

**ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI BOLOGNA**

---

**SCUOLA DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA**

**DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE**

***CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ENERGETICA***

**TESI DI LAUREA**

in

Sistemi solari e geotermici M

**Effetto delle variazioni stagionali della temperatura superficiale del terreno sulle  
prestazioni di sonde geotermiche corte**

CANDIDATO  
Federico Cascini

RELATORE:  
Chiar.mo Prof. Enzo Zanchini

Anno Accademico 2016/17

Sessione II

# Sommario

INTRODUZIONE.....	3
1 LE POMPE DI CALORE GEOTERMICHE .....	5
1.1 Funzionamento invernale ed estivo di una pompa di calore geotermica .....	7
1.2 Tipi di pompe di calore geotermiche.....	10
1.3 Sonde geotermiche verticali .....	11
1.4 Prestazioni di una pompa di calore geotermica.....	15
2 IL METODO DELLE <i>g-function</i> E LE EQUAZIONI CHE LO COMPONGONO .....	18
3 DETERMINAZIONE DELLE <i>g-function</i> PER SONDE GEOTERMICHE LUNGHE.....	25
4 DETERMINAZIONE DELLE <i>g-function</i> PER SONDE GEOTERMICHE CORTE .....	30
4.1 Calcolo delle <i>g-function</i> con il codice di calcolo agli elementi finiti COMSOL Multiphysics .....	30
4.2 Metodo di interpolazione delle <i>g-function</i> mediante Wolfram MATHEMATICA .....	35
4.3 Riduzione dei coefficienti delle funzioni polinomiali interpolanti .....	53
4.4 Interpolazione lineare per la determinazione di $g_{50}$ e $g_{100}$ .....	60
5 STUDIO SUGLI EFFETTI DELLE VARIAZIONI STAGIONALI DELLA TEMPERATURA SUPERFICIALE.....	63
5.1 Temperatura del terreno indisturbato .....	64
5.2 Effetto delle variazioni stagionali della temperatura superficiale sulla distribuzione di temperatura del terreno.....	66
5.3 Effetto delle variazioni stagionali della temperatura superficiale del terreno sulle prestazioni di sonde geotermiche corte .....	76
6 CONCLUSIONI .....	90
7 Bibliografia.....	91

# INTRODUZIONE

Negli ultimi anni, allo scopo di ridurre l'utilizzo di combustibili fossili e il loro impatto ambientale, si è cercato di incentivare l'utilizzo di energia da fonti rinnovabili, tra cui quella geotermica. In questo scenario, le pompe di calore accoppiate al terreno si pongono come una valida alternativa nel campo del riscaldamento e/o raffrescamento degli edifici. Tali sistemi permettono l'uso della cosiddetta geotermia a bassa entalpia e necessitano per il loro funzionamento di una sorgente di calore a bassa temperatura (come terreno, acqua di falda o acque superficiali di laghi e stagni) e di energia elettrica. Impiegando scambiatori di calore di geometria opportuna, il calore viene estratto durante l'inverno dalla sorgente termica e ceduto a quest'ultima in estate.

In base alla sorgente termica e al tipo di scambiatori utilizzati, vi sono vari tipi di sistemi. Il più diffuso è costituito dalle Ground Coupled Heat Pumps (GCHPs), o "pompe di calore accoppiate al terreno". In questa tipologia di impianti lo scambio termico avviene con il sottosuolo e lo scambiatore di calore è costituito da un circuito di tubazioni posto nel terreno, che può avere geometria orizzontale oppure verticale. Quest'ultima è quella più impiegata, perché permette di ottenere rendimenti più elevati. Gli scambiatori di calore verticali sono denominati Borehole Heat Exchangers (BHEs) o, in italiano, "sonde geotermiche verticali". Il terreno viene perforato mediante trivellazione, fino ad una profondità che varia tra 30 e 200 m, e vengono immessi uno o due tubi a U in polietilene, all'interno dei quali circola un fluido termovettore. Il foro viene poi sigillato con una miscela di bentonite, cemento e sabbia, detta malta sigillante.

Sono, quindi, pompe di calore in grado di trasferire calore dal terreno all'ambiente da climatizzare, sfruttando la caratteristica del terreno di mantenersi, a qualche metro di profondità, ad una temperatura circa costante durante tutto l'anno, denominata temperatura del terreno indisturbato  $T_g$ .

Il progetto di un campo di sonde geotermiche avviene oggi principalmente attraverso il metodo raccomandato dall'ASHRAE (American Society of Heating, Refrigerating and Air-Conditioning Engineers), basato su simulazioni per un periodo di 10 anni, che non garantisce però la sostenibilità nel lungo periodo di campi di sonde sottoposte a carichi termici stagionali non bilanciati e non tiene conto dello scambio termico con la superficie del terreno.

Nell'ambito di questa Tesi verrà proposto un metodo alternativo e più preciso, basato sull'impiego di funzioni adimensionali di risposta termica di una sola sonda, dette *g-function*, per la valutazione della distribuzione di temperatura nel lungo termine di un campo di scambiatori di calore verticali. Negli esempi, saranno considerati gli effetti dei carichi termici medi mensili, tenendo conto anche delle variazioni stagionali della temperatura dell'aria esterna. Le *g-function* determinate potranno

però essere applicate anche a simulazioni orarie di campi di sonde geotermiche. Nello studio si farà riferimento al modello di sorgente termica cilindrica di lunghezza finita introdotto nello studio numerico del Prof. E. Zanchini e del Prof. S. Lazzari, che sarà applicato per la determinazione delle *g-function* per sonde geotermiche corte. Dapprima, verrà descritto il modello di calcolo per l'ottenimento delle *g-function* mediante la simulazione agli elementi finiti, implementato per mezzo del software COMSOL Multiphysics. Successivamente sarà illustrato il metodo utilizzato per la interpolazione polinomiale dei risultati numerici, con l'ausilio del programma Wolfram MATHEMATICA. Seguiranno esempi di come le *g-function* possano essere utilizzate a livello applicativo per lo studio della distribuzione di temperatura all'interfaccia sonde-terreno, con riferimento alla determinazione degli effetti di lungo termine.

Il metodo delle *g-function* consente di determinare l'evoluzione nel tempo della temperatura di interfaccia tra il terreno e la sonda, sotto l'ipotesi di considerare la temperatura superficiale del terreno costante nel tempo. Nel caso, però, di sonde verticali corte, non considerare l'influenza delle variazioni stagionali della temperatura superficiale del terreno potrebbe condurre ad un'erronea valutazione delle prestazioni delle sonde. Di conseguenza verrà descritto un modello matematico in grado di tenere conto anche delle variazioni medie mensili della temperatura dell'aria esterna. In particolare, verranno introdotte delle ulteriori funzioni adimensionali per la valutazione dell'evoluzione nel tempo della temperatura del terreno, al variare della profondità, sotto l'ipotesi di considerare le oscillazioni stagionali della temperatura della superficie del terreno.

Per illustrare gli effetti delle variazioni della temperatura superficiale media mensile del terreno sulle prestazioni di sonde geotermiche corte saranno considerate simulazioni con durata 50 anni di sonde geotermiche di lunghezza compresa fra i 5m e i 100m e diametri di perforazione compresi tra i 5cm e i 15cm, installate nella località di Bologna. Sarà valutata l'evoluzione temporale della temperatura media sulla superficie della sonda, sia considerando i soli carichi termici mensili, sia considerando anche gli effetti delle variazioni mensili di temperatura dell'aria esterna della località considerata.

# 1 LE POMPE DI CALORE GEOTERMICHE

Le pompe di calore geotermiche, in inglese Ground Source Heat Pumps (GSHPs), sono sistemi che permettono il riscaldamento invernale e la refrigerazione estiva degli ambienti e la produzione di acqua calda sanitaria. Possono essere utilizzate sia per applicazioni di piccola scala, come singole abitazioni, o di medio-grande scala, come condomini, edifici commerciali e industrie.

Vi sono varie tipologie di pompe di calore geotermiche, in base alla sorgente termica utilizzata, che può essere il terreno, l'acqua di falda o gli specchi d'acqua superficiali, come laghi e stagni.

Fino a 10-15 m di profondità, la temperatura della crosta terrestre può essere influenzata dalle variazioni climatiche stagionali; al di sotto di tale profondità invece, si riscontra una zona di omotermia dove appunto la temperatura si mantiene costante tutto l'anno per effetto del bilanciamento tra il flusso di calore che proviene dal nucleo e dal mantello terrestre, gli apporti di energia solare alla superficie terrestre e, talvolta, ma non necessariamente, il contributo dell'energia apportata dalle acque sotterranee. Di seguito vengono riportati, a titolo di esempio, due grafici che mostrano le oscillazioni di temperatura del terreno al variare della profondità, per un valore di diffusività termica del suolo  $\alpha_g = 8.5 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ :

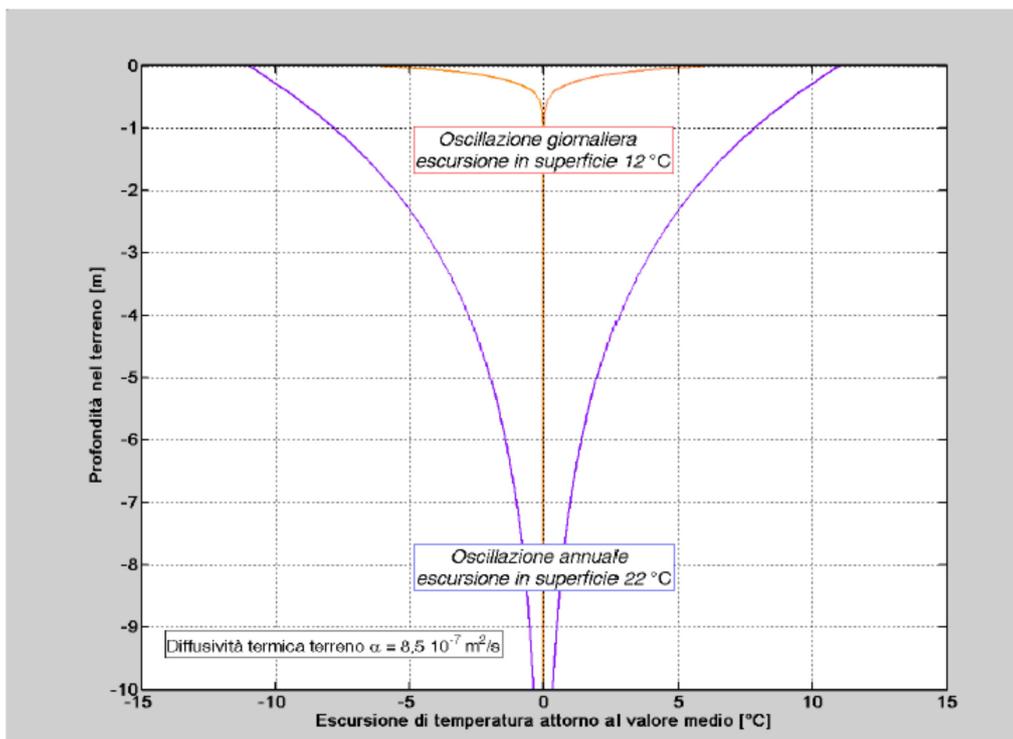
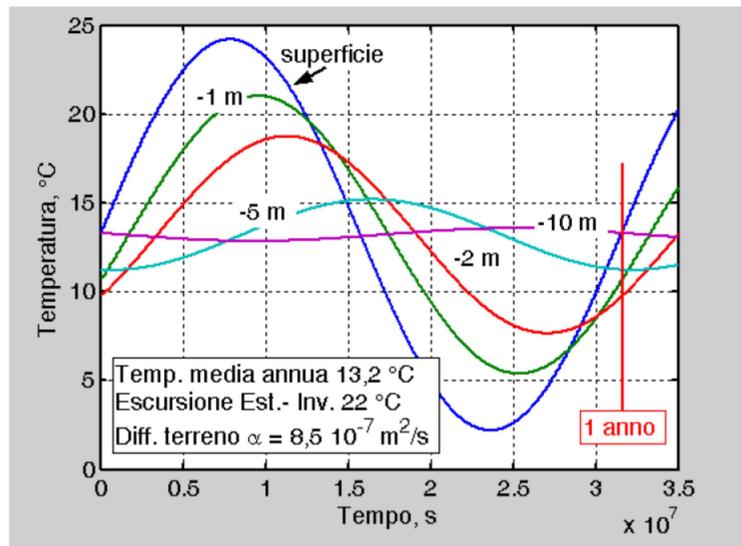


Figura 1: esempio di oscillazione giornaliera e annuale della temperatura del terreno al variare della profondità.



**Figura 2:** esempio di variazione nel tempo della temperatura del terreno a varie profondità.

Dai diagrammi di Fig.1 e Fig.2 si osserva che, per il clima e il terreno considerati (diffusività termica fissata), l'oscillazione giornaliera della temperatura superficiale dell'aria ambiente non è più percepita già alla profondità di 1 m. L'oscillazione annuale si smorza drasticamente già ad una profondità di 10 m. Quindi la temperatura del terreno misurata ad una profondità di almeno 10 m-15 m può essere considerata costante durante l'anno e risulta circa coincidente con temperatura media annuale dell'aria ambiente per il sito considerato. Ciò è dovuto alla elevata capacità di accumulo del terreno, che consente lo smorzamento delle fluttuazioni di temperatura. Questo è un grande vantaggio in termini d'efficienza delle pompe di calore geotermiche. Infatti in inverno il terreno a 10 m di profondità presenta una temperatura più elevata rispetto a quella dell'aria mentre in estate ha una temperatura più bassa. La temperatura media del terreno fra la superficie e il fondo di una sonda geotermica è denominata temperatura indisturbata del terreno ( $T_g$ ).

Nella maggior parte delle regioni italiane, indipendentemente dal tipo di roccia, dall'assetto geologico-strutturale e dalla stratigrafia, la temperatura del terreno a una profondità di 10 m è compresa tra i 13°C e i 15°C; continuando a scendere in profondità la temperatura aumenta mediamente di 3°C ogni 100 m. Questo incremento è detto gradiente geotermico.

Ne deriva che il sottosuolo, l'acqua di falda e le acque di laghi e stagni ad alcuni metri di profondità sono più caldi dell'aria ambiente in inverno e più freddi invece d'estate. Tale fenomeno può essere utilizzato mediante le pompe di calore geotermiche, che sono classificate come sistemi geotermici a "bassa entalpia".

## 1.1 Funzionamento invernale ed estivo di una pompa di calore geotermica

Come abbiamo già accennato, a causa della sua elevata inerzia termica, il terreno risente poco delle fluttuazioni termiche giornaliere e stagionali già a basse profondità, al punto che la sua temperatura può essere considerata costante per tutto l'anno.

La macchina che permette di sfruttare questa fonte di calore pressoché infinita è la *pompa di calore*: dispositivo che, funzionando sulla base di un normale ciclo frigorifero (più comunemente a compressione con alimentazione elettrica), preleva il calore dalla sorgente a temperatura più bassa, che in inverno è il terreno, e lo trasferisce a quella più alta, che in inverno è l'impianto di riscaldamento. Invertendo il ciclo con una valvola di inversione, la pompa di calore può essere utilizzata anche per la climatizzazione estiva, con il terreno impiegato per raffreddare l'abitazione. La tipologia più diffusa è rappresentata dalle pompe di calore a compressione che sono costituite da quattro componenti principali: il compressore, la valvola di espansione e due scambiatori di calore (il condensatore e l'evaporatore), connessi in modo da formare un ciclo chiuso. All'interno di tali componenti circola un fluido frigorifero. Una caratteristica importante del sistema è la reversibilità: infatti grazie alla presenza di un'opportuna valvola è possibile scambiare il condensatore con l'evaporatore e viceversa, e quindi riscaldare o raffreddare i locali interni di un edificio.

Se la pompa di calore è utilizzata per produrre riscaldamento, il fluido assorbe calore dal serbatoio termico per poi cederlo all'ambiente interno. Durante l'estate invece, il calore viene prelevato dall'ambiente interno che si vuol raffreddare e poi espulso nel serbatoio termico. In entrambi i casi si ha comunque trasferimento di calore da un ambiente a temperatura minore verso uno a temperatura maggiore.

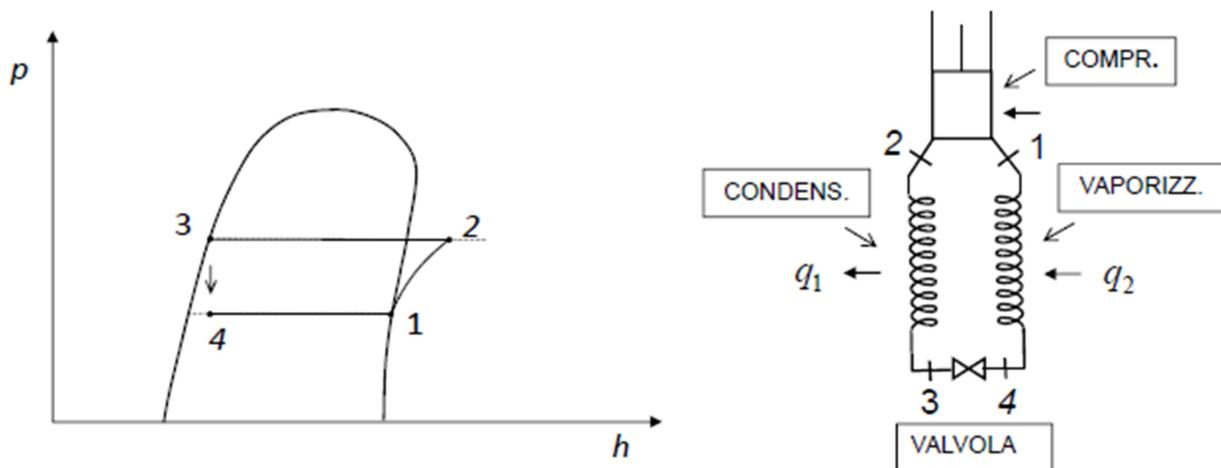
Il trasferimento di calore non avviene in modo spontaneo, ma richiede l'introduzione nel ciclo di una certa quantità di lavoro che per queste macchine coincide con l'energia elettrica assorbita dal compressore.

La pompa di calore è costituita da un circuito chiuso, in cui il fluido termovettore, a seconda delle condizioni di temperatura e di pressione in cui si trova, assume lo stato liquido o di vapore. I componenti principali all'interno di questo circuito chiuso sono:

- un *evaporatore*, ovvero uno scambiatore di calore che, assorbendo il calore dalla sorgente fredda, fa evaporare il fluido;
- un *compressore*, che attraverso l'energia elettrica comprime il fluido allo stato di gas elevandone temperatura e pressione;

- un *condensatore*, ovvero un secondo scambiatore di calore la cui funzione è quella di riportare il fluido da vapore a liquido cedendo il calore generato alla sorgente calda (impianto di riscaldamento);
- una *valvola di espansione* (o valvola di laminazione), che abbassa la pressione, fino a quella di evaporazione, e la temperatura del fluido chiudendo il ciclo.

Descrivendo il funzionamento del sistema più in dettaglio, si ha che il fluido in stato di vapore entra in un compressore, che ne aumenta pressione e temperatura, e percorre in seguito un condensatore, dove da vapore surriscaldato esce allo stato liquido, cedendo calore all'ambiente interno (funzionamento invernale) o all'ambiente esterno (funzionamento estivo). Successivamente, passando attraverso una valvola di espansione, temperatura e pressione vengono fortemente diminuiti, e entrando poi all'interno di un evaporatore, il fluido dallo stato di liquido a bassa temperatura e pressione assorbe calore (dall'ambiente esterno se il funzionamento è invernale o dall'ambiente interno da raffreddare se estivo) tornando così allo stato di vapore (Fig.3). L'insieme di queste trasformazioni costituisce il ciclo termodinamico della pompa di calore. Lo schema di impianto e il ciclo sul diagramma ( $p, h$ ) sono illustrati in Figura 3.



**Figura 3:** schema e diagramma  $p-h$  della pompa di calore

Descrizione del diagramma p-h di Figura 3:

- Stato 1: vapore saturo secco o leggermente surriscaldato;
- 1→2: passaggio attraverso il compressore che aumenta la pressione per mezzo della ricezione di lavoro dall'esterno (compressione adiabatica) con conseguente aumento di entalpia;
- 2→3: passaggio attraverso il condensatore con cessione di calore  $q_1$  all'esterno (diminuzione di entalpia);
- Stato 3: liquido saturo;
- 3→4: passaggio attraverso l'organo di laminazione con diminuzione di pressione;
- 4→1: passaggio attraverso l'evaporatore con ricezione di calore  $q_2$  dall'esterno. Vaporizzazione a pressione costante (aumento di entalpia).

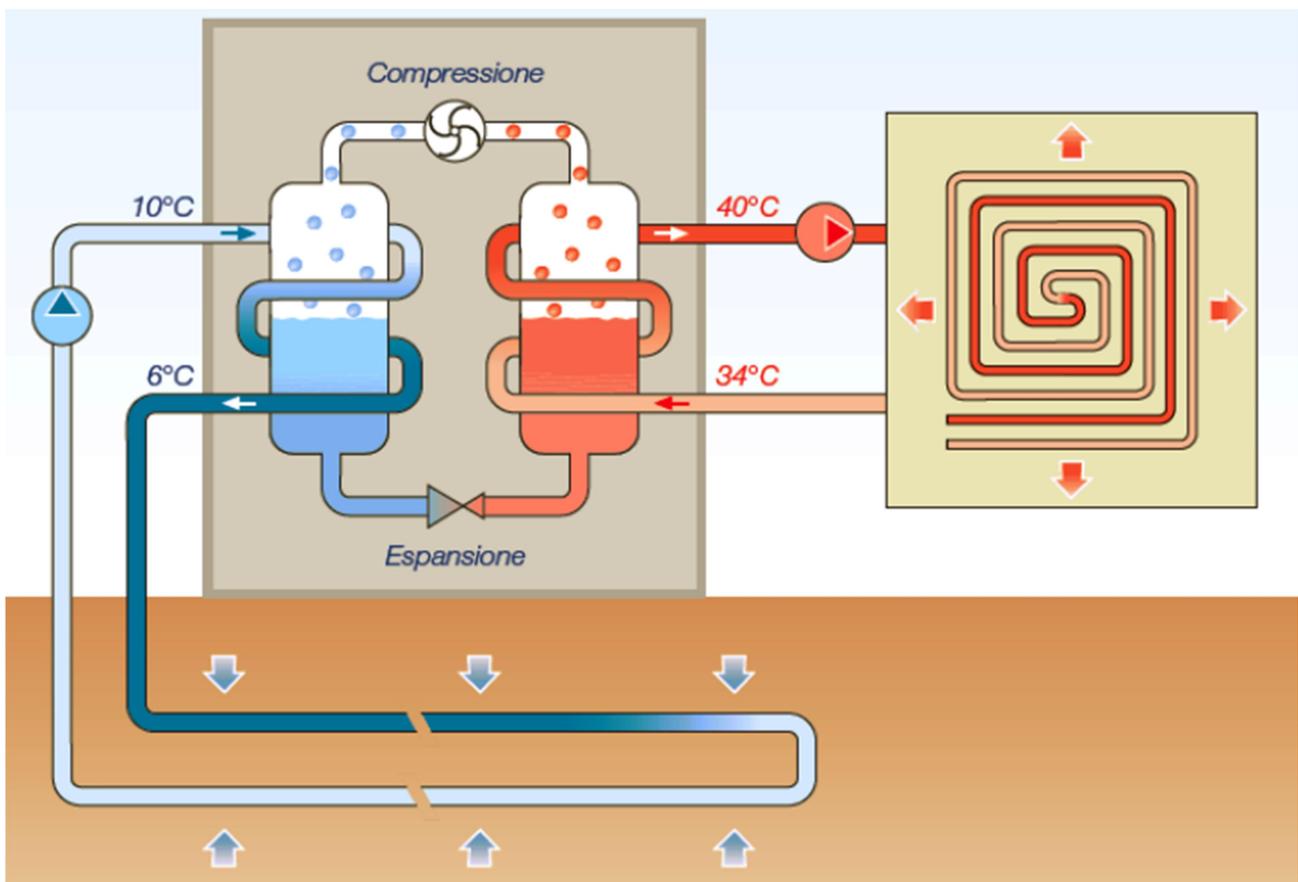


Figura 4: esempio di funzionamento di una pompa di calore geotermica.

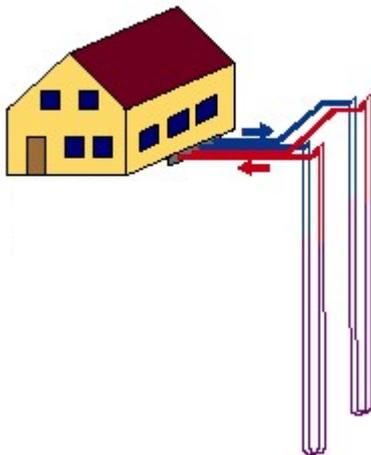
## 1.2 Tipi di pompe di calore geotermiche

Le pompe di calore dove la sorgente termica esterna è costituita dal terreno, o da acqua di falda, o da acqua superficiale sono comunemente chiamate “pompe di calore geotermiche”. La terminologia è impropria, perché questi sistemi sono estremamente poco influenzati dal gradiente geotermico e dal flusso di energia proveniente dall’interno della crosta terrestre. Tuttavia, la terminologia è molto diffusa e sarà quindi anche qui accettata.

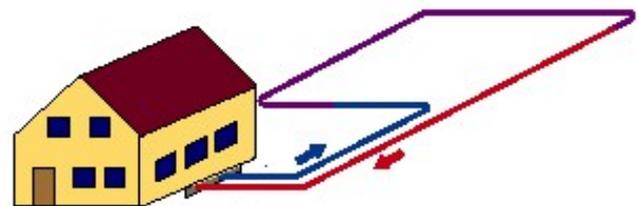
In base alla sorgente termica sfruttata, l’American Society of Heating, Refrigerating and Air-Conditioning Engineers (ASHRAE) ha suddiviso le pompe di calore geotermiche, chiamate Ground Source Heat Pumps (GSHPs), in tre gruppi con la seguente nomenclatura:

- Ground Coupled Heat Pumps (GCHPs) o pompe di calore accoppiate al terreno;
- Groundwater Heat Pumps (GWHPs) o pompe di calore ad acqua di falda;
- Surface Water Heat Pumps (SWHPs) o pompe di calore ad acqua superficiale.

Il primo gruppo, costituito dalle Ground Coupled Heat Pumps (GCHPs), è il più diffuso. Poiché in questo caso la sorgente termica da utilizzare è quella del suolo, lo scambiatore collegato alla pompa di calore è un circuito di tubazioni posto nel terreno. Esso può avere geometria verticale o orizzontale e in base a questa caratteristica le GCHPs vengono distinte in GCHPs verticali (Fig.5) e GCHPs orizzontali (Fig.6). In entrambi i casi il circuito dello scambiatore è chiuso e il fluido termovettore che vi circola (che può essere acqua o una miscela di acqua e glicole etilenico, un anticongelante non tossico) ha la sola funzione di trasferire calore dal suolo al circuito della pompa di calore e viceversa.



**Figura 5:** esempio di impianto con sonde geotermiche verticali.



**Figura 6:** esempio di impianto con sonde geotermiche orizzontali.

### 1.3 Sonde geotermiche verticali

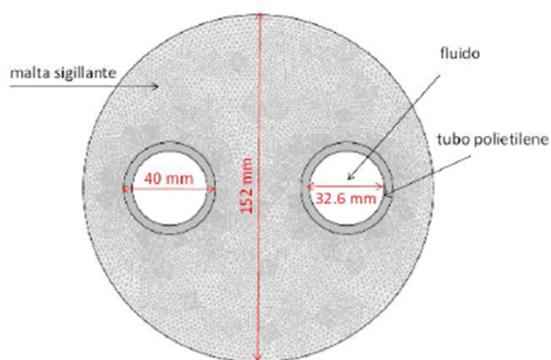
In questa trattazione, considereremo solo gli scambiatori di calore verticali, detti in inglese Borehole Heat Exchangers (BHEs) e in italiano sonde geotermiche verticali. Sono sistemi a circuito chiuso che sfruttano la proprietà del sottosuolo di mantenere una temperatura circa costante già a partire da una profondità di 10 - 15 m. Infatti, il principale vantaggio di questa configurazione è di risentire in maniera trascurabile delle variazioni del clima esterno, date le notevoli profondità raggiunte dalla sonda. In questo tipo di impianti, lo scambio termico avviene grazie alla circolazione di un fluido termovettore all'interno di una o più sonde geotermiche. Queste sono costituite da un sistema chiuso, composto da uno o più tubi, che viene inserito nel terreno a seguito di una perforazione di profondità variabile, a seconda dei criteri progettuali.

Le sonde geotermiche possono essere distinte in due principali categorie:

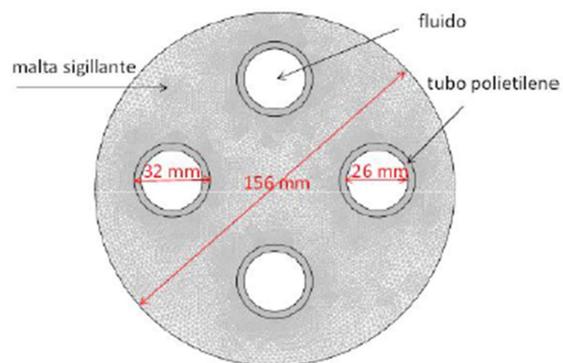
- sonde ad “U”: sono composte da due tubazioni diritte, unite da una giunzione ad “U” al piede della sonda; all'interno di un foro possono essere inseriti uno o due tubi ad “U” (singola e doppia U)
- sonde geotermiche coassiali (o concentriche): sono composte da due tubazioni di diverso diametro, inserite una all'interno dell'altra.
- a pozzo permanente.

I più usati sono quelli a singolo (Fig.7) o doppio (Fig.8) tubo a U e quelli a tubi coassiali (Fig.9). La configurazione ad “U” è la più diffusa: le sonde sono formate da una o due coppie di tubi, uno di mandata e uno di ritorno, ciascuna delle quali è collegata nella parte terminale formando un tubo a U. I tubi sono di materiale plastico, solitamente polietilene ad alta densità o polietilene reticolato ad alta densità; tali materiali sono caratterizzati da una buona resistenza e flessibilità. La geometria con doppio tubo ad U, in generale presenta una resistenza termica inferiore alla soluzione con singolo tubo ad U. Inoltre offre il vantaggio di avere un'affidabilità superiore poiché la sonda, anche se un canale si dovesse occludere, è comunque in grado di scambiare calore. Al tempo stesso, però, è associata ad un maggiore costo di installazione.

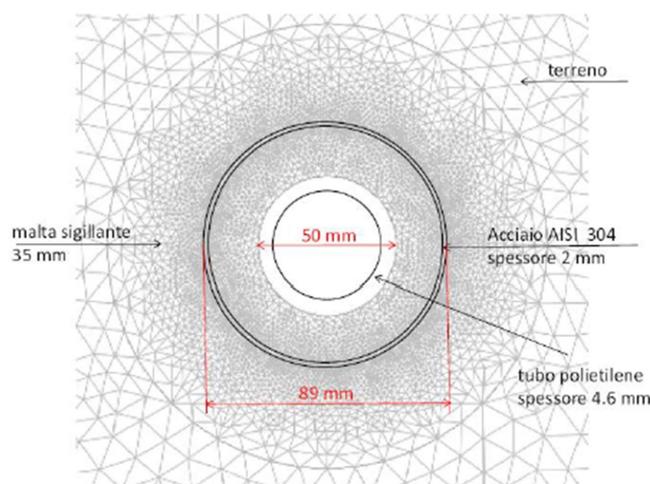
Quelle di tipo coassiale presentano invece un tubo interno di ritorno in polietilene ad alta densità o in polipropilene (PPR 80) e un tubo esterno di mandata in acciaio.



**Figura 7:** sezione trasversale di una sonda geotermica verticale a singolo tubo ad "U".



**Figura 8:** sezione trasversale di una sonda geotermica verticale a doppio tubo ad "U".



**Figura 9:** sezione trasversale di una sonda geotermica verticale a tubi coassiali.

Prima di essere collegate alla pompa di calore, le sonde vengono riempite con il fluido termovettore che garantisce lo scambio termico; tale fluido si riscalda o si raffredda a seconda dell'utilizzo del sistema in modalità di riscaldamento o di raffrescamento.

Il diametro e lo spessore delle tubazioni devono essere tali da garantire lo scambio termico e assicurare un regime di flusso turbolento all'interno della tubazione. Durante il passaggio attraverso la pompa di calore, il fluido termovettore cede/acquista energia termica e dopo essersi raffreddato/riscaldato rientra all'interno del circuito delle sonde geotermiche.

Il fluido termovettore può essere acqua, nel caso in cui le temperature in cui si trova ad operare non scendano al di sotto della temperatura di congelamento; nel caso in cui le temperature siano molto

basse, si preferisce adoperare acqua cui viene addizionato un anticongelante che abbassa la temperatura di congelamento.

Per le sonde geotermiche a tubi a U, i tubi hanno diametro esterno compreso tra 30 e 40 mm, e vengono posti nel terreno all'interno di fori, praticati da macchine perforatrici, la cui profondità varia da 30 a 200 m. La profondità necessaria all'impianto viene calcolata in base alla portata del fluido termovettore, la potenza da dissipare o da cedere e la conducibilità termica dei vari materiali attraversati. Una volta realizzato il foro e calate le sonde geotermiche all'interno dello stesso, viene iniettata a partire dalla base del foro fino al piano campagna, mediante un tubo di iniezione (a perdere), una miscela cemento-bentonitica, ad esempio il Termoplast che presenta una conducibilità termica certificata ( $k = 1.60 W/(mK)$ ). In questo modo si garantisce il contatto termico tra suolo e sonda, evitando la presenza di interstizi vuoti, e si impedisce che le acque di falda più profonde e pure vengano inquinate dalle acque che si trovano più in superficie.

Il numero di scambiatori utilizzati, a lunghezza fissata, dipende dall'energia termica richiesta e dalle caratteristiche del terreno. Gli impianti possono essere di diverso tipo: ci può essere un'unica pompa di circolazione che alimenta più gruppi di sonde collegate in parallelo (Fig.11), le quali sono a loro volta connesse in parallelo a più pompe di calore, oppure si possono usare una pompa di circolazione e una pompa di calore per ciascun gruppo di sonde. In alcuni casi però, quando ad esempio le sonde sono molto corte, è possibile anche porle in serie (Fig.10). Tipicamente le sonde verticali, poiché molto lunghe, sono collegate in parallelo in modo da limitare le perdite di carico.



