

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Modelli cosmologici di Friedmann-Robertson-Walker

Relatore:
Prof. Roberto Balbinot

Presentata da:
Sofia Di Gennaro

Anno Accademico 2016/2017

Abstract

La cosmologia, dal greco "kosmos" (mondo) e "-logia" (studio di-) si occupa di studiare l'Universo sulle grandi scale e si occupa della spiegazione e delle modalità in cui si sono formate le strutture galattiche.

Si tratta di una disciplina peculiare, differente dalle altre scienze poiché si ha a disposizione un solo campione e non è perciò possibile applicare il metodo scientifico di misure ripetute.

Inoltre, trattando di oggetti molto distanti, risulta estremamente difficoltoso ottenere dei dati su di essi.

In questa trattazione si analizzano i principi base da cui si deriva la teoria della cosmologia standard, basata sul modello di Friedmann-Robertson-Walker.

Si comincia con l'esposizione del principio cosmologico, che stabilisce l'omogeneità e isotropia dell'Universo alle grandi scale.

Da esso si ricava poi la metrica di Friedmann-Robertson-Walker, che permette di definire una struttura causale in un Universo in espansione.

Dalla metrica e dalle equazioni di campo di Einstein si ottengono poi le equazioni di Friedmann, le quali a loro volta possono essere integrate, ottenendo alcuni modelli importanti.

Infine, si approfondiscono i concetti di redshift e determinazione delle distanze, concetti molto utili per misurare i parametri che regolano l'evoluzione dell'Universo.

In quanto segue, ci si attiene alla convenzione $c=G=1$, si segue la convenzione di Einstein per gli indici ripetuti e si assegnano lettere greche a indici da 0 a 3, mentre le lettere latine vengono usate per indici da 1 a 3.

Introduzione

La cosmologia è la branca della scienza che si occupa dello studio di strutture su larga scala e della dinamica dell'Universo, indagandone l'origine, struttura ed evoluzione.

I principi su cui si costruisce sono il principio cosmologico, che rappresenta una generalizzazione del principio copernicano, e la Relatività Generale di Einstein.

Lo sviluppo della cosmologia, prima riservata a teologi o fisici matematici, cominciò a svilupparsi nella sua forma moderna a partire dal 1916, quando Einstein pubblicò i suoi risultati sulla Relatività Generale.

Nel 1917 tentò subito di applicarli alla cosmologia, risolvendo le equazioni di campo, ma trovò che non esistevano soluzioni per un Universo statico e omogeneo.

Poiché non c'era ragione di credere che l'Universo non fosse statico, Einstein aggiunse un ulteriore termine alle equazioni, per forzare la staticità.

Tra il 1922 e il 1924 Friedmann lavorò sulla sua celebre metrica, che fu ripresa in seguito negli anni '30 da Robertson e Walker, i quali la applicarono agli spazi cosmologici.

Nel 1922 un altro scienziato, Edwin Hubble, diede un contributo fondamentale allo sviluppo della cosmologia grazie allo studio delle Cefeidi.

Queste stelle variabili forniscono un metodo per determinare le distanze degli oggetti cosmici e permisero a Hubble di affermare l'esistenza di altre galassie al di fuori della Via Lattea.

La distanza di alcune nebulose era infatti troppo grande per poter essere parte della nostra galassia e, anzi, venne dimostrato che erano galassie vere e proprie.

Nonostante l'idea che la Via Lattea non fosse unica nell'Universo fosse già stata presentata da Immanuel Kant nel 1755, venne vigorosamente osteggiata, ma Hubble pubblicò i risultati comunque e cambiò così la visione che gli scienziati avevano dell'Universo.

Un'altra osservazione importante fu quella di Vesto Slipher sul redshift delle galassie, che permise a Hubble di trovare una proporzionalità tra velocità di allontanamento e distanza tra le galassie, legge nota con il suo nome e che venne formulata nel 1929.

Poiché questa legge mise in evidenza che l'Universo era effettivamente in espansione, Einstein abbandonò il termine che aveva aggiunto alle equazioni di campo e si dedicò a modelli in cui questo termine era nullo, come il modello di Einstein-De Sitter del 1932.

1 Postulati

1.1 Paradosso di Olbers

Nel 1826, la credenza diffusa tra gli scienziati che l'Universo fosse eterno, statico e infinito portò al cosiddetto *paradosso di Olbers*, basato sull'osservazione che il cielo si presenta scuro di notte.

Se si assumono costanti nello spazio e nel tempo il numero medio di stelle per unità di volume n e la luminosità media L di ogni stella; integrando su un guscio sferico di spessore dr e raggio r il flusso di luminosità

$$F = \frac{L}{4\pi r^2} \quad (1.1)$$

si ottiene:

$$F_{tot} = \int_r^{r+dr} \frac{nL}{4\pi r^2} 4\pi r^2 dr = nL dr \quad (1.2)$$

Quindi in ogni punto circondato da infiniti gusci sferici:

$$F_{tot} = \int_0^\infty \frac{nL}{4\pi r^2} 4\pi r^2 dr = nL \int_0^\infty dr = \infty \quad (1.3)$$

la luminosità osservata dovrebbe essere infinita.

In realtà, si può dimostrare che non è infinita ma uguale alla luminosità media sulla superficie di una stella, perché la luce emessa può essere nascosta da stelle più vicine sulla stessa linea di vista dalla Terra.

Data una distribuzione infinita di stelle, ogni linea di vista finisce prima o poi per incontrare almeno una stella.

Essendo l'Universo un sistema statico, la luce non viene ridotta e arriva alla Terra, che dovrebbe registrare una luminosità uniforme e pari a quella della superficie di una stella in qualsiasi parte del cielo, cioè per ogni linea di vista.

Ciò è nettamente in contrasto con l'osservazione quotidiana di un cielo prevalentemente scuro.

Si tentò di risolvere il paradosso in vari modi: Olbers stesso ipotizzò che la luce delle stelle lontane fosse assorbita da delle nubi di polvere. Questo ragionamento può essere facilmente smentito da considerazioni termodinamiche: se l'Universo è eterno e statico, deve aver già raggiunto l'equilibrio. Ma allora, le nubi dovrebbero emettere tanta energia quanta ne assorbono dalla radiazione stellare, assumendo la stessa temperatura delle stelle.

Eliminando l'assunzione di costanza del prodotto nL , si svilupparono delle teorie secondo cui nell'Universo le stelle hanno una distribuzione frattale. In questo modo, le stelle lontane sarebbero meno luminose o in numero inferiore rispetto a quelle vicine. Tuttavia, questa teoria non è molto accreditata perché in contrasto con il principio cosmologico, che si basa sull'omogeneità e isotropia.

Altre spiegazioni includono l'ipotesi che il numero di stelle sia in realtà finito (ma è improbabile in un Universo infinito); le stelle hanno vita finita (ma se ne formano di nuove continuamente, lasciandone circa costante il numero); se l'Universo è statico e le stelle non cominciano ad irradiare fino ad un certo periodo di tempo (ma le stime indicano che così l'Universo sarebbe più giovane delle stelle più vecchie).

La soluzione correntemente accettata si trova rivedendo le assunzioni sull'Universo statico ed eterno:

Innanzitutto, l'Universo ha un'età finita, quindi la luce delle stelle che si trovano oltre una certa distanza (orizzonte delle particelle) non è ancora arrivata alla Terra. Il primo ad avanzare questa ipotesi fu Edgar Allan Poe nel 1848. Inoltre, il fenomeno del redshift (tanto più accentuato quanto maggiore è la lontananza) comporta una perdita di energia, per cui le stelle più lontane appaiono meno luminose.

1.2 Postulato di Weyl

Weyl, nel 1923, cercando di applicare la Teoria della Relatività Generale all'Universo, generalizzò le teorie basate sull'osservazione dei fenomeni locali. Assunse, inoltre, l'esistenza di un osservatore privilegiato associato al movimento di dispersione delle galassie, introducendo l'esistenza di un fluido che permea l'Universo, detto *fluido cosmico*, di cui le galassie sono considerate come particelle. Il postulato è formulato nel modo seguente:

Le particelle del fluido giacciono in una congruenza di geodetiche di tipo tempo che divergono da un punto nel passato finito o infinito.

