

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Entanglement: dai postulati della meccanica quantistica al teorema di Bell

Relatore:
Prof. Francesco Ravanini

Presentata da:
Brando Longino

Anno Accademico 2016/2017

*“Anybody who is not shocked by quantum theory
has not understood it”*
Niels Bohr

Sommario

In questo lavoro di tesi verranno presentati inizialmente i postulati della meccanica quantistica, passando poi alla descrizione di stati tramite vettori in uno spazio di Hilbert e, successivamente, alla descrizione tramite l'operatore densità associato al sistema. Introducendo quindi i concetti di qubit e di decomposizione di Schmidt, si mostrerà il fenomeno chiamato *Entanglement*, illustrando alcuni esempi. Nel quinto capitolo verrà trattata l'Entropia di Von Neumann come strumento per quantificare l'Entanglement di un sistema, mentre nel sesto (ed ultimo), si discuterà il problema del paradosso EPR, accompagnato dal teorema di Bell. Sarà presentato infine uno degli esperimenti di Aspect, prova sperimentale della non validità della teoria a variabili nascoste locali di cui Einstein, Podolski e Rosen furono sostenitori.

Indice

1	Introduzione	1
2	I postulati della meccanica quantistica	3
3	L'operatore densità	8
3.1	Formalismo ed informazione incompleta	8
3.2	Miscela statistica di stati	8
3.3	Differenza tra <i>sovrapposizione lineare</i> e <i>miscela statistica</i>	10
3.4	Il <i>caso puro</i> : introduzione dell'operatore densità	12
3.5	Miscela statistica di stati (caso non puro)	15
4	Il <i>Qubit</i>	19
4.1	Spin- $\frac{1}{2}$ e Rotazioni	19
4.2	Sistemi composti e correlazione tra qubit	22
4.3	Sottosistemi, Matrice Densità Ridotta e Decomposizione di Schimdt	24
5	<i>Entanglement</i>	32
5.1	Entropie di Shannon, Von Neumann e Rényi	33
5.2	Entropia di Von Neumann come misura di Entanglement	37
6	Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?	39
6.1	Il Paradosso EPR	40
6.2	Il Teorema di Bell	43
6.3	Gli esperimenti di Aspect	46
A	La versione di Bohm del paradosso EPR	52
	Bibliografia	54

Capitolo 1

Introduzione

Ai propri albori, la teoria quantistica, risultò chiaramente anacronistica, nonchè, per alcuni fisici del tempo, del tutto inaccettabile. Tra questi oppositori, anche il celebre A. Einstein fece la sua comparsa, rappresentando in qualche modo la classe di fisici che riteneva la meccanica quantistica una teoria non completa a causa del suo aspetto probabilistico. Nel corso dei congressi di Solvay, furono numerosi gli attacchi del fisico tedesco alla teoria dei quanti ma vennero tutti prontamente scongiurati da N. Bohr. Il più forte di questi fu quello presentato assieme a Podolski e Rosen: con la pubblicazione del *Paradosso EPR*, Einstein "prese per la gola il dogma della meccanica quantistica", come fece notare Bohr dopo aver letto l'articolo. Tanto il paradosso era legato a fondo ai postulati della meccanica quantistica, che mettere in dubbio quello significava attaccare direttamente tutta la teoria dei quanti. La risposta di Bohr, tirò in ballo l'*Entanglement*, ovvero un fenomeno di correlazione a distanza tra sistemi senza nessuno scambio di particelle bosoniche, chiaramente in contrasto con la teoria della relatività di Einstein. Fu necessario l'intervento del fisico irlandese John Bell per chiarire senza equivoci la questione: il teorema da lui formulato (e che porta il suo nome), fornisce un modo concreto per valutare la validità di una teoria a variabili nascoste locali (di cui Einstein era sostenitore) rispetto alla meccanica quantistica. Con l'avvento di A. Aspect, si realizzò finalmente un esperimento che potesse mettere in pratica ciò che il teorema di Bell enunciava. L'esito fu a sfavore della teoria a variabili nascoste locali, confermando la posizione di forza ricoperta dalla meccanica quantistica¹.

Con questo elaborato si intende presentare al lettore il fenomeno noto col nome di *Entanglement*, definito come "il tratto più caratteristico della meccanica quantistica" da E. Schrödinger. Si introdurranno gli elementi matematici, partendo dai postulati della meccanica quantistica, per comprendere la natura di tale fenomeno, cercando di

¹N.B. Il teorema fornisce credibilità alla meccanica quantistica ma non asserisce che sia la teoria fisica in qualche modo ultima: il grosso ruolo che svolge il teorema di Bell è selezionare quale delle due teorie fosse non corretta, e quindi da scartare. È importante non fraintendere il risultato fisico di ciò che rappresenta tale teorema.

descrivere e, con la definizione dell'Entropia di Von Neumann, quantificarlo quando possibile. Si mostrerà infine come questo sia stato fondamentale nella risoluzione del paradosso EPR, conducendo al teorema di Bell e successivamente al fallimento della teoria a variabili nascoste locali con uno degli esperimenti di Aspect.

Capitolo 2

I postulati della meccanica quantistica

La meccanica quantistica è un modello matematico del mondo fisico. Per ciò che concerne i sistemi chiusi, ovvero perfettamente isolati, possiamo caratterizzare tale modello asserendo cinque postulati: questi servono a specificare come rappresentare stati, osservabili, misurazioni e dinamica; descrivono inoltre anche il modo in cui combinare due sistemi per ottenere un sistema composito.

Postulato 1 - Stati. Uno stato è una completa descrizione di un sistema. In meccanica quantistica, uno stato è un *raggio* in uno *spazio di Hilbert*.

Ricordiamo brevemente cosa sia uno spazio di Hilbert:

- a) È uno *spazio vettoriale* sul campo dei numeri complessi \mathbb{C} . I vettori sono denotati da $|\psi\rangle$ (notazione ket di Dirac).
- b) È dotato di un *prodotto interno* $\langle\psi|\varphi\rangle$ che mappa una coppia ordinata di vettori in \mathbb{C} ed ha le seguenti proprietà:
 - i) Positività: $\langle\psi|\psi\rangle > 0$ per $|\psi\rangle \neq 0$.
 - ii) Linearità: $\langle\psi|(a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle) = a\langle\psi|\psi_1\rangle + b\langle\psi|\psi_2\rangle$.
 - iii) Antisimmetria: $\langle\varphi|\psi\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle^*$. (Il simbolo * denota l'operazione di coniugazione complessa)
- c) È *completo* con la norma $\|\psi\| = \langle\psi|\psi\rangle^{1/2}$.

Va a questo punto chiarito il concetto di *raggio*: esso è una classe di equivalenza di vettori che differiscono per una costante moltiplicativa complessa non nulla. Per ogni raggio non nullo, possiamo scegliere un elemento rappresentativo della classe, nominalmente $|\psi\rangle$, che abbia norma unitaria:

$$\|\psi\| = \langle\psi|\psi\rangle^{1/2} = 1. \quad (2.1)$$

Gli stati di un sistema corrispondono dunque a vettori normalizzati e la fase globale del vettore non ha in generale senso fisico: $|\psi\rangle$ e $e^{i\alpha}|\psi\rangle$, dove $|e^{i\alpha}| = 1$, descrivono lo stesso stato. Poichè ogni raggio corrisponde ad uno stato possibile, dati due stati $|\psi\rangle, |\varphi\rangle$, un altro stato può essere costruito come sovrapposizione lineare dei due, formalmente: $a|\psi\rangle + b|\varphi\rangle$. La fase *relativa* nella sovrapposizione è in questo caso rilevante fisicamente: possiamo identificare $a|\psi\rangle + b|\varphi\rangle$ con $e^{i\alpha}(a|\psi\rangle + b|\varphi\rangle)$ in quanto appartenenti alla stessa classe di equivalenza, ma non con $a|\psi\rangle + e^{i\alpha}b|\varphi\rangle$. Viene usata la notazione $\langle\psi|$ (notazione bra di Dirac) per indicare un'applicazione lineare (un *vettore duale* o *covettore*) che porta vettori in numeri complessi, definita come $\langle\psi| : |\varphi\rangle \rightarrow \langle\psi|\varphi\rangle$. Prima di passare oltre si ricorda che lo stato di un sistema deve dipendere, verosimilmente, dal tempo. È allora opportuno specificare che $|\psi\rangle = |\psi(t)\rangle$.

Postulato 2 - Osservabili. Un' osservabile è una proprietà di un sistema fisico che, teoricamente, può essere misurata. In meccanica quantistica, un' osservabile è un *operatore auto-aggiunto*.

Un operatore \mathbf{A} è una mappa lineare che porta vettori in vettori:

$$\mathbf{A} : |\psi\rangle \rightarrow \mathbf{A}|\psi\rangle, \quad \mathbf{A}(a|\psi\rangle + b|\varphi\rangle) = a\mathbf{A}|\psi\rangle + b\mathbf{A}|\varphi\rangle. \quad (2.2)$$

L'operatore aggiunto \mathbf{A}^\dagger dell'operatore \mathbf{A} è definito dalla relazione:

$$\langle\varphi|\mathbf{A}\psi\rangle = \langle\mathbf{A}^\dagger\varphi|\psi\rangle, \quad (2.3)$$

per tutti i vettori $|\varphi\rangle, |\psi\rangle$ e dove si è indicato con $|\mathbf{A}\psi\rangle$ il vettore $\mathbf{A}|\psi\rangle$. Un operatore \mathbf{A} è detto auto-aggiunto se $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$, o, alternativamente, se $\langle\varphi|\mathbf{A}|\psi\rangle = \langle\psi|\mathbf{A}|\varphi\rangle^*$ per tutti i vettori $|\varphi\rangle$ e $|\psi\rangle$. Si nota che se \mathbf{A} e \mathbf{B} sono autoaggiunti, anche $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ lo è ($(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\dagger = \mathbf{A}^\dagger + \mathbf{B}^\dagger$), mentre $(\mathbf{A}\mathbf{B})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger\mathbf{A}^\dagger$ è auto-aggiunto solo se \mathbf{A} e \mathbf{B} commutano. Per il teorema spettrale, un operatore auto-aggiunto in uno spazio di Hilbert \mathcal{H} ha una rappresentazione spettrale: i suoi autostati formano una base ortonormale completa in \mathcal{H} . Possiamo dunque esprimere un operatore auto-aggiunto \mathbf{A} come¹

$$\mathbf{A} = \sum_n a_n \mathbf{E}_n. \quad (2.4)$$

¹Nelle formule presentate di seguito, si utilizza il simbolo \sum_n per indicare la sommatoria su tutti gli autostati, assumendo che essi siano distribuiti secondo un parametro discreto. Nel caso in cui fossero identificati da parametri continui, l'opportuna operazione è quella di integrazione, indicata col simbolo $\int dn$. Qualitativamente, si può descrivere il passaggio da uno spettro discreto ad uno continuo con il seguente limite (puramente rappresentativo) $\sum_n \rightarrow \int dn$. Per il caso continuo dunque, alle formule presentate va sostituito il simbolo di integrazione a quello di sommatoria, e le $\delta_{n,m}$, delta di Kronecker, vanno rimpiazzate con $\delta(n-m)$, delta di Dirac (dove si ricorda una volta ancora che i numeri quantici n ed m hanno in questo caso valore continuo e non discreto).

Ogni a_n è un autovalore di \mathbf{A} , ed \mathbf{E}_n è la corrispondente proiezione ortogonale sullo spazio degli autovettori con autovalore a_n . Gli \mathbf{E}_n soddisfano:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_n \mathbf{E}_m &= \delta_{n,m} \mathbf{E}_n \\ \mathbf{E}_n^\dagger &= \mathbf{E}_n.\end{aligned}\quad (2.5)$$

Il proiettore ortogonale sullo spazio 1-dimensionale originato dal vettore $|\psi\rangle$ può essere espresso come $|\psi\rangle\langle\psi|$, dove $\langle\psi|$ è il bra che annulla i vettori ortogonali a $|\psi\rangle$. Allora, una rappresentazione spettrale alternativa per l'operatore \mathbf{A} è:

$$\mathbf{A} = \sum_n |n\rangle a_n \langle n|, \quad (2.6)$$

dove $|n\rangle$ è la base ortonormale di autostati di \mathbf{A} , con $\mathbf{A}|n\rangle = a_n|n\rangle$.

Postulato 3 - Misurazioni. Una misurazione è un processo in cui viene acquisita informazione riguardante lo stato del sistema da parte di un osservatore. In meccanica quantistica, la misurazione di un'osservabile \mathbf{A} , prepara un autostato di \mathbf{A} e l'osservatore acquisisce il valore dell'autovalore corrispondente. Se lo stato quantico immediatamente precedente alla misurazione è $|\psi\rangle$, allora il risultato a_n è ottenuto con una *probabilità a priori*:

$$\mathcal{P}(a_n) = \|\mathbf{E}_n |\psi\rangle\|^2 = \langle\psi| \mathbf{E}_n |\psi\rangle; \quad (2.7)$$

Se è ottenuto il risultato a_n , allora lo stato quantico (normalizzato) subito dopo la misurazione è

$$\frac{\mathbf{E}_n |\psi\rangle}{\|\mathbf{E}_n |\psi\rangle\|}. \quad (2.8)$$

Se la misurazione è immediatamente ripetuta, allora secondo questa regola si ottiene lo stesso risultato, con probabilità $\mathcal{P} = 1$. Se molti sistemi preparati identicamente, ciascuno descritto dallo stato $|\psi\rangle$, subiscono una misurazione, allora il *valore di aspettazione* del risultato è

$$\langle\mathbf{A}\rangle \equiv \sum_n a_n \mathcal{P}(a_n) = \sum_n a_n \langle\psi| \mathbf{E}_n |\psi\rangle = \langle\psi| \mathbf{A} |\psi\rangle. \quad (2.9)$$

Postulato 4 - Dinamica. La dinamica descrive come un sistema si evolve nel tempo. In meccanica quantistica, l'evoluzione temporale di un sistema chiuso è descritta da un *operatore unitario*.

Nella formulazione della dinamica di Schrödinger, se lo stato iniziale al tempo t è $|\psi(t)\rangle$, lo stato finale $|\psi(t')\rangle$ al tempo t' può essere espresso come:

$$|\psi(t')\rangle = \mathbf{U}(t', t) |\psi\rangle, \quad (2.10)$$

dove $\mathbf{U}(t', t)$ è l'operatore unitario di evoluzione temporale. L'evoluzione temporale infinitesima è governata dall' *equazione di Schrödinger*

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \mathbf{H}(t) |\psi(t)\rangle, \quad (2.11)$$

in cui $\mathbf{H}(t)$ è un operatore auto-aggiunto chiamato *Hamiltoniano* del sistema (non a caso è stato scelto questo nome, poichè gli autovalori associati a questo operatore rappresentano gli stati energetici possibili del sistema, riprendendo quindi il concetto di Hamiltoniano che compare in meccanica classica). Al primo ordine nella quantità infinitesima dt , l'equazione di Schrödinger può essere scritta come

$$|\psi(t + dt)\rangle = \frac{1}{\hbar} (\mathbf{I} - i\mathbf{H}(t)dt) |\psi(t)\rangle. \quad (2.12)$$

L'operatore $\mathbf{U}(t + dt, t) \equiv \mathbf{I} - i\mathbf{H}(t)dt$ è dunque unitario poichè \mathbf{H} è auto-aggiunto, ed è quindi soddisfatta la condizione $\mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} = 1$ per il primo ordine in dt . Visto che il prodotto di operatori unitari è a sua volta unitario, l'evoluzione temporale governata dall'equazione di Schrödinger per un lasso di tempo finito sarà identificata da un operatore ancora unitario. Nel caso in cui \mathbf{H} sia indipendente dal tempo, l'operatore di evoluzione temporale per intervalli finiti è esprimibile semplicemente nella forma $\mathbf{U}(t', t) = e^{-i(t'-t)\mathbf{H}}$.

Postulato 5 - Sistemi compositi. Sia \mathcal{H}_A lo spazio di Hilbert degli stati del sistema A e sia \mathcal{H}_B lo spazio di Hilbert degli stati del sistema B ; lo spazio di Hilbert degli stati del sistema AB è allora il prodotto tensoriale $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Se il sistema A è preparato nello stato $|\psi\rangle_A$ e il sistema B è preparato nello stato $|\psi\rangle_B$, allora lo stato del sistema composito sarà il prodotto $|\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B$.

Si ricorda velocemente che il prodotto tensoriale agisce in modo tale che se $\{|i\rangle_A\}$ denota una base ortonormale per \mathcal{H}_A e $\{|\mu\rangle_B\}$ una base ortonormale per \mathcal{H}_B , allora gli stati $|i, \mu\rangle_{AB} \equiv |i\rangle_A \otimes |\mu\rangle_B$ sono una base ortonormale per $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, dove il prodotto interno su $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ è definito da

$${}_{AB} \langle i, \mu | j, \nu \rangle_{AB} = \delta_{i,j} \delta_{\mu,\nu}. \quad (2.13)$$

Soffermandosi sul concetto di spazio degli stati di un sistema composito, si definisce come prodotto tensoriale operatoriale $\mathbf{M}_A \otimes \mathbf{N}_B$ l'operatore che applica \mathbf{M}_A al sistema A e \mathbf{N}_B al sistema B . Nella pratica, l'azione di tale operatore sulla base $|i, \mu\rangle_{AB}$ è

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_A \otimes \mathbf{N}_B |i, \mu\rangle_{AB} &= \mathbf{M}_A |i\rangle_A \otimes \mathbf{N}_B |\mu\rangle_B \\ &= \sum_{j,\nu} |j, \nu\rangle_{AB} (\mathbf{M}_A)_{ji} (\mathbf{N}_B)_{\nu\mu}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Un operatore che agisca banalmente sul sistema A , può essere denotato con $\mathbf{I}_A \otimes \mathbf{N}_B$, dove \mathbf{I}_A è l'identità su \mathcal{H}_A . Analogamente, un operatore che agisca banalmente su B si denota con $\mathbf{M}_A \otimes \mathbf{I}_B$.

