^{\alpha}{}_{\beta}} + \gamma^{\alpha}{}_{\mu}n_{\beta}D^{\mu}\ln N \\
&= n_{\beta}D^{\alpha}\ln N \neq 0
\end{aligned}$$

Non esplicitando le coordinate:

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{n}}\vec{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{D} \otimes n \ln N \neq 0 \tag{1.78}$$

Questo risultato riflette un fatto fondamentale: pur essendo molto simili dal punto di vista della costruzione matematica, $\boldsymbol{m}$ ed $\boldsymbol{n}$ hanno comportamenti diversi nell'evoluzione di una ipersuperficie. Con questo risultato si è mostrato che le ipersuperfici sono trasportate secondo Lie dal vettore $\boldsymbol{m}$ e non da $\boldsymbol{n}$: $\boldsymbol{m}$ risulta avere quindi un ruolo privilegiato.

1.3.4 Ultima decomposizione del tensore di Riemann

Le relazioni di Gauss-Codazzi-Mainardi risultano molto utili quando si tratta una ipersuperficie presa singolarmente: questo perché compaiono solamente derivate con direzione parallela a Σ_t. Il prossimo passo è quello di decomporre il tensore di Riemann includendo nei calcoli anche derivate rispetto la direzione normale alla ipersuperficie.

Partendo dall' identità di Ricci ed applicando la proiezione secondo la relazione di Gauss:

$$\gamma_{\alpha\mu}n^{\sigma}\gamma^{\nu}{}_{\beta}{}^{4}R^{\mu}{}_{\rho\nu\sigma}n^{\rho} = \gamma_{\alpha\mu}n^{\sigma}\gamma^{\nu}{}_{\beta}(\nabla_{\nu}\nabla_{\sigma}n^{\mu} - \nabla_{\sigma}\nabla_{\nu}n^{\mu}) \tag{1.79}$$

Sviluppando il secondo membro dell'equazione:

$$\begin{aligned}
\gamma_{\alpha\mu} n^\sigma \gamma^\nu{}_\beta {}^4R^\mu{}_{\rho\nu\sigma} n^\rho &= \gamma_{\alpha\mu} n^\sigma \gamma^\nu{}_\beta [\nabla_\sigma (K^\mu{}_\nu + n_\nu D^\mu \ln N) - \nabla_\nu (K^\mu{}_\sigma + n_\sigma D^\mu \ln N)] \\
&= \gamma_{\alpha\mu} \gamma^\nu{}_\beta [n^\sigma \nabla_\sigma K^\mu{}_\nu + n^\sigma \nabla_\sigma (n_\nu D^\mu \ln N) - n^\sigma \nabla_\nu K^\mu{}_\sigma + \\
&\quad - n^\sigma \nabla_\nu (n_\sigma D^\mu \ln N)] \\
&= \gamma_{\alpha\mu} \gamma^\nu{}_\beta (n^\sigma \nabla_\sigma K^\mu{}_\nu + n^\sigma n_\nu \nabla_\sigma D^\mu \ln N + D^\mu \ln N \underbrace{n^\sigma \nabla_\sigma n_\nu}_{D_\nu \ln N} + \\
&\quad - n^\sigma \nabla_\nu K^\mu{}_\sigma - \underbrace{n^\sigma n_\sigma}_{-1} \nabla_\nu D^\mu \ln N + n^\sigma D^\mu \ln N \nabla_\nu n_\sigma)
\end{aligned}$$

Sfruttando la relazione $K^\mu{}_\nu n^\sigma = 0$, è possibile scambiare i termini nelle derivate:

$$\nabla_\sigma (K^\mu{}_\nu n^\sigma) = K^\mu{}_\nu \nabla_\nu n^\sigma + n^\sigma \nabla_\nu K^\mu{}_\nu = 0 \tag{1.80}$$

Sfruttando anche il fatto $\gamma^\nu{}_\beta n_\nu = 0$ si riesce ad eliminare il termine $\gamma_{\alpha\mu} \gamma^\nu{}_\beta n_\nu \nabla_\sigma D^\mu \ln N$. Quindi:

$$\begin{aligned}
&\gamma_{\alpha\mu} \gamma^\nu{}_\beta (n^\sigma \nabla_\sigma K^\mu{}_\nu + D^\mu \ln N D_\nu \ln N + K^\mu{}_\sigma \nabla_\nu n^\sigma + \nabla_\nu D^\mu \ln N) + \\
&\quad - \gamma_{\alpha\mu} \gamma^\nu{}_\beta n^\sigma \nabla_\sigma K^\mu{}_\nu + \gamma_{\alpha\mu} \gamma^\nu{}_\beta D^\mu \ln N D_\nu \ln N + \gamma_{\alpha\mu} \gamma^\nu{}_\beta K^\mu{}_\sigma \nabla_\nu n^\sigma + \gamma_{\alpha\mu} \gamma^\nu{}_\beta \nabla_\nu D^\mu \ln N
\end{aligned}$$

Contraendo gli indici opportuni e sfruttando la relazione 1.49, si arriva alla seguente forma:

$${}^4R^\mu{}_{\rho\nu\sigma} n^\rho = K_{\alpha\sigma} K^\sigma{}_\beta + D_\beta D_\alpha \ln N + \gamma_{\alpha\mu} \gamma^\nu{}_\beta n^\sigma \nabla_\sigma K^\mu{}_\nu + D^\alpha \ln N D_\beta \ln N \tag{1.81}$$

Tale equazione può essere ulteriormente sviluppata, infatti:

$$D_\beta D_\alpha \ln N + D^\alpha \ln N D_\beta \ln N = \frac{1}{N} D_\beta D_\alpha N$$

Quindi, finalmente si giunge:

$${}^4R^\mu{}_{\rho\nu\sigma} n^\rho = -K_{\alpha\sigma} K^\sigma{}_\beta + \frac{1}{N} D_\beta D_\alpha N + \gamma_{\alpha\mu} \gamma^\nu{}_\beta n^\sigma \nabla_\sigma K^\mu{}_\nu \tag{1.82}$$

Con i calcoli svolti fin'ora, non si è ancora una relazione che faccia dipendere il tensore di Riemann da derivate con direzione normale alla ipersuperficie.

Volendo calcolare la derivata di Lie della curvatura ed utilizzando la relazione 1.70:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\boldsymbol{m}} K_{\alpha\beta} &= m^{\mu}\nabla_{\mu}K_{\alpha\beta} + K_{\mu\beta}\nabla_{\alpha}m^{\mu} + K_{\alpha\mu}\nabla_{\beta}m^{\mu} \\
&= m^{\mu}\nabla_{\mu}K_{\alpha\beta} + K_{\mu\beta}(-NK^{\mu}{}_{\alpha} - n_{\alpha}D^{\mu}N + n^{\mu}\nabla_{\alpha}N) + \\
&\quad + K_{\alpha\mu}(-NK^{\mu}{}_{\beta} - n_{\beta}D^{\mu}N + n^{\mu}\nabla_{\beta}N) \\
&= m^{\mu}\nabla_{\mu}K_{\alpha\beta} + -NK_{\beta\mu}K^{\mu}{}_{\alpha} - \underbrace{K_{\mu\beta}n^{\mu}}_{0} - K_{\mu\beta}n_{\alpha}D^{\mu}N + \underbrace{K_{\mu\beta}n^{\mu}}_{0}\nabla_{\alpha}N - NK_{\alpha\mu}K^{\mu}{}_{\beta} + \\
&\quad - n_{\beta}K_{\alpha\mu}D^{\mu}N + \underbrace{K_{\alpha\mu}n^{\mu}}_{0}\nabla_{\beta}N \\
&= Nn^{\mu}\nabla_{\mu}K_{\alpha\beta} - 2NK_{\alpha\beta} - K_{\mu\beta}n_{\alpha}D^{\mu}N - K_{\mu\beta}n^{\mu}\nabla_{\alpha}N
\end{aligned}
$$