Significa, cioè, che le geodetiche si incrociano soltanto in un punto singolare nel passato (o possibilmente nel futuro) e che in ogni punto dello spazio-tempo c'è una e una sola geodetica, per cui la materia avrà una sola velocità in ogni punto. Il postulato di Weyl permette di considerare il fluido cosmico come un fluido perfetto.

1.3 Principio cosmologico

Il principio cosmologico consiste nella generalizzazione del principio copernicano, secondo cui la Terra non si trova al centro del sistema solare.

Similmente, si assume che sia sensato supporre che il nostro gruppo di galassie non occupi una posizione privilegiata nell'Universo.

Il principio cosmologico afferma

In ogni epoca, l'Universo si presenta lo stesso per ogni punto, ad eccezione di irregolarità locali.

Per prima cosa, si definisce il sistema di coordinate x^μ , detto *sistema di coordinate cosmiche standard*.

Le coordinate spaziali x^i vengono scelte con origine al centro della Via Lattea, in direzione delle galassie più lontane e con distanza determinata grazie alla luminosità, come verrà esplicitato in seguito.

La coordinata temporale t è fissata dall'evoluzione dell'Universo stesso.

Si pensa che molti campi scalari, come la densità ρ o la temperatura di radiazione di corpo nero, siano decrescenti monotonicamente ovunque.

Scegliendo uno di questi campi e denotandolo con S , allora il tempo sarà dato dalla funzione $t(S)$.

Da questo sistema di coordinate si determinano la metrica $g_{\mu\nu}$ e altri campi come il tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$.

Un sistema di coordinate x'^μ è *equivalente* a quello standard se l'Universo appare lo stesso in entrambi i sistemi. Di conseguenza, i campi sono funzioni corrispondenti in qualsiasi punto y :

$$\begin{aligned}g_{\mu\nu}(y) &= g'_{\mu\nu}(y) \\ T_{\mu\nu}(y) &= T'_{\mu\nu}(y) \quad \text{etc...}\end{aligned}\tag{1.4}$$

Quindi la trasformazione $x \rightarrow x'$ deve essere un'isometria e i campi come $T_{\mu\nu}$ devono essere invarianti in forma per questa trasformazione.

In particolare, vale per il campo scalare S che è funzione solo di t :

$$S(t') = S(t) \quad \rightarrow \quad t' = t \quad (1.5)$$

poiché $S'(t') = S(t)$ essendo uno scalare e $S'(t') = S(t')$ per le proprietà di isometria. Quindi il tempo cosmico standard è comune anche alle coordinate equivalenti.

Folliando lo spazio tempo con ipersuperfici a $t=\text{costante}$, la richiesta che non esistano punti e direzioni privilegiati implica che le ipersuperfici debbano essere necessariamente isotrope e omogenee.

Quindi il principio cosmologico può essere equivalentemente formulato richiedendo che l'Universo sia spazialmente isotropo e omogeneo.

Isotropia implica che l'Universo appare lo stesso in ogni direzione. Formalmente, una varietà M è isotropa se per ogni punto p e vettori V e W nello spazio tangente di M , esiste un'isometria di M che trasporti V parallelamente a W lasciando invariato p .

Omogeneità implica che la metrica sia la stessa in tutta la varietà. In altre parole, dati due punti qualsiasi p e q in una varietà M , esiste un'isometria che trasporti p in q .

Perché questo principio sia valido, occorre mantenersi alle scale di 10^8 anni luce o maggiori.

Infatti, prendendo degli ordini di grandezza inferiori, emergerebbero le differenze tra le varie porzioni di Universo, con materia agglomerata in cluster, galassie e stelle.

La prova principale a sostegno del principio cosmologico è costituita dalla CMB, la radiazione cosmica di fondo, che fu scoperta nel 1965 ad opera di due radioastronomi americani, Penzias e Wilson.

Si tratta di una radiazione nelle microonde di energia termica di corpo nero, corrispondente a una temperatura di 2.7 K, che permea tutto l'Universo con un grado di isotropia di circa una parte su 100.000.

Poiché l'isotropia globale implica anche l'omogeneità, è sufficiente provare che l'Universo sia isotropo per dire che è anche omogeneo.

2 Cosmologia Newtoniana

Si può cominciare costruendo un modello non relativistico semplice assumendo che l'Universo consista in un numero finito di galassie, di massa m_i e posizione \mathbf{r}_i .

Per il principio cosmologico, che garantisce la simmetria sferica attraverso la richiesta di isotropia, esse hanno un moto puramente radiale: $\mathbf{r}_i = r_i(t)\hat{\mathbf{r}}$. L'energia cinetica e il potenziale assumono i valori usuali:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{r}_i^2 \quad V = -G \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (2.1)$$

A questi si aggiunge l'azione della forza cosmologica legata alla costante cosmologica Λ :

$$\mathbf{F}_c = \frac{1}{3} \Lambda m \mathbf{r} \quad (2.2)$$

con potenziale associato:

$$V_c = -\frac{1}{6} \Lambda \sum_i m_i r_i^2 \quad (2.3)$$

Sommando tutti i contributi all'energia (2.1) e (2.3):

$$E = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{r}_i^2 - G \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} - \frac{1}{6} \Lambda \sum_i m_i r_i^2 \quad (2.4)$$

L'assunzione di moto radiale implica:

$$r_i(t) = S(t)r_i(t_0) \quad (2.5)$$

con t_0 un qualche istante iniziale che si suppone noto e $S(t)$ un fattore di scala. La velocità radiale dell' i -esima galassia è:

$$\dot{r}_i(t) = \dot{S}(t)r_i(t_0) = \frac{\dot{S}(t)}{S(t)}r_i(t) = H(t)r_i(t) \quad (2.6)$$

dove $H(t) \equiv \dot{S}/S$.

Si ottiene così la legge di Hubble, la quale afferma cioè che le galassie si distanziano tra

loro tanto più velocemente quanto più sono lontane.
Sostituendo (2.5) e (2.6) nell'espressione dell'energia:

$$E = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{r}_i(t_0)^2}_A \dot{S}(t)^2 - G \underbrace{\sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i(t_0) - \mathbf{r}_j(t_0)|}}_B \frac{1}{S(t)} - \underbrace{\frac{1}{6} \Lambda \sum_i m_i r_i^2}_D S(t)^2 \quad (2.7)$$

Con $D = \frac{1}{3} \Lambda A$.

Si può interpretare così:

- se $\Lambda = 0$ $D=0$, quindi se l'Universo è in espansione, $S > 1$ per cui il secondo termine diminuisce, quindi deve diminuire anche il primo termine per mantenere l'energia costante, per cui S diminuisce e l'espansione rallenta;
- se $\Lambda > 0$ repulsione cosmica delle galassie, sono allontanate da 0 a ∞ ;
- se $\Lambda < 0$ attrazione cosmica delle galassie, si muovono verso l'origine.

Ricavando $\dot{S}(t)^2$ dall'equazione (2.7):

$$\dot{S}(t)^2 = \frac{B}{A} \frac{1}{S(t)} + \frac{1}{3} \Lambda S(t)^2 + \frac{E}{A} \quad (2.8)$$

Si può effettuare un riscalamento:

$$a(t) \equiv \mu S(t) \quad (2.9)$$

e definire:

$$C \equiv \frac{\mu^3 B}{A}, \quad k \equiv -\mu^2 \frac{E}{A} \quad (2.10)$$

Se $E = 0$, il parametro μ può essere scelto arbitrariamente, poiché $k=0$ per qualsiasi valore di μ .

Se invece $E \neq 0$, si sceglie $\mu^2 = \frac{A}{|E|}$ in modo che k possa assumere solo i valori $k = \pm 1, 0$.

Operando il riscalamento e le sostituzioni menzionate qui sopra e moltiplicando per μ^2 entrambi i membri dell'equazione (2.8), si ottiene:

$$\dot{a}(t)^2 = \frac{C}{a(t)} + \frac{1}{3} \Lambda a(t)^2 - k \quad (2.11)$$

che presenta una forma simile all'equazione di Friedmann, come si vedrà in seguito.

Il modello di Newton può essere applicato anche estendendo la scala, ma non in un Universo infinito.