Osservazioni. I cinque assiomi enunciati forniscono una descrizione matematica completa della meccanica quantistica. Analizzando però queste asserzioni, emergono due stranezze lampanti: la prima è che l'equazione per la dinamica (ovvero quella di Schrödinger) sia lineare, mentre dalla meccanica classica ci si è abituati a vedere equazioni non lineari per descrivere l'evoluzione temporale di un sistema; la seconda, molto più "stravagante", è che vengano presentati due modi decisamente differenti di cambiare lo stato di un sistema, ovvero l'evoluzione temporale ed il processo di misurazione. Guardando al primo dei due, esso ha chiaramente una forma deterministica, in quanto l'evoluzione temporale descritta da un operatore unitario fa sì che noto lo stato iniziale $|\psi(t_0 = 0)\rangle$, la teoria permetta di predire lo stato $|\psi(t)\rangle$ ad un tempo successivo. Dall'altra parte tuttavia, compare la misurazione, che presenta un aspetto solamente probabilistico: la teoria non ci permette di fare previsioni riguardo i risultati di una misurazione, ma soltanto di assegnare ad essi una probabilità. Chiaramente ciò è fonte di non pochi atteggiamenti dubbiosi nei confronti della meccanica quantistica, che non spiega perché il processo di misura sia soggetto a natura probabilistica (a differenza degli altri processi di evoluzione o alterazione del sistema) ma addirittura introduce il concetto come assioma. Lo stesso A. Einstein fu un agguerrito sostenitore dell'incompletezza della meccanica quantistica e non sembrò mai disposto ad accettarne la vera natura. Tuttavia, i dati sperimentali ad oggi sono nettamente in favore della teoria dei quanti, come sarà mostrato più avanti, ed essa riveste un ruolo essenziale nella fisica moderna, costituendone le fondamenta.

Capitolo 3

L'operatore densità

3.1 Formalismo ed informazione incompleta

Nell'enunciare i postulati, sono stati considerati sistemi di cui lo stato fosse perfettamente noto. Si è visto come studiarne l'evoluzione temporale e come predire i risultati di varie misurazioni effettuate su di essi. Per determinare lo stato del sistema in questo caso è sufficiente eseguire una serie di misurazioni corrispondenti ad un set completo di osservabili commutanti. Nella pratica però, spesso lo stato del sistema non è perfettamente conosciuto. Due esempi piuttosto immediati possono essere lo stato di polarizzazione di un fotone generato da una sorgente di luce non polarizzata e l'energia cinetica di un atomo emesso da una fornace a temperatura T , che è nota solo statisticamente. Il problema che emerge dalla formulazione della meccanica quantistica per questi sistemi può essere espresso con la domanda: "*è possibile incorporare l'informazione incompleta riguardante questi sistemi nel formalismo della meccanica quantistica, in modo tale che si possa fare massimo utilizzo di questa informazione parziale?*". Per fare in modo di realizzare questo obiettivo, è opportuno introdurre un oggetto matematico significativamente utile, l'operatore densità, il quale facilita notevolmente l'applicazione simultanea dei postulati della meccanica quantistica e dei risultati del calcolo probabilistico. È necessario però introdurre prima alcuni concetti importanti al fine di comprenderne il funzionamento.

3.2 Miscela statistica di stati

Tipicamente, quando non si ha informazione completa riguardante un sistema, si fa riferimento al concetto di probabilità. In meccanica quantistica, l'informazione incompleta riguardante un sistema si presenta nel modo seguente: lo stato del sistema può essere $|\psi_1\rangle$ con probabilità p_1 , $|\psi_2\rangle$ con probabilità p_2 , etc... Chiaramente, essendo in gioco il

concetto di probabilità, è necessario che si abbia

$$p_1 + p_2 + \dots = \sum_k p_k = 1. \quad (3.2.1)$$

Si dice allora che si ha a che fare con una miscela statistica di stati $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots$ con probabilità p_1, p_2, \dots . Si osserva ora ciò che accade alle predizioni riguardanti i risultati di misurazioni effettuate su un tale sistema. Se lo stato del sistema fosse $|\psi_k\rangle$, potremmo usare i postulati enunciati nella sezione precedente per determinare la probabilità di ottenere un risultato piuttosto che un altro. Ora, visto che tale possibilità (ovvero che il sistema si trovi nello stato $|\psi_k\rangle$) ha una probabilità p_k , è immediato il fatto che i risultati ottenuti da tali misurazioni debbano essere pesati dai vari p_k e quindi sommati su tutti gli stati possibili della miscela statistica (dunque su tutti i valori di k). È opportuno a questo punto inserire alcuni commenti riguardanti ciò che è appena stato detto:

- i*) I vari stati $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots$ non sono necessariamente ortogonali. Tuttavia, è sempre possibile sceglierli normalizzati; in questo contesto si assume per semplicità che lo siano .
- ii*) È opportuno notare che nel caso considerato, le probabilità intervengono su due livelli:
 - Nella informazione iniziale sul sistema (nel caso semplice assunto finora in cui lo stato del sistema sia noto, allora si ha che tutte le probabilità p_k sono nulle ad eccezione di una soltanto che sarà pari ad 1);
 - Nell'applicazione dei postulati relativi alla misurazione (i quali portano a predizioni probabilistiche, nonostante lo stato iniziale del sistema sia perfettamente noto).
- iii*) Un sistema descritto da una miscela statistica di stati (con probabilità p_k di essere nello stato $|\psi_k\rangle$) *non* deve essere confuso con un sistema il cui stato $|\psi\rangle$ sia una sovrapposizione lineare di stati¹:

$$|\psi\rangle = \sum_k c_k |\psi_k\rangle. \quad (3.2.2)$$

In meccanica quantistica, quando lo stato del sistema è $|\psi\rangle$, si sente spesso dire che "il sistema ha probabilità $|c_k|^2$ di essere nello stato $|\psi_k\rangle$ ". In realtà, il significato di questa asserzione è che, se effettuiamo una serie di misurazioni corrispondenti

¹Si assume, nel commento *iii*) che gli stati $|\psi_k\rangle$ siano ortonormali. L'ipotesi non è essenziale ma facilita la discussione.

ad un set completo di osservabili commutanti che abbiano $|\psi_k\rangle$ come uno dei possibili autovettori, allora la probabilità di trovare un set di autovalori associati a $|\psi_k\rangle$ sarà proprio $|c_k|^2$. È molto importante quindi discernere il concetto di miscela statistica di stati da quello di sovrapposizione lineare di stati: un sistema nello stato $|\psi\rangle$ dato da (3.2.2) *non è affatto equivalente* ad un sistema che abbia probabilità $|c_1|^2$ di trovarsi nello stato $|\psi_1\rangle$, $|c_2|^2$ di trovarsi nello stato $|\psi_2\rangle$, etc... Ne è una prova il fatto che, per una combinazione lineare di $|\psi_k\rangle$, esistano in genere effetti di interferenza tra questi stati (dovuti a termini misti del tipo $c_k c_{k'}^*$ ottenuti quando il modulo dell'ampiezza di probabilità è elevato al quadrato) che assumono un'importanza notevole in meccanica quantistica. Si vede perciò che è impossibile, in generale, descrivere una miscela statistica con un "*vettore di stato medio*", che sarebbe una sovrapposizione degli stati $|\psi_k\rangle$. Come è stato detto precedentemente, quando prendiamo una somma pesata di probabilità non possiamo mai ottenere termini di interferenza tra i vari stati $|\psi_k\rangle$ di una miscela statistica. Ha a questo punto senso approfondire rapidamente la differenza tra una sovrapposizione lineare ed una miscela statistica di stati.

3.3 Differenza tra *sovrapposizione lineare* e *miscela statistica*

Siano $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ due stati ortogonali normalizzati:

$$\begin{aligned}\langle\psi_1|\psi_1\rangle &= \langle\psi_2|\psi_2\rangle = 1 \\ \langle\psi_1|\psi_2\rangle &= 0\end{aligned}\tag{3.3.1}$$

(per chiarire le idee, $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ potrebbero essere, ad esempio, due autostati dello stesso osservabile \mathbf{B} associati a due autovalori distinti b_1 e b_2). Se il sistema si trova nello stato $|\psi_1\rangle$, si possono calcolare tutte le probabilità riguardanti i risultati delle misurazioni per un'osservabile \mathbf{A} . Ad esempio, se $|u_n\rangle$ è l'autovettore (normalizzato) associato all'autovalore a_n (assunto non-degenere per semplicità) di \mathbf{A} , la probabilità $\mathcal{P}_1(a_n)$ di trovare a_n quando \mathbf{A} viene misurato sul sistema nello stato $|\psi_1\rangle$ è:

$$\mathcal{P}_1(a_n) = |\langle u_n|\psi_1\rangle|^2.\tag{3.3.2}$$

Un'analoga quantità $\mathcal{P}_2(a_n)$ può essere definita per lo stato $|\psi_2\rangle$:

$$\mathcal{P}_2(a_n) = |\langle u_n|\psi_2\rangle|^2.\tag{3.3.3}$$

Si consideri ora lo stato normalizzato $|\psi\rangle$ che è una *sovrapposizione lineare* di $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$:

$$\begin{aligned}|\psi\rangle &= \lambda_1 |\psi_1\rangle + \lambda_2 |\psi_2\rangle \\ |\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 &= 1.\end{aligned}\tag{3.3.4}$$

Si legge spesso che, quando il sistema è nello stato $|\psi\rangle$, si ha probabilità $|\lambda_1|^2$ di trovarlo nello stato $|\psi_1\rangle$ e probabilità $|\lambda_2|^2$ di trovarlo nello stato $|\psi_2\rangle$. Ciò che si intende con questo modo di dire è che, se $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ sono due autovettori (qui assunti normalizzati) dell'osservabile \mathbf{B} , corrispondenti a due autovalori differenti b_1 e b_2 , allora la probabilità di trovare b_1 quando \mathbf{B} è misurato è pari a $|\lambda_1|^2$ e quella di trovare b_2 è pari a $|\lambda_2|^2$. Queste considerazioni potrebbero però portare a pensare, sbagliando, che uno stato come quello descritto in (3.3.4) sia una miscela statistica degli stati $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ con i pesi $|\lambda_1|^2$ e $|\lambda_2|^2$. In altre parole, se considerassimo un numero N molto grande di sistemi identici nello stato $|\psi\rangle$ mostrato in (3.3.4), potremmo immaginare questo set equivalente ad un altro set, composto da $N|\lambda_1|^2$ sistemi nello stato $|\psi_1\rangle$ ed $N|\lambda_2|^2$ nello stato $|\psi_2\rangle$. Tale interpretazione dello stato $|\psi\rangle$ è però sbagliata e conduce a predizioni fisiche inaccurate, come sarà mostrato di seguito. Si assuma che si stia cercando di calcolare la probabilità $\mathcal{P}(a_n)$ di trovare l'autovalore a_n quando l'osservabile \mathbf{A} è misurata sul sistema nello stato $|\psi\rangle$ in (3.3.4).

Se venisse interpretato lo stato $|\psi\rangle$ come miscela statistica degli stati $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ con i pesi $|\lambda_1|^2$ e $|\lambda_2|^2$, si potrebbe allora ottenere $\mathcal{P}(a_n)$ facendo la somma pesata delle probabilità $\mathcal{P}_1(a_n)$ e $\mathcal{P}_2(a_n)$ (calcolate come mostrato in (3.3.2) e (3.3.3)):

$$\mathcal{P}(a_n) = |\lambda_1|^2 \mathcal{P}_1(a_n) + |\lambda_2|^2 \mathcal{P}_2(a_n) \quad (3.3.5)$$

In realtà, i postulati della meccanica quantistica, elencati nel capitolo precedente, mostrano senza ambiguità il modo per calcolare $\mathcal{P}(a_n)$. L'espressione corretta risulta quindi

$$\mathcal{P}(a_n) = |\langle u_n | \psi \rangle|^2. \quad (3.3.6)$$

$\mathcal{P}(a_n)$ è quindi il quadrato del modulo dell'ampiezza di probabilità $\langle u_n | \psi \rangle$. Si vede facilmente da (3.3.4) che quest'ampiezza è la somma di due termini:

$$\langle u_n | \psi \rangle = \lambda_1 \langle u_n | \psi_1 \rangle + \lambda_2 \langle u_n | \psi_2 \rangle. \quad (3.3.7)$$

È dunque immediato il calcolo di $\mathcal{P}(a_n)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(a_n) &= |\lambda_1 \langle u_n | \psi_1 \rangle + \lambda_2 \langle u_n | \psi_2 \rangle|^2 \\ &= |\lambda_1|^2 |\langle u_n | \psi_1 \rangle|^2 + |\lambda_2|^2 |\langle u_n | \psi_2 \rangle|^2 \\ &\quad + 2\mathbf{Re}\{\lambda_1 \lambda_2^* \langle u_n | \psi_1 \rangle \langle u_n | \psi_2 \rangle^*\}. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Considerando allora (3.3.2) e (3.3.3), si trova che la corretta espressione per $\mathcal{P}(a_n)$ è:

$$\mathcal{P}(a_n) = |\lambda_1|^2 \mathcal{P}_1(a_n) + |\lambda_2|^2 \mathcal{P}_2(a_n) + 2\mathbf{Re}\{\lambda_1 \lambda_2^* \langle u_n | \psi_1 \rangle \langle u_n | \psi_2 \rangle^*\}. \quad (3.3.9)$$

Questo risultato è banalmente diverso da quello ottenuto in (3.3.5).

È quindi altrettanto chiaramente sbagliato considerare $|\psi\rangle$ come una miscela statistica di stati, poichè tale interpretazione eliminerebbe tutti gli effetti di interferenza che

compaiono nel doppio prodotto nella formula (3.3.9). Si vede che non solo i moduli di λ_1 e λ_2 entrano in gioco: con il termine $\lambda_1\lambda_2^*$, compare esplicitamente la fase relativa di λ_1 e λ_2 , che assume quindi rilevanza fondamentale nella predizione fisica (come già accennato nel commento riguardante il Postulato 1 nel capitolo 2).

3.4 Il caso puro: introduzione dell'operatore densità

Avendo ben chiarito la differenza tra i concetti di sovrapposizione lineare e miscela statistica di stati, ci si può ora soffermare su quest'ultima per introdurre il concetto di *operatore densità*.

Per studiare il comportamento di una miscela statistica di stati, è previsto l'utilizzo del seguente metodo: calcolare le predizioni fisiche corrispondenti ai possibili stati $|\psi_k\rangle$, dopodichè farne la somma pesata (su tutti i k), utilizzando come pesi le probabilità p_k associate ai relativi stati. Tale metodo, seppur corretto in principio, può facilmente portare a conti particolarmente lunghi e non sempre banali.

Come precedentemente detto, non è possibile descrivere una miscela statistica con un "vettore di stato medio". È in realtà un "*operatore medio*" che permette una descrizione semplice della miscela statistica di stati: l'operatore densità.

È opportuno però, prima di affrontare il caso generale, esaminare un caso più semplice, in cui lo stato del sistema sia perfettamente noto (tutte le probabilità p_k sono uguali a zero, tranne una che assume valore uno). Si dice allora che il sistema è in uno *stato puro*.

Si intende mostrare di seguito che caratterizzare il sistema con il suo vettore di stato è equivalente a caratterizzarlo con un operatore agente sullo spazio degli stati, l'operatore densità. L'utilità di tale oggetto matematico si chiarirà poco più avanti, osservando che buona parte delle formule che coinvolgono tale operatore ricavate per il caso puro, sono in realtà valide anche per la descrizione di una miscela statistica di stati.

a. Descrizione tramite un vettore di stato.

Si consideri un sistema il cui vettore di stato all'istante t sia:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |u_n\rangle, \quad (3.4.1)$$

dove gli $\{|u_n\rangle\}$ formano una base ortonormale nello spazio degli stati, assumendo per comodità che questa sia discreto (il passaggio al caso continuo non prevede complicazioni, se non la sostituzione della sommatoria con l'operazione di integrazione). I coefficienti $c_n(t)$ soddisfano la relazione

$$\sum_n |c_n(t)|^2 = 1, \quad (3.4.2)$$

che semplicemente esplicita il fatto che $|\psi(t)\rangle$ sia normalizzato. Se \mathbf{A} è un'osservabile, con componenti della matrice associata

$$\langle u_n | \mathbf{A} | u_p \rangle = \mathbf{A}_{np}, \quad (3.4.3)$$

allora il valore di aspettazione di \mathbf{A} all'istante t è:

$$\langle \mathbf{A} \rangle(t) = \langle \psi(t) | \mathbf{A} | \psi(t) \rangle = \sum_{n,p} c_n^*(t) c_p(t) \mathbf{A}_{np}. \quad (3.4.4)$$

Infine si ricorda che l'evoluzione dello stato $|\psi(t)\rangle$ è descritta dall'equazione di Schrödinger (2.11).

b. Descrizione tramite l'operatore densità

La relazione (3.4.4) mostra che i coefficienti $c_n(t)$ entrano nel valore di aspettazione tramite espressioni quadratiche del tipo $c_n^*(t)c_p(t)$. Queste sono, più semplicemente, gli elementi dell'operatore $|\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|$, ovvero il proiettore sul ket $|\psi(t)\rangle$, come si può facilmente vedere:

$$\langle u_p | \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | u_n \rangle = c_n^*(t) c_p(t). \quad (3.4.5)$$

È dunque naturale introdurre l'*operatore densità* $\rho(t)$ definito da:

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|. \quad (3.4.6)$$

L'operatore densità è rappresentato, nella base $\{|u_n\rangle\}$, da una matrice chiamata *matrice densità*, i cui elementi sono

$$\rho_{pn}(t) = \langle u_p | \rho(t) | u_n \rangle = c_n^*(t) c_p(t). \quad (3.4.7)$$

Si intende ora mostrare che conoscere $\rho(t)$ è sufficiente per caratterizzare lo stato quantistico del sistema; ciò, di fatto, consiste nel mostrare che l'operatore densità permette di calcolare tutte le predizioni fisiche ottenibili conoscendo $|\psi(t)\rangle$. È necessario allora riscrivere (3.4.2), (3.4.4) e (2.11) in termini di $\rho(t)$.