Sfruttando la proprietà 1.77, si giunge al seguente risultato:

$$
\mathcal{L}_{\boldsymbol{m}} K_{\alpha\beta} = N\gamma_{\alpha\mu}\gamma^{\nu}{}_{\beta}n^{\sigma}\nabla_{\sigma}K^{\mu}{}_{\nu} - 2NK_{\alpha\mu}K^{\mu}{}_{\beta} \tag{1.83}
$$

Quest'ultima equazione mette in relazione un termine della 1.82 alla derivata di Lie (con direzione normale rispetto Σ_t). Sostituendo 1.83 nella 1.82 si ottiene l'ultima relazione che decompone il tensore di Riemann definito nello spazio-tempo:

$$
\gamma_{\alpha\mu}\gamma^{\nu}{}_{\beta}n^{\sigma}n^{\rho 4}R^{\mu}{}_{\rho\nu\sigma} = \frac{1}{N}\mathcal{L}_{\boldsymbol{m}}K_{\alpha\beta} + \frac{1}{N}D_{\beta}D_{\alpha}N + K_{\alpha\mu}K^{\mu}{}_{\beta} \tag{1.84}
$$

Come affermato in precedenza, si nota che la decomposizione dipende anche da derivate nella direzione normale della ipersuperficie tramite il termine $\mathcal{L}_{\boldsymbol{m}}K_{\alpha\beta}$. Come per le relazioni di Gauss-Codazzi-Mainardi è possibile contrarre due indici del tensore di Riemann e tramite la relazione di Gauss contratta 1.53, scrivere la 1.84 in funzione del tensore di Ricci:

$$
\gamma^{\mu}{}_{\alpha}\gamma^{\nu}{}_{\beta}{}^{4}R_{\mu\nu} = -\frac{1}{N}\mathcal{L}_{\boldsymbol{m}}K_{\alpha\beta} - \frac{1}{N}D_{\beta}D_{\alpha}N + R_{\alpha\beta} + KK_{\alpha\beta} - 2K_{\alpha\mu}K^{\mu}{}_{\beta} \tag{1.85}
$$

Prendendo invece la traccia della 1.85 con la metrica, il primo membro della 1.85 si trsforma nel seguente modo[14]:

$$
\gamma^{\alpha\beta}\gamma^{\mu}{}_{\alpha}\gamma^{\nu}{}_{\beta}{}^{4}R_{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu 4}R_{\mu\nu} = {}^{4}R(g^{\mu\nu} + n^{\mu}n^{\nu}) = {}^{4}R + {}^{4}R_{\mu\nu}n^{\mu}n^{\nu} \tag{1.86}
$$

[14]Al secondo membro sono stati utilizzati gli indici latini $i, j = \{1, 2, 3\}$ poiché tutte le grandezze in gioco sono tridimensionali.

mentre il secondo membro assume la seguente forma:

$$-\frac{1}{N}\gamma^{ij}\mathcal{L}_{\boldsymbol{m}}K_{ij}-\frac{1}{N}D_iD_iN+\gamma^{ij}R_{ij}+K\gamma^{ij}K_{\alpha\beta}-2K_{ij}K^{ij} \tag{1.87}$$

Il primo termine può essere manipolato ponendo la metrica all'interno della derivazione:

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{m}}\gamma^{ij}K_{ij}=K_{ij}\mathcal{L}_{\boldsymbol{m}}\gamma^{ij}+\gamma^{ij}\mathcal{L}_{\boldsymbol{m}}K_{ij} \tag{1.88}$$

dove dalla 1.71:

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{m}}\gamma^{ij}=2NK^{ij} \tag{1.89}$$

In definitiva, si giunge alla seguente espressione:

$${}^4R+{}^4R_{\mu\nu}n^{\mu}n^{\nu}=R+K^2-\frac{1}{N}\mathcal{L}_{\boldsymbol{m}}K-\frac{1}{N}D_iD_iN \tag{1.90}$$

Concludendo, è possibile scrivere la 1.90 utilizzando la relazione di Gauss contratta:

$${}^4R=R+K^2+K^{ij}K_{ij}-\frac{2}{N}\mathcal{L}_{\boldsymbol{m}}K-\frac{2}{N}D_iD_iN \tag{1.91}$$

Capitolo 2

Applicazione del formalismo alla relatività generale

2.1 Equazione di Einstein nel formalismo 3+1

2.1.1 Decomposizione dell'equazione di Einstein

A questo punto della trattazione è quindi possibile fare uso di quanto detto nel capitolo precedente per manipolare ed analizzare in dettaglio la nota *equazione di campo di Einstein*[1]:

$$ {}^4\boldsymbol{R} - \frac{1}{2}{}^4R\boldsymbol{g} = 8\pi\boldsymbol{T} \tag{2.1} $$

dove tutte le grandezze in gioco sono definite sullo spazio-tempo a quattro dimensioni. In particolare verrà assunto che quest'ultimo sia foliato da una famiglia di ipersuperfici di tipo spazio, così da poter proiettare la 2.1 sulle foglie dello spazio-tempo oppure nella direzione normale ad esse.

[1] c=G=1

Avendo già decomposto il tensore di Riemann (e di conseguenza quello di Ricci) tramite le relazioni di Gauss-Codazzi-Mainardi, ci si soffermerà principalmente sulla decomposizione del tensore energia-impulso $\boldsymbol{T}$.

Si è definito precedentemente il vettore normale a Σ_t, come la 4-velocità relativistica per un osservatore euleriano. Nello stesso sistema di riferimento, si definisce la *densità energetica*:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}) \tag{2.2}$$

Questa definizione viene dalla definizione stessa di un generale tensore di stress. Seguendo questo ragionamento, è possibile definire una forma lineare detta *densità dei momenti*:

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{T}(\vec{\gamma}(\cdot), \boldsymbol{n}) \tag{2.3}$$

le cui componenti sono:

$$p_\alpha = -T_{\mu\nu}\gamma^{\mu}{}_{\alpha}n^{\nu} \tag{2.4}$$

Cambiando l'ordine degli argomenti nella forma bilineare si definisce una 1-forma chiamata *flusso*, denotato con $\boldsymbol{\phi}$, poiché è necessario che il tensore energia-impulso presente nell'equazione di Einstein risulti simmetrico, per cui si avrà che:

$$\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{p} \tag{2.5}$$

Applicando il proiettore ortogonale al tensore energia impulso, per un osservatore euleriano quest'ultimo sarà:

$$S_{\alpha\beta} = \gamma^{\mu}{}_{\alpha}\gamma^{\nu}{}_{\beta}T_{\mu\nu} \tag{2.6}$$

La traccia del tensore S può essere calcolata con la 3-metrica:

$$S = \gamma^{ij}S_{ij} \tag{2.7}$$

Sviluppando ora la 2.6, secondo la 1.38:

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta} &= \gamma^{\mu}{}_{\alpha}\gamma^{\nu}{}_{\beta}T_{\mu\nu} \\ &= (\delta^{\mu}{}_{\alpha} + n^{\mu}n_{\alpha})(\delta^{\nu}{}_{\beta} + n^{\nu}n_{\beta})T_{\mu\nu} \\ &= \delta^{\mu}{}_{\alpha}\delta^{\nu}{}_{\beta}T_{\mu\nu} + \delta^{\mu}{}_{\alpha}n^{\nu}n_{\beta}T_{\mu\nu} + \delta^{\nu}{}_{\beta}n^{\mu}n_{\alpha}T_{\mu\nu} + n_{\alpha}n_{\beta}\underbrace{T_{\mu\nu}n^{\mu}n^{\nu}}_{E(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Da questi quattro termini finali, è possibile scrivere la relazione ad indici liberi utilizzando le definizioni di E e p_α

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{S} + p \otimes \underline{\boldsymbol{n}} + p \otimes \underline{\boldsymbol{n}} + E(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})\underline{\boldsymbol{n}} \otimes \underline{\boldsymbol{n}} \tag{2.9}$$

La 2.9 rappresenta la decomposizione del tensore energia-impulso. Prendendo la traccia della relazione precedente, si giunge:

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha}{}_{\beta} &= \gamma^{\alpha}{}_{\beta}S_{\alpha\beta} + \gamma^{\alpha}{}_{\beta}p_{\alpha}n_{\beta} + \gamma^{\alpha}{}_{\beta}p_{\beta}n_{\alpha} + \gamma^{\alpha}{}_{\beta}n_{\alpha}n_{\beta}n^{\mu}n^{\nu}T_{\mu\nu} \\ &= S - E \end{aligned} \tag{2.10}$$

avendo sfruttato il fatto che $\boldsymbol{p}$ è sempre ortogonale a $\boldsymbol{n}$ e che le ipersuperfici sono di tipo spazio: $n^{\alpha}n_{\alpha} = -1$. A questo punto, è possibile decomporre l'equazione di Einstein sostituendo le opportune relazione di decomposizione: a tal proposito esistono tre possibilità per proiettare la 2.1.

La prima opzione è quella di proiettare l'equazione di Einstein solamente sulla ipersuperficie Σ_t. Una forma totalmente equivalente all'equazione di Einstein è la seguente:

$$^{4}\boldsymbol{R} = 8\pi\left(\boldsymbol{T} - \frac{1}{2}T\boldsymbol{g}\right) \tag{2.11}$$

Applicando il proiettore:

$$\vec{\gamma}^{*4}\boldsymbol{R} = 8\pi\left(\vec{\gamma}^{*}\boldsymbol{T} - \frac{1}{2}T\vec{\gamma}^{*}\boldsymbol{g}\right) \tag{2.12}$$

Dalla 1.85 si estrapola esplicitamente del termine $\vec{\gamma}^{*4}\boldsymbol{R}$. Dalla 2.6 in forma di indici liberi, si ottiene:

$$\vec{\gamma}^{*}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{T} \tag{2.13}$$

Sostituendo tutto nella 2.11:

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{m}} K_{\alpha\beta} = -D_\alpha D_\beta + N[R_{\alpha\beta} + K K_{\alpha\beta} - 2K_{\alpha\mu}K^{\mu}{}_{\beta} + 4\pi\{S - E\}\gamma_{\alpha\beta} - 2S_{\alpha\beta}] \tag{2.14}$$

Tale equazione è stata ricavata dalla 1.85 che presenta indici latini, mentre l'ultima relazione utilizza indici greci che descrivono tutto lo spazio-tempo. In questo caso è possibile descrivere le relazione con entrambi gli indici poiché l'equazione è proiettata completamente sulla foglia dello spazio-tempo.
Se invece si proiettasse l'equazione solamente lungo $\boldsymbol{n}$, l'equazione di Einstein assume la seguente forma:

$${}^4\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}) + \frac{1}{2}{}^4R = 8\pi \boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}) \tag{2.15}$$

Esplicitando gli indici, l'equazione di Gauss scalare (1.54) è la relazione utilizzata per questa decomposizione poiché è l'unica che contrae il tensore di Riemann con due componenti del vettore normale:

$$R + K^2 - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} = 16\pi E \tag{2.16}$$

Tale equazione è detta *vincolo hamiltoniano*, che acquisterà un'importanza notevole nell'ultima sezione di questa trattazione.

Se la la proiezione viene fatta una volta sulla foglia dello spazio-tempo ed una volta lungo $\boldsymbol{n}$, la relazione utile è quella di Codazzi contratta (1.57). Decomponendo l'equazione di Einstein in questo modo, il tensore energia-impulso viene sostituito dal momento $\boldsymbol{p}$ dalla definizione 2.3. In definitiva, si ottiene:

$$D_j K^j{}_i - D_i K = 8\pi p_i \tag{2.17}$$

2.1.2 Equazione di Einstein come sistema di PDE

Da queste decomposizioni, l'equazione di Einstein è equivalente ad un sistema formato dalle 3 equazioni tensoriali 2.14, 2.16, 2.17; questo poiché sia la 2.1 che l'unione delle tre equazioni 2.14, 2.16, 2.17 hanno lo stesso numero di componenti indipendenti. Il

prossimo passo sarà quello di trasformare questo sistema di equazioni tensoriali in un sistema di equazioni alle derivate parziali.
La chiave per far ciò è lo scegliere un set di coordinate per lo spazio-tempo $\mathcal{M}$: sulla ipersuperficie Σ_t saranno definite le coordinate spaziali $x^i = \{x^1, x^2, x^3\}$: se questo set risulta ben definito anche per ipersuperfici limitrofe a Σ_t, si avrà che $x^\alpha = \{t, x^i\}$ saranno una buona scelta di coordinate per lo spazio-tempo. Lavorando sullo spazio-tempo, lo spazio tangente a tale varietà sarà quadridimensionale ed i vettori di base saranno $\partial_\alpha = (\boldsymbol{\partial}_t, \boldsymbol{\partial}_i)$: il vettore $\boldsymbol{\partial}_t$ è detto *vettore temporale*. Tale vettore risulta tangente a curve la cui caratteristica è quella di avere parte spaziale costante. A questo proposito tale vettore può essere scomposto in una componente perpendicolare a Σ_t, proporzionale al vettore normale di evoluzione $\boldsymbol{m}$, ed una tangente alla ipersuperficie stessa. Formalmente:

$$\boldsymbol{\partial}_t = \boldsymbol{m} + \boldsymbol{\beta} \tag{2.18}$$

In definitiva si definisce $\boldsymbol{\beta} \in T_P(\Sigma_t)$ *vettore di shift* ed indica quanto $\boldsymbol{\partial}_t$ e $\boldsymbol{m}$ sono distinti. Se $\boldsymbol{\beta} = 0$, $\boldsymbol{\partial}_t$ e $\boldsymbol{m}$ diventano la medesima grandezza: questo implica anche che le coordinate spaziali fissate sono esattamente perpendicolari a Σ_t
Utilizzando il proiettore ortogonale, è possibile definire il vettore

$$\boldsymbol{\beta} = \vec{\gamma}(\boldsymbol{\partial}_t) \tag{2.19}$$

Calcolando il quadrato di $\boldsymbol{\partial}_t$, si ottiene:

$$\boldsymbol{\partial}_t \cdot \boldsymbol{\partial}_t = -N^2 + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta} \tag{2.20}$$

da cui derivano tre distinzioni:

- $\boldsymbol{\partial}_t$ è di tipo tempo se $\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta} < N^2$
- $\boldsymbol{\partial}_t$ è nullo se $\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta} = N^2$
- $\boldsymbol{\partial}_t$ è di tipo spazio se $\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta} > N^2$

Un altro importante fatto da analizzare è il comportamento del tensore metrico sotto la scelta di un'opportuna carta.
Rispetto le x^i si definisce la 3-metrica:

$$\boldsymbol{\gamma} = \gamma_{ij}\ dx^i \otimes dx^j \tag{2.21}$$

con dx^i e dx^j base di 1-forme. Estendendo il discorso alla metrica dello spazio-tempo, si definisce:

$$\boldsymbol{g} = g_{\alpha\beta}\ dx^\alpha \otimes dx^\beta \tag{2.22}$$

Se invece si inseriscono i vettori di base dello spazio tangente come argomenti del tensore metrico, si ottiene:

$$g_{\alpha\beta} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\partial_\alpha}, \boldsymbol{\partial_\beta}) \tag{2.23}$$

Da questa relazione, si è in grado di identificare tutte le componenti del tensore:

$$g_{00} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\partial_t}, \boldsymbol{\partial_t}) = N^2 + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta} \tag{2.24}$$

$$g_{01} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\partial_t}, \boldsymbol{\partial_i}) = (\boldsymbol{m} + \boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\partial_i} = \beta_i \tag{2.25}$$

La parte spaziale della metrica resta invariata:

$$g_{ij} = \gamma_{ij} \tag{2.26}$$

In definitiva, il tensore metrico letto nel formalismo 3+1 assume la seguente forma:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -N^2 + \beta_k\beta^k & \beta_j \\ \beta_i & \gamma_{ij} \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

Da cui segue l'espressione dell'elemento di linea:

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -N^2dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt) \tag{2.28}$$

Ben definite sono anche le metrici metriche inverse che consentono di creare un collegamento tra uno spazio ed il suo duale. Calcolando g^{00} utilizzando il metodo del complemento algebrico, si ottiene:

$$g^{00} = \frac{M_{00}}{det(g_{\alpha\beta})} \tag{2.29}$$

M_{00} non è altro che il complemento algebrico della metrica $\boldsymbol{g}$ eliminando la prima colonna e la prima riga: $M_{00} = det(\gamma_{ij}) = \gamma$.

$$g^{00} = \frac{\gamma}{g} \tag{2.30}$$

Esplicitando le componenti della matrice inversa, si ottiene un'espressione esplicita del termine g^{00}, che sostituito nella relazione precedente dà la seguente relazione:

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{\gamma} \tag{2.31}$$

Con la scelta di un opportuno set di coordinate e la conseguente introduzione di tutti gli strumenti ad essa legati, sarà utile vedere come cambia la forma delle 2.14, 2.16, 2.17 in funzione di queste grandezze. A questo punto è possibile valutare il termine $\mathcal{L}_{\boldsymbol{m}} K_{\alpha\beta}$ presente nella 2.14 in funzione del vettore temporale e vettore di shift.[2]
Sia un campo tensoriale generico $\boldsymbol{T}$ tangente alla ipersuperficie Σ_t:

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{T} = \mathcal{L}_{\boldsymbol{\partial}_t}\boldsymbol{T} - \mathcal{L}_{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{T} \tag{2.32}$$

Essendo coordinate adattate alla varietà, la derivazione temporale diventa una semplice derivata parziale rispetto al tempo.

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{\partial}_t} \longrightarrow \partial_t \tag{2.33}$$

Esprimendo anche il tensore in funzione delle coordinate, la 2.32 diviene:

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{m}} T^{\ldots i \ldots}{}_{\ldots j \ldots} = \left(\partial_t - \mathcal{L}_{\boldsymbol{\beta}}\right) T^{\ldots i \ldots}{}_{\ldots j \ldots} \tag{2.34}$$

Applicando la 2.34 al tensore di curvatura K_{ij}:

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{m}} K_{ij} = \left(\partial_t - \mathcal{L}_{\boldsymbol{\beta}}\right) K_{ij} \tag{2.35}$$

Dalla 1.70 è possibile esplicitare la scelta della carta:

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{\beta}} K_{ij} = \beta^k \partial_k K_{kj} + K_{ij}\partial_i + K_{ik}\partial_j \tag{2.36}$$

[2]il vettore temporale ed il vettore di shift dipendono esplicitamente dalla scelta della carta.

Analogamente, applicando 2.34 al tensore metrico e sfruttando la 1.71:

$$(\partial_t - \mathcal{L}_{\boldsymbol{\beta}})\,\gamma_{ij} = -2NK_{ij} \tag{2.37}$$

In definitiva, le 2.14, 2.16, 2.17 diventano:

$$(\partial_t - \mathcal{L}_{\boldsymbol{\beta}})\,\gamma_{ij} = -2NK_{ij} \tag{2.38}$$

$$(\partial_t - \mathcal{L}_{\boldsymbol{\beta}})\,K_{ij} = -D_iD_j + N[R_{ija} + KK_{ij} - 2K_{ik}K^k{}_j + 4\pi\{S - E\}\gamma_{ij} - 2S_{ij}] \tag{2.39}$$

$$R + K^2 - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} = 16\pi E \tag{2.40}$$

$$D_jK^j{}_i - D_iK = 8\pi p_i \tag{2.41}$$

La scelta del set di coordinate implica la presenza dei simboli di Christoffel associati alla connessione $\boldsymbol{D}$ della ipersuperficie. Questi hanno un ruolo fondamentale poiché ogni grandezza definita su una varietà metrica, quale lo spazio-tempo $(\mathcal{M}, \boldsymbol{g})$, è esprimibile in funzione di tali simboli che sono a loro volta dipendenti dalla metrica stessa.

$$\Gamma^k{}_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}\,(\partial_i g_{li} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) \tag{2.42}$$

Nel caso specifico della ipersuperficie con metrica associata $\boldsymbol{\gamma}$ la relazione continua a valere ponendo $\boldsymbol{\gamma}$ al posto di $\boldsymbol{g}$. Il ponte tra la connessione $\boldsymbol{D}$ e i simboli di Christoffel viene realizzato da un risultato della geometria differenziale:

$$\nabla_m T^{i\ldots j}{}_{k\ldots l} = \partial_m T^{i\ldots j}{}_{k\ldots l} + \Gamma^i{}_{nm}T^{n\ldots j}{}_{k\ldots l} + \ldots + \Gamma^j{}_{nm}T^{i\ldots n}{}_{k\ldots l} - \Gamma^n{}_{km}T^{i\ldots j}{}_{n\ldots l} - \ldots - \Gamma^n{}_{lm}T^{i\ldots j}{}_{k\ldots n} \tag{2.43}$$

Tramite i simboli di Christoffel è possibile quindi riportare il sistema di equazioni tensoriali ad un sistema di PDE del secondo ordine non lineari.

2.1.3 Problema di Cauchy

Un'interpretazione sviluppata da Wheeler per risolvere il sistema di equazioni alle derivate parziali è quello di considerare l'evoluzione temporale di una ipersuperficie Σ_t.