3 Metrica FRW

Per determinare la struttura causale e la geometria dello spaziotempo, occorre definire una metrica.

Tramite questa sarà poi possibile introdurre le nozioni di prodotto scalare, angoli, curvatura e distanza.

Nel caso dell'Universo isotropo e omogeneo, si utilizza una metrica che prende il nome da Friedmann, Robertson e Walker.

Friedmann fu il primo a ricavarla nel 1922, ma i suoi risultati vennero praticamente ignorati dai suoi contemporanei e Einstein stesso non si accorse delle enormi implicazioni che potevano avere.

Soltanto dopo la scoperta dell'espansione dell'Universo da parte di Hubble, negli anni '30, Robertson e Walker ne provarono rigorosamente le proprietà, tra cui quella di essere l'unica soluzione delle equazioni di campo per un Universo isotropo e omogeneo.

Per ricavare la metrica, ci si basa sul principio cosmologico, la Teoria della Relatività Generale e il postulato di Weyl.

Per il postulato di Weyl, le geodetiche del fluido cosmico devono essere ortogonali a una famiglia diipersuperfici di tipo spazio.

Le coordinate possono essere scelte in modo che le ipersuperfici Σ abbiano $t=\text{costante}$ e (x^1, x^2, x^3) come coordinate spaziali.

Dal principio cosmologico, si ricava che lo spaziotempo è dato da $\mathbb{R} \times \Sigma$, dove \mathbb{R} rappresenta la direzione del tempo cosmico.

La dipendenza dalla gravità è incorporata nella metrica e dipende dalla distribuzione di materia ed energia nell'Universo.

Per ogni punto p di Σ si costruisce la geodetica tangente in p al vettore normalizzato n^μ , in cui t è il parametro affine (con $t(p)=0$).

In un intorno di p , il punto q si trova su una di queste geodetiche e ha coordinate (t, x^1, x^2, x^3) con x^i ad indicare il trasportato delle coordinate di p attraverso la geodetica. Tali coordinate sono coordinate normali Gaussiane, definite in una regione contenente Σ .

Associati alle coordinate sono i vettori di base $(\partial_t, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$, rinominati per convenienza $(n^\mu, X_1^\mu, X_2^\mu, X_3^\mu)$.

Per cominciare, si sa che, essendo n^μ un parametro normalizzato,

$$g_{tt} = n_\mu n^\mu = -1 \quad (3.1)$$

e ortogonale alla parte spaziale:

$$n_\mu X_i^\mu = 0 \quad \text{sulla superficie iniziale } \Sigma \quad (3.2)$$

Poi:

$$\frac{D}{dt}(n_\mu X_i^\mu) = n^\nu \nabla_\nu (n_\mu X_i^\mu) \quad (3.3)$$

dalla definizione di derivata direzionale covariante;

$$n^\nu \nabla_\nu (n_\mu X_i^\mu) = n^\nu n_\mu \nabla_\nu X_i^\mu \quad (3.4)$$

perché $n^\nu \nabla_\nu n_\mu = 0$ essendo n_μ trasportato parallelamente lungo la geodetica; dato che n e X_i sono vettori coordinati di base, $[n, X_i]^\mu = n^\nu n_\mu \nabla_\nu X_i^\mu - X_i^\nu n_\mu \nabla_\nu n^\mu = 0$, quindi

$$n^\nu n_\mu \nabla_\nu X_i^\mu = X_i^\nu n_\mu \nabla_\nu n^\mu \quad (3.5)$$

Infine, usando la regola di Leibnitz:

$$X_i^\nu n_\mu \nabla_\nu n^\mu = \frac{1}{2} X_i^\nu \nabla_\nu (n_\mu n^\mu) \quad (3.6)$$

Si può concludere, allora:

$$\frac{D}{dt}(n_\mu X_i^\mu) = 0 \quad (3.7)$$

Quindi

$$g_{ti} = t_\mu X_i^\mu = 0 \quad (3.8)$$

e la metrica si scrive nella forma:

$$ds^2 = -dt^2 + d\sigma^2 \quad (3.9)$$

dove $d\sigma^2$ è la metrica su Σ .

Assumendo di conoscere la metrica spaziale su una superficie iniziale Σ_1 e prendendo due geodetiche A e B del fluido cosmico, di coordinate (x^1, x^2, x^3) e $(x^1 + \Delta x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3)$, al tempo t_1 la distanza propria che le separa è:

$$\Delta\sigma(t_1) = \sqrt{\gamma_{ij} \Delta x^i \Delta x^j} \quad (3.10)$$

dove x^i sono appunto le coordinate comoventi discusse in precedenza, per cui l'Universo appare isotropo e γ_{ij} è il tensore metrico su Σ .

Al tempo successivo t , sulla superficie Σ , A e B saranno separate da una distanza propria $\Delta\sigma(t)$ in generale diversa da $\Delta\sigma(t_1)$.

Il principio cosmologico, per spostamenti sufficientemente piccoli, garantisce che il rapporto $\Delta\sigma(t)/\Delta\sigma(t_1)$ è indipendente dalla direzione di A rispetto a B, dalle coordinate sulla superficie iniziale Σ_1 e da $\Delta\sigma(t_1)$.

Il rapporto costante è definito *fattore di scala*:

$$R(t) \equiv \frac{\Delta\sigma(t)}{\Delta\sigma(t_1)} \quad (3.11)$$

Combinando le due equazioni (3.10) e (3.11) si ottiene:

$$\Delta\sigma(t) = R(t) \sqrt{\gamma_{ij} \Delta x^i \Delta x^j} \quad (3.12)$$

$R(t)$ deve essere reale perché un intervallo di tipo spazio non diventi di tipo tempo.

Le distanze vengono modificate soltanto dal fattore di scala, che le espande o le contrae lasciando la forma delle ipersuperfici invariata.

Occorre tenere presente che l'omogeneità vale soltanto alle grandi scale, quindi l'espansione agisce solo su galassie e cluster e non a distanze inferiori, altrimenti l'intera teoria, basata sul principio cosmologico, non sarebbe applicabile.

Si può dimostrare che dal principio cosmologico deriva direttamente che le ipersuperfici Σ devono essere massimamente simmetriche.

Uno spazio è detto massimamente simmetrico se contiene il massimo numero di vettori di Killing, corrispondente a quello di \mathbb{R}^n con la metrica Euclidea usuale.

I vettori di Killing sono i vettori K che soddisfano l'isometria

$$\mathcal{L}_K g = 0 \quad (3.13)$$

o equivalentemente

$$\nabla_\mu K_\nu + \nabla_\nu K_\mu = 0 \quad (3.14)$$

che è conosciuta come *equazione di Killing*.

Tali vettori corrispondono quindi a una quantità che viene conservata lungo una geodetica. Tale quantità è il prodotto del vettore K e del vettore tangente alla metrica.

Si può mostrare che se la metrica è indipendente da una certa coordinata x^σ , il vettore ∂_σ soddisfa l'equazione.

In generale, però, non è possibile trovare delle coordinate per cui i vettori di Killing siano tutti in questa forma simultaneamente.

Prendendo come esempio lo spazio euclideo \mathbb{R}^n , si esaminano le isometrie di uno spazio massimamente simmetrico.

Se lo spazio è omogeneo, esistono isometrie infinitesime che portano un punto in un altro punto nell'intorno, quindi ci sono n vettori di Killing indipendenti, lungo gli n assi.

L'isotropia, invece, è un'isometria che lascia invariato il punto; può essere pensata come il trasporto di un asse fino a farlo coincidere con un altro. Quindi, per n direzioni, le combinazioni sono date da

$$\frac{1}{2}n(n+1) \quad (3.15)$$

dove il fattore 2 è necessario per non contare gli stessi termini due volte.

In conclusione, il numero massimo di vettori di Killing è:

$$n + \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n(n+1) \quad (3.16)$$

Infatti, nonostante si sia considerato lo spazio \mathbb{R}^n con metrica euclidea, i risultati sono stati ottenuti per trasformazioni infinitesime nell'intorno dei punti e sono quindi validi per ogni tipo di metrica.

