

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

**MODELLI DI DIFFUSIONE E REAZIONE,
PARABOLICI E IPERBOLICI,
PER LA PROPAGAZIONE DELL'HANTAVIRUS**

Tesi di Laurea Magistrale in Fisica Matematica

Relatore:

Chiar.ma Prof.ssa

FRANCA FRANCHI

Presentata da:

SARA TUMEDEI

II Sessione

Anno Accademico 2016/2017

Alla mia famiglia.

Indice

Abstract	v
Introduzione	vii
1 Modelli preliminari di diffusione	1
1.1 Modello di diffusione e reazione ad una popolazione	1
1.2 Modello di base della popolazione dei topi	4
1.3 Modello semplice per le epidemie: il <i>Modello SIR</i> a tre specie	12
2 Modello generale di diffusione dell'Hantavirus	19
2.1 Modello di diffusione e reazione a due popolazioni	19
2.2 Soluzione di tipo Travelling Waves	23
3 Modello iperbolico per il contagio dell'Hantavirus	29
3.1 Modello di diffusione e reazione iperbolico	29
3.2 Soluzioni stazionarie e omogenee: analisi della stabilità lineare	37
3.3 Il formalismo delle Traveling Waves	41
4 Conclusioni	47
A	51
A.1 Metodo delle Curve caratteristiche	51
A.1.1 Modello delle Onde	53
A.1.2 Modello di Burger	54
A.2 Travelling Waves	57
Bibliografia	63

Ringraziamenti

65

Abstract

In questa tesi presento alcuni modellamenti matematici per la diffusione di epidemie, sia in ambito discreto che in quello continuo. In particolare mi occupo dell'infezione da Hantavirus. Dal momento che il virus può essere fatale, risulta di particolare rilevanza lo studio della sua propagazione. Inizialmente, in questa tesi, metto a confronto tre differenti modelli per la diffusione di infezioni: il modello di diffusione e reazione di Fisher-Kolmogoroff ad una popolazione nel continuo, il modello di Abramson e Kenkre a due popolazioni nel discreto ed il modello SIR di Kermak e McKendrick a tre specie nel discreto. Successivamente propongo la generalizzazione spaziale del modello di Abramson e Kenkre a due popolazioni, introducendo i termini di diffusione nelle equazioni del modello. Ottengo così un modello di diffusione e reazione descritto da due equazioni alle derivate parziali paraboliche e interagenti, con mobilità diffusive anche diverse. Effettuo un'analisi della stabilità lineare degli stati di equilibrio del Modello, facendo una distinzione fra gli stati di equilibrio stazionari e quelli stazionari e omogenei. Studio, poi, la presenza di soluzioni di tipo Travelling Waves per il sistema, limitandomi al modello $1D$. Infine, presento lo schema termodinamico, nell'ambito della Termodinamica estesa, che mi permette di derivare il modello di diffusione e reazione iperbolico di Barbera, Currò e Valenti, mettendo in evidenza due tempi di rilassamento. Esso rappresenta una correzione di tipo iperbolico del modello parabolico investigato prima: infatti nel momento in cui i tempi di ritardo tendono a zero, il modello si riduce a quello di Abramson e Kenkre. Dopo aver affrontato l'analisi della stabilità lineare degli stati di equilibrio stazionari e omogenei del modello, cerco soluzioni del tipo Travelling Waves, mettendo anche in evidenza le differenze, sia matematiche che sperimentali, rispetto ai risultati trovati nel caso parabolico.

Key words: Hantavirus, modelli di diffusione e reazione, stabilità lineare, Travelling Waves, Termodinamica estesa, curve caratteristiche, modelli iperbolici, onde iperboliche

Introduzione

L'infezione da Hantavirus, originariamente chiamata così perché apparsa per la prima volta vicino al fiume Hanta in Corea, è un virus trasmesso da roditori selvatici e domestici attraverso feci o morsi. La sua trasmissione all'uomo avviene per inalazione o per contatto con l'urina, gli escrementi o la saliva di un roditore infetto.

Nel 1993 fu scoperta, nella regione "Four Corners", una nuova specie di Hantavirus, chiamata *Sin Nombre*, responsabile della *Sindrome Cardiopolmonare da Hantavirus* ([18]). L'epidemia, portata dal topo cervo (*Peromyscus maniculatus*), colpì l'area Sud-Ovest del Nord America causando una mortalità del 50% circa; in questa occasione il virus fu per la prima volta isolato e descritto.

Ad oggi esistono più di 20 infezioni conosciute, alcune delle quali sono associate a due gravi malattie, potenzialmente mortali negli esseri umani: la febbre emorragica con sindrome renale (HFRS) e la sindrome cardiopolmonare da Hantavirus (HPS). A partire da gennaio 1999, sono stati confermati 205 casi di HPS in 30 stati diversi degli Stati Uniti, e 30 casi in tre province del Canada; molti dei quali si sono presentati nelle regioni occidentali di entrambi i Paesi ([19]).

Dal 1993 si è dedicato un grande sforzo per riuscire a comprendere la natura di questo virus, le sue dinamiche temporali e spaziali e la sua relazione con la popolazione umana, nel tentativo di identificare e predire i rischi della malattia. Una chiave per rispondere a questa emergenza è data dallo studio delle dinamiche del virus all'interno della popolazione dei roditori.

Una descrizione matematica completa delle dinamiche del sistema biologico, che comprende il virus, i topi, gli esseri umani e l'ambiente, è un compito assai difficile; l'obiettivo di questa tesi è molto meno ambizioso.

Il modello matematico classico che descrive la diffusione dell'infezione da Hantavirus è il modello di Abramson e Kenkre a due popolazioni (si veda [4]), che consiste in un sistema di due equazioni alle derivate parziali paraboliche interagenti. Sono entrambe rappresentate da una equazione di diffusione e reazione di Fisher: è presente, infatti, un termine diffusivo che model-

la il moto degli individui suscettibili e infetti, rispettivamente, ed un termine di reazione non lineare; è inoltre presente un termine che rappresenta la capacità media di conservazione della popolazione, e quindi l'influenza dell'ambiente su quest'ultima, chiamato capacità di trasporto. Come mostrerò, questo modello porta a dedurre l'esistenza di ambienti isolati, ove è presente un alto valore della capacità di trasporto, detti "rifugi", in cui la popolazione infetta sopravvive (si veda [4]). Presenterò, poi, il modello di diffusione e reazione iperbolico a due popolazioni di Barbera, Currò e Valenti, costituito da un sistema di due equazioni alle derivate parziali iperboliche interagenti, come si può osservare in [10].

L'obiettivo di questa tesi è analizzare i modelli usati per descrivere la diffusione dell'infezione da Hantavirus, e studiare la stabilità lineare degli stati di equilibrio stazionari e omogenei del modello parabolico e iperbolico, discutendone le differenze e le analogie.

Nel primo capitolo propongo tre modelli preliminari di diffusione. Inizialmente derivo il modello di diffusione e reazione ad una popolazione di Fisher–Kolmogoroff tramite le equazioni di bilancio locali e le relazioni costitutive per i flussi ([1],[6]); esso risulta essere una equazione alle derivate parziali, parabolica, 3D, del secondo ordine, a coefficienti costanti, non lineare. Sullo stesso attuo un procedimento di linearizzazione ed una analisi della stabilità lineare sugli stati di equilibrio stazionari ed omogenei seguendo il procedimento esposto in [16] e [9]. Supponendo di lavorare in un dominio fisso e limitato e con campi regolari, proseguo la tesi con l'analisi del modello di base a due popolazioni di topi ([3]). Esso è costituito da un sistema a due equazioni differenziali ordinarie del primo ordine interagenti. Nel modello sono presenti alcune caratteristiche ecologiche ed epidemiologiche di base dei topi. Anche in questo caso effettuo una linearizzazione ed una analisi della stabilità lineare degli stati di equilibrio stazionari, riferendomi a [8], [15] e [16]. Da questa evidenzio come l'infezione possa completamente scomparire dalla popolazione dei topi quando le condizioni ambientali sono inadeguate, e riapparire quando queste condizioni cambiano. Concludo, infine, il primo capitolo con quello che in letteratura viene definito modello SIR per le epidemie ([5]). La sua origine è dovuta a Kermak e McKendrick (1927), e nasce dall'esigenza di voler descrivere l'evoluzione di una epidemia dopo che nel 1905 – 1906 si diffuse la peste bubbonica a Bombay. È un modello a tre specie composto da un sistema di tre equazioni differenziali ordinarie del primo ordine interagenti.

Nel secondo capitolo, seguendo [4] e supponendo di lavorare nel continuo, pongo l'attenzione sul modello di diffusione a due popolazioni dell'infezione da Hantavirus di Abramson e Kenkre. Esso è descritto da un sistema di due equazioni alle derivate parziali, 3D, paraboliche, non lineari. Il modello incorpora il decadimento dei topi all'interno della popolazione dovuto alle morti, la diffusione dell'infezione attraverso l'interazione dei topi, l'incremento dato dalle

nascite e l'incidenza dell'ambiente sulla popolazione, ed inoltre il moto di quest'ultima come processo di diffusione. Eseguo, come nel capitolo 1, una linearizzazione del sistema e ricerca delle soluzioni di tipo onde dispersive. Questo porta a dover risolvere un problema agli autovalori, il quale risulta irrisolvibile dal punto di vista analitico nel caso in cui la capacità di trasporto K dipenda dalla variabile spaziale. Da qui ottengo, anche, risultati relativi alla presenza di ambienti isolati ("rifugi") in cui la popolazione infetta sopravvive. Essendo un modello composto da equazioni di Fisher, studio, infine, soluzioni di tipo Travelling Waves ([14]), riducendomi a lavorare in spazi $1D$. Analizzando questa tipologia di soluzioni, mostro che in una regione libera da topi ma in contatto con una regione infetta, in uno stato di equilibrio, si propagano due onde: l'onda dei topi suscettibili e quella dei topi infetti che si propaga dietro alla prima con un certo ritardo che dipende dal parametro ambientale.

In conclusione, nel terzo capitolo, presento il modello per il contagio dell'Hantavirus di Barbera, Currò e Valenti ([10], [12]). Esso costituisce una correzione iperbolica al modello di Abramson e Kenkre del capitolo 2; infatti, utilizzando l'idea espressa in [7] e la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange proposta in [11], ottengo un sistema del primo ordine nella direzione temporale, simmetrico e iperbolico al quale applico il metodo delle curve caratteristiche ([2],[17]). Evidenzio, poi, i tempi di rilassamento del modello, sottolineando il fatto che, se questi tendono a zero, il sistema si riconduce a quello parabolico di Abramson studiato nel capitolo precedente. Proseguo con l'analisi della stabilità lineare delle soluzioni stazionarie ed omogenee del modello, nel caso di perturbazioni sia uniformi che non uniformi. Infine, anche per questo modello, propongo il formalismo delle Travelling Waves, sottolineando alcune differenze che si presentano rispetto al modello parabolico di Abramson. Concludo osservando che, per avere un completamento del lavoro, possono essere svolte simulazioni numeriche, utili soprattutto quando non si può procedere dal punto di vista analitico (a questo proposito, poiché non trattate nella tesi, mi permetto di segnalare gli articoli [3], [4], [10], [13], [19]).

Capitolo 1

Modelli preliminari di diffusione

1.1 Modello di diffusione e reazione ad una popolazione

Notazioni preliminari.

Lavoro utilizzando generalmente la descrizione euleriana o istantanea denotando con $(\vec{x}(t), t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), t)$, con $t \geq 0$, le coordinate spazio-tempo di tale descrizione.

Denoto inoltre con $N(\vec{x}, t)$ la funzione a valori scalari almeno di classe C^1 che rappresenta la densità di popolazione.

Per non appesantire la notazione ometterò la dipendenza da $(\vec{x}(t), t)$.

In questa sezione faccio riferimento ai testi di I-Shih Liu, [1] e di J.D. Murray, [6].

Per i nostri scopi, sia $B(t)$ una configurazione istantanea di un corpo continuo B e $B(0)$ la sua configurazione di riferimento iniziale; e $P = P(0) \subseteq B(0)$ una qualunque regione regolare, fissa e limitata contenuta in $B(0)$. Suppongo che P sia sufficientemente regolare per poter applicare il *teorema della divergenza*. Una generale legge di bilancio in forma integrale si presenta nella forma seguente:

$$\frac{d}{dt} \int_P N \, dv = - \int_{\partial P} \vec{J}_N \cdot \vec{n} \, d\sigma + \int_P r_N \, dv \quad (1.1)$$

dove:

1. dv rappresenta l'elemento infinitesimo di volume nella configurazione di riferimento;
2. \vec{J}_N è il vettore flusso associato ad N ;
3. \vec{n} è il versore normale esterno alla superficie di P ;

- 3'. $d\sigma$ rappresenta l'elemento infinitesimo di superficie nella configurazione istantanea;
4. r_N è chiamato *supply*, può essere un apporto di crescita o di degradazione; a seconda che r_N sia una funzione a valori scalari positivi o negativi.

Sono interessata alla forma locale dell'equazione (1.1); per cui suppongo che N e \vec{J}_N siano funzioni di classe almeno C^1 , mentre r_N è sufficiente che sia continua. Utilizzo ora il teorema del trasporto in forma semplificata per portare sotto al segno di integrale la derivata temporale, così ottengo:

$$\frac{d}{dt} \int_P N \, dv = \int_P \frac{\partial}{\partial t} N \, dv \quad (1.2)$$

Applico il teorema della divergenza di Gauss all'integrale di superficie:

$$\int_{\partial P} \vec{J}_N \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_P \nabla \cdot \vec{J}_N \, dv \quad (1.3)$$

Sostituendo (1.2) e (1.3) nell'equazione (1.1) ottengo:

$$\int_P \left[\frac{\partial}{\partial t} N + \nabla \cdot \vec{J}_N - r_N \right] \, dv = 0 \quad (1.4)$$

Basandomi sulla continuità della funzione integranda e sull'arbitrarietà di P , in base al *lemma fondamentale della Meccanica dei Continui*, ricavo la seguente equazione:

$$\frac{\partial}{\partial t} N + \nabla \cdot \vec{J}_N - r_N = 0 \quad (1.5)$$

chiamata legge di bilancio in forma locale.

Il vettore flusso è detto anche grandezza costitutiva e nel caso del modello che si intende analizzare, una possibile equazione costitutiva per esso è data dalla relazione di tipo flusso gradiente, cioè:

$$\vec{J}_N = -D_N \nabla N \quad (1.6)$$

con D_N mobilità diffusiva della popolazione che ora suppongo non negativa e costante. In letteratura la (1.6) è anche nota come *legge di Fick*. Una forma di tipo "logistico" per r_N può rappresentare adeguatamente il processo di nascite e morti della popolazione. Pongo quindi $r_N := \lambda N(1 - N)$, dove $\lambda > 0$ rappresenta il tasso di riproduzione. Sostituendo (1.6) e questo supply nell'equazione (1.5) ottengo la seguente equazione di diffusione e reazione parabolica semilineare:

$$\frac{\partial}{\partial t} N = D_N \Delta N + \lambda N(1 - N) \quad (1.7)$$

conosciuta in letteratura come *Modello di Fisher-Kolmogoroff*.

Osservazione 1.1.

Se $r_N = 0$ avrei il modello classico di diffusione parabolico lineare:

$$\frac{\partial}{\partial t} N - D_N \Delta N = 0.$$

Osservazione 1.2.

Se la mobilità diffusiva D_N non fosse costante ma dipendesse per esempio dalla densità di popolazione N , cioè $D_N = D_N(N)$, avrei:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{J}_N &= \nabla \cdot (-D_N(N) \nabla N) = \\ &= -D_N(N) \Delta N - \nabla D_N(N) \cdot \nabla N = \\ &= -D_N(N) \Delta N - D'_N \nabla N \cdot \nabla N \end{aligned}$$

con $D'_N := \frac{d}{dN} D_N$; in questo caso il modello di diffusione e reazione è descritto da una PDE del secondo ordine quasilineare.

Procedimento di adimensionalizzazione e linearizzazione di un Modello.

Effettuo ora il seguente cambio di variabili:

$$t^* := \lambda t, \quad x^* := x \left(\frac{\lambda}{D_N} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ometto gli asterischi per non appesantire la notazione e riscrivo la (1.7) nella forma adimensionale:

$$\frac{\partial}{\partial t} N = \Delta N + N(1 - N) \tag{1.8}$$

Essa è una equazione differenziale alle derivate parziali, $3D$, del secondo ordine, a coefficienti costanti, non lineare.

Le soluzioni stazionarie ed omogenee di (1.8) (cioè $\frac{\partial}{\partial t} N = 0$ e $\Delta N = 0$) sono:

$$N^* = 0 \quad \text{e} \quad N^* = 1,$$

che si ottengono da $N(1 - N) = 0$.

Mi interessa analizzare la stabilità lineare di questi due stati di equilibrio costanti N^* , rispetto a piccole perturbazioni. Creo quindi una perturbazione istantanea intorno allo stato di equilibrio N^* che denoto con $\delta_N = \delta_N(\vec{x}, t)$ e quindi formo lo stato perturbato a N^* dato da:

$$N^* + \delta_N.$$

Sostituendo in (1.8) ricavo l'equazione per la perturbazione:

$$\frac{\partial}{\partial t}(N^* + \delta_N) = \Delta(N^* + \delta_N) + f(N^* + \delta_N), \quad (1.9)$$

con $f(N) := N(1 - N)$. La (1.9), per piccole perturbazioni, si riduce alla forma linearizzata:

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta_N = \Delta\delta_N + \frac{\partial f}{\partial N}(N^*)\delta_N, \quad (1.10)$$

dopo aver considerato per $f(N^* + \delta_N)$ uno sviluppo di Taylor, troncato al termine del primo ordine cioè:

$$f(N^* + \delta_N) \approx f(N^*) + \frac{\partial f}{\partial N}(N^*)\delta_N.$$

Sapendo che $\frac{\partial f}{\partial N} = 1 - 2N$ e che $\frac{\partial f}{\partial N}(N^*) = 1 - 2N^*$, risulta:

$$N^* = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial N}(N^*) = 1,$$

$$N^* = 1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial N}(N^*) = -1.$$

Quindi, a seconda di $N^* = 0$ o di $N^* = 1$ si hanno le equazioni:

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta_N = \Delta\delta_N \pm \delta_N$$

che sono equazioni di diffusione con un termine di sorgente (+1) o di degradazione (-1) lineare. Seguendo il procedimento presentato da B. Straughan in *The Energy Method, Stability, and Nonlinear Convection* ([16]), in domini spazialmente illimitati 1D o 3D si può dimostrare che $N^* = 0$ corrisponde ad uno stato di equilibrio instabile, mentre $N^* = 1$ risulta stabile, anzi asintoticamente stabile. Dunque un apporto di crescita è sempre destabilizzante, mentre uno di degradazione è sempre stabilizzante.

Per questo tipo di modello è anche interessante ricercare l'esistenza di soluzioni del tipo "Travelling Waves", supponendo di lavorare con coordinate (x, t) (cioè caso 1D) ed introducendo la coordinata d'onda $z = x - vt$ con velocità d'onda $v > 0$. Vedremo questo strumento applicato in altri modellamenti. Una discussione dettagliata di questo Metodo viene fatta nell'Appendice A.

1.2 Modello di base della popolazione dei topi

Per questa sezione faccio riferimento all'articolo di G. Abramson e V.M. Kenkre [3], con una difformità di notazioni per preservarne l'uniformità in tutti i capitoli successivi.

