

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Teoria del condensato di Bose-Einstein

Relatore:
Prof. Elisa Ercolessi

Presentata da:
Enrico Cofler

Anno Accademico 2016/2017

Indice

Introduzione	2
1 Il gas di Bose ideale in una trappola armonica	4
1.1 Condensato di bosoni non interagenti	4
1.2 Profilo di densità e distribuzione della velocità	7
1.3 Distribuzione semi-classica per gas degeneri nello stato eccitato	10
1.4 Espansione libera	10
2 Fenomeni fisici nel condensato non ideale	13
2.1 Interazioni tra atomi	13
2.2 Estensione finita del sistema	19
2.3 Dimensionalità del sistema	22
3 Teoria dello stato condensato	26
3.1 L'equazione di Gross-Pitaevskii	26
3.2 Lo stato fondamentale: metodo variazionale e approssimazione di Thomas-Fermi	29
4 Dinamica del condensato	35
4.1 Formulazione idrodinamica	35
4.2 Eccitazioni elementari	40
4.3 Superfluidità e condensato di Bose-Einstein	46
Conclusioni	51
Bibliografia	54

Introduzione

All'inizio del ventesimo secolo, lo studio della natura quantistica della radiazione elettromagnetica ebbe importanti sviluppi. Max Planck per primo determinò che la radiazione di corpo nero è comprensibile solamente ammettendo che la materia emette energia sotto forma di radiazione in quanti discreti. Ciò portò Albert Einstein nel 1905 a concludere che è la radiazione stessa ad essere quantizzata, in quanti di luce chiamati successivamente fotoni, e negli anni seguenti gli studi sulla natura quantizzata della luce vennero approfonditi ulteriormente.

Nel 1924, il fisico S.N. Bose della Dacca University in India mandò a Einstein un articolo in cui la legge di distribuzione di Planck per i fotoni era stata ottenuta sfruttando esclusivamente argomentazioni statistiche, senza ricorrere ad alcun risultato dell'elettrodinamica classica. Einstein comprese l'importanza di tale risultato, ed elaborò egli stesso in breve tempo la teoria quantistica delle particelle bosoniche: nacque così il concetto di particelle obbedienti alla statistica di Bose-Einstein, che oggi sappiamo esser caratteristica delle entità fisiche con spin intero. Einstein osservò che, ammettendo la conservazione del numero di particelle, anche un sistema non interagente di particelle esibisce una brusca transizione di fase a temperature sufficientemente basse. Tale transizione è definita come condensazione di Bose-Einstein. Questa è caratterizzata da un'occupazione macroscopica dello stato energetico più basso per un sistema costituito da molte particelle. Per un lungo tempo, questo è stato l'unico sistema fisico conosciuto ad esibire questo particolare fenomeno.

Dopo l'osservazione del comportamento superfluido dell'elio ^4He , London propose nel 1938 che tale fenomeno potesse essere la manifestazione della condensazione bosonica degli atomi di elio. Fu così che soprattutto negli anni '50 e '60 lo studio teorico di sistemi di bosoni portò a nuove conoscenze sia sul condensato di Bose-Einstein, sia su fenomeni ad essi collegati, come superfluidità e superconduttività. Nel 1947 Bogoliubov derivò lo spettro energetico per fononi per insiemi di particelle debolmente interagenti, aprendo la strada allo studio di questo tipo di sistemi. Dopo lo sviluppo del raffreddamento laser e delle prime trappole ottiche negli anni '60 e '70, crebbe l'interesse nella realizzazione del condensato di Bose-Einstein in un sistema diluito di atomi gassosi. Venne realizzato per la prima volta con atomi di ^{87}Rb sfruttando il raffreddamento evaporativo in una

trappola magnetica dal gruppo JILA, guidato da Cornell e Wieman, seguiti da Ketterle del MIT solo pochi mesi dopo, nel 1995. Per questi traguardi, i tre fisici vinsero il nobel nel 2001. Inoltre, diversamente dalla situazione dell'elio liquido, i sistemi gassosi diluiti erano ben descritti dalle teorie esistenti, in particolare dall'equazione di Gross-Pitaevskii. Ciò portò, in seguito alla realizzazione del primo condensato, a un considerevole sviluppo teorico e sperimentale per comprendere meglio le proprietà statiche e dinamiche del sistema.

Si è ottenuta la condensazione con molti altri gas di metalli alcalini e non, aumentando sempre più la quantità di particelle che costituiscono il condensato. Ad oggi, si riescono ad ottenere condensati con popolazione fino a $10^4 - 10^8$ particelle con densità di $10^{13} - 10^{15} \text{ cm}^{-3}$. Si sono inoltre osservati molti fenomeni quantistici caratteristici, come figure di interferenza date dalla coerenza di fase e dall'interazione di due nubi di condensato e il presentarsi di vortici quantizzati. La condensazione di Bose-Einstein nei gas diluiti offre oggi grandi possibilità di studi per i processi quanto-meccanici fondamentali. Il suo comportamento può essere utilizzato per amplificare effetti quantistici a scale macroscopiche, permettendoci di osservarli con maggior precisione. La ricerca nel settore va dallo studio di processi non lineari alla definizione di nuove condizioni statistiche nei sistemi fisici, con stretti legami con l'astrofisica. Si sta lavorando tutt'ora per sfruttare questo fenomeno nei gas per misure di precisione su fenomeni naturali fondamentali, nonché in litografia, nelle nanotecnologie, nell'olografia.

Nel Capitolo 1, si descriverà il condensato di Bose-Einstein per particelle non interagenti e se ne descriveranno le proprietà principali e i fenomeni sperimentali che per primi ne indicano la presenza. Si discuterà in particolare la configurazione del gas in un potenziale di trappola armonico. Questi aspetti verranno confrontati qualitativamente con il caso della nube termica di particelle non condensate per comprendere le principali differenze tra i due sistemi.

Nel Capitolo 2, si considereranno le prime conseguenze che si hanno quando si abbandona la condizione di idealità. Verranno discussi in particolare gli urti fra le particelle nel regime delle basse energie. Si faranno poi alcuni cenni sulla finitezza del numero di particelle in un condensato e alla riduzione di dimensionalità che si può ottenere manipolando il potenziale di trappola, e di come questi fenomeni si discostano dal caso ideale. Nel Capitolo 3, si applicheranno i risultati della teoria delle collisioni in gas freddi per descrivere la funzione d'onda dello stato condensato, basandoci sull'equazione di Gross-Pitaevskii. Tramite il metodo variazionale, si definirà la funzione d'onda del condensato nello stato fondamentale. Si discuteranno anche i risultati dell'approssimazione di Thomas-Fermi per affrontare questo problema.

Nel Capitolo 4, si studierà la dinamica del condensato di Bose-Einstein includendo la dipendenza dal tempo nell'equazione di Gross-Pitaevskii. Da qui si ricaveranno le equazioni idrodinamiche del condensato e si analizzeranno le oscillazioni termiche della funzione d'onda, dette eccitazioni elementari. Infine, si descriverà il legame tra il condensato di Bose-Einstein e il fenomeno della superfluidità.

Capitolo 1

Il gas di Bose ideale in una trappola armonica

In questo primo capitolo, partiamo dal concetto fondamentale di condensato di bosoni non interagenti e calcoliamo alcune proprietà di questo sistema, come la temperatura di transizione. Tale sistema è in generale considerato nel Limite Termodinamico, per N molto grandi. Ci focalizzeremo sulla condizione di gas in una trappola armonica anisotropa, in quanto è la configurazione più utilizzata a livello sperimentale. Sempre per questo motivo, si parlerà anche degli aspetti che sono meglio analizzati a livello sperimentale, come il profilo di densità e l'espansione libera del condensato, che si ottiene spegnendo il potenziale di trappola. Si farà poi un confronto con i risultati che si ottengono invece con la nube termica di particelle che non fanno parte del condensato, introducendo per questa una trattazione semi-classica.

1.1 Condensato di bosoni non interagenti

In questa prima sezione si rivedranno i concetti base della statistica di Bose-Einstein che portano al fenomeno del condensato, seguendo per la maggior parte la trattazione del capitolo 2 della referenza [10] e le dispense [4].

Si consideri un gas di bosoni, ossia particelle che possono occupare lo stesso stato in numero arbitrario poiché sono descritti da una funzione d'onda simmetrica, nel Limite Termodinamico¹ (LT). Consideriamo il caso in cui non vale il limite di non degenerazione,

¹ $V \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty, N/V = \text{costante} < \infty$

quindi non si è più nella condizione di escludere a priori l'occupazione multipla degli stati quantici. Si fa inoltre presente ora che in tutta la trattazione verrà trascurato nei calcoli il grado di libertà definito dal numero quantico di spin delle particelle.

Per la popolazione del livello α e per la popolazione totale del sistema nel caso dei bosoni si hanno rispettivamente:

$$n_\alpha = \frac{g_\alpha}{e^{\beta(\epsilon_\alpha - \mu)} - 1} \quad [1.1]$$

$$N = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{g_\alpha}{e^{\beta(\epsilon_\alpha - \mu)} - 1} \quad [1.2]$$

dove g_α è la molteplicità del livello energetico α , ϵ_α è l'energia del livello, μ è il potenziale chimico e β è definito come $\beta = (KT)^{-1}$. Quest'ultima equazione può essere riscritta come:

$$N = n_0 \left[1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{g_\alpha}{g_0} e^{-\beta\epsilon_\alpha} \frac{1 - e^{\beta\mu}}{1 - e^{\beta(\mu - \epsilon_\alpha)}} \right] \quad [1.3]$$

Poiché $\mu \leq 0$, dall'espressione precedente si ricava $\lim_{T \rightarrow 0} n_0(T) = N$, che esprime l'ovvio fenomeno per cui a $T = 0$ tutti i bosoni, che per definizione possono occupare lo stesso stato quantico, finiscono nel livello fondamentale di energia $\epsilon_0 = 0$.

Riscriviamo questo risultato usando la frazione di bosoni con energia minore di $\Delta > 0$:

$$\rho(T, \Delta) = \sum_{\alpha \leq \Delta} \frac{n_\alpha}{N} \quad [1.4]$$

In base al risultato precedente, $\lim_{T \rightarrow 0} \rho(T, \Delta) = 1$, per ogni Δ . Proviamo ora ad applicare il Limite del Continuo ² (LC) prima di far tendere $T \rightarrow 0$, e consideriamo $g(\epsilon) = N\hat{g}(\epsilon)$ con $\hat{g}(\epsilon)$ funzione invariante nel LT ($g(\epsilon) \propto V$, $\hat{g}(\epsilon) \propto V/N$ invariante nel LT). Si ottengono per N e ρ : ³

$$1 = \int_0^\infty \frac{\hat{g}(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} d\epsilon \quad [1.5]$$

$$\rho(T, \Delta) = \int_0^\Delta \frac{\hat{g}(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} d\epsilon \leq \quad [1.6]$$

$$\leq \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_\xi^\Delta \frac{\hat{g}(\epsilon)}{e^{\beta\epsilon} - 1} d\epsilon \leq KT \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_\xi^\Delta \frac{\hat{g}(\epsilon)}{\epsilon} d\epsilon = f(\Delta, \epsilon) \quad [1.7]$$

²Approssimazione applicabile nel limite in cui $V \rightarrow \infty$: livelli energetici tendono ad infittirsi e possiamo considerare le somme sui livelli energetici come integrali.

³Per le due disequaglianze si consideri che $\mu \leq 0$ e $e^{\beta\epsilon} - 1 \geq \epsilon$ per $\epsilon \geq 0$

Nel caso in cui

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} f(\Delta, \xi) = f(\Delta, 0) < \infty \quad [1.8]$$

le diseuguaglianze precedenti portano al risultato assurdo $\lim_{T \rightarrow 0} \rho(T, \Delta) = 0$ per ogni Δ , ossia che tutti i bosoni spariscono per $T=0$. Ciò porta alla conclusione che il LC non considera l'esistenza di un livello fondamentale che può ricevere una quantità macroscopica di bosoni pur avendo g_0 finito.

Consideriamo inoltre la funzione $F(\beta) = \int_0^\infty \frac{\hat{g}(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon)} - 1} d\epsilon$: assume valori finiti per ogni $\beta \geq 0$ reale, è strettamente decrescente, tende a 0 per $\beta \rightarrow 0$ e a $+\infty$ per $\beta \rightarrow \infty$. Da ciò possiamo dedurre che esiste un unico valore $\beta_B = 1/KT_B$ per cui $F(\beta_B) = 1$. Se si confronta questo risultato con (1.5) si trova che $\mu(T_B) = 0$. Sapendo anche che $\mu \leq 0$ e $\partial\mu/\partial T \leq 0$, la condizione precedente implica che $\mu(T) = 0 \forall T < T_B$. Ovvero, si ha una transizione brusca da $\mu < 0$ per $T > T_B$ a $\mu = 0$ per $T < T_B$, in cui il potenziale chimico si annulla in T_B con continuità, ma in cui le sue derivate $d^m\mu/dT^m$ presentano delle discontinuità ad alcuni ordini. Questo processo è detto Condensazione di Bose-Einstein (BEC o CdB).

Avendo individuato il problema nel LC nel trattare il condensato di BE, introduciamo nella trattazione un livello discreto:

$$n_0 = \rho_0 N = \frac{g_0}{e^{-\beta\mu} - 1} \quad [1.9]$$

$$N = n_0 + N \int_0^\infty \frac{\hat{g}(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} d\epsilon \quad [1.10]$$

Si vede che per $T > T_B \implies \mu < 0$, n_0 è una quantità finita, e pertanto $\rho_0 = n_0/N \rightarrow 0$ nel LT. Se invece $T \leq T_B \implies \mu = 0$, vale l'espressione (1.9) e n_0 diverge estensivamente come N per $T < T_B$, ovvero $\rho_0 = n_0/N$ non diventa trascurabile. Condizione necessaria e sufficiente perché $T_B > 0$ è (1.8). Questo dipende di fatto da $\epsilon = \hat{g}(\epsilon)N$, che a sua volta è definito dal potenziale di confinamento. I casi di interesse nello studio del condensato di Bose-Einstein per la sua realizzazione fisica sono principalmente due [10]:

- gas di particelle libere in un volume V , con

$$g(\epsilon) = \frac{Vm^{3/2}}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3}\epsilon^{1/2} \quad [1.11]$$

- gas di particelle in un potenziale armonico anisotropo 3D del tipo

$$V(r) = \frac{1}{2}(K_x x^2 + K_y y^2 + K_z z^2) \quad [1.12]$$

dove $\omega_i = K_i/m$, con

$$g(\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{2\hbar^3\omega_x\omega_y\omega_z} \quad [1.13]$$

In entrambi i casi, riassumibili dalla relazione

$$g(\epsilon) = C_\alpha \epsilon^{(\alpha-1)} \quad [1.14]$$

($\alpha = 1.5, 3$), la condizione (1.8) è soddisfatta. Come accennato nell'introduzione, la maggior parte dei condensati ottenuti sperimentalmente fino ad ora sono stati intrappolati in un potenziale armonico anisotropo, come quello descritto in (1.12). È utile quindi riportare alcuni parametri fondamentali dei condensati ottenuti in questa situazione:

$$T_B = \frac{\hbar}{K} \left[\frac{N\omega_x\omega_y\omega_z}{\zeta(3)} \right]^{1/3} \quad \text{con } \zeta \text{ funzione di Riemann} \quad [1.15]$$

$$\rho_0 = \begin{cases} 1 - \left(\frac{T}{T_B}\right)^3 & T \leq T_B \\ 0 & T > T_B \end{cases} \quad [1.16]$$

1.2 Profilo di densità e distribuzione della velocità

Il gas nello stato di condensato presenta alcuni problemi in fase di misura. Contiene pochi atomi ($10^4 - 10^8$ atomi), è in uno stato metastabile e quindi non può essere messo in equilibrio con un altro corpo, e ha un tempo di vita media dell'ordine dei secondi, o al massimo dei minuti. Sono dunque poche le quantità che si possono misurare con precisione, in particolare si possono considerare il profilo di densità e la distribuzione di velocità della nube.

Nel livello fondamentale del sistema, tutti gli atomi sono condensati nello stato quantico inferiore della distribuzione di stati energetici per la singola particella. La distribuzione di densità dipende quindi dalla funzione d'onda della particella nel livello fondamentale:

$$n(\mathbf{r}) = N |\Phi_0(\mathbf{r})|^2 \quad [1.17]$$

In una trappola armonica anisotropa, la funzione nello stato fondamentale è [17]:

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi^{3/4} (a_x a_y a_z)^{1/2}} e^{-x^2/2a_x^2} e^{-y^2/2a_y^2} e^{-z^2/2a_z^2} \quad [1.18]$$

con

$$a_i^2 = \hbar/m\omega_i \quad [1.19]$$

La distribuzione di densità è anisotropa se le tre frequenze non coincidono, e la larghezza maggiore nella distribuzione sarà data dalla frequenza minore $f_i = \omega_i/2\pi$

È inoltre utile ricavare la distribuzione di velocità, che ci tornerà utile in seguito per studiare la distribuzione spaziale delle particelle in seguito all'espansione libera della nube. La funzione d'onda $\Phi_0(\mathbf{p})$ nello spazio degli impulsi è data dalla sua trasformata di Fourier, che dà come risultato:

$$\Phi_0(\mathbf{p}) = \frac{1}{\pi^{3/4}(c_x c_y c_z)^{1/2}} e^{-p_x^2/2c_x^2} e^{-p_y^2/2c_y^2} e^{-p_z^2/2c_z^2} \quad [1.20]$$

con

$$c_i = \hbar/a_i = \sqrt{m\hbar\omega_i} \quad [1.21]$$

da cui la densità nello spazio degli impulsi è

$$n(\mathbf{p}) = N |\Phi_0(\mathbf{p})|^2 = \frac{N}{\pi^{3/2} c_x c_y c_z} e^{-p_x^2/2c_x^2} e^{-p_y^2/2c_y^2} e^{-p_z^2/2c_z^2} \quad [1.22]$$

Poiché $c_i^2/m = \hbar/\omega_i$, l'espressione di prima ha la forma di una distribuzione di Maxwell dove, per le tre direzioni spaziali, si hanno le diverse temperature:

$$T_i = \frac{\hbar\omega_i}{2K} \quad [1.23]$$

La dipendenza dalla direzione della distribuzione nello spazio degli impulsi può essere interpretata anche con il principio d'indeterminazione, per il quale una distribuzione spaziale molto stretta lungo un asse implica una distribuzione dell'impulso più ampia lungo lo stesso.