In conclusione, uno spazio omogeneo e isotropo ha $\frac{1}{2}n(n+1)$ vettori di Killing ed è massimamente simmetrico.

Inoltre, la curvatura è la stessa ovunque (per le isometrie di traslazione) e in ogni direzione (per le isometrie di rotazione).

Poiché la geometria deve essere la stessa ovunque, il tensore di Riemann deve essere invariante per trasformazioni di Lorentz.

Questo significa che deve essere proporzionale a un tensore invariante sotto questo tipo di trasformazioni (la metrica, la delta di Kronecker e il tensore di Levi-Civita).

Si può dimostrare che ciò è realizzato da un'unica possibilità:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} \propto g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu} \quad (3.17)$$

La costante di proporzionalità si fissa contraendo due volte entrambi i membri: a sinistra si ottiene R e a destra $n(n-1)$.

Il tensore di Riemann soddisfa perciò la relazione:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = K(g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu}) \quad (3.18)$$

dove K è detto *parametro di curvatura* ed è una costante data da:

$$K = \frac{R}{n(n-1)} \quad (3.19)$$

dove R , lo scalare di Ricci, si mantiene costante sulla varietà.

Riferendosi ora alle ipersuperfici Σ che foliano lo spaziotempo, si ha che $n=3$, quindi $K=R/6$.

Contraendo (3.18) con $g^{\rho\mu}$:

$$g^{\rho\mu} R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\sigma\nu} \quad (3.20)$$

$$= K g^{\rho\mu} (g_{\rho\mu} g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu} g_{\sigma\mu}) \quad (3.21)$$

$$= K (3g_{\sigma\nu} - g_{\sigma\nu}) \quad (3.22)$$

$$= 2K g_{\sigma\nu} \quad (3.23)$$

Poiché l'ipersuperficie deve essere isotropa, deve avere simmetria sferica rispetto ad ogni punto, quindi l'elemento di linea assume la forma:

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j = e^{2\beta} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.24)$$

con $\beta = \beta(r)$.

Le componenti non nulle del tensore di Ricci sono:

$$R_{11} = \frac{2}{r} \partial_1 \beta \quad (3.25)$$

$$R_{22} = e^{-2\beta} (r \partial_1 \beta - 1) + 1 \quad (3.26)$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta \quad (3.27)$$

Allora, la condizione (3.23) di curvatura costante si riduce a:

$$\begin{cases} \frac{2}{r} \partial_1 \beta = 2K e^{2\beta} \\ e^{-2\beta} (r \partial_1 \beta - 1) + 1 = 2K r^2 \end{cases} \quad (3.28)$$

La cui soluzione è:

$$e^{-2\beta} = 1 - K r^2 \quad (3.29)$$

Sostituendola nella (3.24):

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - K r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.30)$$

Usando la (3.9), operando i seguenti riscalamanti:

$$K = |K|k, \quad r^* = \sqrt{|K|}r, \quad a(t) = \frac{R(t)}{\sqrt{|K|}} \text{ se } K \neq 0, \quad a(t) = R(t) \text{ se } K=0 \quad (3.31)$$

e lasciando cadere l'asterisco, si ottiene:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (3.32)$$

che rappresenta la metrica FRW, con $k = 0, \pm 1$.

Si può usare la forma alternativa ottenuta ridefinendo la coordinata radiale $d\chi \equiv dr/\sqrt{1 - kr^2}$:

$$d\sigma^2 = a^2[d\chi^2 + S_k(\chi)^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad (3.33)$$

con

$$S_k(\chi) = \begin{cases} \sin \chi & \text{se } k = 1, \\ \chi & \text{se } k = 0, \\ \sinh \chi & \text{se } k = -1. \end{cases} \quad (3.34)$$

3.1 Geometria per spazi a curvatura costante

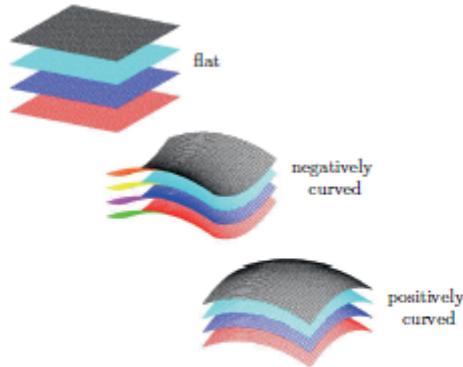


Figure 1.2: The spacetime of the universe can be foliated into flat, positively curved or negatively curved spatial hypersurfaces.

$k=+1$

Usando la metrica FRW nella forma (3.33) si ha che:

$$S_k(\chi) = \sin \chi \tag{3.35}$$

Quindi

$$d\sigma^2 = a_0^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \tag{3.36}$$

Questa superficie può essere visualizzata come immersa in uno spazio quadridimensionale Euclideo di coordinate (w,x,y,z) con:

$$\begin{cases} w = a \cos \chi \\ x = a \sin \chi \sin \theta \cos \phi \\ y = a \sin \chi \sin \theta \sin \phi \\ z = a \sin \chi \cos \theta. \end{cases} \tag{3.37}$$

poiché

$$d\sigma^2 \equiv dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{3.38}$$

si dimostra essere uguale all'espressione (3.36).

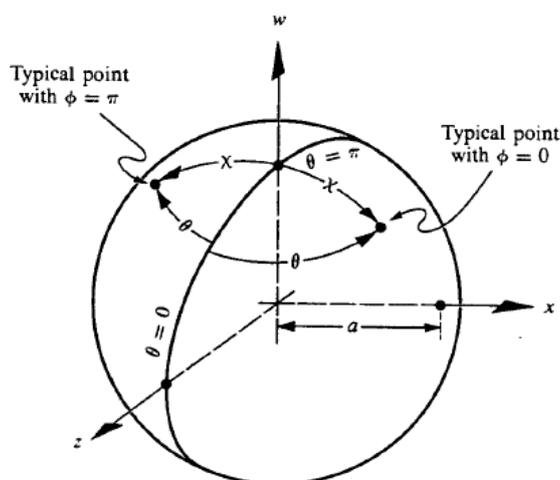
Inoltre,

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \tag{3.39}$$

cioè l'ipersuperficie può essere considerata come una sfera 3-dimensionale in uno spazio Euclideo 4-dimensionale.

Le coordinate variano negli intervalli seguenti:

$$0 \leq \chi \leq \pi \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \quad (3.40)$$



A 3-surface of positive curvature embedded in four-dimensional Euclidean space. One rotational degree of freedom is suppressed by setting $\phi = 0$ and π ("slice through pole," 3-sphere in 4-space looks like a 2-sphere in 3-space).

L'area della superficie a χ costante è:

$$A_\chi = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} (a \sin \chi d\theta)(a \sin \chi \sin \theta d\phi) = 4\pi a^2 \sin^2 \chi \quad (3.41)$$

Per χ che varia da 0 a π , l'area delle superfici a χ costante da $\chi = 0$ aumenta rapidamente, poi verso $\chi = \pi/2$ riduce la velocità e successivamente diminuisce con velocità crescente fino a $\chi = \pi$ in cui l'area si annulla. Mentre il volume è:

$$V = \int_{\chi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} (a d\chi)(a \sin \chi d\theta)(a \sin \chi \sin \theta d\phi) = 2\pi^2 a^3 \quad (3.42)$$

La topologia di questo spazio è detta *chiusa*. Quella dell'intero spaziotempo è definita *cilindrica*, poiché è data da $\mathbb{R} \times S^3$ dove S^3 indica la 3-sfera.

k=0

In questo caso si tratta di uno spazio Euclideo tridimensionale perfettamente piatto di coordinate (x,y,z):

$$\begin{cases} x = a\chi \sin \theta \cos \phi \\ y = a\chi \sin \theta \sin \phi \\ z = a\chi \cos \theta. \end{cases} \quad (3.43)$$

La metrica assume la forma semplice:

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.44)$$

La superficie è descritta da:

$$0 \leq \chi < \infty \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \quad (3.45)$$

Il volume in questo caso risulta ∞ .

Nonostante la richiesta di omogeneità ed isotropia determini completamente le proprietà geometriche locali dell'ipersuperficie, la topologia globale resta indeterminata.