**Figura 10:** configurazione di sonde verticali in serie.



**Figura 11:** configurazione di sonde verticali in parallelo.

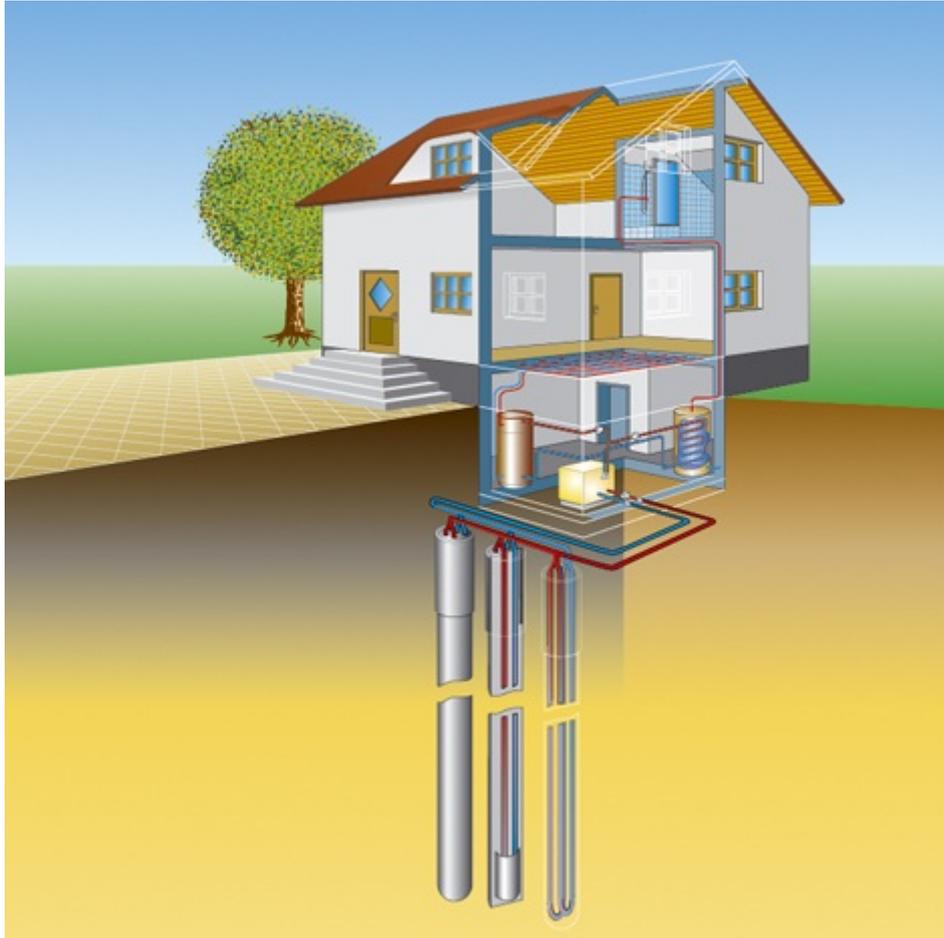
Il principale vantaggio di questi sistemi è il fatto che gli scambiatori verticali sono a contatto con strati di terreno a temperatura costante durante tutto l'anno, non influenzata dalle variazioni della temperatura esterna. Inoltre, poiché essi si sviluppano in profondità, le aree di terreno necessarie per l'installazione sono poco estese. L'energia elettrica richiesta dal pompaggio è più bassa di quella richiesta dai sistemi con scambiatori orizzontali, e questo rende massima l'efficienza delle pompe di

calore. L'aspetto negativo è però rappresentato dal costo elevato della perforazione del suolo, che richiede attrezzature e manodopera adeguate.

Per quanto riguarda lo scambio di calore che avviene con il terreno, esso risulta influenzato particolarmente dalla:

- lunghezza e dal numero delle sonde;
- conduttività termica del terreno;
- conduttività del materiale di riempimento della sonda che ha lo scopo di assicurare un buon contatto termico con il terreno circostante e di impedire l'inquinamento delle eventuali falde acquifere. I materiali di riempimento sono generalmente: bentonite, miscela bentonite-cemento o miscela bentonite-calcestruzzo;
- eventuale presenza di acqua di falda che modifica lo scambio termico con il terreno (essendo un flusso in movimento).

Per le GCHPs, poiché il calore viene estratto e ceduto al terreno per conduzione, la conducibilità termica del terreno influenza notevolmente le prestazioni e l'economicità del sistema, che dipende dal tipo di sottosuolo in cui si effettua l'installazione. In particolare, la lunghezza complessiva dello scambiatore necessaria per erogare la potenza richiesta risulta minore dove la conducibilità termica del terreno è maggiore.



**Figura 12:**esempio di impianto di pompa di calore accoppiata a sonde geotermiche verticali.

## 1.4 Prestazioni di una pompa di calore geotermica

La pompa di calore, sia durante l'inverno che l'estate, trasferisce calore da un ambiente a temperatura più bassa a uno a temperatura più alta. E' necessario però fornire lavoro dall'esterno, sotto forma di energia elettrica. Le prestazioni del sistema si esprimono mediante due coefficienti adimensionali: il *COP* (Coefficient of Performance) e l'*EER* (Energy Efficiency Ratio): il primo si riferisce a quando l'impianto è usato per produrre riscaldamento, il secondo per raffreddamento.

Si indichino con  $T_1$  e  $T_2$  le temperature dell'ambiente caldo e dell'ambiente freddo ( $T_1 > T_2$ ), con  $Q_1$  il calore ceduto alla sorgente calda, con  $Q_2$  il calore sottratto alla sorgente fredda e con  $W$  il lavoro assorbito, cioè l'energia elettrica consumata.

Nel funzionamento estivo, si ha:

$$EER = \frac{Q_2}{W}$$
$$EER_{max} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

dove  $EER_{max}$  è il valore massimo dell'EER, ottenibile nel limite di ciclo reversibile.

Nel funzionamento invernale, si ha:

$$COP = \frac{Q_1}{W} = \frac{Q_2 + W}{W} = EER + 1$$

$$COP_{max} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} + 1 = \frac{T_1}{T_1 - T_2}$$

Il COP è influenzato in modo significativo dalle temperature di esercizio o, più precisamente, dalla differenza di temperatura tra la sorgente calda e quella fredda; quando questa differenza è piccola, allora il COP risulta elevato, il che significa minor energia necessaria alla pompa di calore e quindi maggior risparmio.

Infatti se la differenza  $T_1 - T_2$  tende a 0, sia il  $COP_{max}$  che l' $EER_{max}$  tendono a infinito. Ecco perché è così importante da un lato accoppiare le pompe di calore con un impianto di riscaldamento a bassa temperatura e dall'altro ricercare la sorgente termica disponibile alla temperatura più elevata.

In Italia la temperatura del terreno per i primi 100 m di profondità, zona in cui si è già detto essere circa costante durante tutto l'anno, è compresa tra i 13 e i 16 °C. Questo consente di ottenere buone prestazioni termiche sia durante il periodo del riscaldamento, quando le temperature del fluido termovettore in ingresso ai pannelli radianti a pavimento è di 30 - 35 °C, sia in estate, quando la temperatura del fluido termovettore, per il raffrescamento a pannelli radianti, è 16 - 20 °C. Le GCHPs verticali hanno in genere un COP compreso tra 4 e 5.

Affinché un impianto geotermico sia in grado di garantire un buon rapporto costo/beneficio è necessario che tutti i dispositivi che lo compongono siano efficienti. Se ad esempio la progettazione è rivolta al riscaldamento e alla refrigerazione di un'abitazione, si deve tener conto del fabbisogno energetico, delle caratteristiche ambientali e climatiche della località in questione e della struttura

dell'edificio, cioè di tutti quei fattori che possono influire sul bilancio economico-gestionale-ambientale dell'impianto.

Nel caso particolare delle pompe di calore accoppiate al terreno (GCHPs) l'attenzione deve essere posta anche sul dimensionamento dello scambiatore di calore che viene posizionato nel terreno. Infatti un sottodimensionamento porta a un abbassamento del rendimento della pompa di calore ed un progressivo depauperamento termico del sottosuolo, mentre un sovradimensionamento comporta maggiori spese [1]. Dunque un dimensionamento corretto deve essere in grado di garantire risparmio energetico e economico. I parametri di cui si deve tener conto sono:

- tipologia di terreno;
- temperatura di terreno indisturbato;
- gradiente geotermico;
- materiali utilizzati per la malta sigillante;
- fabbisogno energetico estivo e invernale che la pompa di calore deve soddisfare;
- ore di funzionamento della pompa di calore.

Il dimensionamento delle sonde geotermiche rappresenta un momento progettuale molto delicato, in quanto condizionerà il funzionamento dell'impianto per tutta la sua vita, stimata essere superiore ai 100 anni. Un'errata valutazione in questa fase può produrre risultati difficilmente rimediabili.

## 2 IL METODO DELLE *g-function* E LE EQUAZIONI CHE LO COMPONGONO

Vista l'incidenza dei costi di perforazione, il dimensionamento è sempre naturalmente orientato a minimizzare la lunghezza complessiva delle sonde verticali che andranno ad alimentare la pompa di calore. La lunghezza finale deve però soddisfare alcune importanti condizioni e deve essere valutata tenendo in considerazione le prestazioni dell'intero sistema di scambio termico. In particolare, bisogna prestare attenzione all'efficienza della pompa di calore: tanto più bassa sarà la temperatura della sorgente termica, tanto peggiori saranno le prestazioni energetiche.

Quando si considera lo scambio termico con il terreno, la procedura di dimensionamento è necessariamente caratterizzata da una certa complessità. Le temperature del fluido geotermico infatti variano in funzione di molti parametri e possono diventare anche molto basse nel periodo invernale in cui il prelievo di energia dal terreno è più consistente. Infatti, bisogna tenere conto che successivamente alla messa in funzione dell'impianto, la temperatura del terreno non si manterrà costantemente pari alla temperatura del terreno indisturbato, ma subirà gli effetti dello scambio termico con la sonda, specialmente nel caso in cui si abbiano carichi termici stagionali non bilanciati. Di conseguenza è necessario andare a valutare, attraverso opportune procedure di dimensionamento, l'andamento delle temperature dello scambiatore geotermico in un arco di alcune decine di anni, allo scopo di assicurare che le temperature minime e massime di ingresso e uscita dalla pompa di calore e dall'impianto rimangano coerenti con i valori di progetto.

Tra i vari metodi esistenti per il dimensionamento di un campo di sonde, vi è quello basato sull'impiego di funzioni adimensionali di risposta termica di una sola sonda, dette *g-function*. A differenza di altri, questo metodo pone l'attenzione sullo studio di sostenibilità nel lungo periodo, anche decine di anni, di campi di sonde sottoposti a carichi termici stagionali non bilanciati.

Con il metodo delle *g-function* vengono analizzati gli effetti sul terreno dei carichi termici mensili cui sono sottoposte le sonde, per un periodo di alcune decine di anni, senza considerare la struttura interna delle sonde e assumendo che siano trascurabili gli effetti del movimento dell'acqua di falda. Le *g-function* sono funzioni adimensionali di risposta termica, di una singola sonda, ad un carico termico costante nel tempo. Più precisamente, una *g-function* è la temperatura adimensionale mediata sulla lunghezza della sonda, ad una certa distanza adimensionale dall'asse della sonda, prodotta da un carico termico lineare costante che inizia all'istante  $\tau = 0$ . Le *g-function* possono essere determinate tramite uno schema 2D assialsimmetrico, che tiene conto dello scambio termico con la superficie del terreno. I modelli da poter utilizzare sono quello della sorgente termica lineare

di lunghezza finita (*finite line source*), oppure quello di una sorgente cilindrica di lunghezza finita (*finite cylindrical source*). Nell'ambito di questa Tesi di laurea si farà riferimento al modello di sorgente termica cilindrica di lunghezza finita: lo stesso adoperato per lo studio numerico "Lazzari S.- Zanchini E. (2013) *Temperature distribution in a field of long Borehole Heat Exchangers (BHEs) subjected to a monthly averaged heat flux*, Energy, 59, 570-580, 2013".

Ogni sonda, quindi, viene considerata come una sorgente termica cilindrica, di diametro  $D$  e lunghezza  $L$ , soggetta ad un carico termico per unità di lunghezza costante durante ciascun mese, ma variabile nel corso dell'anno. Si assume, inoltre, che il carico termico mensile sia positivo se ceduto al terreno e negativo se sottratto ad esso. Tale superficie cilindrica si estende all'interno di un solido omogeneo semi-infinito, idealizzazione del terreno, nel semispazio  $z \geq 0$ , con l'asse  $z$  orientato verso il basso. Si ipotizza, inoltre, che la conducibilità termica  $k_g$  e la diffusività termica  $\alpha_g$  del solido, siano costanti e non ci sia generazione termica all'interno del solido. In ultimo, vengono trascurati gli effetti del movimento dell'acqua di falda.

All'istante iniziale,  $\tau = 0$ , il campo di temperatura nel solido è uniforme, con valore  $T_g$ , temperatura indisturbata del terreno.

Per  $\tau > 0$ , all'interfaccia tra la sonda e il terreno è presente un flusso termico per unità di area, uniforme e indipendente dal tempo, secondo la relazione:

$$q(\tau) = \frac{Q_0}{\pi D}$$

Tale flusso è applicato al solido, sulla superficie interna  $r = \frac{D}{2}$ , dove  $Q_0$  è un valore di riferimento del flusso di calore per unità di lunghezza, assunto di solito uguale al carico termico medio mensile con modulo massimo.

Il campo di temperatura nel solido ha simmetria assiale e, considerando che ci sia pura conduzione, l'equazione differenziale, in coordinate cilindriche, che regola lo scambio termico ha la forma:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \alpha_g \nabla^2 T \quad (1)$$

con  $\alpha_g$  diffusività termica del terreno.

La condizione iniziale e le condizioni al contorno sono:

$$\text{(iniziale)} \quad T(r, z, 0) = T_g \quad (2)$$

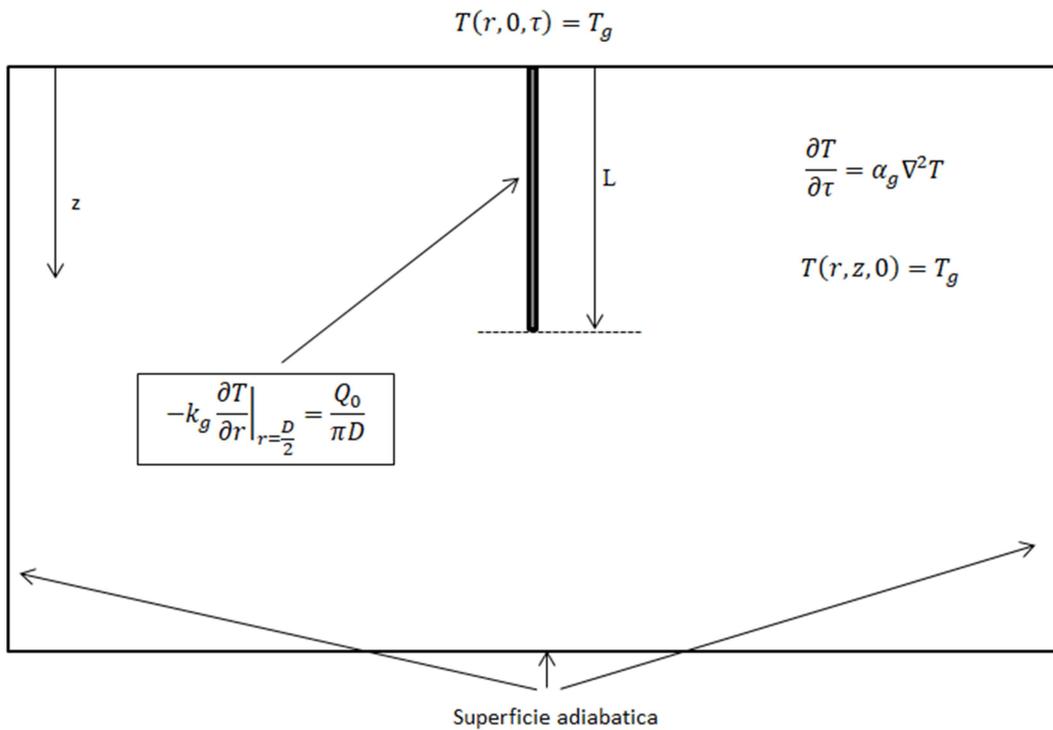
$$\text{(superficie del terreno)} \quad T(r, 0, \tau) = T_g \quad (3)$$

Si ricorda che si sta lavorando sotto l'ipotesi di considerare trascurabili gli effetti della variazione di temperatura esterna.

La condizione al contorno da imporre sulla superficie tra la sonda e il terreno, posta alla distanza  $r = \frac{D}{2}$  dall'asse della sonda, è:

$$-k_g \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=\frac{D}{2}} = \frac{Q_0}{\pi D} \quad (4)$$

con  $k_g$  conducibilità termica del terreno.



**Figura 13:** schema del modello 2D assialsimmetrico utilizzato.

Si impone la condizione di adiabaticità sulla superficie laterale e su quella inferiore del terreno, mentre si considera la superficie superiore isoterma, con temperatura uguale a quella indisturbata del terreno  $T_g$ .

In seguito, si passa all'adimensionalizzazione tramite l'introduzione delle seguenti grandezze adimensionali:

$$\begin{array}{ccc}
 T^* = k_g \frac{T - T_g}{Q_0} & \longrightarrow & T - T_g = \frac{Q_0 T^*}{k_g} \\
 \tau^* = \frac{\alpha_g \tau}{D^2} & \longrightarrow & \tau = \frac{D^2 \tau^*}{\alpha_g} \\
 \nabla^* = D \nabla & \longrightarrow & \nabla = \frac{1}{D} \nabla^* \\
 r^* = \frac{r}{D} & \longrightarrow & r = D r^* \\
 z^* = \frac{z}{D} & \longrightarrow & z = D z^*
 \end{array}$$

Si procede, quindi, con l'adimensionalizzazione rispetto al diametro delle relazioni (1), (2), (3) e (4):

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \alpha_g \nabla^2 T \quad (1)$$

$$T - T_g = \frac{Q_0 T^*}{k_g} \quad \tau = \frac{D^2 \tau^*}{\alpha_g} \quad \nabla = \frac{1}{D} \nabla^*$$

Si procede derivando rispetto a  $\tau$  la  $T - T_g = \frac{Q_0 T^*}{k_g}$  e si ottiene:

$$\frac{Q_0 \alpha_g}{k_g D^2} \frac{\partial T^*}{\partial \tau^*} = \frac{\alpha_g Q_0}{D^2 k_g} \nabla^{*2} T^* \quad \longrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial T^*}{\partial \tau^*} = \nabla^{*2} T^*} \quad (1ad)$$

$$T(r, z, 0) - T_g = 0 \quad (2) \quad \longrightarrow \quad \boxed{T^*(r^*, z^*, 0) = 0} \quad (2ad)$$

$$T(r, 0, \tau) - T_g = 0 \quad (3) \quad \longrightarrow \quad \boxed{T^*(r^*, 0, \tau^*) = 0} \quad (3ad)$$

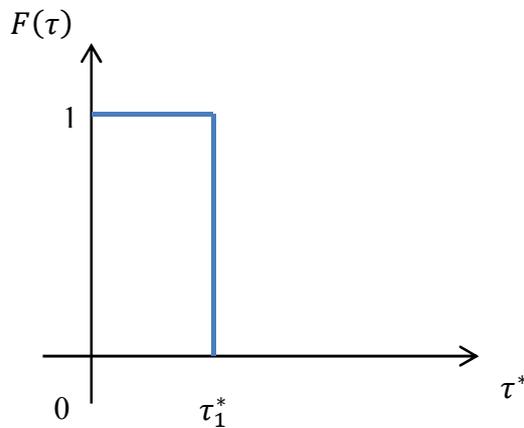
$$-k_g \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=\frac{D}{2}} = \frac{Q_0}{\pi D} \quad (4) \quad \longrightarrow \quad -k_g \frac{Q_0}{k_g D} \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_{r^*=\frac{1}{2}} = \frac{Q_0}{\pi D}$$

$$\boxed{-\frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_{r^*=\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi}} \quad (4ad)$$

Le equazioni (1ad – 4ad) sono lineari, per cui è possibile utilizzare la sovrapposizione degli effetti, sia nel tempo che nello spazio. Nel nostro studio, considereremo gli effetti prodotti dai carichi termici medi mensili. Il carico termico lineare medio, in ciascun mese, può essere espresso come  $Q_0 F(\tau^*)$ , dove  $F(\tau^*)$  è una funzione periodica del tempo adimensionale  $\tau^*$ , con periodo di un anno (364 giorni), variabile secondo scalini mensili cioè costante per ogni singolo mese. Si ipotizza, inoltre, che tutti i mesi abbiano la stessa durata pari a 730h ( $2.628 \times 10^6 s$ ). Si definisce  $\tau_1^*$  come la durata adimensionale di ciascun mese, che dipenderà dal diametro  $D$  e dalla diffusività termica  $\alpha_g$ , secondo la relazione:

$$\tau_1^* = \frac{\alpha_g}{D^2} \tau$$

Per il generico carico mensile, si esprime la funzione  $F(\tau^*)$  come prodotto di uno step unitario di durata un mese e l'ampiezza adimensionale  $A_i$ .



**Figura 14:** funzione  $F(\tau)$  con step unitario di durata un mese ( $A_i = 1$ ).

Uno scalino unitario con durata un mese è espresso mediante la differenza di funzioni di Heaviside:

$$H(\tau^*) - H(\tau^* - \tau_1^*)$$

dove  $\tau_1^*$  è la durata adimensionale di un mese. Avendo considerato tutti i mesi di pari durata (30 giorni) e sommando dodici funzioni  $F(\tau^*)$ , ciascuna traslata di  $\tau_1^*$  e opportunamente pesata, si ottiene il carico termico adimensionale di durata un anno. I dodici carichi mensili sono quindi definiti nel seguente modo:

$$A_0[H(\tau^*) - H(\tau^* - \tau_1^*)]$$

$$A_1[H(\tau^* - \tau_1^*) - H(\tau^* - 2\tau_1^*)]$$

$$A_2[H(\tau^* - 2\tau_1^*) - H(\tau^* - 3\tau_1^*)]$$

...

Allora, per un periodo di  $n$  mesi,  $F(\tau^*)$  può essere espressa come:

$$F(\tau^*) = \sum_{i=0}^{n-1} A_i [H(\tau^* - i\tau_1^*) - H(\tau^* - (i+1)\tau_1^*)]$$

I coefficienti  $A_i$ , devono essere determinati per ogni mese dell'anno e corrispondono al rapporto tra il fabbisogno mensile di energia e il carico termico medio mensile di modulo massimo, solitamente quello relativo al mese di gennaio. Avendo considerato negativo il carico termico sottratto al terreno (caso dei mesi invernali) e positivo quello ceduto al terreno (caso dei carichi estivi), i coefficienti  $A_i$  saranno negativi o positivi a seconda del mese dell'anno e il loro valore dipenderà dal relativo carico termico. Per ogni singolo caso di studio, bisognerà quindi determinare i 12 coefficienti  $A_i$  relativi al primo anno. Si avrà poi, per gli anni successivi,  $A_{12} = A_0$ ,  $A_{13} = A_1$ , ecc.

Se si assume  $Q_0$  pari al modulo del carico termico medio mensile massimo, o minimo se negativo (mesi invernali), il carico termico lineare a scalini mensili è dato da

$$Q(\tau^*) = Q_0 \cdot F(\tau^*)$$

dove  $F(\tau^*)$  assume valori compresi tra -1 ed 1.

Poiché (1ad)-(4ad) è un sistema di equazioni lineari, la temperatura adimensionale, mediata sulla lunghezza della sonda, prodotta dal carico termico adimensionale, precedentemente indicato, ha la forma:

$$\bar{T}^*(r^*, \tau^*) = \sum_{i=0}^{n-1} A_i [g(r^*, \tau^* - i\tau_1^*) - g(r^*, \tau^* - (i+1)\tau_1^*)]$$

dove  $g(r^*, \tau^*)$  è la temperatura adimensionale, mediata sulla lunghezza della sonda, dovuta al carico termico adimensionale  $H(\tau^*)$ , che verrà denominata *g-function* relativa alla distanza adimensionale  $r^*$ .

Il calcolo delle *g-function*, per una sonda di lunghezza  $L$  e diametro  $D$ , permette, quindi, di determinare l'evoluzione nel tempo della temperatura adimensionale media all'interfaccia tra la sonda e il terreno. Inoltre, la linearità delle equazioni ci consente, tramite l'applicazione della sovrapposizione degli effetti nello spazio, di valutare quale sia l'interazione tra le sonde facenti parte di un campo sonde.

### 3 DETERMINAZIONE DELLE *g-function* PER SONDE GEOTERMICHE LUNGHE

Il metodo delle *g-function* descritto nel precedente capitolo è stato implementato nello studio numerico condotto dal prof. Zanchini e dal prof. Lazzari, come illustrato nell'articolo: E. Zanchini, S. Lazzari, Temperature distribution in a field of long Borehole Heat Exchangers (BHEs) subjected to a monthly averaged heat flux, *Energy*, 59, 570-580, 2013 [2].

Tale studio è stato condotto facendo riferimento al modello matematico delle *g-function* illustrato precedentemente. È stata considerata una sorgente termica cilindrica di diametro  $D$  e lunghezza  $L$  (*finite cylindrical source*), soggetta a un carico termico per unità di lunghezza uniforme, costante per ciascun mese ma diverso fra i vari mesi dell'anno. È stata quindi eseguita una simulazione agli elementi finiti con l'ausilio di COMSOL Multiphysics, per poter effettuare il calcolo delle *g-function* per differenti valori di lunghezze adimensionali  $L^* = \frac{L}{D}$ . È stato quindi implementato il modello 2D assialsimmetrico per determinare le *g-function* per sonde geotermiche lunghe, nello specifico per valori di  $L^* = 2000, 1400, 1000, 700, 500$  e di  $r^* = 0.5, 30, 40, 60, 80, 120, 170, 230, 300, 400, 600$ . L'intervallo di tempo adimensionale considerato è stato  $10^{-4} \leq \tau^* \leq 10^6$ , dove  $\tau^* = \frac{\alpha_g \tau}{D^2}$ , nella scala logaritmica  $-4 \leq \log_{10} \tau^* \leq 6$ , suddiviso in intervalli di  $\log_{10} \tau^*$  pari a 0.002, per un totale di 5000 passi. Sono state quindi determinate 55 *g-function* (11 per ogni valore di  $L^*$ ). Osservandone la loro evoluzione nel tempo ci si è accorti che al variare di  $L^*$  non si hanno sostanziali differenze dei valori delle *g-function* in corrispondenza della superficie della sonda. Al contrario, l'effetto di  $L^*$  è apprezzabile al crescere della distanza adimensionale, in particolare per valori di  $r^*$  dello stesso ordine di grandezza della lunghezza adimensionale della sonda.

Nella Figura15 viene riportato l'andamento delle *g-function* sulla superficie della sonda ( $r^* = 0.5$ ) per  $L^* = 2000, 1400, 1000, 700$ , mentre nella Figura16 viene illustrato l'andamento per  $r^* = 400$ , per i medesimi valori di  $L^*$ .

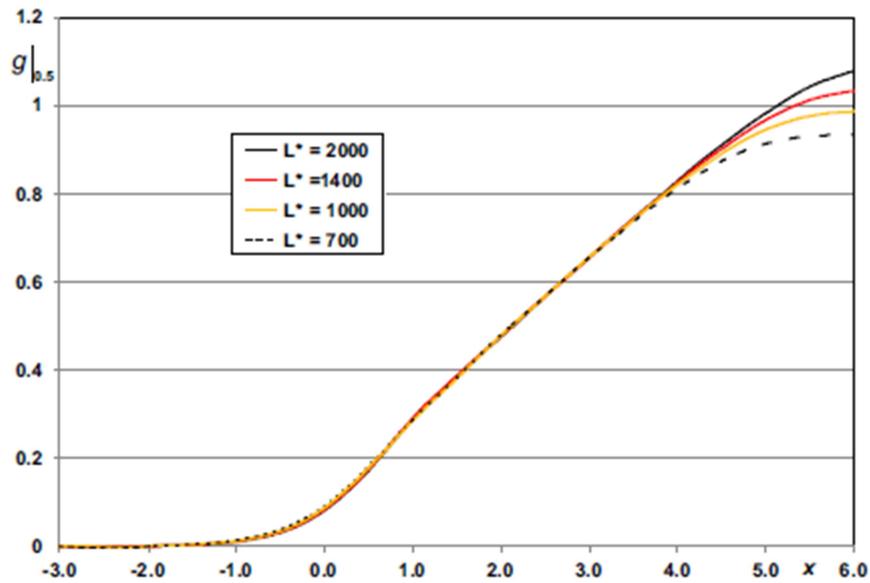


Figura 15: grafico delle  $g$ -function ad  $r^* = 0.5$ , per  $L^* = 2000, 1400, 1000, 700$ .

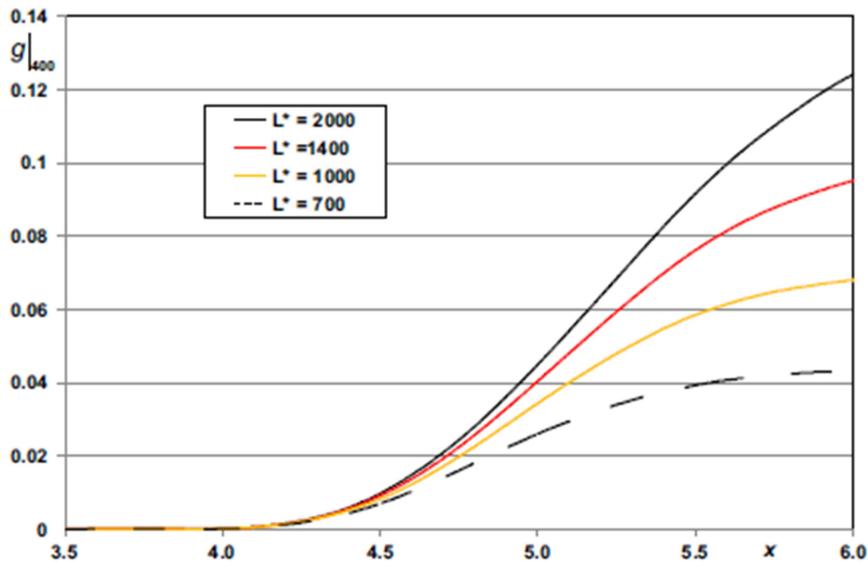
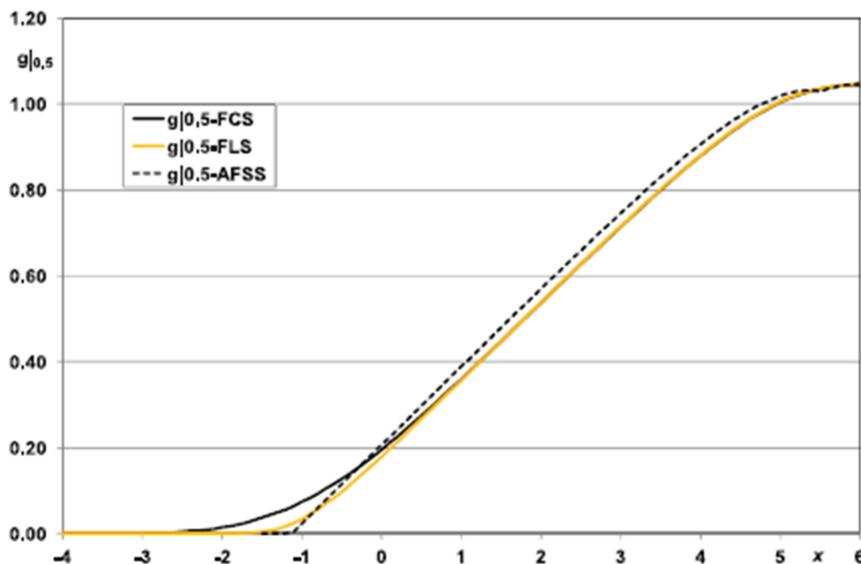


Figura 16: grafico delle  $g$ -function ad  $r^* = 400$ , per  $L^* = 2000, 1400, 1000, 700$ .

Si è detto che questo metodo si pone come alternativa ad altri già presenti all'interno della letteratura scientifica, come quello ideato da Claesson ed Eskilson [3] e rielaborato da Lamarche e Beauchamp [4] e da Bandos e altri [5], o come quello presentato da Fossa [6, 7]. Il metodo di Claesson ed Eskilson è basato su espressioni semi-analitiche del campo di temperatura ottenute sotto l'ipotesi di considerare la sonda come una sorgente termica lineare di lunghezza finita soggetta

a flusso termico per unità di lunghezza costante (*finite line source*). A differenza del modello di sorgente cilindrica di lunghezza finita (*finite cylindrical source*), che pone il flusso termico sulla superficie della sonda, questo modello considera la potenza termica lineare erogata dall'asse della sonda.

Il metodo di Fossa è, invece, costituito da espressioni approssimate delle *g-function* determinate empiricamente, attraverso l'analisi di numerosi campi di sonde eseguita con le espressioni del metodo *finite-line-source* determinate da Bandos e altri [5]. Nello studio condotto da Zanchini e Lazzari [2] le *g-function* sono state quindi poste a confronto con quelle ottenute tramite gli altri due metodi. Ad esempio, si è scelto di confrontare tra loro le curve corrispondenti ad  $L^* = 1000$  ed  $r^* = 0.5$ , come mostrato in Figura 17:



**Figura 17:** confronto tra le *g-function* ottenute attraverso la simulazione agli elementi finiti (FCS), quelle ottenute col metodo *finite line source* (FLS) e quelle col metodo di Fossa (AFSS), per  $L^*=1000$  ed  $r^*=0.5$ .

Le *g-function* sono state rappresentate in funzione di  $x = \log_{10} \tau^*$ , nell'intervallo  $-4 \leq x \leq 6$ , secondo la denominazione  $g|_{0.5-FCS}$ , per quella corrispondente al metodo *finite cylindrical source*,  $g|_{0.5-FLS}$ , per quelle determinate col metodo *finite line source*, e  $g|_{0.5-AFSS}$ , per la *g-function* relativa al metodo di Fossa.

Il grafico mostra come per  $x > 1$ , la  $g|_{0.5-FCS}$  e la  $g|_{0.5-FLS}$  siano pressoché indistinguibili (lo scarto quadratico medio è di 0.0143), mentre la  $g|_{0.5-AFSS}$  presenti un certo scostamento, indice di risultati meno precisi, seppur accettabili. Per  $x < 1$ , si osserva che la  $g|_{0.5-FCS}$  presenta valori maggiori rispetto alle altre. Questo comportamento è dovuto alle differenti ipotesi sul flusso termico: il

metodo *finite cylindrical source* considera il flusso termico applicato alla superficie in  $r^*=0.5$  con una conseguente sovrastima dei valori di temperatura, mentre il *finite line source* assume che venga generato sull'asse della sonda, con una conseguente sottostima dei valori di temperatura. Per bassi valori del tempo adimensionale, si potrebbero ottenere *g-function* maggiormente accurate se si considerasse la struttura interna della sonda (i valori sarebbero intermedi tra  $g|_{0.5-FCS}$  e  $g|_{0.5-FLS}$ ). Andando a considerare le *g-function* per distanze adimensionali maggiori, mentre i metodi FCS ed FLS risultano avere ancora risultati simili tra loro, il terzo metodo presenta uno scostamento sempre maggiore.