Questi risultati differiscono dalle espressioni ottenute nel caso in cui il gas obbedisce alla statistica classica, per temperature maggiori a T_B . Dalla definizione di distribuzione canonica per un gas di atomi con hamiltoniane singole

$$h(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{K_x x^2 + K_y y^2 + K_z z^2}{2} \quad [1.24]$$

si ottiene la seguente distribuzione spaziale:

$$n(\mathbf{r}) = N\rho_c(\mathbf{r}) = N \frac{\int e^{-\beta h(\mathbf{p}, \mathbf{r})} d\mathbf{p}}{\int e^{-\beta h(\mathbf{p}, \mathbf{r})} d\mathbf{p} d\mathbf{r}} = \frac{N}{\pi^{3/2} R_x R_y R_z} e^{-x^2/R_x^2} e^{-y^2/R_y^2} e^{-z^2/R_z^2} \quad [1.25]$$

dove $R_i^2 = \frac{2KT}{m\omega_i^2}$ contiene la dipendenza dalla temperatura, aspetto non presente nella distribuzione del condensato (1.18). Inoltre, in condizioni sperimentali tipiche si ha:

$$R_i/a_i = \left(\frac{2KT}{\hbar\omega_i} \right)^{1/2} \gg 1 \quad [1.26]$$

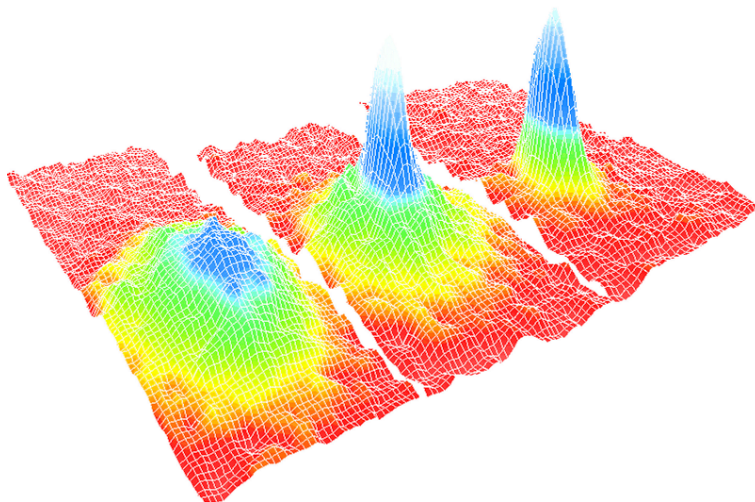


Figura 1.1: Distribuzione spaziale di 3 nubi (partendo da sinistra) costituite da: particelle termiche, particelle termiche + particelle di condensato, particelle di condensato (tratta da [18])

quindi la nube termica è molto più larga della nuvola del condensato. Per temperature inferiori a T_B quest'ultimo è un picco sottile che emerge nell'origine della distribuzione spaziale, con intensità crescente al diminuire della temperatura.

Sopra T_B , la densità $n(\mathbf{p})$ nello spazio degli impulsi è isotropica all'equilibrio, poiché è determinata univocamente dalla temperatura e dalla massa degli atomi:

$$n(\mathbf{p}) = N\rho_c(\mathbf{p}) = N \frac{\int e^{-\beta h(\mathbf{p},\mathbf{r})} d\mathbf{r}}{\int e^{-\beta h(\mathbf{p},\mathbf{r})} d\mathbf{p} d\mathbf{r}} = \frac{N}{(2mKT\pi)^{3/2}} e^{-\mathbf{p}^2/2mKT} \quad [1.27]$$

La larghezza della distribuzione dell'impulso è quindi dell'ordine di $(mKT)^{1/2}$, mentre nel caso del condensato (vedi (1.20)) è data da $c_i = (m\hbar\omega_i)^{1/2}$. Per temperature dell'ordine di T_B , si ha $KT_B \sim N^{1/3}\hbar\omega_i$ per cui il rapporto $R_i/a_i = (\frac{2KT}{\hbar\omega_i})^{1/2} \sim 2N^{1/6}$. Di conseguenza, anche la distribuzione di velocità della nube termica è molto più ampia di quella del condensato.

Questi diversi comportamenti hanno permesso di verificare qualitativamente la presenza del condensato nei primi esperimenti. Nella prossime sezioni si accennerà a questo fenomeno utilizzando la teoria trattata sin'ora. Prima però ci si occuperà brevemente di come affrontare i gas degeneri eccitati andando oltre la statistica classica.

1.3 Distribuzione semi-classica per gas degeneri nello stato eccitato

Secondo la meccanica quantistica, la densità di bosoni non interagenti è data da $n(\mathbf{r}) = \sum_{\nu} f_{\nu} |\Phi_{\nu}(\mathbf{r})|^2$, dove f_{ν} è la funzione d'occupazione per lo stato ν , che richiede la conoscenza della funzione d'onda $\Phi_{\nu}(\mathbf{r})$. Si può però affrontare il problema del gas degeneri di bosoni sfruttando il limite semi-classico⁴, valido nel regime in cui la lunghezza d'onda termica di De Broglie⁵ della particella è piccola rispetto alla scala di lunghezze per cui il potenziale di trappola varia sensibilmente. Tale descrizione è valida per particelle negli stati eccitati, la cui densità verrà indicata con n_{ex} , ma non per quelle nello stato fondamentale, per le quali tale condizione non viene rispettata. Si ha quindi:

$$n_{ex} = \int \frac{1}{e^{[\epsilon_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) - \mu]/KT} - 1} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \quad [1.28]$$

che viene risolto, introducendo le variabili $x = p^2/2mKT$, $z(\mathbf{r}) = e^{[\epsilon_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) - \mu]/KT}$ e $g_{\gamma}[z] = \sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^{\gamma}$, e in conclusione si ottiene

$$n_{ex} = \frac{g_{3/2}[z(\mathbf{r})]}{\lambda_T^3} \quad [1.29]$$

Per $z = 1$, $g_{3/2}[1] = \xi(3/2)$, come visto per particelle nello stato fondamentale, in quanto se $z = 1 \implies \mu = 0$ e si ritrova il caso del condensato. Dalla Figura 1.2 possiamo osservare la differenza tra la distribuzione classica di Boltzmann, che considera solo il primo termine della sommatoria $g_{\gamma}[z]$, e la distribuzione semi-classica spaziale per particelle eccitate in una trappola armonica, per lo stesso valore di potenziale chimico, in questo caso uguale al minimo del potenziale considerato.

1.4 Espansione libera

Consideriamo ora l'espansione libera di una nube di particelle non interagenti, inizialmente intrappolate in una trappola armonica anisotropa, valutando il caso del conden-

⁴In breve, secondo il principio d'indeterminazione di Heisenberg, se si considerano grandezze su scale di lunghezza Δl e di impulso Δp che rispettano $\Delta l \Delta p \geq \hbar/2$, possiamo considerare che il numero di stati quantici all'interno dell'elemento di volume $d\mathbf{p}d\mathbf{r}$ nello spazio delle fasi è $d\mathbf{p}d\mathbf{r}/(2\pi\hbar)^3$, che moltiplicato per la funzione d'occupazione semi-classica $f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ dà il numero medio di particelle nel volume infinitesimo.

⁵Lunghezza d'onda associata alla particella che fa riferimento alla sua energia termica data da $E = \frac{3}{2}KT \implies \lambda = \frac{h}{\sqrt{3mkT}}$. Corrisponde approssimativamente all'estensione media della funzione d'onda degli atomi dovuta alle fluttuazioni termiche.

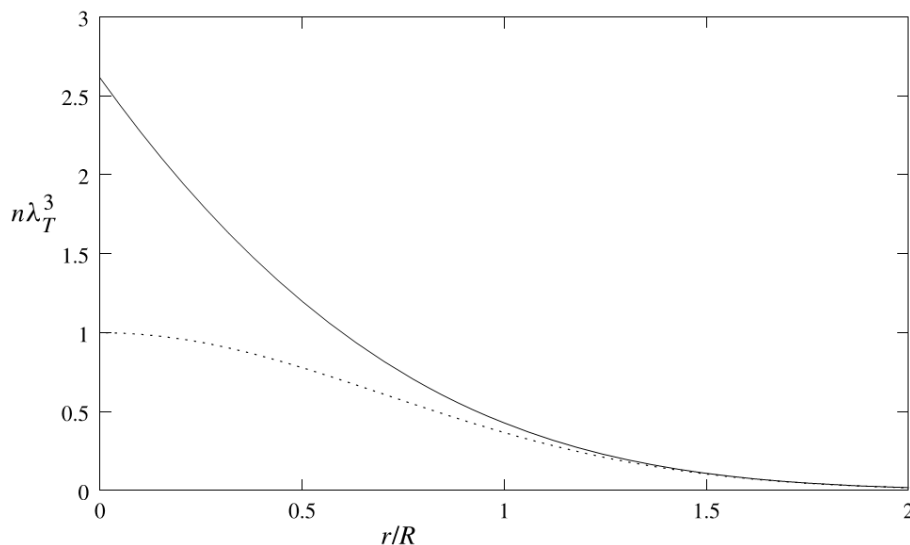


Figura 1.2: Distribuzione spaziale per particelle non condensate in unità $1/\lambda_T^3$ secondo (1.29) (linea continua) per un potenziale isotropo $V(r) = m\omega_0^2 r^2/2$, con $R = (2KT/m\omega_0^2)^{1/2}$ e secondo la distribuzione di classica (linea tratteggiata) (tratta da [10])

sato e quello per $T \geq T_B$. Consideriamo il limite classico, in cui $T \gg T_B$, anche se i ragionamenti che faremo in seguito valgono anche per $T \geq T_B$, e per cui:

$$(\epsilon_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) - \mu) \gg KT \quad [1.30]$$

Quindi la distribuzione iniziale del gas dipenderà dalla funzione di occupazione e dallo spettro energetico seguenti:

$$f_{\mathbf{p}}^0(\mathbf{r}) = e^{\mu/KT} e^{-\epsilon_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})/KT} \quad [1.31]$$

$$\epsilon_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}(K_x x^2 + K_y y^2 + K_z z^2) \quad [1.32]$$

Le particelle in libera espansione si muovono seguendo le leggi del moto $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{p}/m$ e $\dot{\mathbf{p}} = 0$. Inoltre, per il teorema di Liouville⁶, in assenza di collisioni, la funzione di distribuzione rimane imperturbata durante il moto. Se il potenziale viene spento a $t = 0$, avremo che, per $t > 0$

$$f_{\mathbf{p}}^0(\mathbf{r}, t) = f_{\mathbf{p}}^0(\mathbf{r} - \mathbf{p}t/m) = e^{\mu/KT} e^{-[\mathbf{p}^2/2m + V(\mathbf{r} - \mathbf{p}t/m)]/KT} \quad [1.33]$$

⁶Il volume $\sigma(t)$ nello spazio delle fasi formata da tutti gli $\mathbf{z}(t)$ partiti da un volume σ_0 , ha una misura integrale invariante nel tempo.

La densità è ottenuta integrando quest'espressione rispetto all'impulso in approssimazione semi-classica, come mostrato nell'espressione (1.28):

$$n(\mathbf{r}, t)_{ex} = e^{\mu/KT} \frac{1}{\lambda_T^3} \prod_i (1 + \omega_i^2 t^2)^{-1/2} e^{-m\omega_i^2 r_i^2 / [2KT(1 + \omega_i^2 t^2)]} \quad [1.34]$$

Per $t=0$ l'equazione coincide con (1.25) e (1.29), in quanto nel limite classico, per (1.30), possiamo trascurare tutti i termini per $n > 1$ in $g_\gamma[z(\mathbf{r})] \simeq e^{[\mu - V(\mathbf{r})]/KT}$. L'anisotropia nella distribuzione iniziale è dunque determinata dalla frequenza degli oscillatori, in accordo con (1.25). Tuttavia, a intervalli di tempo molto maggiori di $1/\omega_i$, la distribuzione di densità diventa isotropa, con larghezza determinata dalla velocità termica $(\frac{2KT}{m})^{1/2}$. Se consideriamo ora invece l'espansione del condensato, possiamo sfruttare la funzione d'onda nello spazio dei momenti per lo stato fondamentale $\Phi_0(\mathbf{p})$ (riportata in (1.20)) e considerare la sua evoluzione temporale tramite l'operatore $U(t) = e^{-iEt/\hbar}$. Rioperando la trasformata di Fourier per tornare nello spazio delle coordinate si ottiene:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \int \Phi_0(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}^2 t / 2m\hbar} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} / \hbar} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} = \quad [1.35]$$

$$\frac{1}{\pi^{3/4}} \sum_i a_i^{-1/2} (1 + i\omega_i t)^{-1/2} e^{-r_i^2 / [2a_i^2(1 + i\omega_i t)]} \quad [1.36]$$

Si può osservare che l'anisotropia della distribuzione di densità, che è proporzionale a $|\Phi(\mathbf{r}, t)|^2$, cambia durante l'espansione. Inizialmente, l'ampiezza della nube in ciascuna direzione è definita da $a_i = (\hbar/m\omega_i)^{1/2}$ mentre a intervalli di tempi maggiori è data da $a_i\omega_i t = (\hbar\omega_i/m)^{1/2}t$, come possiamo vedere in Figura 1.3.

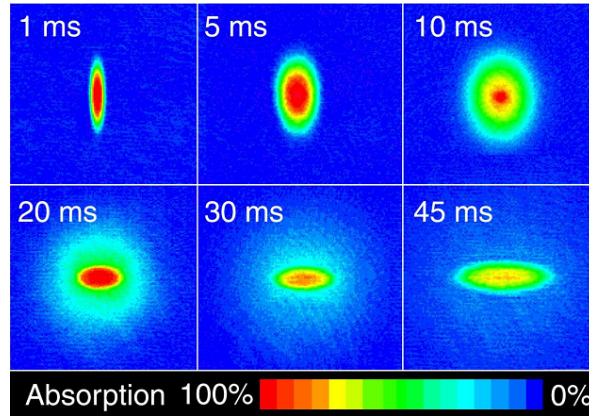


Figura 1.3: Evoluzione nel tempo della distribuzione spaziale del condensato (tratta da [19])

É evidente la gran differenza nei comportamenti delle due nubi durante l'espansione libera e come questo aspetto possa esser sfruttato nella rilevazione sperimentale del condensato.

Capitolo 2

Fenomeni fisici nel condensato non ideale

L'implementazione del condensato in una trappola armonica porta a considerare una serie di effetti, che possono presentarsi a seconda del potenziale di trappola utilizzato, dovuti alle condizioni di idealità usate per un primo sviluppo basilare della teoria del condensato. In questa sezione si faranno alcuni cenni ai ruoli di dimensionalità e finitezza dei sistemi. L'aspetto dominante nel condensato non ideale è la presenza di interazioni tra i bosoni, che verranno affrontate per prime.

Si seguiranno prevalentemente il capitolo 5 della referenza [10], l'articolo [3] e il capitolo 5 delle dispense [17].

2.1 Interazioni tra atomi

Per cominciare, trascuriamo in un primo momento di quale elemento siano gli atomi del condensato per trattare in modo generale la teoria delle collisioni in un gas freddo. Un aspetto importante di tale sistema è la distanza tra le particelle, la cui dimensione è tipicamente 10^2 nm . Questo valore è di un ordine di grandezza maggiore rispetto alla scala di lunghezza che caratterizza l'interazione tra due atomi. Di conseguenza, possiamo considerare dominanti le interazioni a due particelle, che si dimostreranno sufficienti per ricavare le principali proprietà macroscopiche del sistema. Saranno le uniche trattate in questo capitolo mentre le interazioni a più di due particelle verranno trascurate. Un altro

aspetto fondamentale è la bassa energia delle particelle, la cui velocità termica dev'essere necessariamente limitata affinché sia possibile ottenere sperimentalmente il condensato. Cominciamo quindi col considerare due particelle senza gradi di libertà interni, con masse m_1 e m_2 e, per ora, distinguibili (gli effetti dell'indistinguibilità verranno trattati in seguito). Si considerino le due particelle utilizzando le coordinate del CdM (centro di massa) e le coordinate relative. La funzione d'onda per il moto del centro di massa è un'onda piana (non consideriamo in questo momento le costanti di normalizzazione), mentre quella per il moto relativo soddisfa l'equazione di Schrödinger con massa uguale alla massa ridotta $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$. Per descrivere la collisione, la funzione d'onda del moto relativo tra le due particelle può essere scritta come la somma di un'onda piana entrante e di un'onda originata dalla collisione (*scattered wave*: $\Psi = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \Psi_{SC}(\mathbf{r})$). Quando la distanza tra le due particelle è grande (limite asintotico per $|\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow \infty$) la *scattered wave* è un'onda sferica uscente $f(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}/r$, dove $f(\mathbf{k})$ è l'ampiezza di scattering e \mathbf{k} rappresenta il vettore d'onda dell'onda uscente. Se non si considerano i gradi di libertà orbitali e di spin delle particelle, si può assumere che l'interazione sia a simmetria sferica, e che quindi l'ampiezza di scattering dipenda dalla direzione solo tramite l'angolo di scattering θ , ovvero l'angolo tra le direzioni dell'impulso relativo dei due atomi prima e dopo la collisione. Per la condizione di radiazione di Sommerfeld [17]:

$$\Psi = e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad [2.1]$$

dove la velocità relativa dell'onda entrante è stata scelta diretta lungo l'asse z . L'energia dello stato è $E = \hbar^2 k^2 / (2m)$. È necessario a questo punto descrivere il potenziale d'interazione. Consideriamo per brevità il caso dei metalli alcalini, i primi con cui è stato realizzato il condensato. Per questi atomi il potenziale d'interazione, nel regime di grandi distanze interatomiche, è dato dall'interazione di van der Waals, approssimata al primo termine di un'espansione in cui i successivi termini sono trascurabili per grandi r :

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^6} \quad [2.2]$$

Poiché $U(r)$ tende a zero più velocemente di $const/r^2$ per $r \rightarrow +\infty$, l'equazione di Schroedinger radiale per potenziali centrali può essere semplificata:

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \left(k^2 \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2} U(r) \right) \chi = 0 \quad [2.3]$$

$$\simeq \frac{d^2\chi}{dr^2} + \left(k^2 \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \chi = 0 \quad [2.4]$$

con l numero quantico orbitale, k numero d'onda della funzione d'onda χ e

$$\chi(r) = rR(r) \quad [2.5]$$

Per grandi valori di r la soluzione dell'equazione è data da una combinazione lineare di funzioni di Bessel sferiche j_l e n_l ($\chi_{kl} = a_{kl}k_r j_l(kr) + b_{kl}k_r n_l(kr)$) che nella loro forma asintotica per $r \rightarrow +\infty$ danno [4]

$$\chi_{kl} \simeq a_{kl} \sin(kr - l\pi/2) - b_{kl} \cos(kr - l\pi/2) \quad [2.6]$$