Ad esempio, per questa metrica, si può prendere un cubo di spigolo L

$$0 < x < L, \quad 0 < y < L, \quad 0 < z < L, \quad (3.46)$$

e porre l'uguaglianza tra le facce opposte.

L'elemento di linea resta lo stesso, ma le coordinate spaziali diventano "cicliche", cioè ritornano in sé stesse dopo una distanza L.

L'ipersuperficie è adesso rappresentata da un 3-toro di volume finito $V = a^3 L^3$.

k=-1

Poiché

$$S_k(\chi) = \sinh \chi \quad (3.47)$$

la metrica è:

$$d\sigma^2 = a^2[d\chi^2 + \sinh^2 \chi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad (3.48)$$

Non si può immergere questo tipo di superficie in uno spazio Euclideo come nei casi precedenti, ma occorre utilizzare uno spazio piatto di Minkowski di coordinate (w,x,y,z), tale che:

$$d\sigma^2 = -dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.49)$$

con:

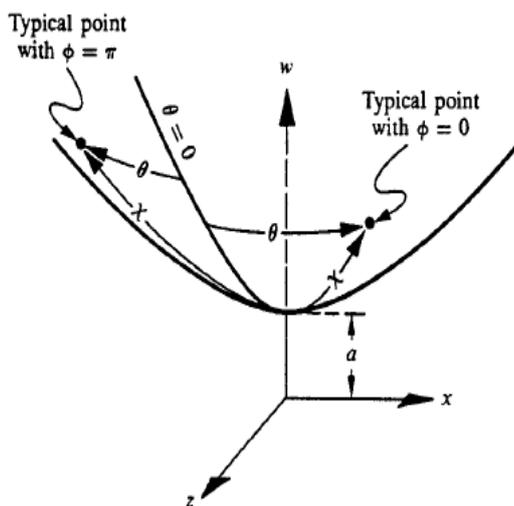
$$\begin{cases} w = a \cosh \chi \\ x = a \sinh \chi \sin \theta \cos \phi \\ y = a \sinh \chi \sin \theta \sin \phi \\ z = a \sinh \chi \cos \theta. \end{cases} \quad (3.50)$$

Le equazioni sopra implicano che:

$$w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = a^2 \quad (3.51)$$

cioè l'ipersuperficie è un'iperboloide 3-dimensionale in uno spazio di Minkowski 4-dimensionale. Le coordinate variano negli intervalli seguenti:

$$0 \leq \chi < \infty \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \quad (3.52)$$



A 3-surface of negative curvature embedded in four-dimensional Minkowski space. One rotational degree of freedom is suppressed by setting $\phi = 0$ and π ("slice through pole"; 3-hyperboloid in 4-space looks like 2-hyperboloid in 3-space).

Le superfici a χ costante sono delle 2-sfere di area:

$$A_\chi = 4\pi a^2 \sinh^2 \chi \quad (3.53)$$

e per grandi χ , l'area aumenta molto più velocemente di quello che farebbe se le superfici fossero piatte. Il volume, anche in questo caso assume valore infinito.

La topologia è \mathbb{R}^4 ed è detta *aperta*, come nel caso precedente.

3.2 Equazioni di Friedmann

Le equazioni di campo di Einstein sono:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (3.54)$$

Il primo membro non è univocamente definito, può essere introdotto un termine aggiuntivo, detto *termine cosmologico*: $\Lambda g_{\mu\nu}$ senza violare l'identità di Bianchi ($\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$) e la conservazione del tensore energia-impulso.

Infatti, poiché $\nabla^\mu g_{\mu\nu} = 0$, inserendo il termine termine cosmologico nelle equazioni di campo si ha:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (3.55)$$

e applicando la derivata covariante ad entrambi i membri si può verificare che le conservazioni di G e T vengono mantenute invariate.

Fu Einstein stesso ad aggiungere il termine costante Λ proporzionale alla metrica, allo scopo di impedire soluzioni di Universo in evoluzione, nella convinzione che questo dovesse essere statico. La scoperta di Hubble dell'espansione dell'Universo portò Einstein a rivedere le sue equazioni e così, deluso, abbandonò Λ , definendolo il più grande abbaglio della sua vita.

Nonostante ciò, dalla scoperta del 1998 dell'espansione accelerata dell'Universo, è stato necessario reintrodurre il termine cosmologico, anche se con un significato diverso.

Dal postulato di Weyl, il fluido cosmico è un fluido perfetto, quindi deve valere la seguente relazione per il tensore energia-impulso:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu - pg_{\mu\nu} \quad (3.56)$$

Per un osservatore comovente al fluido cosmico $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$ e il tensore assume forma diagonale: $T_{\mu\nu} = (\rho, -p, -p, -p)$.

Inserendo l'espressione della metrica FRW (3.32) nelle equazioni di campo (3.55) si ottengono due equazioni:

$$\begin{cases} 3\frac{\dot{a}^2+k}{a^2} - \Lambda = 8\pi\rho \\ \frac{2a\ddot{a}+\dot{a}^2+k}{a^2} - \Lambda = -8\pi p \end{cases} \quad (3.57)$$

Differenziando la prima rispetto al tempo e dividendo per 8π :

$$\frac{3}{8\pi} \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{2a\ddot{a} - 2\dot{a}^2 - 2k}{a^2} \right) = \dot{\rho} \quad (3.58)$$

Sottraendo la seconda, moltiplicata per $\frac{3}{8\pi} \frac{\dot{a}}{a}$:

$$\frac{3}{8\pi} \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{-3\dot{a}^2 - 3k}{a^2} - \Lambda \right) = \dot{\rho} + 3p \frac{\dot{a}}{a} \quad (3.59)$$

Ma l'espressione tra parentesi è la prima equazione, quindi:

$$\begin{aligned} -\frac{3}{8\pi} \frac{\dot{a}}{a} (8\pi\rho) &= \dot{\rho} + 3p \frac{\dot{a}}{a} \\ \dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} (p + \rho) &= 0 \end{aligned} \quad (3.60)$$

Moltiplicando per a^3 :

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) + p \frac{d}{dt}(a^3) = 0 \quad (3.61)$$

Siccome $V \simeq a^3(t)$, l'equazione può essere scritta come:

$$dE + p dV = 0 \quad (3.62)$$

cioè la prima legge della termodinamica, che stabilisce la conservazione dell'energia.

Si può ottenere la stessa equazione (3.60) dalla conservazione del tensore energia-impulso:

Dimostrazione.

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 \quad (3.63)$$

che deriva dall'identità di Bianchi $\nabla_{\mu} G^{\mu\nu} = 0$.

$$\partial_{\mu} T_0^{\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} T_0^{\lambda} - \Gamma_{\mu 0}^{\lambda} T_{\lambda}^{\mu} = 0 \quad (3.64)$$

Per la componente $\nu = 0$:

$$\nabla_{\mu} T_{\nu}^{\mu} = \partial_{\mu} T_{\nu}^{\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} T_{\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} T_{\lambda}^{\mu} = 0 \quad (3.65)$$

e poiché $T_0^i = 0$ per isotropia:

$$\frac{d\rho}{dt} + \Gamma_{\mu 0}^{\mu} \rho - \Gamma_{\mu 0}^{\lambda} T_{\lambda}^{\mu} = 0 \quad (3.66)$$

Si può mostrare che $\Gamma_{\mu 0}^{\lambda} \neq 0$ solo se $\lambda = \mu$ e $\Gamma_{\mu 0}^{\mu} = \dot{a}/a$. Quindi si riottiene la (3.60). \square

Nell'Universo odierno il rapporto tra pressione e densità è circa 10^{-5} o 10^{-6} , per cui, a patto di non allontanarsi troppo dall'epoca presente, la pressione può essere trascurata e posta $p = 0$. La seconda equazione di Friedmann può essere integrata, fornendo come risultato:

$$a(\dot{a}^2 + k) - \frac{1}{3}\Lambda a^3 = C \quad (3.67)$$

con C che viene fissato dalla prima equazione al valore

$$C = \frac{8}{3}\pi a^3 \rho \quad (3.68)$$

Quindi si ha l'espressione

$$\dot{a}^2 = \frac{8}{3}\pi a^2 \rho + \frac{1}{3}\Lambda a^2 - k \quad (3.69)$$

che è l'equazione di Friedmann in assenza di pressione.