Considero ora un modello a due popolazioni di topi, studiandone l'interazione nel tempo; analizzo perciò il caso discreto dipendente solo dal tempo $t \geq 0$. Il modello che descriverò incorpora alcune caratteristiche ecologiche ed epidemiologiche dei topi. Entrambe queste caratteristiche sono relative al ruolo che riveste l'ambiente nella dinamica e persistenza dell'infezione. Infatti l'epidemia può completamente scomparire dalla popolazione dei topi quando le condizioni ambientali sono inadeguate, riapparendo sporadicamente o quando le condizioni cambiano. Inoltre si è osservato che ci sono regioni in cui la popolazione dei topi è libera dal virus e regioni in cui questo persiste. Nel momento in cui si verificano cambiamenti ambientali, questi "rifugi" in cui persiste l'infezione si espandono o si contraggono portando il virus in altre aree.

Notazione 1.1.

Introduco le seguenti notazioni, valide per i successivi capitoli.

Suppongo la popolazione divisa in due gruppi:

- S : indica gli individui suscettibili, che possono contrarre la malattia;
- I : indica gli individui infetti, cioè coloro che sono malati e possono trasmettere la malattia;

In questo modello di base le componenti di sesso ed età nelle popolazioni sono trascurate. L'evoluzione temporale di entrambe le classi contiene le seguenti caratteristiche:

- il contagio dell'epidemia che porta gli individui suscettibili a diventare infetti;
- la dinamica della popolazione è indipendente dall'epidemia.

Le equazioni che descrivono questo modello, nell'approccio discreto, sono:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = bN - cS - \frac{SN}{K} - aSI \\ \frac{dI}{dt} = -cI - \frac{IN}{K} + aSI \end{cases} \quad (1.11)$$

con $t \geq 0$ e dove $N(t) = S(t) + I(t)$ rappresenta la popolazione totale; i parametri presenti b, c, K e a sono tutti positivi e costanti.

Per la successiva trattazione ometto la dipendenza dalla variabile t , per non appesantire le notazioni.

Le equazioni, che nel sistema (1.11) sono due equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, interagiscono. Ogni termine che compare in esse è supportato da ragioni biologiche:

- Nascite: bN rappresenta le nascite dei topi. I topi non nascono infetti, ma nascono tutti suscettibili con tasso proporzionale alla densità totale della popolazione, dal momento che tutti i topi contribuiscono equamente alla procreazione;

- Morti: cI (o equivalentemente cS) rappresenta le morti per ragioni naturali il cui tasso è proporzionale alla sua corrispondente densità;
- Competizione: $-\frac{SN}{K}$ (o equivalentemente $-\frac{IN}{K}$) rappresenta il processo che limita la crescita della popolazione dovuto alla competizione per la suddivisione delle risorse. Ognuno di questi termini di competizione è proporzionale alla probabilità di incontro di una coppia di topi formata da un topo di una delle due classi corrispondenti, suscettibili o infetti, e da un topo di una qualsiasi classe, dal momento che ogni topo, suscettibile o infetto, compete con l'intera popolazione;
- Capacità di trasporto: K caratterizza la capacità media di conservazione della popolazione; alti valori della capacità di trasporto rappresentano un'alta disponibilità di acqua, cibo, riparo e altre risorse che i topi usano per crescere;
- Infezione: aSI rappresenta il numero di topi suscettibili che contraggono l'infezione a causa di un incontro con un topo infetto che suppongo avvenga con un tasso pari ad a che qui, per semplicità, assumo costante. Questo tasso a generalmente può dipendere dalla densità di popolazione dei topi, per esempio può essere dovuto all'aumento della frequenza di lotte, durante le quali il contagio avviene attraverso i morsi, quando la densità di popolazione è troppo alta e sovraffollata.

Questa descrizione è supportata sperimentalmente dal fatto che l'infezione è cronica, i topi infetti non muoiono per essa e non guariscono da essa probabilmente per la loro intera vita.

Fra l'altro, sommando le due equazioni in (1.11) ottengo facilmente una sola equazione per l'intera popolazione della seguente forma:

$$\frac{dN}{dt} = (b - c)N \left(1 - \frac{N}{(b - c)K}\right)$$

Il sistema (1.11) è caratterizzato da quattro parametri: a, b, c e K . Come già detto, considero a, b e c fissati e tali per cui $a, b, c > 0$, e analizzo l'evoluzione dell'epidemia al variare di K . Scelgo K come parametro di controllo della dinamica della popolazione perché è il termine che meglio rappresenta l'influenza dell'ambiente sulla popolazione. Si potrebbe immaginare una situazione in cui le perturbazioni esterne sono introdotte nel modello tramite il parametro K . Ricorro gli stati di equilibrio/stazionarietà del sistema (1.11) risolvendo le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} bN - cS - \frac{SN}{K} - aSI = 0 \\ -cI - \frac{IN}{K} + aSI = 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

Raccolgo dalla seconda equazione il termine I :

$$\begin{cases} bN - cS - \frac{SN}{K} - aSI = 0 \\ I(-c - \frac{N}{K} + aS) = 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

Affinché la seconda equazione sia verificata si hanno i seguenti due casi:

$$I = 0 \quad \text{oppure} \quad -c - \frac{N}{K} + aS = 0$$

Nel primo caso ottengo:

$$\begin{cases} bN - cS - \frac{SN}{K} - aSI = 0 \\ I = 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

Sostituisco al posto di N il suo valore $N = S + I$:

$$\begin{cases} b(S + I) - cS - \frac{S(S+I)}{K} - aSI = 0 \Rightarrow bS - cS - \frac{S^2}{K} = 0 \\ I = 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

Da cui ottengo:

$$S^2 - bKS + cKS = 0 \Rightarrow S(S - bK + cK) = 0$$

Perciò ho i seguenti stati di equilibrio:

$$\begin{cases} S = 0 \\ I = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} S = K(b - c) \\ I = 0 \end{cases}$$

Il primo è irrilevante sperimentalmente perché è lo stato nullo. Per quanto riguarda il secondo posso procedere con l'analisi della sua stabilità lineare.

Procedimento di linearizzazione di un sistema dinamico in \mathbb{R}^2 nella variabile indipendente tempo $t > 0$.

Seguendo il testo di Robert Morgan, *Linearization and stability analysis of nonlinear problems* ([8]), considero il seguente sistema di equazioni differenziali del primo ordine, in \mathbb{R}^2 :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_1(t) = F_1(x_1(t), x_2(t)) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) = F_2(x_1(t), x_2(t)) \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\vec{x} = \vec{F} \quad (1.16)$$

dove le funzioni $\vec{F} := (F_1, F_2)$ possono essere non lineari nelle variabili $\vec{x}(t) := (x_1(t), x_2(t)) \in \mathbb{R}^2$. Suppongo inoltre che F_1, F_2 siano funzioni di classe almeno C^1 , affinché si possa procedere con la tecnica di linearizzazione.

Data una soluzione di equilibrio, che denoto con \vec{X} , linearizzo il sistema intorno ad una sua posizione di equilibrio sostituendo:

$$\delta_j(t) = x_j(t) - X_j, \text{ per } j = 1, 2$$

e approssimo $F_j(\vec{x})$ con il suo piano tangente in \vec{X} per ogni j .

Utilizzando le derivate parziali di F_1, F_2 per linearizzare il sistema, il piano tangente di F_j in \vec{X} è dato da:

$$F_j(\vec{x}) \approx F_j(\vec{X}) + \nabla F_j(\vec{X}) \cdot (\vec{x} - \vec{X}) = \partial_{x_1} F_j(\vec{X}) \delta_1 + \partial_{x_2} F_j(\vec{X}) \delta_2, \quad j = 1, 2$$

Applicando le sostituzioni ottengo il seguente sistema dinamico lineare:

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt} \delta_1 \\ \frac{d}{dt} \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} F_1(\vec{X}) & \partial_{x_2} F_1(\vec{X}) \\ \partial_{x_1} F_2(\vec{X}) & \partial_{x_2} F_2(\vec{X}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

Il sistema (1.17) è la versione linearizzata di (1.16) attorno ad una posizione di equilibrio/di stazionarietà \vec{X} .

Riscrivo pertanto il sistema in forma compatta:

$$\frac{d}{dt} \vec{\delta} = DF(\vec{X}) \vec{\delta}$$

dove con la notazione $DF(\vec{x})$ denoto la matrice Jacobiana di \vec{F} , cioè $DF(\vec{x}) = \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x_1, x_2)}(\vec{x})$; mentre la matrice costante $DF(\vec{X})$ calcolata in un generico punto critico $\vec{X} \in \mathbb{R}^2$ è detta Matrice di Stabilità. Il vettore $\vec{F} = (F_1, F_2)$ rappresenta il campo vettoriale velocità di fase che caratterizza il sistema dinamico (1.16). Naturalmente si può assegnare un Problema di Cauchy per il sistema dinamico (1.16), prescrivendo il campo incognito \vec{x} , al tempo iniziale, cioè per $t = 0$.

Osservazione 1.3.

Per la seguente osservazione si veda per esempio il testo di B. Pini, *Secondo corso di analisi matematica* ([16]).

In generale, per analizzare la stabilità di un punto critico $\vec{X} \in \mathbb{R}^2$ di un sistema non lineare $\frac{d}{dt} \vec{x} = F(\vec{x})$ si utilizzano gli autovalori della matrice costante $DF(\vec{X})$ che suppongo non singolare. Denoto quindi con λ_1, λ_2 gli autovalori di $DF(\vec{X})$. Nel caso di autovalori reali si ha la seguente classificazione topologica:

- se $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, allora \vec{X} è un nodo di prima specie instabile;
- se $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, allora \vec{X} è un nodo di prima specie asintoticamente stabile;
- se $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, allora \vec{X} è un punto di sella, instabile.

Nel caso di autovalori complessi, si ha la classificazione seguente:

- se $\lambda_1, \lambda_2 = r \pm i\mu, r > 0$, allora \vec{X} è chiamato fuoco ed è instabile;
- se $\lambda_1, \lambda_2 = r \pm i\mu, r < 0$, allora \vec{X} è un fuoco asintoticamente stabile;
- se $\lambda_1, \lambda_2 = \pm i\mu$, allora \vec{X} è chiamato centro ed è stabile.

Il primo Criterio di Stabilità di Lyapunov permette di conoscere la classificazione topologica di un punto critico \vec{X} di (1.16) tramite la classificazione topologica del punto critico nullo del sistema linearizzato associato, in tutti i casi elencati, tranne, nell'ultimo.

Dopo queste osservazioni preliminari, analizzo la stabilità lineare dei punti critici del sistema non lineare (1.11), effettuandone la (sua) linearizzazione intorno allo stato di equilibrio non omogeneo ($S^* = K(b - c), I^* = 0$).

Notazione 1.2.

Introduco le seguenti notazioni di comodo:

$$\begin{aligned} S &= S^* + \delta_S, \\ I &= I^* + \delta_I. \end{aligned} \tag{1.18}$$

e ottengo il seguente sistema linearizzato:

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt} \delta_S \\ \frac{d}{dt} \delta_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} F_1 & \partial_{x_2} F_1 \\ \partial_{x_1} F_2 & \partial_{x_2} F_2 \end{pmatrix}_{\{S^*, I^*\}} \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} \delta_S \\ \frac{d}{dt} \delta_I \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

che in forma compatta si riscrive:

$$\frac{d}{dt} \vec{\delta} = DF(S^*, I^*) \vec{\delta}. \tag{1.20}$$

Ricordando che

$$\begin{aligned} F_1 &= b(S + I) - cS - \frac{S(S+I)}{K} - aSI, \\ F_2 &= -cI - \frac{I(S+I)}{K} + aSI. \end{aligned}$$

Ottengo la Matrice Jacobiana:

$$DF = \begin{pmatrix} b - c - \frac{I}{K} - \frac{2S}{K} - aI & b - \frac{S}{K} - aS \\ -\frac{I}{K} + aI & -c - \frac{S}{K} - \frac{2I}{K} + aS \end{pmatrix}$$

che, calcolata nel punto critico di riferimento ($S^* = K(b - c), I^* = 0$), diventa:

$$DF(K(b - c), 0) = \begin{pmatrix} c - b & c - aK(b - c) \\ 0 & -b + aK(b - c) \end{pmatrix}$$

che rappresenta la Matrice di Stabilità.

I suoi autovalori risultano essere:

$$\lambda_1 = c - b$$

$$\lambda_2 = -b + aK(b - c).$$

Poiché sono interessata al caso in cui $S > 0$, risulta $b - c > 0$, cioè $b > c$. Sotto tale condizione $\lambda_1 < 0$.

Se denoto con $K_c = \frac{1}{a} \left(\frac{b}{b-c} \right)$ il valore critico della capacità di trasporto, ho che:

- se $K < K_c \Rightarrow \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ lo stato di equilibrio ($S^* = K(b - c), I^* = 0$) è asintoticamente stabile;
- se $K > K_c \Rightarrow \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ il punto critico ($S^* = K(b - c), I^* = 0$) è un punto di sella, per cui lo stato di equilibrio è instabile;
- se $K = K_c$ si trova $\lambda_2 = 0$; ma questo caso è escluso dalla richiesta che la Matrice di Stabilità sia non singolare.

Ritornando alla ricerca degli stati di equilibrio del sistema (1.11), per quanto riguarda il secondo caso, cioè $-c - \frac{N}{K} + aS = 0$, ottengo:

$$\begin{cases} b(S + I) - cS - \frac{S(S+I)}{K} - aSI = 0 \\ -c - \frac{S+I}{K} + aS = 0 \end{cases} \quad (1.21)$$

Dalla seconda equazione ricavo I in funzione degli altri termini:

$$-cK - S - I + aKS = 0 \Rightarrow I = aKS - cK - S$$

Sostituisco il valore di I nella prima equazione del sistema (1.21):

$$\begin{aligned}
 b(S + aKS - cK - S) - cS - \frac{S(S + aKS - cK - S)}{K} - aS(aKS - cK - S) &= 0 \\
 \Rightarrow abKS - bcK - cS - \frac{aKS^2 - cKS}{K} - a^2KS^2 + acKS + aS^2 &= 0 \\
 \Rightarrow abK^2S - bcK^2 - cKS - aKS^2 + cKS - a^2K^2S^2 + acK^2S + aKS^2 &= 0 \\
 \Rightarrow abK^2S - bcK^2 - a^2K^2S^2 + acK^2S &= 0 \\
 \Rightarrow a^2S^2 - S(ac + ab) + bc &= 0
 \end{aligned}$$

Risolve l'equazione rispetto ad S , posto:

$$\begin{aligned}
 \Delta &= a^2c^2 + a^2b^2 + 2a^2cb - 4a^2cb = \\
 &= a^2c^2 + a^2b^2 - 2a^2cb = \\
 &= (ac - ab)^2
 \end{aligned}$$

Si hanno le due soluzioni per S date da

$$\frac{ac + ab \pm (ac - ab)}{2a^2}$$

Più precisamente, si trova:

$$S = \frac{c}{a} \quad \text{e} \quad S = \frac{b}{a}$$

Nel primo caso, trovo la soluzione di equilibrio:

$$\begin{cases} S = \frac{c}{a} \\ I = -\frac{c}{a} = -S \end{cases} \quad (1.22)$$

Poiché $I < 0$, questa soluzione corrisponde ad uno stato irrilevante sperimentalmente. Nel secondo caso ottengo la soluzione di equilibrio:

$$\begin{cases} S = \frac{b}{a} \\ I = K(b - c) - \frac{b}{a} \end{cases} \quad (1.23)$$

Osservo subito che se $K > K_c$, I è > 0 ; naturalmente se $K < K_c$ si ha $I < 0$ che è sperimentalmente irrilevante.

Anche per questo stato di equilibrio procedo con l'analisi della sua Stabilità lineare. Calcolo quindi la matrice DF nel punto $(S^* = \frac{b}{a}, I^* = K(b-c) - \frac{b}{a})$:

$$DF\left(\frac{b}{a}, K(b-c) - \frac{b}{a}\right) = \begin{pmatrix} b - aK(b-c) & -\frac{b}{aK} \\ 0 & c-b \end{pmatrix}$$

i cui autovalori risultano essere:

$$\lambda_1 = c - b$$

$$\lambda_2 = b - aK(b-c).$$

Dal momento che ho precedentemente imposto la condizione $b > c$, risulta $\lambda_1 < 0$. Considerando K_c :

- se $K > K_c \Rightarrow \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ lo stato di equilibrio $(S^* = \frac{b}{a}, I^* = K(b-c) - \frac{b}{a})$ è asintoticamente stabile;
- se $K < K_c$, come già osservato, lo stato di equilibrio $(S^* = \frac{b}{a}, I^* = K(b-c) - \frac{b}{a})$ è irrilevante sperimentalmente.

Il fatto che ci sia un numero maggiore di infetti può essere correlato, attraverso K , alla diversità degli habitat e ad altre condizioni ambientali. Per esempio la presenza di scarsità di risorse è accompagnata da un numero più basso di topi infetti. Inoltre per valori di K al di sotto della capacità critica K_c , il numero di animali infetti è circa zero. Ossia, se le condizioni ambientali peggiorano, per esempio in presenza di siccità, l'infezione può diminuire fino a zero. Allo stesso modo, quando le condizioni migliorano, l'infezione riappare.

Infine osservo che nel punto critico omogeneo $S^* = I^* = 0$, la matrice di Stabilità si riduce alla forma:

$$DF(0,0) = \begin{pmatrix} b-c & b \\ 0 & -c \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

i cui autovalori sono: $\lambda_1 = -c < 0$

$\lambda_2 = b - c$ che risulta > 0 se $b > c$.

Lo stato nullo, per cui, risulta sempre instabile.

1.3 Modello semplice per le epidemie: il *Modello SIR* a tre specie

In questa sezione faccio riferimento all'articolo di G. Abramson, *Mathematical modeling of the spread of infectious diseases* ([5]).

Analizzo ora un semplice modello di epidemie infettive a tre specie. Lo si può pensare come un modello valido in una popolazione ben mescolata, anche se ciò risulta distante dalla realtà. Come nel caso precedente, suppongo di lavorare in un dominio fisso e limitato con campi regolari. Analizzo perciò il caso evolutivo in avanti nel tempo, cioè per $t \geq 0$.

Considero il numero totale di individui della popolazione costante e suppongo che un piccolo numero di individui infetti siano introdotti in una popolazione molto ampia. Il problema che mi pongo è l'evoluzione del gruppo di individui infetti nel tempo.

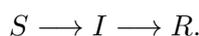
Notazione 1.3.

Utilizzando le notazioni introdotte precedentemente, suppongo la popolazione divisa in tre gruppi:

- S : individui suscettibili;
- I : individui infetti;
- R : individui rimossi, cioè coloro che sono guariti o immuni, oppure isolati oppure deceduti a causa della malattia.

Suppongo che, dopo la guarigione, la malattia conferisca immunità (ciò include anche la morte, in modo tale che la popolazione rimanga costante).

Il seguente modello è chiamato *Modello SIR* ed è rappresentato tramite il seguente schema:



Questo modello, la cui origine è dovuta a *Kermak* e *McKendrick* nel 1927, nasce dall'esigenza di voler descrivere l'evoluzione di una epidemia dopo che nel 1905 – 1906 si diffuse la peste bubbonica a Bombay.

Notazione 1.4.