Normalizziamo la funzione in modo che $a_{kl}^2 + b_{kl}^2 = 4$, le due costanti possono essere scritte come $a_{kl} = 2\cos(\delta_{kl})$ e $b_{kl} = -2\sin(\delta_{kl})$, dove δ_{kl} è un angolo definito come sfasamento. Possiamo infine scrivere

$$\chi_{kl} \simeq 2\sin(kr - l\pi/2 + \delta_{kl}) \quad [2.7]$$

dove lo sfasamento tiene conto dell'effetto del potenziale anche per grandi valori di r . L'autofunzione dell'energia che soddisfa (2.1) può essere espressa in termini delle χ_{kl} , dette onde parziali, tramite la seguente espansione [17]:

$$\Phi_k(r, \theta) = \frac{1}{2kr} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \exp(i\delta_{kl}) \chi_{kl}(r) P_l(\cos\theta) \quad [2.8]$$

Dal confronto di (2.8) con (2.1) si ottiene anche [17]:

$$f_k(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \exp(i\delta_{kl}) \sin(\delta_{kl}) P_l(\cos\theta) \quad [2.9]$$

Introduciamo ora il concetto di sezione d'urto nella descrizione del fenomeno. La sezione d'urto differenziale $d\sigma/d\Omega$ è definita come il rapporto tra la corrente di probabilità per unità di angolo solido dell'onda generata dalla collisione e la corrente di probabilità per unità d'area dell'onda entrante. La corrente di probabilità per unità d'area dell'onda entrante per la funzione d'onda (2.1) è $\hbar k/m_r$, mentre la corrente nell'onda generata dalla collisione a grandi distanze r è $(\hbar k/m_r)|f(\theta)|^2/r^2$ per unità d'area o, dal momento che l'elemento d'area è dato da $r^2 d\Omega$, è equivalente a $(\hbar k/m)|f(\theta)|^2$ per unità d'angolo solido. Da qui segue che la sezione d'urto differenziale è data da $d\sigma/d\Omega = |f(\theta)|^2$. Sfruttiamo ora il teorema ottico [15] per ricavare dall'equazione precedente

$$\sigma_k = \frac{4\pi}{k} \text{Im}[f_k(0)] \quad [2.10]$$

In tal modo la sezione d'urto totale e l'ampiezza di scattering possono essere scritte come la somma dei contributi delle onde parziali date dai vari valori di l . Ora, per un potenziale a raggio d'interazione finito, gli sfasamenti variano come k^{2l+1} per piccoli valori di k . Per un potenziale con andamento r^{-n} a grandi distanze, questa considerazione è ancora valida se $l < (n-3)/2$, mentre per onde parziali con l maggiore si ha $\delta_l \propto k^{n-2}$. Quindi per un potenziale con andamento $1/r^6$ tutti gli sfasamenti tendono a zero per $k \rightarrow 0$. In

particolare, la sezione d'urto sarà dominata dal termine $l = 0$ (*s-wave scattering*), per cui l'ampiezza di *scattering* sarà data da

$$f(\theta) \simeq f_0 = \delta_0/k \quad [2.11]$$

Allo stesso modo, possiamo considerare solo la componente $l=0$ della soluzione asintotica (2.5) per basse energie a grandi distanze, riscrivibile anche nella seguente forma (con c_1 e c_2 coeff. reali):

$$\chi_0 \simeq c_1 \frac{\sin(kr)}{k} - c_2 \cos(kr) \quad [2.12]$$

Confrontando con (2.5), si trovano i seguenti risultati:

$$\tan \delta_0 = kc_2/c_1 \simeq f_0 \quad \text{se } k \rightarrow 0 \quad [2.13]$$

$$f_0 = c_2/c_1 = -a \quad [2.14]$$

$$\delta_0 = -ak \quad [2.15]$$

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l \simeq \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 \simeq \frac{4\pi}{k^2} \delta_0^2 = 4\pi a^2 \quad [2.16]$$

Si può dunque affermare che a basse velocità lo scattering è isotropo e la sezione d'urto è indipendente dall'energia della particella. La costante a è detta lunghezza di scattering, che può essere positiva o negativa. Consideriamo ora il caso di particelle indistinguibili: la funzione d'onda dovrà essere simmetrica rispetto allo scambio di coordinate delle due particelle, nel caso di bosoni. Lo scambio di coordinate è dato dal cambio di segno delle coordinate relative:

$$\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r} \implies r \rightarrow r \quad \theta \rightarrow \pi - \theta \quad \phi \rightarrow \pi + \phi \quad [2.17]$$

L'onda simmetrizzata corrispondente a (2.1) è, a meno di costanti di normalizzazione

$$\Psi = e^{ikz} + e^{-ikz} + [f(\theta) + f(\pi - \theta)] \frac{e^{ikr}}{r} \quad [2.18]$$

L'ampiezza di scattering è quindi $f(\theta) + f(\pi - \theta)$ e la sezione d'urto differenziale $d\sigma/d\Omega = |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2$. Il significato fisico di questo risultato è che l'ampiezza di *scattering* per un bosone in una determinata direzione è data dalla somma della probabilità per una delle due particelle di subire *scattering* in direzione θ e della probabilità per l'altra di subire *scattering* in direzione $\pi - \theta$. La sezione d'urto totale si calcola integrando la sezione d'urto differenziale sul dominio degli angoli solidi che definiscono gli stati finali originati dalla collisione. A causa della simmetria della funzione d'onda, gli stati definiti da θ, ϕ sono identici a quelli definiti da $\pi - \theta, \phi + \pi$ e si integra quindi su metà dell'angolo solido 4π . Per uno scattering dato esclusivamente da onde s la sezione d'urto è

$$\sigma = 8\pi a^2 \quad [2.19]$$

Illustriamo ora come la lunghezza di *scattering* risulti fondamentale nella descrizione della fisica statistica dei gas freddi. Nella condizione in cui il gas è sufficientemente rarefatto ($n|a|^3 \ll 1$, con n densità spaziale) e a bassa energia (per cui è valida la relazione (2.18)), la descrizione del sistema dipende solo dalla lunghezza di *scattering* e non dall'effettivo potenziale interatomico. Questo effetto si può mostrare con l'approccio dell'indice di rifrazione efficace, analizzando come una particella si propaga in un mezzo costituito da atomi e sfruttando il limite asintotico di bassa energia per l'autofunzione (2.1), che riportiamo introducendo la lunghezza di *scattering* a :

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \simeq e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - a \frac{e^{i\mathbf{k}r}}{r} \quad [2.20]$$

Si ipotizzi che una particella con impulso $\hbar\mathbf{k} \neq 0$ parallelo all'asse z incontri una lastra di spessore L , disposta perpendicolarmente all'asse z , costituita da particelle a riposo con densità spaziale n , come mostrato in Figura 2.1.

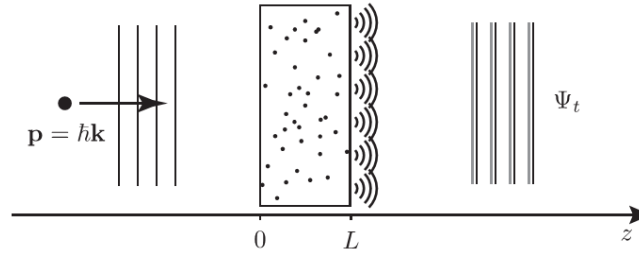


Figura 2.1: Attraversamento della barra di lunghezza L di una particella con momento \mathbf{p} (tratta da [3])

Consideriamo inizialmente il caso in cui la particella proiettile ha massa diversa dalle particelle obiettivo. L'onda generata dalla collisione di una particella proiettile (posizione \mathbf{r}_p) con una particella obiettivo (posizione \mathbf{r}_1) può essere scritta come:

$$\Psi(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_1) = e^{ikz_p} - \frac{a}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_1|} e^{\frac{ik}{2}|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_1|} e^{\frac{ik}{2}(z_p + z_1)} \quad [2.21]$$

Una volta che la particella ha attraversato la lastra, lo stato del sistema è dato dalla sovrapposizione dell'onda incidente e di tutte le onde generate dalle collisioni con le particelle obiettivo (per semplicità trascuriamo le interazioni a più di 2 particelle):

$$\Psi(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = e^{ikz_p} - \sum_{j=1}^N \frac{a}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_j|} e^{\frac{ik}{2}|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_j|} e^{\frac{ik}{2}(z_p + z_j)} \quad [2.22]$$

L'onda trasmessa si ottiene proiettando lo stato del sistema sul sottospazio in cui le particelle obiettivo sono ancora a riposo. Svolgendo il calcolo, si ottiene [3]:

$$\Psi_T(z_p) = Ae^{ikz_p} \quad \text{con} \quad A = 1 - \frac{i4\pi aL}{K} \simeq e^{-i4\pi anL/k} \quad (\text{barra sottile}) \quad [2.23]$$

dove n è la densità di particelle nella barra. Si nota come l'onda abbia acquisito uno sfasamento attraversando la barra, la quale agisce quindi come un mezzo dotato di un indice di rifrazione efficace. Lo sfasamento può essere interpretato come una variazione δk del vettore d'onda della particella incidente causata dalle interazioni con gli atomi della barra:

$$\delta k = -\frac{4\pi an}{k} \quad [2.24]$$

La variazione d'impulso è equivalente a una variazione dell'energia cinetica:

$$\delta \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right) = -\frac{4\pi \hbar^2 an}{m} \quad [2.25]$$

Quindi, l'attraversamento della barra è per la particella uguale all'attraversamento di una regione in cui ha luogo una variazione di energia potenziale che complessivamente è data da:

$$U = \frac{8\pi \hbar^2 an}{m} \quad [2.26]$$

Questo è il potenziale da considerare nel caso di interazioni fra particelle del condensato. In particolare, se a è positiva, la barriera di energia potenziale è positiva e la particella rallenta entrando nella barra, se a è negativa la barriera di energia potenziale è negativa e la particella in questo caso è attratta e accelera attraversando la barra. In base a queste osservazioni, l'interazione fra due particelle può essere semplicemente modellizzata con un potenziale di contatto del tipo

$$V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = U_0 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad \text{con} \quad U_0 = \frac{4\pi \hbar^2 a}{m} \quad [2.27]$$

Un'appropriata dimostrazione di quest'ultimo risultato, per ora ricavato solo in termini qualitativi, è data dal metodo dello pseudo-potenziale [7]. Per concludere questo capitolo sulle interazioni tra le particelle del condensato, si analizzerà un potenziale che riproduce in modo semplicistico il caso degli atomi alcalini, per cui verrà ricavata esplicitamente la lunghezza di *scattering*. Il potenziale è definito come:

$$\begin{cases} U(r) = \infty & r \leq r_C \\ U(r) = -\frac{\alpha}{r^6} & r > r_C \end{cases} \quad [2.28]$$

dove il nucleo di raggio r_C va considerato esclusivamente come un metodo per parametrizzare il comportamento per piccole distanze del potenziale reale per gli alcalini. Si

parte, come nel caso generale, dall'equazione di Schroedinger (2.3) ma questa volta si ricava la soluzione analitica esatta in funzione di r_C e α . I calcoli per raggiungere questo risultato non verranno riportati (si possono consultare alla referenza [10], sezione 5.3). Senza entrare nel dettaglio, consideriamo i 3 grafici in Figura 2.2 nella prossima pagina, riportanti $\chi(r)$ per tre diversi valori di $\Phi \propto r_0^2/r_C^2$, dove r_0 è la scala di lunghezza caratterizzante l'interazione a lungo raggio (interazione di van der Waals). E' evidente come la funzione d'onda sia molto sensibile anche alle piccole variazioni nella parte a corto raggio dell'interazione, e come quindi la modellizzazione semplicistica del potenziale in tale regione sia un limite pesante nella determinazione quantitativa di autofunzione e autovalori del sistema. Ciò nonostante, è sufficiente la formula della lunghezza di *scattering* per raggiungere delle conclusioni generiche ma comunque significative. Si ha:

$$a = r_0 \frac{\Gamma(3/4)}{2\sqrt{2}\Gamma(5/4)} \left[1 - \tan\left(\Phi - \frac{3\pi}{8}\right) \right] \simeq 0.478r_0 \left[1 - \tan\left(\Phi - \frac{3\pi}{8}\right) \right] \quad [2.29]$$

Oltre a ciò che è stato già osservato, da tale espressione si trova che l'ordine di grandezza di a è determinato in larga parte da r_0 e che, in base al valore Φ , può essere negativo o positivo. Si può stimare la probabilità di avere interazioni attrattive o repulsive assumendo che tutti i valori di Φ in un intervallo molto più ampio di π siano equamente probabili. Considerando (2.30), a è positiva, eccetto i casi per cui $(\Phi - \frac{3\pi}{8}) \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$. Poiché la larghezza dell'intervallo è $\frac{\pi}{4}$ e il dominio completo ha un'ampiezza di π , le interazioni repulsive dovrebbero essere tre volte più comuni di quelle attrattive. Tali conclusioni, seppur generiche e approssimate, danno un'idea di come si potrà caratterizzare correttamente anche la trattazione della teoria della funzione a molti corpi per una descrizione microscopica più dettagliata del condensando di Bose-Einstein.

2.2 Estensione finita del sistema

Come anticipato in precedenza, nelle prossime due sezioni si affronteranno due aspetti che entrano in gioco quando si implementa in una trappola armonica un condensato di Bose-Einstein. Si farà riferimento alla trattazione dell'articolo [2], all'articolo [11] e e alla sezione 15.1 di [10].

Cominciamo con gli effetti che hanno luogo quando non siamo nel limite termodinamico e si ha a che fare con un sistema ad estensione finita.

Il numero di atomi che può essere ottenuto in una trappola non è macroscopico, di fatto. Fino ad ora, gli esperimenti sono stati effettuati con un massimo di 10^7 atomi. Non si possono quindi dare per scontati i risultati ottenuti nel limite termodinamico e si deve affrontare dal punto di vista teorico una serie di aspetti rilevati sperimentalmente. Il primo è la mancanza di discontinuità nelle funzioni termodinamiche, nonostante la condensazione avvenga comunque bruscamente, come si può osservare nel grafico a sinistra

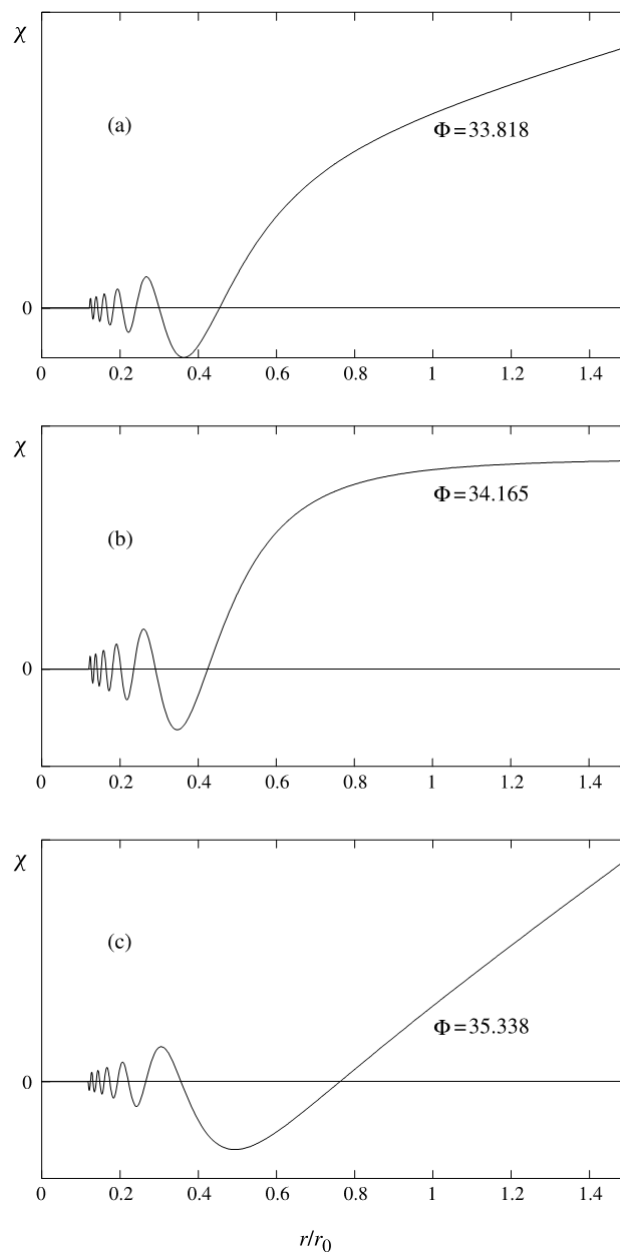


Figura 2.2: Autofunzione χ in funzione di r/r_0 per diversi valori di Φ . Le tre curve corrispondono a valori del raggio nucleare $r_C \simeq 0.12159r_0$, $r_C \simeq 0.12097r_0$, $r_C \simeq 0.11895r_0$ (tratta da [10])

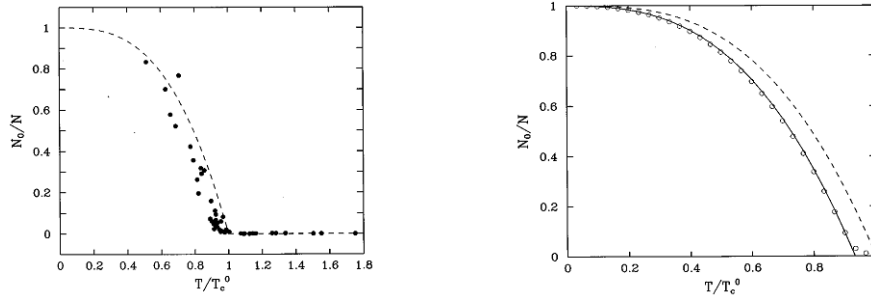


Figura 2.3: Nel grafico a sinistra, si riporta la frazione di particelle nel condensato in funzione della temperatura: i dischi sono risultati sperimentali mentre la linea tratteggiata è l'equazione (1.16). Nel grafico a destra, abbiamo di nuovo la frazione di particelle nel condensato in funzione della temperatura: i cerchi corrispondono al calcolo numerico esatto per $N=1000$ particelle in una trappola a simmetria sferica, la linea continua si riferisce alla formula con correzione per dimensioni finite (2.31) e quella tratteggiata all'equazione originale (1.16) (tratta da [2]).

in Figura 2.3. Di fatto, la finitezza del numero di particelle rende il sistema potenzialmente più interessante in quanto nuovi fenomeni possono emergere, come si vedrà anche nel caso della dimensionalità ridotta. Considerando un gas non interagente, per definire la termodinamica del sistema è sufficiente inserire nella funzione di distribuzione di Bose lo spettro energetico della singola particella. Nel caso di un insieme gran canonico, ad esempio, il numero di atomi N è dato dalla (1.2). La somma può essere calcolata esplicitamente per un numero finito di atomi a una determinata temperatura, essendo il potenziale chimico μ funzione di N e T . Dal calcolo numerico si nota che la frazione N_0/N ottenuta è minore di quella prevista nel limite termodinamico (vedi grafico a destra in Figura 2.3). E' stato trovato che gli effetti dati dalle dimensioni finite sono significative solamente per piccoli valori di N , minori di 10^4 . Lo stesso vale per l'occupazione dei primi livelli eccitati, dato che tale frazione scompare per $N \rightarrow \infty$ e che già per N dell'ordine di 10^2 è trascurabile. La correzione per dimensioni finite a ρ_0 è stata valutata analiticamente studiando il limite per grandi N della sommatoria (1.2):

$$\frac{N_0(T)}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_B}\right)^3 - \frac{3\bar{\omega}\zeta(2)}{2\omega_{ho}[\zeta(3)]^{2/3}} \left(\frac{T}{T_B}\right)^2 N^{-1/3} \quad [2.30]$$

con $\omega_{ho} = (\omega_x\omega_y\omega_z)^{1/3}$, $\bar{\omega} = (\omega_x + \omega_y + \omega_z)/3$, ζ funzione di Riemann.