Si può notare, come già anticipato, la somiglianza con l'equazione ottenuta con il modello newtoniano (2.11).

3.3 Modelli Cosmologici

Per modellizzare l'evoluzione dell'Universo, si ricava l'andamento di $a(t)$ risolvendo l'equazione di Friedmann (3.69) nei casi principali corrispondenti ai tre valori del parametro di curvatura k e al segno di Λ .

Spazio piatto: $k = 0$

L'equazione (3.69) diventa:

$$\dot{a}^2 = \frac{C}{a} + \frac{1}{3}\Lambda a^2 \quad (3.70)$$

dove C è la costante data da (3.68).

- $\Lambda > 0$:

Si introduce una nuova variabile

$$u = \frac{2\Lambda}{3C} a^3 \quad (3.71)$$

La cui derivata è:

$$\dot{u} = \frac{2\Lambda}{C} a^2 \dot{a} \quad (3.72)$$

Elevando al quadrato quest'ultima e sostituendo l'equazione (3.70):

$$\dot{u}^2 = \frac{4\Lambda^2}{C^2} a^4 \left(\frac{C}{a} + \frac{1}{3} \Lambda a^2 \right) = \frac{4\Lambda^2}{C} a^3 + \frac{4\Lambda^3}{3C^2} a^6 \quad (3.73)$$

Inserendo l'espressione di u e estraendo la radice:

$$\dot{u} = \sqrt{3\Lambda(2u + u^2)} \quad (3.74)$$

Questa espressione può essere facilmente integrata per separazione di variabili:

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{2u + u^2}} = \int_0^t \sqrt{3\Lambda} dt = \sqrt{3\Lambda} t \quad (3.75)$$

L'integrale a sinistra si può risolvere ponendo prima $v = u + 1$ e poi $\cosh w = v$:

$$\int_1^v \frac{dv}{\sqrt{v^2 - 1}} = \int_0^w \frac{\sinh w dw}{\sqrt{\cosh^2 w - 1}} = w \quad (3.76)$$

Eguagliando i due risultati e ripristinando a:

$$\cosh(\sqrt{3\Lambda} t) = \frac{2\Lambda}{3C} a^3 + 1 \quad (3.77)$$

$$a^3 = \frac{3C}{2\Lambda} [\cosh(\sqrt{3\Lambda} t) - 1] \quad (3.78)$$

- $\Lambda = 0$:

Si può procedere in due modi:

- Con un'espansione in serie il coseno iperbolico si esprime:

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (3.79)$$

da sostituire in (3.77):

$$a^3 = \frac{3C}{2\Lambda} \left[\left(1 + \frac{3\Lambda t^2}{2} + \frac{3\Lambda^2 t^4}{8} + \dots \right) - 1 \right] \quad (3.80)$$

Nel limite $\Lambda \rightarrow 0$:

$$a^3 = \frac{9}{4} C t^2 \quad (3.81)$$

che specifica quello che viene chiamato *modello di Einstein-De Sitter*.

– Altrimenti, (3.69) diventa:

$$\dot{a}^2 = \frac{C}{a} \quad (3.82)$$

che integrata per separazione di variabili dà come risultato

$$\frac{2}{3}a^3 = \sqrt{C}t \quad (3.83)$$

da cui si ottiene di nuovo (3.81)

- $\Lambda < 0$:

Si ripetono gli stessi passaggi del caso $\Lambda > 0$, usando stavolta

$$u = \frac{2\Lambda}{3C}a^3 \quad (3.84)$$

e si trova

$$a^3 = -\frac{3C}{2\Lambda}[1 - \cos(\sqrt{-3\Lambda}t)] \quad (3.85)$$

Dei tre casi analizzati, questo è l'unico che non cresce senza limiti, ma presenta un minimo per

$$a^* = \left(\frac{3C}{-\Lambda}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.86)$$

Dalle espressioni per a ricavate sopra si possono ricavare parametri importanti come $H(t)$ e $q(t)$.

Ad esempio, nel caso di Einstein-De Sitter (3.81):

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t} \quad (3.87)$$

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = \frac{1}{2} \quad (3.88)$$

Costante cosmologica nulla: $\Lambda = 0$

Il caso con il termine cosmologico nullo è stato studiato dagli scienziati tra il 1929 e gli anni '90, quando le nuove evidenze osservative riportarono l'interesse su Λ , soprattutto la scoperta nel 1998 dell'espansione accelerata dell'Universo.

L'equazione di Friedmann (3.69) diventa:

$$\dot{a}^2 = \frac{C}{a} - k \quad (3.89)$$

- Considerando inizialmente il caso con $k=+1$, si effettua un cambio di variabile:

$$u^2 = \frac{a}{C} \quad (3.90)$$

La cui derivata è:

$$\dot{u} = \frac{\dot{a}}{2uC} \quad (3.91)$$

Elevando al quadrato quest'ultima e sostituendo l'equazione (3.89):

$$\dot{u}^2 = \frac{\dot{a}^2}{4C^2u^2} = \frac{1}{4C^2u^2} \left(\frac{C}{a} - 1 \right) \quad (3.92)$$

Inserendo l'espressione di u e estraendo la radice:

$$\dot{u} = \frac{1}{2cu} \sqrt{\frac{1}{u^2} - 1} \quad (3.93)$$

Questa espressione può essere facilmente integrata per separazione di variabili:

$$2 \int_0^u \frac{u^2 du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{C} \int_0^t dt = \frac{t}{C} \quad (3.94)$$

L'integrale a sinistra si può risolvere ponendo $u = \sin \theta$ e poi usando le formule di bisezione:

$$2 \int_0^\theta \frac{\sin^2 \theta \cos \theta d\theta}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} = \int_0^\theta (1 - \cos(2\theta)) d\theta = \theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) = \theta - \sin \theta \cos \theta \quad (3.95)$$

Eguagliando i due risultati e ripristinando a :

$$C[\sin^{-1} \sqrt{a/C} - \sqrt{(a/C)(1-a/C)}] = t \quad (3.96)$$

Questo è l'unico caso per cui si ha un minimo, in corrispondenza di $C = a$.

- Allo stesso modo si ottiene la soluzione per $k=-1$:

$$C[\sqrt{(a/C)(1+a/C)} - \sinh^{-1} \sqrt{(a/C)}] = t \quad (3.97)$$

Per t grandi, $a \sim t$ perché $\dot{a} \sim 1$.

- Invece, il caso $k=0$, $\Lambda = 0$ è stato studiato in precedenza e dà luogo al modello di Einstein-De Sitter (3.81).

Modello di De Sitter: $k = 0, p = \rho = 0$

Il modello di De Sitter si ottiene ponendo $\rho = p = k = 0$, in modo che la dinamica dell'Universo è dominata dalla costante cosmologica.

Ad oggi, secondo il modello dell'inflazione e le osservazioni sull'espansione, si pensa che l'Universo si sia sviluppato come Universo di De Sitter nelle sue prime fasi e vi tenderà nel futuro.

In questo caso si ha che la prima equazione di Friedmann (??) diventa:

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \Lambda = 0 \quad (3.98)$$

Che integrata per separazione di variabili fornisce:

$$a = Ae^{\sqrt{\frac{1}{3}}\Lambda t} \quad (3.99)$$

con A costante di integrazione, che può essere eliminata da un riscalamento di r. Quindi, nel modello di De Sitter si ha un andamento del tipo

$$a = e^{\sqrt{\frac{1}{3}}\Lambda t} \quad (3.100)$$

L'elemento di linea assume quindi la forma:

$$ds^2 = dt^2 - e^{2\sqrt{\frac{1}{3}}\Lambda t} [d\chi^2 + \chi^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \quad (3.101)$$

che risulta invariante per traslazioni temporali (se compensate da un riscalamento spaziale). Inoltre, il parametro di Hubble è dato da una costante:

$$H = \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda} \quad (3.102)$$

e il parametro di decelerazione è $q = -1$.

Viene soddisfatto così il principio cosmologico perfetto, per cui l'Universo è omogeneo e isotropo nell'intero spaziotempo.