Sfruttando (3.4.7), è immediato riscrivere la relazione (3.4.2) come

$$\sum_n |c_n(t)|^2 = \sum_n \rho_{nn}(t) = \mathbf{Tr} \rho(t) = 1 \quad (3.4.8)$$

che mostra come la condizione di normalizzazione si traduca nella richiesta di avere traccia unitaria per la matrice densità. Si può inoltre ottenere una riformulazione di (3.4.4) sfruttando (3.4.3) e (3.4.7):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A} \rangle(t) &= \sum_{n,p} \langle u_p | \rho(t) | u_n \rangle \langle u_n | \mathbf{A} | u_p \rangle \\ &= \sum_p \langle u_p | \rho(t) \mathbf{A} | u_p \rangle \\ &= \mathbf{Tr} \{ \rho(t) \mathbf{A} \}. \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

Infine, l'evoluzione temporale dell'operatore $\rho(t)$ può essere ricavata dall'equazione di Schrödinger (2.11):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho(t) &= \left(\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle\right)\langle\psi(t)| + |\psi(t)\rangle\left(\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|\right) \\ &= \frac{1}{i\hbar}\mathbf{H}(t)|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| - \frac{1}{i\hbar}|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|\mathbf{H}(t) \\ &= \frac{1}{i\hbar}[\mathbf{H}(t), \rho(t)].\end{aligned}\quad (3.4.10)$$

Ricapitolando, in termini dell'operatore densità, la conservazione della probabilità è espressa da

$$\mathbf{Tr}\rho(t) = 1, \quad (3.4.11)$$

il valore di aspettazione di un'osservabile \mathbf{A} è calcolato con la formula

$$\langle\mathbf{A}\rangle(t) = \mathbf{Tr}\{\mathbf{A}\rho(t)\} = \mathbf{Tr}\{\rho(t)\mathbf{A}\}, \quad (3.4.12)$$

e l'evoluzione temporale obbedisce all'equazione

$$i\hbar\frac{d}{dt}\rho(t) = [\mathbf{H}(t), \rho(t)]. \quad (3.4.13)$$

Si indica, per completezza, come calcolare, tramite $\rho(t)$, le probabilità $\mathcal{P}(a_n)$ di ottenere i vari risultati a_n misurando un'osservabile \mathbf{A} ad un istante di tempo t . Sappiamo dalla (2.7) che possiamo scrivere la probabilità $\mathcal{P}(a_n)$ come il valore di aspettazione associato all'operatore \mathbf{E}_n , ovvero il proiettore sull'autospazio associato ad a_n :

$$\mathcal{P}(a_n)(t) = \langle\psi(t)|\mathbf{E}_n|\psi(t)\rangle. \quad (3.4.14)$$

Usando la (3.4.12) otteniamo:

$$\mathcal{P}(a_n)(t) = \mathbf{Tr}\{\mathbf{E}_n\rho(t)\}. \quad (3.4.15)$$

c. Proprietà dell'operatore densità in un caso puro

Nel caso puro, un sistema può essere ben descritto da un operatore densità ma può, altrettanto bene, essere descritto da un vettore di stato. L'operatore densità presenta però un consistente numero di vantaggi.

Innanzitutto, è immediato osservare dalla (3.4.6) che ai due vettori di stato $|\psi(t)\rangle$ e $e^{i\theta}|\psi(t)\rangle$, con θ numero reale, è associato lo stesso operatore densità (ulteriore prova del fatto che i due vettori di stato descrivono lo stesso stato fisico). Utilizzare l'operatore densità per descrivere un sistema elimina quindi tutti gli strascichi correlati alla presenza di una fase globale per il vettore di stato. Si nota inoltre dalle relazioni (3.4.11), (3.4.12) e (3.4.15) che le formule riguardanti l'operatore densità sono lineari rispetto ad esso,

mentre non sono lineari le espressioni (3.4.4) e (3.4.14), che risultano quadratiche rispetto a $|\psi(t)\rangle$.

Si presentano infine alcune proprietà di $\rho(t)$, le quali sono immediatamente deducibili dalla sua definizione (3.4.6):

$$\rho^\dagger(t) = \rho(t) \quad (3.4.16)$$

(l'operatore densità è Hermitiano)

$$\rho^2(t) = \rho(t) \quad (3.4.17)$$

$$\mathbf{Tr}\rho^2(t) = 1. \quad (3.4.18)$$

Queste due ultime relazioni, derivanti dal fatto che $\rho(t)$ è un proiettore, sono vere solo per il caso puro. Sarà mostrato in seguito che esse non sono valide per una miscela statistica di stati.

3.5 Miscela statistica di stati (caso non puro)

a. Definizione dell'operatore densità

Si consideri ora il caso generale, ovvero quello di un sistema per il quale le probabilità $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$ siano arbitrarie, con la condizione che siano verificate le condizioni di consistenza per la probabilità:

$$0 \leq p_1, p_2, \dots, p_k, \dots \leq 1$$

$$\sum_k p_k = 1. \quad (3.5.1)$$

Sotto tali condizioni, per calcolare la probabilità $\mathcal{P}(a_n)$ che la misura di un'osservabile \mathbf{A} restituisca il valore a_n , si procede nel modo seguente:

sia

$$\mathcal{P}_k(a_n) = \langle \psi_k | \mathbf{E}_n | \psi_k \rangle \quad (3.5.2)$$

la probabilità che il risultato della misura sia a_n se il vettore di stato del sistema fosse $|\psi_k\rangle$. Per ottenere la probabilità $\mathcal{P}(a_n)$ cercata, è poi necessario pesare le $\mathcal{P}_k(a_n)$ con le p_k e quindi sommare su k :

$$\mathcal{P}(a_n) = \sum_k p_k \mathcal{P}_k(a_n). \quad (3.5.3)$$

Volendo ora ricondursi all'operatore densità, dalla (3.4.15) si ha:

$$\mathcal{P}_k(a_n) = \mathbf{Tr}\{\rho_k \mathbf{E}_n\}, \quad (3.5.4)$$

dove

$$\rho_k = |\psi_k\rangle \langle \psi_k| \quad (3.5.5)$$

è l'operatore densità corrispondente allo stato $|\psi_k\rangle$. Sostituendo la (3.5.4) nella (3.5.3), si ha:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(a_n) &= \sum_k p_k \mathbf{Tr}\{\rho_k \mathbf{E}_n\} \\ &= \mathbf{Tr}\left\{\sum_k p_k \rho_k \mathbf{E}_n\right\} \\ &= \mathbf{Tr}\{\rho \mathbf{E}_n\},\end{aligned}\tag{3.5.6}$$

dove è stato posto:

$$\rho = \sum_k p_k \rho_k.\tag{3.5.7}$$

Si osserva che la linearità delle formule che fanno uso dell'operatore densità, permette di esprimere tutte le predizioni fisiche in funzione di ρ , la media pesata degli operatori densità ρ_k . Si definisce dunque ρ come *operatore densità del sistema*.

b. Proprietà generali dell'operatore densità

È immediato osservare che ρ è un operatore hermitiano come ognuno dei ρ_k , visto che i coefficienti p_k sono reali. Calcolando la traccia di ρ , si ottiene:

$$\mathbf{Tr} \rho = \sum_k p_k \mathbf{Tr} \rho_k.\tag{3.5.8}$$

Come si è visto in §3.4-b, la traccia degli operatori densità ρ_k è sempre pari ad 1. Ne segue allora che:

$$\mathbf{Tr} \rho = \sum_k p_k = 1.\tag{3.5.9}$$

Si vede quindi che la relazione (3.4.11) è valida anche per il caso generale. Utilizzando ora l'espressione data in (3.4.6), che permette il calcolo di $\mathcal{P}(a_n)$ in funzione di ρ , è possibile generalizzare la formula (3.4.12) al caso di miscele statistiche:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{A} \rangle &= \sum_n a_n \mathcal{P}(a_n) = \mathbf{Tr} \left\{ \rho \sum_n a_n \mathbf{P}_n \right\} \\ &= \mathbf{Tr} \{ \rho \mathbf{A} \}.\end{aligned}\tag{3.5.10}$$

Si intende ora calcolare l'evoluzione temporale dell'operatore densità per il caso generale. Per fare ciò, sarà assunto che l'Hamiltoniano del sistema $\mathbf{H}(t)$ sia, al contrario dello stato del sistema, noto. È possibile quindi mostrare che se il sistema all'istante iniziale t_0 ha probabilità p_k di trovarsi nello stato $|\psi_k\rangle$, allora ad un certo istante di tempo successivo t , ha la stessa probabilità p_k di essere nello stato $|\psi_k(t)\rangle$ dato da:

$$\begin{cases} i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_k(t)\rangle = \mathbf{H}(t) |\psi_k(t)\rangle \\ |\psi_k(t_0)\rangle = |\psi_k\rangle. \end{cases}\tag{3.5.11}$$

L'operatore densità all'istante t sarà quindi:

$$\rho(t) = \sum_k p_k \rho_k(t), \quad (3.5.12)$$

dove:

$$\rho_k(t) = |\psi_k(t)\rangle \langle \psi_k(t)|. \quad (3.5.13)$$

Secondo (3.4.13), $\rho_k(t)$ obbedisce l'equazione di evoluzione:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_k(t) = [\mathbf{H}(t), \rho_k(t)]. \quad (3.5.14)$$

Dalla linearità delle formule (3.5.12) e (3.5.14) rispetto a $\rho_k(t)$, si ottiene

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho(t) = [\mathbf{H}(t), \rho(t)]. \quad (3.5.15)$$

Risulta dunque possibile generalizzare al caso di una miscela statistica tutte le equazioni in §3.4, ad eccezione di (3.4.17) e (3.4.18): osservando che ρ non è più un proiettore, si ha, in generale²

$$\rho^2 \neq \rho \quad (3.5.16)$$

e, conseguentemente

$$\mathbf{Tr} \rho^2 \leq 1. \quad (3.5.17)$$

È inoltre sufficiente che sia verificata una tra le due equazioni (3.4.17) e (3.4.18) affinché si sia certi di avere a che fare con un caso puro. Si vede infine, dalla definizione (3.5.7), che, per ogni ket $|u\rangle$, si ha:

$$\begin{aligned} \langle u | \rho | u \rangle &= \sum_k p_k \langle u | \rho_k | u \rangle \\ &= \sum_k p_k |\langle u | \psi_k \rangle|^2 \end{aligned} \quad (3.5.18)$$

e di conseguenza:

$$\langle u | \rho | u \rangle \geq 0 \quad (3.5.19)$$

che mostra il fatto che ρ sia un operatore positivo.

²A sostegno delle formule (3.5.16) e (3.5.17): si assuma, ad esempio, che gli stati $|\psi_k\rangle$ siano ortonormali. In una base ortonormale che includa i vettori $|\psi_k\rangle$, ρ è diagonale ed i suoi elementi sono proprio i p_k . Per ottenere ρ^2 , è sufficiente rimpiazzare i p_k con p_k^2 . Le relazioni (3.5.16) e (3.5.17) sono quindi conseguenza del fatto che tutti i p_k siano sempre minori di 1 (a meno che non ci si trovi nel caso puro, in cui solo uno sia non nullo e dunque uguale ad 1).

c. Popolazioni e coerenze

Si intende ora mostrare quale sia il significato fisico degli elementi matriciali ρ_{np} di ρ nella base $|u_n\rangle$.

Innanzitutto, si considerino gli elementi diagonali ρ_{nn} . In accordo con la (3.5.7), si ha:

$$\rho_{nn} = \sum_k p_k [\rho_k]_{nn} \quad (3.5.20)$$

che, utilizzando la (3.5.5) ed introducendo i coefficienti

$$c_n^{(k)} = \langle u_n | \psi_k \rangle \quad (3.5.21)$$

relativi ai $|\psi_k\rangle$ nella base $\{|u_n\rangle\}$, diventa

$$\rho_{nn} = \sum_k p_k |c_n^{(k)}|^2. \quad (3.5.22)$$

$|c_n^{(k)}|^2$ è un numero reale positivo, la cui interpretazione è la seguente: " se lo stato del sistema è $|\psi_k\rangle$, tale numero è la probabilità di trovare, con una misura, tale sistema nello stato $|u_n\rangle$. Considerando la (3.5.20) e prendendo in considerazione l'indeterminazione dello stato prima della misurazione, i ρ_{nn} rappresentano la probabilità media di trovare il sistema nello stato $|u_n\rangle$. Per questa ragione, i ρ_{nn} prendono il nome di *popolazione* dello stato $|u_n\rangle$: se la stessa misurazione è effettuata N volte sotto le stesse condizioni iniziali, dove N è un numero sufficientemente grande, $N\rho_{nn}$ sistemi saranno trovati nello stato $|u_n\rangle$. È evidente dalla (3.5.22) che i ρ_{nn} siano numeri reali positivi, uguali a 0 se e solo se tutti i $|c_n^{(k)}|^2$ sono pari a 0.

Un conto analogo a quello appena mostrato, porta all'espressione per gli elementi non-diagonali ρ_{np} :

$$\rho_{np} = \sum_k p_k c_n^{(k)} c_p^{(k)*} \quad (3.5.23)$$

il termine misto $c_n^{(k)} c_p^{(k)*}$ descrive gli effetti dell'interferenza tra gli stati $|u_n\rangle$ e $|u_p\rangle$ che possono apparire quando lo stato $|\psi_k\rangle$ è una sovrapposizione lineare di questi stati.

Dalla (3.5.23) si osserva che i ρ_{np} sono la media pesata di questi termini misti fatta su tutti gli stati possibili della miscela statistica. A differenza delle popolazioni, i ρ_{np} possono essere nulli anche se nessuno dei prodotti $c_n^{(k)} c_p^{(k)*}$ lo è: le popolazioni sono somme di numeri reali positivi (o nulli), mentre i ρ_{np} sono somme di numeri complessi. Se ρ_{np} è nullo, significa che sono nulli gli effetti di interferenza di $|u_n\rangle$ e $|u_p\rangle$. Allo stesso modo, se ρ_{np} è diverso da 0, allora significa che c'è un certo livello di coerenza tra gli stati $|u_n\rangle$ e $|u_p\rangle$: per questo motivo, i termini non-diagonali di ρ sono chiamati *coerenze*.

Capitolo 4

Il *Qubit*

L'unità fondamentale di informazione classica è il *bit*, ovvero un sistema che può assumere solamente uno dei due valori possibili $\{0, 1\}$. Il suo corrispettivo quantistico prende il nome di *qubit* e descrive il più semplice sistema quantistico: il più piccolo spazio di Hilbert non banale è quello bidimensionale. In tale spazio è possibile identificare una base ortonormale con la notazione $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, cosicchè il vettore di stato normalizzato più generico possibile sia scrivibile nella forma:

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (4.0.1)$$

dove α, β sono numeri complessi che soddisfano la relazione $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, derivante dalla normalizzazione dello stato $|\psi\rangle$. Effettuando una misurazione che proietti lo stato sui vettori della base, si otterrà il risultato $|0\rangle$ con probabilità $|\alpha|^2$ ed il risultato $|1\rangle$ con probabilità $|\beta|^2$. Come descritto dal *Postulato 3* inoltre, a meno che $\alpha = 0$ o $\beta = 0$, la misurazione disturba lo stato irreversibilmente: se rieffettuata immediatamente, la misurazione continuerà a dare lo stesso risultato ottenuto la prima volta con probabilità 1. Se lo stato del qubit è inizialmente ignoto, non vi è dunque modo con una singola misurazione di determinare i valori di α e β . Dopo la misurazione allora, il qubit sarà stato preparato in uno stato noto (che sia $|0\rangle$ o $|1\rangle$).

4.1 Spin- $\frac{1}{2}$ e Rotazioni

Si nota che l'equazione (4.0.1) è interpretabile fisicamente come lo stato dello spin associato ad una particella con spin- $\frac{1}{2}$ (come un elettrone). Gli autostati $|0\rangle$ e $|1\rangle$ corrispondono allora agli stati $|\uparrow\rangle$ (spin up) e $|\downarrow\rangle$ (spin down) lungo un certo asse. In questo contesto, i due numeri reali che caratterizzano il qubit (ovvero i numeri complessi α e β divisi per il valore di normalizzazione e per la fase globale), descrivono quella che può essere considerata l'*orientazione* dello spin nello spazio tri-dimensionale, identificando quindi un angolo polare θ ed un angolo azimutale φ .