È necessario sottolineare, che oltre alla buona precisione dei valori numerici prodotti, il metodo introdotto da Zanchini e Lazzari [2] è risultato avere tempi di calcolo computazionale nettamente inferiori rispetto a quello di Claesson ed Eskilson, anche considerando le espressioni semplificate elaborate da Bandos e altri [5].

Al calcolo dei valori numerici è seguito in [2] un processo di interpolazione delle *g-function* per mezzo di due funzioni polinomiali di  $x$ , con  $x = \log_{10} \tau^*$ , secondo la forma:

$$\text{per } -4 \leq x < x_0 \qquad g(x) = 0$$

$$\text{per } x_0 \leq x < x_1 \qquad g(x) = a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$\text{per } x_1 \leq x \leq 6 \qquad g(x) = b_6x^6 + b_5x^5 + b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

Tramite il software di calcolo Wolfram MATHEMATICA, sono stati determinati i valori dei coefficienti  $x_0, x_1, a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0, b_6, b_5, b_4, b_3, b_2, b_1, b_0$ , per  $L^* = 2000, 1400, 1000, 700, 500$  ed  $r^* = 0.5, 30, 40, 60, 80, 120, 170, 230, 300, 400, 600$ . Per valutare la correttezza o meno del processo di interpolazione, le curve  $g(x)$  sono state messe a confronto, nell'intervallo  $-4 \leq x \leq 6$ , con le curve delle rispettive *g-function* ottenute tramite il calcolo numerico con COMSOL Multiphysics. Le curve tracciate mediante le interpolazioni polinomiali sono risultate praticamente indistinguibili da quelle tracciate utilizzando i risultati delle simulazioni numeriche.

Nel lavoro numerico [2] è stata posta grande attenzione nel determinare espressioni polinomiali delle *g-function* estremamente precise. Tuttavia, per analizzare il comportamento nel tempo di un campo di sonde geotermiche risulta in genere necessario considerare distanze radiali adimensionali

$r^*$  dal punto scelto come riferimento, cioè l'asse di una delle sonde, diverse da quelle per cui sono state realizzate le tabelle dei coefficienti polinomiali delle *g-function*. Poiché i valori di  $x_0$  e di  $x_1$  scelti in [2] sono diversi per diversi valori di  $r^*$ , l'interpolazione fra due valori di  $r^*$  va eseguita sui risultati ottenuti della temperatura adimensionale  $\bar{T}^*(r^*, \tau^*)$ , e non sui coefficienti delle funzioni polinomiali. In altri termini, le espressioni polinomiali delle *g-function* determinate in [2] non sono sommabili, e questo rende pesante il lavoro di interpolazione fra diversi valori di  $r^*$ .

L'obiettivo di questa Tesi è stato di proseguire con quanto fatto nello studio numerico di Zanchini e Lazzari [2], determinando, con lo stesso procedimento, espressioni polinomiali delle *g-function* per sonde geotermiche corte ( $L^* = 400, 300, 200, 100$ ). Il metodo di interpolazione è stato modificato per rendere le espressioni delle *g-function* sommabili fra loro, a gruppi. Infine, trattandosi di sonde geotermiche corte, lo studio è stato completato con l'analisi degli effetti delle fluttuazioni stagionali della temperatura superficiale del terreno.

## 4 DETERMINAZIONE DELLE *g-function* PER SONDE GEOTERMICHE CORTE

In questo capitolo verrà analizzato il calcolo delle *g-function* attraverso la simulazione agli elementi finiti con COMSOL Multiphysics per sonde geotermiche corte, nello specifico per lunghezze adimensionali  $L^* = 500, 400, 300, 200, 100$ . In seguito verrà descritto il processo di interpolazione delle stesse, differente da quanto visto nel precedente capitolo. Infine si farà uso del principio di sovrapposizione degli effetti e dell'interpolazione lineare per lo studio della distribuzione di temperatura adimensionale per un campo di sonde.

### 4.1 Calcolo delle *g-function* con il codice di calcolo agli elementi finiti COMSOL Multiphysics

Per determinare le *g-function*, è stato utilizzato il software di simulazione agli elementi finiti COMSOL Multiphysics. Sono state eseguite simulazioni 2-D assialsimmetriche per le seguenti lunghezze adimensionali  $L^* = 500, 400, 300, 200, 100$  e, per ognuna di esse, sono stati calcolati i valori delle *g-function* relative alle seguenti distanze adimensionali dall'asse della sonda  $r^* = \frac{r}{D}$ : 0.5, 30, 40, 60, 120, 170, 230, 300, 400, 600. Come nel lavoro di Zanchini e Lazzari [2], l'intervallo di tempo adimensionale considerato è  $10^{-4} \leq \tau^* \leq 10^6$ , dove  $\tau^* = \frac{\alpha g \tau}{D^2}$ , nella scala logaritmica  $-4 \leq \log_{10} \tau^* \leq 6$ , suddiviso in intervalli di  $\log_{10} \tau^*$  pari a 0.05, per un totale di 200 passi. I risultati per  $L^* = 500$  sono stati confrontati con quelli ottenuti in [2], per verifica della affidabilità e precisione delle nuove simulazioni.

Il primo passo è stato quello di procedere alla costruzione della geometria del problema secondo il modello 2-D assialsimmetrico della sonda, considerata come una sorgente termica cilindrica, di lunghezza adimensionale pari a  $L^*$ , in un dominio con raggio esterno adimensionale  $r^* = 2500$  e altezza adimensionale  $z^* = L^* + 2000$ . Sulla superficie della sonda, corrispondente a  $r^* = 0.5$ , è stata imposta la condizione di flusso termico per unità di area, costante ed unitario:

$$q(\tau^*) = \frac{H(\tau^*)}{\pi}$$

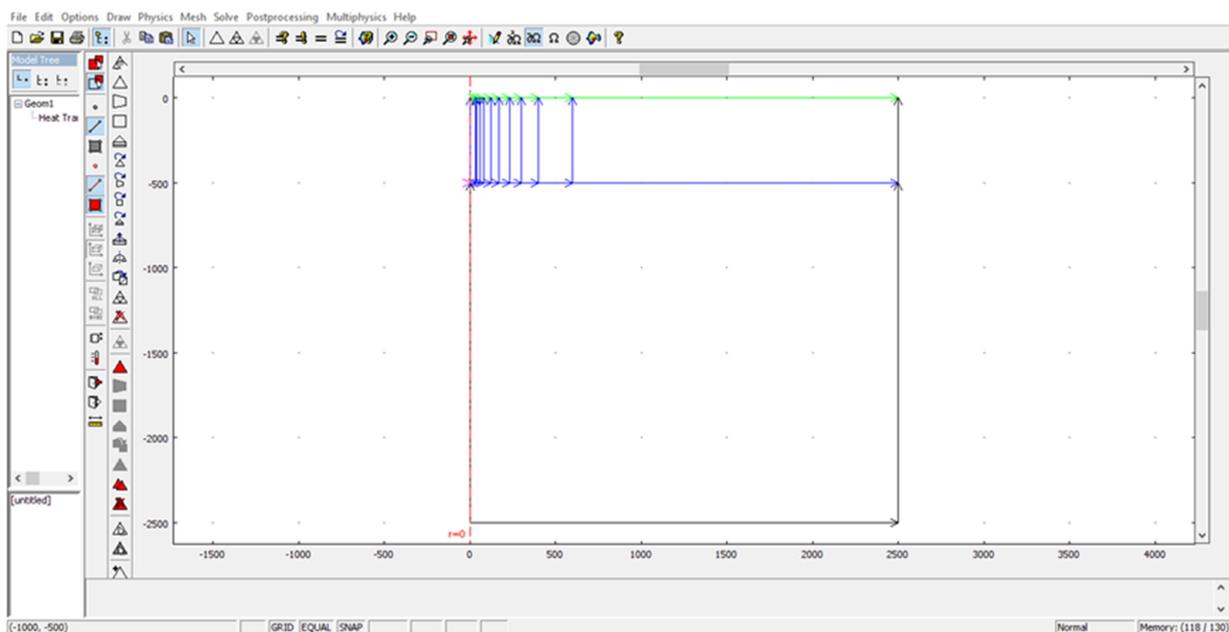
con  $H(\tau^*)$  funzione scalino di Heaviside:

$$H(\tau^*) = \begin{cases} 0 & \text{se } \tau^* < 0 \\ 1 & \text{se } \tau^* \geq 0 \end{cases}$$

Alla superficie inferiore e a quella laterale esterna è stata applicata la condizione di superficie adiabatica, mentre a quella superiore (superficie del terreno) la condizione di temperatura uniforme e costante pari a quella del terreno indisturbato ( $T^* = 0$ ).

In tutto il dominio, poi, la condizione iniziale adimensionale considerata è stata  $T^* = 0$ .

In Figura18 è riportato l'esempio del modello realizzato per  $L^* = 500$ :



**Figura 18:** schema 2D assialsimmetrico implementato in COMSOL Multiphysics. Ai diversi colori corrispondono differenti condizioni al contorno.

Per implementare in COMSOL le equazioni adimensionali (1ad – 4ad), il calcolo è stato, eseguito assegnando ai parametri fisici di conducibilità termica ( $k$ ), densità ( $\rho$ ) e capacità termica specifica ( $c_p$ ) un valore pari a 1, e di conseguenza di diffusività termica  $\alpha_g = 1$ .

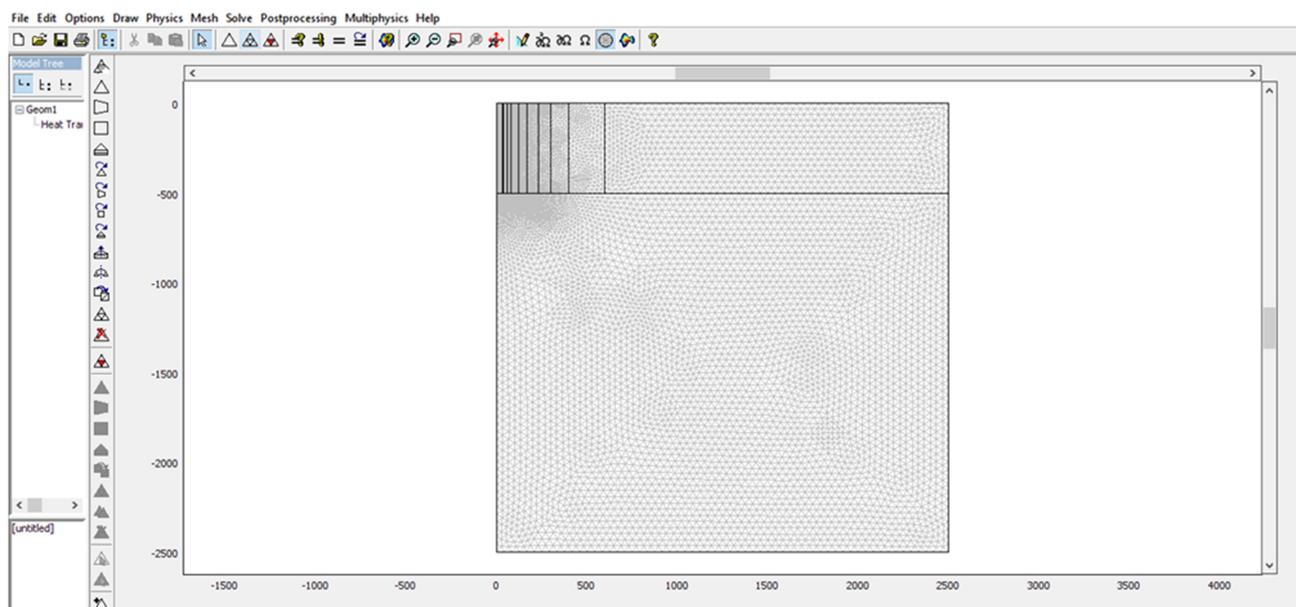
Poiché lo scopo era di determinare la temperatura adimensionale mediata sulla lunghezza della sonda, sono state definite le variabili T05, T30, T40, T60, T80, T120, T170, T230, T300, T400, T600, ognuna delle quali corrispondente alla temperatura adimensionale, mediata sulla lunghezza  $L^*$ , della relativa superficie posta alla distanza  $r^*$  dall'asse della sonda.

A questo punto, si è potuto procedere con il calcolo computazionale delle  $g$ -function. Per ogni lunghezza  $L^*$ , sono state eseguite più prove di calcolo con mesh più o meno fitte. I risultati presi in considerazione, sono stati quelli corrispondenti a una mesh composta da un numero di elementi tale da poter ottenere risultati prossimi a convergenza.

Per potere assicurare una buona indipendenza dei risultati rispetto alla mesh, sono stati confrontati tra loro i valori ottenuti nelle diverse simulazioni. Ad esempio, per il caso  $L^* = 500$ , è stato eseguito il calcolo dapprima con 110016 elementi triangolari e poi con 440064. I risultati sono molto simili tra loro e lo dimostra anche il calcolo dello scarto quadratico medio (SQM), riportato in Tabella 1:

$L^* = 500$	
$r^*$	Scarto Quadratico Medio (SQM)
0.5	0.004703367
40	0.000002373838
80	1.35497E-06
120	1.78227E-24
300	6.9376E-07

**Tabella 1:** SQM tra i valori numerici ottenuti per la mesh da 110016 elementi e la mesh da 440064 elementi, per  $L^*=500$ .



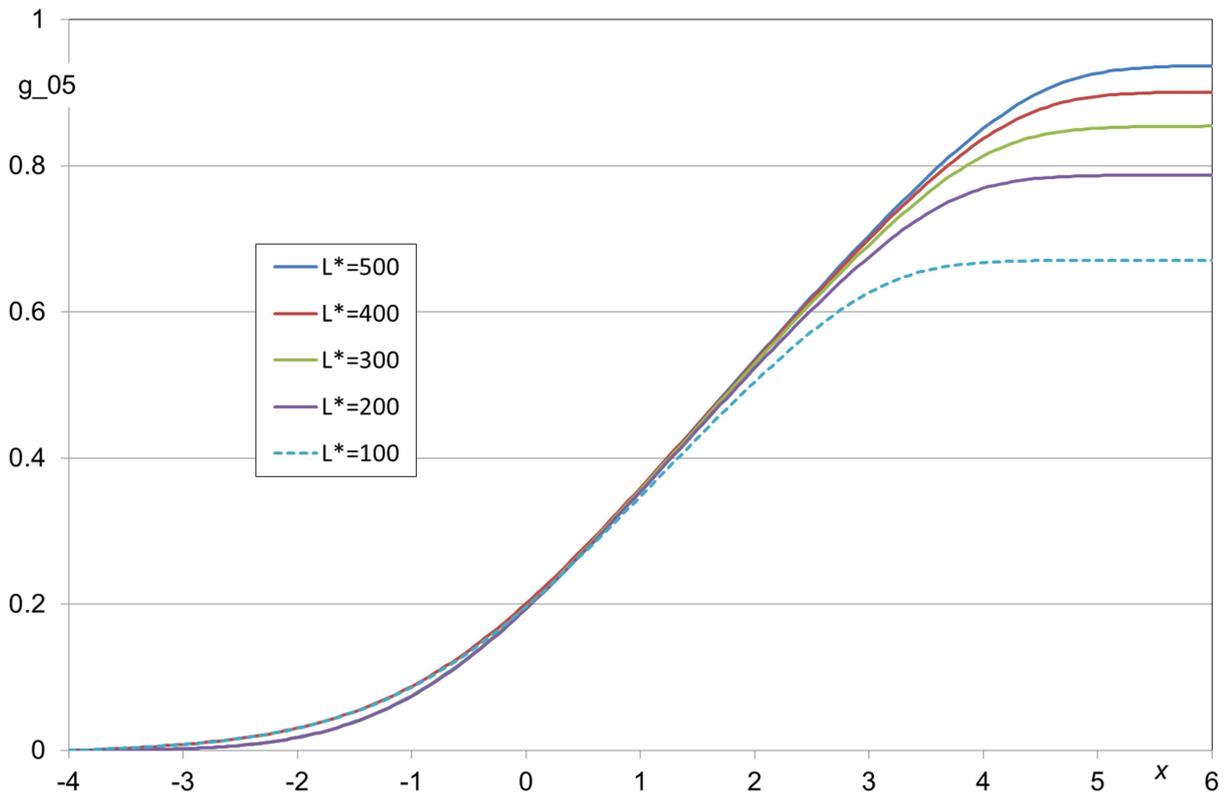
**Figura 19:** mesh composta da 110016 elementi finiti, utilizzata per  $L^*=500$ .

Tra le *g-function* calcolate, si è scelto, poi, di proseguire il lavoro di tesi con quelle ottenute dalle simulazioni corrispondenti alla mesh più fitta.

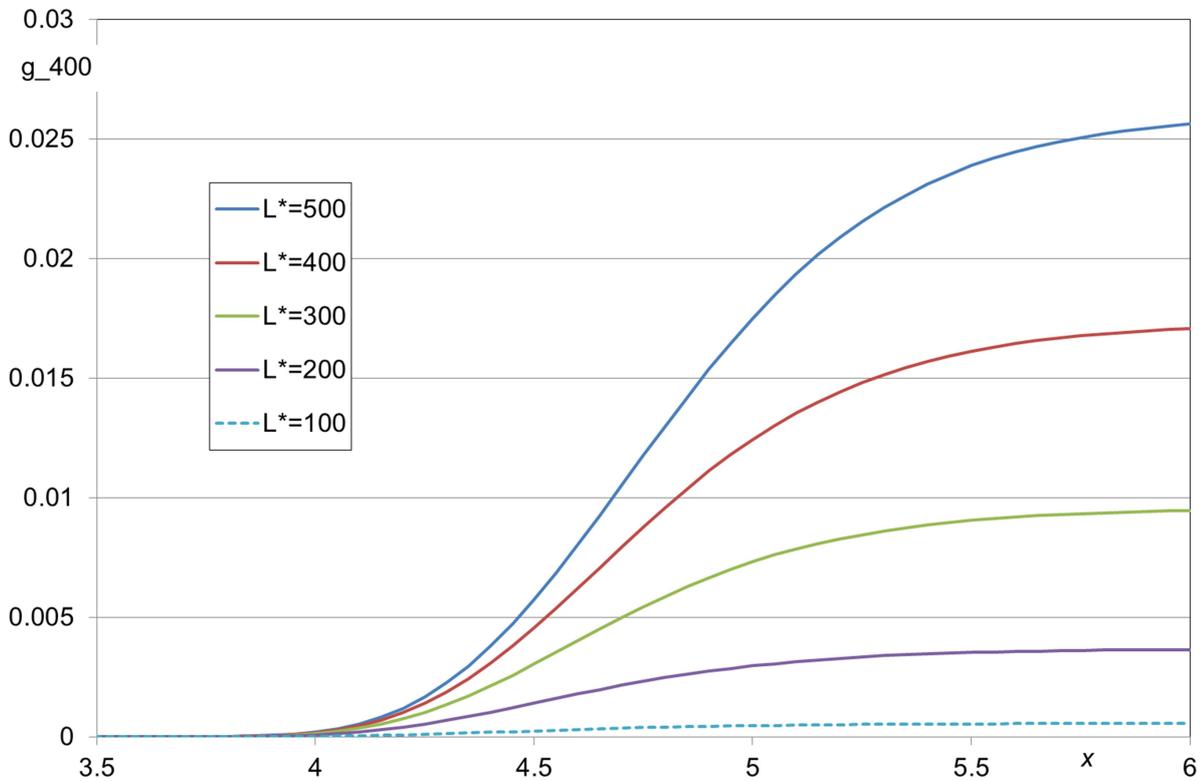
Analizzando i risultati, ci si è accorti di un problema nel modello 2D assialsimmetrico di COMSOL Multiphysics: i risultati ottenuti per T05, per ogni lunghezza  $L^*$ , si discostavano dai valori attesi, ovvero tendevano ad essere leggermente minori. Per ovviare a questo inconveniente è stato necessario porre la condizione di flusso termico per unità di area costante ed uniforme su una superficie fittizia posta ad  $r^* = 0.4$ , anziché su quella posta ad  $r^* = 0.5$ . Naturalmente, il flusso termico per unità di area è stato modificato (dividendolo per 0.8), per ottenere lo stesso flusso termico per unità di lunghezza. Nello strato fittizio fra  $r^* = 0.4$  ed  $r^* = 0.5$  è stato posto un valore di conducibilità termica estremamente elevato,  $k = 100$ , per far sì che la nuova ipotesi rimanesse compatibile con il voler considerare il flusso termico applicato alla superficie in  $r^* = 0.5$ . In seguito è stato svolto un lavoro di affinamento dei valori di T05; si è proceduto per tentativi, variando di volta in volta i valori di  $k$ ,  $\rho$ ,  $c_p$ , e quindi di diffusività termica, dello strato fittizio. I risultati più soddisfacenti si sono rivelati essere quelli ottenuti per  $k = 100$ ,  $c_p = 1$ ,  $\rho = 0.1$ .

Infine i valori delle *g-function* ottenuti nelle simulazioni per  $L^* = 500, 400, 300, 200, 100$ , sono stati raccolti e diagrammati, tramite l'utilizzo di Excel, in funzione del logaritmo del tempo adimensionale, nell'intervallo  $-4 \leq \log_{10} \tau^* \leq 6$ . Confrontando tra loro i diagrammi delle *g-function* si è potuta condurre una prima analisi degli effetti della lunghezza delle sonde sull'evoluzione nel tempo della temperatura adimensionale.

Di seguito sono riportati i plot delle *g-function* per  $r^* = 0.5$  ed  $r^* = 400$  per ognuna delle lunghezze prese in considerazione:



**Figura 20:** rappresentazione grafica delle  $g$ -function a  $r^* = 0.5$ , per  $L^* = 500, 400, 300, 200, 100$ .



**Figura 21:** rappresentazione grafica delle  $g$ -function a  $r^* = 400$ , per  $L^* = 500, 400, 300, 200, 100$ .

Questi grafici evidenziano come le *g-function* all'interfaccia tra la sonda e il terreno ( $r^* = 0.5$ ), differiscano di poco al variare di  $L^*$ . Al contrario, all'aumentare di  $r^*$ , le *g-function* dipendono fortemente dalla lunghezza adimensionale e aumentano all'aumentare di essa, in accordo con quanto visto precedentemente nel caso di studio sulle sonde geotermiche lunghe.

## 4.2 Metodo di interpolazione delle *g-function* mediante Wolfram MATHEMATICA

Tramite COMSOL Multiphysics sono stati determinati valori numerici di 55 *g-function* (11 *g-function* per ogni valore di  $L^*$ ) ed ognuna è stata plottata in funzione di  $x = \log_{10} \tau^*$ , con  $-4 \leq x \leq 6$ . Dai grafici si è potuto notare che all'aumentare di  $r^*$  aumenta il valore di  $x_0$  per cui la *g-function* può essere considerata di valore zero per  $-4 \leq x < x_0$ . Tuttavia, per rendere le *g-function* sommabili a gruppi, è stato utilizzato lo stesso valore di  $x_0$  per diversi valori di  $r^*$ . Si è scelto di cercare una funzione polinomiale di quattordicesimo grado che potesse interpolare le *g-function* nell'intervallo  $x_0 \leq x \leq 6$ .

Riassumendo, si è utilizzato lo schema seguente:

per  $-4 \leq x < x_0$ : 
$$g(x) = 0$$

per  $x_0 \leq x \leq 6$ : 
$$g(x) = a_{14}x^{14} + a_{13}x^{13} + a_{12}x^{12} + a_{11}x^{11} + a_{10}x^{10} + a_9x^9 + a_8x^8 + a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$$

Più precisamente, i valori di  $x_0$  presi in considerazione per ogni *g-function* sono riportati in Tabella 2.

$r^*$	0.5	30	40	60		80	120	170		230	300	400	600
$x_0$	-4	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3

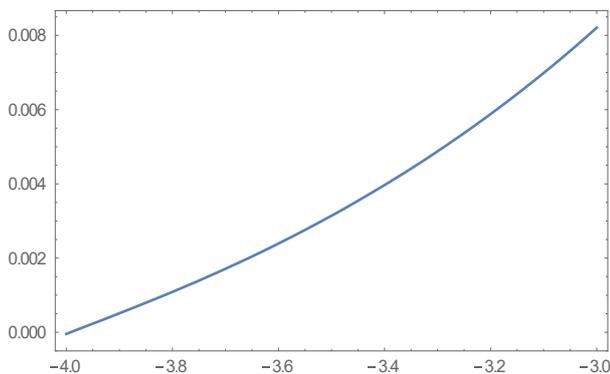
**Tabella 2:** valori dei nodi  $x_0$  utilizzati per l'interpolazione, in funzione di  $r^*$ . Per  $r^*=60$  ed  $r^*=170$ , sono state eseguite due interpolazione in riferimento a due diversi valori di  $x_0$ .

Si può notare che per le *g-function* relative ad  $r^* = 60$  ed  $r^* = 170$ , sono stati presi in considerazione due valori di  $x_0$ . Questo è stato necessario per consentire, a livello applicativo, di poter interpolare le nostre funzioni negli intervalli di  $r^*$  fra  $r^* = 40$  e  $r^* = 60$ , fra  $r^* = 60$  e  $r^* = 80$ , fra  $r^* = 120$  e  $r^* = 170$ , fra  $r^* = 170$  e  $r^* = 230$ , fra come si vedrà più avanti.

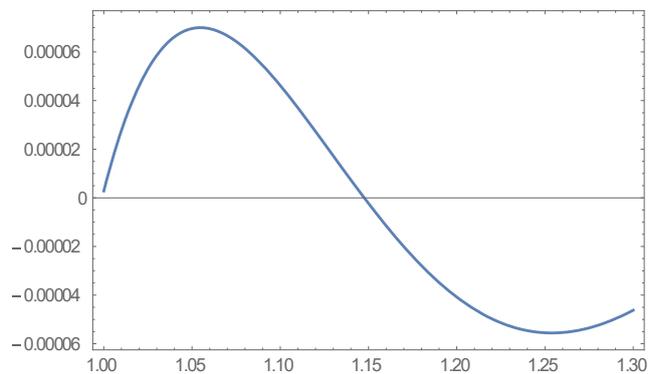
Per poter calcolare le funzioni interpolanti di ciascuna *g-function* e, quindi, dei coefficienti  $a_{14}, a_{13}, a_{12}, a_{11}, a_{10}, a_9, a_8, a_7, a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0$ , ci si è avvalsi dell'utilizzo del software Wolfram MATHEMATICA. Non tutte le funzioni interpolanti ottenute sono risultate soddisfacenti, per cui si è proseguito per tentativi, con un lavoro di aggiustamento dei valori iniziali delle *g-function*, nell'intorno di  $x_0$ .

Per valutare quale delle funzioni ottenute fosse migliore per interpolare i dati ottenuti tramite COMSOL Multiphysics, sono stati adottati diversi metodi di valutazione degli errori.

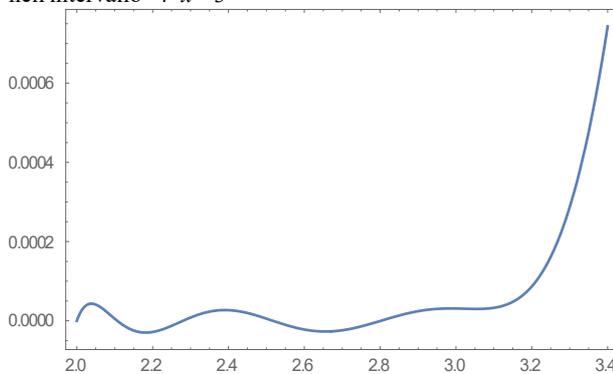
Il primo tra questi è stato di tipo grafico, mediante la realizzazione di plot della prima parte non nulla delle *g-function*, con l'ausilio di Wolfram MATHEMATICA. Infatti, le applicazioni hanno dimostrato che questa parte risulta critica quando si vanno ad eseguire le somme di molti termini, necessarie per calcolare l'evoluzione nel tempo della temperatura adimensionale.



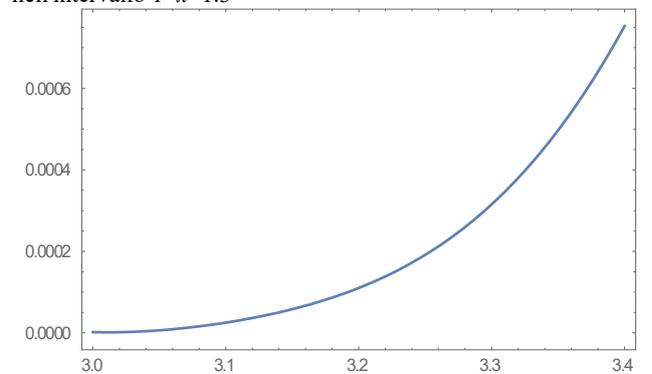
**Figura 22:** plot di Mathematica per  $L^*=200$  ed  $r^*=0.5$ , nell'intervallo  $-4 < x < -3$



**Figura 23:** plot di Mathematica per  $L^*=200$  ed  $r^*=30$ , nell'intervallo  $1 < x < 1.3$



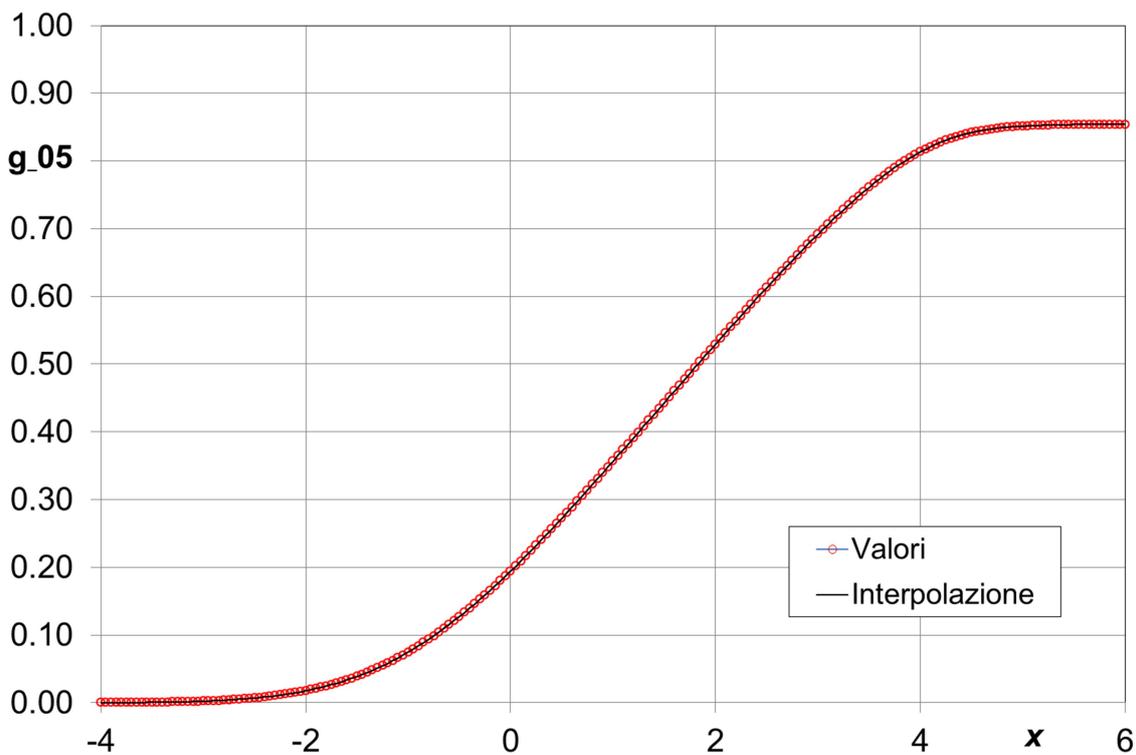
**Figura 24:** plot di Mathematica per  $L^*=200$  ed  $r^*=170$ , per  $x_0=2$ , nell'intervallo  $2 < x < 3.4$



**Figura 25:** plot di Mathematica per  $L^*=200$  ed  $r^*=170$ , per  $x_0=3$ , nell'intervallo  $3 < x < 3.4$

Su Wolfram MATHEMATICA, per ogni *g-function*, come detto precedentemente, si è proceduto per tentativi, facendo riferimento al relativo grafico e focalizzando l'attenzione sull'andamento della curva per i valori iniziali di  $x$ . Valutando, quindi, positivamente le funzioni le cui curve si discostavano meno dallo zero e presentavano minori oscillazioni.

Dopo la fase di aggiustamento delle funzioni interpolanti, tramite l'utilizzo di Excel sono stati creati dei plot di confronto tra i valori risultanti dalle simulazioni con COMSOL Multiphysics e quelli risultanti dalle funzioni ottenute tramite Wolfram MATHEMATICA, per gli stessi valori di  $x$ .



**Figura 26:** plot delle curve dei valori numerici e della funzione interpolante di  $g_{05}$ , per  $L^*=300$ .

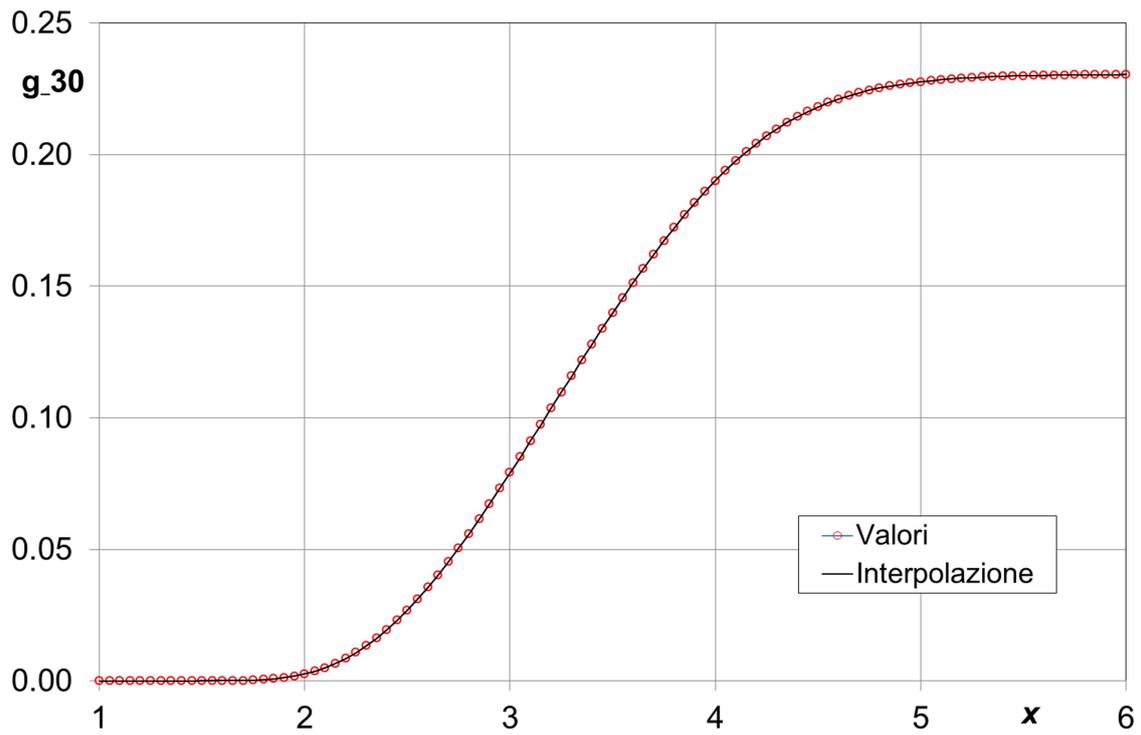


Figura 27: : plot delle curve dei valori numerici e della funzione interpolante di  $g_{30}$ , per  $L^*=300$ .