In tutti i modelli considerati, negli istanti iniziali a è piccolo e quindi in (3.69) il termine C/a è dominante, per cui per t piccoli si ha un andamento di a come previsto dal modello di Einstein-De Sitter (3.81), cioè proporzionale a $t^{\frac{2}{3}}$. Asintoticamente, invece, domina il termine $\frac{1}{3}\Lambda a^2$ per cui l'andamento è modellizzato efficacemente da (3.100).

4 Redshift

La conoscenza dell'Universo dipende dalle informazioni trasmesse da oggetti lontani attraverso la luce.

Per interpretare correttamente questi dati è quindi fondamentale considerare come l'espansione agisca sullo spettro della luce deviandolo verso il rosso (redshift).

Le prime evidenze di un redshift sistematico delle linee spettrali da parte degli oggetti lontani fu data da Vesto Slipher nel 1912.

Wirtz e Lundmark aggiunsero che i redshift aumentavano con la distanza delle nebulose. Hubble, nel 1929 presentò la sua legge, alla base del modello di Universo in espansione, basandosi su questi dati.

Si considera un osservatore O che si trova nell'origine delle coordinate $r=0$ (senza perdita di generalità poiché le ipersuperfici a t costante sono omogenee) e che riceve la radiazione emessa da una galassia in allontanamento.

La luce si muove su una geodetica nulla ($ds^2 = 0$) radiale ($d\theta = d\phi = 0$ per una libera rotazione del sistema di riferimento):

$$\frac{dt}{a(t)} = \pm \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (4.1)$$

dove il segno positivo si riferisce ad un segnale in allontanamento e il segno - a un avvicinamento.

Se il raggio di luce è emesso da P a $t = t_p$ dalla linea di mondo $r = r_p$ e ricevuto da O in $t = t_o$:

$$\int_{t_p}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = - \int_{r_p}^{r_o=0} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = f(r_p) \quad (4.2)$$

dove $f(r_p)$ è data da:

$$f(r_p) = \begin{cases} \sin^{-1} r_p & \text{se } k = +1, \\ r_p & \text{se } k = 0, \\ \sinh^{-1} r_p & \text{se } k = -1. \end{cases} \quad (4.3)$$

Se si considerano due raggi emessi da P a $t = t_p$ e $t = t_p + dt_p$ e ricevuti da O a $t = t_o$ e $t = t_o + dt_o$:

$$\int_{t_p+dt_p}^{t_o+dt_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_p}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} \quad (4.4)$$

perché entrambi uguali a $f(r_p)$. Quindi

$$\int_{t_p+dt_p}^{t_o+dt_o} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_p}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_o}^{t_o+dt_o} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_p}^{t_p+dt_p} \frac{dt}{a(t)} = 0 \quad (4.5)$$

Se si assume che $a(t)$ non vari troppo, può essere portato fuori dagli ultimi due integrali e si ottiene:

$$\frac{dt_o}{a(t_o)} = \frac{dt_p}{a(t_p)} \quad (4.6)$$

La frequenza osservata è legata alla frequenza emessa da:

$$\frac{\nu_o}{\nu_p} = \frac{dt_p}{dt_o} = \frac{a(t_p)}{a(t_o)} \quad (4.7)$$

Si definisce convenzionalmente il *parametro di redshift* z :

$$z \equiv \frac{\lambda_o - \lambda_p}{\lambda_p} \quad (4.8)$$

ma poiché $\lambda_o/\lambda_p = \nu_p/\nu_o$:

$$1 + z = \frac{\nu_p}{\nu_o} = \frac{a(t_o)}{a(t_p)} \quad (4.9)$$

Se $z > 0$ allora $\lambda_o > \lambda_p$ cioè viene registrata una lunghezza maggiore di quella emessa e si parla di redshift.

Se $z < 0$ si tratta di blueshift.

Poiché l'Universo è in espansione, $a(t_o) > a(t_p)$ e quindi si osserva un redshift, come si vede dalla (4.9).

Se P e O sono in qualche senso poco distanti, si ha $t_o = t_p + dt$:

$$1 + z = \frac{a(t_o)}{a(t_o - dt)} \simeq \frac{a(t_o)}{a(t_o) - \dot{a}(t_o)dt} \simeq 1 + \frac{\dot{a}(t_o)}{a(t_o)}dt \quad (4.10)$$

Dove nell'ultimo passaggio si è usata l'approssimazione di serie geometrica al primo ordine. Inserendo la relazione tra t_o e t_p nell'integrale seguente:

$$\int_{t_p}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_p}^{t_p+dt} \frac{dt}{a(t)} \simeq \frac{dt}{a(t_p)} = \frac{dt}{a(t_o - dt)} \simeq \frac{dt}{a(t_o)} \quad (4.11)$$

Ma per la relazione (4.3): E per piccoli r_p si ha che $f(r_p) \simeq r_p$, da cui:

$$\frac{dt}{a(t_o)} \simeq r_p \quad (4.12)$$

Dalla (4.10):

$$z \simeq \dot{a}(t_o)r_p \quad (4.13)$$

Interpretando z come velocità di recessione, si è ottenuta così una legge simile a quella di Hubble.

5 Misure di distanza

Per misurare la distanza di un oggetto fuori dalla nostra galassia, si usano essenzialmente due metodi pratici: la distanza di luminosità e la distanza di diametro angolare. Queste distanze, misurate in modi diversi, in generale differiscono tra loro, quindi si esprimono in termini di redshift per poterle confrontare.

Distanza metrica

Si può definire innanzitutto la *distanza metrica*, che non è direttamente osservabile. Si tratta di

$$d_m = S_k(r) \quad (5.1)$$

dove si ricorda che:

$$S_k(\chi) = \begin{cases} \sinh^{-1} \chi & \text{se } k=-1, \\ \chi & \text{se } k=0, \\ \sin^{-1} \chi & \text{se } k=+1 \end{cases} \quad (5.2)$$

Poiché in un Universo piatto $k = 0 \rightarrow d_m = \chi$, si può scrivere

$$\chi(z) = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^z \frac{dz}{H(z)} \quad (5.3)$$

dove $H(z)$ dipende dal contenuto di materia dell'Universo.

Distanza di luminosità

La luminosità è definita come la quantità totale di energia emessa da un oggetto astronomico per unità di tempo.

Vale la seguente espressione per la densità di flusso sulla superficie illuminata:

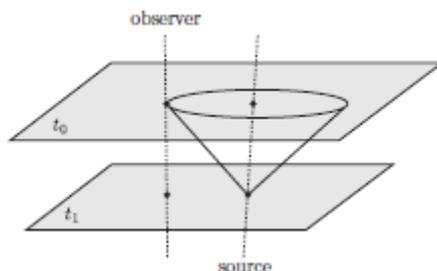
$$F = \frac{L}{A} \quad (5.4)$$

dove A indica l'area della superficie illuminata e L la luminosità assoluta della sorgente.

In uno spazio Euclideo statico si avrebbe:

$$F = \frac{L}{4\pi\chi^2} \quad (5.5)$$

dove χ si riferisce alla distanza comovente fissa dell'oggetto emittente.



Va tenuto conto che si sta considerando uno spazio governato dalla metrica FRW, quindi l'area della sfera generata attorno alla sorgente e che passa per la Terra è, più correttamente, $4\pi d_m^2$.

Inoltre, il redshift influenza il tempo di arrivo dei fotoni, che, come si vede da (4.9), è aumentato di un fattore $(1+z)$ rispetto all'emissione.

Essendo l'energia proporzionale a $1/a$, risulta che quella osservata sia inferiore a quella emessa per lo stesso fattore $(1+z)$ (come si può evincere dalla stessa equazione (4.9)).