All'ordine più basso, gli effetti decrescono come $N^{-1/3}$ e dipendono molto dalla geometria

della trappola. Dal grafico a destra in Figura 2.3 si vede che per $N=1000$ l'espressione (linea continua) è in buon accordo con i dati sperimentali (cerchi), a parte in prossimità di T_B , per cui si dovrebbero considerare ordini di correzione maggiori. La diminuzione della frazione di atomi condensati corrisponde a un abbassamento della temperatura di transizione. Ponendo l'equazione corretta uguale a 0 si può stimare la variazione all'ordine più basso:

$$\frac{\delta T_B}{T_B} = -\frac{\bar{\omega}\zeta(2)}{2\omega_{ho}[\zeta(3)]^{2/3}}N^{-1/3} \simeq -0.73\frac{\bar{\omega}}{\omega_{ho}}N^{-1/3} \quad [2.31]$$

Un altro aspetto interessante connesso alla finitezza del sistema è l'equivalenza tra diversi insiemi statistici. Infatti, nel limite termodinamico, gli insiemi gran canonico, canonico e microcanonico dovrebbero dare le stesse funzioni e gli stessi risultati. Nel caso di un gas intrappolato, si è trovato che ciò è ancora valido per $N \geq 1000$, indicativamente.

2.3 Dimensionalità del sistema

Fino ad ora sono state discusse le proprietà del gas di Bose in uno spazio tridimensionale. Introducendo le trappole armoniche anisotrope, è stata considerata in generale la condizione (1.26), che stabilisce che $K_B T$ sia molto maggiore delle scale di energia dell'oscillatore $\hbar\omega_x$, $\hbar\omega_y$, $\hbar\omega_z$. Per osservare effetti di dimensionalità ridotta del sistema, una di queste condizioni dev'essere violata, ottenendo una trappola altamente anisotropa. La conseguenza più eclatante è l'impossibilità di ottenere un condensato di B-E a temperatura finita in 2D e 1D per un gas uniforme. Esaminiamo il caso di gas uniforme in due dimensioni. Il numero di particelle è dato da (1.2), dove la sommatoria viene sostituita dall'integrale sullo spazio degli impulsi bidimensionale:¹

$$N = \int \frac{1}{e^{[\epsilon_i - \mu]/KT} - 1} \frac{2\pi p dp}{(2\pi\hbar)^2} = -\frac{AmKT}{2\pi\hbar^2} \ln(1 - e^{-|\mu|/KT}) \quad [2.32]$$

dove A è l'area del sistema, da cui otteniamo:

$$\mu = KT \ln(1 - e^{-T_{2D}/T}) \quad \text{con} \quad T_{2D} = \frac{2\pi\hbar^2 n_{2D}}{mK} \quad \text{e} \quad n_{2D} = \frac{N}{A} \quad [2.33]$$

¹Nell'affrontare la distribuzione semi-classica per gas degeneri nello stato eccitato, si era detto che tale approssimazione non è valida per lo stato fondamentale. Tuttavia, in questo caso stiamo dimostrando solo qualitativamente l'impossibilità di ottenere un condensato o, nel caso ci sia questa possibilità, si mostreranno solo alcune proprietà chiave senza approfondire la trattazione, quindi questo vincolo verrà trascurato.

Alla temperatura T_2D si presentano gli effetti di degenerazione quantistica, in quanto la lunghezza d'onda termica di De Broglie è dell'ordine della distanza interatomica. Per $T \ll T_B$, il potenziale chimico tende a zero in quanto $\mu \simeq -KT e^{-T_2D/T}$. La funzione ottenuta analiticamente cresce monotonamente al decrescere di T e si annulla solamente per $T = 0$. Quindi nel limite termodinamico la popolazione rimane microscopica e non si ha il condensato a temperature finite. Si può raggiungere una conclusione analoga per il gas uniforme in 1D. Invece, nel caso di gas in trappole armoniche, poiché $g(\epsilon) \propto \epsilon^{d-1}$, l'integrale (1.6) converge in 2D e si ha il condensato a temperature finite. In particolare, vediamo anche in questo caso il gas in 2 dimensioni in un potenziale armonico $V(\mathbf{r}) = m\omega^2(x^2 + y^2)/2$. L'energia della singola particella è $\epsilon_\nu = \hbar\omega(n_x + n_y)$, quindi $g(\epsilon) = \epsilon/(\hbar\omega)^2$. Il numero totale di particelle è dato da

$$N = n_0 + \int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon) \frac{1}{e^{[\epsilon_i - \mu]/KT} - 1} \quad [2.34]$$

Ipotizzando che n_0 sia molto popolato,

$$n_0 \simeq \frac{1}{e^{-\mu/T} - 1} \implies n_0 \simeq -T/\mu \quad [2.35]$$

e dal calcolo dell'integrale, che qui non riportiamo², si ottiene

$$N \left[1 - \left(\frac{T}{T_B} \right)^2 \right] = N_0 - \left(\frac{T}{\hbar\omega} \right)^2 \frac{1 + \ln N_0}{N_0} \quad \text{con} \quad T_B = \sqrt{\frac{6N}{\pi^2}} \hbar\omega \quad [2.36]$$

Per un gran numero di atomi quest'espressione indica la presenza di una netta transizione al regime di condensazione per $T \simeq T_B$, come mostrato in Figura 2.4. Al di sotto di T_B , si ottiene

$$N_0 \simeq N \left[1 - \left(\frac{T}{T_B} \right)^2 \right] \quad [2.37]$$

E' utile notare che per $T \simeq T_B$ la lunghezza d'onda termica di De Broglie diventa confrontabile con la distanza interatomica, quindi ci si trova nel regime di degenerazione quantistica. La regione di transizione di temperature in cui entrambi i termini nella formula precedente hanno peso non trascurabile ha larghezza

$$\Delta T \simeq \sqrt{\frac{\ln N}{N}} T_B \quad [2.38]$$

Dunque per grandi N è molto sottile e si può parlare di transizione ordinaria al condensato di B-E in un gas 2D (Figura 2.3). Un aspetto fondamentale per la realizzabilità di questo

²Si veda a riguardo l'articolo [11]

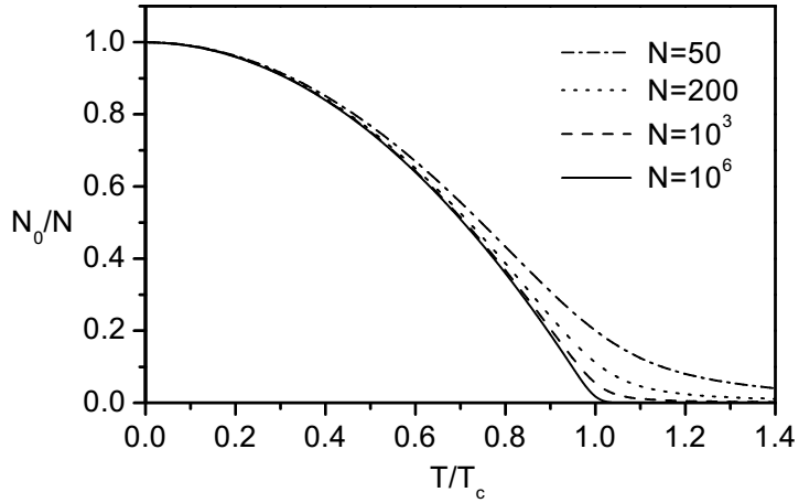


Figura 2.4: Popolazione dello stato fondamentale nella trappola 2D in funzione della temperatura, calcolata con l'espressione (2.25) (tratta da [11])

condensato 2D è mantenere il prodotto $N\omega^2$ costante nel limite termodinamico $N \rightarrow \infty$, allo stesso tempo mantenendo la terza frequenza ω_z (frequenza nella direzione spaziale "congelata", che non rispetta la condizione (2.27), per cui si ha il passaggio da 3 a 2 dimensioni) molto larga per rispettare la condizione

$$\hbar \ll KT < \hbar\omega_z \quad (\text{trappola altamente anisotropa}) \quad [2.39]$$

Commentiamo brevemente anche il caso 1D. In questa situazione, non si può avere la formazione del condensato neppure in presenza di un potenziale armonico a causa della divergenza logaritmica dell'integrale (1.7). La temperatura di transizione tende a zero nel limite termodinamico, come si può vedere dall'equazione seguente:

$$KT_{1D} = \hbar\omega_{1D} \frac{N}{\ln(2N)} \quad [2.40]$$

Tuttavia, anche se $T_{1D} \rightarrow 0$ per $N \rightarrow \infty$ e $N\omega_{1D} = \text{costante}$, per valori finiti di N il sistema può mostrare un'occupazione macroscopica dello stato fondamentale in un intervallo di temperature finito. Si capisce a questo punto ciò che era stato accennato nella sezione precedente, ovvero che l'estensione finita del sistema non sempre è un limite alla manifestazione dei fenomeni quantistici: anzi, può portare alla luce fenomeni interessanti che nel limite termodinamico non comparirebbero. A titolo d'esempio, si veda il grafico in Figura 2.5 in cui si nota chiaramente che la frazione di condensato nel caso unidimensionale lungo le direzioni spaziali non "congelate", a parità di temperature,

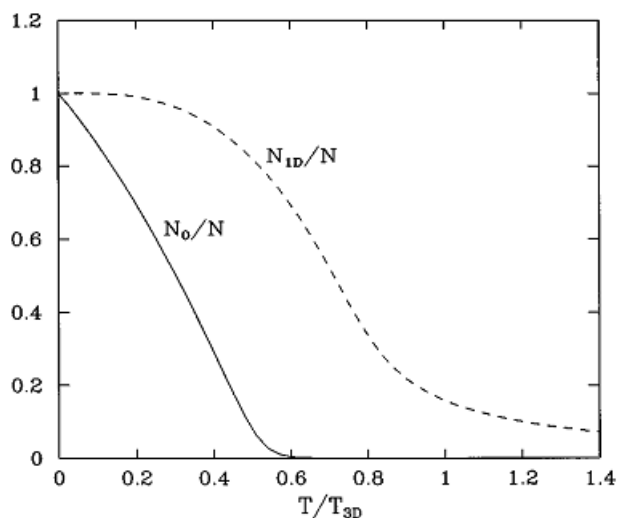


Figura 2.5: Comportamento di un gas ideale per $N = 10^6$ particelle in una trappola altamente anisotropa. Linea continua: frazione di atomi nello stato fondamentale ($n_x = 0$, $n_y = 0$, $n_z = 0$). Linea tratteggiata: frazione di atomi nello stato radiale più basso ($n_x = 0$, $n_y = 0$) (tratta da [2])

è nettamente più rilevante che nel caso tridimensionale, ed emerge inoltre a temperature maggiori. Da questo deriva anche la possibilità di realizzare il condensato escludendo 2 gradi di libertà spaziali in due fasi distinte della preparazione (*two-step BEC*). Si tratta di un fenomeno caratteristico della geometria unidimensionale della trappola in quanto strettamente legato al fattore $\ln(2N)$ da cui dipende T_{1D} . Per concludere, vale la pena di ricordare che nelle ultime due sezioni si è sempre considerato il comportamento di un gas di Bose ideale. Ci si aspetta perciò che in certi casi la situazione possa cambiare, in modo anche molto profondo, introducendo le interazioni fra particelle.

Capitolo 3

Teoria dello stato condensato

In questo capitolo considereremo la struttura dello stato del condensato di Bose-Einstein in presenza di interazioni. La discussione si basa sull'equazione di Gross-Pitaevskii, che descrive le proprietà a temperatura zero del gas di Bose non uniforme quando la lunghezza di scattering a è molto minore della distanza fra le particelle. Per prima cosa deriveremo l'equazione di G-P trattando le interazioni con un'approssimazione di campo medio. Successivamente con questo nuovo strumento si discuterà lo stato fondamentale di una nube atomica in un potenziale armonico. Infine si discuterà l'approssimazione di Thomas-Fermi, in cui l'energia cinetica viene trascurata, e si confronterà con il metodo variazionale.

Si farà riferimento principalmente al capitolo 6 del testo [10], più alcuni riferimenti alle dispense [5] e all'articolo [14].

3.1 L'equazione di Gross-Pitaevskii

Come discusso nei capitoli precedenti, un condensato di Bose-Einstein si ottiene da una collezione di bosoni nello stato fondamentale a temperature molto basse. Possiamo interrogarci su quale sia l'energia di tale stato. In generale, l'hamiltoniana che descrive il sistema è data da

$$H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + V_{ext}(\mathbf{r}_i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j}^N V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \quad [3.1]$$

in cui si riconoscono, da sinistra verso destra, i termini corrispondenti a energia cinetica, agli effetti dovuti al potenziale di trappola e agli effetti dovuti all'interazione tra i bosoni. Per quest'ultimo fattore, in particolare, si è mostrato come tra due particelle a bassa energia si verifichi un'interazione di contatto del tipo $U_0\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ ((2.28)). Si vuole ora ottenere l'autofunzione di tale sistema per procedere coi calcoli. In generale, la funzione d'onda per un sistema di N particelle è una funzione di $3N$ coordinate, dunque una $\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$. L'indistinguibilità quantistica pone dei vincoli alla forma di quest'equazione rispetto allo scambio di posizioni spaziali. I bosoni sono caratterizzati dalla seguente condizione:

$$\Psi(\dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_j, \dots) = \Psi(\dots, \mathbf{r}_j, \dots, \mathbf{r}_i, \dots) \quad [3.2]$$

La funzione d'onda più semplice da concepire che rispetta (3.2) è il prodotto di N funzioni identiche e normalizzate:

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \simeq \Phi(\mathbf{r}_1)\dots\Phi(\mathbf{r}_N) \quad [3.3]$$

Questo è il cosiddetto approccio di Hartree (*Hartree ansatz*).¹ Consideriamo per cominciare un gas di Bose uniforme. In un sistema uniforme di volume V , la funzione d'onda di una particella nello stato fondamentale è normalizzata dalla costante $1/V^{1/2}$, e quindi l'energia di interazione di una coppia di particelle è U_0/V . L'energia di interazione di N bosoni tutti nello stesso stato sarà data da questa quantità moltiplicata per il numero di possibili modi di accoppiare i bosoni, $N(N-1)/2$. In tale approssimazione l'energia d'interazione sarà data da

$$E = \frac{N(N-1)}{2V}U_0 \simeq \frac{1}{2}Vn^2U_0 \quad [3.4]$$

con $n = N/V$, assumendo che $N \gg 1$. È conveniente ora introdurre il concetto di funzione d'onda $\psi(\mathbf{r})$ del condensato con la definizione

$$\psi(\mathbf{r}) = N^{1/2}\phi(\mathbf{r}) \quad [3.5]$$

L'energia del sistema è data a questo punto dal valore di aspettazione dell'hamiltoniana (3.1) rispetto a $\psi(\mathbf{r})$:

$$E(\psi) = \int \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\psi(\mathbf{r})|^2 + V(\mathbf{r})|\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2}U_0|\psi(\mathbf{r})|^4 \right] \quad [3.6]$$

¹È bene specificare fin da subito che si tratta di un'approssimazione rispetto alla $\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ esatta, in quanto è priva di informazioni riguardo alla fisica su scale di lunghezza ridotte. Per esempio, è chiaro che gli atomi non possano stare nella stessa posizione spaziale, e l'autofunzione bosonica dovrebbe comunque obbedire la condizione $\Psi(\dots, \mathbf{r}, \dots, \mathbf{r}, \dots) = 0$, come invece non è nel caso dell'approccio di Hartree. Si dice quindi che la funzione d'onda di Hartree non prende in considerazione le correlazioni tra atomi, o equivalentemente che è una approssimazione di campo medio a singoli corpi.

L'equazione che determina $\psi(\mathbf{r})$ può ora essere ottenuta sfruttando il principio variazionale. Quindi, si procede col minimizzare l'energia (3.6) rispetto a variazioni indipendenti di $\psi(\mathbf{r})$ e del suo complesso coniugato $\psi^*(\mathbf{r})$ ², tenendo conto che il numero totale di particelle

$$N = \int d\mathbf{r} |\psi(\mathbf{r})|^2 \quad [3.7]$$

deve mantenersi costante. Il vincolo viene considerato opportunamente dal metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Si dovrà quindi valutare l'espressione

$$\delta E - \mu \delta N = 0 \quad [3.8]$$

dove il potenziale chimico assicura che il numero di particelle sia costante. Non riportiamo qui il calcolo variazionale esplicito, che si può però trovare nelle referenze [11] e [5]. Variando $\psi^*(\mathbf{r})$ si ottiene in definitiva

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) + U_0 |\psi(\mathbf{r})|^2 \psi(\mathbf{r}) = \mu \psi(\mathbf{r}) \quad [3.9]$$

Questa è l'equazione di Gross-Pitaevskii. Ha la forma di un'equazione di Schroedinger in cui il potenziale che agisce sulle particelle è la somma del potenziale esterno V e del termine non lineare $U_0 |\psi(\mathbf{r})|^2$ che considera il campo medio prodotto dagli altri bosoni. Si noti che l'autovalore è il potenziale chimico μ , non l'energia della particella come si avrebbe per la solita equazione (lineare) di Schroedinger. Per particelle non interagenti tutte nello stesso stato, il potenziale chimico sarebbe uguale all'energia di una particella, per particelle interagenti invece non è così. Per un gas di Bose uniforme, l'equazione di Gross-Pitaevskii si riduce a

$$\mu = U_0 |\psi(\mathbf{r})| = U_0 n \quad [3.10]$$

che è in accordo con l'equazione nota dalla termodinamica $\mu = \partial E / \partial N$ per calcolare il potenziale chimico dall'energia del gas uniforme (3.4).