È possibile osservarlo direttamente: dalla teoria dei gruppi è noto che una rotazione finita attorno all'asse \hat{n} di un angolo θ possa essere espressa come

$$U(\hat{n}, \theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}\hat{n}\vec{\sigma}} = \mathbf{I} \cos \frac{\theta}{2} - i\hat{n}\vec{\sigma} \sin \frac{\theta}{2}, \quad (4.1.1)$$

dove si è fatto uso del vettore $\vec{\sigma}$, che formalmente ha per elementi le matrici di Pauli σ_i , ovvero

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.1.2)$$

Risulta quindi possibile costruire autostati dell'operatore momento angolare lungo un asse parametrizzato da θ e φ , $\hat{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$, applicando una rotazione di un angolo θ attorno all'asse $\hat{n}' = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$ ad un autostato dell'operatore \mathbf{J}_3 , scelto tradizionalmente tra i tre operatori che rappresentano le componenti del momento angolare. Si ricorda velocemente che tali operatori sono legati alle matrici di Pauli dalla relazione

$$\mathbf{J}_k = \frac{1}{2}\sigma_k. \quad (4.1.3)$$

La rotazione considerata, nella rappresentazione *spinoriale*, ovvero quella a due valori figurante nella (4.1.1), assume la forma

$$e^{-i\frac{\theta}{2}\hat{n}'\vec{\sigma}} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -e^{-i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (4.1.4)$$

Applicando la rotazione al vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, l'autostato di \mathbf{J}_3 con autovalore 1, si ottiene, a meno di una fase globale:

$$|\psi(\theta, \varphi)\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (4.1.5)$$

che risulta essere autostato dell'operatore

$$\hat{n} \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\varphi} \sin \theta \\ e^{i\varphi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.1.6)$$

con autovalore 1. È dunque immediato adesso notare che l'equazione (4.0.1), con $\alpha = e^{-i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2}$, $\beta = e^{i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2}$, possa essere interpretata come uno spin che punti nella direzione (θ, φ) .

Come si è detto precedentemente, non è possibile determinare α e β con una singola misurazione. Inoltre, anche avendo a disposizione un numero elevato di copie identiche del sistema (nello stesso stato dunque), non è sufficiente misurare l'osservabile lungo l'asse- z per determinare completamente lo stato del sistema. È infatti conseguibile in questo modo solo una stima dei valori dei moduli $|\alpha|$ e $|\beta|$, mentre sulla fase relativa tra i due coefficienti complessi non si otterrebbe alcuna informazione. Tornando all'analogia

con lo spin- $\frac{1}{2}$, si può ottenere il valore di aspettazione (o valor medio) della componente dello spin lungo l'asse- z

$$\begin{aligned}
 \langle \psi(\theta, \varphi) | \sigma_3 | \psi(\theta, \varphi) \rangle &= \left(e^{i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2}, e^{-i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\
 &= \left(e^{i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2}, e^{-i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2} \right) \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2} \\ -e^{i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\
 &= \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = \cos \theta,
 \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

ma non si acquisirebbe alcuna informazione riguardo la componente sul piano $x - y$. Il problema di determinare $|\psi\rangle$ misurando lo spin è equivalente a determinare il versore \hat{n} misurandone le componenti lungo vari assi: sono richieste quindi misurazioni lungo tre assi. Si potrebbero, ad esempio, determinare n_3 ed n_1 da $\langle \sigma_3 \rangle$ ed $\langle \sigma_1 \rangle$, ma sarebbe comunque necessaria la misurazione di $\langle \sigma_2 \rangle$ a causa del segno di n_2 che resterebbe altrimenti indeterminato.

Ruotare lo spin quindi, se permesso, equivale a permettere di ridurre il tutto ad una sola misurazione: quella lungo l'asse- z . Misurare infatti lungo l'asse- \hat{n} corrisponde ad applicare una rotazione che porti \hat{n} ad allinearsi con l'asse- z e successivamente misurare lungo \hat{z} .

Per approcciarsi alla distinzione tra qubit e bit classico probabilistico, è possibile fare un esempio specifico. Si consideri il caso particolare in cui $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\varphi = 0$ (banalmente, l'asse- x): andando ad effettuare la misurazione lungo tale asse, si potranno ottenere due possibili risultati, ovvero lo stato *spin up* e quello *spin down* lungo l'asse- x ¹.

Per lo stato "spin up lungo l'asse x ", la rappresentazione è la seguente

$$|\uparrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_z\rangle + |\downarrow_z\rangle), \tag{4.1.8}$$

mentre per lo stato ortogonale "spin down lungo l'asse- x " si ha

$$|\downarrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_z\rangle - |\downarrow_z\rangle). \tag{4.1.9}$$

Per entrambi questi due stati si ha che, andando a misurare l'orientazione dello spin lungo l'asse- z , esso sarà trovato nello stato $|\uparrow_z\rangle$ con probabilità $\frac{1}{2}$ e nello stato $|\downarrow_z\rangle$ sempre con probabilità $\frac{1}{2}$.

¹È fondamentale ricordare che gli operatori associati alle componenti dello spin non commutano, quindi effettuare una misura di spin lungo un asse, rende massima l'indeterminazione sulle componenti lungo gli altri.

Si consideri ora lo stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_x\rangle + |\downarrow_x\rangle). \quad (4.1.10)$$

Questo è banalmente caratterizzato dal fatto che effettuando una misurazione dello spin lungo l'asse- x , si potrà ottenere $|\uparrow_x\rangle$ o $|\downarrow_x\rangle$, entrambi con probabilità $\frac{1}{2}$. È però di particolare interesse chiedersi cosa accadrebbe se venisse misurato lo spin dello stato (4.1.10) lungo l'asse- z : se quelli considerati fossero bit probabilistici classici, allora per ognuno dei due stati possibili lungo l'asse- x , si avrebbe probabilità $\frac{1}{2}$ che lo spin sia up o down lungo l'asse- z .

Per i qubit però, il risultato è differente: sommando le equazioni (4.1.8) e (4.1.9), si osserva che lo stato descritto dalla (4.1.10) altro non è che $|\uparrow_z\rangle$. Nello stato (4.1.10) quindi, si misurerà sempre $|\uparrow_z\rangle$ e mai $|\downarrow_z\rangle$.

Si osserva in questo modo che i qubit non si sommano nello stesso modo in cui si sommano le probabilità classiche: questo fenomeno prende il nome di *interferenza quantistica*.

4.2 Sistemi composti e correlazione tra qubit

Lo stato composto da un singolo qubit, presentato nel paragrafo precedente, risulta comunque un sistema di estrema semplicità. Di maggiore interesse sono i sistemi composti da un numero maggiore di qubit. Riportando l'analogia tra un qubit ed una particella con spin- $\frac{1}{2}$, è possibile costruire un sistema composto da due qubit, partendo dalla teoria della somma di momenti angolari: è noto dalla teoria che, dati due sistemi con momenti angolari rispettivamente s_1 ed s_2 , essi si compungano in un sistema di momento angolare j che può assumere i valori dell'intervallo discreto $[j_{min}, j_{min} + 1, \dots, j_{max} - 1, j_{max}]$, dove $j_{min} = |s_1 - s_2|$ e $j_{max} = s_1 + s_2$. Il sistema composto è quindi caratterizzato dai due numeri quantici (j, m_j) , dove m_j può assumere i valori discreti $[-j, -j + 1, \dots, j - 1, j]$ (è immediato osservare che ad ogni valore di j sono associati $(2j + 1)$ valori possibili di m_j).

Un sistema composto da due qubit può quindi essere costruito in analogia ad un sistema formato da due particelle di spin- $\frac{1}{2}$: si avrà allora $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$. Conseguentemente, $j = 0, 1$. Associando le configurazioni possibili agli stati delle singole particelle, si avrà allora:

$$\begin{aligned} |\uparrow_1\uparrow_2\rangle &= |1\ 1\rangle, & |\downarrow_1\downarrow_2\rangle &= |1\ -1\rangle, \\ |\uparrow_1\downarrow_2\rangle &= \alpha |1\ 0\rangle + \beta |0\ 0\rangle, \\ |\downarrow_1\uparrow_2\rangle &= \alpha' |1\ 0\rangle + \beta' |0\ 0\rangle, \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

dove gli stati sono contraddistinti dai numeri quantici j, m_j con $|j\ m_j\rangle$. Lo stato con $j = 0$ prende il nome di *stato di singoletto*, mentre gli stati con $j = 1$ quello di *stato di tripletto*.

Invertendo le relazioni in (4.2.1) si ottiene

$$\begin{aligned} |1\ 1\rangle &= |t_1\rangle = |\uparrow_1\uparrow_2\rangle, & |1\ -1\rangle &= |t_{-1}\rangle = |\downarrow_1\downarrow_2\rangle, \\ |1\ 0\rangle &= |t_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_1\downarrow_2\rangle + |\downarrow_1\uparrow_2\rangle), \\ |0\ 0\rangle &= |s_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_1\downarrow_2\rangle - |\downarrow_1\uparrow_2\rangle). \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Gli stati di tripletto $|t_1\rangle$ e $|t_{-1}\rangle$ non lasciano dubbi sullo stato dei singoli sottosistemi, mentre $|t_0\rangle$ e $|s_0\rangle$ mostrano un comportamento molto particolare che si può osservare ricordando che gli stati del sistema composto dalle due particelle si trovano in uno spazio \mathcal{H}' che è il prodotto tensoriale dei due spazi di Hilbert cui appartengono gli stati dei singoli sottosistemi, rispettivamente \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 . In formule si ha $\mathcal{H}' = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ e risulta conseguentemente immediata l'interpretazione della notazione usata nella (4.2.1) e nella (4.2.2)

$$|\uparrow_1\downarrow_2\rangle = |\uparrow_1\rangle \otimes |\downarrow_2\rangle. \quad (4.2.3)$$

Tenendo conto di ciò, è possibile effettuare la misurazione dello stato di uno dei due qubit, prendendo, a titolo esemplificativo, lo stato di singoletto $|s_0\rangle$ ed effettuando tale procedura su quello identificato dal numero 1. La misurazione dello stato consisterà allora nella proiezione dello stato di singoletto sulla base $\{|\uparrow_1\rangle, |\downarrow_1\rangle\}$. Si otterrà dunque l'esito $|\uparrow_1\rangle$ con probabilità $\frac{1}{2}$, preparando lo stato

$$|\uparrow_1\rangle \otimes |\downarrow_2\rangle, \quad (4.2.4)$$

oppure si presenterà il risultato $|\downarrow_1\rangle$ con probabilità $\frac{1}{2}$, e preparerà lo stato

$$|\downarrow_1\rangle \otimes |\uparrow_2\rangle. \quad (4.2.5)$$

Si osserva immediatamente che, in entrambi i casi, effettuare una misura sul qubit 1 fa sì che venga selezionato uno stato del qubit 2.

Quando un sistema composto da più qubit gode di questa proprietà, si dice che essi sono *correlati*. Tale correlazione non è, ovviamente, garantita per tutti gli stati; ad esempio, quello di tripletto con spin totale uguale ad 1

$$|t_1\rangle = |\uparrow_1\rangle \otimes |\uparrow_2\rangle, \quad (4.2.6)$$

mostra un comportamento che non risente di questo fenomeno: effettuare una misurazione sullo stato di uno dei due qubit non fornisce nessuna informazione **aggiuntiva** sul sistema.

Stati come quello di singoletto, in cui emerge una correlazione non-locale, vengono chiamati *entangled*, mentre quelli in cui non è presente questo effetto vengono detti *separabili*.

Al fine di studiare questo fenomeno di correlazione non-locale, è fondamentale introdurre alcuni concetti matematici quali la *matrice densità ridotta* e la *decomposizione di Schmidt*.

4.3 Sottosistemi, Matrice Densità Ridotta e Decomposizione di Schimdt

Dagli esempi appena mostrati, si osserva che l'entanglement è un fenomeno che agisce tra due sottosistemi appartenenti allo stesso sistema, ad esempio due particelle che debbano soddisfare una condizione di conservazione (come il caso mostrato in precedenza). È importante però notare che l'attributo "entangled" o "separabile" associato ad un sistema può dipendere dalla partizione scelta: adottare diverse divisioni in sottosistemi può portare all'assegnazione di attributi differenti.

Si consideri il caso di tre particelle (1,2,3) con spin nello stato

$$|\psi\rangle = \frac{|\uparrow_1\rangle \otimes |\downarrow_2\rangle - |\downarrow_1\rangle \otimes |\uparrow_2\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |\uparrow_3\rangle. \quad (4.3.1)$$

Si verifica facilmente che scegliendo come sotto sistemi (1 ∪ 2) e 3, il sistema risulta essere separabile; al contrario, scegliendo 1 e (2 ∪ 3), è immediato constatare che il sistema sia entangled.

Di seguito si, sarà considerato un generico sistema $A \cup B$, suddiviso nei due sottosistemi A e B . Come già visto, lo spazio di Hilbert di tale sistema, supponendo sia descritto da uno stato puro, sarà dato da

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B. \quad (4.3.2)$$

Utilizzando questa fattorizzazione, è inoltre possibile esprimere lo stato del sistema come combinazione lineare del prodotto tensoriale tra le basi dei sottosistemi:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} C_{i,j} |\phi_i\rangle_A \otimes |\chi_j\rangle_B, \quad (4.3.3)$$

dove $|\phi_i\rangle_A$ e $|\chi_j\rangle_B$ sono basi ortonormali complete, rispettivamente di \mathcal{H}_A e di \mathcal{H}_B , mentre $C_{i,j}$ sono coefficienti complessi normalizzati tali che

$$\sum_{i,j} |C_{i,j}|^2 = 1. \quad (4.3.4)$$

Un altro strumento di particolare utilità per studiare la correlazione tra sottosistemi è la *matrice densità ridotta*. Dal nome si evince facilmente che tale oggetto sarà un operatore molto simile all'operatore densità: in particolare, la differenza principale risiede nel fatto che l'operatore ridotto sarà concentrato su un sottosistema e non sul sistema totale.

Entrando nel merito, si consideri un operatore Q che agisce solamente sul sistema A , lasciando inalterato il sottosistema B . Esso può allora essere espresso come:

$$Q = Q_A \otimes \mathbb{1}_B \quad (4.3.5)$$

Calcolando quindi il valore di aspettazione associato a tale operatore, si ha:

$$\begin{aligned}
\langle \psi | \mathbf{Q}_A \otimes \mathbb{1}_B | \psi \rangle &= \left(\sum_{i,j} C_{i,j}^* \langle \phi_i |_A \otimes \langle \chi_j |_B \right) \mathbf{Q}_A \otimes \mathbb{1}_B \left(\sum_{k,l} C_{k,l} |\phi_k\rangle_A \otimes |\chi_l\rangle_B \right) \\
&= \sum_{i,j,k,l} C_{i,j}^* C_{k,l} \langle \phi_i | \mathbf{Q}_A | \phi_k \rangle \langle \chi_j | \mathbb{1}_B | \chi_l \rangle \\
&= \sum_{i,j,k,l} C_{i,j}^* C_{k,l} \langle \phi_i | \mathbf{Q}_A | \phi_k \rangle \delta_{j,l} \\
&= \sum_{i,k} \left(\sum_j C_{i,j}^* C_{k,j} \right) \langle \phi_i | \mathbf{Q}_A | \phi_k \rangle \\
&= \sum_i \langle \phi_i | \rho_A \mathbf{Q}_A | \phi_i \rangle
\end{aligned} \tag{4.3.6}$$

dove è stato fatto uso dell'ortonormalità della base $|\chi_j\rangle_B$ ed è stata definita la *matrice densità ridotta* ρ_A con la relazione

$$\langle \phi_i | \rho_A | \phi_k \rangle = \sum_j C_{i,j}^* C_{k,j}. \tag{4.3.7}$$

Introducendo, per un operatore \mathbf{O} , la notazione $\mathbf{Tr}_V[\mathbf{O}]^2$ per indicare la traccia di \mathbf{O} fatta rispetto a tutti gli stati appartenenti allo spazio vettoriale V , è possibile scrivere le relazioni

$$\langle \psi | \mathbf{Q} | \psi \rangle = \mathbf{Tr}_{\mathcal{H}}[\rho \mathbf{Q}], \quad \sum_i \langle \phi_i | \rho_A \mathbf{Q}_A | \phi_i \rangle = \mathbf{Tr}_{\mathcal{H}_A}[\rho_A \mathbf{Q}_A]. \tag{4.3.8}$$

Nel caso particolare dell'operatore \mathbf{Q} considerato, descritto dalla (4.3.5), ricordando l'uguaglianza (4.3.6), si ha

$$\langle \psi | \mathbf{Q} | \psi \rangle = \mathbf{Tr}_{\mathcal{H}}[\rho \mathbf{Q}] = \sum_i \langle \phi_i | \rho_A \mathbf{Q}_A | \phi_i \rangle = \mathbf{Tr}_{\mathcal{H}_A}[\rho_A \mathbf{Q}_A]. \tag{4.3.9}$$

La matrice densità ridotta permette quindi di focalizzarsi sul comportamento di un solo sottosistema, tenendo comunque conto dell'altro sottosistema, con cui il primo interagisce. In parole povere, il sottosistema A può essere considerato come un sistema immerso in uno spazio esterno che lo vincoli ad essere in un determinato stato di equilibrio, dato dal sotto sistema B ³. Ovviamente, vale anche il viceversa.

²Si consideri una base ortonormale $\{|\xi_i\rangle\}$ per lo spazio vettoriale V . Allora, l'espressione $\mathbf{Tr}_V[\mathbf{O}]$ assume il significato dato dalla relazione seguente: $\mathbf{Tr}_V[\mathbf{O}] = \sum_i \langle \xi_i | \mathbf{O} | \xi_i \rangle$.