Questo perchè il sistema di equazioni 2.37 2.38 2.39 2.40 2.41 presenta grandezze definite su Σ_t e non sullo spazio-tempo. Secondo questa interpretazione non si ha nemmeno il bisogno di capire in che ambiente risulta immersa la ipersuperficie. Tale idea fu chiamata *geometrodinamica*.

Il caso più per risolvere2.39 2.40 2.41 è quello di porre $\boldsymbol{\beta} = 0$ ed $N = 1$. Porre proprio $\boldsymbol{\beta}$ ed N nulli risiede nel fatto che questi parametri sono esplicitamente dipendenti dalla carta considerata e, non comparendo derivate rispetto $\boldsymbol{\beta}$ ed N nelle 2.37 2.38 2.39 2.40 2.41, non sono considerati come variabili dinamiche del sistema in evoluzione. In queste condizioni ci si è posti in un *sistema gaussiano*.

Osservazione. I risultati che si otterranno non sono applicabili a tutto lo spazio-tempo poiché un osservatore gaussiano non riuscirebbe mai a coprire tutto $\mathcal{M}$.

In tale sistema di riferimento la metrica assume la seguente forma:

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + \gamma_{ij}dx^i dx^j \tag{2.44}$$

mentre le 4 equazioni 2.39 2.40 2.41 diventano:

$$\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} = -2K_{ij} \tag{2.45}$$

$$\frac{\partial K_{ij}}{\partial t} = R_{ij} + KK_{ij} - 2K_{ik}K^k{}_j + 4\pi[(S-E)\gamma_{ij} - 2S_{ij}] \tag{2.46}$$

$$R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi E \tag{2.47}$$

$$D_j K^j{}_i - D_i K = 8\pi p_i \tag{2.48}$$

Dalla 2.45 si ricava:

$$K_{ij} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} = \dot{\gamma}_{ij} \tag{2.49}$$

da cui:

$$\begin{aligned} KK_{ij} &= K_{ij}\gamma^{kl}K_{kl} = \dot{\gamma}_{kl}\gamma^{kl}\dot{\gamma}_{ij} \\ K^k{}_j K_{ik} &= \dot{\gamma}_{ik}\gamma_{kl}K^k{}_j\gamma^{kl} = \dot{\gamma}_{ik}\dot{\gamma}_{lj}\gamma^{kl} \end{aligned} \tag{2.50}$$

Eseguendo tutte le sostituzioni:

$$-\frac{\partial^2\gamma_{ij}}{\partial t^2} = 2R_{ij} + \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{kl}\gamma^{kl}\dot{\gamma}_{ij} - \dot{\gamma}_{ik}\dot{\gamma}_{lj}\gamma^{kl} + 8\pi[(S-E)\gamma_{ij} - 2S_{ij}] \tag{2.51}$$

$$R + (\dot{\gamma}_{ij}\gamma^{ij})^2 - \dot{\gamma}_{ij}\dot{\gamma}_{kl}\gamma^{ik}\gamma^{jl} = 16\pi E \tag{2.52}$$

$$D_j(\dot{\gamma}_{ki}\gamma^{jk}) - \partial_i(\gamma^{kl}\dot{\gamma}_{kl}) = -16\pi p_i \tag{2.53}$$

Si vuol provare ora ad esplicitare in quanto ricavato la dipendenza dalla metrica. Come affermato in precedenza, è possibile esprimere tutte le grandezze su una varietà metrica tramite i simboli di Christoffel una volta scelta la carta. In particolare possiamo esprimere il tensore di Ricci nel seguente modo:

$$R_{ij} = \partial_k\Gamma^k{}_{ij} - \partial_j\Gamma^k{}_{ik} + \Gamma^k{}_{ij}\Gamma^l{}_{kl} - \Gamma^l{}_{ik}\Gamma^k{}_{lj} \tag{2.54}$$

Tramite la 1.16 è possibile avere un'espressione dipendente solamente dalla metrica. Effettuando le sostituzioni e prendendo in considerazione solamente la parte con le derivate più alte (utili alla seguente analisi) si giunge:

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \frac{1}{2}\partial_k[\gamma^{kl}(\partial_i\gamma_{lj} + \partial_j\gamma_{il} - \partial_l\gamma_{ij})] - \frac{1}{2}\partial_j[\gamma^{kl}(\partial_i\gamma_{lk} + \partial_k\gamma_{il} - \partial_l\gamma_{ij})] + \Omega_{ij}(\gamma_{kl}, \partial_m\gamma_{kl}) \\ &= -\frac{1}{2}(\partial_k\partial_l\gamma_{ij} + \partial_j\partial_i\gamma_{ik} - \partial_j\partial_l\gamma_{ik} - \partial_k\partial_i\gamma_{lj}) + \Omega_{ij}(\gamma_{kl}, \partial_m\gamma_{kl}) \end{aligned}$$

Il tensore di Ricci assume quindi la seguente forma in funzione della metrica:

$$R_{ij} = -\frac{1}{2}(\partial_k\partial_l\gamma_{ij} + \partial_j\partial_i\gamma_{ik} - \partial_j\partial_l\gamma_{ik} - \partial_k\partial_i\gamma_{lj}) + \Omega_{ij}(\gamma_{kl}, \partial_m\gamma_{kl}) \tag{2.55}$$

dove viene posto:

$$\Omega_{ij}(\gamma_{kl}, \partial_m\gamma_{kl}) = \Gamma^k{}_{ij}\Gamma^l{}_{kl} - \Gamma^l{}_{ik}\Gamma^k{}_{lj}$$

Contraendo l'espressione del tensore di Ricci con la metrica, ossia prendendo la traccia della 2.55:

$$R = \gamma^{ik}\gamma^{jl}\partial_k\partial_l\gamma_{ij} - \gamma^{ij}\gamma^{kl}\partial_k\partial_l\gamma_{ij} \tag{2.56}$$

Il termine $D_j(\dot\gamma_{ki}\gamma^{jk})$ della 2.53 può essere reso esplicitamente dipendente dalla metrica nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
D_j(\dot\gamma_{ki}\gamma^{jk}) &= \dot\gamma_{ki}D_j\gamma^{jk} + \gamma^{jk}D_j\dot\gamma_{ki} \\
&= \gamma^{jk}(\partial_j\dot\gamma_{ki} - \Gamma^l{}_{jk}\dot\gamma_{li} - \Gamma^l{}_{ji}\dot\gamma_{kl}) \\
&= \gamma^{jk}\partial_j\dot\gamma_{ki} + \Omega_i(\gamma^{kl}, \partial_m\gamma^{kl}, \partial_t\gamma^{kl})
\end{aligned}$$

Riscrivendo quindi le 2.39 2.40 2.41:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial^2\gamma_{ij}}{\partial t^2} + \gamma^{kl}\left(\frac{\partial^2\gamma_{ij}}{\partial x^k\partial x^l} + \frac{\partial^2\gamma_{kl}}{\partial x^i\partial x^j} - \frac{\partial^2\gamma_{lj}}{\partial x^i\partial x^k} - \frac{\partial^2\gamma_{il}}{\partial x^j\partial x^k}\right) = \\
= 8\pi[(S-E)\gamma_{ij} - 2S_{ij} + \Omega_{ij}(\gamma_{kl}, \partial_m\gamma_{kl})]
\end{aligned} \tag{2.57}$$

$$\gamma^{ik}\gamma^{jl}\frac{\partial^2\gamma_{ij}}{\partial x^k\partial x^l} - \gamma_{ij} - \gamma^{ij}\frac{\partial^2\gamma_{ij}}{\partial x^k\partial x^l} = 16\pi E + \Omega_i(\gamma^{kl}, \partial_m\gamma^{kl}, \partial_t\gamma^{kl}) \tag{2.58}$$

$$\gamma^{jk}\frac{\partial^2\gamma_{ki}}{\partial x^j\partial t} - \gamma^{kl}\frac{\partial^2\gamma_{kl}}{\partial x^i\partial t} = -16\pi p_i + \Omega_i(\gamma^{kl}, \partial_m\gamma^{kl}, \partial_t\gamma^{kl}) \tag{2.59}$$