Denoto con $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$ le rispettive densità di ogni classe di individui.

Notazione 1.5.

Assumo che:

- il numero degli infetti aumenta di un tasso proporzionale sia al numero degli infetti che dei suscettibili: rSI , con $r > 0$. Il numero dei suscettibili diminuisce con lo stesso tasso. La quantità r è chiamata *tasso di infezione*.

- Il tasso di individui infetti che entrano a far parte della classe R è proporzionale solo al numero di infetti: aI , con $a > 0$. Il numero dei rimossi cresce con lo stesso tasso.
- il periodo di incubazione è trascurabile, perciò un individuo suscettibile che contrae la malattia diventa immediatamente un individuo infetto.

Definizione 1.1.

Supponendo che la popolazione sia ben mescolata e che ogni coppia di individui abbia la stessa probabilità di entrare in contatto, definisco il seguente modello:

$$\frac{dS}{dt} = -rSI, \quad (1.25)$$

$$\frac{dI}{dt} = rSI - aI, \quad (1.26)$$

$$\frac{dR}{dt} = aI. \quad (1.27)$$

con le seguenti condizioni iniziali:

$$S(0) = S_0 > 0, \quad I(0) = I_0 > 0, \quad R(0) = 0. \quad (1.28)$$

Osservazione 1.4.

Dalle equazioni (1.25), (1.26) e (1.27) procedendo come per il Modello a due popolazioni ottengo che:

$$\frac{d}{dt}(S + I + R) = -rSI + rSI - aI + aI = 0$$

cioè la conservazione del numero totale di individui $N = S + I + R$ è così automaticamente assicurata (diversamente da quanto visto nel modello precedente).

Da adesso in poi faccio riferimento al problema di Cauchy (problema ai valori iniziale) descritto da (1.25) a (1.28).

Inizialmente mi chiedo: dati r , a , S_0 e I_0 , la malattia si diffonderà? E ancora se ciò accadesse, come si evolverebbe nel tempo? Infine, quando inizierà il declino?

Da (1.26) calcolo:

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0} = I_0(rS_0 - a) \geq 0 \quad \text{se} \quad S_0 \geq \frac{a}{r} = \rho. \quad (1.29)$$

Osservando l'equazione (1.25) noto che $\frac{dS}{dt} \leq 0$, allora $S < S_0$ sempre, e se $S_0 < \rho$ ottengo anche:

$$\frac{dI}{dt} \leq 0 \quad \forall t \geq 0.$$

In questo caso la funzione $I(t)$ decresce, per cui il numero di infetti rimane più basso di I_0 e per un tempo infinito tende a zero. Quindi l'epidemia non si presenta.

D'altra parte, se $S_0 > \rho$, allora $I(t)$ inizia ad aumentare e si presenta una epidemia.

La quantità ρ è chiamata *tasso relativo di rimozione*, mentre $\frac{1}{\rho}$ è il *tasso di contatto*.

Il termine $R_0 = \frac{rS_0}{a}$ è il tasso di riproduzione dell'infezione, mentre $\frac{1}{a}$ rappresenta il periodo medio di infezione.

Divido la (1.26) per la (1.25) e ottengo l'equazione differenziale del primo ordine per $I = I(S)$:

$$\frac{dI}{dS} = -\frac{I(rS - a)}{rSI} = -1 + \frac{\rho}{S}, \quad (I \neq 0). \quad (1.30)$$

Integro questa equazione per separazione di variabili, ottenendo:

$$\int dI = \int -1 + \frac{\rho}{S} dS$$

da cui:

$$I = -S + \rho \ln(S) + c \quad \text{con } c = \text{costante}$$

cioè

$$I + S - \rho \ln(S) = c = I_0 + S_0 - \rho \ln(S_0) \quad (1.31)$$

tenendo conto delle condizioni iniziali.

Un'altra domanda importante a cui cercare di dare una risposta è la seguente: quanto sarà grave l'epidemia?

Utilizzando ora la (1.26), cerco il massimo di I , cioè I_{max} da:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= rSI - aI = 0 \\ \Rightarrow rSI &= aI \\ \Rightarrow S &= \frac{a}{r} = \rho \end{aligned}$$

Cioè:

$$\begin{aligned} I_{max} &= -S + \rho \ln(S) + I_0 + S_0 - \rho \ln(S_0) \\ &= -\rho + \rho \ln(\rho) + N - \rho \ln(S_0) \\ &= N - \rho + \rho \ln\left(\frac{\rho}{S_0}\right) \end{aligned}$$

dove $N = N_0$, come si è dimostrato sopra.

Ciò mostra che per ogni valore di I_0 e $S_0 > \rho$, $I(t)$ aumenta variando tra I_0 e I_{max} e l'epidemia

si presenta. Non è però una grave epidemia, come nel caso in cui I_0 risulti vicino a I_{max} .
Un altro risultato interessante si può osservare andando a dividere (1.25) per (1.27):

$$\frac{dS}{dR} = -\frac{S}{\rho}$$

Integrando questa equazione differenziale del primo ordine, per separazione di variabili, si ha:

$$\begin{aligned} \int \frac{dS}{S} &= \int -\frac{dR}{\rho} \\ \Rightarrow \ln(S) &= -\frac{R}{\rho} + c \quad \text{con} \quad c = \ln(S_0) \quad (R(0) = 0) \\ \Rightarrow S &= S_0 \exp\left[-\frac{R}{\rho}\right] \end{aligned} \tag{1.32}$$

Da qui, effettuando una sottostima, ottengo:

$$\begin{aligned} S &= S_0 \exp\left[-\frac{R}{\rho}\right] \geq S_0 \exp\left[-\frac{N}{\rho}\right] > 0 \\ \Rightarrow 0 &< S(\infty) < N. \end{aligned}$$

Dal momento che $I(\infty) = 0$, allora $R(\infty) = N - S(\infty)$, quindi utilizzando (1.32) posso scrivere:

$$S(\infty) = S_0 \exp\left[-\frac{R(\infty)}{\rho}\right] = S_0 \exp\left[-\frac{N - S(\infty)}{\rho}\right].$$

Cerco ora di calcolare il numero totale di suscettibili che hanno contratto la malattia durante tutto il corso dell'epidemia. Questo valore è dato da:

$$R(\infty) = N - S(\infty) = I_0 + S_0 - S(\infty).$$

Il fatto che $I(t) \rightarrow 0$ e $S(t) \rightarrow S(\infty) > 0$, significa che l'epidemia termina per mancanza di individui infetti e non per la mancanza di individui suscettibili; cioè l'epidemia non aumenta illimitatamente infettando tutta la popolazione, bensì ci sarà sempre un gruppo di individui suscettibili che non contrarrà la malattia.

Per una data malattia, il "tasso relativo di rimozione" ρ varia con la popolazione e potrebbe determinare il presentarsi di una certa epidemia in una popolazione e non in un'altra. Per esempio, se la densità di individui suscettibili è alta (cioè S_0 grande) ed il tasso di rimozione a è piccolo (dovuto per esempio alla mancanza di cure mediche), allora potrebbe essere probabile il presentarsi di una epidemia; al contrario, se a è molto grande e l'epidemia è grave e uccide

gli infetti velocemente, allora si potrebbe ritenere che non si presenti.

Nella realtà, per quanto riguarda le epidemie, è difficile comprendere quanti nuovi individui infetti ci sono ogni giorno. Solo gli individui rimossi possono essere contati, cerco quindi il numero di rimossi per unità di tempo utilizzando le equazioni (1.27) e (1.32):

$$\frac{dR}{dt} = aI = a(N - R - S) = a \left(N - R - S_0 \exp \left[-\frac{R}{\rho} \right] \right) \quad (1.33)$$

Conoscendo i parametri è facile calcolare il valore R . Di solito, però, nella realtà, raramente si hanno i valori di questi parametri. Ma assumendo che $\frac{R}{\rho}$ sia piccolo, si può ridurre il numero di parametri da conoscere andando a sostituire al posto della funzione esponenziale la serie di potenze ad essa equivalente:

$$\begin{aligned} S &= S_0 \exp \left[-\frac{R}{\rho} \right] = S_0 \sum_{k=0}^{\infty} \left[-\frac{R}{\rho} \right]^k \cdot \frac{1}{k!} = \\ &= -S_0 \left(1 - \frac{R}{\rho} + \frac{R^2}{2\rho^2} \right) = \\ &= -S_0 + \frac{S_0 R}{\rho} - \frac{S_0 R^2}{2\rho^2} \end{aligned}$$

Andando a sostituire in (1.33):

$$\frac{dR}{dt} = a \left[N - S_0 + \left(\frac{S_0}{\rho} - 1 \right) R - \frac{S_0 R^2}{2\rho^2} \right]$$

Integrando la seguente equazione ottengo:

$$R(t) = \frac{\rho^2}{S_0} \left[\left(\frac{S_0}{\rho} - 1 \right) + \alpha \tanh \left(\frac{\alpha at}{2} - \Phi \right) \right]$$

con:

$$\begin{aligned} \alpha &= \left[\left(\frac{S_0}{\rho} - 1 \right)^2 + \frac{2S_0(N - S_0)}{\rho^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \Phi &= \frac{\tanh^{-1} \left(\frac{S_0}{\rho} - 1 \right)}{\alpha}. \end{aligned}$$

Così ottengo:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{a\alpha^2\rho^2}{2S_0} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\alpha at}{2} - \Phi \right),$$

in cui compaiono solo tre parametri: $\frac{a\alpha^2\rho^2}{2S_0}$, $a\alpha$ e Φ .

Il modello appena analizzato è il più semplice di tutti; se infatti l'epidemia ha una lunga

durata bisogna effettuare delle modifiche al *modello SIR*. Per esempio si possono includere nell'equazione degli individui suscettibili i termini di "nascita" e "morte" ed il termine di "morte naturale" nelle equazioni degli infetti e dei rimossi. Nel caso in cui l'epidemia abbia un periodo di incubazione, nel quale i suscettibili sono infetti ma non manifestano ancora l'infezione, si può introdurre una quarta classe nella quale i suscettibili rimangono per un certo tempo prima di entrare nella classe I . Ci sono molte modifiche (sia sperimentali che matematiche) che si possono effettuare nei modelli che descrivono le epidemie e queste dipendono fortemente dall'epidemia stessa.

Capitolo 2

Modello generale di diffusione dell'Hantavirus

2.1 Modello di diffusione e reazione a due popolazioni

In questo capitolo, riferendomi all'articolo di G. Abramson e altri [4], analizzo la generalizzazione spaziale del modello descritto dal sistema (1.11) del Capitolo 1, mettendo in evidenza anche gli aspetti diffusivi, tipici dell'approccio continuo. Sono comunque valide le notazioni introdotte precedentemente.

Per ottenere una descrizione locale adeguata alla popolazione dei topi introduco nel modello le quantità I , S e K come funzioni anche della variabile spaziale \vec{x} .

Lavoro su domini fissi (nel tempo) e (spazialmente) illimitati generalmente e con campi regolari, denotando con $(\vec{x}(t), t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), t)$, $t \geq 0$, le coordinate spazio-tempo di tale descrizione. Per non appesantire la notazione ometterò tale dipendenza.

I topi del gene *Peromyscus* sono conosciuti per la loro tendenza ad avere una casa durante la loro vita da adulti, spostandola occasionalmente in località vicine se queste sono libere. Pertanto un adeguato modello che possa descrivere questo meccanismo di trasporto per i topi è quello diffusivo.

Utilizzerò due differenti coefficienti di diffusione, uno per i suscettibili ed uno per gli infetti; in seguito, per semplicità, sceglierò entrambe le quantità uguali.

Il modello può essere descritto dalle seguenti leggi di bilancio in forma locale:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = D_S \Delta S + f(S, I) \\ \frac{\partial I}{\partial t} = D_I \Delta I + g(S, I), \end{cases} \quad (2.1)$$

dove D_S e D_I sono i coefficienti di diffusione (positivi e costanti) delle due classi di topi, mentre $f(S, I)$ e $g(S, I)$ sono i termini di reazione del modello che fra l'altro contengono la specifica forma della dipendenza spaziale della capacità di trasporto $K(\vec{x})$.

Si può sempre definire per il sistema (2.1) un problema ai valori iniziali (assegnando S e I a $t = 0$) e al contorno, di Dirichlet e/o di Neumann, nel caso di domini limitati spazialmente.

L'integrazione del sistema alle derivate parziali (2.1) parabolico e semilineare è impossibile; anche la ricerca di soluzioni stazionarie, per una arbitraria funzione $K(\vec{x})$, è ora analiticamente impossibile. Si possono però anticipare alcune osservazioni generali riguardanti la stabilità lineare delle soluzioni stazionarie del modello.

Suppongo, quindi, che $s^* := (S^*(\vec{x}, t), I^*(\vec{x}, t))$ sia una soluzione stazionaria del sistema (2.1), cioè:

$$\begin{cases} \frac{\partial S^*}{\partial t} = 0 \Rightarrow \Delta S^* = -\frac{f(S^*, I^*)}{D_S} \\ \frac{\partial I^*}{\partial t} = 0 \Rightarrow \Delta I^* = -\frac{g(S^*, I^*)}{D_I} \end{cases} \quad (2.2)$$

Creo una perturbazione istantanea intorno allo stato di equilibrio s^* , che denoto (sempre) con $\delta_s := (\delta_S, \delta_I)$; cioè mi creo la soluzione perturbata:

$$s^* + \delta_s(\vec{x}, t).$$

Inserendo la perturbazione nel sistema (2.1), ricavo il sistema perturbato:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(S^* + \delta_S) = f(S^* + \delta_S, I^* + \delta_I) + D_S \Delta(S^* + \delta_S) \\ \frac{\partial}{\partial t}(I^* + \delta_I) = g(S^* + \delta_S, I^* + \delta_I) + D_I \Delta(I^* + \delta_I) \end{cases} \quad (2.3)$$

che, tenendo conto della stazionarietà di S^* e I^* , si riduce alla forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta_S}{\partial t} = f(S^* + \delta_S, I^* + \delta_I) + D_S \Delta S^* + D_S \Delta \delta_S \\ \frac{\partial \delta_I}{\partial t} = g(S^* + \delta_S, I^* + \delta_I) + D_I \Delta I^* + D_I \Delta \delta_I \end{cases} \quad (2.4)$$

Approssimo $f(S^* + \delta_S, I^* + \delta_I)$ e $g(S^* + \delta_S, I^* + \delta_I)$ tramite i loro sviluppi di Taylor intorno a (S^*, I^*) troncati al primo ordine; cioè:

$$\begin{aligned} f(S^* + \delta_S, I^* + \delta_I) &\simeq f(S^*, I^*) + \frac{\partial f}{\partial S}(S^*, I^*)\delta_S + \frac{\partial f}{\partial I}(S^*, I^*)\delta_I \\ g(S^* + \delta_S, I^* + \delta_I) &\simeq g(S^*, I^*) + \frac{\partial g}{\partial S}(S^*, I^*)\delta_S + \frac{\partial g}{\partial I}(S^*, I^*)\delta_I \end{aligned}$$

Inserendo queste forme approssimate nel sistema (2.4) ottengo il sistema linearizzato per le perturbazioni δ_S e δ_I :

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta_S}{\partial t} = f(S^*, I^*) + \frac{\partial f}{\partial S}(S^*, I^*)\delta_S + \frac{\partial f}{\partial I}(S^*, I^*)\delta_I + D_S \Delta S^* + D_S \Delta \delta_S \\ \frac{\partial \delta_I}{\partial t} = g(S^*, I^*) + \frac{\partial g}{\partial S}(S^*, I^*)\delta_S + \frac{\partial g}{\partial I}(S^*, I^*)\delta_I + D_I \Delta I^* + D_I \Delta \delta_I \end{cases} \quad (2.5)$$

D'altra parte, posso tener conto delle seguenti condizioni di stazionarietà:

$$f(S^*, I^*) + D_S \Delta S^* = 0$$

$$g(S^*, I^*) + D_I \Delta I^* = 0,$$

per cui il sistema (2.5) si riduce alla seguente forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta_S}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial S}(S^*, I^*)\delta_S + \frac{\partial f}{\partial I}(S^*, I^*)\delta_I + D_S \Delta \delta_S \\ \frac{\partial \delta_I}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial S}(S^*, I^*)\delta_S + \frac{\partial g}{\partial I}(S^*, I^*)\delta_I + D_I \Delta \delta_I \end{cases} \quad (2.6)$$

Denoto ora con:

$$\vec{\delta}_s := \begin{pmatrix} \delta_S \\ \delta_I \end{pmatrix} \quad DF(\vec{x}) := A(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial S} & \frac{\partial f}{\partial I} \\ \frac{\partial g}{\partial S} & \frac{\partial g}{\partial I} \end{pmatrix}_{\{S^*, I^*\}}$$

Riscrivo quindi il sistema (2.6) in forma compatta utilizzando le notazioni introdotte:

$$\frac{\partial \vec{\delta}_s}{\partial t}(\vec{x}, t) = A(\vec{x})\vec{\delta}_s(\vec{x}, t) + D\Delta \vec{\delta}_s(\vec{x}, t), \quad (2.7)$$

con D matrice diagonale 2×2 dei coefficienti di diffusione detta Matrice di diffusione ed $A(\vec{x})$ avente il ruolo di matrice di stabilità, anche se non è ora costante. Il sistema (2.7) descrive il comportamento spazio-tempo delle piccole perturbazioni $\vec{\delta}_s = \vec{\delta}_s(\vec{x}, t)$ attorno ad una soluzione di stazionarietà.

Osservazione 2.1.

Se invece si cercassero soluzioni stazionarie ed omogenee, S^* e I^* sarebbero costanti anche nello spazio e la matrice $A(\vec{x})$ risulterebbe una matrice costante, ricoprendo il ruolo della Matrice di Stabilità di Lyapunov. Si possono pertanto confrontare i risultati con quelli ottenuti per il sistema dinamico (1.20) nell'approccio discreto.

Per il sistema alle derivate parziali, parabolico, lineare e omogeneo (2.7), cerco ora soluzioni del tipo *onde dispersive*, cioè:

$$\vec{0} \neq \vec{\delta}_s(\vec{x}, t) = \vec{s}_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)},$$

dove \vec{k} ($k^2 > 0$) è chiamato vettore d'onda (sempre reale), i denota l'unità immaginaria e ω , reale o complesso, è detto frequenza o pulsazione. A volte è opportuno introdurre il parametro $\sigma = -i\omega$, detto parametro di crescita o di stabilità. L'ampiezza \vec{s}_1 si suppone costante.

Osservazione 2.2.