³Per comprendere qualitativamente il concetto, ci si può immaginare il sottosistema A come un corpo immerso in un fluido che rappresenti le condizioni indotte dal sottosistema B su A interagendo con esso. Da tale esempio è lampante il fatto che agendo sulle caratteristiche di B sia possibile in qualche modo manipolare quelle di A in un sistema entangled

La matrice densità ridotta può essere inoltre ottenuta tracciando la matrice densità del sistema totale rispetto a tutti i gradi di libertà degli altri sottosistemi:

$$\rho_A = \mathbf{Tr}_{\mathcal{H}_B} \rho. \quad (4.3.10)$$

È immediata la verifica, ricordando che $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$, dove $|\psi\rangle$ può essere scritto come in (4.3.3):

$$\begin{aligned} \mathbf{Tr}_{\mathcal{H}_B} \rho &= \sum_j \langle \chi_j | \rho | \chi_j \rangle \\ &= \sum_j \langle \chi_j | \left(\sum_{h,l} C_{h,l} |\phi_h\rangle \otimes |\chi_l\rangle \right) \left(\sum_{i,k} C_{i,k}^* \langle \phi_i| \otimes \langle \chi_k| \right) | \chi_j \rangle \\ &= \sum_{j,i,k,h,l} C_{h,l} C_{i,k}^* \langle \chi_j | \chi_l \rangle \langle \chi_k | \chi_j \rangle |\phi_h\rangle \langle \phi_i| \\ &= \sum_{j,i,k,h,l} C_{h,l} C_{i,k}^* \delta_{j,l} \delta_{k,j} |\phi_h\rangle \langle \phi_i| \\ &= \sum_{i,h} \left(\sum_j C_{h,j} C_{i,j}^* \right) |\phi_h\rangle \langle \phi_i| \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

da cui

$$\langle \phi_h | \mathbf{Tr}_{\mathcal{H}_B} \rho | \phi_i \rangle = \sum_j C_{h,j} C_{i,j}^* = \langle \phi_h | \rho_A | \phi_i \rangle. \quad (4.3.12)$$

La matrice densità ridotta gode infine delle stesse proprietà delle matrici densità associate a stati misti:

i) È autoaggiunta: $\rho_A^\dagger = \rho_A$

ii) È non negativa: ${}_A \langle \alpha | \rho_A | \alpha \rangle_A \geq 0 \quad \forall |\alpha\rangle_A \in \mathcal{H}_A$

iii) Ha traccia unitaria: $\mathbf{Tr} \rho_A = 1$.

Per capire a fondo il ruolo che ricopre la matrice densità ridotta, si ritiene a questo punto necessario introdurre la *Decomposizione di Schimdt*.

Come in (4.3.3), uno stato puro $|\psi\rangle$ può essere scritto come

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} C_{i,j} |\phi_i\rangle_A \otimes |\chi_j\rangle_B = \sum_i |\phi_i\rangle_A \otimes |\tilde{\chi}_i\rangle_B, \quad (4.3.13)$$

dove $|\tilde{\chi}_i\rangle_B = \sum_j C_{i,j} |\chi_j\rangle_B$. Supponendo che i ket $\{|\phi_i\rangle_A\}_i$ formino una base ortonormale per ρ_A ⁴ con autovalori $\{p_i\}_i$, allora la matrice densità ridotta è data da

$$\rho_A = \sum_i p_i |\phi_i\rangle_A \langle\phi_i| . \quad (4.3.14)$$

Inserendo poi la (4.3.14) nella (4.3.12), si osserva che

$$\langle\tilde{\chi}_i|\tilde{\chi}_j\rangle = p_i \delta_{i,j} . \quad (4.3.15)$$

Lo stato $|\psi\rangle$ può dunque essere espresso come

$$|\psi\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |\phi_i\rangle_A \otimes |\chi'_i\rangle_B \quad (4.3.16)$$

dove $|\chi'_i\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{p_i}} |\tilde{\chi}_i\rangle_B$ è l'equivalente di $|\tilde{\chi}_i\rangle_B$ normalizzato.

L'equazione (4.3.16) è detta *Decomposizione di Schimdt* per uno stato bipartito puro $|\psi\rangle_{AB}$. Si osserva che è sempre possibile espandere uno stato bipartito puro nella forma esposta, ma tale decomposizione dipende dalla scelta delle basi ortonormali $|\phi_i\rangle_A$ e $|\chi'_i\rangle_B$. Ne consegue che non è invece possibile espandere **simultaneamente** due stati $|\psi\rangle_{AB}$ e $|\varphi\rangle_{AB} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ utilizzando le stesse basi ortonormali per \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B .

È importante soffermarsi sul fatto che i pesi p_i della matrice densità ridotta siano strettamente correlati ai coefficienti dello stato $|\psi\rangle$ del sistema totale. In particolare, si osserva che, espandendo lo stato rispetto ad una generica base ortonormale

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{\alpha,\beta} \psi_{\alpha\beta} |\alpha\rangle_A \otimes |\beta\rangle_B \quad (4.3.17)$$

e considerando che le basi ortonormali $\{|\alpha\rangle_A\}$ e $\{|\beta\rangle_B\}$ sono legate alle basi relative alla decomposizione di Schimdt da trasformazioni unitarie U_A e U_B con le relazioni⁵

$$|\phi_i\rangle_A = \sum_{\alpha} |\alpha\rangle_A (U_A)_{\alpha i}, \quad |\chi'_i\rangle_B = \sum_{\beta} |\beta\rangle_B (U_B)_{\beta i} . \quad (4.3.18)$$

Confrontando le equazioni (4.3.16) e (4.3.17) si trova che i coefficienti $\psi_{\alpha\beta}$ possono essere espressi come

$$\psi_{\alpha\beta} = \sum_i (U_A)_{\alpha i} \sqrt{p_i} (U_B^T)_{i\beta} , \quad (4.3.19)$$

⁴Visto che ρ_A è un operatore autoaggiunto, è sempre possibile trovare una base ortonormale di ρ_A . Inoltre, poichè l'operatore è definito positivo, i suoi autovalori devono essere necessariamente non-negativi.

⁵Dalla teoria dei gruppi, si sa che, dato un gruppo di trasformazioni G , esiste una rappresentazione unitaria $g \rightarrow D(g)$, dove $g \in G$ e $D(g)$ è una matrice $d \times d$ con d dimensionalità dello spazio su cui agisce il gruppo di trasformazioni. Si indicano in questo contesto gli elementi delle matrici associate a tali trasformazioni con la notazione $(D(g))_{ij}$

da cui si osserva che, applicando trasformazioni unitarie a destra ed a sinistra della matrice ψ dei coefficienti dello stato $|\psi\rangle_{AB}$, è possibile trasformare quest'ultima in una matrice diagonale⁶ e non negativa. L'equazione (4.3.19) prende il nome di *Decomposizione ai valori singolari* ed i pesi $\{p_i\}$ della decomposizione di Schmidt vengono detti *valori singolari* di ψ .

Utilizzando la formula (4.3.16), è inoltre possibile constatare che la matrice densità ridotta per il sottosistema B ha la forma

$$\rho_B = \mathbf{Tr}_{\mathcal{H}_A} \rho = \sum_i p_i |\chi'_i\rangle_B \langle \chi'_i|. \quad (4.3.20)$$

Le matrici densità ridotte ρ_A e ρ_B hanno dunque **lo stesso numero di autovalori non nulli**. Se \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B non hanno la stessa dimensionalità, ρ_A e ρ_B avranno semplicemente un diverso numero di autovalori nulli.

Nel caso in cui ρ_A (e quindi anche ρ_B) non abbia alcun autovalore degenerare al di fuori di 0, allora la decomposizione di Schmidt è determinata univocamente dalle matrici densità ridotte: è sufficiente diagonalizzare ρ_A e ρ_B per trovare le basi $\{|\phi_i\rangle_A\}$ e $\{|\chi'_i\rangle_B\}$ e successivamente accoppiare gli autostati di ρ_A e ρ_B con gli stessi autovalori per ottenere l'equazione (4.3.16). È stata inoltre scelta la fase degli stati di base in modo tale che nessuna fase compaia nei coefficienti della somma: è dunque possibile ottenere decomposizioni di Schmidt equivalenti ridefinendo le basi $\{|\phi_i\rangle_A\}$ e $\{|\chi'_i\rangle_B\}$ tramite moltiplicazione per fasi opposte (il che lascia la (4.3.16) inalterata).

Se però ρ_A ha autovalori non nulli degeneri, non è sufficiente allora conoscere solo ρ_A e ρ_B per determinare la decomposizione di Schmidt: serve intuire quali $\{|\phi_i\rangle_A\}$ debbano essere accoppiati a quali $\{|\chi'_i\rangle_B\}$. Questo elemento di indeterminazione si traduce nell'ambiguità di scelta delle basi in modo tale che entrambe siano oggetto di trasformazioni unitarie simultanee. È possibile mostrarlo con un semplice esempio: siano \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B spazi di Hilbert d -dimensionali e sia U_{ij} una qualsiasi matrice unitaria $d \times d$, allora la rappresentazione

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i,j=1}^d |\phi_i\rangle_A U_{ij} \otimes |\chi'_i\rangle_B \quad (4.3.21)$$

⁶È importante specificare che in questo contesto si intende identificare con il termine "diagonale" quelle matrici M tali che $(i \neq j) \Rightarrow M_{ij} = 0$. Può infatti succedere che le dimensionalità di \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B non siano uguali: in tal caso ψ sarà una matrice diagonale rettangolare, nel senso appena specificato (che non vincola la forma della matrice ad essere quadrata). Due esempi molto intuitivi di matrici

rettangolari diagonali sono i seguenti: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

porta a $\rho_A = \rho_B = \frac{1}{d}\mathbf{I}$ quando si effettuano le tracce parziali per ottenere le matrici densità ridotte. Applicando allora trasformazioni unitarie simultanee in \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B si ha

$$|\phi_i\rangle_A = \sum_{\alpha} |\alpha\rangle_A U_{\alpha i}, \quad |\chi'_i\rangle_B = \sum_{\beta} |\beta'\rangle_B U_{\beta i}^* \quad (4.3.22)$$

che porta a scrivere

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_i |\phi_i\rangle_A \otimes |\chi'_i\rangle_B \\ &= \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i,\alpha,\beta} |\alpha\rangle_A U_{\alpha i} \otimes |\beta'\rangle_B U_{i\beta}^\dagger \\ &= \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{\alpha} |\alpha\rangle_A \otimes |\alpha'\rangle_B, \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

che mostra infine come la rotazione simultanea delle due basi preservi la forma dello stato $|\psi\rangle_{AB}$, originando dunque un'ambiguità nella scelta delle basi utilizzate per scrivere la decomposizione di Schmidt.

In che modo però, tutto ciò risulta essere correlato all'entanglement?

È cruciale, a tal proposito, approfondire il fatto che la teoria della decomposizione di Schmidt fornisca un criterio per discriminare se un sistema bipartito sia entangled o separabile. Risulta infatti possibile associare ad ogni stato bipartito $|\psi\rangle_{AB}$ un numero intero positivo, che prende il nome di *Numero di Schmidt*. Tale quantità coincide con il numero di autovalori non nulli di ρ_A (e dunque anche di ρ_B). Rispetto al numero di Schmidt, è possibile definire cosa significhi per uno stato bipartito essere entangled o separabile: $|\psi\rangle_{AB}$ è entangled (o non-separabile) se il numero di Schmidt associato è strettamente maggiore di 1; altrimenti, esso è separabile.

Risulta immediato osservare che uno stato bipartito puro che sia separabile possa essere scritto come prodotto tensoriale di stati puri di \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B

$$|\psi\rangle_{AB} = |\phi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B; \quad (4.3.24)$$

conseguenza immediata di ciò è il fatto che le matrici densità ridotte risultino essere $\rho_A = |\phi\rangle\langle\phi|$ e $\rho_B = |\chi\rangle\langle\chi|$, e siano quindi a loro volta *pure*.

Stati non esprimibili come un prodotto tensoriale analogo a quello in (4.3.24), si dicono dunque entangled; le matrici densità ridotte riferite ai sottosistemi sono in tal caso *miste*.

Quando $|\psi\rangle_{AB}$ è entangled, si dice che A e B hanno *correlazione quantistica*. È però opportuno notare che quando $|\psi\rangle_{AB}$ è separabile non è formalmente corretto indurre che A e B siano *scorrelati*: per trovare un controesempio, è sufficiente considerare il sistema a due particelle con spin- $\frac{1}{2}$ nello stato

$$|\psi\rangle_{AB} = |\uparrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B \quad (4.3.25)$$

che mostra come i due sottosistemi possano essere correlati (in questo caso gli spin puntano nella stessa direzione), ma non siano entangled.

Esempio: sistema a due spin Si riporta di seguito un esempio di stato separabile ed uno di stato entangled, mettendo in evidenza come le matrici densità ridotte siano proprio come descritte sopra.

Si consideri per l'esempio di stato separabile quello di tripletto $|t_1\rangle$, come compare in (4.2.2). La matrice densità ρ sarà, data da

$$\rho = |t_1\rangle \langle t_1| = |\uparrow_1\uparrow_2\rangle \langle \uparrow_1\uparrow_2| = (|\uparrow_1\rangle \otimes |\uparrow_2\rangle) (\langle \uparrow_1| \otimes \langle \uparrow_2|) . \quad (4.3.26)$$

La matrice densità ridotta ρ_1 associata al sottosistema 1 sarà allora

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \mathbf{Tr}_{\mathcal{H}_2} \rho = \sum_i \langle \chi_i | \rho | \chi_i \rangle = \langle \uparrow_2 | \rho | \uparrow_2 \rangle + \langle \downarrow_2 | \rho | \downarrow_2 \rangle \\ &= \langle \uparrow_2 | (|\uparrow_1\uparrow_2\rangle) (\langle \uparrow_1\uparrow_2|) | \uparrow_2 \rangle + \langle \downarrow_2 | (|\uparrow_1\uparrow_2\rangle) (\langle \uparrow_1\uparrow_2|) | \downarrow_2 \rangle \\ &= |\uparrow_1\rangle \langle \uparrow_1| \end{aligned} \quad (4.3.27)$$

che rappresenta uno stato puro, come previsto dalla teoria.

Si consideri ora lo stato di singoletto $|s_0\rangle$, presente in (4.2.2).

La matrice densità ρ per questo stato sarà

$$\rho = |s_0\rangle \langle s_0| = \frac{1}{2} (|\uparrow_1\downarrow_2\rangle \langle \uparrow_1\downarrow_2| - |\uparrow_1\downarrow_2\rangle \langle \downarrow_1\uparrow_2| - |\downarrow_1\uparrow_2\rangle \langle \uparrow_1\downarrow_2| + |\downarrow_1\uparrow_2\rangle \langle \downarrow_1\uparrow_2|) \quad (4.3.28)$$

La matrice densità ridotta associata al sottosistema 1 sarà quindi

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \mathbf{Tr}_{\mathcal{H}_2} \rho = \sum_i \langle \chi_i | \rho | \chi_i \rangle \\ &= \langle \uparrow_2 | \rho | \uparrow_2 \rangle + \langle \downarrow_2 | \rho | \downarrow_2 \rangle \\ &= \frac{1}{2} (|\downarrow_1\rangle \langle \downarrow_1| + |\uparrow_1\rangle \langle \uparrow_1|) \end{aligned} \quad (4.3.29)$$

che rappresenta, come previsto per un sistema entangled, uno stato misto. In questo caso è semplice osservare che alla matrice densità ridotta viene dato contributo solo dai termini "diagonali" rispetto allo spazio degli stati \mathcal{H}_2 ; risulta dunque immediata l'analogia tra il concetto di traccia di una matrice e traccia di un operatore su uno spazio di Hilbert.

Le matrici densità ridotte associate al sottosistema 2 si calcolano analogamente in entrambi i casi. Per sviluppare ognuno dei conti è sufficiente sfruttare l'ortogonalità degli stati "spin up" e "spin down" dei singoli sottosistemi.

Avendo appurato la consistenza della teoria, si intende ora entrare nel merito delle peculiarità degli stati entangled, introducendo inoltre un metodo coerente che permetta di misurare e valutare l'intensità dell'entanglement di un sistema. Per poter fare ciò, è importante chiarire bene il modo in cui possa essere prodotto uno stato entangled e che caratteristiche debba avere tale misura per fornire delle informazioni effettivamente utili riguardo al sistema, ed essere ritenuta quindi "buona".

Per conseguire tale scopo, si riveleranno particolarmente utili le grandezze chiamate Entropia di Shannon, di Von Neumann e di Rényi.

Capitolo 5

Entanglement

Chiarito a fondo il concetto di stati entangled ed il modo in cui si differenziano da quelli separabili, è utile soffermarsi sui tratti principali che dividono i due casi: come emerge dalla fine del paragrafo §4.3 infatti, gli stati separabili possono essere correlati, ma rimangono comunque distinti dagli stati entangled.