²Poiché la funzione d'onda $\psi(\mathbf{r})$ è in generale complessa dovremmo variare sia la parte reale che quella immaginaria per ottenere le equazioni della funzione d'onda del condensato che minimizza l'energia. Tuttavia, possiamo equivalentemente considerare $\psi(\mathbf{r})$ e il suo complesso coniugato come funzioni indipendenti. Variando $\psi^*(\mathbf{r})$ porta a un'equazione per $\psi(\mathbf{r})$, e poiché il funzionale è invariante per la sostituzione $\psi(\mathbf{r}) \leftrightarrow \psi^*(\mathbf{r})$, avremmo ottenuto il complesso coniugato dell'equazione finale variando invece $\psi(\mathbf{r})$.

3.2 Lo stato fondamentale: metodo variazionale e approssimazione di Thomas-Fermi

Affrontiamo ora l'equazione di Gross-Pitaevskii (3.8) per bosoni in una trappola armonica anisotropa. Prima di risolvere analiticamente il problema, si possono fare alcune osservazioni qualitative. Per semplicità, trascuriamo l'anisotropia del potenziale e consideriamo $V = m\omega_0^2 r^2/2$. Se l'estensione spaziale della nuvola è circa R , l'energia potenziale della particella è circa $m\omega_0^2 R^2/2$ e l'energia cinetica è dell'ordine di $\hbar^2/2mR^2$, essendo l'impulso tipico di una particella nello stato fondamentale dell'ordine di \hbar/R dal principio di Heisenberg. In assenza di interazioni, quindi, l'energia totale varia come $1/R^2$ per piccoli R e come R^2 per grandi R , e ha un minimo quando energia cinetica e potenziale coincidono. Il raggio della nube per cui si ha il minimo è

$$a_{osc} = \left(\frac{\hbar}{m\omega_0} \right)^{1/2} \quad [3.11]$$

che è la scala di lunghezza quanto-meccanica caratteristica dell'oscillatore armonico. Ci si aspetta quindi di trovare tale risultato anche a livello quantitativo. Si considerino ora gli effetti delle interazioni. Un valore tipico per la densità di particelle n è dato da N/R^3 , e l'energia d'interazione è dunque dell'ordine di $nU_0 \simeq U_0 N/R^3$. Per interazioni repulsive, l'effetto di un ulteriore contributo all'energia che ha un andamento proporzionale a $1/R^3$ trasla il minimo dell'energia totale a R maggiori, e di conseguenza, al crescere di Na , l'energia cinetica diventa meno importante. Osserviamo cosa succede in questo limite di interazioni forti, in cui si trascura l'energia cinetica. Il raggio di equilibrio si trova minimizzando a somma delle energie potenziali e d'interazione, e ciò si ha quando i contributi sono dello stesso ordine di grandezza. Si trova quindi il raggio di equilibrio

$$R \simeq a_{osc} = \left(\frac{Na}{a_{osc}} \right)^{1/5} \quad [3.12]$$

La quantità Na/a_{osc} è un indicatore adimensionale della forza delle interazioni, e nella maggior parte degli esperimenti su atomi con interazioni repulsive è molto maggiore dell'unità, e quindi R è in genere maggiore di a_{osc} . Per valori tipici di queste variabili, del tipo $|a| \simeq 10nm$, $a \simeq 1\mu m$ e N fra 10^4 e 10^6 , il rapporto R/a_{osc} varia fra 2.5 e 6. All'equilibrio, l'energia d'interazione e l'energia dovuta al potenziale di trappola sono dello stesso ordine di grandezza, quindi $m\omega_0^2 R^2$, con R raggio di equilibrio dato da (3.12), e quindi il rapporto tra l'energia cinetica e gli altri contributi all'energia è proporzionale a $1/R^4 = (a_{osc}/Na)^{4/5}$, che nel regime di forti interazioni tende a zero. Questo conferma che l'energia cinetica sia trascurabile per un numero abbastanza grande di particelle. Se consideriamo ora invece le interazioni attrattive, per un piccolo numero di particelle l'energia totale in funzione di R è simile a quella per particelle non interagenti,

a parte per piccoli R per cui l'energia diverge a $-\infty$ come $-1/R^3$. Quindi, per un numero sufficientemente piccolo di particelle l'energia ha un minimo locale a un raggio minore di quello per particelle non interagenti. Questo stato è metastabile, poiché si tratta di un minimo locale e il potenziale per R minori varia come $-1/R^3$. Aumentando il numero di particelle, questo stato sparisce a partire da un numero critico N_c , che a livello sperimentale è tipicamente dell'ordine di 10^3 . Affrontiamo ora il problema analiticamente, tornando al modello del gas intrappolato in un potenziale anisotropo del tipo (1.12):

$$V(r) = \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \quad [3.13]$$

L'equazione di Gross-Pitaevskii può essere risolta direttamente tramite integrazione numerica, ma è utile ai fini della vera comprensione fisica del fenomeno illustrare alcuni risultati analitici principali. Uno dei metodi per affrontare l'equazione è un calcolo variazionale utilizzando come funzione di partenza la (1.20):

$$\phi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi^{3/4}(a_x a_y a_z)^{1/2}} e^{-x^2/2a_x^2} e^{-y^2/2a_y^2} e^{-z^2/2a_z^2} \quad [3.14]$$

dove le lunghezze dell'oscillatore a_i sono date da (1.19). La distribuzione di densità $n(\mathbf{r}) = N\phi_0(\mathbf{r})^2$ è dunque una Gaussiana. Sfruttiamo questa funzione d'onda per descrivere una funzione di prova della stessa forma che descriva il sistema nel caso di bosoni interagenti:

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \frac{N^{1/2}}{\pi^{3/4}(b_x b_y b_z)^{1/2}} e^{-x^2/2b_x^2} e^{-y^2/2b_y^2} e^{-z^2/2b_z^2} \quad [3.15]$$

dove le lunghezze b_i sono i parametri variazionali. Sostituendo la (3.15) nella (3.6) si ottiene

$$E(b_x, b_y, b_z) = N \sum_i \hbar\omega_i \left(\frac{a_i^2}{4b_i^2} + \frac{b_i^2}{4a_i^2} \right) + \frac{N^2 U_0}{2(2\pi)^{3/2} b_x b_y b_z} \quad [3.16]$$

Se valutiamo la (3.15) ponendo $b_i = a_i$, ossia tenendo le costanti della funzione in assenza di interazioni, si trova

$$E \simeq N \sum_i \frac{\hbar\omega_i}{2} + \frac{N^2 U_0}{2(2\pi)^{3/2} a_x a_y a_z} = N \sum_i \frac{\hbar\omega_i}{2} + \frac{N^2}{2} \langle 00|v|00 \rangle \quad [3.17]$$

dove

$$\langle 00|v|00 \rangle = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \int d\mathbf{r} |\phi_0(\mathbf{r})|^4 \quad [3.18]$$

è l'energia di interazione per due particelle nello stato fondamentale dell'oscillatore. Il risultato (3.17) è valido al primo ordine in a , ed è una buona approssimazione nel regime in cui l'energia di interazione per particella è piccola rispetto alla minore delle energie di punto zero $\hbar\omega_i/2$. Per valutare se siamo nel regime in cui ciò è possibile, si può

considerare come prima la quantità Na/a_{osc} , che rappresenta il rapporto tra energia d'interazione e energia data dal potenziale anisotropo. All'aumentare delle interazioni efficaci repulsive, la nube si espande, e la funzione d'onda ottimale diventa più estesa, corrispondente a valori maggiori di b_i . È utile a questo punto introdurre i parametri

$$\beta_i = \frac{b_i}{a_i} \quad [3.19]$$

Minimizzando E rispetto ai parametri variazionali β_i si ottengono le tre equazioni

$$\frac{1}{2}\hbar\omega_i \left(\beta_i^2 - \frac{1}{\beta_i^2} \right) - \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \frac{NU_0}{\bar{a}^3} \frac{1}{\beta_x\beta_y\beta_z} = 0 \quad [3.20]$$

dove si è introdotto la lunghezza caratteristica

$$\bar{a} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\bar{\omega}}} \quad [3.21]$$

per un oscillatore con media geometrica delle frequenze data da $\bar{\omega} = (\omega_x\omega_y\omega_z)^{1/3}$. Nel caso generale i parametri ottimali per la funzione di prova si trovano semplicemente risolvendo questo sistema di equazioni. Consideriamo però il caso particolare in cui il numero di particelle è sufficientemente grande affinché l'energia di interazione per particella sia molto maggiore di $\hbar\omega_i$ per tutte le ω_i . Possiamo quindi trascurare l'energia cinetica, il cui termine nell'equazione (3.20) è quello dipendente da $1/\beta_i^2$. Risolvendo per β_i si trova

$$b_i = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{Na}{\bar{a}} \right) \frac{\bar{\omega}}{\omega_i} \bar{a} \quad [3.22]$$

e l'energia per particella è data, in quest'approssimazione, da

$$\frac{E}{N} = \frac{5}{4} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/5} \left(\frac{Na}{\bar{a}} \right)^{2/5} \hbar\bar{\omega} \quad [3.23]$$

Secondo questa stima variazionale, l'energia per particella è proporzionale a $N^{2/5}$ nel limite in cui l'energia cinetica viene trascurata, ed $(Na/\bar{a})^{2/5}$ volte più grande dell'energia in assenza di interazioni. Come vedremo più avanti, questo è vero anche nell'approssimazione di Thomas-Fermi, che è esatta quando il numero di particelle è molto grande. In Figura 3.1 si riporta la dipendenza del rapporto E/N dal parametro variazionale b ($= b_x = b_y = b_z$) per diversi valori del parametro adimensionale Na/a_{osc} . Sono stati considerati anche casi con larghezza di *scattering* negativa. In particolare, in tali situazioni un minimo locale esiste per a negativo finché N si mantiene minore di un valore critico N_c , come accennato anche in precedenza in questa sezione. Il numero critico di

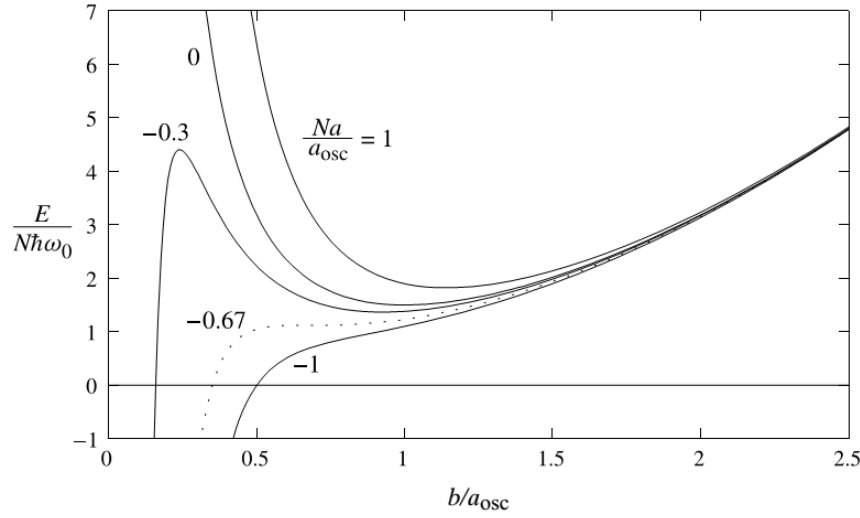


Figura 3.1: Espressione variazionale dell'energia per particella per una trappola isotropa armonica in funzione del parametro variazionale b , per diversi valori di Na/a_{osc} (tratta da [10])

particelle si trova imponendo che la prima e la seconda derivata di E/N rispetto a b siano entrambe uguali a zero. Si ottiene così

$$\frac{N_c|a|}{a_{osc}} = \frac{2(2\pi)^{1/2}}{5^{5/4}} \simeq 0.67 \quad [3.24]$$

Consideriamo ora l'approssimazione di Thomas-Fermi. Come è stato più volte fatto notare in questa sezione, per nubi sufficientemente grandi, il termine di energia cinetica nell'equazione di Gross-Pitaevskii può essere trascurato. Una buona approssimazione per la funzione d'onda del condensato per un gran numero di particelle può quindi esser data dalla risoluzione analitica dell'equazione di G-P rimuovendo il termine di energia cinetica fin dall'inizio. La (3.9) diventa così

$$[V(\mathbf{r}) + U_0|\psi(\mathbf{r})|^2] \psi(\mathbf{r}) = \mu\psi(\mathbf{r}) \quad [3.25]$$

Possiamo vedere immediatamente che la soluzione è

$$n(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2 = \frac{[\mu - V(\mathbf{r})]}{U_0} \quad [3.26]$$

nella regione in cui $\mu - V(\mathbf{r}) > 0$ e $\psi(\mathbf{r}) = 0$ altrove. Il confine della nube è dato quindi da

$$V(\mathbf{r}) = \mu \quad [3.27]$$

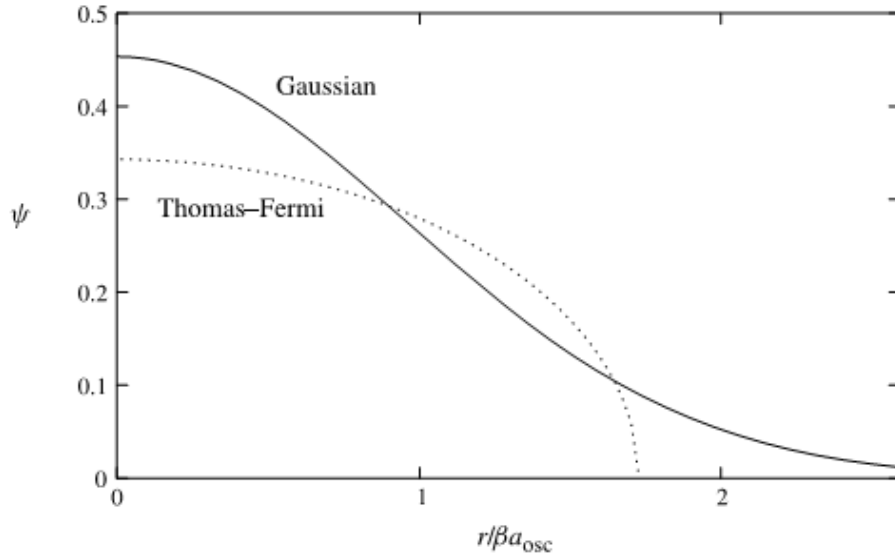


Figura 3.2: Funzione d'onda dello stato fondamentale nell'approssimazione variazionale Gaussiana (linea continua) e nell'approssimazione di Thomas-Fermi (linea tratteggiata) per un potenziale armonico isotropo. Le funzioni d'onda sono riportate in unità di $N^{1/2}/(\beta a_{osc})^{3/2}$, con $\beta = (Na/a_{osc})^{1/5}$ (tratta da [10])

Il significato fisico di quest'approssimazione è che l'energia per aggiungere una particella (ovvero il potenziale chimico μ) è la stessa in tutti i punti della nube. Quest'energia è data dalla somma del potenziale esterno $V(\mathbf{r})$ e dal contributo delle interazioni $n(\mathbf{r})U_0$. Poiché quest'approssimazione è simile all'approssimazione di Thomas-Fermi nella teoria degli atomi, ci si riferisce ad essa con lo stesso nome. Nell'approssimazione di Thomas-Fermi l'estensione della nube è data dai 3 semiassi R_i , ottenuti inserendo la (3.13) nella (3.27):

$$R_i^2 = \frac{2\mu}{m\omega_i^2}, \quad i = x, y, z \quad [3.28]$$

Le lunghezze R_i possono essere determinate rispetto ai parametri della trappola se si trova un'equazione di μ in termini di questi. Questo può essere fatto considerando la condizione di normalizzazione (3.7) su ψ . Per una trappola armonica anisotropa troviamo

$$N = \frac{8\pi}{15} \left(\frac{2\mu}{m\bar{\omega}^2} \right)^{3/2} \frac{\mu}{U_0} \quad [3.29]$$

Risolviendo per μ si ottiene

$$\mu = \frac{15^{2/5}}{2} \left(\frac{Na}{\bar{a}} \right)^{2/5} \hbar\bar{\omega} \quad [3.30]$$

Possiamo dunque misurare l'estensione spaziale della nube tramite la variabile

$$\bar{R} = (R_x R_y R_z)^{1/3} = 15^{1/5} \left(\frac{Na}{\bar{a}} \right)^{1/5} \bar{a} \simeq 1.719 \left(\frac{Na}{\bar{a}} \right)^{1/5} \bar{a} \quad [3.31]$$

Si vede che \bar{R} è in genere più grande di \bar{a} sotto condizioni sperimentali tipiche. In Figura 3.2 si trova il confronto tra le funzioni d'onda trovate con i due metodi mostrati finora. Poiché $\mu = \partial E / \partial N$ e $\mu \propto N^{2/5}$ secondo l'equazione (3.30), l'energia per particella è

$$\frac{E}{N} = \frac{5}{7} \mu \quad [3.32]$$

Questo è il risultato esatto per i termini principali dell'energia nel limite di grandi N . Si nota che è minore della stima variazionale (3.23) di un fattore numerico $(36001\pi)^{1/5}/7 \simeq 0.92$. L'approssimazione di Thomas-Fermi dà buonissimi risultati nel calcolo delle proprietà generali della nube quando Na/\bar{a} è maggiore di 1. Tuttavia, in molti problemi d'interesse fisico, l'energia cinetica gioca un ruolo cruciale. In particolare, ciò è vero per la struttura superficiale delle nubi, dove in una ristretta, ma non infinitesima regione, l'energia cinetica è dominante rispetto alle energie di trappola e di interazione e non può essere trascurata. Questo caso particolare non verrà trattato, ci si limita a riportare la referenza [10], cap. 6.3 alla quale si può trovare materiale a riguardo.