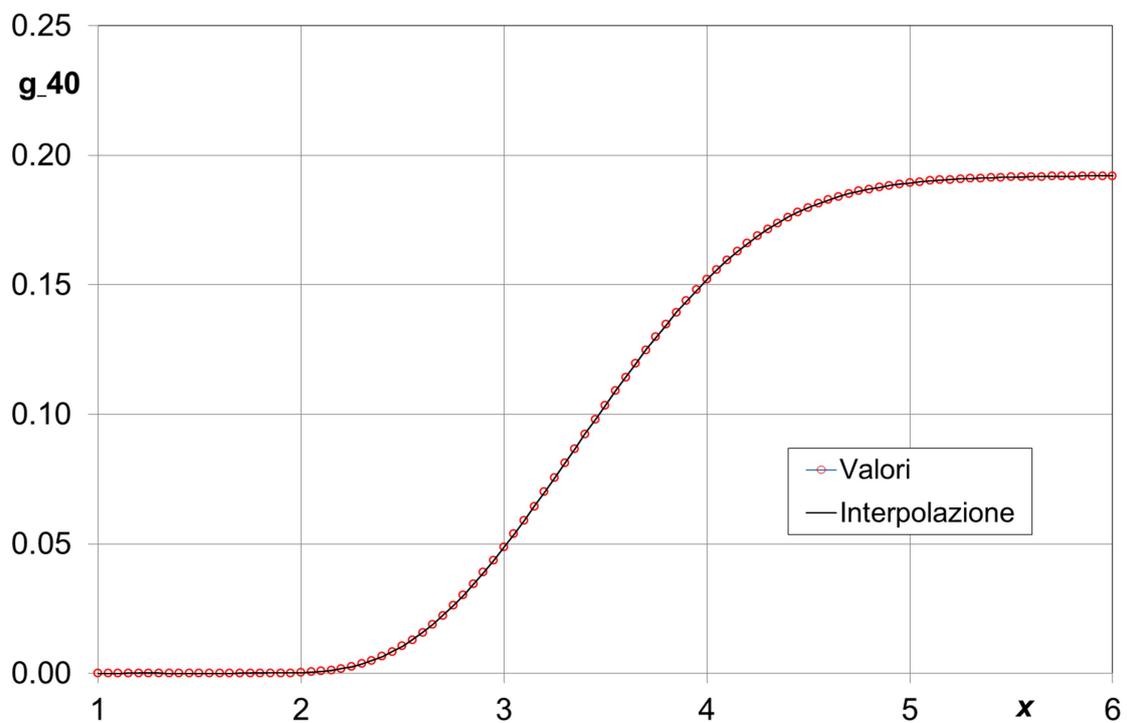


Figura 28: plot delle curve dei valori numerici e della funzione interpolante di  $g_{40}$ , per  $L^*=300$ .

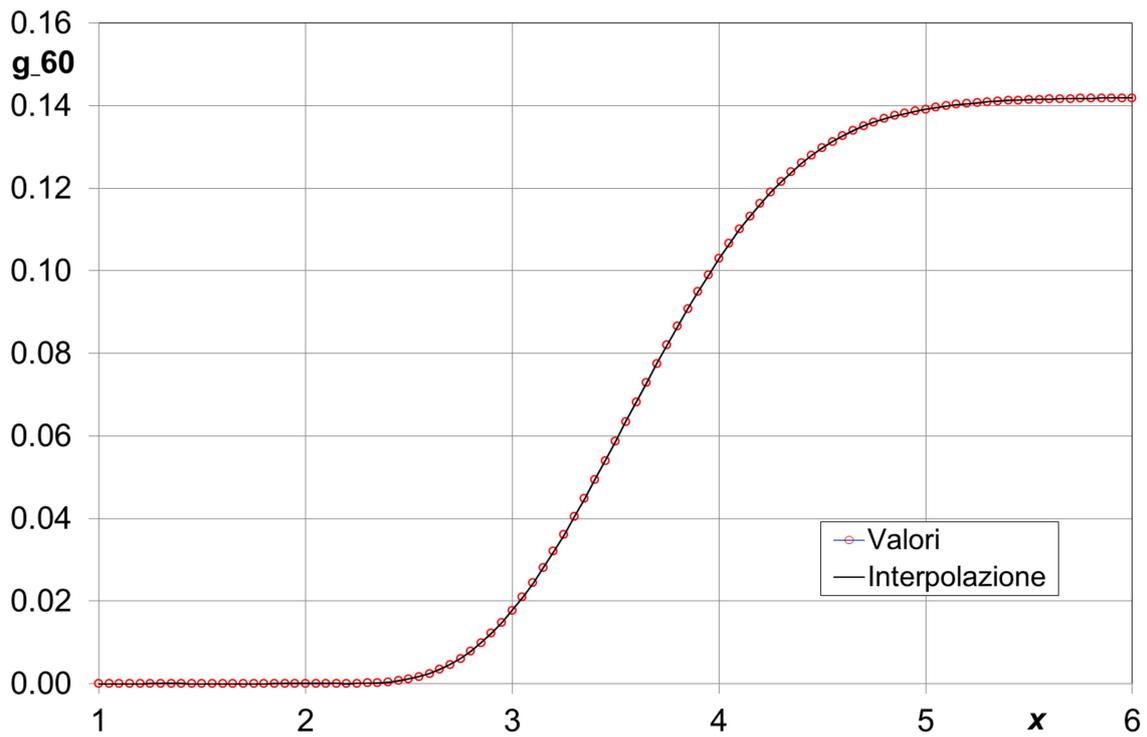


Figura 29: plot delle curve dei valori numerici e della funzione interpolante di  $g_{60}$ , per  $L^*=300$  ed  $x_0=1$ .

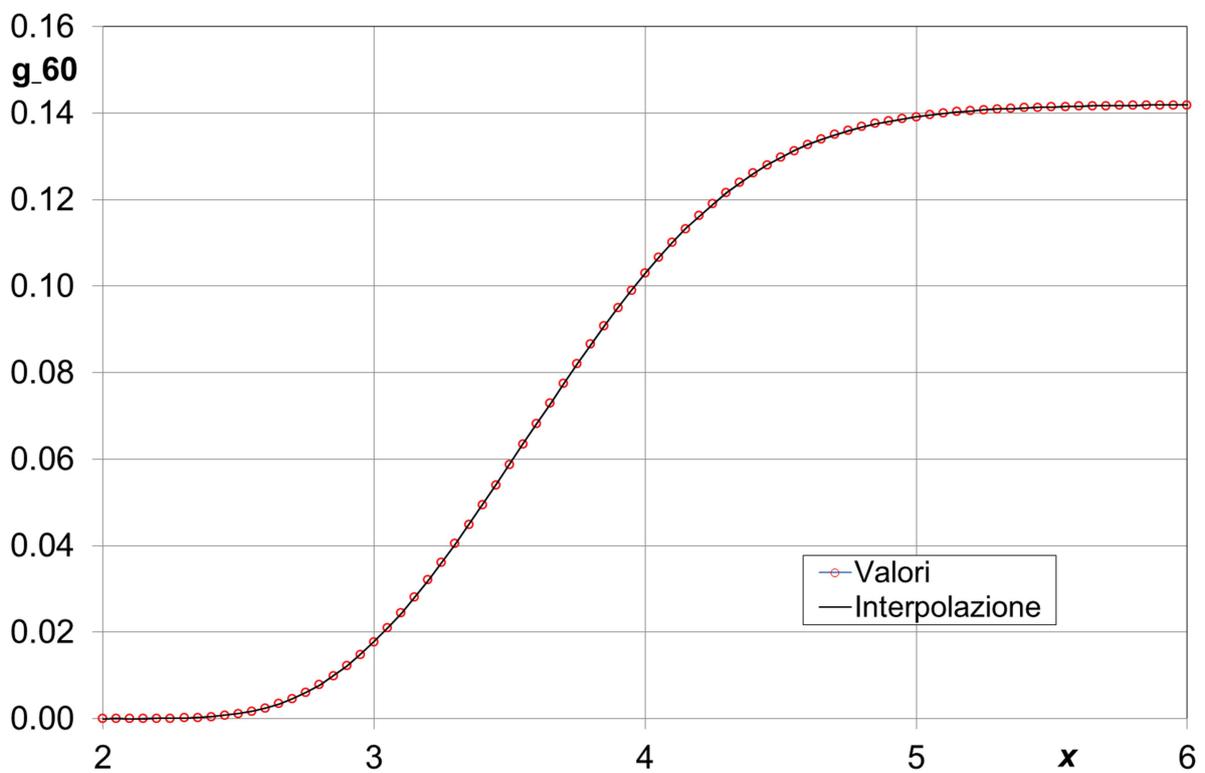


Figura 30: plot delle curve dei valori numerici e della funzione interpolante di  $g_{60}$ , per  $L^*=300$  ed  $x_0=2$ .

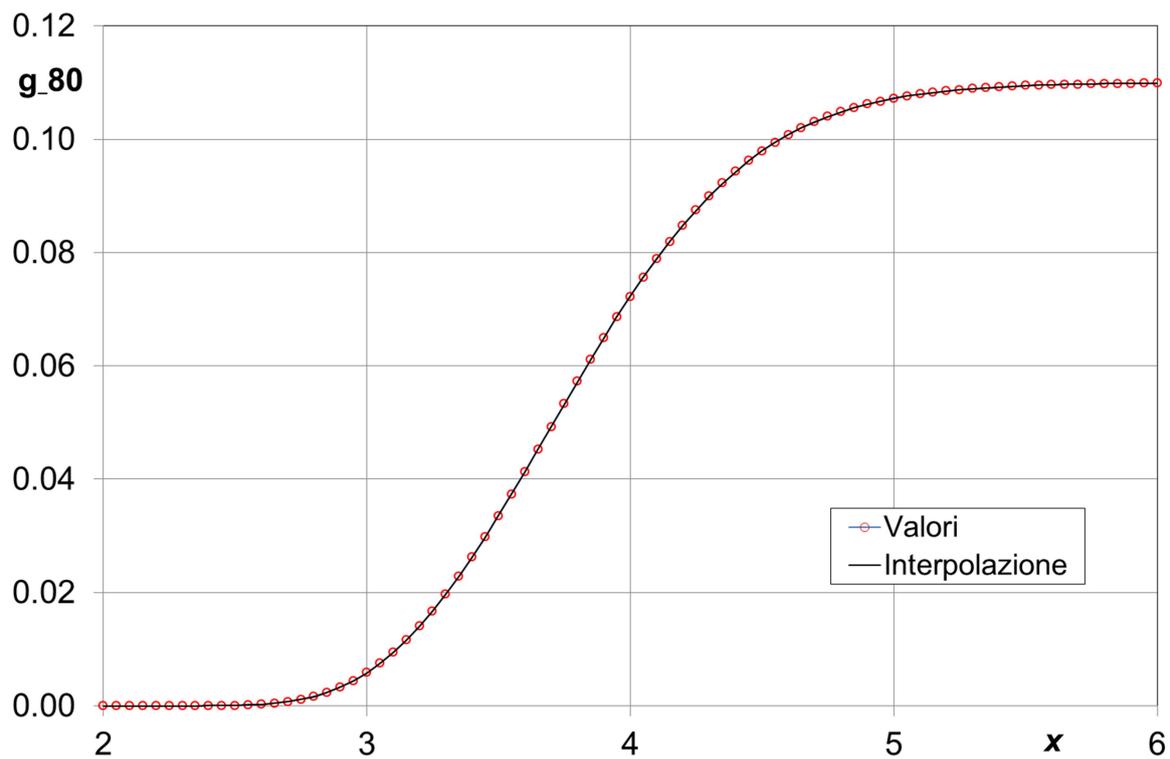


Figura 31: plot delle curve dei valori numerici e della funzione interpolante di  $g_{80}$ , per  $L^*=300$ .

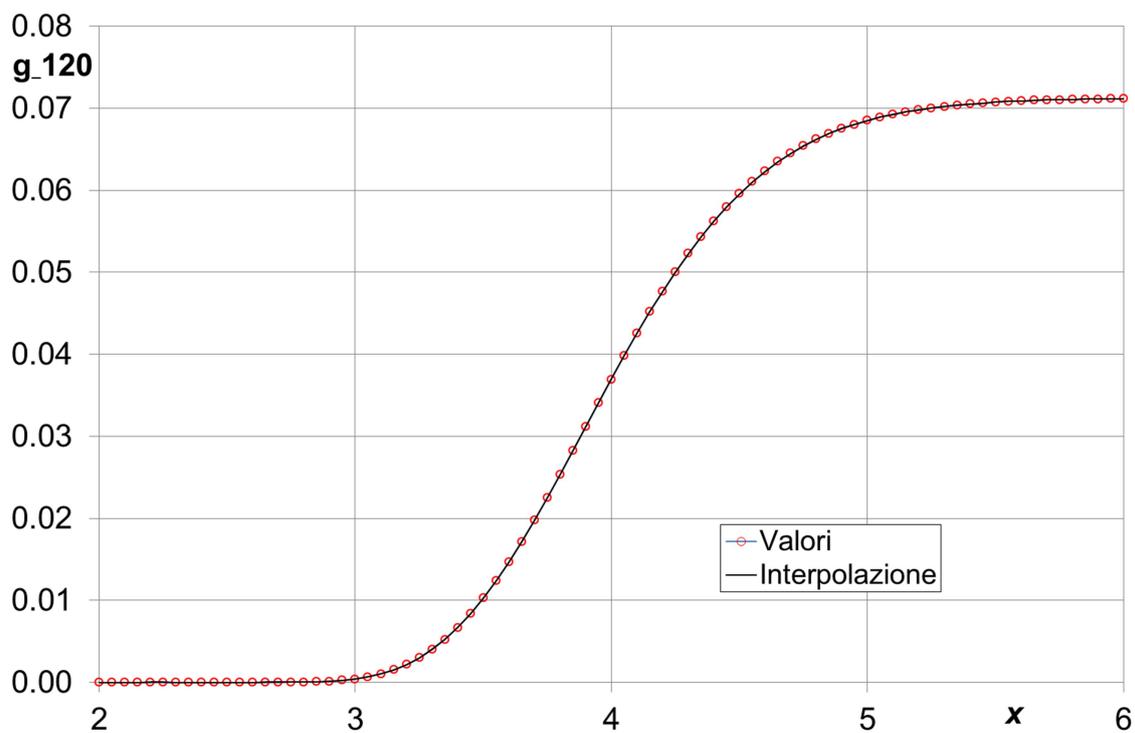
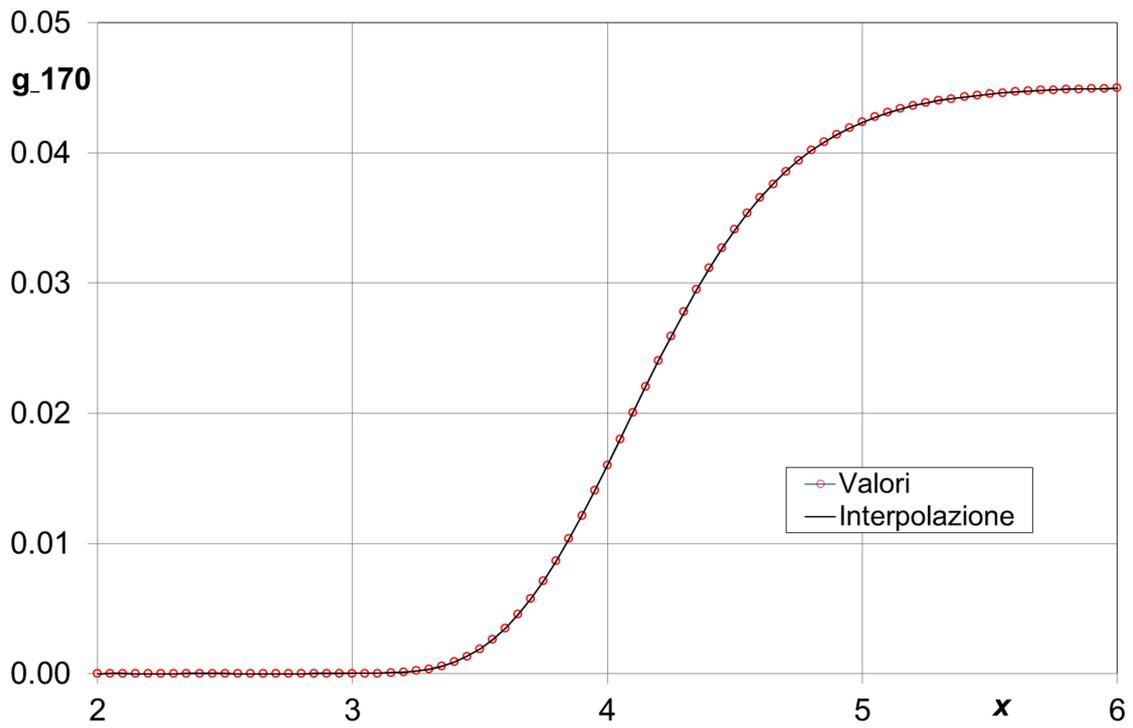
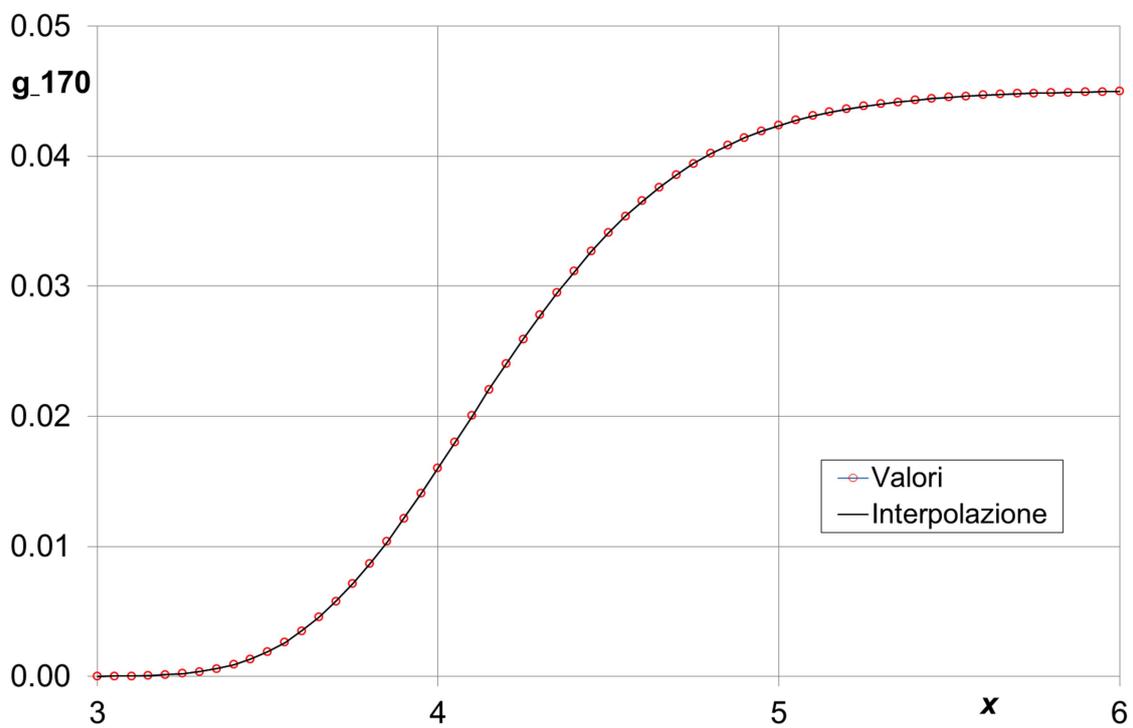


Figura 32: plot delle curve dei valori numerici e della funzione interpolante di  $g_{120}$ , per  $L^*=300$ .



**Figura 33:** plot delle curve dei valori numerici e della funzione interpolante di  $g_{170}$ , per  $L^*=300$  ed  $x_0=2$ .



**Figura 34:** plot delle curve dei valori numerici e della funzione interpolante di  $g_{170}$ , per  $L^*=300$  ed  $x_0=3$ .

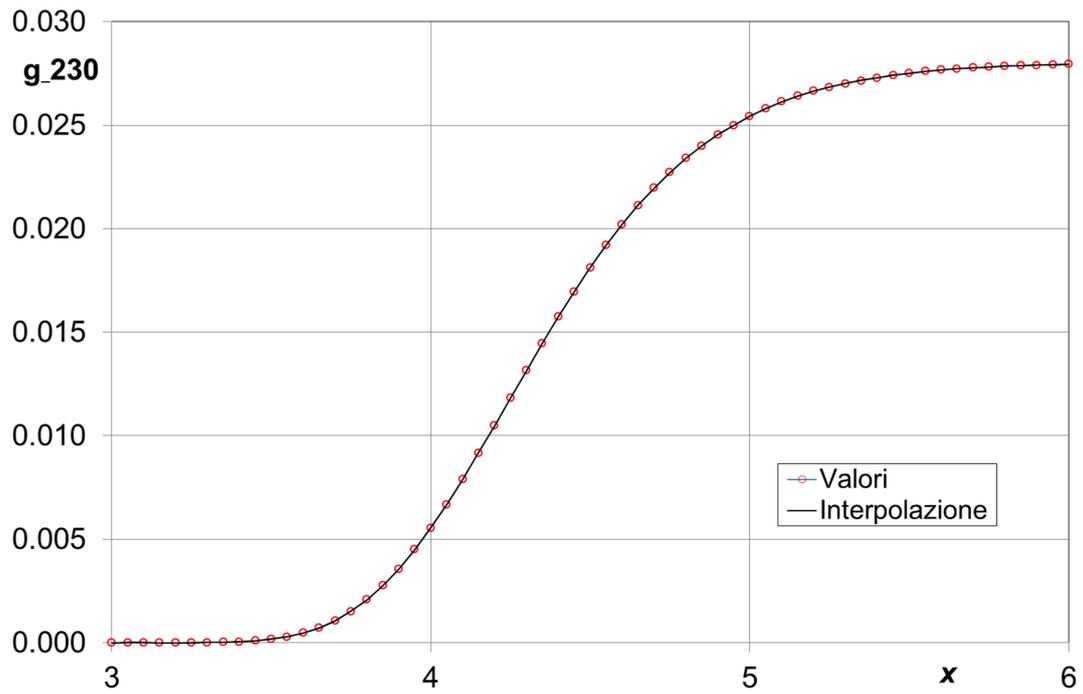


Figura 35: plot delle curve dei valori numerici e della funzione interpolante di  $g_{230}$ , per  $L^*=300$ .

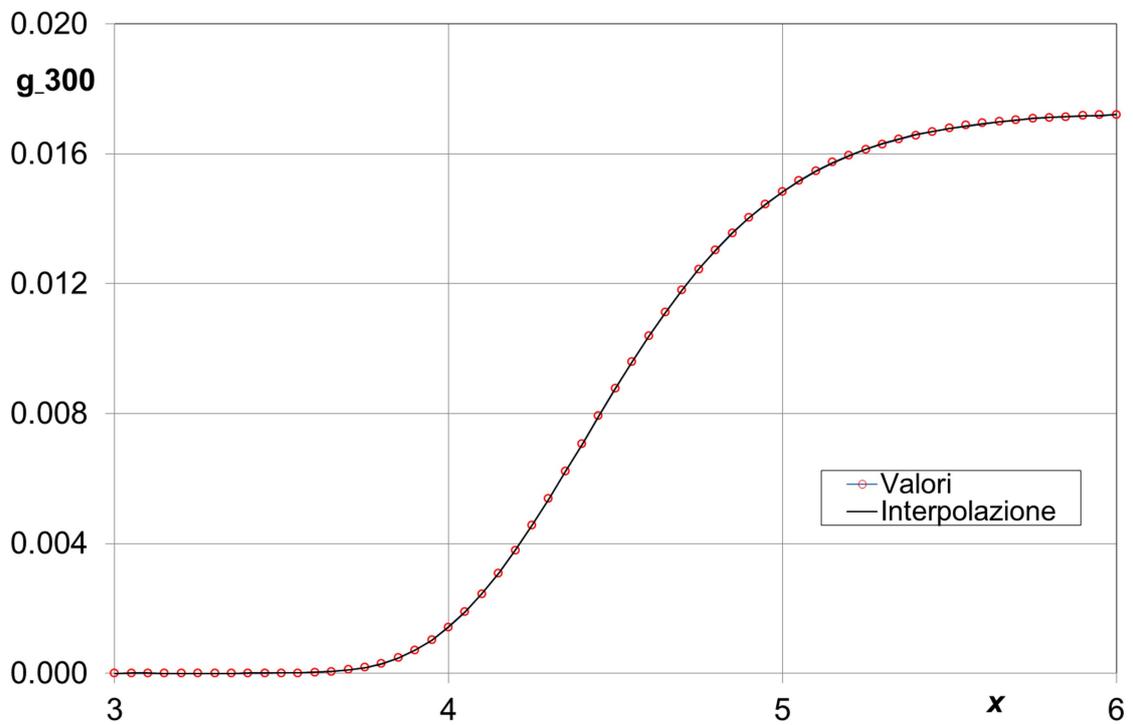


Figura 36: plot delle curve dei valori numerici e della funzione interpolante di  $g_{300}$ , per  $L^*=300$ .

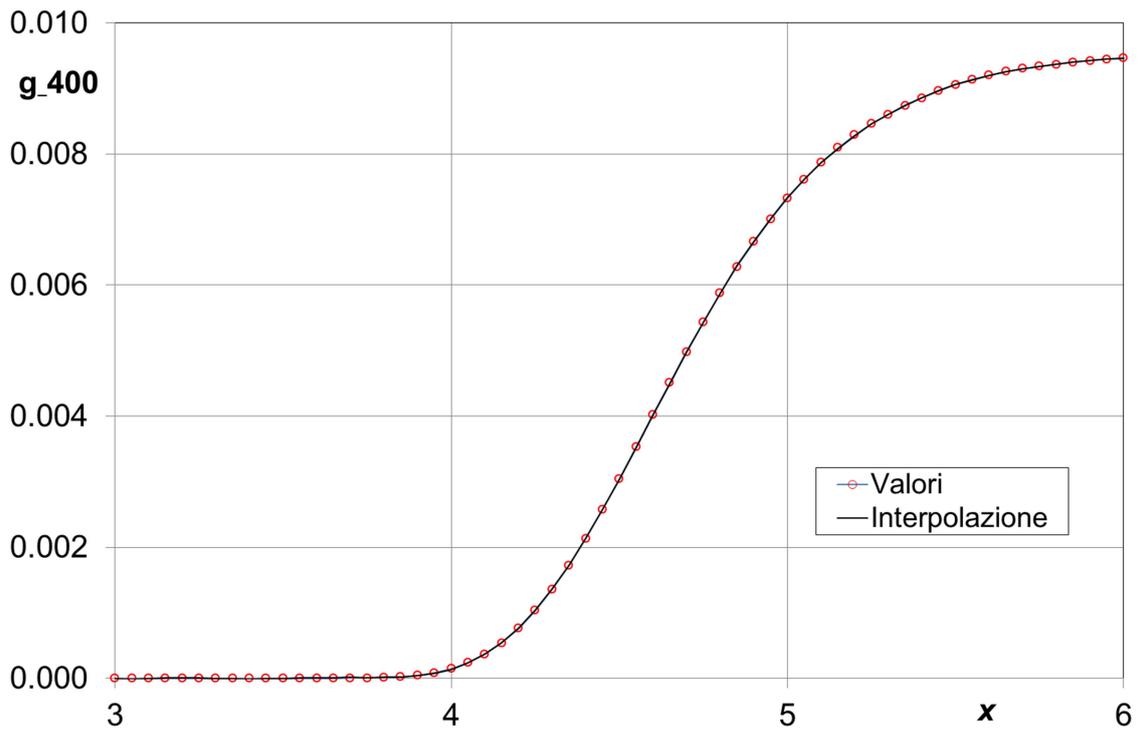


Figura 37: plot delle curve dei valori numerici e della funzione interpolante di  $g_{400}$ , per  $L^*=300$ .

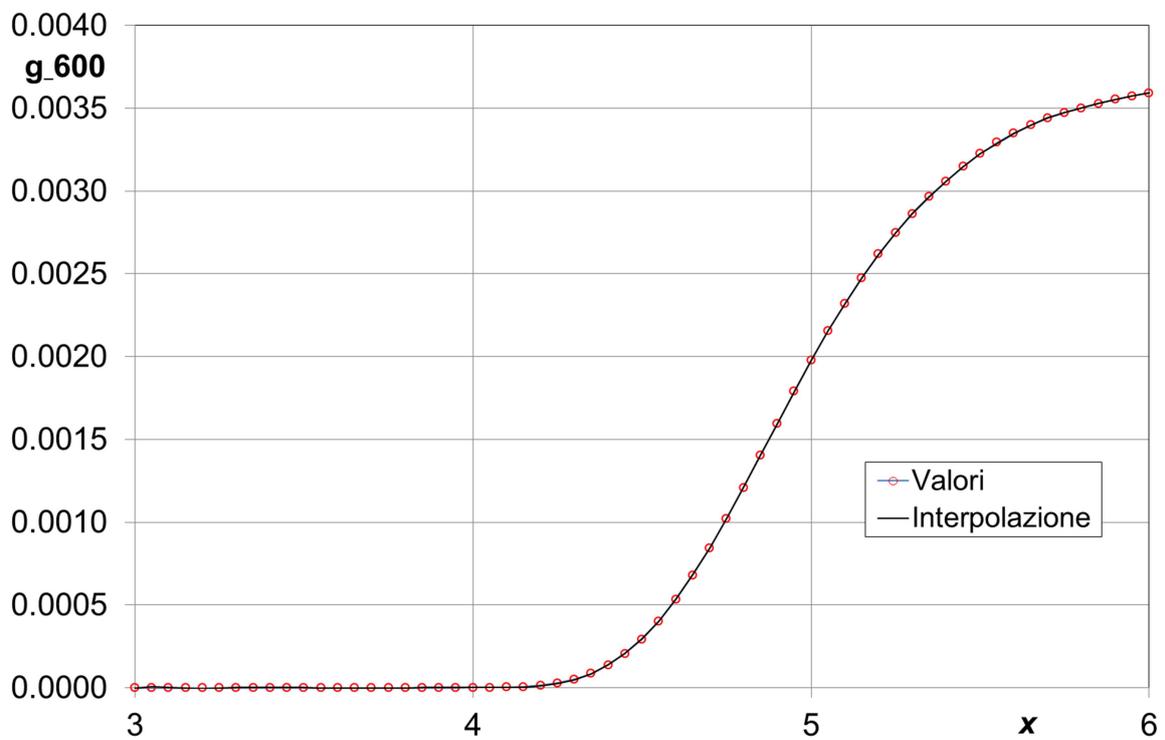


Figura 38: plot delle curve dei valori numerici e della funzione interpolante di  $g_{600}$ , per  $L^*=300$ .

Si nota come graficamente sia impossibile distinguere il diagramma di una *g-function* tracciato mediante i valori numerici e uno tracciato secondo il polinomio interpolante.

Dai grafici riportati [Fig.26-Fig.38], si può notare, come il piccolissimo scostamento dalla curva relativa ai risultati ottenuti dalla simulazione con COMSOL Multiphysics sia indice, in prima approssimazione, della buona riuscita del lavoro di interpolazione eseguito tramite Wolfram MATHEMATICA.

In seguito, si è adottata una valutazione degli errori di tipo numerico, per cercare di avere un'ulteriore conferma della bontà delle funzioni interpolanti ottenute. A questo scopo, è stato calcolato lo scarto quadratico medio (SQM) esistente tra i valori ottenuti tramite COMSOL Multiphysics e quelli ottenuti tramite Wolfram MATHEMATICA, per ogni *g-function*. I risultati sono riportati in Tabella 3 e in Tabella 4.

$r^*$		$L^*$				
		500	400	300	200	100
0.5	SQM	9.388E-05	0.0001198	0.0001278	0.0001527	0.0001637
	SQM/Med [%]	0.0224804	0.0291994	0.0322767	0.0398614	0.0471363
30	SQM	2.739E-05	2.089E-05	1.801E-05	3.761E-05	1.469E-05
	SQM/Med [%]	0.0183444	0.0151163	0.0146523	0.0376504	0.0243839
40	SQM	2.53E-05	2.711E-05	3.163E-05	3.023E-05	2.694E-05
	SQM/Med [%]	0.0207494	0.0243238	0.0325541	0.0397019	0.0645284
60_1	SQM	4.516E-05	5.096E-05	5.217E-05	2.957E-05	6.328E-05
	SQM/Med [%]	0.051243	0.0646926	0.0787711	0.0608993	0.2817211
60_2	SQM	1.131E-05	9.98E-06	1.116E-05	9.099E-06	6.762E-06
	SQM/Med [%]	0.0102888	0.0101616	0.0135078	0.0150271	0.0241444
80	SQM	1.114E-05	1.021E-05	1.174E-05	7.302E-06	8.925E-06
	SQM/Med [%]	0.0132048	0.0138242	0.0195367	0.0176146	0.0539573

**Tabella 3:** Scarto Quadratico Medio tra i valori numerici e la curva interpolante per  $r^*=0.5, 30, 40, 60_1, 60_2, 80$ . SQM/Med, corrisponde all'SQM rispetto al valore medio della *g-function* nell'intervallo  $-4 < x < 6$ , in percentuale.