Una differenza cruciale tra i due stati è che *l'entanglement non può essere creato localmente*. L'unico modo infatti per rendere due sistemi A e B entangled è che questi interagiscano uno con l'altro¹. Si consideri ad esempio lo stato separabile (4.3.25): questo può essere preparato senza che i sistemi A e B entrino mai in contatto; è, in tal caso, sufficiente coordinare coloro che preparano lo stato dei sottosistemi, facendo in modo che entrambi preparino una particella con spin orientato lungo un particolare asse concordato. Partendo da uno stato come in (4.3.25) però, l'unico modo per ottenere uno stato entangled come

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B) \quad (5.0.1)$$

è quello di applicare una trasformazione unitaria **collettiva**, ovvero a tutto il sistema. L'**unico** modo per farlo quindi è portare i due qubit a contatto e permettere loro di interagire reciprocamente. Le trasformazioni unitarie locali nella forma $U_A \otimes U_B$ e le misurazioni locali effettuate da coloro che si incaricano di preparare i sistemi, *non possono aumentare il numero di Schmidt* del sistema a due qubit. Questo tratto caratteristico mette in luce come l'entanglement sia frutto dell'interazione tra i sottosistemi, come se il sistema totale continuasse a rispondere rigidamente, nonostante i sottosistemi si siano allontanati molto spazialmente.

Avendo individuato i tratti caratteristici del fenomeno, si intende ora delineare una grandezza che permetta in qualche modo di "misurare" l'entanglement.

¹Si noti che il viceversa non è sempre valido: il fatto che due sistemi interagiscano non li vincola a comporre un sistema totale che sia entangled.

5.1 Entropie di Shannon, Von Neumann e Rényi

Come in precedenza osservato, uno stato entangled è correlato a sottosistemi misti: è noto che le matrici densità di questi ultimi possano essere scritte come sovrapposizione (nel senso classico) di matrici densità di stati puri, con pesi reali, non-negativi probabilistici. Data quindi una matrice densità

$$\rho = \sum_k p_k \rho_k \quad (5.1.1)$$

descritta da una struttura analoga a quella presentata nell'equazione (3.5.7), si osserva che i pesi p_k , in quanto probabilistici, devono godere delle seguenti proprietà:

i) La loro somma deve essere pari ad 1: $\sum_k p_k = 1$;

ii) Formano una combinazione *convessa*: $0 \leq p_k \leq 1$.

Questi pesi probabilistici classici definiscono una distribuzione di probabilità a sua volta classica, che associa ad ogni matrice densità ρ_k la sua probabilità p_k .

Si può mostrare più a fondo questa natura probabilistica classica della matrice densità osservando che il valore di aspettazione di un operatore \mathbf{Q} è dato da

$$\langle \mathbf{Q} \rangle = \sum_k p_k \langle \mathbf{Q} \rangle_k \quad (5.1.2)$$

dove $\langle \mathbf{Q} \rangle_k = \mathbf{Tr}[\rho_k \mathbf{Q}]$ è il valore di aspettazione di \mathbf{Q} nello stato identificato dall'indice k : in questo modo, i p_k assumono il ruolo di pesi classici poichè quantificano il contributo al valore di aspettazione di ogni stato k .

È possibile associare ad ogni distribuzione classica una funzione, detta *Entropia di Shannon*, che misuri quanto tale distribuzione sia non deterministica. Una distribuzione costante ad esempio, massimizza l'Entropia di Shannon in quanto ogni risultato è equiprobabile, mentre una che si comporti come una delta di Dirac renderà minima l'Entropia, poichè ci sarà solo un esito possibile per la misurazione e la distribuzione sarà dunque fortemente deterministica.

L'Entropia di Shannon è definita nel seguente modo:

$$S = - \sum_k p_k \log p_k \quad (5.1.3)$$

da cui si osserva immediatamente quanto detto in precedenza: S si annulla per $p_k = \delta_{k,k_0}$, per un certo k_0 , mentre è massima per $p_k = \text{const}$.

L'Entropia di Shannon fornisce una misurazione della *mancaanza d'informazione* di una distribuzione probabilistica; descrive infatti quanto una previsione *a priori* di una misurazione sia attendibile. È diretta conseguenza quindi, il fatto che una distribuzione

con Entropia di Shannon minore (/maggiore) di quella associata ad un'altra distribuzione sia più (/meno) deterministica della seconda. Da questa proprietà deriva il nome di "Entropia" associato a questa grandezza, in analogia con quella che compare in ambito termodinamico.

L'Entropia di Von Neumann

Sorge spontaneo chiedersi se esista una grandezza in ambito quantistico con le caratteristiche dell'entropia di Shannon. L'analogo quantistico di tale oggetto è l'*Entropia di Von Neumann*, definita come

$$S = -\text{Tr}[\rho \log \rho] \quad (5.1.4)$$

che nel limite classico si riconduce all'Entropia di Shannon per distribuzioni probabilistiche di ρ .

Dalla letteratura si sa che l'Entropia di Von Neumann di un **sottosistema** è un'ottimo strumento per quantificare "bene"² l'entanglement del **sistema totale** in alcune situazioni (non tutte). È fondamentale innanzitutto chiarire quali siano gli oggetti di cui si valuta l'Entropia: non è di interesse quella del sistema totale, in quanto sarà sempre nulla per stati puri; ciò che davvero ha rilevanza è l'Entropia di un sottosistema interagente con un altro, poichè proprio la correlazione tra i due sottosistemi è legata all'Entanglement. Come osservato in precedenza, uno stato *entangled* puro, dunque nella configurazione più semplice possibile, è composto da due sottostati miscelati³, i quali possono essere considerati come un sistema ed un bagno termico *fittizio*, la cui Entropia è chiaramente non-nulla, dal momento che la temperatura fittizia del suddetto bagno termico rende la distribuzione di probabilità meno deterministica.

Esempio: sistema a due spin Si riprende qui l'esempio proposto alla fine della sezione §4.3 per mostrare un'applicazione dell'Entropia di Von Neumann ad un caso concreto. Ricordando che lo stato di singoletto $|s_0\rangle$ è uno stato entangled, mentre quello di tripletto $|t_1\rangle$ è separabile è possibile utilizzare rispettivamente le espressioni (4.3.29) e (4.3.27) delle matrici densità ridotte per calcolare l'Entropia di Von Neumann associata:

$$S_{t_1} = 0 \quad (5.1.5)$$

$$S_{s_0} = -\left(\frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \log 2. \quad (5.1.6)$$

²Per chiarire ciò che viene inteso per "buona misura" di Entanglement, si faccia riferimento a quanto detto nella sezione §5.2.

³Si fa qui riferimento al concetto di *miscela statistica* presentato nella sezione §3.2. Si osserva che in questo caso è possibile identificare lo stato $|\psi\rangle$ come miscela statistica poichè i sottostati (si faccia riferimento all'esempio al termine della sezione §4.3) risultano essere autostati ortogonali dell'operatore di spin applicato per effettuare le misurazioni sui sottosistemi: in questo modo gli effetti di interferenza prodotti dalla sovrapposizione lineare dei sottostati risultano essere nulli. È quindi giustificato, nel contesto, considerare $|\psi\rangle$ come una miscela statistica.

Come da previsione, lo stato entangled ha Entropia di Von Neumann maggiore di quello separabile.

È possibile calcolare l'Entropia di Von Neumann nel caso generale in cui i pesi probabilistici non siano fissati per poter ottenere un grafico che mostri l'andamento di quest'ultima in funzione dei pesi associati ai sottostati (sapendo che la somma dei pesi deve dare 1, è sufficiente fissare uno dei due per conoscere anche l'altro; è dunque indifferente quale dei due venga utilizzato per parametrizzare la relazione).

Si consideri ora lo stato

$$|\psi\rangle = \sqrt{p} |\uparrow_1\rangle \otimes |\downarrow_2\rangle + \sqrt{1-p} |\downarrow_1\rangle \otimes |\uparrow_2\rangle . \quad (5.1.7)$$

Esso rappresenta il generico stato di singoletto, ovvero con i pesi probabilistici non fissati. Per il valore $p = \frac{1}{2}$ coincide proprio con lo stato $|s_0\rangle$. Per i valori ai bordi $p = 0, 1$, si riconduce invece ad uno stato separabile analogo a quelli di tripletto (non proprio uno di essi, ma con comportamento equivalente per ciò che interessa mostrare).

È immediato il calcolo della matrice densità ridotta per il sottosistema 1, poichè la decomposizione di Schmidt è in questo caso banale:

$$\rho_1 = p |\uparrow_1\rangle \langle \uparrow_1| + (1-p) |\downarrow_1\rangle \langle \downarrow_1| . \quad (5.1.8)$$

L'Entropia di Von Neumann per questo stato risulta quindi essere

$$S = -p \log p - (1-p) \log(1-p) . \quad (5.1.9)$$

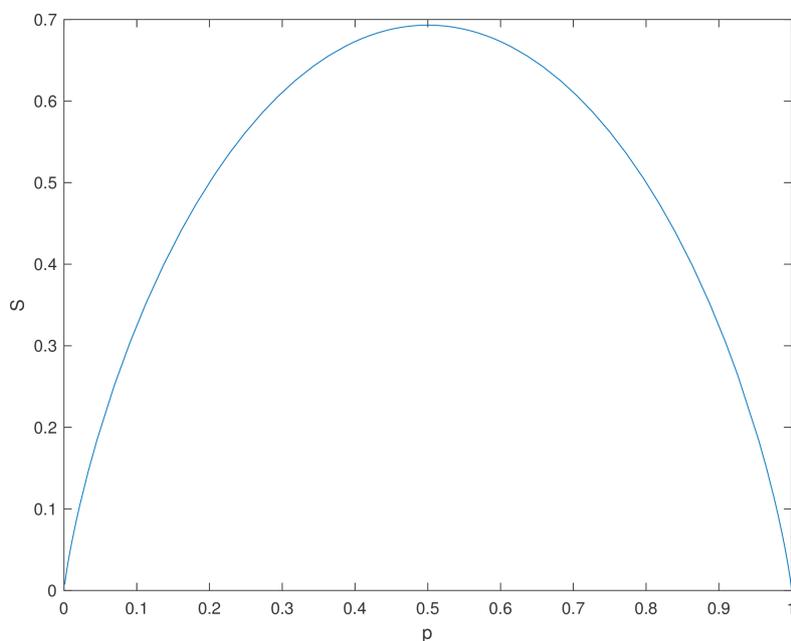


Figura 5.1: Dipendenza dell'Entropia di Von Neumann dal parametro probabilistico p .

In Figura 5.1 è rappresentato l'andamento di S descritto dall'equazione (5.1.9). È semplice osservare che essa si annulla per i valori estremali $p = 0, 1$ ed è massima per $p = \frac{1}{2}$, rispettivamente le situazioni in cui si hanno stati separabili e stato di singoletto $|s_0\rangle$. Confrontando le Entropie di Von Neumann associate a stati differenti, è dunque possibile classificare tali stati quantificandone l'entanglement.

L'Entropia di Rényi

Come appena visto, tramite l'Entropia di Von Neumann è possibile quantificare l'entanglement di un sistema. In alcuni casi però, valutare tale grandezza può non essere banale a causa del logaritmo che compare nell'equazione (5.1.4). Nelle situazioni in cui tale calcolo risulti essere problematico, è utile risolvere il problema utilizzando una nuova grandezza, introdotta da Alfred Rényi come generalizzazione dell'Entropia di Shannon per una distribuzione probabilistica $P = (p_1, p_2, \dots)$.

Tale grandezza è descritta dalla relazione

$$S_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \log \sum_k p_k^\alpha \quad (5.1.10)$$

con α parametro reale positivo, e prende il nome di *Entropia di Rényi* o *Entropia di ordine α* . Tra le proprietà di tale grandezza, spicca il fatto che nel limite per α che tende ad 1, essa recupera proprio l'Entropia di Shannon:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} S_\alpha = S. \quad (5.1.11)$$

In ambito quantistico, con la formulazione tramite matrice densità, l'Entropia di Rényi è data da

$$S_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \log \text{Tr} \rho^\alpha \quad (5.1.12)$$

che recupera l'Entropia di Von Neumann per il limite $\alpha \rightarrow 1$.

Visto che in alcune situazioni è più semplice valutare l'Entropia di Rényi piuttosto che quella di Von Neumann, spesso si calcola la seconda applicando il limite $\alpha \rightarrow 1$ dopo aver calcolato la prima.

È di notevole importanza il fatto che nonostante l'Entropia di Von Neumann rappresenti l'analogo quantistico dell'Entropia termodinamica, l'Entropia di Rényi non abbia interpretazione fisica altrettanto immediata. Tuttavia, essa è un ottimo strumento sia per valutare l'Entropia di Von Neumann, nel caso in cui il calcolo di quest'ultima sia poco pratico, sia per estrarre altre informazioni, più sofisticate, relative all'entanglement, delle quali non si parlerà qui.

5.2 Entropia di Von Neumann come misura di Entanglement

Si intende mostrare in questa sezione in quale modo e quando sia possibile identificare l'Entropia di Von Neumann come "buona" grandezza per commensurare l'entanglement. Per fare ciò, è opportuno soffermarsi sulle proprietà dei due oggetti trattati.

Proprietà dell'entanglement

Si presentano di seguito le proprietà che sono necessarie per una grandezza $E(\rho)$ affinché essa sia considerata una buona misura di entanglement per un sistema

1. Uno stato separabile, non è entangled. Per tale stato dunque, la grandezza E dovrà essere nulla: $E\left(\rho = \sum_k c_k \rho_A^{(k)} \otimes \rho_B^{(k)}\right) = 0$;
2. Una buona misura di entanglement non deve essere aumentata da operazioni locali (applicazione di operatori unitari locali ad un sottosistema): $E(\mathbf{U}\rho\mathbf{U}^{-1}) \leq E(\rho)$. Visto che una misura di entanglement deve fornire informazioni quantificando la correlazione quantistica tra due sottosistemi, essa non deve poter aumentare se si agisce su un solo sottosistema o se i due sottosistemi si scambiano informazione classica (essendo quel tipo di interazione comunque locale, in quanto scambio di particelle bosoniche) ;
3. Una buona misura di entanglement deve essere limitata da un valore massimo, associato a stati completamente entangled;
4. Una buona misura di entanglement deve essere *convessa*: $E(\lambda\rho_1 + (1 - \lambda)\rho_2) \leq \lambda E(\rho_1) + (1 - \lambda)E(\rho_2)$;
5. Una buona misura di entanglement deve essere sub-additiva: $E(\rho_A \otimes \rho_B) \leq E(\rho_A) + E(\rho_B)$.

Si osserva che l'entanglement non dovrebbe essere generato facendo la miscela di due (o più) matrici densità. Questo perché, pensando alla miscela come a diverse preparazioni dello stato con diversi pesi p_i , la statistica che introduciamo è sostanzialmente di tipo classico e non genuinamente quantistico come ci aspettiamo che sia invece l'entanglement. Da cui il punto (4) delle proprietà appena esposte.

È opportuno adesso, per poter effettuare un confronto, presentare le principali proprietà soddisfatte dall'Entropia di Von Neumann.

Proprietà dell'Entropia di Von Neumann

L'Entropia di Von Neumann, presenta le seguenti proprietà

1. Uno stato puro, ha Entropia di Von Neumann nulla: $S(|\psi\rangle\langle\psi|) = 0$;
2. L'Entropia di Von Neumann è invariante sotto l'effetto di trasformazioni unitarie $S(\mathbf{U}\rho\mathbf{U}^{-1}) = S(\rho)$;
3. L'Entropia di Von Neumann è limitata superiormente: $S \leq \log d$, dove d è la dimensione del sistema considerato;
4. L'Entropia di Von Neumann è *concava*:
 $S(\lambda\rho_1 + (1 - \lambda)\rho_2) \geq \lambda S(\rho_1) + (1 - \lambda)S(\rho_2)$;
5. L'Entropia di Von Neumann è sub-additiva: $S(\rho_{A \cup B}) \leq S(\rho_A) + S(\rho_B)$, dove si ricorda che $\rho_A = \mathbf{Tr}_{\mathcal{H}_B}\rho_{A \cup B}$.

Si fa presente, ancora una volta, che per misurare l'entanglement di una partizione di un sistema, la grandezza interessata associata sarà l'Entropia di Von Neumann di un **sottosistema**.

Avendo presentato le proprietà di entanglement ed Entropia di Von Neumann, è possibile, confrontandole, osservare che queste differiscono solo per il punto (4). Da questa discrepanza consegue che l'Entropia di Von Neumann quantifica bene l'entanglement solamente nel caso si trattino stati puri, per i quali la decomposizione di Schmidt è unica.

Per completezza, si fa presente che per ciò che concerne gli stati misti, sono proposte in letteratura [5] grandezze più complesse, come l'*Entanglement di Formazione*.

Capitolo 6

Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?

*“Io considero [l'Entanglement] non uno
ma il tratto più caratteristico della meccanica quantistica,
quello che impone il suo completo distacco dalle linee di pensiero classiche”*

E. Schrödinger

6.1 Il Paradosso EPR

I capitoli precedenti sono stati focalizzati sull'introduzione degli strumenti e della matematica della meccanica quantistica. Qual è però la differenza tra meccanica quantistica e fisica classica? In questo ultimo capitolo si intende presentare la disuguaglianza di Bell, un chiaro esempio di una sostanziale differenza tra la teoria quantistica e quella classica.

Classicamente, quando si considera un oggetto, una pallina da tennis ad esempio, si assume che le proprietà fisiche di tale oggetto esistano indipendentemente dall'osservazione. La misurazione quindi, consiste nel mero processo di *rivelare* tali proprietà. Considerando l'esempio della pallina da tennis, si può notare che essa ha tra le sue proprietà la posizione, che si misura tipicamente utilizzando la luce rifratta dalla superficie della pallina. Tra il 1920 ed il 1930 però, con la nascita della meccanica quantistica prese piede un altro modo di pensare le proprietà dei sistemi, intrinsecamente differente rispetto a quello appena presentato. Come descritto precedentemente in questo elaborato, in meccanica quantistica una particella **non possiede** proprietà che esistano indipendentemente dall'osservazione ma piuttosto tali proprietà si presentano come conseguenza di misurazioni effettuate sul sistema considerato.