La prima relazione contiene in se 6 equazioni, che identificherebbero in maniera completa la soluzione γ_{ij}. La 2.57 è anche l'unica tra le tre equazioni a poter essere trattata come un problema di Cauchy con opportune condizioni al contorno su γ_{ij} e $\dot\gamma_{ij}$ ad un tempo t_0. Essendo per ipotesi in un sistema gaussiano che copre un intorno abbastanza piccolo dello spazio-tempo($\Sigma \subset \mathcal{M}$), è possibile richiamare il teorema di Cauchy-Kovalevskaya il quale garantisce l'esistenza e l'unicità della soluzione su Σ_0. Alcune difficoltà emergono cercando di capire il ruolo delle ultime due equazioni del sistema poiché la soluzione viene univocamente identificata dalla 2.57: la 2.58 e 2.59 vengono perciò interpretate come vincoli ai quali sono soggette le condizioni iniziali del problema di Cauchy. Questa situazione è analoga al caso elettromagnetico delle equazioni di Maxwell la cui soluzione deve sottostare ai vincoli $\boldsymbol{DB} = 0$ e $\boldsymbol{DE} = \rho\ \epsilon_0^{-1}$

2.2 Formalismo ADM

2.2.1 Approccio hamiltoniano alla relatività generale

L'applicazione principe di tutto il formalismo matematico visto in precedenza è l'approccio hamiltoniano alla relatività generale. Si consideri l'azione di Hilbert-Einsten:

$$S = \int_V {}^4R\sqrt{-g}\; d^4x \tag{2.60}$$

dove si considera V come un sottoinsieme di $\mathcal{M}$ delimitato da due ipersuperfici di tipo tempo Σ_{t_1} e Σ_{t_2}. Utilizzando la 2.31 e la 1.91 l'azione diventa:

$$S = \int_V [N(R + K^2 + K_{ij}K^{ij}) - 2\mathcal{L}_{\boldsymbol{m}}K - 2D_iD^iN]\sqrt{\gamma}\; d^4x \tag{2.61}$$

dove è possibile calcolare esplicitamente la derivata di Lie di K:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\boldsymbol{m}}K &= m^\mu \nabla_\mu K \\
&= Nn^\mu \nabla_\mu K \\
&= N[\nabla_\mu(n^\mu K) - K\nabla_\mu n^\mu] \\
&= N[\nabla_\mu(n^\mu K) + K^2]
\end{aligned}$$

Si è utilizzata la definizione $\nabla_\mu n^\mu = -K$. Inserendo tale risultato nell'azione:

$$S = \int_V [N(R^2 - K^2 + KijK^{ij}) - 2N\nabla_\mu(Kn^\mu) - 2D_iD^iN]\sqrt{\gamma}\; d^4x \tag{2.62}$$

Prima di procedere è utile riprendere un importante risultato derivante dalla teoria dei campi classica.

Sia definita una densità di lagrangiana $\mathcal{L}$[3]:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \partial_\mu \mathcal{J}^\mu \tag{2.63}$$

[3]Col simbolo $\mathcal{L}$ si è indicata anche la derivata di Lie. Tuttavia sarà possibile distinguere i casi in cui si parla di densità di Lagrangiana o derivata di Lie.

Integrando per trovare l'azione, si ottiene:

$$S = \int d^n x \mathcal{L} = \int d^n x \mathcal{L}_0 + \int d^n x \partial_\mu \mathcal{J}^\mu \tag{2.64}$$

Il *teorema della divergenza* consente di trattare il secondo integrale della 2.64 come un integrale di superficie[4]:

$$\int d^n x \ \partial_\mu \mathcal{J}^\mu = \int_\Sigma dS \ n_\mu \mathcal{J}^\mu \tag{2.65}$$

Le equazioni del moto si derivano richiedendo l'annullamento della variazione dell'azione:

$$\delta S = \delta S_0 + \int dS \ n_\mu \delta(\mathcal{J}^\mu) = 0 \tag{2.66}$$

Dove è possibile porre a zero il secondo termine della 2.66 grazie alle opportune condizioni al contorno:

$$\int dS \ n_\mu \delta(\mathcal{J}^\mu) = 0$$

Questo implica che la dinamica rimane invariante sotto l'aggiunta di una divergenza $\partial_\mu \mathcal{J}^\mu$

$$\delta S = \delta S_0 = 0 \tag{2.67}$$

Applicando tale ragionamento al caso dell'azione di Hilbert-Einstien, è possibile ignorare il termine:

$$N \int_V d^4 x \ \nabla_\mu (K n^\mu) \sqrt{\gamma}$$

poiché risulta essere una *quadri-divergenza.*

La 2.62 diventa quindi:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Sigma_t} [N(R^2 - K^2 + KijK^{ij}) - 2D_i D^i N] \sqrt{\gamma} \ d^3 x \right) dt \tag{2.68}$$

Da cui è possibile ripetere lo stesso ragionamento fatto precedentemente per ignorare il termine:

$$\int_{\Sigma_t} 2D_i D^i N \sqrt{\gamma} \ d^3 x \tag{2.69}$$

[4] Il teorema della divergenza è valido per ogni dimensione.

poiché risulta essere una divergenza pura (in questo caso tridimensionale).
Si deriva infine l'azione di Hilbert-Einstein derivante dal formalismo 3+1:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Sigma_t} N(R^2 - K^2 + K_{ij}K^{ij})\sqrt{\gamma}\ d^3x \right) dt \tag{2.70}$$

La 2.70 può essere considerato come un funzionale delle variabili $q = (\gamma_{ij}, N, \beta^i)$ e $\dot{q} = (\dot{\gamma}_{ij}, \dot{N}, \dot{\beta}^i)$. Dalla 2.37 è possibile ricavare l'espressione esplicita del tensore di curvatura K_{ij} in funzione della connessione di Σ_t e della metrica:

$$\left(\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} - \mathcal{L}_{\boldsymbol{\beta}}\gamma_{ij} \right) = -2NK_{ij} \tag{2.71}$$

dove grazie alla 1.70:

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{\beta}}\gamma_{ij} = \beta^k \underbrace{D_k\gamma_{ij}}_{0} + \gamma_{kj}D_i\beta^k + \gamma_{ik}D_j\beta^k \tag{2.72}$$

L'espressione esplicita per K_{ij}:

$$K_{ij} = \frac{1}{2N}\left(\gamma_{kj}D_i\beta^k + \gamma_{ik}D_j\beta^k - \dot{\gamma}_{ij} \right) \tag{2.73}$$

la Lagrangiana quindi diventa:

$$\begin{aligned} L(q,\dot{q}) &= N(R^2 - K^2 + K_{ij}K^{ij}) \\ &= N\sqrt{\gamma}(R + K_{ij}K^{ij} - (\gamma^{ij}K_{ij})^2) \\ &= N\sqrt{\gamma}[R + K_{ij}(K^{ij} - (\gamma^{ij})^2K_{ij}] \\ &= N\sqrt{\gamma}[R + K_{ij}(\gamma_{ik}\gamma^{ik}K^{ij}\gamma_{jl}\gamma^{jl} - \gamma^{ij}\gamma^{kl}K_{kl})] \\ &= N\sqrt{\gamma}[R + K_{ij}K_{kl}(\gamma^{ik}\gamma^{jl} - \gamma^{ij}\gamma^{kl})] \end{aligned}$$