Per soluzioni di tipo *onde dispersive* valgono le seguenti identità:

1. $\frac{\partial \vec{\delta}_s}{\partial t} = -i\omega \vec{\delta}_s$
2. $\Delta \vec{\delta}_s = -k^2 \vec{\delta}_s$

Riscrivo il sistema (2.7) sostituendo $\vec{\delta}_s(\vec{x}, t)$ con $\vec{s}_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$ e utilizzando le precedenti identità; si ha:

$$[\sigma II - A(\vec{x}) + k^2 D] \vec{s}_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} = \vec{0}, \quad \text{con} \quad -i\omega := \sigma, \quad (2.8)$$

dove II è la matrice identità. Semplificando l'esponenziale, si scrive anche:

$$[\sigma II - A(\vec{x}) + k^2 D] \vec{s}_1 = \vec{0}. \quad (2.9)$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché (2.9) ammetta soluzione $\vec{s}_1 \neq \vec{0}$ è che:

$$\det[\sigma II - A(\vec{x}) + k^2 D] = 0$$

Nel caso in cui K dipenda dalla variabile spaziale \vec{x} non è però possibile procedere analiticamente nella ricerca degli autovalori, senza conoscere gli stati di equilibrio; si deve quindi passare all'indagine di tipo numerico per risolvere il problema agli autovalori. Tuttavia, in un modello semplificato in cui K non dipende dalla variabile spaziale, è possibile effettuare uno studio della stabilità degli stati stazionari ed omogenei. Si ottengono i due stati stazionari ricavati nel caso del modello dipendente solo dalla variabile temporale:

$$\begin{cases} S^* = K(b - c) \\ I^* = 0 \end{cases}$$

oppure:

$$\begin{cases} S^* = \frac{b}{a} \\ I^* = -\frac{b}{a} + (b - c)K \end{cases}$$

L'analisi è analoga a quella studiata precedentemente. Infatti, considero lo stato di equilibrio:

$$\begin{cases} S^* = (b - c)K \\ I^* = 0 \end{cases}$$

Gli autovalori della matrice di stabilità associati a questo stato di equilibrio risultano:

$$\lambda_1 = c - b \quad \lambda_2 = -b + aK(b - c)$$

Affinché si abbia una soluzione positiva, cioè $S^* > 0$, deve valere la condizione $b > c$; in tal caso $\lambda_1 < 0$. Inoltre $\lambda_2 < 0$ se $K < K_c = \frac{b}{a(b-c)}$ che è la stessa condizione di stabilità trovata precedentemente nel caso dipendente dalla sola variabile temporale. Ancora, quando lo stato diventa instabile, la perturbazione che cresce più velocemente (cioè con maggiore λ) si ha con $k^2 = 0$, ovvero la perturbazione omogenea. Sotto queste condizioni la perturbazione potrebbe portare il sistema verso un altro stato costante omogeneo in cui è presente una popolazione infetta.

La situazione più interessante e più realistica si ha quando la capacità di trasporto K dipende anche dalla variabile spaziale (cioè dipende dai differenti ambienti in cui ci si trova). Suppongo per esempio che in una certa regione limitata di un territorio sia presente un alto valore della capacità di trasporto e che la popolazione di topi non infetti occupi l'intero territorio con una densità non omogenea. Per valori del coefficiente di diffusione piccoli e moderati, la popolazione infetta sopravvive solo in regioni in cui c'è un alto valore di K ed è estinta al di fuori di esse. Questi ambienti isolati, detti "rifugi", mantengono il virus come fossero dei "serbatoi" e sono gli ambienti con il più alto rischio di contagio per gli umani. Quando le condizioni ambientali variano, è da questi luoghi che il virus inizia a diffondersi.

2.2 Soluzione di tipo Travelling Waves

Quando le condizioni ambientali variano spazialmente, ci si chiede come lo stato infetto evolva dai "rifugi", ritraendosi o invadendo regioni non infette.

Per cercare di rispondere a questo problema, ricerco un particolare tipo di soluzione delle equazioni del sistema (2.1), separate nelle dipendenze spazio-tempo, con un comportamento fisicamente analogo ad un'onda. Entrambe le equazioni di (2.1) sono, infatti, equazioni del tipo di Fisher, in versione $1D$; è perciò possibile ricercare soluzioni del tipo *Travelling Waves*, che richiedono proprio la uni-dimensionalità del Modello. Quindi, per questo tipo di studio, riferendomi all'articolo di G. Abramson ed altri [14], suppongo di lavorare in spazi $1D$, denotando

con x la variabile spaziale e con $t \geq 0$ quella temporale. Non ci sono ragioni (matematiche o fisiche) di supporre a priori che le due onde, quella dei *suscettibili* e quella degli *infetti*, viaggino con la stessa velocità.

Notazione 2.1.

Denoto con:

- v_S la velocità dell'onda relativa ai suscettibili;
- v_I la velocità dell'onda relativa agli infetti;
- $z_1 = x - v_S t$;
- $z_2 = x - v_I t$.

con $v_S, v_I > 0$.

Cerco quindi soluzioni regolari del tipo:

$$S(x, t) = S(x - v_S t) = S(z_1),$$

$$I(x, t) = I(x - v_I t) = I(z_2).$$

con S e I di classe C^2 rispetto a z_1 e a z_2 rispettivamente.

Per semplicità da adesso in poi ometto la dipendenza da z_1 e z_2 .

Sostituisco (S, I) nel sistema (2.1) ed ottengo facilmente un sistema di equazioni differenziali e ordinarie del secondo ordine :

$$\begin{cases} D \frac{d^2 S}{dz_1^2} + v_S \frac{dS}{dz_1} + f(S, I) = 0 \\ D \frac{d^2 I}{dz_2^2} + v_I \frac{dI}{dz_2} + g(S, I) = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

dove f, g sono i termini di reazione:

$$f = b(S + I) - cS - \frac{S(S + I)}{K} - aSI,$$

$$g = -cI - \frac{I(S + I)}{K} + aSI.$$

Ci sono due interessanti scenari per quanto riguarda queste onde; nel primo, supponendo che il sistema si trovi inizialmente in uno stato in cui $K < K_c$, la popolazione di topi è costituita solo da quelli non infetti nello stato di equilibrio stabile. Suppongo che questa regione sia in contatto

con un "rifugio"; se le condizioni ambientali dovessero variare e l'intera regione si dovesse ritrovare ad un valore della capacità di trasporto $K > K_c$, la popolazione dei topi suscettibili evolverebbe verso un nuovo equilibrio, mentre l'onda associata ai topi infetti avanzerebbe dal "rifugio" invadendo la popolazione suscettibile. È possibile ricavare una stima di tale velocità richiedendo che la densità dei topi infetti non oscilli al di sotto dello zero. Questo equilibrio instabile è dato dallo stato $(S^* = K(b - c), I^* = 0)$. Ricorro gli autovalori associati a questo stato riducendo il sistema (2.10) in due sistemi formati da due equazioni del primo ordine definendo formalmente:

$$\begin{aligned}\frac{S(z_1)}{dz_1} &:= S' = V, \\ \frac{I(z_2)}{dz_2} &:= I' = U.\end{aligned}$$

Otengo, quindi, i seguenti due sistemi:

$$\begin{cases} S' = V \\ V' = S'' = -\frac{v_S}{D}V - \frac{f(S,I)}{D} \end{cases} \quad \begin{cases} I' = U \\ U' = I'' = -\frac{v_I}{D}U - \frac{g(S,I)}{D} \end{cases} \quad (2.11)$$

Scrivo la matrice Jacobiana associata ai due sistemi:

$$\begin{aligned}J_1(S, V) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{b}{D} + \frac{c}{D} + \frac{2S}{DK} + \frac{I}{DK} + \frac{aI}{D} & -\frac{v_S}{D} \end{pmatrix} \\ J_2(I, U) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{c}{D} + \frac{S}{DK} + \frac{2I}{DK} - \frac{aS}{D} & -\frac{v_I}{D} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Calcolo gli autovalori nei punti $(S^*, 0)$ e $(I^*, 0)$:

$$\begin{aligned}J_1(K(b - c), 0) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{b}{D} - \frac{c}{D} & -\frac{v_S}{D} \end{pmatrix} \\ J_2(0, 0) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{b - aK(b - c)}{D} & -\frac{v_I}{D} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Otengo così i seguenti autovalori:

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \frac{-v_S \pm \sqrt{v_S^2 + 4D(b - c)}}{2D}, \\ \lambda_{3,4} &= \frac{-v_I \pm \sqrt{v_I^2 + 4D[b - aK(b - c)]}}{2D}.\end{aligned}$$

La richiesta che $I(z_2)$ non oscilli al di sotto del valore zero impone una restrizione sul radicale presente in $\lambda_{3,4}$ da cui trovo una stima della velocità dell'onda viaggiante:

$$\begin{aligned} v_I^2 + 4D[b - aK(b - c)] &\geq 0 \\ \Rightarrow v_I^2 - 4D[-b + aK(b - c)] &\geq 0 \\ \Rightarrow v_I &\leq -2\sqrt{D[-b + aK(b - c)]} \quad \text{oppure} \quad v_I \geq 2\sqrt{D[-b + aK(b - c)]} \end{aligned}$$

Ma poiché $v_I > 0$, ho che:

$$v_I \geq 2\sqrt{D[-b + aK(b - c)]}. \quad (2.12)$$

Il secondo scenario interessante corrisponde al sistema inizialmente privo sia di topi suscettibili, che di topi infetti. Questa situazione è sempre instabile, ma di certo è una possibilità biologica che può verificarsi. Considero un sistema tale per cui $K > K_c$ e con $(S = 0, I = 0)$ in quasi tutta la regione, ma in contatto con un rifugio in equilibrio. In tale caso si sviluppa l'onda di entrambe le popolazioni di topi che invade la regione vuota. Questa onda sarà composta da due fronti, uno suscettibile e uno infetto rispettivamente, con un ritardo di quest'ultimo rispetto al primo. L'onda principale si propaga nell'equilibrio nullo ($S^* = 0, I^* = 0$). Calcolo quindi:

$$\begin{aligned} J_1(0, 0) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{b}{D} + \frac{c}{D} & -\frac{v_S}{D} \end{pmatrix} \\ J_2(0, 0) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{c}{D} & -\frac{v_I}{D} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Otengo così i seguenti autovalori:

$$\begin{aligned} \mu_{1,2} &= \frac{-v_S \pm \sqrt{v_S^2 - 4D(b - c)}}{2D}, \\ \mu_{3,4} &= \frac{-v_I \pm \sqrt{v_I^2 + 4Dc}}{2D}. \end{aligned}$$

In questa situazione, assumo che $S(z_1)$ non oscilli al di sotto del valore zero; perciò impongo una restrizione sul radicale degli autovalori $\mu_{3,4}$:

$$\begin{aligned} v_S^2 - 4D(b - c) &\geq 0 \\ \Rightarrow v_S &\leq -2\sqrt{D(b - c)} \quad \text{oppure} \quad v_S \geq 2\sqrt{D(b - c)}. \end{aligned}$$

Ma poiché $v_S > 0$, ottengo:

$$v_S \geq 2\sqrt{D(b-c)}. \quad (2.13)$$

Il secondo fronte, che inizia ad estendersi quando parte della popolazione quasi stabile dei suscettibili è diventata infetta, si sviluppa dallo stato di equilibrio ($S^* = K(b-c)$, $I^* = 0$), come nello scenario precedente. Si ottiene per cui una velocità analoga a quella precedente:

$$v_I \geq 2\sqrt{D[-b + aK(b-c)]}.$$

A differenza di v_S , questa dipende dal tasso di contagio a e dalla capacità di trasporto K . Inoltre il ritardo tra i due fronti esiste anche quando tale effetto non viene considerato esplicitamente nel sistema dinamico (come il tempo di incubazione per esempio). Le disuguaglianze (2.12) e (2.13) forniscono solo una sottostima della velocità di propagazione dei due fronti.

La diversa dipendenza funzionale di v_S e v_I dai parametri presenti nelle equazioni (2.12) e (2.13) indica che sono possibili due regimi. Infatti, quando $v_I < v_S$ il fronte degli infetti ritarda dietro a quello dei suscettibili con un ritardo ΔT che aumenta linearmente col tempo:

$$\Delta T = (v_S - v_I)t.$$

Dalle equazioni (2.12) e (2.13), cerco i valori di K per cui si ha $v_I < v_S$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2\sqrt{D(b-c)} &\geq 2\sqrt{D[-b + aK(b-c)]} \\ \Rightarrow D(b-c) &\geq D[-b + aK(b-c)] \\ \Rightarrow (b-c) + b &\geq aK(b-c) \\ \Rightarrow K &\leq \frac{2b-c}{a(b-c)}. \end{aligned}$$

Denoto con $K_0 := \frac{2b-c}{a(b-c)}$ la nuova soglia critica della capacità di trasporto. Quando $K_c < K < K_0$ le velocità v_I e v_S soddisfano $v_I < v_S$; quando $K = K_0$, il ritardo diventa costante. Per valori di K maggiori di K_0 le velocità v_I e v_S soddisfano $v_I > v_S$. Questo regime è chiaramente non fisico in una situazione stazionaria, dal momento che il fronte dei suscettibili necessariamente dovrebbe precedere quello degli infetti.

Quindi, suppongo ora $v_S = v_I = v$ e cerco una espressione analitica che approssimi la forma del fronte e il ritardo ΔT nello stato stazionario utilizzando una linearizzazione delle equazioni del sistema (2.10). I dettagli sono contenuti in [14]. Il risultato principale che si ottiene è la seguente espressione per il ritardo:

$$\Delta T = \frac{\sqrt{D}}{i(\sqrt{(b-c)a(K-K_0)})} \log(\omega_1, \omega_2);$$

dove ω_1 e ω_2 sono numeri complessi di modulo unitario che dipendono da a, b e c , per cui il logaritmo è effettivamente due volte la differenza di fase che intercorre tra di essi. Quando $K \rightarrow K_0^+$, gli argomenti di ω_1 e ω_2 tendono rispettivamente a π e 0 , perciò il comportamento principale di ΔT risulta:

$$\Delta T = \frac{\sqrt{D}}{(\sqrt{(b-c)a(K-K_0)})}.$$

In conclusione, quindi, ho trovato che quando una regione libera da topi è in contatto con una regione infetta in uno stato di equilibrio, due onde si propagano nella regione vuota. La prima è l'onda dei topi suscettibili e la seconda è quella dei topi infetti che si propaga dietro ad esse con un certo ritardo. Esistono due regimi di propagazione controllati dal parametro ambientale K . Se $K_c < K < K_0$ il ritardo tra i due fronti aumenta linearmente con il tempo. Se $K > K_0$, i due fronti si propagano alla stessa velocità ed il ritardo dipende dalla differenza: $K - K_0$.

Capitolo 3

Modello iperbolico per il contagio dell'Hantavirus

3.1 Modello di diffusione e reazione iperbolico

Nel capitolo precedente ho analizzato il modello di diffusione e reazione del contagio dell'Hantavirus, facendo riferimento agli articoli [4] e [14] di G. Abramson e altri, descritto dal sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}_S = bN - cS - \frac{SN}{K} - aSI \\ \frac{\partial I}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}_I = -cI - \frac{IN}{K} + aSI, \end{cases} \quad (3.1)$$

dove $S(\vec{x}, t)$ e $I(\vec{x}, t)$ sono le densità rispettivamente della popolazione dei topi suscettibili e di quella dei topi infetti, mentre $N = S + I$ è la densità della popolazione totale dei topi. Le equazioni costitutive per i vettori flussi sono date dalle seguenti relazioni di tipo flusso gradiente:

$$\begin{cases} \vec{J}_S = -D\nabla S \\ \vec{J}_I = -D\nabla I \end{cases} \quad (3.2)$$

dove D , che per semplicità suppongo sia lo stesso per entrambe le popolazioni e costante, è il coefficiente di diffusione che caratterizza il meccanismo di movimento diffusivo dei topi.

Dal sistema (3.1) è possibile ricavare l'equazione evolutiva per l'intera popolazione:

$$\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}_N = (b - c - \frac{N}{K})N \\ \vec{J}_N = \vec{J}_S + \vec{J}_I = -D\nabla N \end{cases} \quad (3.3)$$

dove \vec{J}_N rappresenta il flusso dell'intera popolazione.

Per semplicità suppongo di lavorare in regioni regolari, fisse nel tempo, limitandomi al caso $1D$, utilizzando sempre le due variabili reali (x, t) . Per non appesantire la notazione, ometterò sempre la dipendenza da (x, t) .

L'idea che propongo ora, seguendo l'articolo di E.Barbera, C.Currò, G.Valenti, *A hyperbolic reaction-diffusion model for the hantavirus infection* ([10]), è di lavorare con la densità totale N e con una delle densità componenti, per esempio I .

Considero le due equazioni di diffusione e reazione per N ed I :

$$\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial J_N}{\partial x} = (b - c - \frac{N}{K})N \equiv h(N) \\ \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial J_I}{\partial x} = \left[\left(a - \frac{1}{K} \right) N - aI - c \right] I \equiv g(N, I) \end{cases} \quad (3.4)$$

Seguendo l'idea di base di [7], i flussi dissipativi J_N e J_I sono considerati come nuove variabili di campo che soddisfano le equazioni generali di trasporto della forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial J_N}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} = G \\ \frac{\partial J_I}{\partial t} + \frac{\partial T_I}{\partial x} = G_I \end{cases} \quad (3.5)$$

dove T, T_I, G e G_I devono essere pensate come funzioni costitutive dell'intero insieme di variabili indipendenti (N, I, J_N, J_I) . Dal momento che sono interessata ad un processo non troppo lontano dall'equilibrio termodinamico caratterizzato da $J_N = J_I = 0$, suppongo che queste funzioni costitutive dipendano linearmente dai flussi dissipativi:

$$\begin{cases} T = \gamma(N, I) + \gamma_1(N, I)J_N + \gamma_2(N, I)J_I \\ G = \delta(N, I) + \delta_1(N, I)J_N + \delta_2(N, I)J_I \\ T_I = \mu(N, I) + \mu_1(N, I)J_N + \mu_2(N, I)J_I \\ G_I = \nu(N, I) + \nu_1(N, I)J_N + \nu_2(N, I)J_I \end{cases} \quad (3.6)$$

Inserendo (3.6)_{1,2} in (3.5)₁ (ometto la dipendenza da (N, I) per non appesantire la notazione) ottengo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_N}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial N} \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial \gamma}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial N} \frac{\partial N}{\partial x} J_N + \frac{\partial \gamma_1}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial x} J_N + \\ + \gamma_1 \frac{\partial J_N}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial N} \frac{\partial N}{\partial x} J_I + \frac{\partial \gamma_2}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial x} J_I + \gamma_2 \frac{\partial J_I}{\partial x} = \\ + \delta + \delta_1 J_N + \delta_2 J_I \end{aligned} \quad (3.7)$$

Riducendo l'equazione nel caso stazionario alla legge di Fick, in versione $1D$, del tipo:

$$J_N = -D \frac{\partial N}{\partial x} \quad (3.8)$$

risulta

$$\begin{cases} \gamma_1 = 0 \\ \gamma_2 = 0 \\ \frac{\partial \gamma}{\partial I} = 0 \Rightarrow \gamma = \gamma(N) \\ \delta = 0 \\ \delta_2 = 0 \\ -\frac{\gamma'}{D} J_N - \delta_1 J_N = 0 \Rightarrow \delta_1 = -\frac{\gamma'}{D} \end{cases} \quad (3.9)$$

Per cui le relazioni (3.6)_{1,2} si riducono:

$$\begin{cases} T = \gamma(N) \\ G = -\frac{\gamma'}{D} J_N \end{cases} \quad (3.10)$$

dove $\gamma' = \frac{\partial \gamma}{\partial N}$.

Analogamente, inserendo (3.6)_{3,4} in (3.5)₂ e riducendo l'equazione risultante alla legge di Fick nel caso stazionario ottengo:

$$\begin{cases} \mu_1 = 0 \\ \mu_2 = 0 \\ \frac{\partial \mu}{\partial N} = 0 \Rightarrow \mu = \mu(I) \\ \nu = 0 \\ \nu_1 = 0 \\ -\frac{\mu'}{D} J_I - \nu_2 J_I = 0 \Rightarrow \nu_2 = -\frac{\mu'}{D} \end{cases} \quad (3.11)$$

Le relazioni (3.6)_{3,4}, quindi, si riducono:

$$\begin{cases} T_I = \mu(I) \\ G_I = -\frac{\mu'}{D} J_I \end{cases} \quad (3.12)$$

dove $\mu' = \frac{\partial \mu}{\partial I}$.