		L*				
		500	400	300	200	100
120	SQM	1.681E-05	1.313E-05	1.126E-05	1.689E-05	1.072E-05
	SQM/Med [%]	0.0308088	0.0285405	0.0319385	0.0773095	0.156472
170_2	SQM	1.6E-05	1.674E-05	1.936E-05	1.584E-05	7.29E-06
	SQM/Med [%]	0.0458302	0.0594583	0.0957948	0.1416937	0.2596431
170_3	SQM	8.782E-06	6.374E-06	7.133E-06	6.594E-06	2.212E-06
	SQM/Med [%]	0.0189697	0.0170493	0.0265874	0.0444303	0.0593361
230	SQM	9.254E-06	6.998E-06	9.006E-06	5.098E-06	1.458E-06
	SQM/Med [%]	0.0316681	0.0310485	0.0596325	0.0681376	0.0932014
300	SQM	8.052E-06	5.081E-06	9.111E-06	4.867E-06	1.069E-06
	SQM/Med [%]	0.0441579	0.0378659	0.1083903	0.1291715	0.0015635
400	SQM	1.146E-05	1.047E-05	7.232E-06	2.833E-06	5.029E-07
	SQM/Med [%]	0.1139482	0.1497406	0.1781733	0.1725812	0.1915947

**Tabella 4:** Scarto Quadratico Medio tra i valori numerici e la curva interpolante per  $r^*=120, 170_2, 170_3, 230, 300, 400$ . SQM/Med, corrisponde all'SQM rispetto al valore medio della  $g$ -function nell'intervallo  $-4 < x < 6$ , in percentuale.

Si è detto, precedentemente, che l'utilizzo delle  $g$ -function permette di determinare l'evoluzione nel tempo, per alcune decine di anni, della temperatura adimensionale media all'interfaccia tra la sonda e il terreno. Per questo motivo si è ritenuto fosse necessario verificare l'accuratezza delle espressioni polinomiali delle  $g$ -function ottenute mediante calcoli dell'evoluzione nel tempo della  $\bar{T}^*$ , con riferimento ai carichi termici medi mensili per una sonda accoppiata a un edificio tipico posto a Bologna. Si è considerata una durata di 50 anni, cioè 600 mesi. Lo scopo è stato quello di valutare, con l'ausilio dei grafici, se la temperatura adimensionale  $\bar{T}^*$  seguisse o meno un andamento nel tempo quasi coincidente con quello trovato mediante le espressioni delle  $g$ -function determinate da Zanchini e Lazzari [2] per  $L^* = 500$  ed andamenti simili per gli altri valori di  $L^*$ . Si ricorda che per il calcolo di  $\bar{T}^*$  vale la formula:

$$\bar{T}^*(r^*, \tau^*) = \sum_{i=0}^{599} A_i [g(r^*, \tau^* - i\tau_1^*) - g(r^*, \tau^* - (i+1)\tau_1^*)]$$

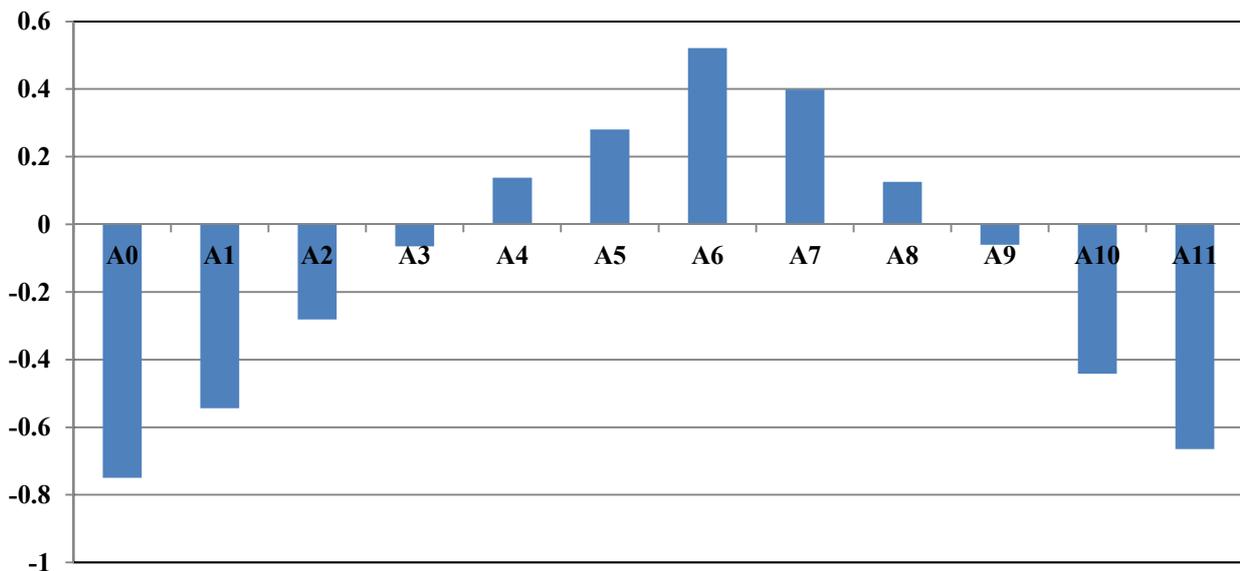
La simulazione è stata eseguita con il software Wolfram MATHEMATICA, sotto l'ipotesi di considerare per ciascun mese una durata adimensionale pari a  $\tau_1^* = 100$ , che corrisponde, ad

esempio, a una diffusività termica del suolo  $\alpha_g = 0.856 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ , per una sonda con diametro  $D = 0.15 \text{ m}$ , e a un periodo di tempo adimensionale  $0 \leq \tau^* \leq 6 \times 10^4$ .

I coefficienti  $A_i$  utilizzati, per  $i = 0, \dots, 11$ , sono riportati in Tabella 5 ed illustrati nell'istogramma di Figura 39.

$A_0$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$	$A_8$	$A_9$	$A_{10}$	$A_{11}$
-0.75	-0.544	-0.281	-0.0654	0.138	0.281	0.521	0.399	0.126	-0.0599	-0.442	-0.665

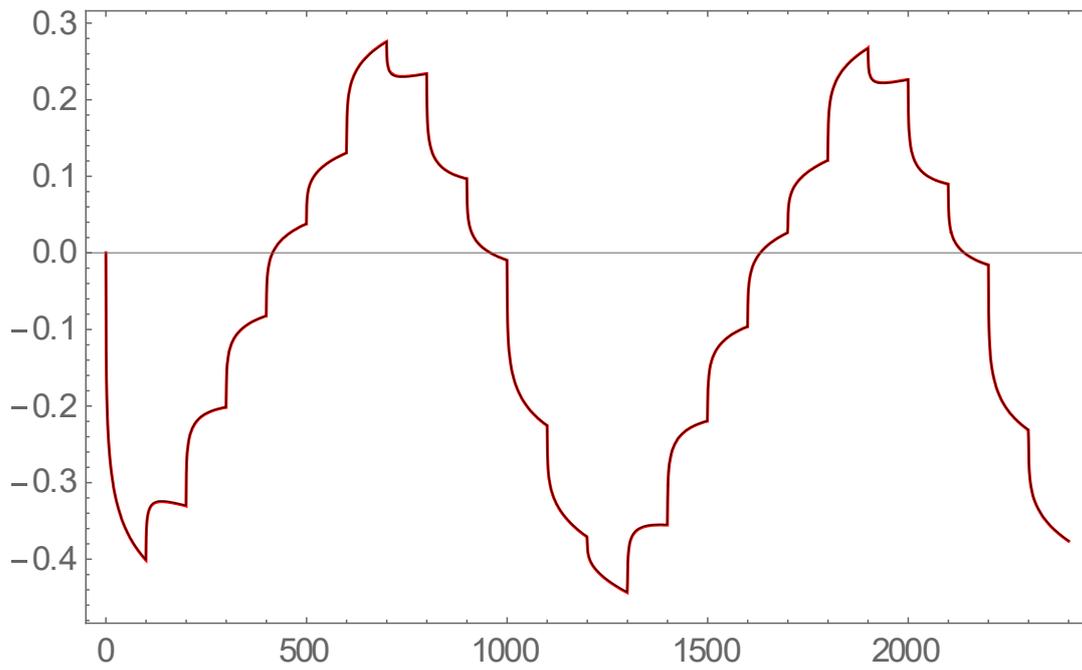
**Tabella 5:** valori dei coefficienti  $A_i$ , con  $i=0, \dots, 11$ , per un anno.



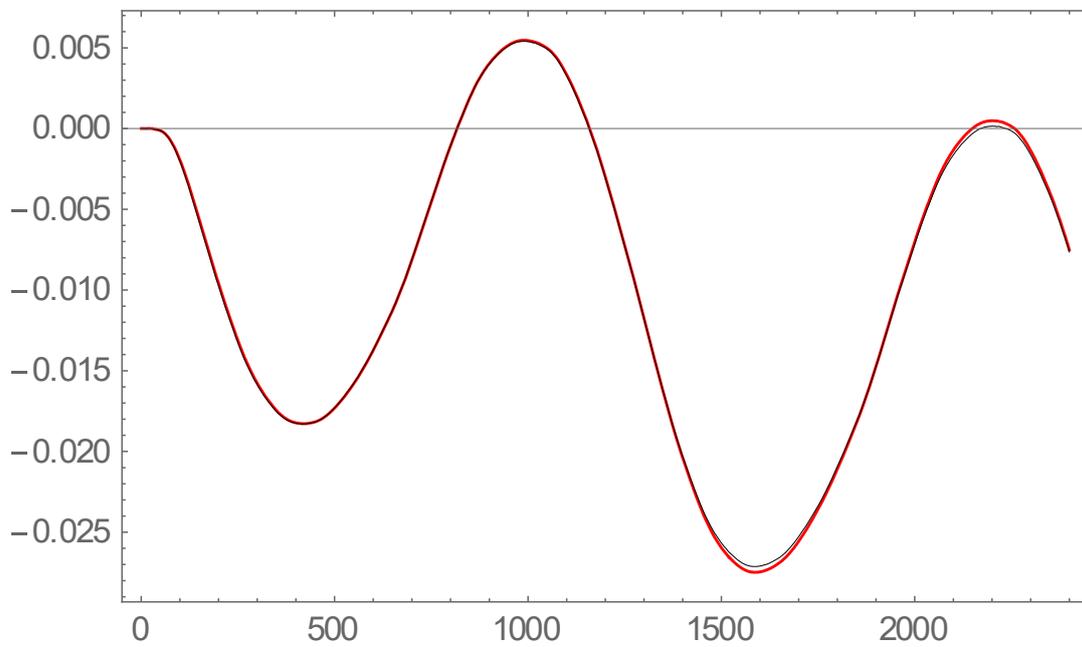
**Figura 39:** istogramma relativo ai coefficienti  $A_i$ , con  $i=0, \dots, 11$ , per un anno.

Si ricorda che i coefficienti  $A_i$  corrispondono al rapporto tra il carico termico medio mensile del mese in esame e il modulo massimo del carico termico medio mensile, considerando negativo il carico termico sottratto al terreno (caso dei mesi invernali) e positivo quello ceduto al terreno (caso dei carichi estivi).

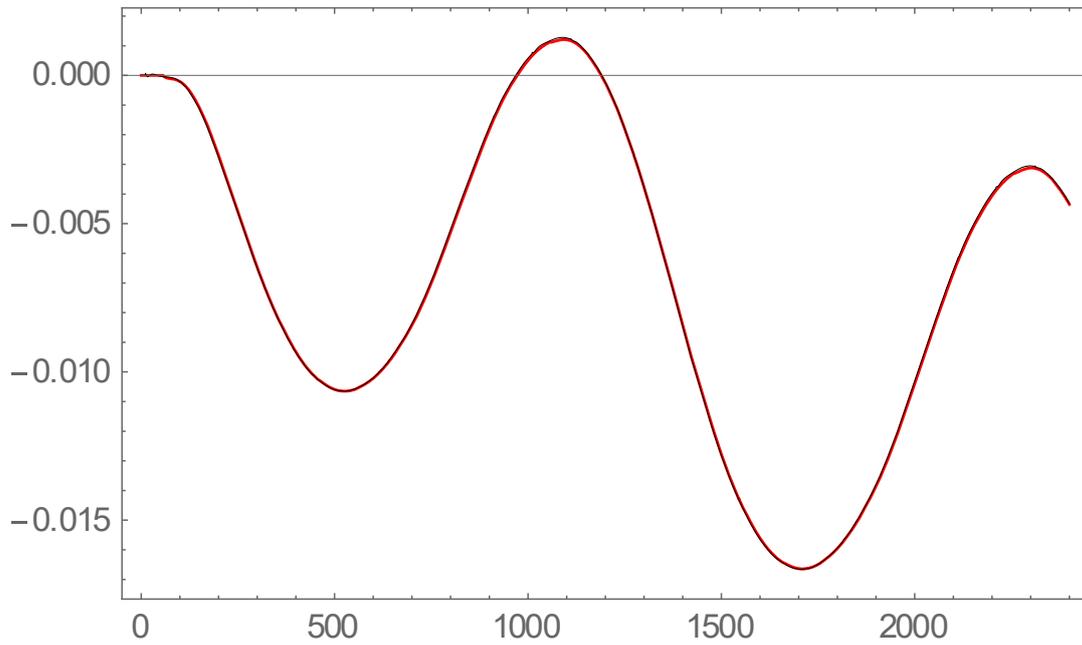
Per  $L^* = 500$ , i risultati ottenuti con le nuove espressioni delle  $g$ -function sono stati confrontati con quelli ottenuti utilizzando le  $g$ -function determinate da Zanchini e Lazzari [2]. Nelle figure riportate di seguito sono illustrati i risultati del confronto.



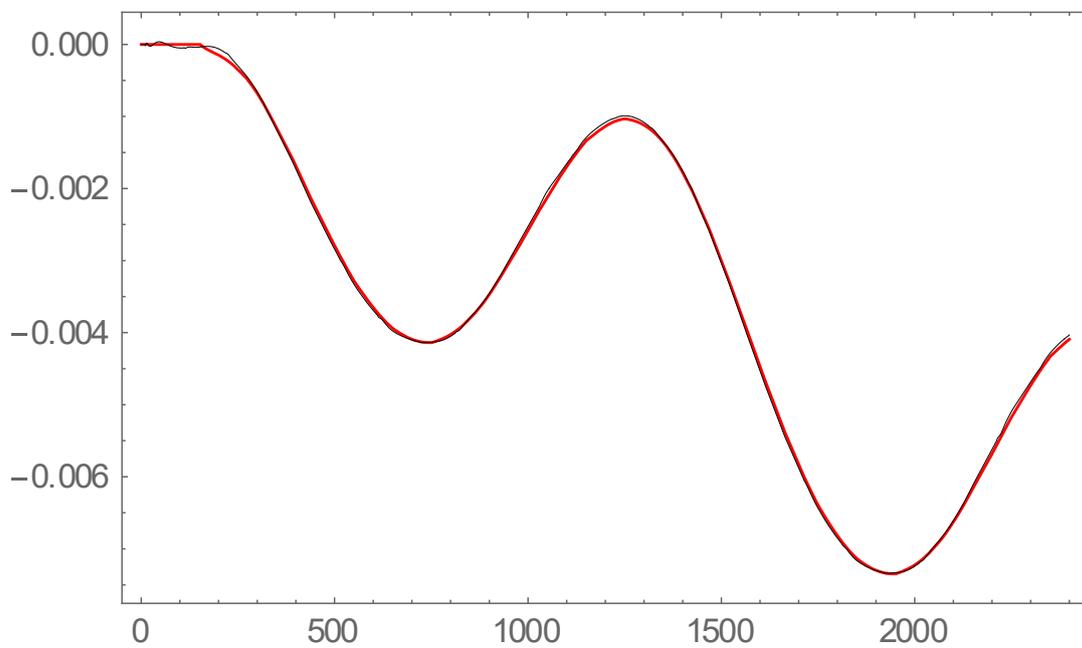
**Figura 40:** plot di confronto per  $\bar{T}^*(0.5, \tau^*)$ , nell'intervallo  $0 \leq \tau^* \leq 2400$ . In rosso è riportata la curva corrispondente alla *g-function* individuata da Zanchini e Lazzari, in nero quella ottenuta in questo lavoro.



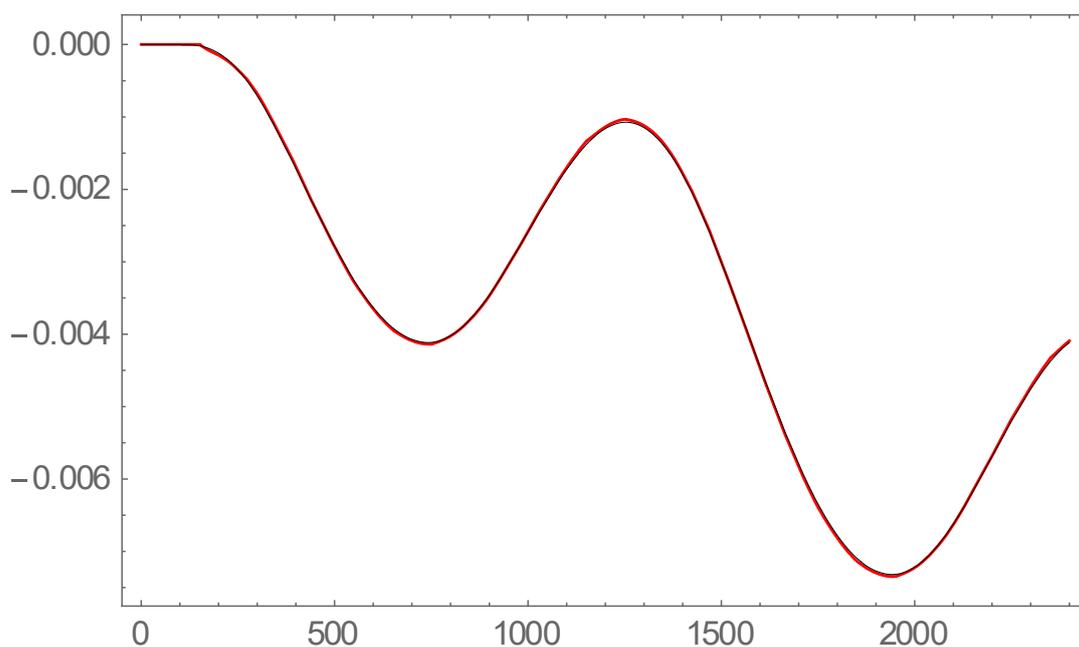
**Figura 41:** plot di confronto tra  $\bar{T}^*(30, \tau^*)$ , nell'intervallo  $0 \leq \tau^* \leq 2400$ . In rosso è riportata la curva corrispondente alla *g-function* individuata da Zanchini e Lazzari, in nero quella ottenuta in questo lavoro.



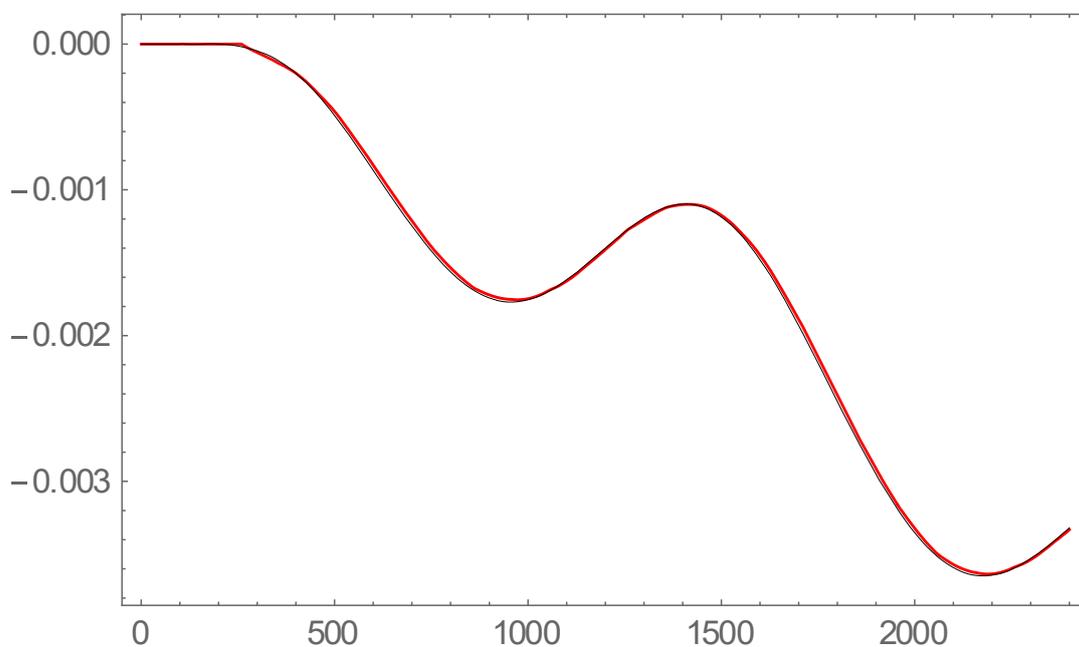
**Figura 42:** : plot di confronto tra  $\bar{T}^*(40, \tau^*)$ , nell'intervallo  $0 \leq \tau^* \leq 2400$ . In rosso è riportata la curva corrispondente alla *g-function* individuata da Zanchini e Lazzari, in nero quella ottenuta in questo lavoro.



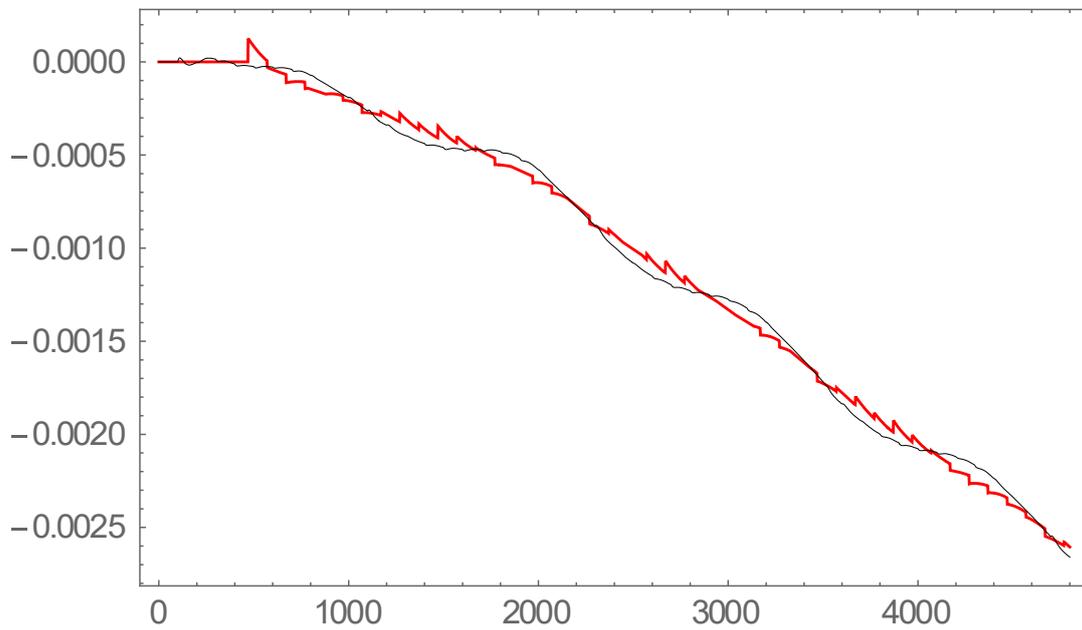
**Figura 43:** plot di confronto tra  $\bar{T}^*(60, \tau^*)$  per  $x_0=1$ , nell'intervallo  $0 \leq \tau^* \leq 2400$ . In rosso è riportata la curva corrispondente alla *g-function* individuata da Zanchini e Lazzari, in nero quella ottenuta in questo lavoro.



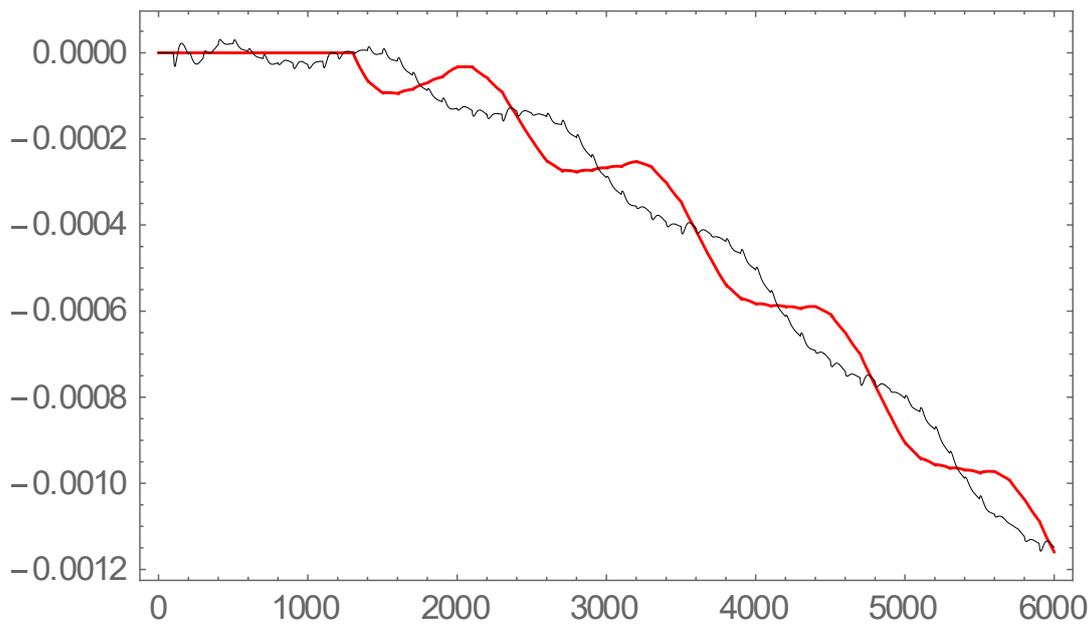
**Figura 44:** plot di confronto tra  $\bar{T}^*(60, \tau^*)$  per  $x_0=2$ , nell'intervallo  $0 \leq \tau^* \leq 2400$ . In rosso è riportata la curva corrispondente alla *g-function* individuata da Zanchini e Lazzari, in nero quella ottenuta in questo lavoro.



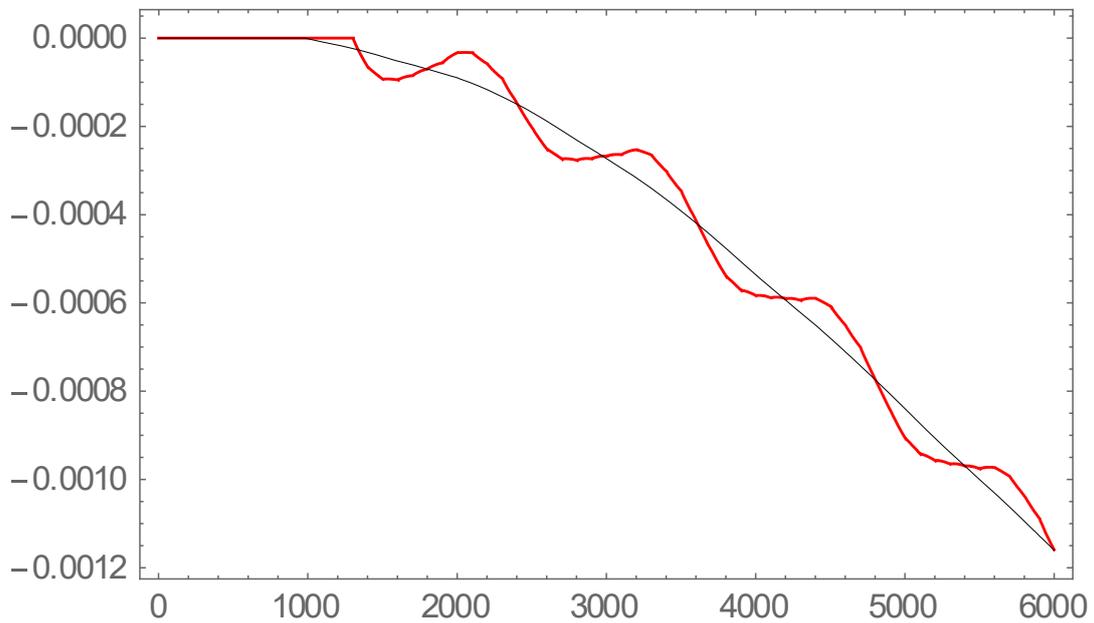
**Figura 45:** plot di confronto tra  $\bar{T}^*(80, \tau^*)$ , nell'intervallo  $0 \leq \tau^* \leq 2400$ . In rosso è riportata la curva corrispondente alla *g-function* individuata da Zanchini e Lazzari, in nero quella ottenuta in questo lavoro.



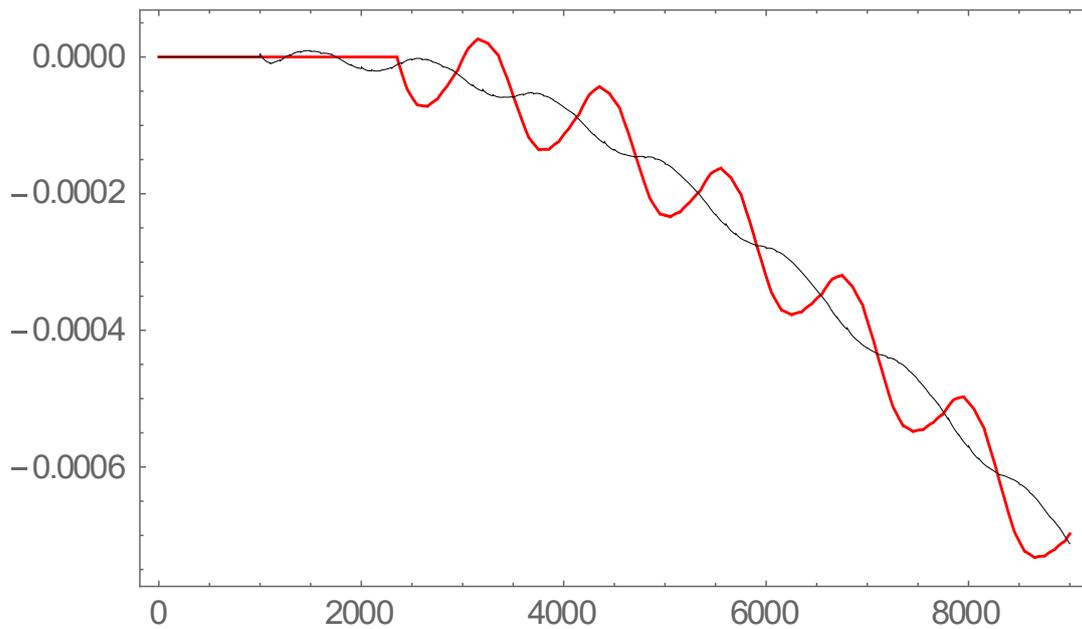
**Figura 46:** plot di confronto tra  $\bar{T}^*(120, \tau^*)$ , nell'intervallo  $0 \leq \tau^* \leq 2400$ . In rosso è riportata la curva corrispondente alla *g-function* individuata da Zanchini e Lazzari, in nero quella ottenuta in questo lavoro.



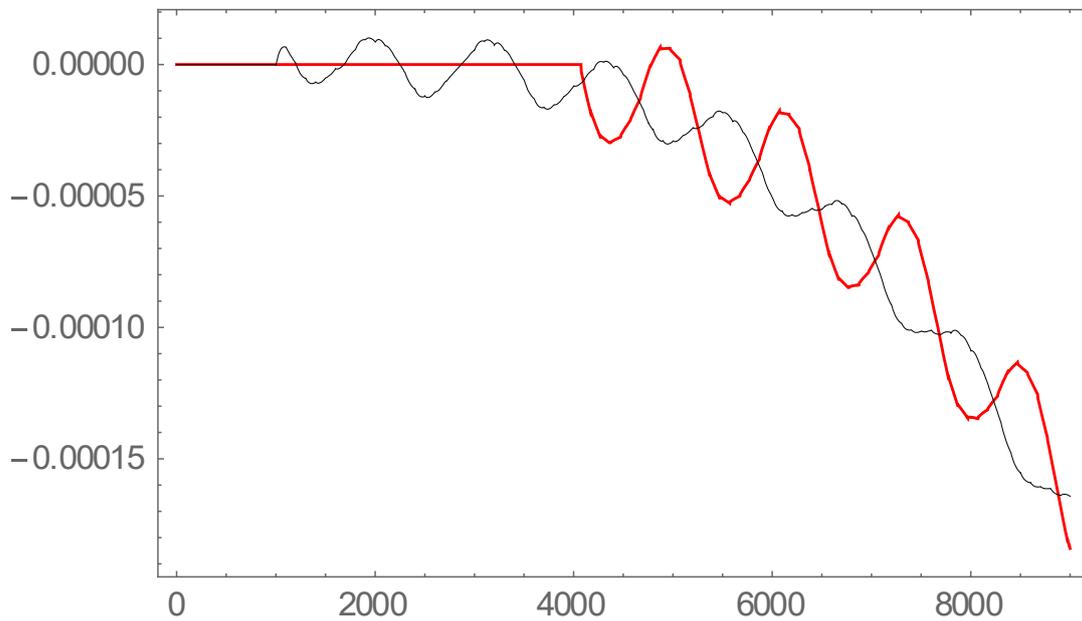
**Figura 47:** plot di confronto tra  $\bar{T}^*(170, \tau^*)$  per  $x_0=2$ , nell'intervallo  $0 \leq \tau^* \leq 6000$ . In rosso è riportata la curva corrispondente alla *g-function* individuata da Zanchini e Lazzari, in nero quella ottenuta in questo lavoro.