In definitiva:

$$L(q,\dot{q}) = N\sqrt{\gamma}[R + K_{ij}K_{kl}(\gamma^{ik}\gamma^{jl} - \gamma^{ij}\gamma^{kl})] \tag{2.74}$$

Dalla 2.74 si nota che non esistono derivate temporali rispetto N e β^i: quest'ultime non risultano essere variabili dinamiche. L'unica variabile è la metrica alla quale è possibile associare un *momento coniugato*:

$$\pi^{ij} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} \tag{2.75}$$

computando la derivazione si ottiene:

$$\pi^{ij} = \sqrt{\gamma}(K\gamma^{ij} - K^{ij}) \tag{2.76}$$

Dalla densità di Lagrangiana è possibile definire la densità Hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \pi^{ij}\dot{\gamma}_{ij} - \mathcal{L} \tag{2.77}$$

Utilizzando l'espressione esplicita della densità di Lagrangiana e del momento coniugato:

$$\mathcal{H} = -\sqrt{\gamma}[N(R + K^2 - K_{ij}K^{ij}) + 2\beta^i(D_iK - D_jK^i{}_j)] + 2\sqrt{\gamma}D_j(K\beta^j - K^j{}_i\beta^i) \tag{2.78}$$

La cui corrispondente Hamiltonionana:

$$H = \int_{\Sigma_t} \mathcal{H} d^3x \tag{2.79}$$

$$\begin{aligned} H = &- \int_{\Sigma_t} \sqrt{\gamma}[N(R + K^2 - K_{ij}K^{ij}) + 2\beta^i(D_iK - D_jK^i{}_j)]d^3x + \\ &+ \int_{\Sigma_t} 2\sqrt{\gamma}D_j(K\beta^j - K^j{}_i\beta^i)d^3x \end{aligned} \tag{2.80}$$

Dove è possibile ignorare l'ultimo integrale poiché è una divergenza pura (tridimensionale).

Definendo:

$$C_0 = R + K^2 - K_{ij}K^{ij} \tag{2.81}$$

$$C_i = D_iK - D_jK^i{}_j \tag{2.82}$$

L'Hamiltoniana diventa:

$$H = -\int_{\Sigma_t} (NC_0 - 2\beta^iC_i)\sqrt{\gamma}d^3x \tag{2.83}$$

La 2.83 è detta *Hamiltoniana ADM*: funzionale delle variabili $(\gamma_{ij}, N, \beta^i)$ e dei loro coniugati[5].

[5] I momenti rispetto N e β^i sono nulli poiché non compaiono derivazioni temporali di quest'ultime.

Utilizzando il metodo variazionale e ponendo nulla la variazione dell'azione 2.70 si ottengono le *equazioni di Hamilton* del sistema. Avendo anche l'hamiltoniana del sistema 2.83 è possibile scrivere la lagrangiana nel modo seguente:

$$L = \pi^{ij}\dot{\gamma}_{ij} - H(q,\dot{q}) \tag{2.84}$$

Da qui[6].

$$\begin{aligned}
S &= \int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{\Sigma_t} \pi^{ij}\dot{\gamma}_{ij} - H(q,\dot{q})\ d^3x\right) dt \\
\delta S &= \int d^4x \left(\delta(\pi^{ij}\dot{\gamma}_{ij}) - \frac{\delta H}{\delta\gamma_{ij}}\delta\gamma_{ij} - \frac{\delta H}{\delta\dot{\gamma}_{ij}}\delta\dot{\gamma}_{ij} - \frac{\delta H}{\delta\pi^{ij}}\delta\pi^{ij} - \frac{\delta H}{\dot{\pi}^{ij}}\delta\dot{\pi}^{ij}\right) \\
&= \int d^4x \left(\pi^{ij}\delta\dot{\gamma}_{ij} + \dot{\gamma}_{ij}\delta\pi^{ij} - \frac{\delta H}{\delta\gamma_{ij}}\delta\gamma_{ij} - \frac{\delta H}{\delta\dot{\gamma}_{ij}}\delta\dot{\gamma}_{ij} - \frac{\delta H}{\delta\pi^{ij}}\delta\pi^{ij} - \frac{\delta H}{\dot{\pi}^{ij}}\delta\dot{\pi}^{ij}\right) \\
&= \int d^4x \left[\left(\dot{\pi}^{ij} + \frac{\delta H}{\delta\gamma_{ij}}\right)\delta\gamma_{ij} + \left(\dot{\gamma}_{ij} - \frac{\delta H}{\delta\pi^{ij}}\right)\delta\pi^{ij} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta H}{\dot{\pi}^{ij}}\delta\pi^{ij} + \frac{\delta H}{\delta\dot{\gamma}_{ij}}\delta\gamma_{ij}\right)\right]
\end{aligned}$$

Dove si è integrato per parti ed utilizzato la relazione:

$$\delta\dot{q} = \frac{d}{dt}\delta q \tag{2.85}$$

per gli opportuni raccoglimenti.

Poiché le equazioni del moto rimangono invariante sotto l'aggiunta di una derivata temporale totale di una funzione, è possibile omettere il termine:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta H}{\dot{\pi}^{ij}}\delta\pi^{ij} + \frac{\delta H}{\delta\dot{\gamma}_{ij}}\delta\gamma_{ij}\right)$$

L'azione diviene quindi:

$$\delta S = \int d^4x \left[\left(\dot{\pi}^{ij} + \frac{\delta H}{\delta\gamma_{ij}}\right)\delta\gamma_{ij} + \left(\dot{\gamma}_{ij} - \frac{\delta H}{\delta\pi^{ij}}\right)\delta\pi^{ij}\right] = 0 \tag{2.86}$$

[6] $q, \dot{q}$ sono rispettivamente l'insieme delle variabili dinamiche $\gamma_{ij}, \pi^{ij}, N, \beta^i$ e $\dot{\gamma}_{ij}, \dot{\pi}^{ij}, \dot{N}, \dot{\beta}^i$

Da tale equazione si ottengono:

$$\frac{\delta H}{\delta \pi^{ij}} = \dot{\gamma}_{ij}$$

$$\frac{\delta H}{\delta \gamma_{ij}} = -\dot{\pi}^{ij}$$

$$\frac{\delta H}{\delta N} = 0 \tag{2.87}$$

$$\frac{\delta H}{\delta \beta^{i}} = 0$$

Come affermato più volte in precedenza, si giunge alla conclusione che N e β^i non sono variabili dinamiche, infatti, le ultime due equazioni del sistema sono dei vincoli sui veri parametri dinamici del sistema: metrica e momento.

2.2.2 Applicazioni nella gravità quantistica

Il formalismo 3+1 risulta avere importanti applicazioni nella gravità quantistica.
Essendo riusciti a fare una trattazione hamiltoniana della relatività generale tramite le decomposizioni di Gauss-Codazzi-Mainardi, il sistema hamiltoniano risulta vincolato dalle equazioni 2.81 2.82, chiamati rispettivamente *vincolo hamiltoniano* e *vincolo dei momenti*[7]. Lo scopo della questione è quello di trovare un modo per trattare i vincoli legati al sistema e successivamente quantizzare la teoria.