Di conseguenza, le equazioni evolutive (3.5) assumono la seguente forma semplificata:

$$\begin{cases} \frac{\partial J_N}{\partial t} + \gamma' \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{\gamma'}{D} J_N \\ \frac{\partial J_I}{\partial t} + \mu' \frac{\partial I}{\partial x} = -\frac{\mu'}{D} J_I \end{cases} \quad (3.13)$$

Osservo che, denotando con $\tau := \frac{D}{\gamma'}$, l'equazione (3.13)₁ è del tipo *Cattaneo*:

$$\tau \frac{\partial J_N}{\partial t} + J_N = -D \frac{\partial N}{\partial x},$$

con τ che ha il ruolo di *tempo di rilassamento*. Analogamente si può osservare lo stesso utilizzando l'equazione (3.13)₂ (si veda ad esempio *Heat Waves* di B. Straughan, [18]).

Per ottenere delle ulteriori restrizioni per quanto riguarda le funzioni costitutive (3.10) e (3.12) faccio riferimento al Secondo Principio della Termodinamica, nella versione estesa di I. Müller e T. Ruggeri [7], per esempio. Richiedo dunque che esista una funzione (concava) densità di entropia ed un vettore flusso di entropia che denoto rispettivamente con η e Φ , entrambe grandezze costitutive che dipendono dalle variabili di stato (N, I, J_N, J_I) , e che soddisfano il principio di entropia:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \geq 0 \quad (3.14)$$

per tutte le soluzioni di (3.4), (3.13).

Una possibile tecnica da utilizzare affinché sia sempre soddisfatto il principio di entropia consiste nell'introduzione dei moltiplicatori di Lagrange $\Lambda, \Gamma, \xi, \Xi$, che dipendono dall'intero insieme di variabili di stato ([11]):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \Lambda \left(\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial J_N}{\partial x} - h(N) \right) - \Gamma \left(\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial J_I}{\partial x} - g(N, I) \right) + \\ & - \xi \left(\frac{\partial J_N}{\partial t} + \gamma' \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\gamma'}{D} J_N \right) - \Xi \left(\frac{\partial J_I}{\partial t} + \mu' \frac{\partial I}{\partial x} + \frac{\mu'}{D} J_I \right) \geq 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Da questa si ricavano le seguenti relazioni generalizzate di Gibbs:

$$\begin{aligned} d\eta &= \Lambda dN + \Gamma dI + \xi dJ_N + \Xi dJ_I \\ d\Phi &= \xi \gamma' dN + \Xi \mu' dI + \Lambda dJ_N + \Gamma dJ_I \\ \Lambda h(N) + \Gamma g(N, I) - \xi \frac{\gamma'}{D} J_N - \Xi \frac{\mu'}{D} J_I &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Queste portano a:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_1(N) J_N, \quad \Xi = \Xi_1(I) J_I \\ \Lambda &= \Lambda_0(N) + \frac{\xi'_1}{2} J_N^2, \quad \Gamma = \Gamma_0(I) + \frac{\Xi'_1}{2} J_I^2 \\ \Gamma'_0 &= \mu' \Xi_1, \quad \Lambda'_0 = \gamma' \xi_1 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Infine, utilizzando (3.16)_{1,2} e (3.17), la densità di entropia ed il flusso associato sono dati da:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\xi_1}{2} J_N^2 + \frac{\Xi_1}{2} J_I^2 + \eta_0(N, I) \\ \Phi &= \Lambda_0 J_N + \Gamma_0 J_I \end{aligned} \quad (3.18)$$

con

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial N} = \Lambda_0, \quad \frac{\partial \eta_0}{\partial I} = \Gamma_0 \quad (3.19)$$

La condizione di concavità di η rispetto alle variabili di campo porta alle seguenti restrizioni:

$$\begin{aligned} \xi_1 < 0, \quad \Xi_1 < 0 \\ \gamma' > 0, \quad \mu' > 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Pertanto, il sistema alle derivate parziali del primo ordine che descrive l'infezione da Hantavirus dal punto di vista continuo è dato da:

$$\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial J_N}{\partial x} = h(N) \\ \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial J_I}{\partial x} = g(N, I) \\ \frac{\partial J_N}{\partial t} + \gamma' \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{\gamma'}{D} J_N \\ \frac{\partial J_I}{\partial t} + \mu' \frac{\partial I}{\partial x} = -\frac{\mu'}{D} J_I \end{cases} \quad (3.21)$$

Come conseguenza della richiesta della condizione di concavità, si riesce a dimostrare che (3.21) è un sistema del primo ordine nella direzione temporale, simmetrico e iperbolico, generalmente quasilineare, nella funzione incognita (N, I, J_N, J_I) . Sotto l'ipotesi che γ', μ' e D siano costanti, è facile ridursi al seguente sistema di due equazioni alle derivate parziali del secondo ordine semilineari:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} - \frac{\gamma'}{D} \frac{\partial J_N}{\partial x} - \gamma' \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t} h(N) = 0 \\ \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - \frac{\mu'}{D} \frac{\partial J_I}{\partial x} - \mu' \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t} g(N, I) = 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

Può essere opportuno inserire una breve Nota riguardante modelli matematici descritti da una PDE del secondo ordine quasilineare in due variabili indipendenti x e y reali, in relazione al problema della classificazione e al formalismo delle curve caratteristiche con la relativa interpretazione fisica.

Riferendomi ai testi di M. Renardy, R.C. Rogers [2], e di F. John [17], una generica PDE del secondo ordine quasilineare, in due variabili indipendenti x e y , con $y > 0$ che assume ruolo di tempo nei casi evolutivi, si può presentare nella forma seguente:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = d, \quad (3.23)$$

dove la funzione incognita $u(x, y) \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{2+}$, aperto regolare, rappresenta una superficie integrale $z = u(x, y)$; $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ e $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$. Nel caso più generale a, b, c, d possono

dipendere da $(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y))$, in questo caso assumo che siano di classe $C(\Omega', \mathbb{R})$ con $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^5$, aperto e regolare.

Per non appesantire la notazione ometterò la dipendenza da:

$(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y))$.

La parte principale di (3.23) è data da:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} \quad (3.24)$$

La matrice fondamentale associata alla parte principale è la seguente matrice simmetrica:

$$A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -b & -c \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Definisco, quindi, le curve caratteristiche per le equazioni del tipo (3.23).

Una curva γ , con $\gamma \subseteq \Omega$ e descritta dalla forma cartesiana $\Phi(x, y) = 0$, con Φ di classe C^1 , con la richiesta di regolarità $\nabla\Phi \neq \vec{0}$, si definisce *curva caratteristica* per (3.23) se e solo se in ogni suo punto P_γ è soddisfatta la condizione seguente:

$$(-A)\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi = 0 \quad (3.26)$$

con

$$-A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Ricordando che $\nabla\Phi = (\Phi_x, \Phi_y) \neq \vec{0}$, ottengo che γ è curva caratteristica se e solo se è soddisfatta l'equazione:

$$a\Phi_x^2 + 2b\Phi_x\Phi_y + c\Phi_y^2 = 0. \quad (3.28)$$

detta equazione caratteristica.

Osservazione 3.1.

Si osserva che da $d\Phi(x, y) = 0$ segue:

$$\Phi_x dx + \Phi_y dy = 0 \quad \forall(x, y). \quad (3.29)$$

Supponendo dunque $\Phi_x \neq 0$, da (3.28) si ha:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\Phi_y}{\Phi_x}. \quad (3.30)$$

dove, se y assume il ruolo di tempo, fisicamente $\frac{dx}{dy}$ rappresenta dimensionalmente una velocità.

Sostituendo (3.30) in (3.28), affermo che γ è curva caratteristica se e solo se:

$$c\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - 2b\frac{dx}{dy} + a = 0. \quad (3.31)$$

Analogamente, nel caso $\Phi_y \neq 0$, si può lavorare con $\frac{dy}{dx}$.

Matematicamente, (3.31) è una equazione algebrica di secondo grado, a coefficienti reali, che ammette la seguente formula risolutiva:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{c}, \quad c \neq 0, \quad (3.32)$$

dove $\Delta := b^2 - ac$.

Quindi, è possibile effettuare una classificazione delle PDE del secondo ordine connessa agli autovalori della matrice A ed al segno di Δ ; infatti:

- i. se $\Delta > 0$, allora $\det A = ac - b^2 = -\Delta < 0$ ed essendo A simmetrica ottengo che ha un autovalore positivo ed uno negativo, cioè è sempre indefinita di segno; in questo caso l'equazione (3.23) si classifica *iperbolica*. Dalla condizione $\Delta > 0$ si ha poi che l'equazione (3.31) ammette due soluzioni reali e distinte:

$$\frac{dx}{dy} = \Gamma^+ \quad \text{e} \quad \frac{dx}{dy} = \Gamma^- \quad (3.33)$$

che danno luogo a due equazioni differenziali ordinarie del primo ordine; integrandole (teoricamente) ottengo due famiglie ad un parametro di curve caratteristiche reali e distinte. In questo caso, se y è il tempo, le curve caratteristiche individuate dalla (3.33) si possono interpretare come onde di discontinuità del secondo ordine o onde iperboliche che si muovono con le velocità non costanti Γ^\pm .

- ii. se $\Delta = 0$, allora $\det A = 0$, quindi A risulta singolare e in tal caso l'equazione (3.23) si classifica *parabolica*. L'equazione (3.31) ammette solo una soluzione $\frac{dx}{dy} = \frac{b}{c}$. Per cui il modello parabolico è caratterizzato da una sola famiglia di curve caratteristiche reali ad un parametro.
- iii. se $\Delta < 0$, allora $\det A > 0$, cioè gli autovalori della matrice A hanno lo stesso segno; in questo caso A è definita in segno e l'equazione (3.23) si classifica *ellittica*. Dalla condizione $\Delta < 0$, si ha che (3.31) ha soluzioni complesse; per cui il modello ellittico non ammette alcuna famiglia di curve caratteristiche reali.

I modelli parabolici e iperboliche sono modelli evolutivi $1D$, mentre il modello ellittico è stazionario ed è $2D$.

Osservazione 3.2.

Supponendo che γ sia scritta in termini parametrici, con parametro $s \in J \subset \mathbb{R}$, cioè:

$$\gamma : \begin{cases} x = f(s) \\ y = g(s) \end{cases} \quad (3.34)$$

con $f, g \in C^1(J, \mathbb{R})$ e tale che $f'(s)^2 + g'(s)^2 > 0$ per ogni $s \in J$, posso passare dalla forma parametrica a quella cartesiana:

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = f'(s) \\ \frac{dy}{ds} = g'(s) \end{cases} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{f'(s)}{g'(s)} \quad (3.35)$$

In questo caso, $\gamma(s)$ è curva caratteristica per (3.23) se e solo se:

$$ag'(s)^2 - 2bf'(s)g'(s) + cf'(s)^2 = 0. \quad (3.36)$$

La relazione (3.36) risulta dall'annullamento del seguente determinante:

$$D = \begin{vmatrix} a & 2b & c \\ f'(s) & g'(s) & 0 \\ 0 & f'(s) & g'(s) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.37)$$

Per cui γ è curva caratteristica per (3.23) se e solo se vale la relazione (3.36), cioè se e solo se $D = 0$: questa caratterizzazione delle curve caratteristiche è strettamente connessa con la definizione di problema di Cauchy per la generale PDE del secondo ordine (3.23).

L'attribuzione di un problema di Cauchy su una curva $\gamma(s)$ che non sia curva caratteristica (cioè $ag'(s)^2 - 2bf'(s)g'(s) + cf'(s)^2 \neq 0$) permette di affrontare il problema dell'esistenza e unicità (locale) per l'equazione (3.23), sotto opportune richieste di regolarità per i coefficienti a, b, c, d .

Dopo questa breve nota, ritorno al sistema (3.22). Lavorando con questo, si ha che può essere studiato assegnando condizioni iniziali per i campi N e I , e per le loro derivate temporali prime $\frac{\partial N}{\partial t}$ e $\frac{\partial I}{\partial t}$; naturalmente se il dominio è spazialmente limitato, cioè se x sta in un intervallo dell'asse reale, bisogna aggiungere condizioni al bordo di Dirichlet o di Neumann (omogenee o no) per N e I agli estremi dell'intervallo.

Nel caso del modello dato dal sistema (3.22), le parti principali sono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} - \gamma' \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - \mu' \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (3.38)$$

le cui matrici fondamentali associate risultano essere:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \gamma' & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} \mu' & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

Osservo che sono indefinite di segno, a testimonianza dell'iperbolicità del Modello. Seguendo quanto riportato nella precedente Nota, ottengo quindi quattro famiglie ad un parametro di curve caratteristiche reali e distinte con velocità caratteristiche:

$$v = \pm\sqrt{\gamma'}, \quad v = \pm\sqrt{\mu'} \quad (3.40)$$

la cui realtà è assicurata dalle condizioni (3.20)_{3,4}.

Denotando con $\tau = \frac{D}{\gamma'}$ e $\tau_I = \frac{D}{\mu'}$ presenti in (3.13), questi hanno le dimensioni di un tempo e rappresentano i *tempi di rilassamento* del modello, la cui positività è assicurata da (3.20)_{3,4}. Inoltre, se $\tau \rightarrow 0$ e $\tau_I \rightarrow 0$ il sistema (3.21) si riduce al modello parabolico analizzato nel Capitolo 2 e caratterizzato dal paradosso della velocità infinita di propagazione.

3.2 Soluzioni stazionarie e omogenee: analisi della stabilità lineare

Suppongo che la capacità di trasporto K sia costante e cerco soluzioni stazionarie ed omogenee del sistema (3.21), cioè tali che:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial I}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= 0, & \frac{\partial I}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial J_N}{\partial t} &= 0, & \frac{\partial J_I}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Ricordando la forma di h e g , deve perciò essere soddisfatto il seguente sistema:

$$\begin{cases} \left(b - c - \frac{N}{K} \right) N = 0 \\ \left[\left(a - \frac{1}{K} \right) N - aI - c \right] I = 0 \\ \frac{\gamma'}{D} J_N = 0 \\ \frac{\mu'}{D} J_I = 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

Con semplici calcoli algebrici si vede che il sistema (3.42) ammette quattro stati di equilibrio $P_* = (N^*, I^*, J_N^*, J_I^*)$:

$$\begin{cases} N = 0 \\ I = 0 \\ J_N = 0 \\ J_I = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \left(b - c - \frac{N}{K}\right) = 0 \Rightarrow N = K(b - c) \\ I = 0 \\ J_N = 0 \\ J_I = 0 \end{cases} \quad (3.43)$$

$$\begin{cases} N = K(b - c) \\ \left[\left(a - \frac{1}{K}\right)N - aI - c\right] = 0 \Rightarrow I = K(b - c) - \frac{b}{a} \\ J_N = 0 \\ J_I = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} N = 0 \\ \left[\left(a - \frac{1}{K}\right)N - aI - c\right] = 0 \Rightarrow I = -\frac{c}{a} \\ J_N = 0 \\ J_I = 0 \end{cases} \quad (3.44)$$

Denoto questi stati di equilibrio nel seguente modo:

$$\begin{aligned} P_1 &\equiv (0, 0, 0, 0), & P_2 &\equiv (K(b - c), 0, 0, 0) \\ P_3 &\equiv \left(K(b - c), K(b - c) - \frac{b}{a}, 0, 0\right), & P_4 &\equiv \left(0, -\frac{c}{a}, 0, 0\right) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Osservo subito che P_4 è irrilevante sperimentalmente poiché $I < 0$ per ogni valore dei parametri, mentre P_3 è irrilevante se $K < K_c = \frac{b}{a(b-c)}$.

Come già riportato il valore critico della capacità di trasporto K_c è la soglia sotto la quale il numero di topi infetti è effettivamente zero. Gli stati di equilibrio (3.45) sono formalmente gli stessi che sono stati ottenuti nel Capitolo 2.

Per studiare il comportamento vicino allo stato di equilibrio $(N^*, I^*, 0, 0)$ sotto una piccola perturbazione, linearizzo il sistema (3.21) seguendo lo stesso metodo delle *Onde Dispersive* descritto precedentemente.

Indicando con $\bar{N}, \bar{I}, \bar{J}_N, \bar{J}_I$ le ampiezze costanti delle perturbazioni del tipo onde dispersive, pongo:

$$\begin{aligned} N &= N^* + \bar{N} \exp(\sigma t + ikx) \\ I &= I^* + \bar{I} \exp(\sigma t + ikx) \\ J_N &= \bar{J}_N \exp(\sigma t + ikx) \\ J_I &= \bar{J}_I \exp(\sigma t + ikx) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Inserendo quindi le soluzioni perturbate (3.46) in (3.21), ottengo:

$$\begin{cases} \sigma \bar{N} \exp(\sigma t + ikx) + ik \bar{J}_N \exp(\sigma t + ikx) = h(N) \\ \sigma \bar{I} \exp(\sigma t + ikx) + ik \bar{J}_I \exp(\sigma t + ikx) = g(N, I) \\ \left(\frac{\gamma'^*}{D} + \sigma \right) \bar{J}_N \exp(\sigma t + ikx) + ik \gamma'^* \bar{N} \exp(\sigma t + ikx) = 0 \\ \left(\frac{\mu'^*}{D} + \sigma \right) \bar{J}_I \exp(\sigma t + ikx) + ik \mu'^* \bar{I} \exp(\sigma t + ikx) = 0 \end{cases} \quad (3.47)$$

dove le funzioni $h(N)$ e $g(N, I)$ sono approssimate tramite il loro sviluppo di Taylor troncato al primo ordine, cioè hanno questa forma:

$$h(N) = h(N^*) + \frac{dh}{dN}(N^*) \bar{N} \exp(\sigma t + ikx)$$

$$g(N, I) = g(N^*, I^*) + \frac{dg}{dN}(N^*, I^*) \bar{N} \exp(\sigma t + ikx) + \frac{dg}{dI}(N^*, I^*) \bar{I} \exp(\sigma t + ikx)$$

con $h(N^*) = g(N^*, I^*) = 0$.

Allora, semplificando l'esponenziale in (3.47) si ricava il seguente sistema di Cramer in \mathbb{R}^4 :

$$\begin{cases} \sigma \bar{N} + ik \bar{J}_N - h'^* \bar{N} = 0 \\ \sigma \bar{I} + ik \bar{J}_I - g_N^* \bar{N} - g_I^* \bar{I} = 0 \\ \left(\frac{\gamma'^*}{D} + \sigma \right) \bar{J}_N + ik \gamma'^* \bar{N} = 0 \\ \left(\frac{\mu'^*}{D} + \sigma \right) \bar{J}_I + ik \mu'^* \bar{I} = 0 \end{cases} \quad (3.48)$$

dove per brevità $h'^* = \frac{dh}{dN}(N^*)$ e $g_N^* = \frac{dg}{dN}(N^*, I^*)$ e $g_I^* = \frac{dg}{dI}(N^*, I^*)$.