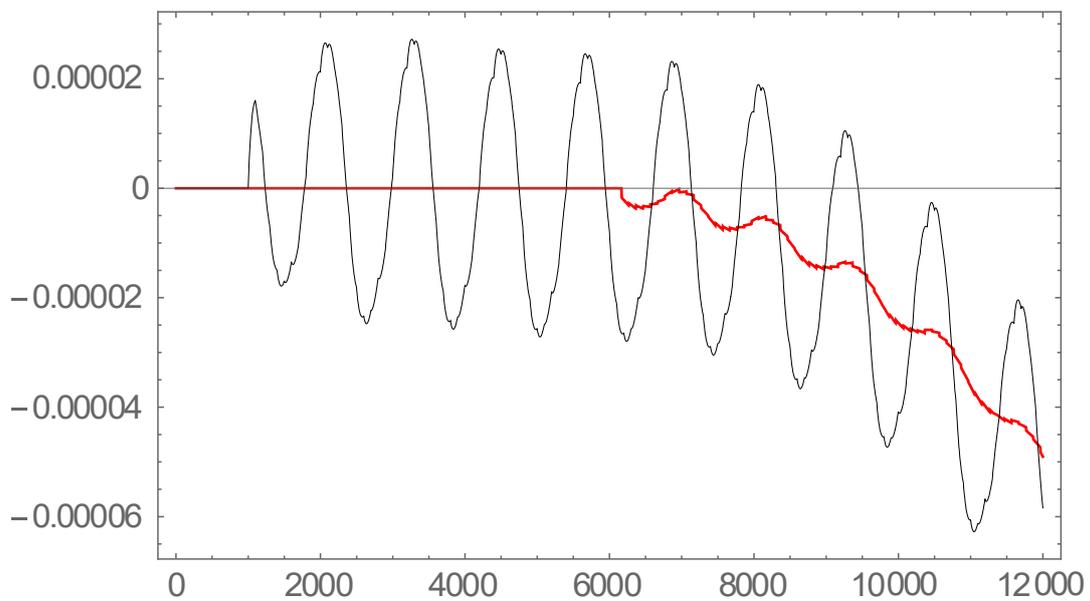
**Figura 48:** plot di confronto tra  $\bar{T}^*(170, \tau^*)$  per  $x_0=3$ , nell'intervallo  $0 \leq \tau^* \leq 6000$ . In rosso è riportata la curva corrispondente alla *g-function* individuata da Zanchini e Lazzari, in nero quella ottenuta in questo lavoro.



**Figura 49:** plot di confronto tra  $\bar{T}^*(230, \tau^*)$ , nell'intervallo  $0 \leq \tau^* \leq 9000$ . In rosso è riportata la curva corrispondente alla *g-function* individuata da Zanchini e Lazzari, in nero quella ottenuta in questo lavoro.



**Figura 50:** plot di confronto tra  $\bar{T}^*(300, \tau^*)$ , nell'intervallo  $0 \leq \tau^* \leq 9000$ . In rosso è riportata la curva corrispondente alla *g-function* individuata da Zanchini e Lazzari, in nero quella ottenuta in questo lavoro.



**Figura 51:** plot di confronto tra  $\bar{T}^*(400, \tau^*)$ , nell'intervallo  $0 \leq \tau^* \leq 12000$ . In rosso è riportata la curva corrispondente alla *g-function* individuata da Zanchini e Lazzari, in nero quella ottenuta in questo lavoro.

Si osserva come nella maggioranza dei casi le curve risultino sovrapposte o, al più, presentino lievi scostamenti, indice di un corretto processo di interpolazione. Gli scostamenti diventano più importanti per valori molto elevati di  $r^*$ , e, in particolare, per  $r^* = 400$ . Tuttavia i valori di  $\bar{T}^*$  per  $r^* = 400$  sono bassissimi ed hanno un effetto poco significativo.

Successivamente, è stato eseguito lo stesso tipo di simulazione anche per  $L^* = 400, 300, 200, 100$ , questa volta senza poter avere l'ausilio di precedenti lavori come strumento di confronto. Dai grafici, però, si è potuto notare come l'andamento delle curve si fosse mantenuto in linea con quanto visto in precedenza per  $L^* = 500$ , e questo ha dato conferma di quanto il lavoro di interpolazione fosse stato eseguito correttamente.

Per  $r^* = 600$ , l'evoluzione nel tempo determinata per la temperatura adimensionale aveva, per ogni  $L^*$ , accentuate oscillazioni, dovute probabilmente ai valori bassissimi, prossimi allo zero, assunti dalle *g-function*. Per tale motivo si è deciso di non proseguire ulteriormente con lo studio della *g-function* per  $r^* = 600$ .

Il processo di verifica delle funzioni interpolanti si è così concluso.

### 4.3 Riduzione dei coefficienti delle funzioni polinomiali interpolanti

Con il procedimento di interpolazione sono stati determinati i coefficienti delle espressioni polinomiali delle *g-function*. Spesso però questi coefficienti erano costituiti da un considerevole numero di cifre. Per poterne consentire una più agevole tabulazione e quindi un miglior utilizzo a livello applicativo, è stato necessario eseguire un lavoro di riduzione dei coefficienti al minor numero di cifre significative tale per cui gli errori dovuti all'arrotondamento potessero essere considerati trascurabili.

Per raggiungere tale obiettivo, ci si è avvalsi, ancora una volta, del software Wolfram MATHEMATICA, tramite il quale è stato implementato un processo di arrotondamento dei coefficienti a partire dalle 13 cifre significative e proseguendo, in ordine decrescente, cercando di ridurle il più possibile. Per poter valutare l'entità degli inevitabili errori prodotti da tale procedimento, per ciascuna *g-function* e per ogni arrotondamento, sono stati posti a confronto i rispettivi valori risultanti per  $\tau^* = 10000, 100000, 1000000$ , con l'ausilio di Excel.

L'obiettivo era di ridurre tutte le *g-function* al medesimo numero di cifre significative e, al tempo stesso, di poter avere un errore, al massimo, alla quarta cifra decimale. Proprio per questo, la scelta è ricaduta sulla riduzione alle 12 cifre significative.

Nelle pagine successive vengono allegate le tabelle dei coefficienti  $a_{14}, a_{13}, a_{12}, a_{11}, a_{10}, a_9, a_8, a_7, a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0$ , ridotti a 12 cifre significative, di ogni *g-function* e per ognuna delle  $L^*$  prese in esame, specificando il valore iniziale  $x_0$  della funzione interpolante.

L*=500						
r*	0.5	30	40	60_1	60_2	80
x <sub>0</sub>	-4	1	1	1	2	2
a <sub>14</sub>	-3.08948282492E-11	5.38631469864E-07	8.04038951297E-07	-2.69156900518E-06	1.57114889781E-06	1.0195526009E-05
a <sub>13</sub>	-1.8646933567E-10	-2.69248998765E-05	-4.32970662107E-05	1.31133176074E-04	-8.37132086485E-05	-5.80114142865E-04
a <sub>12</sub>	6.74157787269E-09	6.09513428227E-04	0.00105849004533	-0.00289939258937	0.00201854570288	0.0151569250415
a <sub>11</sub>	-1.48818097588E-08	-0.00825486373671	-0.0155422346194	0.038491278826	-0.0290645932967	-0.24090208873
a <sub>10</sub>	-2.47012107145E-07	0.0744358953573	0.152817028045	-0.342099633824	0.277410671543	2.6007509148
a <sub>9</sub>	1.19266596854E-06	-0.47059605121	-1.06196036726	2.14881399888	-1.83865090418	-20.1640147203
a <sub>8</sub>	2.79897228421E-06	2.13957654927	5.36573796256	-9.81607333408	8.58457529534	115.719024904
a <sub>7</sub>	-3.27594106688E-05	-7.06105459484	-19.9737407421	33.0603540019	-27.7847047588	-499.103590728
a <sub>6</sub>	1.20187517712E-05	16.8679535133	54.9028231073	-82.3413071842	57.970597379	1624.91652266
a <sub>5</sub>	4.80889076174E-04	-28.7625182559	-110.636320569	150.702014364	-56.7426202626	-3972.04432965
a <sub>4</sub>	-0.000908842761181	34.0774723989	160.597445408	-199.324170304	-60.0597769603	7173.65058277
a <sub>3</sub>	-0.0051694074362	-26.7794313224	-162.661953629	184.671796866	298.048840966	-9279.69767925
a <sub>2</sub>	0.0236658303824	12.8348061593	108.638863064	-113.308216036	-461.080457676	8126.716491
a <sub>1</sub>	0.140717196515	-3.14875433591	-42.8425044019	41.2336527865	353.608832047	-4312.82114109
a <sub>0</sub>	0, 0.201120442555	0.235787074015	7.53331759667	-6.72047748242	-112.656486106	1046.57532825
r*	120	170_2	170_3	230	300	400
x <sub>0</sub>	2	2	3	3	3	3
a <sub>14</sub>	-6.93664394757E-06	-6.88361704421E-06	-8.12334239308E-07	7.88020927901E-07	3.22156090464E-06	-1.30360838076E-06
a <sub>13</sub>	3.73651587474E-04	4.13629139755E-04	3.61645815141E-05	-3.29147323675E-05	-1.43723862211E-04	5.12266711124E-05
a <sub>12</sub>	-0.00920429275796	-0.0114058824045	-6.77502601804E-04	5.68449739688E-04	2.69003494241E-03	-8.23034141652E-04
a <sub>11</sub>	0.137250300467	0.191191863049	0.00658119411999	-0.00492652985868	-0.0260052409492	0.0064685938654
a <sub>10</sub>	-1.38197124437	-2.1751581984	-0.0291230469241	0.0172461896892	0.113521162489	-0.0180622379744
a <sub>9</sub>	9.92185545995	17.7562558861	-0.0401598700894	0.0547536325933	0.169459202287	-0.0920073518635
a <sub>8</sub>	-52.2674267513	-107.191261581	1.10381775672	-0.719900559434	-4.33144805321	0.828410147315
a <sub>7</sub>	204.704293198	485.870015689	-3.56774322467	1.25444203369	13.5011216387	-0.513518706967
a <sub>6</sub>	-597.016850058	-1660.91436344	-19.287056808	15.4816919159	77.1231008185	-20.0504932752
a <sub>5</sub>	1284.8358094	4259.56849817	229.584273486	-120.323146887	-886.948227641	115.805366056
a <sub>4</sub>	-1996.5853166	-8065.3710316	-1049.47513201	420.326398777	3990.3825214	-298.895415155
a <sub>3</sub>	2152.86125854	10931.9830624	2793.05679117	-836.980115517	-10485.3701366	328.87444027
a <sub>2</sub>	-1499.5809489	-10026.6034944	-4529.07053408	937.249655038	16816.7886137	122.19254534
a <sub>1</sub>	586.263881472	5570.54215076	4175.33885993	-494.076258281	-15358.3935576	-661.702853183
a <sub>0</sub>	-90.271326916	-1414.62916726	-1687.04262381	54.424937413	0, 6157.56166787	473.869617503

Tabella 6: valori delle costanti  $a_{14}, a_{13}, a_{12}, a_{11}, a_{10}, a_9, a_8, a_7, a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0$ , per  $L^* = 500$ .

L*=400						
r*	0.5	30	40	60_1	60_2	80
x <sub>0</sub>	-4	1	1	1	2	2
a <sub>14</sub>	1.35721686182E-10	7.87085117935E-07	1.07868311956E-06	-2.41130700355	7.57715841717E-07	9.46933340764E-06
a <sub>13</sub>	-2.0252425028E-09	-3.94947939993E-05	-5.71642484317E-05	1.16892868255E-04	-3.35279861425E-05	-5.34281963333E-04
a <sub>12</sub>	1.80001767669E-09	8.97331182763E-04	0.00137552555299	-0.00257173363044	6.06457414187E-04	0.0138421271543
a <sub>11</sub>	8.50184002844E-08	-0.0122034200604	-0.0198867411992	0.0339717235413	-0.00504341717125	-0.21815756934
a <sub>10</sub>	-2.45525891396E-07	0.110652522138	0.19263448845	-0.300400422859	0.00139686250775	2.33551173953
a <sub>9</sub>	-9.24828260143E-07	-0.705270976796	-1.31984074193	1.87691219256	0.42766743385	-17.957105701
a <sub>8</sub>	4.02975999341E-06	3.24628003167	6.58153540576	-8.52546146673	-5.12922390803	102.202743313
a <sub>7</sub>	-1.10246877173E-05	-10.9161682689	-24.2083150369	28.535322512	34.3482956555	-437.181101009
a <sub>6</sub>	-2.71971640318E-06	26.8275490203	65.8424241967	-70.5777307457	-153.859800195	1411.60470961
a <sub>5</sub>	0.000367838009475	-47.7390991517	-131.481519479	128.158875084	484.158166931	-3422.02373638
a <sub>4</sub>	-0.000858999038329	60.3111343524	189.420205809	-168.001881456	-1078.57606184	6128.35296255
a <sub>3</sub>	-0.00495312613621	-52.2816515554	-190.693348483	154.092963135	1669.85123172	-7859.40571994
a <sub>2</sub>	0.0234627547343	29.3082060134	126.7604581	-93.4876857629	-1710.75566337	6821.99398563
a <sub>1</sub>	0.140245640091	-9.47656439623	-49.8124054801	33.5998988924	1043.06507331	-3587.225639
a <sub>0</sub>	0.20084970926	1.32627814881	8.73673978553	-5.4023234638	-286.524005749	862.195623439
r*	120	170_2	170_3	230	300	400
x <sub>0</sub>	2	2	3	3	3	3
a <sub>14</sub>	-6.66515456878E-06	-6.51016990462E-06	-9.87639037739E-07	8.061720695E-07	3.72357610329E-06	2.69730397978E-07
a <sub>13</sub>	3.63242303632E-04	3.97372159066E-04	4.43808205056E-05	-3.2819134502E-05	-1.64320512858E-04	-1.67686874822E-05
a <sub>12</sub>	-0.00906197785007	-0.0111076053293	-8.39303414219E-04	5.48766800222E-04	0.00304003794245	4.06855043601E-04
a <sub>11</sub>	0.137007403427	0.18838386766	0.00823560730449	-0.00453922008284	-0.028997766079	-0.00495672478607
a <sub>10</sub>	-1.4006084322	-2.16473437291	-0.03697293168	0.0142075718472	0.123903559159	0.0286767922858
a <sub>9</sub>	10.2265602139	17.8212470649	-0.0478403605771	0.0588306253681	0.202076459575	-0.00235951778513
a <sub>8</sub>	-54.908050542	-108.349607443	1.39468045542	-0.62279766762	-4.76393735597	-0.998351293038
a <sub>7</sub>	219.825910088	494.026652043	-4.60240148904	0.682084501273	14.3050232579	4.56215629846
a <sub>6</sub>	-658.06402672	-1697.0342682	-24.1391862186	14.4443042514	86.2077552801	14.0500452294
a <sub>5</sub>	1462.27428518	4369.56589171	292.442984421	-93.6290202529	-961.315910129	-242.637617654
a <sub>4</sub>	-2367.11676546	-8300.46701853	-1345.70084436	272.561564068	4267.0563964	1250.77316929
a <sub>3</sub>	2696.29461687	11280.0835057	3598.46560689	-393.861674205	-11094.4501148	-3618.66614774
a <sub>2</sub>	-2031.51113061	-10367.6117429	-5858.45064668	151.541220133	17627.6993414	6283.39484432
a <sub>1</sub>	898.429434765	5769.65669128	5420.62428477	284.348438647	-15960.2227997	-6150.73451326
a <sub>0</sub>	-173.353578519	-1467.14199717	-2197.89483681	-279.692629753	6346.96347495	2624.61488993

Tabella 7: valori delle costanti  $a_{14}, a_{13}, a_{12}, a_{11}, a_{10}, a_9, a_8, a_7, a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0$ , per  $L^* = 400$ .

L*=300						
r*	0.5	30	40	60_1	60_2	80
x <sub>0</sub>	-4	1	1	1	2	2
a <sub>14</sub>	3.60737636448E-10	1.4853955814E-06	1.81432169544E-06	-1.59536000563E-06	-3.24952857936E-06	5.1275056435E-06
a <sub>13</sub>	-4.47230108899E-09	-7.27289975741E-05	-9.21955615503E-05	7.7714254318E-05	1.95573968785E-04	-2.8563988993E-04
a <sub>12</sub>	-4.65051737695E-09	0.00161459236215	0.00213193771918	-0.00171785332872	-0.0053985464823	0.00731251455905
a <sub>11</sub>	2.2098848845E-07	-0.0214962505954	-0.0296897316171	0.022789193608	0.0905699365342	-0.113965983392
a <sub>10</sub>	-3.21899280427E-07	0.191304346954	0.277714052411	-0.202206142626	-1.03147345981	1.20724262433
a <sub>9</sub>	-3.75136765053E-06	-1.20075977027	-1.84230170635	1.26603222546	8.43367753775	-9.18814943774
a <sub>8</sub>	9.42310283504E-06	5.46630458345	8.9199317482	-5.75197513723	-51.0399831822	51.7691610939
a <sub>7</sub>	1.41336480034E-05	-18.2794737129	-31.9496622569	19.2099063606	232.194355434	-219.155059701
a <sub>6</sub>	-9.44722177412E-05	44.9829451481	84.8744108656	-47.2670364338	-797.649421069	699.748858261
a <sub>5</sub>	3.22336131477E-04	-80.8381967531	-166.035518245	85.0896273548	2058.31494075	-1675.23715426
a <sub>4</sub>	-1.64309618455E-04	104.214285519	235.002271022	-110.150125664	-3925.81145232	2957.20498019
a <sub>3</sub>	-0.006012425986	-93.3548378338	-233.044517055	99.3455586682	5364.31795401	-3729.11326002
a <sub>2</sub>	0.0213952874632	54.9235963788	152.956119373	-58.997510414	-4962.18258106	3173.20904956
a <sub>1</sub>	0.146563937095	-19.0081602232	-59.468098597	20.6551025987	2780.65239871	-1629.96221966
a <sub>0</sub>	0.194581382993	2.92294724751	10.3372971073	-3.21851879523	-712.029586361	381.141338578
r*	120	170_2	170_3	230	300	400
x <sub>0</sub>	2	2	3	3	3	3
a <sub>14</sub>	-1.01983225722E-05	-1.14309948857E-05	-1.64724075254E-06	-1.01220633388E-07	3.12816739653E-06	1.40132842084E-06
a <sub>13</sub>	5.6632899023E-04	6.79907238969E-04	7.4004945627E-05	8.33646828701E-06	-1.35705576867E-04	-6.39606490123E-05
a <sub>12</sub>	-0.0144114708206	-0.018544990273	-0.00139624162313	-0.0002336942952	0.00246447494976	0.00122634778082
a <sub>11</sub>	0.222572853623	0.307312723668	0.0136308044859	0.00314631470249	-0.0229958391014	-0.0121883441885
a <sub>10</sub>	-2.32885590301	-3.45494568098	-0.0604892175955	-0.0200827969635	0.0946856626071	0.0555868507378
a <sub>9</sub>	17.4501996549	27.8639231299	-0.083622705701	0.0119300962167	0.178185314312	0.0672633758808
a <sub>8</sub>	-96.4885037909	-166.176210006	2.29273750343	0.677102614327	-3.69544371031	-2.08786582364
a <sub>7</sub>	399.663584834	744.219886623	-7.36137532767	-3.495659808	10.3557890098	7.0312005306
a <sub>6</sub>	-1245.35102646	-2514.33205269	-40.2497876465	-8.41512643964	68.8573550234	35.7972815415
a <sub>5</sub>	2903.42848794	6375.55524241	474.818049449	175.795455818	-727.403892569	-441.7371269
a <sub>4</sub>	-4983.29595817	-11942.2229521	-2158.44584681	-950.962082965	3148.67574136	2049.19559672
a <sub>3</sub>	6103.65220033	16022.6876412	5714.37842687	2842.01802165	-8019.71126898	-5519.50091732
a <sub>2</sub>	-5041.79389866	-14556.4738834	-9219.70490955	-5064.84782357	12501.407488	9055.38660441
a <sub>1</sub>	2513.49060727	8016.18755464	8460.16497137	5068.59212908	-11111.8860063	-8451.24353947
a <sub>0</sub>	-570.441576044	-2019.22854191	-3404.24004052	-2204.75805449	4339.29177924	3460.46387763

Tabella 8: valori delle costanti  $a_{14}, a_{13}, a_{12}, a_{11}, a_{10}, a_9, a_8, a_7, a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0$ , per  $L^* = 300$ .

L*=200						
r*	0.5	30	40	60_1	60_2	80
x <sub>0</sub>	-4	1	1	1	2	2
a <sub>14</sub>	5.28887852521E-11	9.41597751774E-07	1.3290906335E-06	-1.9463645107E-06	-2.4503086152E-06	5.09856569242E-06
a <sub>13</sub>	3.6820696413E-10	-4.43621744008E-05	-6.66251105403E-05	9.6495362559E-05	1.36846324157E-04	-2.97437098182E-04
a <sub>12</sub>	-8.12011654547E-09	9.44872211514E-04	0.00152264527967	-0.00217068249248	-0.00351884853507	0.00796928911919
a <sub>11</sub>	-3.55053476673E-08	-0.0120243222873	-0.0209991114641	0.0293055055624	0.0552345262747	-0.129883571389
a <sub>10</sub>	3.98957875477E-07	0.101778836232	0.194921102533	-0.264677287871	-0.591479630663	1.4374009123
a <sub>9</sub>	1.64319970606E-06	-0.603419036908	-1.28571858824	1.68773507007	4.5726051457	-11.4170890493
a <sub>8</sub>	-8.9214618792E-06	2.56874165563	6.2003902983	-7.81727989512	-26.3246273428	67.0637178495
a <sub>7</sub>	-4.04912159407E-05	-7.91213011713	-22.1494534991	26.6595631442	114.659548333	-295.707016628
a <sub>6</sub>	1.05899723856E-04	17.5198976542	58.727988892	-67.1424685785	-379.604549933	982.807729585
a <sub>5</sub>	5.26993478831E-04	-27.2907780862	-114.689639581	124.101054366	950.075671991	-2448.5955174
a <sub>4</sub>	-0.00130271851007	28.6247645558	162.001169029	-165.579376298	-1767.81060143	4499.44781028
a <sub>3</sub>	-0.00553742179675	-18.4827926354	-160.224343446	154.610042719	2368.4261657	-5911.58146204
a <sub>2</sub>	0.0233265030089	5.74633052542	104.797069917	-95.5392569072	-2156.80616688	5249.09191146
a <sub>1</sub>	0.139039574995	0.163475366196	-40.5696911167	34.9971671607	1193.41592684	-2819.77756263
a <sub>0</sub>	0.19938034769	-0.424743029289	7.01684591659	-5.73972959763	-302.381481764	691.585908447
r*	120	170_2	170_3	230	300	400
x <sub>0</sub>	2	2	3	3	3	3
a <sub>14</sub>	-1.10010754166E-05	-1.99572121495E-05	-1.61237669964E-06	-1.44516090413E-06	1.06657535435E-06	1.17964276107E-06
a <sub>13</sub>	5.95062792538E-04	0.00114073814392	7.04043165039E-05	6.54840675453E-05	-4.51425871421E-05	-5.2445082684E-05
a <sub>12</sub>	-0.0147206485583	-0.0299514837428	-0.00128733579157	-0.00124748580775	7.96559550455E-04	9.78684532497E-04
a <sub>11</sub>	0.220510477652	0.478584695252	0.0121044206058	0.0123249029916	-0.00716317371302	-0.00943812218903
a <sub>10</sub>	-2.23199960119	-5.19680960379	-0.0504375195811	-0.0558172098907	0.0275335682678	0.0411153881554
a <sub>9</sub>	16.1286267926	40.5496938674	-0.0910901384856	-0.0694608614888	0.065309949205	0.06156968111
a <sub>8</sub>	-85.6837964789	-234.367846519	1.9586750884	2.09997567742	-1.10269290123	-1.56953350649
a <sub>7</sub>	339.440086788	1018.93910907	-5.58499073495	-7.0214918637	2.65660917634	4.90223752172
a <sub>6</sub>	-1005.85580523	-3347.47430767	-36.2612326692	-36.0995429298	21.6639377539	27.8939946972
a <sub>5</sub>	2214.05159411	8267.62607194	387.21899549	443.040625735	-205.340977613	-322.046682721
a <sub>4</sub>	-3554.18325185	-15108.4985062	-1680.92677497	-2051.95756786	837.423528667	1453.82009472
a <sub>3</sub>	4020.80578411	19807.4482234	4282.74082294	5522.03710464	-2019.27339016	-3835.63991957
a <sub>2</sub>	-3015.24816723	-17610.1642389	-6665.08888398	-9053.84771442	2975.72017137	6181.29407594
a <sub>1</sub>	1331.42380377	9504.19542408	5903.29698605	8444.97707909	-2490.9519019	-5676.54995573
a <sub>0</sub>	-257.821391323	-2349.44779545	-2292.73601337	-3455.6801256	911.216063558	2290.08654637

Tabella 9: valori delle costanti  $a_{14}, a_{13}, a_{12}, a_{11}, a_{10}, a_9, a_8, a_7, a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0$ , per  $L^* = 200$

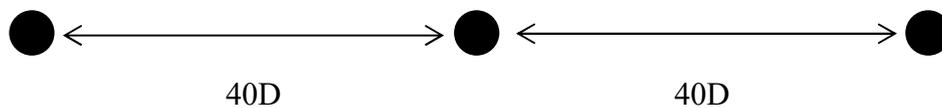
L*=100						
r*	0.5	30	40	60_1	60_2	80
X <sub>0</sub>	-4	1	1	1	2	2
a <sub>14</sub>	-6.2142946923E-10	5.40978885415E-07	9.55476276186E-07	-2.38479417104E-06	1.31806539602E-06	1.05759953896E-05
a <sub>13</sub>	7.32602369256E-09	-2.77455448957E-05	-5.13464374606E-05	1.1393726928E-04	-6.0905431263E-05	-5.88090789804E-04
a <sub>12</sub>	1.91124214795E-08	6.44800363664E-04	0.00125249851811	-0.00246412073907	0.00120525563723	0.0150012167931
a <sub>11</sub>	-4.39664138564E-07	-0.00897402373339	-0.0183472347646	0.0319032926414	-0.0127198173394	-0.232514539582
a <sub>10</sub>	-9.07523595148E-09	0.0832841949928	0.179930443531	-0.275592652303	0.0644523229787	2.44484918917
a <sub>9</sub>	1.08671678063E-05	-0.543162280131	-1.24679984253	1.6760012064	0.0921380913529	-18.4357717922
a <sub>8</sub>	-4.436028772E-06	2.55630140087	6.27954246423	-7.38035190064	-4.07992837829	102.741480499
a <sub>7</sub>	-1.39607955024E-04	-8.7794829779	-23.2927959729	23.8443390885	33.563447126	-429.592616418
a <sub>6</sub>	5.5764865649E-05	22.0099790454	63.7846725446	-56.6572291588	-163.245187175	1353.44169124
a <sub>5</sub>	9.89586601486E-04	-39.9159678116	-128.044973118	98.3192788055	535.367671852	-3195.49284051
a <sub>4</sub>	-0.00113356001947	51.3848180575	185.198414156	-122.438164335	-1219.8284307	5563.03265058
a <sub>3</sub>	-0.00677785545195	-45.4389044558	-186.983164877	105.948144033	1912.01515921	-6922.196921
a <sub>2</sub>	0.0215781609733	26.0589782278	124.55595863	-60.1478213405	-1971.28768101	5818.45801028
a <sub>1</sub>	0.136365976044	-8.66672286652	-49.0215182058	20.0304784709	1205.02943951	-2956.80856774
a <sub>0</sub>	0.196664303213	1.25923660804	8.60787768817	-2.94863184297	-331.090706856	685.355346036
r*	120	170_2	170_3	230	300	400
X <sub>0</sub>	2	2	3	3	3	3
a <sub>14</sub>	6.64743066199E-06	-7.72797643862E-06	1.14589333584E-07	-5.11355721827E-07	-5.59467303291E-08	2.34357944567E-07
a <sub>13</sub>	-3.91501125296E-04	4.30346238124E-04	-5.72622326677E-06	2.24666621359E-05	2.82145442769E-06	-1.03315255067E-05
a <sub>12</sub>	0.0105927654083	-0.0110023056808	1.20062995507E-04	-4.13998020139E-04	-5.94975038015E-05	1.91049567327E-04
a <sub>11</sub>	-0.174433385469	0.171093307609	-0.00131332230555	0.00393437666195	0.000652547248217	-0.00182295898208
a <sub>10</sub>	1.9520876095	-1.80719861652	0.00687089555503	-0.0167374447322	-0.0034103368919	0.00780747527753
a <sub>9</sub>	-15.6971085326	13.7104037672	0.0025035524979	-0.0276336359397	-0.00133616156081	0.0125295700358
a <sub>8</sub>	93.4830398414	-77.0136962633	-0.245487480566	0.643898508456	0.122054615942	-0.299533471105
a <sub>7</sub>	-418.662150786	325.279207277	1.02998298106	-1.92511532817	-0.505873612996	0.907693726804
a <sub>6</sub>	1416.20922957	-1037.79973875	3.65161474244	-11.6605374883	-1.83845207485	5.38931990298
a <sub>5</sub>	-3599.40133673	2488.49378657	-57.5076159951	129.66236651	28.3688177527	-60.6455357544
a <sub>4</sub>	6763.69760499	-4413.9798446	291.547281585	-574.943644298	-142.511656477	270.585946182
a <sub>3</sub>	-9109.87778701	5615.76205618	-839.530254732	1493.74301806	406.963137618	-707.144891536
a <sub>2</sub>	8312.24332226	-4844.59422693	1459.17221611	-2371.58500193	-701.554010482	1129.7835534
a <sub>1</sub>	-4598.79593829	2536.82989389	-1434.64592039	2145.28089899	684.21028911	-1029.08194014
a <sub>0</sub>	1163.96011711	-608.439769905	616.198150907	-852.096690687	-291.582650967	411.916042382

Tabella 10: valori delle costanti  $a_{14}, a_{13}, a_{12}, a_{11}, a_{10}, a_9, a_8, a_7, a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0$ , per  $L^* = 100$

#### 4.4 Interpolazione lineare per la determinazione di $g_{50}$ e $g_{100}$

Le  $g$ -function possono essere applicate per studiare gli effetti a lungo termine, cioè per decine di anni, di un carico termico per unità di lunghezza a cui è soggetto un campo di sonde. Per un campo di più sonde si deve tenere conto anche dell'interazione tra le sonde stesse. Poiché le  $g$ -function sono state ottenute attraverso un sistema di equazioni lineari, si può applicare la sovrapposizione degli effetti.

Ad esempio, si consideri un campo di tre sonde, così strutturato:



**Figura 52:** esempio di campo di tre sonde, disposte alla distanza di 40D l'una dall'altra.

La temperatura adimensionale media alla superficie di una sonda, ad esempio la più critica del campo, può essere calcolata come somma di quella prodotta dalla sonda stessa, sulla sua superficie, e delle temperature adimensionali medie prodotte, alle distanze adimensionali  $r_j^*$ , dalle sonde poste alle distanze  $r_j^*$  dal suo asse.

Facendo riferimento al nostro esempio, la temperatura media adimensionale alla superficie ( $r^* = 0.5$ ) della sonda centrale, sarà data da:

$$\bar{T}_{c,1 \times 3}^*(\tau^*) = \bar{T}^*(0.5, \tau^*) + 2\bar{T}^*(40, \tau^*)$$

Tale sonda è quella che si trova ad operare in condizioni più critiche, subendo l'interferenza termica prodotta dalla presenza di tutte le altre sonde del campo.

Nella realtà, però, può capitare che le sonde facenti parte di un campo non siano poste tra loro a una distanza, misurata in diametri, pari alle  $r^*$  precedentemente scelte per il calcolo delle  $g$ -function. Questo comporta la necessità di andare a calcolare le  $g$ -function per i valori delle  $r_j^*$  di cui si ha bisogno. Queste si possono ottenere tramite un'interpolazione lineare tra le  $g$ -function di cui si

dispone. Tale procedimento comporterà, chiaramente, l'insorgenza di errori rispetto al calcolo computazionale tramite COMSOL Multiphysics.

Per poter illustrare il procedimento di interpolazione lineare, sono state calcolate, a titolo di esempio, le *g-function* per  $r^* = 50$ , che chiameremo  $g_{50}$ , e per  $r^* = 100$ , che chiameremo  $g_{100}$ , per ogni  $L^*$ .

Il nuovo metodo di interpolazione, introdotto nello studio sulle sonde geotermiche corte, utilizzando lo stesso valore di  $x_0$  per diversi valori di  $r^*$ , consente di eseguire l'interpolazione lineare tra due *g-function* contigue tramite interpolazione lineare dei coefficienti delle funzioni.

Per poter determinare  $g_{50}$ , è stata eseguita, mediante l'utilizzo di Wolfram MATHEMATICA, l'interpolazione lineare tra la  $g_{40}$  e la  $g_{60}$ , *g-function* determinate mediante COMSOL Multiphysics e l'interpolazione polinomiale precedentemente descritta.

Nel caso del calcolo di  $g_{50}$ , con l'ausilio di Wolfram MATHEMATICA, sono stati definiti due vettori, composti dai coefficienti delle funzioni  $g_{40}$  e  $g_{60}$ , denominati rispettivamente  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ . Dopodiché si è proceduto con il calcolo del vettore  $\mathbf{z}$  dei coefficienti di  $g_{50}$ , secondo la formula:

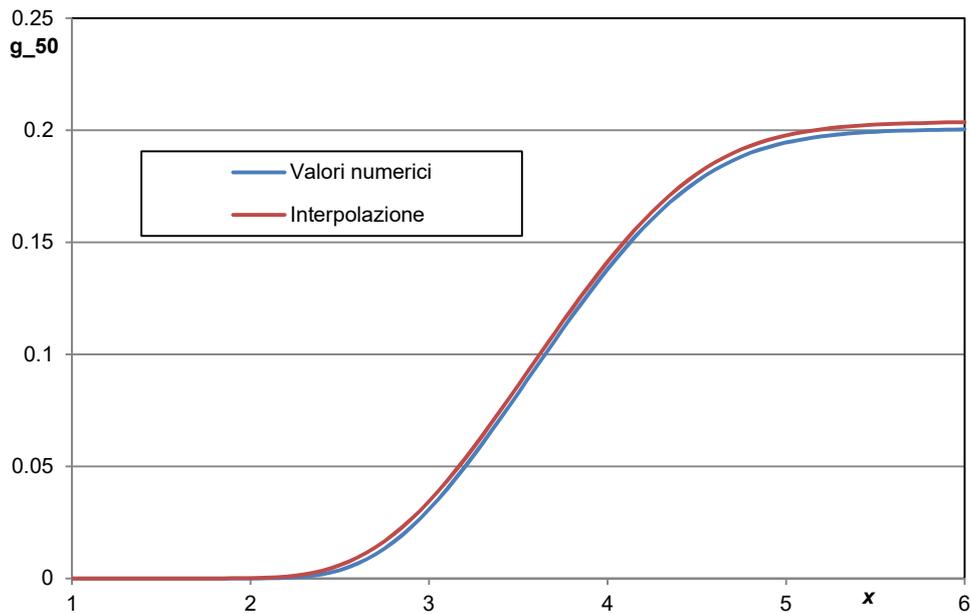
$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{v} + \mathbf{w}}{2}$$

Il vettore  $\mathbf{z}$  è, quindi, costituito dai coefficienti  $a_{14}, a_{13}, a_{12}, a_{11}, a_{10}, a_9, a_8, a_7, a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0$  del polinomio di quattordicesimo grado che definisce la *g-function* per  $r^* = 50$ .