Si consideri, ad esempio, un qubit: esso non possiede proprietà quali "spin orientato nella direzione \hat{z} " o "spin orientato nella direzione \hat{x} ", rilevabili tramite appropriate misurazioni. La meccanica quantistica al contrario fornisce regole (i postulati nel capitolo §2) che specificano, dato un vettore di stato, le probabilità associate ai possibili risultati ottenibili quando un'osservabile è misurata.

Molti fisici rigettarono questa nuova visione della Natura. Il più prominente degli obiettori, fu Albert Einstein.

Nel famoso 'articolo EPR', scritto in collaborazione con Nathan Rosen e Boris Podolsky, egli propose un esperimento mentale che, secondo lui, avrebbe dimostrato che la meccanica quantistica non era una teoria completa. L'essenza dell'argomentazione EPR fu la seguente: essi erano interessati in ciò che era stato definito, da loro, come *elementi di realtà*. La loro credenza era che tali elementi della realtà fisica dovessero essere rappresentati in ogni teoria fisica completa. L'obiettivo della loro argomentazione era mostrare che la meccanica quantistica non era una teoria fisica completa, identificando elementi di realtà non inclusi nella teoria dei quanti. Il modo in cui cercarono di farlo fu quello di introdurre ciò che secondo loro era una condizione sufficiente di una proprietà fisica per essere un elemento di realtà, nominalmente: "essa deve essere tale che sia possibile predire con certezza il valore che avrà immediatamente prima della misurazione". Partendo da questo presupposto, l'articolo era focalizzato sul fatto che, secondo la meccanica quantistica, non fosse possibile effettuare simultaneamente la misurazione di osservabili associate ad operatori non commutanti. Da tale fondamento, l'argomentazione dell'articolo proseguiva dimostrando per assurdo che la meccanica quantistica non fosse una teoria completa, facendo leva sul fatto che non potendo misurare simultaneamente le due grandezze associate ad operatori non commutanti, queste non potessero avere realtà

simultanea.

Dall'articolo EPR:

"... it is shown in quantum mechanics that, if the operators corresponding to two physical quantities, say A and B , do not commute, that is, if $AB \neq BA$, then the precise knowledge of one of them precludes such a knowledge of the other. Furthermore, any attempt to determine the latter experimentally will alter the state of the system in such a way as to destroy the knowledge of the first. From this follows that either (1) the quantum-mechanical description of reality given by the wave function is not complete or (2) when the operators corresponding to two physical quantities do not commute the two quantities cannot have simultaneous reality... "

Di cui si presenta di seguito la traduzione:

"... è mostrato in meccanica quantistica che, se gli operatori corrispondenti a due grandezze fisiche, siano dette A e B , non commutano, ovvero, se $AB \neq BA$, allora la precisa conoscenza di una di esse preclude una tale conoscenza dell'altra. Inoltre, ogni tentativo di determinare la seconda sperimentalmente, altererà lo stato del sistema in un modo tale per cui sia distrutta la conoscenza della prima. Da questo segue che o (1) la descrizione quantomeccanica della realtà data dalla funzione d'onda non sia completa oppure (2) quando gli operatori corrispondenti a due grandezze fisiche non commutano, le due quantità non possono avere realtà simultaneamente... "

Per fornire la prova della loro asserzione, EPR considerarono due sistemi interagenti per un periodo limitato di tempo, così da poter effettuare la misurazione di una grandezza su uno di essi, senza perturbare il secondo e simultaneamente di poter misurare sul secondo un'altra grandezza associata ad un operatore non commutante con quello associato alla prima grandezza. In questo modo, essi pensavano di poter misurare con precisione arbitraria due grandezze vincolate dal principio di indeterminazione di Heisenberg, provando quindi inconsistenza nella teoria stessa.

"... with the assumption that the wave function does give a complete description of the physical reality, we arrived at the conclusion that two physical quantities, with noncommuting operators, can have simultaneous reality. Thus the negation of (1) leads to the negation of the only other alternative (2). We are thus forced to conclude that the quantum-mechanical description of physical reality given by wave functions is not complete. One could object to this conclusion on the grounds that our criterion of reality is not sufficiently restrictive. Indeed, one would not arrive at our conclusion if one insisted that two or more physical quantities can be regarded as simultaneous elements

of reality only when they can be simultaneously measured or predicted. On this point of view, since either one or the other, but not both simultaneously, of the quantities P and Q can be predicted, they are not simultaneously real. This makes the reality of P and Q depend upon the process of measurement carried out on the first system, which does, not disturb the second system in any way. No reasonable definition of reality could be expected to permit this."

Il cui trasposto è

"... con l'assunzione che la funzione d'onda dia una descrizione completa della realtà fisica, siamo arrivati alla conclusione che due quantità fisiche, con operatori non commutanti, possano avere realtà simultanea. Dunque, la negazione di (1) porta alla negazione dell'unica altra alternativa (2). Siamo quindi costretti a concludere che la descrizione quanto-meccanica della realtà fisica data dalla funzione d'onda non è completa. Qualcuno potrebbe obiettare a questa conclusione sulla base del fatto che il nostro criterio di realtà non sia sufficientemente restrittivo. Infatti, quel qualcuno non arriverebbe alla nostra conclusione se ribattesse che due o più grandezze fisiche possono essere considerate simultaneamente elementi di realtà solo quando esse possono essere simultaneamente misurate o predette. Da questo punto di vista, poichè una o l'altra, ma non entrambe simultaneamente, delle quantità P e Q può essere predetta, esse non sono simultaneamente reali. Questo rende le realtà di P e Q dipendenti dal processo di misurazione applicato sul primo sistema, che, non disturba il secondo sistema in alcun modo. Nessuna definizione ragionevole della realtà potrebbe mai permettere questo."

Per un lettore attento, è immediato osservare che nell'articolo EPR non è stato considerato, portando a conclusioni errate, l'Entanglement. Direttamente dall'articolo infatti, si leggono le parole "... processo di misurazione applicato sul primo sistema, che, non disturba il secondo sistema in alcun modo..." cosa che, come emerge dai capitoli precedenti di questa tesi, non è affatto veritiera.

L'obiettivo di EPR era quello di mostrare che la teoria quantistica fosse incompleta, dimostrando la carenza di 'elementi di realtà' essenziali, secondo il loro criterio. Essi sperarono di forzare un ritorno ad una visione più classica del mondo, una in cui ai sistemi potessero essere associate proprietà che esistessero indipendentemente da misurazioni. Sfortunatamente per loro, molti fisici non considerarono il ragionamento proposto come convincente. Infatti, circa trent'anni dopo la pubblicazione dell'articolo EPR, venne proposto un test sperimentale che poteva essere utilizzato per verificare se la descrizione del mondo a cui EPR speravano di poter fare ritorno fosse valida o meno. Il risultato fu nettamente contrario alle loro speranze, invalidando quel punto di vista, mentre le previsioni della meccanica quantistica si trovarono in completo accordo con i risultati.

La chiave di questa invalidazione sperimentale è un risultato noto con il nome di *Teorema di Bell*.

6.2 Il Teorema di Bell

Il Teorema di Bell, nella sua forma più immediata, enuncia che:

"Nessuna teoria fisica locale e realistica¹ a variabili nascoste può riprodurre le predizioni della meccanica quantistica."

La dimostrazione di tale teorema si appoggia sul risultato noto come *Disuguaglianza di Bell*. Per poter ottenere questa disuguaglianza, nel suo articolo [10], Bell suggerì una generalizzazione della versione di Bohm del paradosso EPR (si veda appendice A). Nella sua generalizzazione, Bell considerò che i rivelatori di elettrone e positrone potessero ruotare indipendentemente, invece di essere allineati lungo la *stessa* direzione. Il primo misura la componente dello spin dell'elettrone lungo la direzione di un vettore unitario \hat{a} , mentre il secondo misura la componente dello spin del positrone lungo la direzione di un vettore unitario \hat{b} (generalmente diverso da \hat{a}) (Figura 6.1).

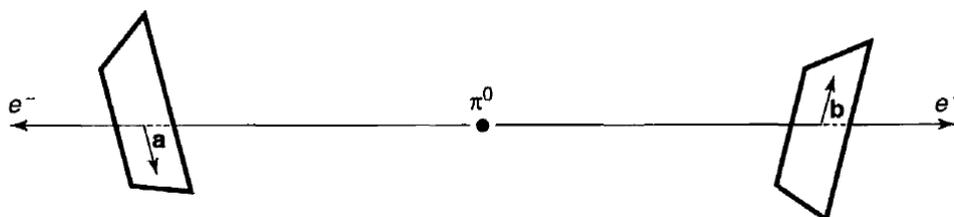


Figura 6.1: Versione di Bell dell'esperimento EPR-Bohm: i rivelatori sono orientati lungo direzioni arbitrarie \hat{a} e \hat{b} .

Per semplicità, si denoteranno di seguito gli spin in unità di $\hbar/2$: ogni rivelatore misurerà dunque $+1$ per i risultati "spin up" e -1 per i risultati "spin down" lungo la direzione considerata. Una tavola dei risultati per alcuni decadimenti di π^0 assumerebbe la forma seguente:

elettrone	positrone	prodotto
+1	-1	-1
+1	+1	+1
-1	+1	-1
+1	-1	-1
-1	-1	+1
\vdots	\vdots	\vdots

¹Si intende, con il termine "realistica", che tale teoria debba contenere i noti elementi di realtà presentati da Einstein, Podolsky e Rosen nel proprio articolo.

Bell propose di calcolare il *valor medio* del *prodotto* degli spin, per un determinato set di orientazioni (\hat{a}, \hat{b}) . Sia la media chiamata $P(\hat{a}, \hat{b})$. Se i rilevatori sono allineati ($\hat{b} = \hat{a}$), si recupera la versione originale della configurazione EPR-Bohm; in questo caso un risultato sarà spin up e l'altro spin down, implicando che il prodotto sarà sempre -1 , e di conseguenza anche la media assumerà tale valore:

$$P(\hat{a}, \hat{a}) = -1 . \quad (6.2.1)$$

In maniera analoga, se le direzioni sono *anti-parallele* ($\hat{b} = -\hat{a}$), allora ogni prodotto sarà $+1$, quindi

$$P(\hat{a}, -\hat{a}) = +1 . \quad (6.2.2)$$

Per orientazioni arbitrarie, la meccanica quantistica in generale predice:

$$\boxed{P(\hat{a}, \hat{b}) = -\hat{a} \cdot \hat{b} .} \quad (6.2.3)$$

Il Teorema di Bell consiste nel dimostrare che *questo risultato è incompatibile con qualsiasi teoria a variabili nascoste locali*.

L'argomentazione è sorprendentemente semplice. Si supponga che lo stato "completo" del sistema elettrone/positrone sia caratterizzato dalla variabile nascosta λ (λ varia in un modo che nemmeno si comprende nè si può manipolare, dal decadimento di un pione ad un altro). Si supponga inoltre che il risultato della misurazione effettuata sull'elettrone non dipenda dall'orientazione \hat{b} del rilevatore associato al positrone-il quale potrebbe anche essere scelto dallo sperimentatore al lato del positrone immediatamente prima che la misurazione sia effettuata, facendo sì che sia quindi troppo tardi per qualsiasi segnale che si muova a velocità inferiore rispetto a quella della luce per arrivare al rilevatore associato all'elettrone (assunzione di località). Esistono allora una qualche funzione $A(\hat{a}, \lambda)$, che dia il risultato della misurazione effettuata sull'elettrone, ed una qualche funzione $B(\hat{b}, \lambda)$, che dia il risultato della misurazione effettuata sul positrone. Queste funzioni possono assumere solamente i valori ± 1 :²

$$A(\hat{a}, \lambda) = \pm 1 ; B(\hat{b}, \lambda) = \pm 1 . \quad (6.2.4)$$

Quando i rilevatori sono allineati, i risultati sono perfettamente anti-correlati:

$$A(\hat{a}, \lambda) = -B(\hat{a}, \lambda) \quad (6.2.5)$$

per qualsiasi λ .

In generale, la media del prodotto delle misurazioni è

$$P(\hat{a}, \hat{b}) = \int \rho(\lambda) A(\hat{a}, \lambda) B(\hat{b}, \lambda) d\lambda , \quad (6.2.6)$$

²Questa congettura "concede" già molto più di quanto un rigoroso determinista classico permetterebbe. Per Bell però, è importante mostrare la non-compatibilità con *qualsiasi* teoria a variabili nascoste locali, dunque anche con quelle più flessibili che consentano alcune accomodazioni.

dove $\rho(\lambda)$ è la densità di probabilità per la variabile nascosta λ . Come ogni densità di probabilità, è non-negativa e soddisfa la condizione di normalizzazione $\int \rho(\lambda)d\lambda = 1$; nessun'altra congettura è fatta riguardo $\rho(\lambda)$. Utilizzando l'equazione (6.2.5), è possibile eliminare B dall'espressione (6.2.6):

$$P(\hat{a}, \hat{b}) = - \int \rho(\lambda)A(\hat{a}, \lambda)A(\hat{b}, \lambda)d\lambda . \quad (6.2.7)$$

Si consideri ora un qualsiasi *altro* vettore unitario \hat{c} ; allora

$$P(\hat{a}, \hat{b}) - P(\hat{a}, \hat{c}) = - \int \rho(\lambda) \left[A(\hat{a}, \lambda)A(\hat{b}, \lambda) - A(\hat{a}, \lambda)A(\hat{c}, \lambda) \right] d\lambda , \quad (6.2.8)$$

che può essere riscritta considerando che $[A(\hat{b}, \lambda)]^2 = 1$:

$$P(\hat{a}, \hat{b}) - P(\hat{a}, \hat{c}) = - \int \rho(\lambda) \left[1 - A(\hat{b}, \lambda)A(\hat{c}, \lambda) \right] A(\hat{a}, \lambda)A(\hat{b}, \lambda)d\lambda . \quad (6.2.9)$$

Dall'equazione (6.2.4) segue però che $-1 \leq [A(\hat{a}, \lambda)A(\hat{b}, \lambda)] \leq +1$; si ha inoltre che $\rho(\lambda)[1 - A(\hat{a}, \lambda)A(\hat{b}, \lambda)] \geq 0$, per cui si ottiene

$$|P(\hat{a}, \hat{b}) - P(\hat{a}, \hat{c})| \leq \int \rho(\lambda)[1 - A(\hat{b}, \lambda)A(\hat{c}, \lambda)]d\lambda , \quad (6.2.10)$$

che, utilizzando la relazione $\int \rho(\lambda)d\lambda = 1$, assume la forma più semplice:

$$\boxed{|P(\hat{a}, \hat{b}) - P(\hat{a}, \hat{c})| \leq 1 + P(\hat{b}, \hat{c})} . \quad (6.2.11)$$

Questa è la celebre **Disuguaglianza di Bell**. Essa è valida per *qualsiasi* teoria a variabili nascoste locali (soggetta ai requisiti minimi posti nelle equazioni (6.2.4) e (6.2.5)), dal momento che nessuna assunzione è stata fatta riguardo alla variabile λ od alla sua distribuzione $\rho(\lambda)$.

È semplice mostrare che la predizione della meccanica quantistica è incompatibile con la disuguaglianza di Bell. Si supponga, ad esempio, che i tre vettori unitari giacciono su un solo piano e che \hat{c} formi un angolo di 45° con \hat{a} e \hat{b} (Figura 6.2).

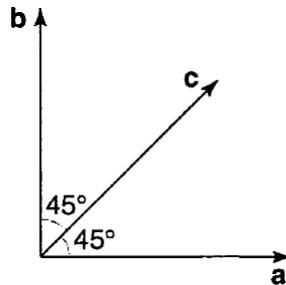


Figura 6.2: Una orientazione dei vettori unitari \hat{a} , \hat{b} e \hat{c} che dimostra la violazione della disuguaglianza di Bell da parte della meccanica quantistica.

In questo caso, la meccanica quantistica fornisce le seguenti previsioni:

$$P(\hat{a}, \hat{b}) = 0, \quad P(\hat{a}, \hat{c}) = P(\hat{b}, \hat{c}) = -\cos(45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq -0.707, \quad (6.2.12)$$

che risultano chiaramente inconsistenti con la disuguaglianza di Bell:

$$-0.707 \not\leq 1 - 0.707 = 0.293.$$

Si è giunti quindi alla conclusione che nessuna teoria fisica locale e realistica a variabili nascoste può riprodurre le previsioni della meccanica quantistica, c.v.d.. Con la generalizzazione dell'esperimento da parte di Bell, il paradosso EPR prova qualcosa di molto più radicale e profondo rispetto a ciò che i suoi autori immaginavano: se la loro ipotesi fosse stata corretta, la meccanica quantistica non sarebbe stata semplicemente *incompleta*, ma sarebbe stata assolutamente *sbagliata*. D'altronde, se la meccanica quantistica avesse invece fornito previsioni corrette (fosse stata "giusta", nel senso che nel contesto fisico può essere attribuito ad una teoria), allora *nessuna* teoria a variabili nascoste locali sarebbe stata in grado di salvare la fisica dalla non-località che Einstein considerava assurda. Inoltre, col teorema di Bell, viene fornita la struttura logica per un esperimento relativamente semplice da realizzare che possa sistemare la questione una volta per tutte.