Riscrivo (3.48) in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} \sigma - h'^* & 0 & ik & 0 \\ -g_N^* & \sigma - g_I^* & 0 & ik \\ ik \gamma'^* & 0 & \sigma + \frac{\gamma'^*}{D} & 0 \\ 0 & ik \mu'^* & 0 & \sigma + \frac{\mu'^*}{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{N} \\ \bar{I} \\ \bar{J}_N \\ \bar{J}_I \end{pmatrix} = 0 \quad (3.49)$$

Per il Teorema di Cramer, (3.49) ammette soluzione non banale se e solo se il parametro di crescita σ risolve la seguente equazione caratteristica:

$$\left[\sigma^2 - \left(g_I^* - \frac{\mu'^*}{D} \right) \sigma + \mu'^* \left(k^2 - \frac{g_I^*}{D} \right) \right] \left[\sigma^2 - \left(h'^* - \frac{\gamma'^*}{D} \right) \sigma + \gamma'^* \left(k^2 - \frac{h'^*}{D} \right) \right] = 0$$

da cui si ottengono le due equazioni caratteristiche separate:

$$\begin{cases} \left[\sigma^2 - \left(g_I^* - \frac{\mu'^*}{D} \right) \sigma + \mu'^* \left(k^2 - \frac{g_I^*}{D} \right) \right] = 0 \\ \left[\sigma^2 - \left(h'^* - \frac{\gamma'^*}{D} \right) \sigma + \gamma'^* \left(k^2 - \frac{h'^*}{D} \right) \right] = 0 \end{cases} \quad (3.50)$$

Esse sono due equazioni algebriche di secondo grado, i cui discriminanti risultano essere:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \left(g_I^* - \frac{\mu'^*}{D}\right)^2 - 4\mu'^* \left(k^2 - \frac{g_I^*}{D}\right) \\ \Delta_2 &= \left(h'^* - \frac{\gamma'^*}{D}\right)^2 - 4\gamma'^* \left(k^2 - \frac{h'^*}{D}\right)\end{aligned}\quad (3.51)$$

Le soluzioni perciò saranno funzioni reali se $\Delta_1, \Delta_2 \geq 0$ e saranno negative se:

$$\begin{aligned}\left(g_I^* - \frac{\mu'^*}{D}\right) &< 0 \\ \left(h'^* - \frac{\gamma'^*}{D}\right) &< 0\end{aligned}\quad (3.52)$$

Riassumendo, le soluzioni saranno reali e negative se la seguente condizione è verificata:

$$\max\left(\frac{g_I^*}{D}, \frac{h'^*}{D}\right) < k^2 \leq \min\left\{\frac{1}{4\mu'^*} \left(g_I^* + \frac{\mu'^*}{D}\right)^2, \frac{1}{4\gamma'^*} \left(h'^* + \frac{\gamma'^*}{D}\right)^2\right\} \quad (3.53)$$

Osservazione 3.3.

Se la seconda disuguaglianza non è soddisfatta, allora σ è una funzione complessa la cui parte reale, che non dipende da k , è sempre negativa.

Valutando poi (3.53) nei punti di equilibrio (3.45) ottengo che:

- lo stato di equilibrio P_1 è sempre instabile;
- se $K < K_c$ lo stato P_2 è stabile mentre P_3 è irrilevante;
- se $K > K_c$ lo stato P_2 è instabile mentre P_3 è stabile.

Nel caso di perturbazioni uniformi ($k = 0$) si osserva che gli stati di equilibrio (3.45) hanno lo stesso carattere di stabilità ricavato rispetto alle perturbazioni non uniformi, infatti (3.49) si riduce alla forma:

$$\begin{pmatrix} \sigma - h'^* & 0 & 0 & 0 \\ -g_N^* & \sigma - g_I^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma + \frac{\gamma'^*}{D} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma + \frac{\mu'^*}{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{N} \\ \bar{I} \\ \bar{J}_N \\ \bar{J}_I \end{pmatrix} = 0 \quad (3.54)$$

che, per il Teorema di Cramer, porta all'equazione caratteristica:

$$\left(\sigma - g_I^*\right) \left(\sigma - h'^*\right) \left(\sigma + \frac{\gamma'^*}{D}\right) \left(\sigma + \frac{\mu'^*}{D}\right) = 0 \quad (3.55)$$

da cui $\sigma = g_I^*, \sigma = h'^*, \sigma = -\frac{\gamma'^*}{D}, \sigma = -\frac{\mu'^*}{D}$.

Valutando (3.55) nei punti di equilibrio (3.45) si ricava la stessa analisi di stabilità precedente. Infine nel caso in cui $\tau \rightarrow 0, \tau_1 \rightarrow 0$ (modello parabolico), da (3.53) segue che σ è sempre una funzione reale in k , per cui l'analisi di stabilità è la stessa studiata al Capitolo 2.

3.3 Il formalismo delle Traveling Waves

Alcune soluzioni che giocano un ruolo fondamentale nella descrizione di un modello evolutivo di diffusione e reazione parabolico o iperbolico, nella forma $1D$, sono le soluzioni di tipo *Travelling Waves*. Allo scopo di presentare questo formalismo per il sistema $1D$ (3.21), richiamo brevemente alcune notazioni preliminari e rimando all'Appendice A per una descrizione più dettagliata di questo formalismo. Definisco dunque la coordinata d'onda $z = x - vt$ con velocità d'onda $v > 0$ e costante e cerco soluzioni della forma:

$$N = N(z), \quad I = I(z), \quad J_N = J_N(z), \quad J_I = J_I(z).$$

Otengo perciò il seguente sistema differenziale ordinario del primo ordine nella variabile indipendente z :

$$\begin{cases} -v \frac{dN}{dz} + \frac{dJ_N}{dz} = h(N) \\ -v \frac{dI}{dz} + \frac{dJ_I}{dz} = g(N, I) \\ -v \frac{dJ_N}{dz} + \gamma' \frac{dN}{dz} = -\frac{\gamma'}{D} J_N \\ -v \frac{dJ_I}{dz} + \mu' \frac{dI}{dz} = -\frac{\mu'}{D} J_I \end{cases} \quad (3.56)$$

Osservo subito che gli stati di equilibrio del sistema (3.56) sono esattamente gli stati stazionari precedentemente determinati in (3.45). Dal momento che le equazioni in (3.56)_{1,3} sono a sé stanti, inizio l'analisi della stabilità lineare proprio da questo sistema ridotto in N e J_N :

$$\begin{cases} -v \frac{dN}{dz} + \frac{dJ_N}{dz} = h(N) \\ -v \frac{dJ_N}{dz} + \gamma' \frac{dN}{dz} = -\frac{\gamma'}{D} J_N \end{cases} \quad (3.57)$$

che, ricordando la forma di $h(N)$, ammette i seguenti due punti di equilibrio: $(N^*, J_N^*) = (0, 0)$ e $(N^*, J_N^*) = (K(b-c), 0)$.

Per non appesantire la notazione definisco $J_N := J$.

Per descrivere le proprietà qualitative di questo tipo di soluzioni (TW) nell'intorno di una posizione di equilibrio, considero lo sviluppo di Taylor approssimato al primo ordine per $h(N)$; cioè:

$$h(N) = h(N^*) + \frac{dh}{dN}(N^*)(N - N^*) = h'(N^*)(N - N^*). \quad (3.58)$$

Linearizzo (3.57) intorno allo stato di equilibrio (N^*, J_N^*) ponendo come prima:

$$\begin{aligned} N &= N^* + \tilde{N}_0 e^{\lambda z} \\ J &= \tilde{J}_0 e^{\lambda z} \end{aligned} \quad (3.59)$$

Sostituendo (3.59) in (3.57) e scrivendo il sistema di Cramer omogeneo in \mathbb{R}^2 , così ottenuto, in forma matriciale risulta:

$$\begin{pmatrix} -v\lambda - h'^* & \lambda \\ \gamma'^*\lambda & \frac{\gamma'^*}{D} - v\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{N}_0 \\ \tilde{J}_0 \end{pmatrix} = 0. \quad (3.60)$$

Di nuovo, per il Teorema di Cramer, l'equazione caratteristica per λ risulta essere:

$$\left(1 - \frac{v^2}{\gamma'^*}\right)\lambda^2 - \left(\frac{h'^*}{\gamma'^*} - \frac{1}{D}\right)v\lambda + \frac{h'^*}{D} = 0 \quad (3.61)$$

Anche in questo caso si ha una equazione algebrica di secondo grado rispetto a λ .

Per il significato biologico che ha N non posso aspettarmi una soluzione che nel tempo abbia un comportamento oscillatorio, allora le soluzioni dell'equazione (3.61) devono essere reali, per cui impongo la condizione $\Delta \geq 0$, dove Δ è il discriminante di (3.61). Dopo semplici passaggi algebrici la condizione $\Delta \geq 0$ si riscrive:

$$\Delta = v^2 \left(\frac{h'^*}{\gamma'^*} + \frac{1}{D} \right)^2 - 4 \frac{h'^*}{D} \geq 0 \quad (3.62)$$

Si può subito osservare che se $h'(N^*) < 0$, la (3.62) è sempre soddisfatta e perciò la velocità v non ha nessuna restrizione; al contrario se $h'(N^*) > 0$ il fronte monotono esiste se:

$$v \geq \frac{2\sqrt{Dh'^*}}{D(h'^*/\gamma'^*) + 1} \quad (3.63)$$

Inoltre, affinché si abbia uno stato di equilibrio stabile (cioè tale per cui λ risulti reale e negativo), entrambe le soluzioni di (3.61) devono risultare negative, cioè:

$$\begin{aligned} \frac{h'^*}{D} \left(1 - \frac{v^2}{\gamma'^*}\right) &> 0 \\ \left(1 - \frac{v^2}{\gamma'^*}\right) \left(\frac{h'^*}{\gamma'^*} - \frac{1}{D}\right) &< 0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

Riferendomi al testo di B. Pini [16], procedo con l'analisi della Stabilità lineare dei due punti di equilibrio trovati $(N^*, 0)$.

In $(0, 0)$ risulta $h'(0) = b - c > 0$, allora ci sono due possibilità:

- se $\frac{2\sqrt{D(b-c)}}{D((b-c)/\gamma'(0))+1} \leq v < \sqrt{\gamma'(0)} \Rightarrow$ (3.63) ed (3.64)_{1,2} sono soddisfatte $\Rightarrow (0, 0)$ è un nodo stabile, anzi asintoticamente stabile;
- se $v > \sqrt{\gamma'(0)}$ allora (3.64)₁ non è soddisfatta perciò $(0, 0)$ è un punto di sella (instabile).

Osservazione 3.4.

In questo caso, a differenza di quello parabolico, esistono soluzioni di tipo TW regolari se la velocità d'onda ammette un limite superiore. Inoltre la velocità minima dell'onda è minore rispetto a quella che si è ottenuta nel caso parabolico (Capitolo 2). Ciò è dovuto alla natura iperbolica delle equazioni.

Nel punto di equilibrio $(K(b-c), 0)$, poiché $h'(K(b-c)) = c - b < 0$, λ è sempre reale ed ho le seguenti due possibilità:

- se $v < \sqrt{\gamma'(K(b-c))} \Rightarrow$ la $(3.64)_1$ non è soddisfatta, per cui $(K(b-c), 0)$ è punto di sella (instabile);
- se $v > \sqrt{\gamma'(K(b-c))} \Rightarrow$ la $(3.64)_2$ non è soddisfatta per cui $(K(b-c), 0)$ risulta essere un nodo instabile.

Quindi una soluzione di tipo TW che collega i due stati di equilibrio $(0, 0)$ e $(K(b-c), 0)$ esiste se è verificata la condizione:

$$\frac{2\sqrt{D(b-c)}}{D((b-c)/\gamma'(0)) + 1} \leq v < \sqrt{\gamma'(0)}.$$

Per analizzare il comportamento di soluzioni di tipo travelling waves per l'intero sistema (3.56), lo linearizzo intorno ad uno stato stazionario ed omogeneo $(N^*, I^*, 0, 0)$ ponendo:

$$\begin{aligned} N &= N^* + \tilde{N}_0 e^{\lambda z} \\ I &= I^* + \tilde{I}_0 e^{\lambda z} \\ J &= \tilde{J}_0 e^{\lambda z} \\ J_I &= \tilde{J}_{I,0} e^{\lambda z} \end{aligned} \quad (3.65)$$

Sostituendo in (3.56), in forma matriciale, ottengo:

$$\begin{pmatrix} -v\lambda - h^* & 0 & \lambda & 0 \\ -g_N^* & -v\lambda - g_I^* & 0 & \lambda \\ \gamma'^*\lambda & 0 & \frac{\gamma'^*}{D} - v\lambda & 0 \\ 0 & \mu'^*\lambda & 0 & \frac{\mu'^*}{D} - v\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{N}_0 \\ \tilde{I}_0 \\ \tilde{J}_0 \\ \tilde{J}_{I,0} \end{pmatrix} = 0 \quad (3.66)$$

dove $h^* = \frac{dh}{dN}(N^*)$ e $g_N^* = \frac{dg}{dN}(N^*, I^*)$ e $g_I^* = \frac{dg}{dI}(N^*, I^*)$.

L'equazione caratteristica in λ che si ottiene è:

$$\left[\left(1 - \frac{v^2}{\gamma'^*} \right) \lambda^2 - \left(\frac{h^*}{\gamma'^*} - \frac{1}{D} \right) v\lambda + \frac{h^*}{D} \right] \left[\left(1 - \frac{v^2}{\mu'^*} \right) \lambda^2 - \left(\frac{g_I^*}{\mu'^*} - \frac{1}{D} \right) v\lambda + \frac{g_I^*}{D} \right] = 0$$

In questo caso le soluzioni sono reali se valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= v^2 \left(\frac{h'^*}{\gamma'^*} + \frac{1}{D} \right)^2 - 4 \frac{h'^*}{D} \geq 0 \\ \Delta_2 &= v^2 \left(\frac{g_I^*}{\mu'^*} + \frac{1}{D} \right)^2 - 4 \frac{g_I^*}{D} \geq 0\end{aligned}\tag{3.67}$$

La condizione (3.67)₁ è indipendente da I^* ed è la stessa ottenuta in (3.62), perciò le considerazioni fatte precedentemente sono ancora valide. Invece (3.67)₂ è automaticamente soddisfatta se $g_I(N^*, I^*) < 0$, mentre se $g_I(N^*, I^*) > 0$ è necessario imporre una restrizione a v :

$$v \geq \frac{2\sqrt{Dg_I^*}}{D(g_I^*/\mu'^*) + 1}\tag{3.68}$$

Nel punto di equilibrio P_1 , con $h'(0) = b - c > 0$, $g_I(0, 0) = -c < 0$, risulta:

$$\begin{aligned}\frac{2\sqrt{D(b-c)}}{D((b-c)/\gamma'(0)) + 1} &\leq v < \min\{\sqrt{\gamma'(0)}, \sqrt{\mu'(0)}\} \\ &\Rightarrow \text{un valore di } \lambda \text{ positivo e tre negativi;} \\ \frac{2\sqrt{D(b-c)}}{D((b-c)/\gamma'(0)) + 1} &< \min\{\sqrt{\gamma'(0)}, \sqrt{\mu'(0)}\} < v < \max\{\sqrt{\gamma'(0)}, \sqrt{\mu'(0)}\} \\ &\Rightarrow \text{due valori di } \lambda \text{ positivi e due negativi;} \\ \frac{2\sqrt{D(b-c)}}{D((b-c)/\gamma'(0)) + 1} &< \max\{\sqrt{\gamma'(0)}, \sqrt{\mu'(0)}\} < v \\ &\Rightarrow \text{tre valori di } \lambda \text{ positivi ed uno negativo.}\end{aligned}$$

Nel punto di equilibrio P_2 , con $h'(K(b-c)) = c - b < 0$, $g_I(K(b-c), 0) = aK(b-c) - b$, ci sono due possibilità che dipendono da K .

Se $K < K_c$, risulta:

$$\begin{aligned}v &< \min\{\sqrt{\gamma'(K(b-c))}, \sqrt{\mu'(0)}\} \\ &\Rightarrow \text{due valori di } \lambda \text{ positivi e due negativi;} \\ \min\{\sqrt{\gamma'(K(b-c))}, \sqrt{\mu'(0)}\} &< v < \max\{\sqrt{\gamma'(K(b-c))}, \sqrt{\mu'(0)}\} \\ &\Rightarrow \text{tre valori di } \lambda \text{ positivi ed uno negativo;} \\ \max\{\sqrt{\gamma'(K(b-c))}, \sqrt{\mu'(0)}\} &< v \Rightarrow \text{quattro valori di } \lambda \text{ positivi.}\end{aligned}$$

Mentre se $K > K_c$, risulta:

$$\frac{2\sqrt{D(aK(b-c)-b)}}{D((aK(b-c)-b)/\mu'(0))+1} \leq v < \min\{\sqrt{\gamma'(K(b-c))}, \sqrt{\mu'(0)}\}$$

\Rightarrow un valore di λ positivo e tre negativi;

$$\frac{2\sqrt{D(aK(b-c)-b)}}{D((aK(b-c)-b)/\mu'(0))+1} < \min\{\sqrt{\gamma'(K(b-c))}, \sqrt{\mu'(0)}\} < v < \max\{\sqrt{\gamma'(K(b-c))}, \sqrt{\mu'(0)}\}$$

\Rightarrow due valori di λ positivi e due negativi;

$$\frac{2\sqrt{D(aK(b-c)-b)}}{D((aK(b-c)-b)/\mu'(0))+1} < \max\{\sqrt{\gamma'(K(b-c))}, \sqrt{\mu'(0)}\} < v$$

\Rightarrow tre valori di λ positivi ed uno negativo.

Infine, considero il punto di equilibrio P_3 , per cui $g_I(K(b-c), K(b-c) - b/a) = b - aK(b-c)$; poiché per $K < K_c$ è irrilevante, suppongo $K > K_c$ e risulta:

$$v < \min\left\{\sqrt{\gamma'(K(b-c))}, \sqrt{\mu'\left(K(b-c) - \frac{b}{a}\right)}\right\}$$

\Rightarrow due valori di λ positivi e due negativi;

$$\min\left\{\sqrt{\gamma'(K(b-c))}, \sqrt{\mu'\left(K(b-c) - \frac{b}{a}\right)}\right\} < v < \max\left\{\sqrt{\gamma'(K(b-c))}, \sqrt{\mu'\left(K(b-c) - \frac{b}{a}\right)}\right\}$$

\Rightarrow tre valori di λ positivi ed uno negativo;

$$\max\left\{\sqrt{\gamma'(K(b-c))}, \sqrt{\mu'\left(K(b-c) - \frac{b}{a}\right)}\right\} < v$$

\Rightarrow quattro valori di λ positivi.