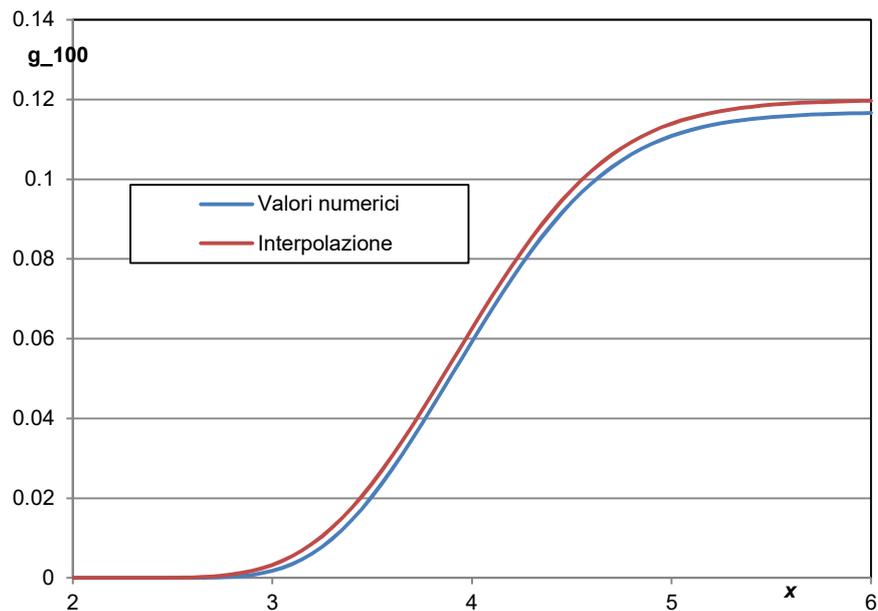
Per la determinazione di  $g_{100}$  il procedimento utilizzato è stato il medesimo, ma l'interpolazione è avvenuta fra i valori di  $g_{80}$  e  $g_{120}$ .

Chiaramente, l'interpolazione lineare fra due *g-function* può dare luogo a scostamenti rispetto ai valori della *g-function* che si otterrebbero con la simulazione numerica diretta per il valore di  $r^*$  considerato. Per poter valutare l'entità di tali errori, è stato eseguito il calcolo computazionale delle  $g_{50}$  e  $g_{100}$ , attraverso COMSOL Multiphysics.

Nei grafici sottostanti, vengono messi a confronto le  $g_{50}$  e le  $g_{100}$ , per  $L^* = 400$ :



**Figura 53:** confronto tra la  $g$ -function ottenuta con il calcolo numerico e quella ottenuta tramite interpolazione lineare, per  $L^* = 400$  e  $r^* = 50$ .



**Figura 54:** confronto tra la  $g$ -function ottenuta con il calcolo numerico e quella ottenuta tramite interpolazione lineare, per  $L^* = 400$  e  $r^* = 100$ .

Dai grafici riportati [Fig.53-Fig.54], si può notare la presenza di un lieve scostamento dalla curva data dai valori numerici, che ci consente di affermare che l'errore dovuto all'interpolazione lineare è piccolo, e quindi accettabile. In particolare, lo scarto quadratico medio nell'intervallo  $2 \leq x \leq 6$  è pari a 0.003085294 per  $g_{50}$  e a 0.002665527 per  $g_{100}$ .

## 5 STUDIO SUGLI EFFETTI DELLE VARIAZIONI STAGIONALI DELLA TEMPERATURA SUPERFICIALE

Lo sonde geotermiche verticali, come si è detto, sfruttano la proprietà del sottosuolo di mantenere una temperatura circa costante già a partire da alcune decine di metri di profondità. Questo è dovuto all'elevata inerzia termica del terreno. Ne consegue un grande vantaggio per le pompe di calore, che possono sfruttare una sorgente termica a una temperatura praticamente costante tutto l'anno, assicurando COP ed EER eccellenti in regime continuativo. Infatti, il principale vantaggio di questa tecnologia è di risentire in maniera trascurabile delle variazioni del clima esterno, date le notevoli profondità raggiunte dalla sonda.

In genere, nelle applicazioni civili per condizionamento/riscaldamento raramente si scambia calore a profondità superiori ai 150m. Per queste profondità si può affermare che:

- Il gradiente termico medio sulla crosta terrestre del nostro pianeta si aggira fra gli 1,5 e i 5 °C almeno nei primi 1000m di crosta;
- Il gradiente termico dipende dalla conformazione del terreno e dalla sua struttura, ma il valore maggiormente diffuso è 3 °C ogni 100 m;
- Le variazioni di temperatura esterna giornaliere si riducono mediamente di circa 10 volte ad una profondità dal suolo di 20 cm;
- Le variazioni di temperatura stagionali si riducono mediamente di circa 10 volte ad una profondità dal suolo di 2m;
- Nel terreno indisturbato (profondità comprese fra i 20 e i 50m a seconda del terreno) la temperatura oscilla rispetto ad un valore medio che è praticamente pari alla temperatura media annua della località in esame ( $T_g$ ).

Il terreno può essere considerato un mezzo omogeneo semi-infinito, cioè limitato da una superficie piana a  $z = 0$  ed infinitamente esteso nel senso della profondità, ovvero lungo il semispazio  $z \geq 0$ , con l'asse  $z$  orientato verso il basso. Si può considerare la diffusività termica ( $\alpha_g$ ) costante e assenza di generazione termica, e si può trascurare il movimento dell'acqua di falda.

Nei precedenti capitoli, si è analizzato un metodo per la determinazione l'evoluzione nel tempo del campo di temperatura, assumendo uno scambio termico di pura conduzione, con la condizione iniziale di considerare il terreno alla temperatura  $T(r, z, 0) = T_g$  e imponendo sulla superficie del

terreno la condizione di temperatura uniforme e costante  $T(r, 0, \tau) = T_g$ . Sono stati così trascurati gli effetti delle variazioni di temperatura esterna.

Si ricorda che il lavoro di questa Tesi è stato condotto su sonde geotermiche corte, per lunghezze adimensionali  $L^* = 500, 400, 300, 200, 100$ . Si consideri che  $L^* = 100$  significa una lunghezza di 5 m per un diametro 5 cm e di 15 m per un diametro di 15 cm. Risulta logico attendersi che, per tali lunghezze, sia necessario considerare anche l'influenza della variazione mensile di temperatura dell'aria esterna sullo scambio termico con il terreno. A tal proposito, è stato implementato un codice di calcolo per la valutazione dell'effetto delle variazioni stagionali delle temperature superficiali sulla temperatura del terreno, finora considerata costante e pari alla temperatura indisturbata del terreno. Successivamente ci si è concentrati sullo studio degli effetti di tali variazioni sulle prestazioni delle sonde geotermiche corte.

## 5.1 Temperatura del terreno indisturbato

Prima di procedere con lo studio sugli effetti dovuti alla variazione di temperatura superficiale, è bene illustrare, brevemente, come venga determinata la temperatura di riferimento ( $T_g$ ) rispetto alla quale verranno valutati gli effetti di tali variazioni.

La temperatura del terreno indisturbato ( $T_g$ ) corrisponde alla temperatura media del terreno dalla superficie del suolo alla profondità massima della sonda. Se la sonda è piena d'acqua e in equilibrio termico con il terreno,  $T_g$  coincide con la temperatura media dell'acqua contenuta nella sonda prima dell'iniezione/estrazione di calore.

Di conseguenza, si può procedere alla misurazione della  $T_g$  riempiendo una sonda geotermica d'acqua alcuni giorni prima dell'effettuazione del test, così che possa portarsi in equilibrio termico con il terreno. Si può procedere allora in due diversi modi:

- il primo metodo consiste nel misurare la temperatura dell'acqua nella sonda alle varie profondità utilizzando un freatometro. I valori raccolti vengono poi mediati e da tale calcolo si ricava  $T_g$ . Questo procedimento è però in genere sconsigliato: infatti il freatometro con cui si effettuano le misure, strumento molto costoso, può restare incastrato nella sonda e rompersi;
- nel secondo metodo invece, si utilizza un circuito di prova del tipo raccomandato dall'ASHRAE, adoperato per il Test di Risposta Termica (Fig.55). A resistenze spente, l'acqua del circuito viene messa in circolazione con una pompa e vengono misurate e registrate, a intervalli di tempo prestabiliti, la temperatura dell'acqua in ingresso e in uscita

dalla sonda, nonché la portata in volume, per un certo tempo. Successivamente si calcola l'intervallo di tempo in cui esce un volume di acqua pari a quello dell'acqua che era inizialmente contenuta nella sonda (volume interno dei tubi della sonda). Si determina  $T_g$  come valore medio, pesato sui volumi effluiti, della temperatura dell'acqua in uscita dalla sonda nel suddetto intervallo.

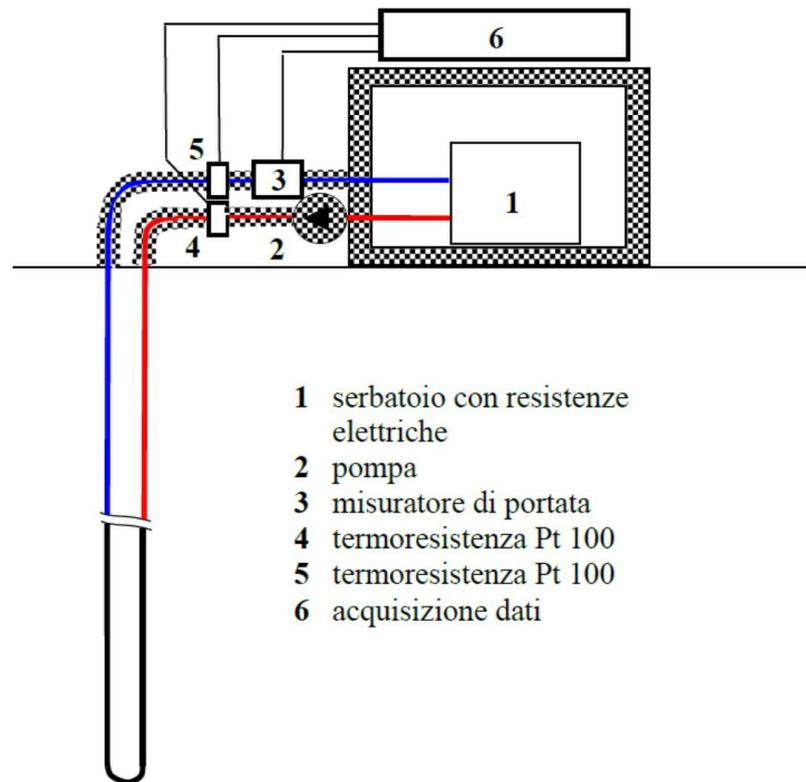


Figura 55: circuito di prova utilizzato per eseguire un TRT.

## 5.2 Effetto delle variazioni stagionali della temperatura superficiale sulla distribuzione di temperatura del terreno

Avendo chiarito la definizione della temperatura del terreno indisturbato  $T_g$ , si può procedere con la valutazione dell'influenza che le variazioni stagionali della temperatura superficiale del terreno hanno su tale parametro.

Il terreno è considerato un mezzo omogeneo, delimitato da una superficie piana  $z = 0$  ed infinitamente esteso nel senso della profondità del terreno, ovvero lungo il semispazio  $z \geq 0$ , con l'asse  $z$  orientato verso il basso. Tali ipotesi consentono di far riferimento allo caso di studio della distribuzione di temperatura in un solido semi-infinito, con una temperatura iniziale fissata e con temperatura superficiale pari a zero, condotto da H. S. Carslaw e J. C. Jaeger [3]. Di seguito verrà descritto il procedimento per la determinazione della soluzione analitica del problema.

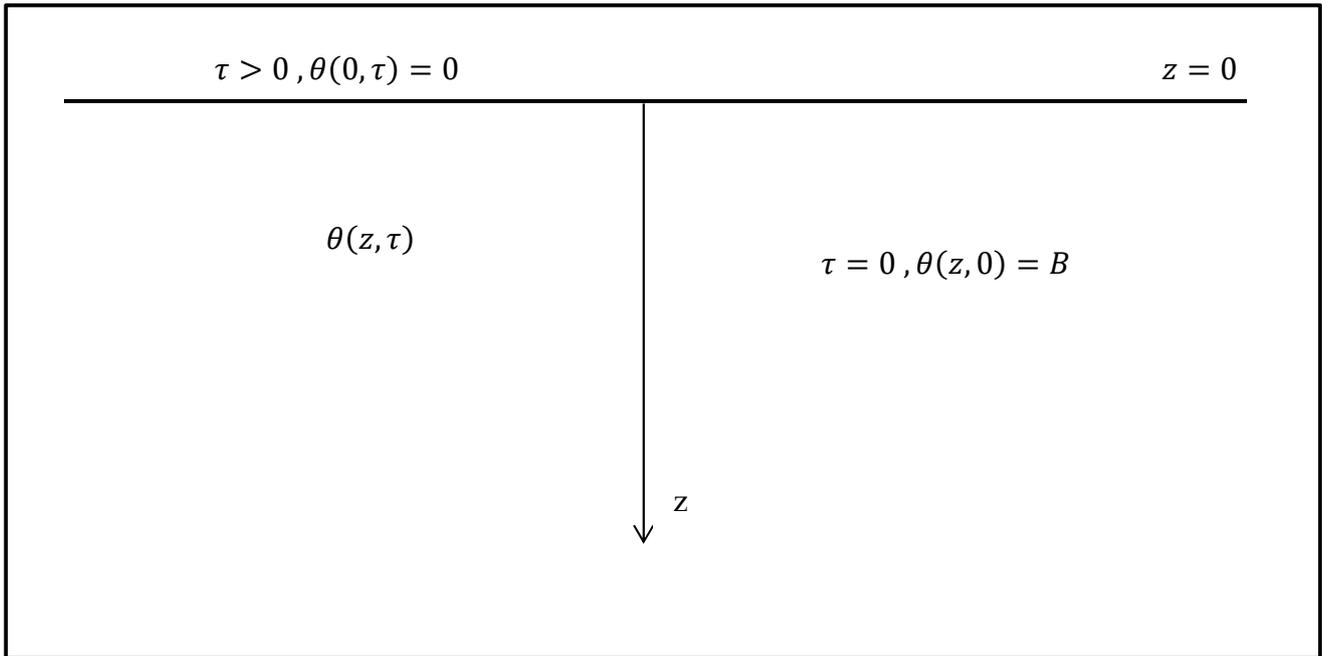
Si introduce la funzione di temperatura  $\theta(z, \tau)$  e si considerano le seguenti condizioni iniziali e al contorno:

$$\text{per } \tau = 0 \qquad \theta(z, 0) = B \qquad \text{(iniziale)}$$

$$\text{per } z = 0 \qquad \theta(0, \tau) = 0 \qquad \text{(superficie del terreno)}$$

Le ipotesi sono, quindi, di assumere una temperatura iniziale del terreno costante e pari a  $B$  e di attribuire alla superficie del terreno la condizione di temperatura uniforme e costante, con valore zero. La soluzione a questo problema, determinata da Carslaw e Jaeger [8], è:

$$\theta(z, \tau) = B \operatorname{erf} \left\{ \frac{z}{2\sqrt{\alpha_g \tau}} \right\} \qquad (1)$$



**Figura 56:** modello dello schema utilizzato, con condizioni iniziali e al contorno.

Si indichi ora con  $\theta$  la differenza  $T - T_g$ . Le condizioni iniziali e al contorno che ci interessano sono:

$$\text{per } \tau = 0 \qquad \theta(z, 0) = 0 \qquad \text{(iniziale)}$$

$$\text{per } z = 0 \qquad \theta(0, \tau) = B \qquad \text{(superficie del terreno)}$$

dove  $B$ , positivo o negativo, rappresenta un salto a gradino della temperatura superficiale rispetto a  $T_g$ .

Si consideri la seguente modifica del problema risolto da Carslaw e Jaeger: si consideri la temperatura iniziale  $\theta(z, 0) = -B$ . il problema diventa:

$$\text{per } \tau = 0 \qquad \theta(z, 0) = -B \qquad \text{(iniziale)}$$

$$\text{per } z = 0 \qquad \theta(0, \tau) = 0 \qquad \text{(superficie del terreno)}$$

e la soluzione sarà:

$$\theta(z, \tau) = -B \operatorname{erf} \left\{ \frac{z}{2\sqrt{\alpha_g \tau}} \right\} \qquad (2)$$

Se si traslano tutte le temperature della quantità  $B$ , si ottengono le condizioni iniziali e al contorno del nostro problema:

$$\text{per } \tau = 0 \quad \theta(z, 0) = -B + B = 0 \quad (\text{iniziale})$$

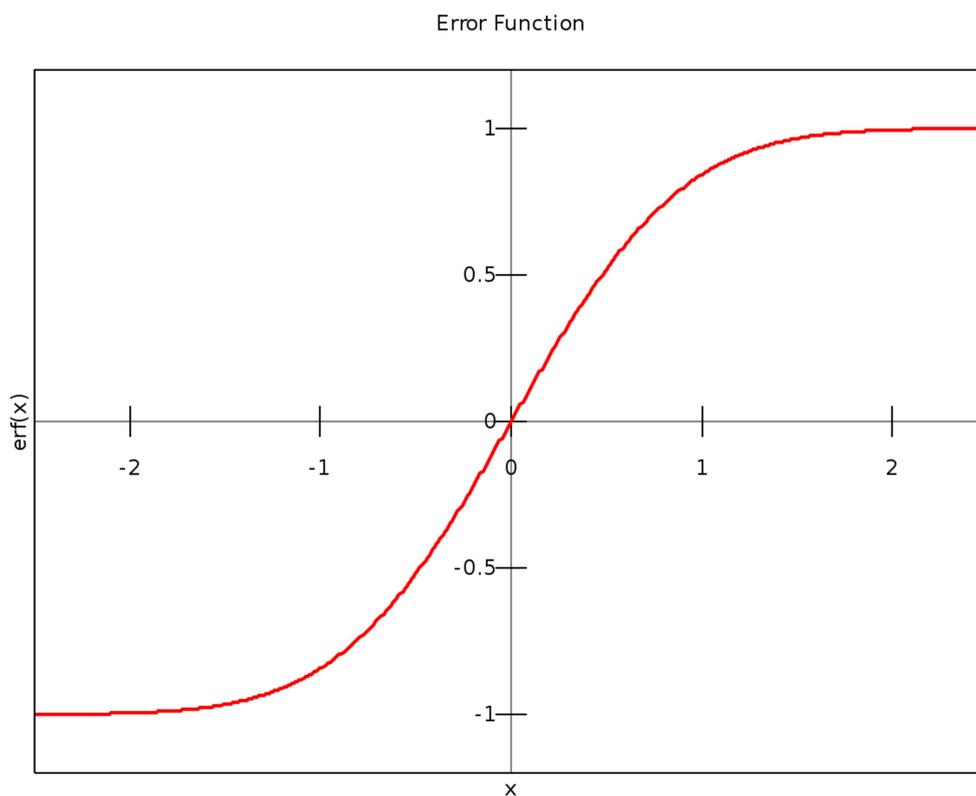
$$\text{per } z = 0 \quad \theta(0, \tau) = 0 + B = B \quad (\text{superficie del terreno})$$

e la soluzione sarà traslata della quantità  $B$ , e quindi pari a:

$$\theta(z, \tau) = B - B \operatorname{erf} \left\{ \frac{z}{2\sqrt{\alpha_g \tau}} \right\} = B \left[ 1 - \operatorname{erf} \left\{ \frac{z}{2\sqrt{\alpha_g \tau}} \right\} \right] \quad (3)$$

dove  $\operatorname{erf} \left\{ \frac{z}{2\sqrt{\alpha_g \tau}} \right\}$  è la funzione degli errori (*error function*). In generale, viene definita come:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^x e^{-\tau^2} d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\tau^2} d\tau$$

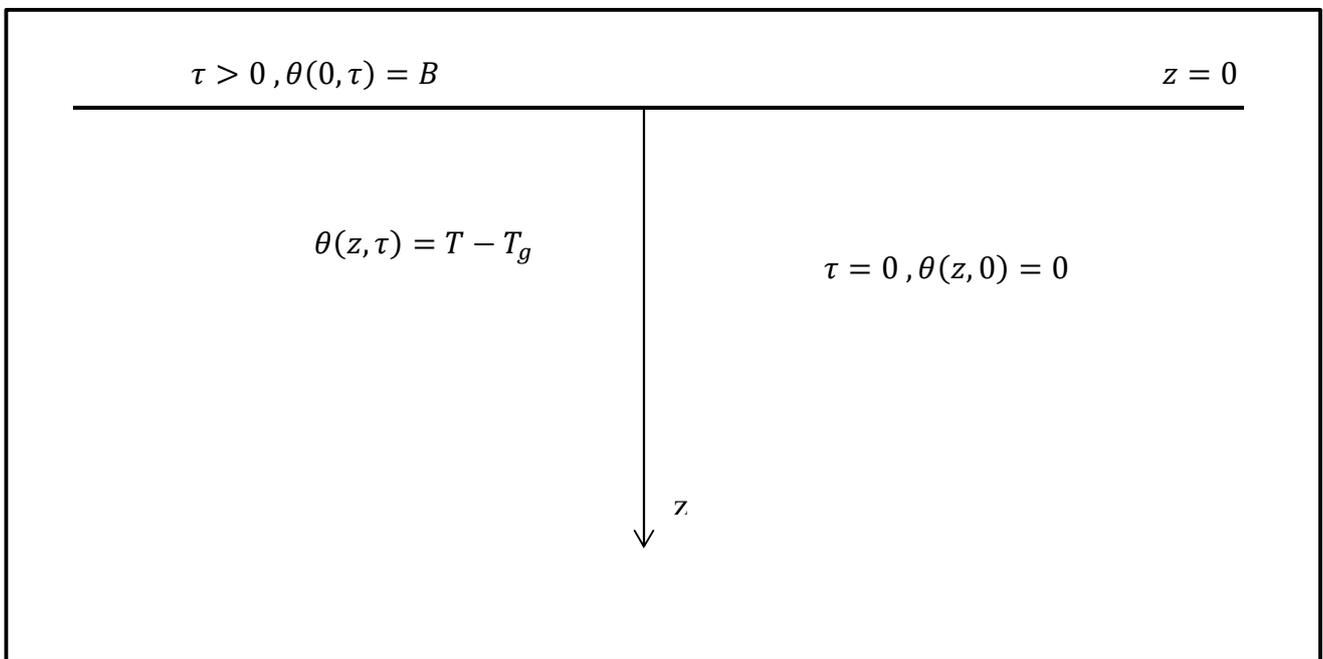


**Figura 57:** grafico della funzione degli errori.

Utilizzando la (3) si può affrontare il problema desiderato, ovvero dell'influenza di una variazione di temperatura superficiale su un terreno posto a una temperatura fissa, pari a quella di terreno indisturbato, che riassumiamo. Si ha

$$\theta(z, \tau) = T - T_g$$

Si assume che il terreno, all'istante iniziale si trovi alla temperatura  $T = T_g$ , ovvero a  $\theta = 0$ , e che sulla superficie del terreno  $\theta$  si mantenga, a partire dall'istante iniziale, ad un valore costante pari a  $B$ , come illustrato in Figura 58.



**Figura 58:** schema del problema affrontato, con condizioni iniziale e al contorno.

La soluzione a tale problema è data dalla (3), che riscriviamo senza il passaggio intermedio:

$$\theta(z, \tau) = B \left[ 1 - \operatorname{erf} \left\{ \frac{z}{2\sqrt{\alpha_g \tau}} \right\} \right] \quad (4)$$

Si procede con un processo di adimensionalizzazione delle variabili utilizzando, per  $z$  e  $\tau$ , la stessa adimensionalizzazione rispetto al diametro  $D$  della sonda impiegata per il calcolo delle  $g$ -function.

$$\theta^* = \frac{\theta}{B} \qquad z^* = \frac{z}{D} \qquad \tau^* = \frac{\alpha_g \tau}{D^2}$$

Varranno, allora, le relazioni:

$$z = Dz^* \qquad \alpha_g \tau = D^2 \tau^*$$

Sostituendole all'interno della (4), si ottiene:

$$\theta^*(z^*, \tau^*) = 1 - \operatorname{erf} \left\{ \frac{z^*}{2\sqrt{\tau^*}} \right\} \qquad (5)$$

Si ricorda che le  $g$ -function rappresentano un valore di temperatura adimensionale, mediata sulla lunghezza della sonda. Per poter valutare l'influenza delle fluttuazioni di temperatura superficiale sulle prestazioni delle sonde, è opportuno considerare un valore di  $\theta^*(z^*, \tau^*)$  mediato sulla lunghezza adimensionale  $L^*$ .

La funzione mediata su  $L^*$ , sarà pari a:

$$\theta_m^*(\tau^*) = \frac{1}{L^*} \int_0^{L^*} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{z^*}{2\sqrt{\tau^*}} \right) \right] dz^*$$

Risolvendo l'integrale si ottiene:

$$\theta_m^*(\tau^*) = 1 - \frac{2\sqrt{\tau^*} \left( e^{-\frac{L^{*2}}{4\tau^*}} - 1 \right)}{L^* \sqrt{\pi}} - \operatorname{erf} \left( \frac{L^*}{2\sqrt{\tau^*}} \right) \qquad (6)$$

Essendo  $\theta = T - T_g$  e  $\theta_m = B\theta_m^*$ , si ha

$$(T - T_g)(\tau^*) = B\theta_m^*(\tau^*) \quad (7)$$

Questa relazione consente di poter determinare lo scostamento, nel tempo, della temperatura del terreno rispetto a quella di riferimento, nel caso in cui si abbia una variazione pari a  $B$  della temperatura superficiale rispetto alla  $T_g$ , a partire dall'istante  $\tau = 0$ . Per trovare gli effetti di una variazione a scalini mensili, dove  $B_i$  è il valore della variazione per il mese  $i$ -esimo, bisogna utilizzare la sovrapposizione degli effetti nel tempo, in analogia a quanto fatto per l'uso delle *g-function*. Se si indica con  $\tau_1^*$  la durata adimensionale di un mese e si considerano 600 mesi, risulta

$$\theta_{tot}(\tau^*) = (T - T_g)_{tot}(\tau^*) = \sum_{i=0}^{599} B_i [\theta_m^*(\tau^* - i\tau_1^*) - \theta_m^*(\tau^* - (i+1)\tau_1^*)] \quad (8)$$

Nell'ambito di questo lavoro di Tesi, tale relazione è stata adoperata per studiare l'evoluzione nel tempo della temperatura del terreno indisturbato, nella città di Bologna. Più precisamente, si è cercato di valutare l'entità dell'influenza delle fluttuazioni medie mensili di temperatura superficiale sulla temperatura del terreno indisturbato, in funzione della profondità massima considerata.

Facendo riferimento al clima della città di Bologna, ci si è avvalsi dei valori di temperatura dell'aria media mensile forniti da TRNSYS. Sotto l'ipotesi di considerare la temperatura del terreno indisturbato pari al valore di temperatura media annuale dell'aria esterna, si è attribuito a  $T_g$  un valore pari a 13.92°C. Successivamente sono stati calcolati i valori di  $B_i$ , con  $i = 0, \dots, 11$ , per ogni mese dell'anno, come differenza tra la temperatura media dell'aria esterna del mese considerato e la  $T_g$ .

Di seguito vengono riportati i valori ottenuti di  $B_i$ :

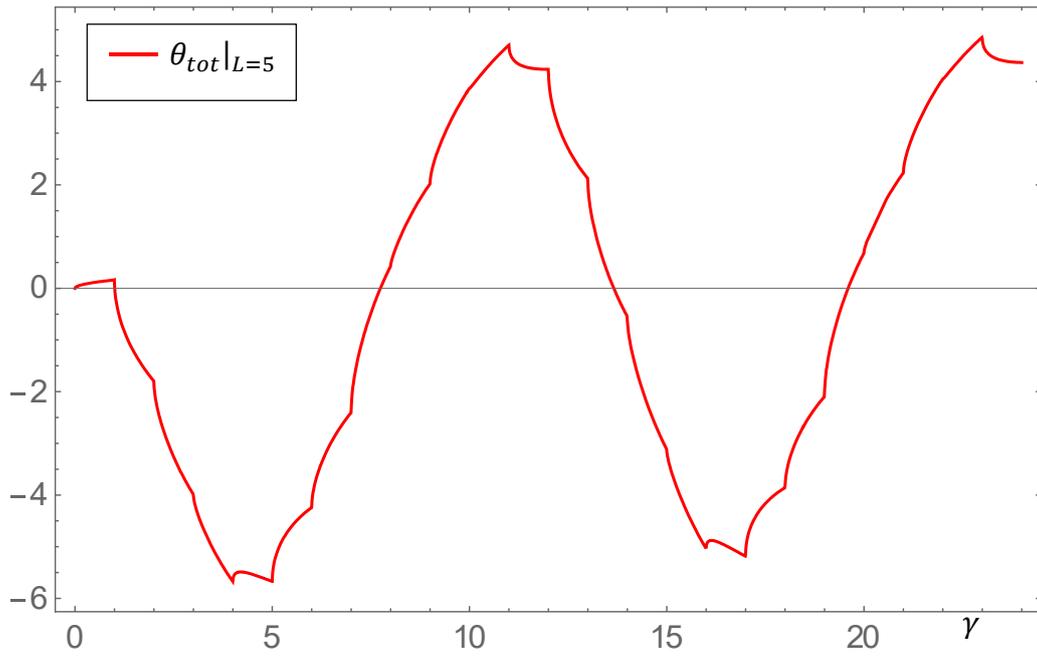
Mesi	T [°C]	T-Tg	$B_i$
Ott	14.4	0.48	$B_0$
Nov	8.4	-5.52	$B_1$
Dic	3.9	-10.02	$B_2$
Gen	1.7	-12.22	$B_3$
Feb	4.3	-9.62	$B_4$
Mar	9.4	-4.52	$B_5$
Apr	13.8	-0.12	$B_6$
Mag	20.2	6.28	$B_7$
Giu	21.5	7.58	$B_8$
Lug	24.4	10.48	$B_9$
Ago	24.1	10.18	$B_{10}$
Set	20.9	6.98	$B_{11}$

**Tabella 11:** tabella dei coefficienti  $B_i$  per ogni mese dell'anno, in riferimento alla città di Bologna.

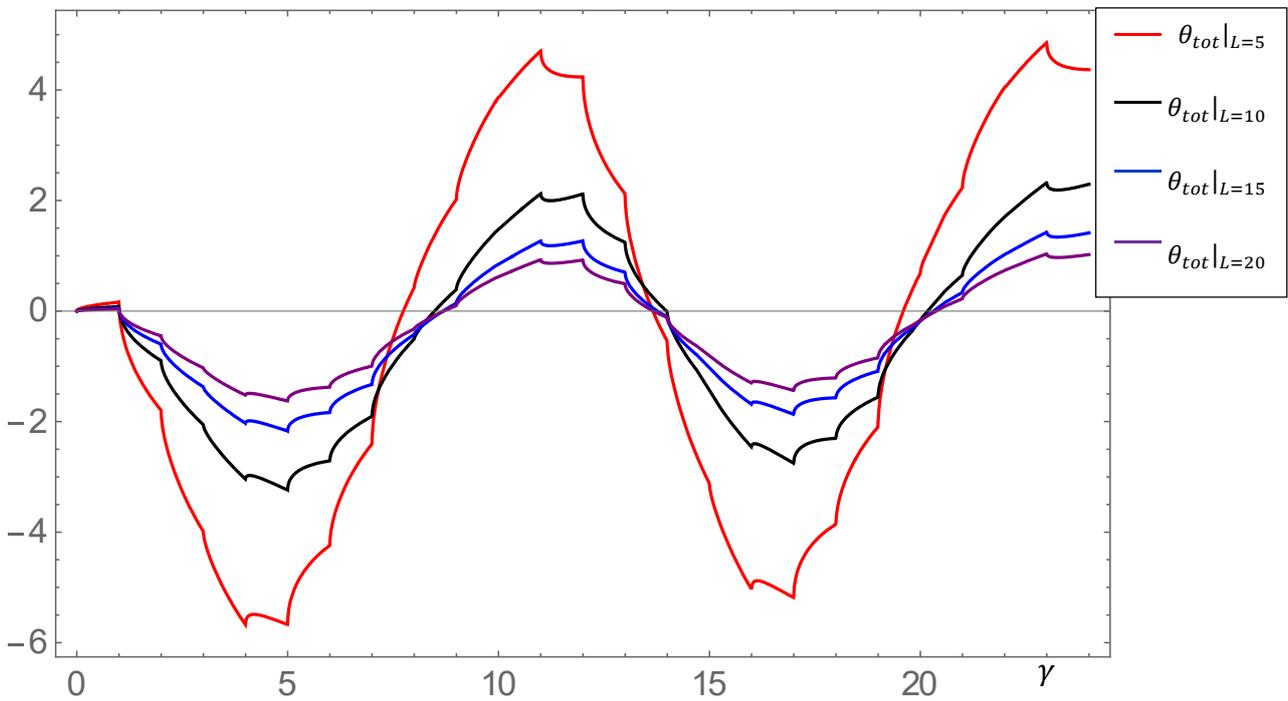
Con l'ausilio del software Wolfram MATHEMATICA, si è potuto valutare mediante la (8) l'evoluzione nel tempo dello scostamento della temperatura del terreno indisturbato dal valore di riferimento, cioè dalla media annua, per un periodo di 50 anni, per le profondità  $L [m] = 5, 10, 15, 20, 30, 45, 60, 75, 100$ .

Si è considerata una diffusività termica del suolo  $\alpha_g = 0.856 \times 10^{-6} m^2/s$  e una durata del mese  $\tau = 730h = 2.628 \times 10^6 s$  per ciascun mese dell'anno. Per ogni lunghezza  $L$  è stato scelto arbitrariamente un diametro  $D$ , ininfluenza sugli effetti dovuti alle variazioni di temperatura superficiale, cui è corrisposto un determinato valore di  $L^* = \frac{L}{D}$  e di  $\tau^* = \frac{\alpha_g \tau}{D^2}$ . Poiché la durata del mese risulta diversa al variare di  $D$ , si è preferito riportare i risultati in funzione del parametro  $\gamma = \tau^* / \tau_1^*$ , che rappresenta il numero di mesi.