I vincoli 2.81 2.82 sono detti di *prima classe*, ossia se risulta soddisfatta la relazione:

$$\{C_\alpha, C_\beta\}_{pp} = f_{\alpha\beta}{}^{\gamma} C_\gamma \tag{2.88}$$

[7]La 2.81 2.82 sono gli stessi vincoli introdotti nella decomposizione dell'equazione di Einstein

e che le parentesi di Poisson[8] si annullino sulla superficie del vincolo.

$$\{C_\alpha, C_\beta\}_{pp} \approx 0 \tag{2.89}$$

Secondo quanto affermato dalla meccanica classica, le parentesi di Poisson sono definite su tutto lo spazio delle fasi: avendo calcolato quest'ultime, ci si può restringere successivamente alla superficie sulla quale avviene la dinamica ponendo il vincolo $C_\alpha = 0$.

Per quantizzare la teoria si usa il *procedimento di Dirac* il quale promuove la trattazione dei vincoli direttamente a livello quantistico: il metodo adottato quantizza *a priori* tutto lo spazio delle fasi per poi successivamente restringersi alla ipesuperfice del vincolo. Restringere la quantizzazione solamente alla superficie sulla quale avviene la dinamica del sistema è dovuta al fatto che non tutti gli stati sono ammessi nello spazio delle fasi: i ket che non giacciono sulla superficie del vincolo sono *stati non fisici*.
Essendo nell'ambito della quantizzazione, le semplici variabili sono promosse ad operatori che agiscono su uno *spazio di Hilbert* $\mathbb{H}$. I ket accessibili al sistema sono detti *stati fisici* e sono selezionati in modo tale da soddisfare la seguente relazione:

$$\hat{C}_\alpha \left|\psi_{fis}\right\rangle = 0 \tag{2.90}$$

I ket selezionati dal vincolo formeranno un sottospazio di $\mathbb{H}$. Se si riesce a definire un prodotto scalare a norma positiva tale sottospazio avrà ancora le proprietà di uno spazio di Hilbert.

Tornando al caso gravitazionale e trattando i vincoli 2.81 2.82 tramite il procedimento di Dirac, è possibile quantizzare tutto lo spazio delle fasi definito da $q, \dot{q}$ (in cui ricadono $\gamma_{ij}, \dot{\gamma}_{ij}, \pi^{ij}, \dot{\pi}^{ij}$) e restringersi alla ipersuperficie del moto Σ_t su cui sono definite tutte le grandezze dinamiche del sistema. Le variabili di base (metrica e momento) vengono anch'esse promosse ad operatori:

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &\rightarrow \hat{\gamma}_{ij} = \gamma_{ij} \\ \pi^{ij} &\rightarrow \hat{\pi}^{ij} = -i\hbar \frac{\delta}{\delta \gamma_{ij}} \end{aligned} \tag{2.91}$$

[8] Le parentesi di Poisson sono identificate dal simbolo: $\{,\}_{pp}$.

Calcolando esplicitamente il commutatore dei due operatori sopraelencati si ottiene:

$$\left[\hat{\gamma}_{ij}(x), \hat{\pi}^{ij}(y)\right] = i\hbar\, \delta^{kl}_{ij}\, \delta^{(3)}(x, y) \tag{2.92}$$

La metrica ed il momento entrano implicitamente nell'hamiltoniana poiché contenute nell'espressione del tensore di curvatura K_{ij}. Il vincolo hamiltoniano assume invece la seguente forma:

$$\hat{H} = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \left(\hat{\gamma}_{ik}\hat{\gamma}_{jl} + \hat{\gamma}_{il}\hat{\gamma}_{jk} - \hat{\gamma}_{ij}\hat{\gamma}_{kl}\right) \hat{\pi}^{ij}\hat{\pi}^{kl} - \sqrt{\gamma}^3 R \tag{2.93}$$

Si definisce la *metrica di deWitt*:

$$\hat{G}_{ijkl} = \hat{\gamma}_{ik}\hat{\gamma}_{jl} + \hat{\gamma}_{il}\hat{\gamma}_{jk} - \hat{\gamma}_{ij}\hat{\gamma}_{kl} \tag{2.94}$$

Secondo il procedimento di Dirac la superficie definita dal vincolo hamiltoniano selezionerà i ket fisici tali che:

$$\hat{H}\,|\psi\rangle = 0 \tag{2.95}$$

Esplicitando il vincolo:

$$\hat{H}\,|\psi\rangle = \left(\hat{G}_{ijkl}\frac{\hbar^2}{2\gamma}\frac{\delta^2}{\delta\gamma_{ij}\delta\gamma_{kl}} - \sqrt{\gamma}^3 R\right)|\psi\rangle = 0 \tag{2.96}$$

La 2.96 è *l'equazione di Wheeler-deWitt.*

Tale equazione emerge dalla necessità di quantizzare la relatività generale: ciò è stato possibile poiché grazie al formalismo 3+1 si è riusciti ad avere una trattazione hamiltoniana della teoria di Einstein.

Analizzando in maniera più consistente i termini della 2.95 si nota che il significato dell'operatore $\hat{H}$ e del ket $|\psi\rangle$ differiscono dalla concezione classica della meccanica quantistica. $|\psi\rangle$ non è la classica funzione complessa definita sulla superficie del vincolo Σ_t, bensì è un funzionale sullo spazio delle configurazioni di tutti gli spazi-tempo. Essa dipende dalla metrica e quindi contiene in se tutte le informazioni sulla geometria e la materia contenuta nell'universo: ψ è detta *funzione d'onda dell'universo.*

Bibliografia

[1] Éric Gourgoulhon, *3+1 Formalism in General Gelativity: bases of Numerical Relativity*, Springer, 2012

[2] Misner , C.W. , Thorne, K.S. , Wheeler, J.A. , *Gravitation*, Freeman, New York 1973

[3] Bernard Schutz, *Geometrical methods of mathmatical physics*, Cambridge University Press, 1980

[4] Roberto Casadio, *Elements of Relativity*, Università di Bologna, appunti del corso di Elementi di teoria della relatività, Anno accademico 2016/2017

[5] Eric Poisson, *A relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*, Cambridge University Press, 2004

[6] Ray d'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*, Clarendon Press, 1990

[7] Lev D. Landau, Evgenij M. Lifsits, *Fisica Teorica 1. Meccanica*, Editori Riuniti Univ. Press, 2010

[8] *Analytical and Numerical Approaches to Mathematical Relativity. lecture notes in Physics*, Frauendiener, Jörg, Giulini, Domenico J. W., Perlick, Volker , 2006

[9] Fiorenzo Bastianelli, *Constrained Hamiltonian Systems and Relativistic Particles*, Università di Bologna, appunti del corso di Fisica teorica 2, Anno accademico 2016/2017

[10] Rovelli C., *The strange equation of quantum gravity*, arXiv.org [gr-qc], 2015

[11] Gambini R., Pullin J., *A First Course in Loop Quantum Gravity*, Oxford University Press, 2011

[12] Kiefer C., *Quantum Gravity*, Oxford University Press, 2007

[13] Ehlers J., Friedrich H., *Canonical Gravity: From Classical to Quantum*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994