L'analisi mostra che gli stati di equilibrio P_1 e P_2 non sono stabili. Tuttavia se $(3.3)_1$ è soddisfatta, una soluzione linearizzata in un intorno di P_2 è data da:

$$\begin{aligned} N(z) &= K(b-c) + C_1 e^{\lambda_1 z} + C_2 e^{\lambda_2 z}, & \lambda_1 > 0, & \lambda_2 < 0 \\ I(z) &= C_3 e^{\lambda_3 z} + C_4 e^{\lambda_4 z}, & \lambda_3 < 0, & \lambda_4 < 0 \end{aligned} \quad (3.69)$$

dove C_1, C_2, C_3, C_4 sono costanti. Una soluzione di tipo TW che collega P_2 e P_3 può esistere se $C_1 = C_2 = 0$. Inoltre se la restrizione $(3.3)_1$ per la velocità v è verificata, una soluzione linearizzata in un intorno di P_1 è data da:

$$\begin{aligned} N(z) &= \tilde{C}_1 e^{\lambda_1 z} + \tilde{C}_2 e^{\lambda_2 z}, & \lambda_1 < 0, & \lambda_2 < 0 \\ I(z) &= \tilde{C}_3 e^{\lambda_3 z} + \tilde{C}_4 e^{\lambda_4 z}, & \lambda_3 < 0, & \lambda_4 > 0 \end{aligned} \quad (3.70)$$

dove $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3, \tilde{C}_4$ sono costanti. Perciò una soluzione di tipo travelling wave che collega gli stati di equilibrio P_1 e P_3 può esistere se $\tilde{C}_4 = 0$. Le soluzioni ottenute rappresentano due scenari differenti, come già evidenziato dall'analisi del modello parabolico nel Capitolo 2.

Capitolo 4

Conclusioni

In questa tesi ho analizzato diversi modelli di diffusione e reazione per l'infezione da Hantavirus. Inizialmente, lavorando in domini fissi nel tempo e spazialmente limitati, e con campi regolari, ho ricavato il modello di diffusione e reazione ad una popolazione come legge di bilancio in forma locale. Ho utilizzato come equazione costitutiva per il vettore flusso quella di tipo "flusso gradiente", ricavando il Modello di Fisher-Kolmogoroff ([17]). Sullo stesso, poiché è un modello parabolico generalmente quasilineare, ho eseguito prima una linearizzazione e poi una analisi della stabilità lineare dei suoi stati di equilibrio ([16]). Questa indagine ha mostrato che un termine di sorgente nell'equazione perturbata diffusiva è sempre destabilizzante, mentre un contributo di degradazione è sempre stabilizzante. Ho proseguito poi con l'analisi del modello di base della popolazione dei topi ([3]), limitandomi a studiare l'interazione nel tempo di due specie di topi, suscettibili e infetti. Il modello in questione è costituito da un sistema di due equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, non lineari, interagenti, nella forma di un sistema dinamico non lineare in \mathbb{R}^2 , autonomo. In particolare, i termini non lineari descrivono il trasferimento dell'infezione da Hantavirus tra le popolazioni dei topi, mentre la capacità di trasporto K caratterizza la capacità media di conservazione della popolazione; inoltre è il termine che meglio rappresenta l'influenza dell'ambiente sulla popolazione, con un ruolo nel problema della sopravvivenza della specie stessa. Anche per questo modello ho presentato un'analisi della stabilità lineare degli stati di equilibrio del sistema, trovando che per valori di K al di sotto della capacità critica K_c , il numero di topi infetti è circa zero; ossia, se le condizioni ambientali peggiorano l'infezione può diminuire fino a zero. D'altra parte, quando le condizioni migliorano, l'infezione riappare. A conclusione del primo capitolo, ho preso in esame un modello semplice per le epidemie, che coinvolge tre specie interagenti: in particolare

mi sono concentrata sul Modello SIR di Kermak e McKendrick [5] che descrive la diffusione di malattie infettive, facendo interagire nel tempo tre specie di popolazioni (i suscettibili, gli infetti e i rimossi). Il modello evolutivo è ora costituito da un sistema di tre equazioni differenziali ordinarie del primo ordine interagenti, cioè un sistema dinamico non lineare in \mathbb{R}^3 . In questo contesto a tre specie, si possono apportare alcune modifiche al Modello di base, tenendo conto di nuovi parametri di interazione. Per esempio si possono includere nell'equazione degli individui suscettibili i termini di "nascita" e "morte" ed il termine di "morte naturale" nelle equazioni degli infetti e dei rimossi. Inoltre, nel caso in cui l'epidemia abbia un periodo di incubazione, nel quale i suscettibili sono infetti, ma non manifestano ancora l'infezione, si può introdurre una quarta classe nella quale i suscettibili rimangono per un certo tempo prima di entrare nella classe I . Un recente articolo che sta lavorando in questa direzione è per esempio [5].

Nel secondo capitolo ho concentrato la mia attenzione sulla generalizzazione spaziale del Modello di Abramson a due popolazioni introducendo le funzioni S, I e K dipendenti dallo spazio \vec{x} e dal tempo t , lavorando con domini fissi nel tempo e limitati, e con campi regolari. In questo caso ho ottenuto un modello di diffusione e reazione costituito da un sistema di due PDEs paraboliche, generalmente semilineari, interagenti fra loro. Ho poi applicato la tecnica perturbativa, nell'intorno di uno stato di equilibrio stazionario, cercando soluzioni del tipo Onde Dispersive del sistema perturbato (quando il dominio è spazialmente illimitato). La ricerca di queste soluzioni porta ad un problema agli autovalori, che però non si riesce a risolvere analiticamente nel caso in cui K dipenda dalla variabile spaziale \vec{x} . Il problema può essere risolto solo numericamente, si veda ad esempio [4]. L'estensione spaziale ha inoltre portato a dedurre più generalmente l'esistenza di ambienti isolati, detti "rifugi", dove è presente un'alta concentrazione del parametro ambientale K , in cui la popolazione infetta sopravvive (si veda ad esempio [19]). A conclusione del secondo capitolo, con riferimento allo stesso modello, ma in una dimensione spaziale e in domini spazialmente illimitati, ho analizzato le soluzioni di tipo Travelling Waves. Da questa analisi ho ricavato un risultato importante sperimentalmente: quando una regione libera da topi è in contatto con una regione infetta, in uno stato di equilibrio, si propagano due onde nella regione vuota, la prima è l'onda dei topi suscettibili e la seconda è quella dei topi infetti, che si propaga dietro alla prima con un certo ritardo. In tal caso ho trovato solo delle sottostime delle velocità dei due fronti d'onda e la diversa dipendenza funzionale di queste dai parametri del modello ha evidenziato due possibili regimi di propagazione controllati proprio dal parametro ambientale K . Anche per questo tipo di analisi potrebbe risultare molto utile un approccio di tipo numerico, soprattutto per avere una

approssimazione sperimentale del ritardo presente tra i due fronti d'onda. Per una indagine di questo tipo si può fare riferimento all'articolo [14].

Nel terzo capitolo, infine, utilizzando il Secondo Principio della Termodinamica nella versione estesa, ho derivato il modello di diffusione e reazione iperbolico, con due tempi di rilassamento, per la descrizione dell'infezione da Hantavirus nella popolazione dei topi, proposto recentemente da E.Barbera e altre in [10]. Esso è costituito da un sistema di due equazioni alle derivate parziali del secondo ordine, semilineari, al quale ho applicato il Metodo delle curve caratteristiche ottenendo quattro famiglie ad un parametro di curve caratteristiche reali e distinte con velocità finite, interpretabili come le quattro onde di discontinuità del secondo ordine tipiche del modello iperbolico. Naturalmente, quando i due tempi di rilassamento tendono a zero, il sistema di equazioni iperboliche si riduce al Modello parabolico di Abramson e Kenkre, considerato nel capitolo precedente. Ho proseguito, successivamente, con l'analisi della stabilità lineare delle soluzioni stazionarie ed omogenee rispetto a perturbazioni uniformi e non uniformi. Gli stati di equilibrio calcolati sono risultati formalmente gli stessi che sono stati ottenuti nel secondo capitolo; inoltre è emerso come i seguenti stati, nel caso di perturbazioni uniformi, abbiano lo stesso carattere di stabilità ricavato rispetto a perturbazioni non uniformi. Infine, ho introdotto il formalismo delle Travelling Waves, applicandolo al modello di diffusione e reazione iperbolico. A differenza del modello parabolico in cui si sono trovate solo delle sottostime delle velocità dei due fronti d'onda che si propagano, in questo caso, invece, ho ricavato che le velocità delle TWs variano in un intervallo ben definito; ciò è indotto proprio dall'iperbolicità del modello. Anche questo tipo di studio analitico può essere completato aggiungendo una indagine numerica (si veda ad esempio [10]), i cui risultati consentirebbero una comprensione maggiore della forte relazione presente tra la diffusione dell'infezione ed il parametro ambientale K .

Appendice A

In questa appendice descriverò e discuterò, attraverso degli esempi, lo strumento già citato delle *Travelling Waves*, applicandolo a diversi modelli.

Queste onde si presentano per la prima volta come soluzioni di sistemi lineari e quasi-lineari, del primo ordine, $1D$, attraverso l'utilizzo del metodo delle *Curve caratteristiche*.

A.1 Metodo delle Curve caratteristiche

Riferendomi al testo di F. John, *Partial Differential Equations* ([17]), suppongo di lavorare con PDE quasi-lineari, del primo ordine, in due variabili indipendenti e reali che denoto con x e y , con $y > 0$ che assume il ruolo di tempo. Una generica PDE di questo tipo si presenti nella forma:

$$a(x, y, u(x, y))u_x(x, y) + b(x, y, u(x, y))u_y(x, y) = c(x, y, u(x, y)) \quad (\text{A.1})$$

con $(x, y) \in \Omega$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, e con $u_x := \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y := \frac{\partial u}{\partial y}$. Una soluzione $u(x, y)$ definisce una superficie integrale $z = u(x, y)$ nello spazio (x, y, z) . Richiedo che la superficie integrale $z = u(x, y)$ sia di classe C^1 e che i coefficienti $a, b, c \in C^1(\Omega', \mathbb{R})$, con $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^3$.

Definizione A.1.

Definisco il vettore caratteristico:

$$\vec{d} := \begin{pmatrix} a(x, y, u(x, y)) \\ b(x, y, u(x, y)) \\ c(x, y, u(x, y)) \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Il vettore caratteristico permette di definire le *curve caratteristiche* associate ad una PDE del primo ordine.

Per non appesantire le notazioni ometterò la dipendenza da $(x, y, u(x, y))$.

Definizione A.2.

Una curva γ si definisce curva caratteristica per la generale PDE (A.1) se e solo se è tale per cui:

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{c} = d\tau \quad (\text{A.3})$$

cioè:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = a \\ \frac{dy}{d\tau} = b \\ \frac{dz}{d\tau} = c \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

La scelta del parametro τ in un intervallo dell'asse reale $[\tau_0, \tau_1]$, $\tau_0 = 0$, in (A.4) è artificiale: dall'integrazione di (A.4) si ottiene una famiglia di curve caratteristiche reali. Ovvero, sono curve di \mathbb{R}^3 che in ogni loro punto P_γ sono tangenti alla direzione del vettore caratteristico \vec{d} . Si può sempre definire un problema di Cauchy per (A.4), imponendo il passaggio per un punto P .

Osservazione A.1.

Considerando le prime due relazioni in (A.4) e supponendo $b \neq 0$, divido (A.4)₁ per (A.4)₂ ed ottengo:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a}{b} \quad (\text{A.5})$$

Se y ha il ruolo di tempo, allora $\frac{dx}{dy}$ è una velocità e dal momento che a e b sono a valori reali, si ha che la velocità è sempre a valori reali. Nel piano \mathbb{R}^2 con $y > 0$ le curve caratteristiche possono essere visualizzate come curve $\gamma \subseteq \Omega$ che soddisfano (A.5) e quindi si muovono con velocità reale: $\frac{dx}{dy} = \frac{a}{b}$.

Inoltre, considerando la superficie integrale $z = u(x, y)$ che chiamo Σ , poiché è di classe C^1 , per ogni punto $P_\Sigma \in \Sigma$ si definisce il versore normale che in questo caso è dato da:

$$\vec{n} = \frac{(u_x, u_y, -1)}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + 1}} \quad (\text{A.6})$$

Posso quindi riscrivere (A.1) come:

$$\vec{d} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{A.7})$$

cioè $\vec{d} \perp \vec{n}$ per ogni P_Σ . Per definizione di curva caratteristica si ottiene che esse, in ogni punto $P_\Sigma \in \Sigma$, sono tutte e sole le curve ortogonali alla direzione normale nel punto, cioè appartengono al piano tangente a Σ in P_Σ .

Definisco ora il Problema di Cauchy per PDE del tipo (A.1).

Assegnare un problema di Cauchy, significa assegnare su una curva "regolare" $\Gamma \subseteq \Omega$, di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = f(s) \\ y = g(s) \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

con $f'(s)^2 + g'(s)^2 > 0 \forall s \in J \subseteq \mathbb{R}$, il valore del campo incognito:

$$u(f(s), g(s)) = h(s) \quad (\text{A.9})$$

con f, g e h assegnati ed $h \in C^1(J, \mathbb{R})$.

In molti casi la variabile y assume il ruolo di tempo, per cui è naturale assegnare un problema ai valori iniziali per il campo u al tempo $y = 0$ del tipo:

$$u(x, 0) = h(x)$$

Si osserva subito che il problema ai valori iniziali è un particolare problema di Cauchy in cui la curva Γ ha la forma:

$$x = s, \quad y = 0, \quad z = h(s),$$

Assegnare un problema ai valori iniziali, quindi, significa integrare il seguente sistema:

$$\begin{cases} au_x + bu_y = c \quad \forall (x, y) \in \Omega \\ u(s, 0) = h(s) \quad \forall s \in J, \quad h \in C^1(J, \mathbb{R}) \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Confronto ora due modelli rispetto al metodo delle Curve Caratteristiche. I modelli in questione sono il Modello delle Onde ed il Modello di Burger.

A.1.1 Modello delle Onde

Una possibile equazione del modello si presenta nella forma:

$$u_y + cu_x = 0 \quad (\text{A.11})$$

con c costante. Essa è una PDE del primo ordine, lineare, omogenea.

Risolvero il seguente problema ai valori iniziali:

$$\begin{cases} u_y + cu_x = 0 \\ u(s, 0) = h(s) \quad \forall h \in C^1(J, \mathbb{R}) \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Ricorro le curve caratteristiche associate a questo Modello:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = c \\ \frac{dy}{d\tau} = 1 \\ \frac{dz}{d\tau} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Se divido la prima equazione di (A.13) per la seconda risulta:

$$\frac{dx}{dy} = c.$$

Allora le curve caratteristiche per l'equazione (A.11) si muovono con velocità costante espressa da c .

Integrando (A.13)₃ ottengo: $z = u(x, y) = \text{costante}$, cioè il campo u è costante lungo le curve caratteristiche.

Da (A.13)₂ ho che $y = \tau$ (scelgo come costante di integrazione $\text{cost} = 0$), per cui $u(x, y) = h(s)$.

Integrando quindi (A.13)₁ risulta:

$$x = c\tau + s \quad (\text{A.14})$$

dove s compete ad x quando $\tau = 0$. Quindi ottengo la relazione:

$$s = x - cy,$$

cioè la soluzione generale del problema ai valori iniziali (A.10) per l'equazione delle Onde è del tipo TW, cioè:

$$u(x, y) = h(s) = h(x - cy) \quad (\text{A.15})$$

la cui regolarità dipende da quella di h .

In conclusione, si hanno infinite rette caratteristiche ad un parametro parallele (quindi non si intersecheranno mai).

A.1.2 Modello di Burger

L'equazione del Modello di Burger si presenta nella forma:

$$u_y + uu_x = 0 \quad (\text{A.16})$$

Essa è una PDE del primo ordine, quasilineare, omogenea.

Risolvero il seguente problema ai valori iniziali:

$$\begin{cases} u_y + uu_x = 0 \\ u(s, 0) = h(s) \quad \forall h \in C^1(J, \mathbb{R}) \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

Cerco le curve caratteristiche associate a questo Modello:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = u(x, y) \\ \frac{dy}{d\tau} = 1 \\ \frac{dz}{d\tau} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

Se divido la prima equazione di (A.18) per la seconda risulta:

$$\frac{dx}{dy} = u(x, y).$$

Allora le curve caratteristiche sono interpretabili come curve che si muovono con velocità non costante uguale al campo stesso.

Integrando (A.18)₃ ottengo: $z = u(x, y) = \text{costante}$, cioè il campo u è costante lungo le curve caratteristiche.

Da (A.18)₂, come prima, ho che $y = \tau$ (scelgo come costante di integrazione $\text{cost} = 0$), per cui $u(x, y) = h(s)$.

Integrando quindi (A.18)₁ risulta:

$$x = u\tau + s,$$

dove s compete ad x quando $\tau = 0$. Quindi ottengo:

$$s = x - uy,$$

da cui la soluzione TW:

$$u(x, y) = h(s) = h(x - uy) \quad (\text{A.19})$$

Allora ottengo infinite rette caratteristiche ad un parametro, inoltre il campo è costante lungo le curve caratteristiche, tuttavia, a differenza del caso lineare, qui il campo può assumere valori differenti in base alla curva caratteristica lungo cui si trova. Cioè le rette caratteristiche non sono più parallele, bensì si potrebbero intersecare in un punto.

Nel piano (x, y) la curva caratteristica che passa per il punto $(s, 0)$ è data dalla retta:

$$x = h(s)y + s \quad (\text{A.20})$$

lungo la quale il campo u ha il valore costante $u = h(s)$. Fisicamente (A.20), per un fissato s , rappresenta la traiettoria di un'onda posta in $x = s$ all'istante $y = 0$.

Siano ora γ_1 e γ_2 le seguenti due curve caratteristiche:

$$\begin{aligned} \gamma_1 : x &= h(s_1)y + s_1 \\ \gamma_2 : x &= h(s_2)y + s_2 \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Se le due rette si intersecano in un punto $P(x, y)$, questo è individuato dalla seguente ordinata:

$$y = -\frac{s_2 - s_1}{h(s_2) - h(s_1)}. \quad (\text{A.22})$$

Se $s_1 \neq s_2$ e $h(s_1) \neq h(s_2)$, la funzione u assume due valori distinti nel punto P , per cui perde regolarità. Si può dimostrare che può esistere un valore positivo y della forma (A.22), a meno che $h(s)$ non risulti una funzione crescente in s . Per tutti gli altri $h(s)$, la soluzione $u(x, y)$ diventa singolare per un certo $y_c(s) > 0$. Dal punto di vista fisico, significa che un'onda con una velocità molto alta colliderà con un'altra che la precede con una velocità più bassa. In particolare si può ricavare un valore di y , chiamato tempo critico, nel quale il campo u ha il "gradiente" che va all'infinito, cioè $\lim_{y \rightarrow y_c^-} |u_x| = +\infty$. Si perde quindi la regolarità C^1 , anche se il dato iniziale lo è.

Infatti, denotando con $s_1 := s$, ho che $u = h(s_1) = h(s) = h(x - uy)$. Calcolo il gradiente $1D$ di u che si riduce a calcolare la derivata parziale rispetto ad x di u , cioè:

$$u_x = h'(x - uy)(1 - u_x y) \quad (\text{A.23})$$

Con semplici passaggi, da (A.23), ricavo u_x :

$$u_x = \frac{h'(x - uy)}{1 + h'(x - uy)y} \quad (\text{A.24})$$

Ricordando che y assume ruolo di tempo, per cui $y > 0$, osservando (A.24), si può giungere alle seguenti considerazioni:

- se $h'(s) > 0$ (cioè h è una funzione crescente in s), ottengo due pendenze diverse per le rette γ_1 e γ_2 , che quindi non si intersecheranno mai;
- se $h'(s) < 0$, si ha $h'(s) = -|h'(s)|$ e risulta:

$$u_x = \frac{h'(s)}{1 - |h'(s)|y}$$

per cui può esistere un tempo positivo:

$$y(s) := \frac{1}{|h'(s)|}$$

per il quale u_x diventa infinito. Il più piccolo valore di $y(s)$ per cui ciò accade corrisponde al valore $s = s_0$ nel quale $h'(s)$ ha un minimo. Questo valore di y viene chiamato tempo critico ed in questo caso si dice che la soluzione u subisce una "catastrofe del gradiente". In questo istante l'onda di discontinuità "degenera" in un'onda d'urto (o *Shock Wave*) che diventa una particolare soluzione debole.