Capitolo 4

Dinamica del condensato

Il comportamento delle nubi di condensato di Bose-Einstein nel tempo permette di ricavare importanti relazioni rispetto alla natura fisica del condensato. Sfruttando analogie con le equazioni dei fluidi ideali, ricaviamo per prima cosa le equazioni idrodinamiche del condensato. Ci concentreremo in particolare sugli aspetti quantistici che emergono da questa e che ci permettono di descrivere le particolarità nel moto del condensato. Si cercherà di comprendere il ruolo delle eccitazioni elementari che si manifestano quando il condensato è in moto. Infine, paragonando questi risultati con il comportamento dell'elio ^4He superfluido, si descriverà il legame che esiste tra il condensato di Bose-Einstein, in particolare nella condizione di debole interazione studiata fino ad ora, e la superfluidità.

Si seguiranno per la maggior parte il capitolo 7 del testo [10] e il capitolo 6 di [12].

4.1 Formulazione idrodinamica

Nella sezione precedente abbiamo visto che la struttura all'equilibrio del condensato è descritta da un'equazione di Schroedinger indipendente dal tempo con un contributo non lineare al potenziale dovuto alle interazioni tra particelle. Per affrontare i problemi dinamici è immediato utilizzare la generalizzazione di quest'equazione di Schroedinger che considera la dipendenza dal tempo. Tale equazione, detta equazione di Gross-Pitaevskii dipendente dal tempo, è la seguente:

$$i\hbar \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}, t) + U_0 |\phi(\mathbf{r}, t)|^2 \phi(\mathbf{r}, t) \quad [4.1]$$

Per assicurarsi che quest'ultima sia consistente con la versione indipendente dal tempo (3.9), in condizioni stazionarie $\phi(\mathbf{r}, t)$ deve evolversi nel tempo come $e^{-i\mu t/\hbar}$. Questo

fattore di fase è giustificato da un risultato della seconda quantizzazione: microscopicamente, ϕ è uguale all'elemento di matrice dell'operatore di annichilazione $\hat{\phi}$ tra lo stato fondamentale con N particelle e quello con $N - 1$ particelle

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \langle N - 1 | \hat{\phi}(\mathbf{r}) | N \rangle \propto \exp[-i(E_N - E_{N-1})t/\hbar] \quad [4.2]$$

poiché gli stati $| N \rangle$ e $| N - 1 \rangle$ si evolvono nel tempo come $\exp(-iE_N t/\hbar)$ e $\exp(-iE_{N-1} t/\hbar)$, rispettivamente. Per grandi N la differenza tra le energie $E_N - E_{N-1}$ è data da $\partial E/\partial N$, che è esattamente il potenziale chimico. Possiamo esprimere il risultato come legge di evoluzione nel tempo per la fase ψ della funzione d'onda del condensato:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\mu}{\hbar} \quad [4.3]$$

Tale relazione è di fatto la relazione di Josephson, una delle equazioni alla base del fenomeno della superconduttività. Indaghiamo ora sul significato fisico dell'equazione di Gross-Pitaevskii (4.1) riformulandola come un paio di equazioni idrodinamiche. Partiamo dall'equazione di continuità. Moltiplichiamo la (4.1) per $\phi^*(\mathbf{r}, t)$, poi sottraiamole il complesso coniugato dell'equazione risultante, per arrivare a:

$$\frac{\partial |\phi|^2}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\frac{\hbar}{2mi} (\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*) \right] = 0 \quad [4.4]$$

Questo è lo stesso risultato che si otterrebbe dalla classica equazione di Schroedinger, dato che il potenziale non lineare nell'equazione di Gross-Pitaevskii è reale. L'equazione (4.4) ha la forma di un'equazione di continuità per la densità di particelle $n = |\phi|^2$ e può essere scritta come

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0 \quad [4.5]$$

dove la velocità del condensato è definita come

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{2mi} \frac{(\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*)}{|\phi|^2} \quad [4.6]$$

La densità d'impulso è data da

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2i} (\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*) \quad [4.7]$$

e di conseguenza la relazione (4.6) è equivalente al risultato

$$\mathbf{j} = mn\mathbf{v} \quad [4.8]$$

la quale afferma che la densità di momento è uguale alla massa di una particella per la densità di corrente di particelle. Semplici espressioni per la densità e la velocità possono essere ottenute se scriviamo ϕ in funzione delle sue ampiezza f e fase ψ ,

$$\phi = f e^{i\psi} \quad [4.9]$$

da cui segue

$$n = f^2 \quad [4.10]$$

e la velocità \mathbf{v} esprimibile come

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{m} \nabla \psi \quad [4.11]$$

Da quest'ultima relazione possiamo concludere che il movimento del condensato corrisponde a un flusso di potenziale, poiché la velocità è il gradiente di una quantità scalare, detta potenziale di velocità. Per un condensato, l'equazione (4.11) mostra che il potenziale di velocità è in questo caso $\hbar\psi/m$. Ipotizzando che ψ non sia singolare, possiamo immediatamente concludere che il moto del condensato è irrotazionale, ossia

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{\hbar}{m} \nabla \times \nabla \psi = 0 \quad [4.12]$$

I moti permessi al condensato sono di conseguenza limitati. Per comprendere questo aspetto della dinamica del condensato, è opportuno introdurre la condizione di quantizzazione di Feynman-Onsager [16], la quale afferma che, sotto condizioni generalmente soddisfatte, per funzioni d'onda del condensato monodrome, la variazione $\Delta\psi$ della fase della funzione d'onda lungo una linea chiusa dev'essere un multiplo intero di 2π :

$$\Delta\psi = \oint \nabla\psi \cdot d\mathbf{l} = 2\pi l \quad [4.13]$$

dove l è un intero. Quindi la circuitazione Γ attorno a una linea chiusa è data da

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\hbar}{m} 2\pi l = l \frac{h}{m} \quad [4.14]$$

che mostra che è quantizzata in unità di h/m . La quantizzazione della circuitazione fu proposta inizialmente per i fenomeni di superfluidità nell'elio ^4He da Onsager. Feynman invece la propose indipendentemente per poi investigarne le conseguenze sperimentali. Come esempio per illustrare il fenomeno, consideriamo una configurazione in cui ψ è singolare in un punto, ossia un flusso puramente azimutale in una trappola invariante per rotazioni attorno all'asse z . Affinché la funzione sia monodroma, la funzione d'onda del condensato deve variare come $e^{il\varphi}$, dove φ è l'angolo azimutale. Se ρ è la distanza dall'asse della trappola, segue dalla (4.14) che la velocità è

$$v_\varphi = l \frac{\hbar}{m\rho} \quad [4.15]$$

La circuitazione è quindi lh/m se la linea chiusa racchiude l'asse, zero altrimenti. Se $l \neq 0$, la funzione d'onda del condensato deve annullarsi sull'asse della trappola, poiché altrimenti l'energia cinetica dovuta al moto azimutale divergerebbe. La struttura delle linee di flusso è quindi quella di un vortice.

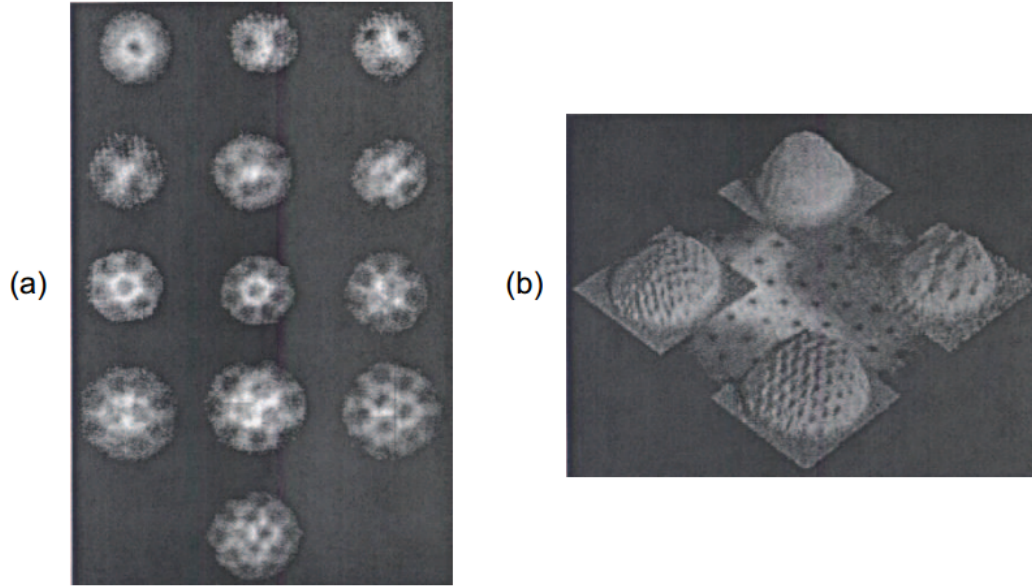


Figura 4.1: Vortici osservati sperimentalmente presso l'ENS (tratta da [9]) e il MIT (tratta da [1])

La generalizzazione della (4.11) per uno stato con un vortice lungo l'asse z è dove δ^2 è una delta di Dirac bidimensionale nel piano xy , $\vec{\rho} = (x, y)$ e \hat{z} è il versore in direzione zeta:

$$\nabla \times v = \hat{z} \frac{\hbar}{m} \delta^2(\vec{\rho}) \quad [4.16]$$

Da questa condizione di quantizzazione ha origine anche la mancanza di risposta a rotazioni per velocità angolare abbastanza piccole, anch'esso fenomeno caratteristico della superfluidità.

Torniamo all'equazione del moto per f e ψ . Questa può essere trovata inserendo l'espressione (4.9) nell'equazione di Gross-Pitaevskii dipendente dal tempo e separando parti immaginaria e reale. Dal calcolo otteniamo le due seguenti equazioni:

$$\frac{\partial(f^2)}{\partial t} = -\frac{\hbar}{m} \nabla \cdot (f^2 \nabla \psi) \quad [4.17]$$

$$-\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2mf} \nabla^2 f + \frac{1}{2} m v^2 + V(\mathbf{r}) + U_0 f^2 \quad [4.18]$$

L'equazione (4.17) è l'equazione di continuità espressa nelle nuove variabili. Per trovare l'equazione del moto per la velocità, espressa da (4.11), calcoliamo il gradiente della (4.18) per ottenere

$$m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla(\tilde{\mu} + \frac{1}{2} m v^2) \quad [4.19]$$

dove

$$\tilde{\mu} = V + nU_0 - \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{n}} \nabla^2 \sqrt{n} \quad [4.20]$$

Sappiamo che la quantità nU_0 nell'equazione (4.20) è l'espressione per il potenziale chimico di un gas di Bose uniforme, trascurando contributi dovuti al potenziale esterno. A temperatura zero, le variazioni nel potenziale chimico sono date dall'equazione di Gibbs-Duhem $dp = nd\mu$, un risultato facilmente verificabile nel caso del gas di Bose uniforme diluito poiché $\mu = nU_0$ e $p = -\partial E/\partial V = n^2U_0/2$. Possiamo quindi riscrivere la (4.19) come

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{mn} \nabla p - \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) + \frac{1}{m} \nabla \left(\frac{\hbar^2}{2m\sqrt{n}} \nabla^2 \sqrt{n} \right) - \frac{1}{m} \nabla V \quad [4.21]$$

Le equazioni (4.5) e (4.21) sono molto simili alle equazioni idrodinamiche per un fluido ideale. Se prendiamo \mathbf{v} come velocità del fluido, la (4.5) è esattamente l'equazione di continuità per il fluido ideale, mentre all'equazione (4.21) corrisponde l'equazione di Eulero

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{mn} \nabla p = -\frac{1}{m} \nabla V \quad [4.22]$$

che possiamo scrivere anche nella forma

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = -\frac{1}{mn} \nabla p - \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) - \frac{1}{m} \nabla V \quad [4.23]$$

Si tenga presente che la pressione p del fluido è in generale diversa da quella del condensato. Notiamo che ci sono due differenze tra le equazioni (4.21) e (4.23). La prima è che l'equazione di Eulero contiene il termine $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$. Tuttavia, se ci manteniamo in regioni lontane da discontinuità di ψ , vale il risultato $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, e il termine $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$ nell'equazione di Eulero si annulla. L'unica differenza tra le due equazioni è dunque il terzo termine del lato destro dell'equazione (4.21), che viene detto *termine di pressione quantistica*. Questo descrive le forze dovute alle variazioni spaziali dell'intensità della funzione d'onda dello stato condensato. Come il termine $\nabla v^2/2$, è possibile dimostrare che deriva dal termine di energia cinetica nella densità di energia, che non abbiamo ricavato, $\hbar^2 |\nabla|^2/2m = mnv^2/2 + \hbar^2 (\nabla f)^2/2m$, ma i due contributi corrispondono ad effetti fisici molto differenti: il primo è l'energia cinetica del moto delle particelle, mentre il secondo corrisponde al 'moto di punto zero', che non genera una corrente di particelle. Se la scala delle variazioni spaziali della funzione d'onda del condensato è l , il primo termine è dell'ordine di nU_0/ml , mentre il secondo è dell'ordine di \hbar^2/m^2l^3 . Dunque il termine di pressione quantistica domina il termine di pressione classico se la variazione spaziale della densità avviene su scale di lunghezza l minori o uguali a

$$\xi \sim \frac{\hbar}{(mnU_0)^{1/2}} \quad [4.24]$$

Questa grandezza è detta lunghezza di coerenza, e descrive in generale il rapporto tra il termine di energia di interazione tra le particelle e il termine di energia cinetica. Per ciò che abbiamo visto fino ad ora, il moto del condensato può essere descritto in termini di densità locale e velocità locale. La ragione di questo è che gli unici gradi di libertà sono quelli della funzione d'onda del condensato, ossia modulo f e fase ψ . Gas e liquidi ordinari invece hanno molti più gradi di libertà e di conseguenza è in generale necessario sfruttare una descrizione microscopica, ad esempio mediante la funzione di distribuzione delle particelle. Lo stato del fluido può quindi essere definito completamente in termini della densità di particelle locale, velocità locale e temperatura locale. A zero Kelvin, possiamo trascurare la temperatura e il moto può essere descritto, esattamente come nel condensato, in termini di densità di particelle e velocità locali. Queste strette analogie derivano dal fatto che le equazioni del moto per condensato e del fluido perfetto si ricavano a partire dalle leggi di conservazione del numero di particelle e dell'impulso totale. Tuttavia, la descrizione fisica può essere molto differente fra i due casi.

4.2 Eccitazioni elementari

L'equazione (4.1) corrisponde a un'approssimazione di campo medio valida a temperatura zero. Ora si vogliono includere le fluttuazioni attivate termicamente nella distribuzione di densità, dette eccitazioni elementari. Sfruttiamo la formulazione termodinamica appena descritta per descrivere il ruolo delle eccitazioni elementari nella dinamica del condensato. I risultati ottenuti sono stati raggiunti utilizzando la linearizzazione delle equazioni del moto, che consiste nello studiare le equazioni in intorni delle grandezze in gioco prossimi ai valori di equilibrio, e quindi esprimibili tramite sviluppi di Taylor sotto condizioni sufficientemente generali. Anche se questo approccio è complementare a studiare il problema utilizzando la teoria microscopica, la seconda quantizzazione fornisce un fondamento teorico più consistente al ragionamento. Tuttavia, questa teoria necessiterebbe un'introduzione rigorosa che si discosta troppo dagli argomenti principali della trattazione. Sfruttiamo quindi i risultati della linearizzazione per raggiungere gli stessi risultati, che verranno descritti meglio a posteriori alla luce dei concetti che storicamente sono stati definiti nella teoria microscopica di Bogoliubov. Scriviamo la densità come $n = n_{eq} + \delta n$, dove n_{eq} è la densità di equilibrio e δn la deviazione rispetto al valore di equilibrio. Trattando la velocità \mathbf{v} e δn , linearizzando la (4.5) e la (4.19) si ottengono rispettivamente

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} = -\nabla \cdot (n_{eq} \mathbf{v}) \quad [4.25]$$

e

$$m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \delta \tilde{\mu} \quad [4.26]$$

dove $\delta\tilde{\mu}$ è stata ottenuta linearizzando (4.20). Derivando (4.25) e sostituendo la velocità con (4.26) otteniamo l'equazione del moto

$$m \frac{\partial^2 \delta n}{\partial t^2} = \nabla \cdot (n_{eq} \nabla \delta\tilde{\mu}) \quad [4.27]$$

Quest'equazione descrive le eccitazioni del gas di Bose in un potenziale arbitrario.¹ Consideriamo per semplicità lo spettro di un gas omogeneo, dove il potenziale esterno V è costante e quindi la densità n è la stessa dappertutto. Si cercano soluzioni di onda piana, proporzionali a $\exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$, dove \mathbf{q} è il vettore d'onda e ω indica la frequenza. Dalla (4.20) vediamo che la variazione di $\tilde{\mu}$ per il gas uniforme è uguale a

$$\delta\tilde{\mu} = \left(U_0 + \frac{\hbar^2 q^2}{4mn} \right) \delta n \quad [4.28]$$

e l'equazione del moto diventa

$$m\omega^2 \delta n = \left(nU_0 q^2 + \frac{\hbar^2 q^4}{4m} \right) \delta n \quad [4.29]$$

Le soluzioni non nulle di quest'equazione sono, espresse come energie, le seguenti:

$$\hbar\omega = \pm\epsilon_p = \sqrt{2nU_0\epsilon_q^0 + (\epsilon_q^0)^2} \quad [4.30]$$

dove

$$\epsilon_q^0 = \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \quad [4.31]$$

è l'energia di una particella libera. Lo spettro delle eccitazioni $\hbar\omega = \epsilon_q$ è rappresentato in Figura 4.2. Per piccoli valori di q , ovvero per grandi lunghezze d'onda, ϵ_q è una funzione lineare di q :

$$\epsilon \simeq s\hbar q \quad [4.32]$$

dove s è uguale a

$$s = \sqrt{nU_0/m} \quad [4.33]$$

e si può identificare con la velocità del suono. Questo si può dedurre sfruttando il risultato della termodinamica $s^2 = dp/d\rho = (n/m)d\mu/dn$, dove $\rho = nm$ è la densità di massa.

Si osserva dunque che le interazioni hanno trasformato lo spettro energetico per grandi lunghezze d'onda, quadratico in q per particelle libere, in uno spettro lineare, in accordo con ciò che si osserva nell'⁴He liquido. Come vedremo nella prossima sezione, dalla

¹Per semplificare la notazione, da ora in poi si userà n per indicare la densità di equilibrio.