Da ciò:

$$F = \frac{L}{4\pi d_m^2 (1+z)^2} \quad (5.6)$$

Definendo la *distanza di luminosità* come:

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}} \quad (5.7)$$

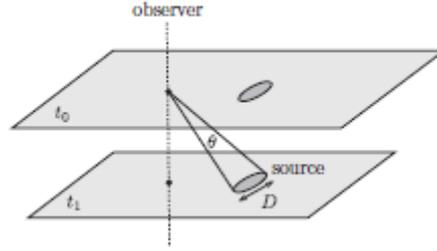
in modo da riottenere una forma simile a quella classica, si ha

$$d_L = (1+z)d_m \quad (5.8)$$

Distanza di diametro angolare

Conoscendo oggetti di dimensione D e di distanza comovente χ , che emettono al tempo t_1 , si può definire la distanza

$$d_A = \frac{D}{\delta\theta} \quad \text{se } \delta\theta \ll 1 \text{ (verificato per tutti gli oggetti cosmologici)} \quad (5.9)$$



Dalla metrica FRW (3.33) e ponendo $a(t_0) = 1$ con un riscalamento:

$$D = a(t_1) S_k(\chi) \delta\theta = \frac{d_m}{1+z} \delta\theta \quad (5.10)$$

Le due distanze esposte in precedenza sono legate dalla relazione:

$$d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2} \quad (5.11)$$

Distanza di moto proprio

Se la sorgente si muove con velocità V_\perp trasversale rispetto alla linea di vista, in un tempo Δt_0 si muove di una distanza propria:

$$\Delta D = V_\perp \Delta t_1 = V_\perp \Delta t_0 \frac{a(t_1)}{a(t_0)} \quad (5.12)$$

Inoltre, appare muoversi di una distanza angolare:

$$\Delta\theta = \frac{\Delta D}{a(t_1) d_m} = \frac{V_\perp \Delta t_0}{a(t_0) d_m} \quad (5.13)$$

Si definisce la distanza di moto proprio:

$$d_P \equiv \frac{V_\perp}{\mu} \quad \mu \equiv \frac{\Delta\theta}{\Delta t_0} \quad (5.14)$$

Quindi:

$$d_P = a(t_0) d_m \quad (5.15)$$

Chiaramente questa distanza può essere utilizzata soltanto conoscendo a priori la velocità trasversale.

$$d_P = \frac{d_L}{1+z} \quad (5.16)$$

ponendo nuovamente $a(t_0) = 1$.

Quindi conoscendo il redshift z accuratamente, le varie misure di distanza possono essere considerate equivalenti.

5.1 La scala delle distanze

Conoscendo L si può misurare la distanza di luminosità come illustrato in precedenza. La parte difficile, però, è proprio ottenere L .

In seguito saranno esposti vari metodi, in ordine crescente di massima lontananza delle galassie di cui si riesce a misurare la distanza.

Metodi cinematici

Si può misurare la distanza delle stelle più vicine senza conoscere L utilizzando dei metodi cinematici.

Un esempio è il Sole, la cui distanza fu misurata per la prima volta con discreta accuratezza nel 1672 da Richer e Cassini.

Si conoscevano già le distanze di tutti i pianeti rispetto al Sole, in rapporto alla distanza del Sole dalla Terra (1 AU), quindi bastava conoscere una sola di queste distanze in metri per poter ricavare a quanto corrispondesse l'Unità Astronomica e da lì riottenere tutte le altre distanze.

Nel 1672 Marte, il pianeta più vicino alla Terra, si trovava in opposizione e quindi in una posizione particolarmente favorevole per misure di distanza accurate.

Cassini si recò a Parigi, mentre il suo collega Richer a Cayenne, nella Guyana Francese, ed entrambi misurarono la distanza di Marte dalla Terra.

Conoscendo la distanza tra le due città (6000 miglia circa), calcolarono la posizione del pianeta per triangolazione.

E' possibile applicare metodi simili nella determinazione delle distanze di altre stelle vicine.

Nei primi anni del '900, si è sviluppato un metodo per misurare la distanza da alcuni cluster vicini in movimento.

Questi cluster consistono in stelle che si muovono attraverso la galassia con velocità uguali e parallele.

La velocità radiale delle stelle si determina dall'effetto Doppler $\Delta\nu/\nu$ dello spettro, mentre la componente trasversale alla linea di vista della velocità può essere espressa attraverso d_P .

Si misura la distanza considerando che le stelle del cluster si muovono alla stessa velocità.

$$v_{\perp} = v_r \tan \Phi \quad (5.17)$$

con Φ angolo ignoto tra la velocità della stella e la linea di vista.
Sostituendo l'espressione per d_P (5.14):

$$d_P \mu = v_r \tan \Phi \quad (5.18)$$

Si può ricavare Φ da una distribuzione di un campione di stelle del cluster e dall'espressione calcolare la distanza ignota.

Sequenza principale

Se si usa uno dei metodi esposti in precedenza per determinare la distanza, si può ricavare L dalla (5.7).

Nel 1905-1915 è stato così scoperto, da Hertzsprung e Russell, che le stelle che si trovano in *sequenza principale* soddisfano una rigida relazione tra luminosità assoluta e tipo spettrale.

Quindi è sufficiente conoscere il tipo spettrale di una stella per determinarne la distanza. Dai cluster di stelle, che sono alla stessa distanza dalla Terra, si può ricavare la sequenza principale da un plot della luminosità in funzione dei loro tipi spettrali.

Lo svantaggio di questo metodo è che tipicamente le stelle di sequenza principale sono poco brillanti, quindi difficilmente risolvibili se molto lontane.

Stelle variabili

Le due classi RR Lyrae (periodo di qualche ora/un giorno) e delle Cefeidi (periodo da 2 a 40 giorni) sono particolarmente utili nella determinazione delle distanze.

La magnitudine delle RR Lyrae è ben conosciuta, attraverso studi statistici o trigonometrici quando presenti nei cluster globulari, e si è trovato essere sempre la stessa.

Quindi, riconoscendo queste stelle dal loro breve periodo, è possibile legare la magnitudine alla distanza.

Tuttavia, le RR Lyrae sono poco brillanti e quindi possono essere osservate solo a relativamente brevi distanze.

Le Cefeidi sono più brillanti, ma hanno luminosità assolute molto più variabili.

Però una relazione lega il periodo delle Cefeidi alla loro luminosità, calibrata nel corso degli anni.

Queste stelle variabili, insieme, permettono di determinare le distanze per tutti i membri del gruppo locale.

Oltre il gruppo locale

Per ottenere le distanze di oggetti più lontani del gruppo locale, servono indicatori di distanza più luminosi delle stelle variabili considerate in precedenza, ma comunque presenti in gran numero nel gruppo locale per essere studiati compiutamente.

Dal 1917, si usano le novae, rapidi innalzamenti nella luminosità delle stelle, che si verificano con una frequenza di circa 40 volte all'anno.

In genere sono difficili da risolvere perché si trovano perlopiù nelle regioni centrali delle galassie.

Altrimenti, si usano le stelle più brillanti delle galassie.

Infatti, da un'indagine sul gruppo locale si è visto che la luminosità massima delle stelle di ogni galassia è solitamente ben definita.

Con questo metodo si arriva fino a distanze di circa 10^7 parsec perché poi non si riescono a distinguere bene le stelle.

Oppure, si utilizzano corpi non stellari, come nubi di idrogeno ionizzate e luminose per la presenza di stelle vicine. Il loro diametro angolare viene usato per stimare la distanza, arrivando fino a circa 10^8 parsec.

Un'altra alternativa è usare la distribuzione di luminosità e studiare le proprietà del massimo.

Negli anni '70 si è concentrato lo studio sui cluster globulari, ipotizzando che abbiano una luminosità massima ben definita da cui poter ricavare la distanza.

Allo stesso modo, a distanze di interesse cosmologico, si utilizzano le galassie più brillanti. Hubble, nel 1936 cominciò a studiarne le distanze, usando la quinta galassia più luminosa di un cluster per minimizzare gli errori di osservazione.

Tuttavia, si tratta di dati empirici, per cui si potrebbe in realtà aver sottostimato la distanza di galassie molto distanti e poco studiate.

Bibliografia

- Ray D’Inverno, "Introducing Einstein’s Relativity", Oxford University Press, 1998
- Steven Weinberg "Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity", John Wiley & sons, 1972
- Sean Carroll, "Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity", 2004
- Daniel Baumann, "Cosmology", Part III, University of Cambridge, Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics
- Charles Misner, Kip Thorne, John Arcibald Wheeler, "Gravitation", W.H. Freeman and company, 1973
- Barbara Sue Ryden, "Introduction to Cosmology", Addison Wesley, 2003
- Wikipedia