In entrambi i modelli analizzati, comunque, la forma generale del campo ricavata era la seguente:

$$\text{Modello delle Onde : } u = h(x - cy)$$

$$\text{Modello di Burger : } u = h(x - uy)$$

Questa tipologia di onde è del tipo *Travelling Waves*.

A.2 Travelling Waves

Per questa sezione faccio riferimento al testo [6].

Lavoro utilizzando due variabili indipendenti x e t , con $t > 0$, tali per cui $(x, t) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, regolare.

La più semplice forma di un'onda matematica è una funzione del tipo:

$$u(x, t) = f(x - vt). \quad (\text{A.25})$$

dove v è una costante che suppongo > 0 .

In $t = 0$ l'onda ha la forma $f(x)$ che rappresenta il profilo iniziale dell'onda. Successivamente $f(x - vt)$ rappresenta il profilo al tempo t , cioè il profilo iniziale traslato a destra di vt unità spaziali. La costante v è la velocità dell'onda e l'equazione (A.25) rappresenta Travelling Wave che viaggia verso destra con velocità $v > 0$. Analogamente,

$$u(x, t) = f(x + vt)$$

rappresenta un'onda che viaggia verso sinistra con velocità $v > 0$. Nel piano (x, t) , queste onde si propagano lungo le rette $x \pm vt = \text{costante}$.

Una delle domande fondamentali nella teoria delle PDEs 1D non lineari è quando una PDE data ammetta una Travelling Wave come soluzione.

Per questa ragione mostrerò alcuni esempi per illustrare la tecnica di ricerca di soluzioni di tipo TW tali che siano soddisfatte le seguenti condizioni al contorno:

$$u(-\infty, t) = \text{costante}, \quad u(+\infty, t) = \text{costante}$$

dove questa *costante* può non essere necessariamente la stessa.

Per poter applicare il formalismo delle Travelling Waves, suppongo di lavorare con PDE 1D, in due variabili indipendenti x e t , con $t > 0$, lineari e non lineari.

Esempio A.1.

Cerco una soluzione di tipo onda viaggiante data l'equazione delle onde:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad (\text{A.26})$$

con c costante positiva. Essa è una PDE del secondo ordine, iperbolica, $1D$, lineare, omogenea. Una soluzione di tipo onda viaggiante è della forma $u(x, t) = f(x - vt)$. Sostituendo in (A.26), ricavo:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = v^2 f'' - c^2 f'' = f''(v^2 - c^2) = 0 \quad (\text{A.27})$$

da cui o $f(z) = A + Bz$ (con $z = x \pm vt$) per alcune costanti A, B oppure $v = \pm c$ e f arbitraria. Nel primo caso ottengo:

$$u(x, t) = A + B(x \pm vt), \quad (\text{A.28})$$

ma le condizioni al contorno possono essere soddisfatte se $B = 0$. Allora, l'unica soluzione di tipo TW è quella costante.

Nell'altro caso, per una qualsiasi funzione differenziabile due volte f che soddisfa le condizioni al contorno, la soluzione:

$$u(x, t) = f(x \pm ct) \quad (\text{A.29})$$

è di tipo Travelling Wave.

Esempio A.2.

Considero ora l'equazione di Burger con viscosità:

$$u_t + uu_x - \nu u_{xx} = 0, \quad \nu > 0. \quad (\text{A.30})$$

dove ν denota la viscosità, mentre νu_{xx} è il termine di diffusione. Essa è una PDE del secondo ordine, quasilineare, $1D$, omogenea.

Cerco una soluzione del tipo onda viaggiante dell'equazione di Burger della forma:

$$u(x, t) = f(x - vt)$$

Sostituendo in (A.30) ottengo:

$$-v f'(z) + f(z) f'(z) - \nu f''(z) = 0, \quad (\text{A.31})$$

dove $z := x - vt$ denota la coordinata d'onda.

Poiché $f f' = \frac{1}{2} (f^2)'$, posso riscrivere l'equazione (A.31) nella seguente forma:

$$-v f'(z) + \frac{1}{2} (f^2(z))' - \nu f''(z) = 0.$$

Integrando, risulta:

$$-vf(z) + \frac{1}{2}f^2(z) - \nu f'(z) = B,$$

dove B è la costante di integrazione. Omettendo la dipendenza da z , ottengo così la seguente equazione:

$$\frac{df}{dz} = \frac{1}{2\nu}(f^2 - 2vf - 2B). \quad (\text{A.32})$$

Da questa equazione osservo che:

$$\frac{df}{dz} = 0 \Leftrightarrow (f^2 - 2vf - 2B) = 0 \quad (\text{A.33})$$

Questa è una equazione algebrica di secondo grado. Se considero il caso in cui il polinomio quadratico è fattorizzabile attraverso due fattori reali lineari:

$$(f^2 - 2vf - 2B) = (f - f_1)(f - f_2) \quad (\text{A.34})$$

ottengo come soluzioni:

$$f_{1,2} = c \pm \sqrt{v^2 + 2B}, \quad (\text{A.35})$$

dove $\Delta = v^2 + 2B$ denota il discriminante.

Osservazione A.2.

Se $\Delta = 0$, le soluzioni sono $f_1 = f_2 = \text{costante}$.

La funzione f è reale $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$, cioè $v^2 + 2B \geq 0$, perciò se $B > 0$, allora $\Delta > 0$ sempre. Se, invece, $B < 0$, cioè $B = -|B|$, allora ho la condizione:

$$v^2 - 2|B| > 0, \quad \text{i.e.} \quad v^2 > 2|B|$$

Ritornando all'equazione (A.32), sostituisco la fattorizzazione (A.34) in (A.32) ottenendo:

$$\frac{df}{dz} = \frac{1}{2\nu}(f - f_1)(f - f_2), \quad (\text{A.36})$$

dove in particolare $f_2 > f_1$.

Prima di tutto osservo che f_1 e f_2 sono gli unici punti di equilibrio di (A.36) e $\frac{df}{dz} > 0$ quando $(f - f_1)(f - f_2) > 0$ e ciò accade se $f < f_1$ o $f > f_2$. Ma in questo caso, ogni soluzione che parte al di sopra di f_2 tenderà a ∞ per $z \rightarrow +\infty$ ed ogni soluzione che parte al di sotto di f_1 tenderà a $-\infty$ per $z \rightarrow -\infty$. Per questa ragione, le uniche soluzioni di tipo TW non costanti sono possibili se $f_1 < f < f_2$ (cioè $\frac{df}{dz} < 0$).

Risolvero ora l'equazione (A.36) attraverso il metodo di separazione delle variabili:

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{2\nu} &= \int \frac{df}{(f-f_1)(f-f_2)} \\ \frac{z-z_0}{2\nu} &= \int \frac{-1}{(f-f_1)(f_2-f_1)} + \frac{-1}{(f_2-f)(f_2-f_1)} df \\ \frac{z-z_0}{2\nu} &= -\frac{1}{f_2-f_1} \int \left(\frac{1}{f-f_1} + \frac{1}{f_2-f} \right) df = \\ &= \frac{1}{f_2-f_1} \ln \frac{f_2-f}{f-f_1} \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Denotando con $K := \frac{1}{2\nu}(f_2-f_1) > 0$, risolvo (A.37) rispetto ad f ottenendo:

$$f(z) = \frac{f_2 + f_1 e^{K(z-z_0)}}{1 + e^{K(z-z_0)}}.$$

Il valore iniziale z_0 non è essenziale, perciò nel seguito lo tralascio.

La formula per la soluzione di tipo Travelling Wave per l'equazione (A.30) è quindi:

$$u(x, t) = \frac{f_2 + f_1 e^{K(x-vt)}}{1 + e^{K(x-vt)}}$$

dove la velocità dell'onda è determinata dalla (A.35):

$$v = \frac{1}{2}(f_1 + f_2).$$

In assenza del termine νu_{xx} (come visto nella sezione precedente), le soluzioni di (A.30) tenderebbero a rompersi. La presenza del termine di diffusione previene questo effetto di rottura. Ne risulta una concorrenza e bilanciamento tra il termine non lineare uu_x ed il termine di diffusione $-\nu u_{xx}$.

Esempio A.3.

Esamino ora l'equazione di Fisher-Kolmogoroff ed, in particolare, indago l'esistenza di soluzioni del tipo TW. Considero l'equazione nella forma:

$$u_t - u_{xx} = u(1-u), \quad (\text{A.38})$$

Essa è una PDE del secondo ordine, parabolica, 1D, non lineare.

Cerco soluzioni del tipo:

$$u(x, t) = U(z), \quad z = x - ct \quad \text{coordinata d'onda}, \quad (\text{A.39})$$

dove c è una costante positiva ed U ha la proprietà per cui, se $s \rightarrow \pm\infty$, si avvicina a dei valori costanti. Per essere determinata, suppongo che la funzione U sia differenziabile due volte. Sostituendo (A.39) nella (A.38) ottengo:

$$-cU' - U'' = U(1 - U). \quad (\text{A.40})$$

Questa è un'equazione differenziale del secondo ordine non lineare, per cui per risolverla la riscrivo come un sistema di due equazioni del primo ordine definendo $V = U'$. Così ottengo:

$$\begin{cases} U' = V = h(V) \\ V' = -cV - U(1 - U) = g(U, V) \end{cases} \quad (\text{A.41})$$

Cerco i punti di equilibrio del sistema risolvendo:

$$\begin{cases} V = 0; \\ U(1 - U) = 0 \end{cases}$$

da cui risultano i seguenti due punti di equilibrio:

$$\begin{cases} U = 0 \\ V = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} U = 1 \\ V = 0 \end{cases} \quad (\text{A.42})$$

Denoto i due punti con $P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = (1, 0)$.

Per descrivere le proprietà qualitative di questo tipo di soluzioni (TW) nell'intorno di una posizione di equilibrio (U^*, V^*) , considero lo sviluppo di Taylor approssimato al primo ordine per $h(V)$ e $g(U, V)$; cioè:

$$\begin{aligned} h(V) &= h(V^*) + \frac{dh}{dV}(V^*)(V - V^*) = \frac{dh}{dV}(V^*)(V - V^*) \\ g(U, V) &= g(U^*, V^*) + \frac{dg}{dU}(U^*, V^*)(U - U^*) + \frac{dg}{dV}(U^*, V^*)(V - V^*) \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Linearizzo (A.41) intorno allo stato di equilibrio (U^*, V^*) ponendo:

$$\begin{aligned} U &= U^* + \tilde{U}_0 e^{\lambda z} \\ V &= V^* + \tilde{V}_0 e^{\lambda z} \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Sostituendo (A.44) in (A.41) e scrivendo il sistema di Cramer in forma matriciale risulta:

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{dg}{dU}(U^*, V^*) & \lambda + c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{U}_0 \\ \tilde{V}_0 \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{A.45})$$

Calcolo la matrice nei punti di equilibrio P_1 e P_2 ; nel primo caso risulta:

$$A(P_1) = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda + c \end{pmatrix} \quad (\text{A.46})$$

da cui si ricavano gli autovalori:

$$\lambda_{\pm}^{(0,0)} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4}}{2}.$$

Nel secondo caso si ha:

$$A(P_2) = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda + c \end{pmatrix} \quad (\text{A.47})$$

da cui si ricavano gli autovalori:

$$\lambda_{\pm}^{(1,0)} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4}}{2}$$

Procedo ora con l'analisi della stabilità lineare degli stati di equilibrio trovati, riferendomi a [8].

Per ogni c , gli autovalori $\lambda_{\pm}^{(1,0)}$ sono reali e di segno opposto, per cui $P_2 = (1, 0)$ è un punto di sella, che corrisponde ad uno stato di equilibrio instabile. D'altra parte, gli autovalori $\lambda_{\pm}^{(0,0)}$ sono entrambi reali e negativi se $c \geq 2$ ed in questo caso si ha che $P_1 = (0, 0)$ è un nodo stabile; mentre $\lambda_{\pm}^{(0,0)}$ risultano complessi con parte reale negativa se $0 < c < 2$, quindi in questo caso $P_1 = (0, 0)$ è un fuoco stabile.

Bibliografia

- [1] Liu, I-Shih (2002). *Continuum Mechanics*, Springer, New York.
- [2] Renardy, M. and Rogers, R.C. (2004). *An Introduction to Partial Differential Equations*, Springer, New York.
- [3] Abramson, G. and Kenkre, V.M. (2002). *Mathematical modeling of refugia in the spread of the Hantavirus*, Proceeding of United Science and Technology for Reducing Biological Threats and Countering Terrorism Conference (BTR), 64.
- [4] Abramson, G. and Kenkre, V.M. (2002). *Spatio-temporal patterns in the Hantavirus infection*, Physical Review E, 66:011912.
- [5] Abramson, G. (2001). *Mathematical modeling of the spread of infectious diseases*, A series of lectures given at PANDA, UNM.
- [6] Murray, J.D. (2003). *Mathematical Biology. I: An introduction*, Springer, New York.
- [7] Müller, I and Ruggeri, T. (1998). *Rational Extended Thermodynamics*, Springer, New York.
- [8] Morgan, R. (2015). *Linearization and stability analysis of nonlinear problems*, Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal, 16: 68-91.
- [9] Tseng, Z.S. (2008). *The Phase Plane Phase Portraits of Linear Systems*, Lecture Notes Phase Plane.
- [10] Barbera, E., Currò, C. and Valenti, G. (2008). *A hyperbolic reaction-diffusion model for the hantavirus infection*, Math. Meth. Appl. Sci. 31:481-499.
- [11] Liu, I-Shih (1972). *Method of Lagrange multipliers for exploitation of the entropy principle*, Arch Rat Mech and Analysis, 46: 131-148.

-
- [12] Bissell, J.J. and Straughan, B. (2014). *Discontinuity waves as tipping points: Applications to biological and sociological systems*. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, B., 19:1911-1934.
- [13] Volpert, V. and Petrovskii, S. (2009). *Review: Reaction–diffusion waves in biology*, *Phys. Life Rev.*, 6:267-310.
- [14] Abramson, G., Kenkre, V.M., Yates, T.L. and Parmenter, R.R. (2003). *Traveling waves of infection in the Hantavirus epidemics*, *Bull. Math. Biol.* 65:519-534.
- [15] Straughan, B. (2004). *The Energy Method, Stability, and Nonlinear Convection*, Springer, New York.
- [16] Pini, B. (1972). *Secondo corso di analisi matematica*, Vol.2, Bologna.
- [17] John, F. (1991). *Partial Differential Equations*, Springer, New York.
- [18] Straughan, B. (2011). *Heat Waves*, Springer, New York.
- [19] Abbot, K.D., Ksiazek, T.G. and Mills, J.N. (1999). *Long-term Hantavirus Persistence in rodent populations in central Arizona*, *Emerging Infectious Diseases*, 5: 102-112.

Ringraziamenti

Prima di tutto vorrei rivolgere un grazie caloroso alla professoressa Franca Franchi. La stimo molto ed è stato un vero piacere lavorare insieme a lei. La ringrazio soprattutto per la sua pazienza, per il tempo che mi ha dedicato in questi mesi e per la passione che mi ha trasmesso per questa materia.

Riflettendo bene su questi due anni ho capito di avere avuto attorno a me tante “famiglie”. Per prima c’è la “Famiglia”, quella a cui pensi quando qualcuno ti dice casa, quella che non ti chiuderà mai la porta in faccia e che ti accoglierà sempre, quella che ti ascolta e ti consiglia, quella che puoi deludere ma puoi rendere anche orgogliosa, quella che c’è davvero sempre e aspetta solo una tua telefonata o che tu torni a casa per abbracciarti. Grazie mamma, babbo e Teo; non vorrei essere cresciuta in nessun’altra famiglia, siete già perfetti così, con un pizzico di pazzia che non guasta mai, uniti anche se dispersi in province diverse, in una sola parola: originali. Grazie perché mi avete sempre sostenuta nelle scelte che ho fatto. Grazie anche al nonno, agli zii e a Giletto perché con la loro presenza e vivacità hanno saputo creare intorno a me un ambiente caloroso ed un rifugio accogliente, liberandomi da tutti i miei pensieri. Grazie Famiglia per essere la mia Casa.

Non può mancare la famiglia “Collina”. Questa è la famiglia dei giochi e delle chiacchiere, delle serate insieme, della spontaneità, delle risate, del servizio, del poter contare l’uno sull’altro; è la famiglia che ti accetta per come sei, pregi e difetti; è la famiglia degli amici più cari, quelli che dopo anni e anni sono ancora lì con te. Grazie Ila, Vale, Filo e Criffi perché anche se in questi anni eravamo tutti in città diverse, la nostra unione non è mai venuta meno. Al vostro fianco gli ostacoli sono sembrati più piccoli e le fatiche più sopportabili. Grazie in particolare a Ila per tutti i confronti, le discussioni, le pazzie e le risate insieme. Per avermi sempre espresso la tua opinione e per non aver mai rinunciato alla nostra amicizia.

Grazie per essere la mia Collina.

Poi c'è la famiglia delle "coinquiline", quella che non ti scegli tu, che talvolta può portare a discussioni e litigi, ma che può farti incontrare anche persone straordinarie. Quella con cui impari a fare i tuoi primi passi, quella con cui ti accorgi di ciò che ti sta intorno. Grazie Marica, Marti, Laura, Ele e Cami per aver sopportato le mie fisse, per la vostra disponibilità, per il vostro affetto e per tutti gli insegnamenti che ognuna di voi mi ha lasciato. Svuotare quella parte di stanza è stato molto difficile, ma siete tutte quante nel mio cuore. Grazie anche a Fra e Silvia perché, anche se in Paesi diversi, mi avete sostenuta e tutt'ora continuate a farlo. Grazie per le reunion in giro per l'Europa e per la vicinanza da vere sorelle acquisite. Non vedo l'ora di scoprire dove ci rincontreremo la prossima volta.

Grazie a tutte per essere state le mie compagne di casa.

Importante è anche la famiglia "università", quella con cui condividi ansie e dubbi, ragionamenti e idee, quella che ti accompagna in ogni lezione e ad ogni esame. Quella a cui passi gli appunti oppure da cui te li fai prestare, quella che ti aiuta quando non hai capito qualcosa. Grazie Anna, Lucia, Alessia, Elisa, Bolo, Plaz per questa avventura e per questi due anni. Grazie perché non solo abbiamo condiviso la passione per la stessa materia ma ognuno ha condiviso anche un pezzetto della propria vita, permettendo di conoscerci. Mai dimenticherò le telefonate, le cene, i progetti ed i confronti. È stato un percorso intenso e tortuoso, ma insieme a voi il cammino è stato molto più piacevole.

Grazie per aver studiato con me questi due anni, compagni di matematica.

Infine, vorrei ringraziare Gianlu. Grazie per non aver ancora smesso di prenderti cura di me e per esserti interessato a ciò che faccio e che studio. Grazie per il tuo incoraggiamento e il tuo sostegno che non vengono mai meno.

"La famiglia è lo specchio in cui Dio si guarda, e vede i due miracoli più belli che ha fatto: donare la vita e donare l'amore".

(San Giovanni Paolo II)