Vennero performati molti esperimenti per mettere alla prova la disuguaglianza di Bell tra gli anni '60 e '70, culminando con il lavoro di Aspect, Grangier e Roger nel 1982.

6.3 Gli esperimenti di Aspect

Il primo a realizzare un esperimento per testare la disuguaglianza di Bell e pubblicarne i risultati furono John Clauser e Stuart Freedman [12]. Veniva sfruttato il fatto che alcuni atomi, in questo caso quelli di calcio³, dopo essere stati eccitati fino ad alti livelli energetici emettevano occasionalmente coppie di fotoni entangled in un processo chiamato *ascata*: il nome è attribuito a tale processo perchè in esso gli elettroni "cascano" direttamente da un livello energetico più alto ad uno più basso, passando per uno intermedio (Figura 6.3), rilasciando, ad ogni transizione, un fotone. Dato che sia lo stato iniziale che quello finale hanno momento angolare nullo e poichè il momento angolare totale è una grandezza conservata nel processo, allora la coppia di fotoni emessa sarà vincolata ad avere momento angolare totale nullo: ciò rende i due fotoni entangled.

³È importante osservare che non a caso è stato scelto un elemento come il calcio: al fine di ottenere risultati validi dalle misurazioni infatti, è necessario che i fotoni prodotti siano ottici, ovvero con lunghezze d'onda nel campo del visibile. Un esperimento era già stato provato ma con pessimi risultati, qualitativamente parlando, a causa del livello energetico dei fotoni misurati che rendeva poco attendibili gli esiti delle misurazioni effettuate.

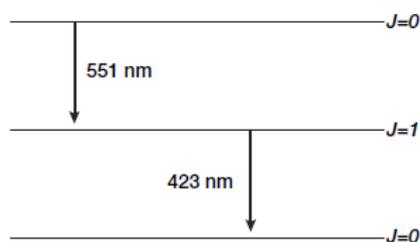


Figura 6.3: Un esempio del processo a cascata che coinvolge un atomo di calcio nell'esperimento di Clauser-Freedman.

Clauser e Freedman realizzarono una sorgente di fotoni nella quale gli atomi di calcio venivano eccitati fino ad alti livelli energetici. Tipicamente, quando un elettrone dell'atomo di calcio torna al suo livello fondamentale viene emesso un solo fotone; occasionalmente però, ne vengono emessi due, uno verde ed uno viola. Il fotone verde e quello viola prodotti in questo modo sono entangled. Come si può vedere dalla Figura 6.4, raffigurante lo schema dell'esperimento di Clauser e Freedman, le coppie di fotoni prodotte dal processo a cascata sono dirette verso i polarizzatori P_1 e P_2 , orientati secondo angoli diversi, ed i fotoni che superano i polarizzatori vengono raccolti da due rilevatori, D_1 e D_2 ; un contatore di coincidenze, CC, registra infine i risultati. Sfortunatamente, il segnale luminoso utilizzato nell'esperimento era debole; erano inoltre molte le cascate "spurie" che producevano fotoni non entangled. Al netto, i due ricercatori riuscirono a registrare solamente una coppia di fotoni entangled per ogni milione di coppie di fotoni prodotte. Tale difetto venne successivamente rinominato come "la scappatoia della rilevazione", poichè il problema sarebbe stato tale da rendere possibile una contestazione dei risultati ottenuti. A causa della bassa velocità a cui venivano acquisiti dati, i due fisici impiegarono molto tempo a raccogliere un numero sufficientemente grande di dati. Tuttavia, questi mostravano un chiaro esito dell'esperimento: erano infatti in pieno accordo con la predizione quantistica, screditando così la teoria a variabili nascoste di Einstein.

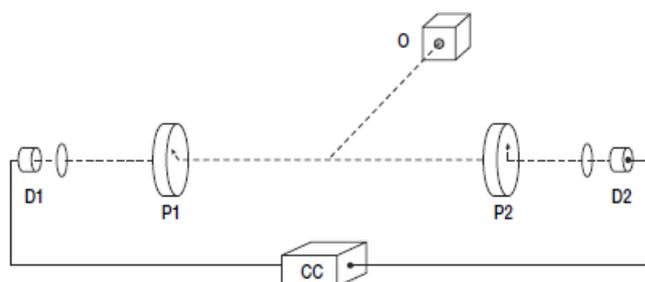


Figura 6.4: Uno schema dell'esperimento di Clauser-Freedman. (Immagine presente nel loro articolo *Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories*[11])

Il fatto che, inoltre, per come era strutturato l'esperimento, un alto numero di fotoni non venisse osservato, insieme alla suddetta scappatoia della rilevazione, portò molti a pensare che questa notevolmente limitata efficienza⁴ potesse invalidare i risultati ottenuti.

Per progettare esperimenti più fini e più efficienti, in grado di ottenere dati la cui validità non fosse discutibile, fu necessario l'ingresso in scena di Alain Aspect. Dopo aver osservato i risultati dei suoi predecessori e ponderato a lungo, Aspect decise di progettare una serie di tre importanti tipi di esperimento:

1. la prima tipologia coinvolgeva uno schema a canale singolo e puntava a replicare i risultati ottenuti dai suoi predecessori in modo più preciso e coinvolgente: sarebbe stato utilizzato lo stesso tipo di sorgente, ovvero fotoni emessi da processi a cascata di atomi di calcio, ma grazie all'utilizzo di tecnologie più recenti sarebbe stato possibile ottimizzarne la produzione ed anche l'efficienza;
2. in seguito Aspect avrebbe realizzato un esperimento a due canali, come era stato inizialmente proposto da Clauser e Michael Horne per riuscire a realizzare una situazione di laboratorio più simile ad un esperimento ideale. Se è presente un solo canale infatti, i fotoni che non vi entrano possono comportarsi in uno dei due modi possibili: o colpiscono il polarizzatore ma, presentando la polarizzazione sbagliata, non lo attraversano, oppure mancano completamente l'ingresso dell'analizzatore. Lo sperimentatore, con due canali, può concentrare tutta la sua attenzione sulle particelle che vengono rilevate (e tutte queste devono essere entrate per l'apertura d'ingresso ed essere uscite da uno dei due canali). Una metodologia di questo tipo aiuta ad eliminare la scappatoia della rilevazione. Si riporta in Figura 6.5 uno schema dell'esperimento a due canali di Aspect;
3. infine, il terzo tipo di esperimento sarebbe stato quello suggerito nel 1957 da Bohm ed Aharonov. In questo esperimento, la direzione degli analizzatori sarebbe stata stabilita *dopo* l'emersione dei fotoni dalla sorgente e *durante la loro fase di volo*. In un certo senso, in questo caso, lo sperimentatore si sta chiedendo: "*Che succederebbe se un fotone od il suo analizzatore mandasse un messaggio all'altro fotone o all'altro analizzatore, in modo che il secondo fotone possa aggiustarsi così da fornire un risultato concorde?*". Per prevenire un simile scambio di informazione, lo sperimentatore può progettare l'apparato sperimentale in modo che l'orientamento degli analizzatori venga *scelto sia in modo casuale, sia con ritardo*. Questo tipo di esperimento è detto *a scelta ritardata*.

⁴Ironia della sorte, nonostante fosse un ricercatore presso il laboratorio di Townes e fosse quindi anche uno degli inventori del laser, Clauser non poté utilizzare il laser nell'esperimento realizzato con Friedmann, poichè ancora non era noto come questo si potesse impiegare in casi siffatti. Il laser, di cui faranno uso coloro che realizzeranno esperimenti analoghi successivamente, avrebbe aiutato lui e Freedman a produrre in tempi molto più brevi un buon numero di coppie di fotoni entangled.

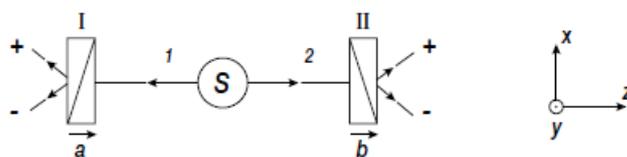


Figura 6.5: Uno schema dell'esperimento a due canali proposto da Aspect. (Immagine presente nella sua tesi di dottorato).

Ciò che Alain Aspect cercò di ottenere era una verifica definitiva della disuguaglianza di Bell, ovvero un controllo empirico di cui nessuno avrebbe potuto mettere in dubbio la validità pensando che fotoni od analizzatori potessero comunicare tra loro aggirando lo sperimentatore.

Aspect iniziò i suoi esperimenti ed utilizzò un fascio atomico di calcio come sorgente per i fotoni correlati. Questi venivano eccitati da un laser. Il processo imponeva agli elettroni degli atomi di calcio di saltare due livelli energetici sopra al proprio stato fondamentale. Analogamente agli esperimenti, con il ritorno allo stato fondamentale, venivano emessi due fotoni entangled; questa volta però il controllo sul fascio di atomi e l'efficienza nella produzione di particelle correlate erano notevolmente migliorati. Livelli energetici e fotoni entangled sono mostrati in Figura 6.6. Come atteso, il tasso di coincidenze ottenuto nell'esperimento, ovvero la frequenza con cui coppie correlate venivano effettivamente rilevate e misurate, era parecchi ordini di grandezza maggiore di quello ottenuto dai predecessori di Aspect. Gli esperimenti condotti a canale singolo portarono a risultati eccezionalmente precisi: la disuguaglianza di Bell venne violata con uno scarto di 9 deviazioni standard. Quando un fotone veniva bloccato dal polarizzatore però, nell'esperimento ad un canale questo era del tutto perso. Con la configurazione a due canali invece, succede che se un fotone viene bloccato dal polarizzatore, allora viene riflesso e può ancora essere misurato. Tale espediente aumenta il tasso di coincidenza del controllo complessivo e rende l'esperimento molto più preciso. Con questa configurazione, si ottennero risultati estremamente convincenti: la disuguaglianza di Bell era violata con uno scarto di 40 deviazioni standard.

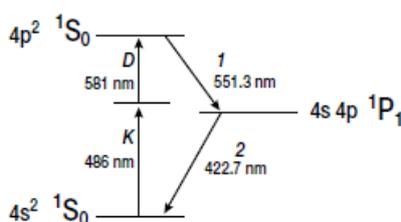


Figura 6.6: Un diagramma che mostra le transizioni dell'atomo di calcio nei processi innescati durante gli esperimenti di Aspect.

Venne dunque il momento dell'ultimo controllo empirico della non località. Aspect progettò polarizzatori le cui orientazioni nello spazio potessero essere modificate ad una tale velocità che questo cambiamento potesse avvenire *mentre i due fotoni erano in volo*. Riuscì a realizzare tale apparato sperimentale nel modo seguente: su ogni lato dell'apparato erano posti due analizzatori di polarizzazione, orientati in maniera differente tra loro. Entrambi erano connessi ad un interruttore che poteva determinare rapidamente a quale dei due analizzatori inviare ogni fotone (C_1 , C_2), e quindi in quale delle due possibili orientazioni il fotone sarebbe incappato. Nel laboratorio di Aspect, ogni polarizzatore era posto ad una distanza di 6.5 metri dalla sorgente. La distanza tra i due polarizzatori era dunque di 13 metri totali. Aspect progettò una tecnica sperimentale per poter scambiare le due regolazioni a e a' del polarizzatore 1 e le due regolazioni b e b' del polarizzatore 2 in un intervallo di tempo che fosse inferiore a 13 metri diviso la velocità della luce c ($\simeq 43$ nanosecondi). Uno schema dell'apparato sperimentale è riportato in Figura 6.7.

Nell'apparato sperimentale mostrato nello schema, si otteneva lo scambio tra regolazioni per mezzo di uno strumento acustico-ottico nel quale la luce interagiva con un'onda stazionaria di ultrasuoni in acqua. Quando l'onda cambiava nel contenitore trasparente dell'acqua, il fascio di luce veniva deflesso, modificando la regolazione dei polarizzatori. In realtà, questo scambio si attivava ad intervalli di 6.7 e 13.3 nanosecondi, che sono intervalli molto inferiori alla soglia critica dei 43 nanosecondi.

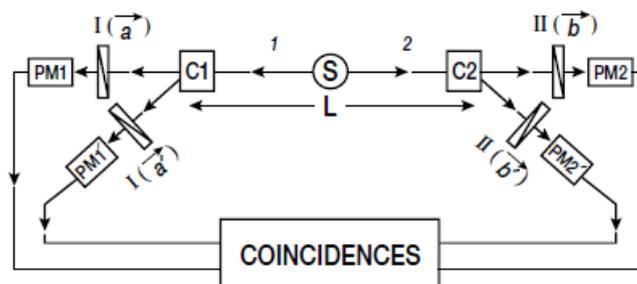


Figura 6.7: Un diagramma che mostra le transizioni dell'atomo di calcio nei processi innescati durante gli esperimenti di Aspect.

Proprio come i primi due esperimenti, il terzo della serie ottenne risultati altamente precisi e, soprattutto, concordi con quelli precedenti: la disuguaglianza di Bell veniva regolarmente violata.

Con una serie così consistente di prove, si diffuse molto velocemente nel mondo fisico la notizia dell'invalidazione della teoria a variabili locali nascoste. Era passato molto tempo da quando Einstein, Podolsky e Rosen avevano presentato il loro articolo, e, col passare del tempo e con l'accumularsi dei successi a favore della meccanica quantistica, quasi tutti i fisici del tempo si erano fatti una ragione riguardo alla validità di tale

descrizione della realtà. Chi proprio non poté fare a meno del realismo, ripiegò su una teoria a variabili nascoste non locali, ad oggi non molto accreditata. La notizia ebbe però un impatto importante sul mondo scientifico, per molti fu un vero e proprio shock: non troppo per il fatto che la teoria a variabili nascoste fosse stata invalidata, è nella natura della fisica escludere teorie che non descrivano correttamente la realtà; l'elemento sconvolgente fu la prova che la natura avesse un carattere altamente *non-locale*.

Appendice A

La versione di Bohm del paradosso EPR

La versione di David Bohm del paradosso EPR consiste nella descrizione di un caso concreto a cui fare riferimento per l'esposizione del paradosso. In questo modo, quella presentata da Bohm risulta essere una versione semplificata del paradosso EPR, su cui è quindi anche più immediato fare considerazioni e ragionare.

Si consideri il decadimento del mesone pi neutro in un elettrone ed un positrone:

$$\pi^0 \longrightarrow e^- + e^+ .$$

Assumendo che il pione sia a riposo, l'elettrone ed il positrone volano in direzioni opposte (Figura A.1).

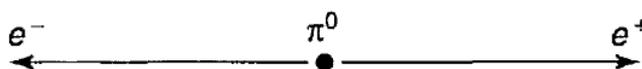


Figura A.1: Decadimento di un pione neutro a riposo in elettrone e positrone.

Il pione ha spin zero, quindi la conservazione del momento angolare impone che elettrone e positrone si trovino nello stato di singoletto

$$|\psi_{e^-,e^+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) . \quad (\text{A.1})$$

Se l'elettrone trovato con spin up, il positrone avrà necessariamente spin down e viceversa. Si supponga ora di lasciar allontanare *notevolmente* le due particelle -10 metri in un esperimento pratico, oppure, idealmente, 10 anni luce- e quindi misurare lo spin

dell'elettrone. Si immagini di ottenere il risultato "spin up". Immediatamente si sa che qualcuno, 20 metri (o 20 anni luce) distante, otterà il risultato "spin down" nel caso esamini il positrone. I realisti non erano sorpresi di ciò: nella visione EPR, l'elettrone aveva *realmente* spin up (ed il positrone spin down). Nella visione quantistica invece, nessuna delle due particella ha spin up o down finchè la misurazione non viene effettuata: è tale operazione a far collassare la funzione d'onda e "produrre" lo spin a 20 metri (o 20 anni luce) di distanza. Einstein, Podolsky e Rosen considerarono questa "*spooky action at a distance*" assurda. La posizione di EPR esprimeva dunque chiara opposizione alla visione quantistica: che la meccanica quantistica potesse calcolarlo o meno, elettrone e positrone **dovevano** avere un valore ben definito.

L'assunzione fatta era che nessuna informazione, e quindi nessun tipo di influenza, potesse propagarsi più velocemente della luce. Questa congettura prende il nome di Principio di **località**.

Bibliografia

- [1] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe *Quantum Mechanics, Volume 1*, Wiley-VCH 1991
- [2] J. Preskill, *Lecture Notes for Ph219/CS219, Quantum Information*, California Institute of Technology 2015
- [3] R. Zucchini, *Quantum Mechanics: Lecture Notes*, a.a. 2016/17
- [4] A. Rényi, *On Measures Of Entropy And Information*, Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability, 1960
- [5] M. A. Nielsen & I. L. Chuang, *Quantum computation and quantum information*, Cambridge University Press, 2004
- [6] D. Bianchini, *Entanglement Entropy in Restricted Integrable Spin Chains*, Tesi di Laurea Magistrale in Fisica, Università di Bologna, a.a. 2012/13
- [7] C. Degli Esposti Boschi, *Introduzione alla Teoria dell'Informazione Quantistica - Lecture Notes*, a.a. 2016/2017
- [8] D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, Pearson Education 2004
- [9] A. Einstein, B. Podolski & N. Rosen, *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*, Phys. Rev. **47**, 777, 1935
- [10] J. S. Bell, *On the Einstein Podolsky Rosen Paradox*, Physics **1**, 195, 1964
- [11] A. Aspect, P. Grangier & G. Roger, *Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities*, Phys. Rev. Lett. **49**, 91, 1982
- [12] S. J. Freedman and J. F. Clauser, *Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories*, Phys. Rev. Lett. **28**, 938, 1972