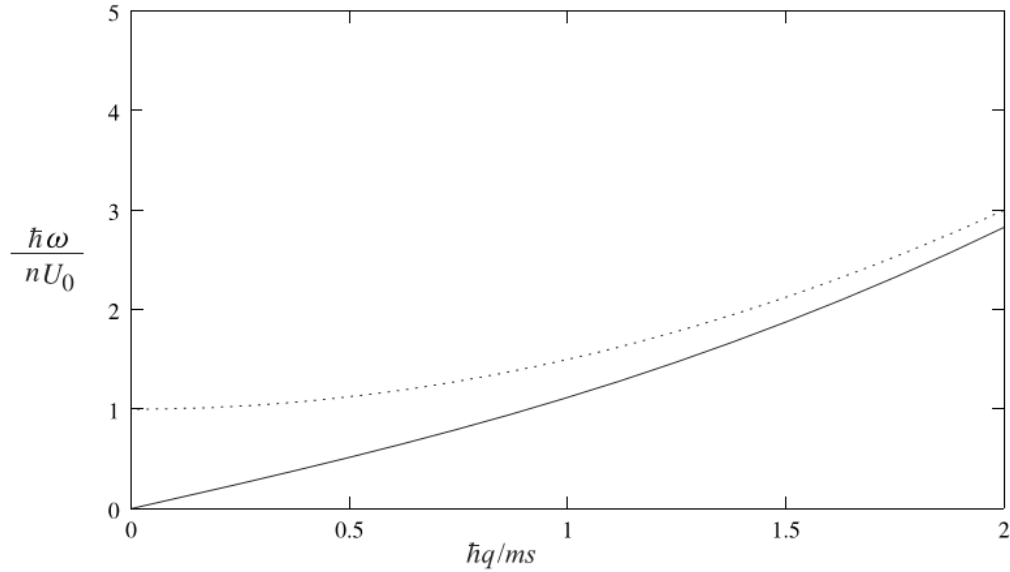


Figura 4.2: Spettro delle eccitazioni (linea continua) in unità di numero d'onda in funzione della variabile adimensionale $\hbar q/ms$. L'espansione per piccole lunghezze d'onda è riportato dalla linea tratteggiata (tratta da [10])

linearità dello spettro per grandi lunghezze d'onda deriva una delle proprietà fondamentali della superfluidità, e viene considerato uno dei traguardi più importanti della teoria microscopica di Bogoliubov. Dal punto di vista termodinamico, questo fenomeno è quasi scontato, in quanto le onde sonore sono un fenomeno di eccitazioni tipico dei sistemi idrodinamici. Ciò che invece risulta anomalo è che per numeri d'onda maggiori i contributi principali dello spettro sono (come mostrato anche in Figura 4.2)

$$\epsilon_q \simeq \epsilon_q^0 + nU_0 \quad [4.34]$$

Questo è lo spettro della particella libera, più un contributo di campo medio. La transizione dallo spettro lineare a quello quadratico avviene quando l'energia cinetica, $\hbar^2 q^2/2m$, e l'energia potenziale di una particella, nU_0 , diventano commensurabili, ossia il termine di pressione quantistica e il termine di pressione classica diventano all'incirca uguali. Ciò avviene a una lunghezza pari a ξ , la lunghezza di coerenza definita in (4.24), quindi su scale di lunghezza maggiori (numero d'onda minore) di ξ gli atomi si muovono collettivamente, mentre su scale di lunghezza minori (numero d'onda maggiore) si comportano come particelle libere. Di fatto, lo spettro delle eccitazioni elementari nell'elio superfluido differisce da quello di un gas diluito a causa delle interazioni a corto raggio. Il calcolo dello spettro delle eccitazioni elementari può inoltre esser basato sull'equazione di Gross-Pitaevskii, senza bisogno di introdurre le variabili idrodinamiche. Utilizzando

questo approccio si comprenderà meglio il comportamento delle singole particelle che va poi a costituire gli effetti collettivi a grandi lunghezze d'onda. Come prima si procederà linearizzando l'equazione di Gross-Pitaevskii indicando la deviazione di ϕ con $\delta\phi$. Usando sia ϕ sia il complesso coniugato ϕ^* come soluzione, si ottengono rispettivamente:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\delta\phi(\mathbf{r},t) + V(\mathbf{r})\delta\phi(\mathbf{r},t) + U_0[2|\phi(\mathbf{r},t)|^2\delta\phi(\mathbf{r},t) + \phi(\mathbf{r},t)^2\delta\phi^*(\mathbf{r},t)] \\ = i\hbar\frac{\partial\delta\phi(\mathbf{r},t)}{\partial t} \end{aligned} \quad [4.35]$$

e

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\delta\phi^*(\mathbf{r},t) + V(\mathbf{r})\delta\phi^*(\mathbf{r},t) + U_0[2|\phi(\mathbf{r},t)|^2\delta\phi^*(\mathbf{r},t) + \phi^*(\mathbf{r},t)^2\delta\phi(\mathbf{r},t)] \\ = -i\hbar\frac{\partial\delta\phi^*(\mathbf{r},t)}{\partial t} \end{aligned} \quad [4.36]$$

Sulla linea di quel che si è trovato con le equazioni idrodinamiche, cerchiamo soluzioni di queste equazioni che siano periodiche nel tempo, al di là del fattore di fase $e^{-i\mu t}$ presente anche nello stato imperturbato. Vogliamo quindi deviazioni della forma seguente:

$$\delta\phi(\mathbf{r},t) = e^{-i\mu t}[u(\mathbf{r})e^{-i\omega t} - v^*(\mathbf{r})e^{i\omega t}] \quad [4.37]$$

dove $u(\mathbf{r})$ e $v(\mathbf{r})$ sono funzioni da determinare e ω è reale. La scelta del segno davanti a v è dato dalle convenzioni, e viene scelto in questo caso negativo. Poiché in ciascuna equazione troviamo sia $\delta\phi$ che $\delta\phi^*$, le soluzioni dovranno ammettere componenti di frequenze sia positive che negative. Inserendo la (4.37) nelle due equazioni linearizzate (4.35) e (4.36), scegliendo soluzioni per $\omega \neq 0$, poniamo a zero i coefficienti di $e^{i\omega t}$ e di $e^{-i\omega t}$. Ciò fornisce due equazioni per $u(\mathbf{r})$ e $v(\mathbf{r})$:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) + 2n(\mathbf{r})U_0 - \mu - \hbar\omega \right] u(\mathbf{r}) - n(\mathbf{r})U_0v(\mathbf{r}) = 0 \quad [4.38]$$

e

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) + 2n(\mathbf{r})U_0 - \mu - \hbar\omega \right] u(\mathbf{r}) - n(\mathbf{r})U_0v(\mathbf{r}) = 0 \quad [4.39]$$

dette equazioni di Bogoliubov ². Come prima, ci mettiamo nelle condizioni di gas di Bose uniforme ($V(\mathbf{r}) = 0$). Scegliamo le soluzioni nella forma

$$u(\mathbf{r}) = u_q \frac{e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}}{V^{1/2}} \quad e \quad v(\mathbf{r}) = v_q \frac{e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}}{V^{1/2}} \quad [4.40]$$

²Come prima, abbiamo raggiunto un risultato della teoria microscopica tramite la linearizzazione.

dove V è il volume del sistema. Il potenziale chimico per un sistema uniforme è dato da nU_0 (3.10) e quindi le equazioni di Bogoliubov diventano:

$$\left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + nU_0 - \hbar\omega\right) u_q - nU_0 v_q = 0 \quad [4.41]$$

e

$$\left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + nU_0 + \hbar\omega\right) v_q - nU_0 u_q = 0 \quad [4.42]$$

da cui, ricordando la definizione di ϵ_0 (4.31), si ottiene immediatamente

$$(\epsilon_q^0 + nU_0 + \hbar\omega)(\epsilon_q^0 + nU_0 - \hbar\omega) - n^2 U_0^2 = 0 \quad [4.43]$$

ossia

$$\hbar\omega = \pm \sqrt{(\epsilon_q^0 + nU_0)^2 - (nU_0)^2} = \sqrt{2nU_0\epsilon_q^0 + (\epsilon_q^0)^2} = \pm\epsilon_q \quad [4.44]$$

che è lo stesso risultato (3.62) ottenuto con l'approccio idrodinamico. Possiamo chiarire la natura delle eccitazioni analizzando il comportamento dei parametri u_q e v_q . Consideriamo per prime le interazioni repulsive, per cui le frequenze risultano reali in ogni caso. Dalla soluzione con energia positiva, si ottiene

$$v_q = \frac{nU_0}{\epsilon_q + \epsilon_q^0 + nU_0} u_q \quad [4.45]$$

Stabiliamo la normalizzazione di u_q e v_q coerentemente ai risultati della teoria microscopica [10]

$$|u_q|^2 - |v_q|^2 = 1 \quad [4.46]$$

Le equazioni di Bogoliubov non variano se u_q e v_q sono moltiplicate per un fattore di fase arbitrario. Rendiamo i due parametri reali ridefinendoli come

$$u_q^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_q^0 + nU_0}{\epsilon_q} + 1 \right) \quad [4.47]$$

e

$$v_q^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_q^0 + nU_0}{\epsilon_q} - 1 \right) \quad [4.48]$$

Si può osservare l'andamento dei coefficienti u_q e v_q in Figura 3.5. Vale la pena di commentare brevemente i risultati ottenuti prendendo spunto dalla teoria di Bogoliubov. Per la soluzione ad energia positiva, si osserva che v_q tende a zero come $1/q^2$ per grandi q , e in questo limite $\delta\phi = e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \omega_q t)}/V^{1/2}$, dove $\omega_q = \epsilon/\hbar$. Ciò corrisponde ad aggiungere una particella con impulso $\hbar\mathbf{q}$, e a rimuovere contemporaneamente una particella dallo stato con zero impulso. Siamo nel regime in cui le particelle passano dal condensato alla componente termicamente eccitata del gas. A impulsi minori, le eccitazioni sono

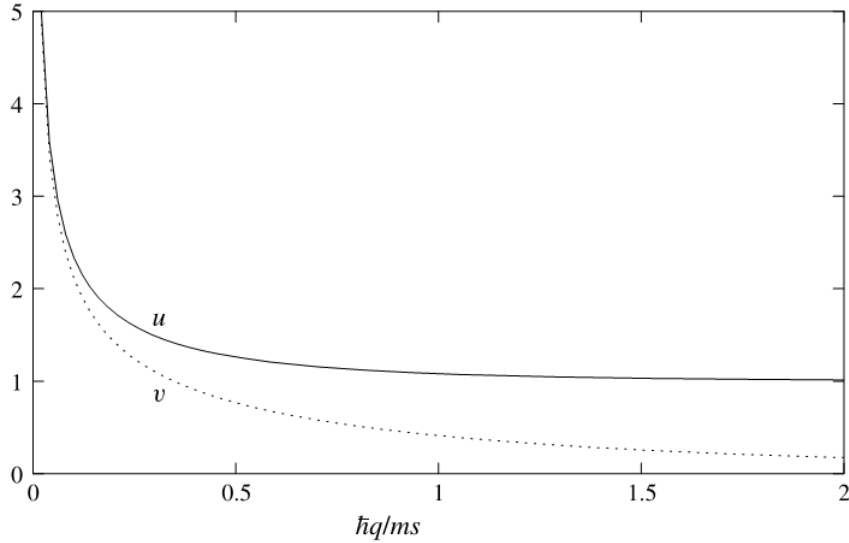


Figura 4.3: Coefficienti u_q e v_q in funzione del numero d'onda, espresso con la variabile adimensionale $\hbar q/ms$ (tratta da [10])

sovrapposizioni lineari dello stato in cui una particella con impulso $\hbar\mathbf{q}$ viene aggiunta (e contestualmente una particella viene rimossa dal condensato) e dello stato in cui una particella con momento $-\hbar\mathbf{q}$ è rimossa (e una particella viene aggiunta al condensato). Infine, a grandi lunghezze d'onda (a cui corrispondono piccoli valori di q) u_q e v_q divergono come $1/q^{1/2}$, e le due componenti hanno lo stesso modulo, dunque si stabilisce un equilibrio fra rimozioni e addizioni alle due componenti del gas. Per le soluzioni con energia negativa ($\hbar\omega = -\epsilon_q$) si ha $v_q^2 \geq u_q^2$ e $u_q \rightarrow 0$ per grandi q . Ciò vuol dire che in questo regime l'eccitazione corrisponde sempre alla rimozione di una particella di impulso $-\hbar\mathbf{q}$ e all'aggiunzione contestuale di una particella al condensato.

È interessante notare come le espressioni algebriche per lo spettro di eccitazione e per i fattori u_q e v_q sono analoghe a quelle per i superconduttori nella teoria BCS (Bardeen - Cooper - Schrieffer), al di là di alcuni cambi di segni necessari per trattare bosoni al posto di fermioni.

Trattiamo brevemente il caso delle interazioni attrattive, in cui $U_0 < 0$. In questa situazione la velocità del suono $s = \sqrt{nU_0/m}$ è immaginaria, quindi si hanno una crescita o uno smorzamento esponenziali nel tempo delle funzioni d'onda delle eccitazioni, invece che un'oscillazione come visto in precedenza nel caso repulsivo. Ciò indica un'instabilità del sistema e una tendenza negli atomi ad ammassarsi. Tuttavia, per grandi numeri d'onda q l'energia domina la relazione (4.44). Il valore minore raggiungibile q_c per cui le eccitazioni sono stabili è dato dalla condizione per cui la frequenza ω si annulla

$$\epsilon_{q_c} + 2nU_0 = 0 \quad [4.49]$$

oppure, sfruttando la definizione di U_0 in (2.27)

$$q_c^2 = -\frac{4mnU_0}{\hbar^2} = 16\pi n|a| \quad [4.50]$$

Confrontando con (4.24), osserviamo che la scala di lunghezze per il numero d'onda per le quali si comincia ad avere instabilità delle eccitazioni è dell'ordine di grandezza della lunghezza di coerenza: quindi, in caso di interazioni attrattive, quando l'energia cinetica risulta sopraffatta dalle interazioni fra le particelle, ci si trova in un regime di instabilità delle eccitazioni. Per dare un'idea del fenomeno, consideriamo qualitativamente il caso di un gas in una trappola all'interno di un contenitore che per semplicità consideriamo sferico e di raggio R_0 . Secondo il ragionamento appena fatto, il minor numero d'onda raggiungibile è dell'ordine di $1/R_0$, e la densità quindi sarà $n \propto N/R_0^3$. Secondo la relazione (4.50), l'eccitazione è stabile se il numero di particelle è inferiore al valore critico N_c dato da

$$N_c \propto \frac{R_0}{|a|} \quad [4.51]$$

La fisica dell'instabilità è la stessa che abbiamo trovato tramite l'equazione (3.24) per le particelle del condensato: per un numero sufficientemente grande di particelle, l'energia di punto zero degli atomi è troppo piccola per vincere l'attrazione tra di essi. Nel caso delle eccitazioni, l'energia di punto zero è l'energia cinetica minima per avere un'oscillazione non nulla.

4.3 Superfluidità e condensato di Bose-Einstein

Questo lavoro si conclude con alcuni cenni sulle connessioni esistenti fra la superfluidità e il condensato di Bose-Einstein. Come vedremo, questi due temi sono strettamente legati. Cominciamo col dire che la proprietà per la quale i superfluidi sono maggiormente noti è l'abilità di scorrere attraverso stretti capillari o fessure senza dissipare energia, essendo la loro viscosità pari a zero. L'analogia con l'effetto Meissner per i superconduttori è immediata, e non è l'unica fra questi due fenomeni. Anche la quantizzazione delle linee di vortice e la mancanza di rotazione per velocità angolari troppo piccole sono aspetti caratteristici della superfluidità, che abbiamo già trovato nella sezione precedente affrontando il comportamento dinamico del condensato e che sono molto simili ad aspetti trovati nella studio della superconduttività. Va specificato che il termine 'superfluidità' non si riferisce a un particolare sistema ma ad un insieme di diversi fenomeni.

Storicamente, la connessione tra superfluidità e l'esistenza del condensato è stata proposta da London nel 1938. Tuttavia, la connessione tra i due aspetti non è immediata: un condensato non necessariamente è un superfluido. Ad esempio, dimostreremo che un gas

ideale di Bose non lo è. Inoltre, sistemi a bassa dimensionalità possono avere un comportamento da superfluido pur in assenza di un vero condensato. Sperimentalmente la superfluidità nell'elio ^4He liquido è stata scoperta da Onnes (1913) e ed è stata spiegata teoricamente da Landau (1941) tramite un criterio che andremo ora a discutere.

Siano E e \mathbf{P} rispettivamente l'energia e l'impulso del fluido nel sistema di riferimento K . L'energia e l'impulso nel sistema K' , che si muove con velocità \mathbf{V} rispetto a K , saranno date da

$$E' = E - \mathbf{P} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2}MV^2, \quad \mathbf{P}' = \mathbf{P} - M\mathbf{V} \quad [4.52]$$

dove M è la massa totale del fluido. Consideriamo ora un fluido uniforme a temperatura zero che scorre attraverso un capillare a velocità costate \mathbf{v} . Se il fluido è viscoso allora il moto produrrà dissipazione di energia con conseguente riscaldamento e diminuzione dell'energia cinetica. In questa trattazione considereremo come processi dissipativi solamente la creazione di eccitazioni elementari. Descriviamo il processo in cui il sistema di riferimento si muove con il fluido. Se una singola eccitazione con impulso \mathbf{p} si crea nel fluido, l'energia totale diventerà

$$E = E_0 + \epsilon(\mathbf{p}) \quad [4.53]$$

dove E_0 e $\epsilon(\mathbf{p})$ sono rispettivamente l'energia dello stato fondamentale e dell'eccitazione. L'impulso totale del fluido in questo sistema di riferimento sarà dunque \mathbf{p} . Spostiamoci nel sistema di riferimento in cui il capillare è fermo e il fluido è in moto con velocità \mathbf{v} . L'energia E' e \mathbf{P}' , considerando (4.52) e (4.53), sono date da

$$E' = E_0 + \epsilon(\mathbf{p}) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2}Mv^2, \quad \mathbf{P}' = \mathbf{p} + M\mathbf{v} \quad [4.54]$$

L'equazione mostra che le quantità $\epsilon(\mathbf{p}) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}$ e \mathbf{p} sono, rispettivamente, la variazione in energia e in impulso dovute al manifestarsi dell'eccitazione. Possiamo concludere quindi che $\epsilon(\mathbf{p}) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}$ è l'energia di un'eccitazione elementare nel sistema di riferimento in cui il capillare è a riposo. Il punto cruciale è che il processo di creazione spontanea può avvenire solo se è energeticamente permesso, ovvero se l'energia dell'eccitazione è negativa:

$$\epsilon(\mathbf{p}) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} < 0 \quad [4.55]$$

Ciò è possibile solo se $v > \epsilon(\mathbf{p})/p$. In tal caso il flusso del fluido è instabile e l'energia cinetica viene trasformata in calore. Se invece la velocità è minore del valore

$$v_c = \min_p \frac{\epsilon(\vec{p})}{p} \quad [4.56]$$

la condizione (4.55) non è mai soddisfatta e non ci sarà la formazione spontanea di eccitazioni nel fluido. Il criterio di Landau per la superfluidità può essere scritto nella forma

$$v < v_c \quad [4.57]$$

e assicura che se la velocità relativa tra il fluido e il capillare è minore del valore critico (4.56) si avrà un flusso costante senza attrito. La configurazione realizzata corrisponde a uno stato di equilibrio metastabile. È infatti stabile rispetto alla creazione di eccitazioni elementari, ma differisce dall'equilibrio termodinamico completo in cui tutto il sistema è a riposo. Osservando lo spettro delle eccitazioni elementari (4.30) ottenuto per il gas di Bose debolmente interagente, vediamo che il criterio è soddisfatto e che la velocità critica è data dalla velocità del suono. Anche i superfluidi fortemente interagenti come l'elio ^4He soddisfano il criterio di Landau, anche se in questo caso la velocità critica è minore della velocità del suono. Invece, il gas di Bose ideale non è un superfluido poiché in tal caso $\epsilon(\mathbf{p}) = p^2/2m$ e il valore di v_c è uguale a zero.

Nella discussione precedente abbiamo considerato una sola eccitazione presente nel fluido, tuttavia possiamo generalizzare per uno stato iniziale arbitrario, e la velocità critica sarà data dalla stessa espressione. L'unico cambiamento è nell'energia di eccitazione che dovrà essere coerente con lo stato iniziale scelto, permettendo inoltre le interazioni tra le eccitazioni.

Anche se per $v > v_c$ diventa energeticamente favorevole creare eccitazioni, ciò non implica necessariamente che il sistema diventi normale. Quando le eccitazioni si creano, lo spettro energetico delle medesime in generale cambia a causa delle interazioni tra le eccitazioni, e ciò può provocare un incremento in v_c . Nello stato fondamentale del gas il condensato è stazionario, e l'impulso totale è zero. Immaginiamo che si aggiungano delle eccitazioni senza cambiamento di velocità del condensato. L'impulso totale per unità di volume è dunque uguale a quello delle eccitazioni:

$$\mathbf{j}_{ex} = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \mathbf{p} f_{\mathbf{p}} \quad [4.58]$$

Si consideri una trasformazione galileiana rispetto a un sistema di riferimento in moto con velocità $-\mathbf{v}_s$, in cui il condensato si muove con velocità \mathbf{v}_s . In questa trasformazione l'impulso totale varia di una quantità $nm\mathbf{v}_s$, e quindi la densità di impulso totale nel nuovo sistema di riferimento è

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}_s + \mathbf{j}_{ex} = \rho\mathbf{v}_s + \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \mathbf{p} f_{\mathbf{p}} \quad [4.59]$$

dove $\rho = nm$ è la densità di massa. L'espressione (4.59) per la densità di impulso è la base per l'introduzione del concetto di densità della componente normale. Consideriamo un sistema all'equilibrio a temperatura diversa da zero e domandiamoci quanto impulso è trasportato dalle eccitazioni, considerando anch'esse come un gas in equilibrio. Indichiamo con \mathbf{v}_s la velocità del condensato e con \mathbf{v}_n la velocità delle eccitazioni. Sappiamo già che l'energia di un'eccitazione nel sistema di riferimento originario è $\epsilon_p + \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_s$. La funzione di distribuzione è quella per le eccitazioni in equilibrio nel sistema di riferimento in moto con velocità \mathbf{v}_n , di conseguenza l'energia che usiamo nella funzione di distribuzione

di Bose è l'energia di eccitazione in questo sistema di riferimento. Questa è l'energia nel sistema di riferimento originario, traslata di una quantità $-\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_n$, e di conseguenza la funzione di distribuzione è data da

$$f_{\mathbf{p}} = \frac{1}{\exp[\epsilon_p - \mathbf{p} \cdot (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)]/KT - 1} \quad [4.60]$$

Inserendo quest'espressione nell'equazione (3.90) si trova

$$\mathbf{j}_{ex} = (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) \cdot \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)}{|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s|^2} \frac{1}{\exp[(\epsilon_p - \mathbf{p} \cdot (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s))/KT] - 1} \quad [4.61]$$

Da qui possiamo ottenere la densità normale ρ_n

$$\rho_n = \frac{1}{\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s} \int \mathbf{p} N_{\mathbf{p}} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \quad [4.62]$$

Se consideriamo la differenza $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ sufficientemente piccola, possiamo espandere $N_{\mathbf{p}}$ per $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ tendente a zero:³

$$\rho_n = -\frac{1}{3} \int \frac{dN_{\mathbf{p}}(\epsilon)}{d\epsilon} p^2 \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \quad [4.63]$$

dove $N_{\mathbf{p}}(\epsilon)$ è la funzione di distribuzione delle eccitazioni elementari calcolata in $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s = 0$ e abbiamo sfruttato il fatto che la funzione di distribuzione è isotropa per \mathbf{p} . L'equazione (4.63) è il risultato principale della teoria di Landau della superfluidità. Tuttavia ha senso solo se le eccitazioni elementari sono ben definite e non interagiscono, così che si possano trattare con la funzione di distribuzione (4.60). Questa condizione è violata ad alte temperature e in particolare in prossimità del punto critico in cui le eccitazioni termiche sono numerose e interagiscono fra di loro. Se valutiamo (4.63) per basse temperature, tali che $KT \ll \mu$, e per basse energie, per le quali $\epsilon \simeq sp$ (vedi (4.32)), otteniamo

$$\rho_n = \frac{2\pi^2 (KT)^4}{45 \hbar^3 s^5} \quad [4.64]$$

Ritornando alla (4.59), abbiamo che la densità d'impulso totale è

$$\mathbf{j} = \rho_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) + \rho \mathbf{v}_s \quad [4.65]$$

Definendo come densità del superfluido la differenza fra le densità totale e normale

$$\rho_s = \rho - \rho_n \quad [4.66]$$

³Consideriamo inoltre che, rimanendo nel regime $v > v_c$ in presenza di eccitazioni e mantenendo piccolo $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$, possiamo considerare anche $v \simeq \epsilon(\mathbf{p})/p$, che possiamo usare per un cambio di variabile nella derivata

la densità di impulso può essere espressa come

$$\mathbf{j} = \rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n \quad [4.67]$$

che ha la stessa forma che otterremmo nel caso si avessero due fluidi compenetranti. Tuttavia, questa è solo un'interpretazione che diamo al fenomeno. Infatti, la densità della componente normale è definita in termini di dipendenza della densità di impulso rispetto alla quantità $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$, quindi dipende sia dalla temperatura che da $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$, cosa che non accadrebbe nel caso di due specie distinte. È più corretto in realtà dire che un fluido quantistico può compiere due moti contemporaneamente. Ciascun moto coinvolge una propria massa effettiva, e la somma delle due masse dà la massa totale del fluido. Un moto è normale e l'altro è caratterizzato da superfluidità, e fra i due non si ha trasferimento di impulso: inoltre, pur considerando l'esistenza di queste due componenti, ciò non vuol dire che il fluido possa esser effettivamente separato in queste due parti. Il pregio di quest'interpretazione sta nella capacità di spiegare i fenomeni osservati nell' ^4He . L'assenza di viscosità quando l'elio scorre attraverso uno stretto capillare è il risultato del flusso della componente superfluida; possiamo dire che invece la parte normale rimane nel contenitore, fluendo molto più lentamente attraverso il passaggio con una velocità definita dalla sua viscosità e dalla larghezza del passaggio. La situazione è l'opposta se misuriamo la viscosità dell' ^4He dallo smorzamento delle oscillazioni di un disco immerso nel fluido: i valori ottenuti sono diversi da zero, in quanto la rotazione del disco determina un flusso normale attorno a sé, che ferma il disco. Quindi nell'esperienza del capillare si osserva la componente superfluida, nell'esperienza del disco si osserva la componente normale. Per concludere questa sezione, riconsideriamo il risultato (4.11), riscritto come velocità della componente superfluida:

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m} \nabla \phi \quad [4.68]$$

Questa relazione stabilisce l'irrotazionalità della componente superfluida. Anche se è stata ricavata per una velocità costante, è valida anche per lente variazioni spaziali e temporali di \mathbf{v}_s . Si può dimostrare che l'equazione (4.68) non dipende dal fatto che il sistema sia un gas diluito, o che si lavori a temperatura zero: è puramente una conseguenza della condensazione di Bose-Einstein, ossia dell'occupazione macroscopica dello stato fondamentale. È opportuno puntualizzare che, anche nel caso del gas di Bose debolmente interagente, non è comunque possibile identificare la densità del condensato con quella della componente superfluida a causa di effetti di svuotamento quantistico nel condensato. Tuttavia, il legame tra i due fenomeni, pur non essendo banale, esiste ed è suffragato, oltre che dalle osservazioni fatte in questa sezione, da molti altri aspetti della teoria microscopica e dell'idrodinamica dei superfluidi (si vedano a riguardo [12] e [6]).

Conclusioni

Con questo lavoro ho voluto ripercorrere gli aspetti teorici principali che hanno portato ad un'approfondita comprensione del fenomeno del condensato di Bose-Einstein.

Partendo dalla definizione della statistica di Bose-Einstein per bosoni degeneri non interagenti, è stato dimostrato come da questa emerga il fenomeno della condensazione. Il fenomeno dell'occupazione macroscopica del livello fondamentale è ben riassunto dalle equazioni (1.9)-(1.10). Successivamente, si è mostrato come questo fenomeno emerga a livello sperimentale in una trappola con potenziale armonico. Rimanendo nel regime di particelle non interagenti, abbiamo definito la densità di particelle nello spazio degli impulsi e la densità spaziale della nube di condensato e della nube termica di atomi non condensati, gestita in questo caso con la statistica classica di Boltzmann. Le differenze fra le due sono ben chiarite dalla Figura (1.1). Procedendo su questo argomento, sono state meglio definite le proprietà delle particelle non appartenenti al condensato introducendo alcune approssimazioni base di meccanica quantistica, ossia sfruttando la distribuzione semi-classica. Con questa si è potuto illustrare anche il diverso comportamento tra atomi nei primi livelli eccitati e atomi del condensato nel caso dell'espansione libera del gas, i cui risultati sperimentali sono visibili in Figura (1.3): per i primi il moto è semplicemente isotropo, per i secondi l'anisotropia della trappola viene mantenuta in una prima fase del moto e porta a una variazione nella forma della nube che può essere letta anche alla luce del principio di indeterminazione di Heisenberg.

Il passo successivo è stato uscire dal caso ideale, per prima cosa introducendo le interazioni tra le particelle del gas. Si è dimostrato che nel regime di basse temperature e di gas rarefatto, la sezione d'urto è definita interamente dalla lunghezza di *scattering* a (2.19), e che gli urti possono essere modellizzati con un potenziale di contatto anch'esso dipendente solo da a . È stato inoltre osservato che, nonostante le approssimazioni fatte siano legittime, l'influenza della forma del potenziale, anche a corto raggio, può rivelarsi determinante per un'analisi più approfondita delle interazioni. Uscendo anche dal Limite Termodinamico, si è potuta considerare anche l'influenza del numero di particelle N sulla percentuale di popolazione del condensato e sulla temperatura di transizione, che si abbassano al diminuire di N . Questo aspetto, considerato assieme alle condizioni di dimensionalità ridotta 1D e 2D, porta anche a mettere in discussione anche la con-

densazione stessa, intesa come transizione brusca da un'occupazione microscopica a una macroscopica dello stato fondamentale. Il caso estremo monodimensionale è infatti privo di condensazione; ciò nonostante, questo non impedisce un'occupazione macroscopica del livello zero, che per temperature finite può essere molto più rilevante rispetto ai casi in cui si ha condensazione.

Sfruttando le conclusioni sulle interazioni fra particelle, si è potuta derivare l'equazione di Gross-Pitaevski (3.9) contestualmente alla definizione di funzione d'onda del condensato (3.5). Quest'equazione è sicuramente più significativa di quelle ottenute nel primo capitolo, e inoltre ha permesso di ragionare rispetto al diverso peso che possono avere il termine cinetico e il termine di energia d'interazione nel sistema. Si è visto in particolare che per N molto grandi, l'energia cinetica può essere trascurata. Quest'approssimazione, detta di Thomas-Fermi, permette di ricavare analiticamente una soluzione semplice ma efficace, che tuttavia non possiamo usare in tutti i punti della nube del condensato, in quanto nelle regioni più periferiche l'energia cinetica gioca un ruolo cruciale. L'equazione di G-P, tramite il calcolo variazionale, ha permesso anche di valutare, nel caso di interazioni attrattive, qual'è il minor valore della variabile adimensionale $N_c|a|/a_{osc}$ che può esser raggiunto per mantenere un minimo nell'energia potenziale di ogni particella, e quindi evitare che il condensato collassi su sé stesso.

Nell'ultimo capitolo, si è estesa l'equazione di Gross-Pitaevskii al caso dipendente dal tempo. Da questa sono state ricavate due equazioni idrodinamiche equivalenti all'equazione di continuità e all'equazione di Eulero dei fluidi ideali. Dal confronto con i fluidi ideali, sono emerse le peculiarità della dinamica del condensato, prima fra tutte la presenza di un termine di pressione quantistica e l'irrotazionalità. Inoltre è stato appurato che il movimento del condensato corrisponde a un flusso di potenziale, e che in presenza di singolarità di tale potenziale si possono avere fenomeni vorticosi, caratteristici dei superfluidi. Nella descrizione delle eccitazioni elementari, intese come oscillazioni termiche della densità del condensato che portano a popolare gli stati superiori al fondamentale, l'interazione tra particelle risulta rilevante nel determinare lo spettro energetico. In particolare, assumono un significato più profondo dopo essersi ricavati le equazioni di Bogoliubov. Anche senza addentrarci nella teoria microscopica che richiederebbe l'utilizzo della seconda quantizzazione, queste equazioni permettono di descrivere qualitativamente il passaggio delle singole particelle dal condensato ai livelli superiori, e viceversa, in funzione del numero d'onda, e di definire anche per le eccitazioni elementari una popolazione critica N_c che definisce, nel caso di interazioni attrattive, il regime di instabilità per cui non si ha più la formazione di eccitazioni.

La ricaduta più eclatante dello spettro energetico delle eccitazioni emerge però nel parlare di superfluidità. Infatti, è proprio grazie al potenziale di interazione tra particelle che compare in quest'equazione che il condensato di Bose-Einstein reale soddisfa il criterio di Landau, mentre questo non accade per il condensato ideale. Da qui si è potuti approdare alla descrizione a due componenti del fenomeno della superfluidità, per cui si osservano alcuni fenomeni in cui non si ha viscosità, dove è la componente condensata

ad essere osservata, e altri fenomeni in cui invece la viscosità è dovuta alla presenza delle eccitazioni elementari che costituiscono un fluido normale. Va detto però che in generale non possiamo identificare la percentuale del condensato con la componente superfluida, e che nei sistemi fortemente interagenti, come l'elio ^4He , che presentano comportamento superfluido il condensato costituisce solo l'8% circa del fluido. Queste conclusioni servono dunque solamente a dare un semplice modello per descrivere qualitativamente tale fenomeno: in realtà, la relazione tra condensato di Bose-Einstein e superfluidità è molto più complicata.

Bibliografia

- [1] F. Chevy, K.W. Madison, V. Bretin, e J. Dalibard, *Interferometric detection of a single vortex in a dilute bose-einstein condensate*, *Phys. Rev. A*, **64**, 031601R, 2001
- [2] F. Dalfovo, S. Giorgini, Lev P. Pitaevskii e Sandro Stringari, *Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gas*, *Rev. Mod. Phys.*, **71**, 463, 1999
- [3] J. Dalibard, *Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases*, *Int. Sch. Phys. E. Fermi*, Course CXL, 321, 1998
- [4] L. Ferrari, *Elementi di Termodinamica Statistica*, <http://campus.unibo.it/214129/1/Fondamenti%20book.pdf>, 2015
- [5] G. Garberoglio, *Computational Physics 1*, <https://www4.unitn.it/People/it/Web/Persona/PER0004771#INFO>, 2015
- [6] A. Griffin, *Excitations in a Bose-Condensed Liquid*, Cambridge University Press, 1993
- [7] K. Huang, *Statistical Mechanics*, John Wiley & Sons, 1987
- [8] L.D. Landau e E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, 1987
- [9] M.R. Matthews, B.P. Anderson, P.C. Haljan, D.S. Hall, C.E. Wieman, e E.A. Cornell, *Vortices in a Bose-Einstein condensate*, *Phys. Rev. Lett.*, **83** 2498, 1999

- [10] C.J. Pethick e H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gas*, Cambridge University Press, 2008
- [11] D.S. Petrov, D.M. Gangardt e G.V. Shlyapnikov, *Low-dimensional trapped gases*, *J. Phys. IV France*, **116**, 1, 2004
- [12] L. Pitaevskii e S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, Clarendon Press, 2003
- [13] M. Prevedelli, *Note del corso di Elementi di Ottica Quantistica*, <http://campus.unibo.it/178424/73/note.pdf>, 2017
- [14] J. Rogel-Salazar, *The Gross-Pitaevskii equation and Bose-Einstein condensates*, *Eur. J. Phys.*, **34**, 247, 2013
- [15] N.C. Semprini, *Lezioni di Fisica Nucleare Subnucleare*, <http://campus.unibo.it/263834/1/Lezioni%20di%20Fisica%20Nucleare%20e%20Subnucleare%202016-2017.pdf>, 2016
- [16] Y. Yomamoto, *Superfluidity*, http://www.nii.ac.jp/qis/first-quantum/e/forStudents/lecture/pdf/qis385/QIS385_chap5.pdf, 2012
- [17] R. Zucchini, *Quantum Mechanics: Lecture Notes*, <http://campus.unibo.it/241853/1/notes.pdf>, 2018

Sitografia

- [18] Cornell Group, JILA, University of Colorado at Boulder, http://jilawww.colorado.edu/bec/CornellGroup/gallery/images/BEC_peaks.jpg
- [19] Ketterle Group, MIT, http://www.rle.mit.edu/cua_group/Nice_group/Nice_pics.htm

[20] Nobelprize.org, Nobel Media AB 2014, *The 2001 Nobel Prize in Physics - Advanced Information*, http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2001/advanced.html, 2017