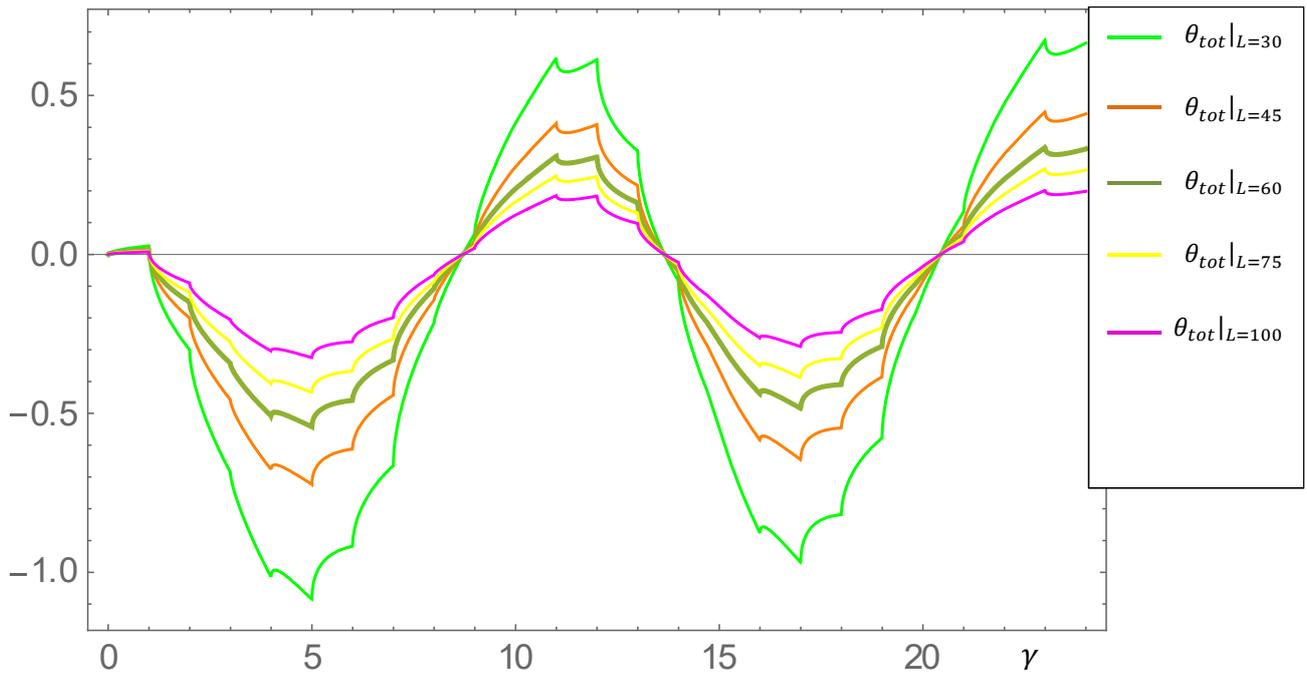
I risultati delle simulazioni sono riportati nelle Figure 59, 60, 61, 62.



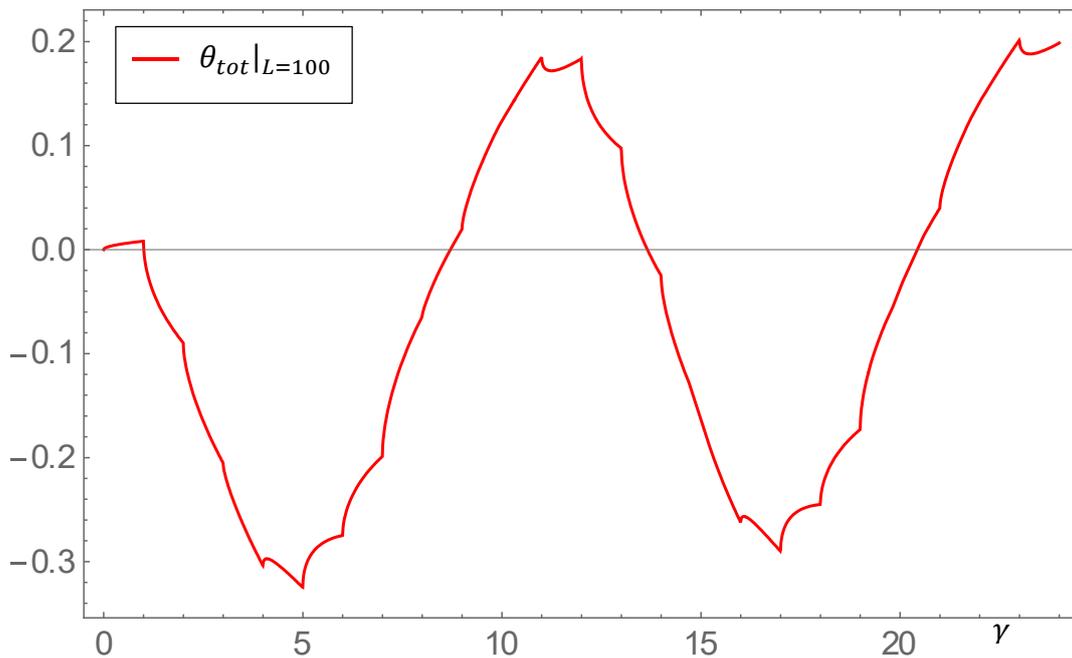
**Figura 59:** andamento di  $\theta_{tot}$  per una profondità massima di 5m, per un periodo di due anni ( $\gamma = 24$ ).



**Figura 60:** andamenti di  $\theta_{tot}$  per le lunghezze  $L= 5\text{m}, 10\text{m}, 15\text{m}, 20\text{m}$ , per un periodo di due anni ( $\gamma = 24$ ).



**Figura 61:** andamento di  $\theta_{tot}$  per le lunghezze  $L= 30m, 45m, 60m, 75m, 100m$ , per un periodo di due anni ( $\gamma = 24$ ).



**Figura 62:** andamento di  $\theta_{tot}$  per lunghezza  $L = 100m$ , per un periodo di due anni ( $\gamma = 24$ ).

Si osserva che le curve mostrano due picchi di temperatura, minimo e massimo, in corrispondenza rispettivamente del mese di febbraio ( $\gamma = 5$ ) e agosto ( $\gamma = 11$ ). Inoltre, all'aumentare della lunghezza considerata, cioè della profondità massima del terreno, le variazioni di  $T_g$  assumono valori sempre più prossimi allo zero. Tale comportamento indica che all'aumentare della distanza

dalla superficie del terreno, le variazioni di temperatura del terreno rispetto a quella di riferimento, dovute alle oscillazioni stagionali di temperatura superficiale, si smorzano sempre più. Tali variazioni si possono assumere trascurabili per lunghezze di 75m-100m; al contrario, per lunghezze comprese tra i 5m e i 15m, si assiste a una diminuzione di temperatura del terreno, rispetto alla temperatura indisturbata, compresa tra i 2.17°C e i 5.67°C nel mese di febbraio, e a un aumento da 1.27°C fino a 4.71°C, nel mese di agosto.

L [m]	$\theta_{tot}$ [°C]	
	febbraio	agosto
5	-5.67	4.71
10	-3.24	2.12
15	-2.17	1.27
20	-1.63	0.93
30	-1.09	0.62
45	-0.72	0.41
60	-0.54	0.31
75	-0.43	0.25
100	-0.32	0.19

**Tabella 12:** valori di  $\theta_{tot}$  nel picco di minimo (febbraio) e di massimo (agosto), per ogni lunghezza considerata.

Concludendo, si può affermando che sonde geotermiche molto corte sono soggette ad importanti effetti delle variazioni stagionali di temperatura superficiale del terreno e che tali effetti si smorzano sempre più all'aumentare della lunghezza della sonda, fino a poter essere considerati trascurabili per le lunghezze più frequentemente utilizzate, prossime a 100 m.

### 5.3 Effetto delle variazioni stagionali della temperatura superficiale del terreno sulle prestazioni di sonde geotermiche corte

Dopo aver determinato le variazioni della temperatura del terreno indisturbato causate dalle oscillazioni medie mensili della temperatura superficiale del terreno, si è proceduto con la valutazione degli effetti che queste potrebbero avere sulle prestazioni di sonde geotermiche corte. Si è potuto osservare nel paragrafo precedente che queste oscillazioni potrebbero avere effetti non trascurabili per sonde di lunghezza compresa tra i 5m e i 100m.

È bene ricordare che lo scambio termico tra la sonda e il terreno è influenzato dal valore di temperatura superficiale della sonda, all'interfaccia col terreno. Infatti, per un dato mese, vale la relazione:

$$Q = \frac{T_f - T_s}{R_b}$$

dove:

- $Q$  è il carico termico in  $[W/m]$  del mese considerato;
- $R_b$  è la resistenza interna della sonda in  $[mK/W]$ ;
- $T_s$  è la temperatura superficiale della sonda all'interfaccia col terreno, in  $[K]$ ;
- $T_f$  è la temperatura media del fluido che scorre all'interno dei tubi che alimentano la pompa di calore, in  $[K]$ .

Ne consegue che, per carico termico fissato, una variazione di temperatura della superficie della sonda geotermica genera una variazione di temperatura del fluido termovettore, da cui dipendono le prestazioni del sistema geotermico a bassa entalpia. Per riuscire a garantire valori di efficienza sufficientemente elevati, infatti, è bene che la temperatura del fluido di alimentazione della pompa di calore rimanga entro i limiti di progetto. Questo richiede che la temperatura si mantenga al di sopra di un valore minimo invernale e al di sotto di un valore massimo estivo.

Si è supposto allora di procedere con lo studio di tali effetti prendendo a riferimento la temperatura superficiale della sonda, mediata sulla lunghezza, e andando ad osservare come questa potesse variare sotto l'influenza delle variazioni stagionali di temperatura.

Si ricorda che le *g-function*, calcolate precedentemente, descrivono l'andamento, nel tempo, della temperatura adimensionale, mediata sulla lunghezza della sonda, dovuta al carico termico

adimensionale  $H(\tau^*)$ . Inoltre, determinando i coefficienti mensili  $A_i$  è possibile calcolare la variazione della temperatura adimensionale, mediata sulla lunghezza, per una sonda soggetta a un carico termico con scalini mensili, secondo la relazione:

$$\bar{T}^*(r^*, \tau^*) = \sum_{i=0}^{n-1} A_i [g(r^*, \tau^* - i\tau_1^*) - g(r^*, \tau^* - (i+1)\tau_1^*)] \quad (9)$$

Nel processo di adimensionalizzazione attuato per il calcolo delle *g-function*, la temperatura adimensionale è stata definita come:

$$T^* = k_g \frac{T - T_g}{Q_0}$$

ne consegue che vale la relazione:

$$T - T_g = \frac{Q_0 T^*}{k_g}$$

dove  $T$  rappresenta la temperatura superficiale della sonda, all'interfaccia col terreno.

In definitiva si può scrivere che:

$$(T - T_g)(\tau^*) = \frac{Q_0 \bar{T}^*(0.5, \tau^*)}{k_g} = \frac{Q_0}{k_g} \sum_{i=0}^{n-1} A_i [g(0.5, \tau^* - i\tau_1^*) - g(0.5, \tau^* - (i+1)\tau_1^*)] \quad (10)$$

La (10) consente allora di determinare le variazioni di temperatura superficiale della sonda, rispetto alla temperatura del terreno indisturbato, prodotte da un carico termico lineare a scalini mensili.

In questo caso di studio si è scelto di valutare, a titolo di esempio, le prestazioni nel tempo per sonde geometriche verticali corte, di lunghezze comprese fra 5m e 100m, poste nella località di Bologna e sottoposte a un carico termico per unità di lunghezza massimo con modulo  $Q_0 = 20 \text{ W/m}$ . Nello specifico, sono state analizzate sonde di lunghezza  $L[m] = 15, 20, 45, 60, 75$  e per ognuna di esse è stato studiato il comportamento termico, in un periodo di 50 anni, al variare del

diametro. In generale, per ogni lunghezza e diametro considerati corrisponde una determinata  $L^*$ , non sempre compresa tra i valori di lunghezza adimensionale utilizzati in precedenza per il calcolo delle  $g$ -function. Per tale motivo, in alcuni casi, è stato necessario ricorrere ad un' interpolazione lineare per determinare le relative funzioni  $g(0.5, \tau^*)$ . Si è assunto di considerare i medesimi valori dei coefficienti  $A_i$  [Tabella13], utilizzati in precedenza, una durata  $\tau = 730h = 2.628 \times 10^6 s$  per ciascun mese e per il suolo un valore di diffusività termica  $\alpha_g = 0.856 \times 10^{-6} m^2/s$  e di conducibilità termica  $k_g = 1.8 W/(mK)$ .

Ott	-0.0599	$A_0$
Nov	-0.442	$A_1$
Dic	-0.665	$A_2$
Gen	-0.75	$A_3$
Feb	-0.544	$A_4$
Mar	-0.281	$A_5$
Apr	-0.0654	$A_6$
Mag	0.138	$A_7$
Giu	0.281	$A_8$
Lug	0.521	$A_9$
Ago	0.399	$A_{10}$
Set	0.126	$A_{11}$

**Tabella 13:** tabella dei coefficienti  $A_i$  per ogni mese dell'anno, in riferimento alla città di Bologna.

Tramite Wolfram MATHEMATICA è stato valutato l'andamento nel tempo della funzione:

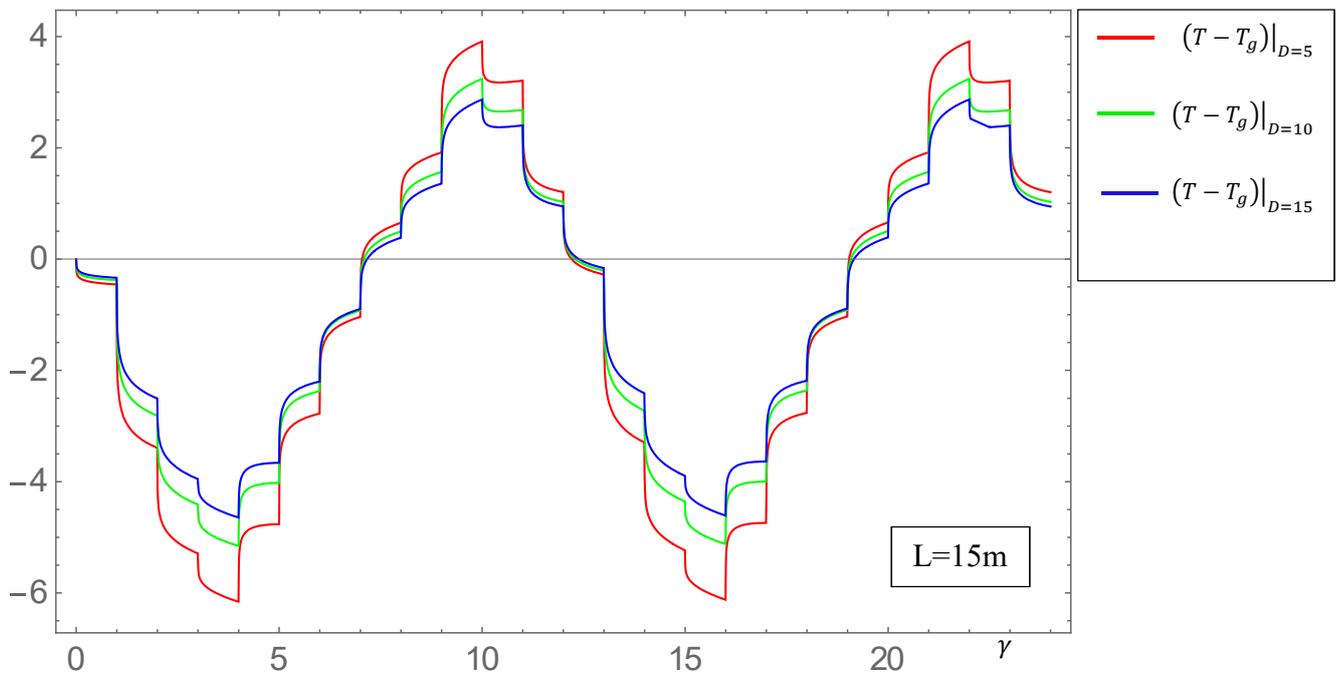
$$(T - T_g)(\tau^*) = \frac{Q_0}{k_g} \sum_{i=0}^{599} A_i [g(0.5, \tau^* - i\tau_1^*) - g(0.5, \tau^* - (i+1)\tau_1^*)] \quad (11)$$

dove  $\tau_1^*$  è la durata adimensionale del mese.

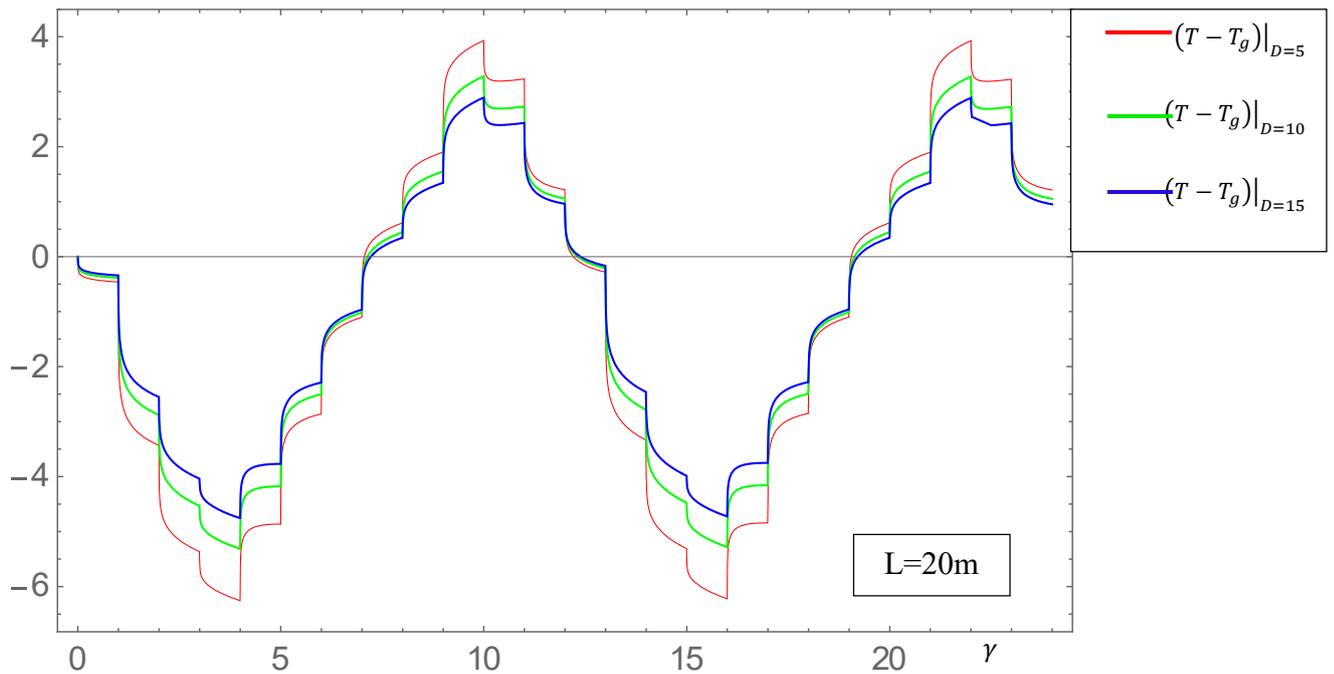
Poiché ad ogni diametro corrispondono diversi valori di  $\tau^*$  in corrispondenza dello stesso istante, e quindi diversi valori di  $\tau_1^*$ , per poter confrontare l'evoluzione nel tempo di  $(T - T_g)(\tau^*)$ , al variare del diametro, è stato necessario ricorrere all'introduzione della variabile  $\gamma = \tau^*/\tau_1^*$  (numero di

mesi). In tal modo è stato possibile riportare i grafici in funzione del numero di mesi ( $\gamma$ ) e non più del tempo adimensionale  $\tau^*$ .

L'andamento nel tempo della variazione di temperatura superficiale per le sonde di lunghezza  $L = 15\text{m}$  e  $L = 20\text{m}$ , al variare del diametro  $D[\text{cm}] = 5, 10, 15$ , per un periodo di due anni è illustrato nella figure seguenti (Fig.63 e Fig.64). Queste figure illustrano gli effetti di un carico termico lineare medio mensile con modulo massimo  $Q_0 = 20 \text{ W/m}$  e le ampiezze  $A_i$  date dalla Tabella 13.



**Figura 63:** confronto, per una sonda lunga  $L=15\text{m}$ , della variazione della temperatura superficiale rispetto alla temperatura di riferimento  $T_g$ , al variare del diametro  $D$ , per effetto del carico termico.

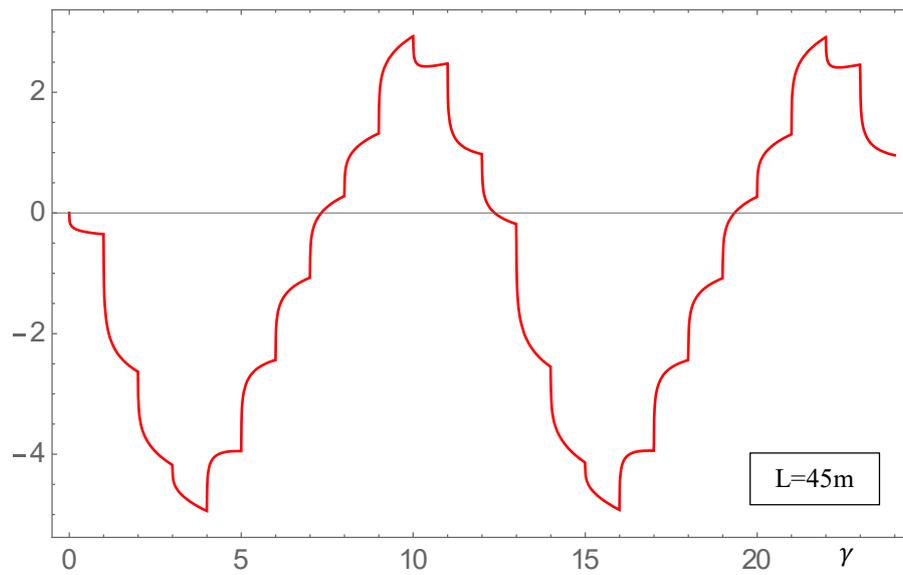


**Figura 64:** confronto, per una sonda lunga  $L=20\text{m}$ , della variazione della temperatura superficiale rispetto alla temperatura di riferimento  $T_g$ , al variare del diametro  $D$ , per effetto del carico termico.

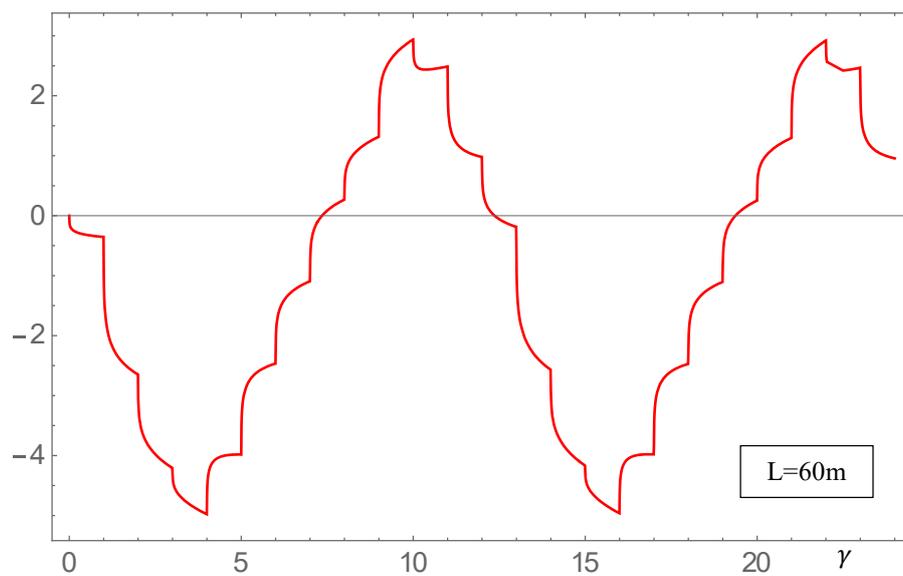
Si osserva che, a parità di carico termico per unità di lunghezza e di caratteristiche del terreno, per ogni lunghezza, al diminuire del diametro la temperatura superficiale della sonda risente di maggiori oscillazioni rispetto al valore di temperatura di riferimento  $T_g$ . Facendo riferimento alla sonda di 15m di lunghezza, si nota che per un diametro di 5 cm nel mese di gennaio ( $\gamma = 4, \tau^* = 3600$ ) si registra uno scostamento di  $-6.16^\circ\text{C}$ , rispetto alla temperatura del terreno indisturbato, e di  $+3.9^\circ\text{C}$  nel mese di luglio ( $\gamma = 10, \tau^* = 9000$ ). Mentre per un diametro di 15cm si ha uno scostamento di  $-4.64^\circ\text{C}$  a gennaio e di  $+2.87^\circ\text{C}$  a luglio.

Una sonda con un diametro pari a 5 cm consentirebbe di rendere la realizzazione più economica. Bisogna tenere conto, però, che al tempo stesso si avrebbero maggiori differenze tra la temperatura media del fluido termovettore e la temperatura del terreno indisturbato, e quindi minori efficienze delle pompe di calore.

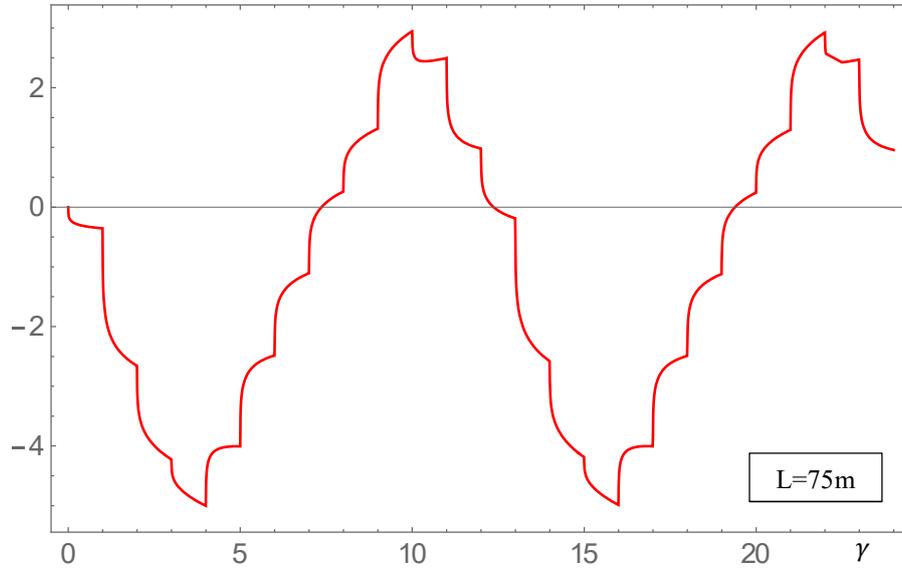
Per le sonde di lunghezza  $L$  [m]=45, 60, 75, lo studio è stato effettuato per il solo diametro pari a 15cm, in quanto diametri inferiori risultano essere raramente utilizzati per tali lunghezze.



**Figura 65:** variazione della temperatura superficiale di una sonda lunga  $L=45\text{m}$  e con diametro  $D=15\text{cm}$ , rispetto alla temperatura di riferimento  $T_g$ , per effetto del carico termico.



**Figura 66:** variazione della temperatura superficiale di una sonda lunga  $L=60\text{m}$  e con diametro  $D=15\text{cm}$ , rispetto alla temperatura di riferimento  $T_g$ , per effetto del carico termico.



**Figura 67:** variazione della temperatura superficiale di una sonda lunga  $L=75\text{m}$  e con diametro  $D=15\text{cm}$ , rispetto alla temperatura di riferimento  $T_g$ , per effetto del carico termico.

Per queste lunghezze, si può affermare che le curve che mostrano l'andamento nel tempo della differenza di temperatura superficiale della sonda rispetto a  $T_g$  sono simili l'una dall'altra. Questo comportamento è in accordo con quanto esposto nel Paragrafo 4.1. Infatti, a parità di diametro, all'aumentare della lunghezza  $L$ , aumenta anche il parametro  $L^*$  cui corrisponde una determinata *g-function*. Tuttavia, si è già osservato che le *g-function* all'interfaccia tra la sonda e il terreno ( $r^* = 0.5$ ), per uno steso valore di  $\tau^*$  differiscono di poco al variare di  $L^*$ .

A questo punto, è interessante esaminare come le variazioni stagionali di temperatura esterna possano influenzare le prestazioni delle sonde appena considerate.

Sommando la (8) con la (11) si ottiene:

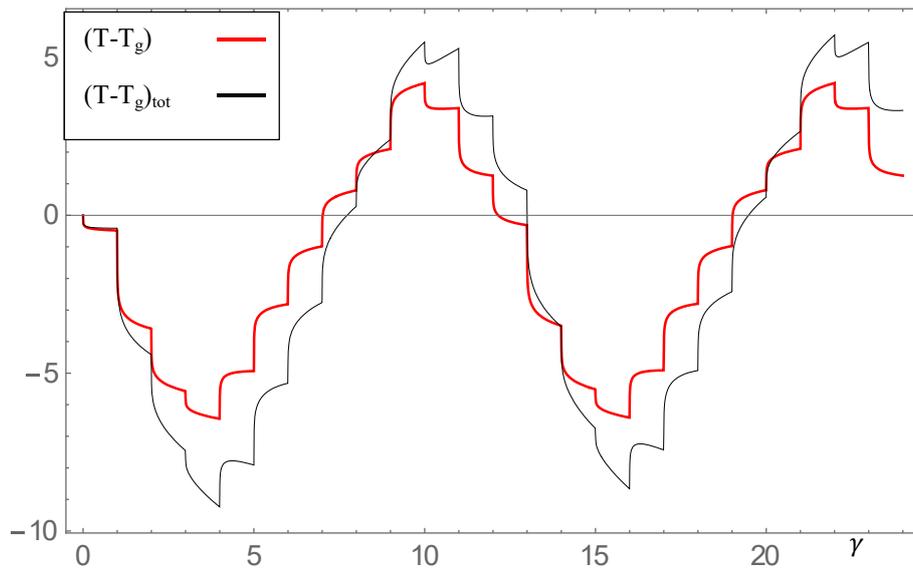
$$(T - T_g)_{tot}(\tau^*) = \frac{Q_0}{k_g} \sum_{i=0}^{599} A_i [g(0.5, \tau^* - i\tau_1^*) - g(0.5, \tau^* - (i+1)\tau_1^*)] + \sum_{i=0}^{599} B_i [\theta_m^*(\tau^* - i\tau_1^*) - \theta_m^*(\tau^* - (i+1)\tau_1^*)] \quad (12)$$

Questa relazione consente di poter valutare la variazione della temperatura superficiale della sonda, all'interfaccia col terreno, tenendo conto anche delle fluttuazioni stagionali della temperatura di riferimento, oltre che del carico termico mensile.

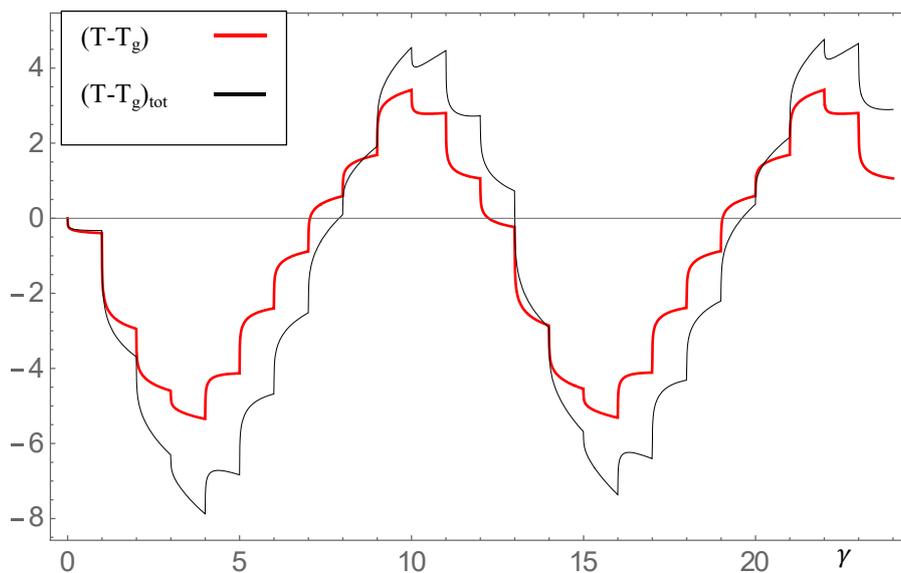
Tale valutazione è stata condotta facendo riferimento alle lunghezze precedentemente esaminate ( $L[m] = 15, 20, 45, 60, 75$ ), sotto l'ipotesi di considerare i medesimi valori per  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $Q_0$  e  $k_g$ .

Di seguito vengono riportati diagrammi dei valori ottenuti di  $(T - T_g)_{tot}$ , per ogni lunghezza considerata, per un periodo di due anni, e il confronto di questi diagrammi con quelli di variazione della temperatura superficiale  $(T - T_g)$  che si hanno trascurando gli effetti della variazione mensile di temperatura superficiale del terreno:

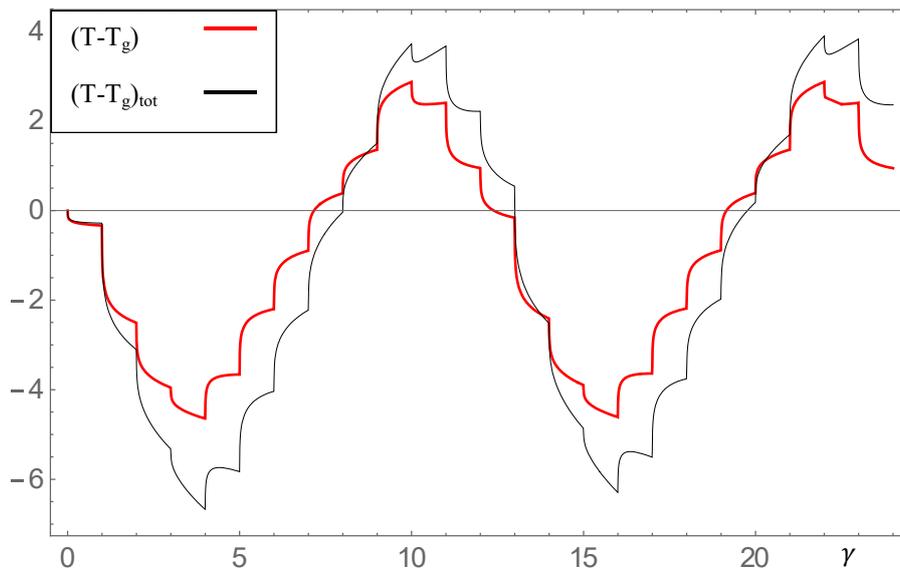
- $L = 15 \text{ m}$



**Figura 68:** confronto tra la variazione di temperatura  $(T - T_g)$  e  $(T - T_g)_{tot}$ , per  $L=15\text{m}$  e  $D=5\text{cm}$ , in un periodo di 2 anni.



**Figura 69:** confronto tra la variazione di temperatura  $(T - T_g)$  e  $(T - T_g)_{tot}$ , per  $L=15\text{m}$  e  $D=10\text{cm}$ , in un periodo di 2 anni.

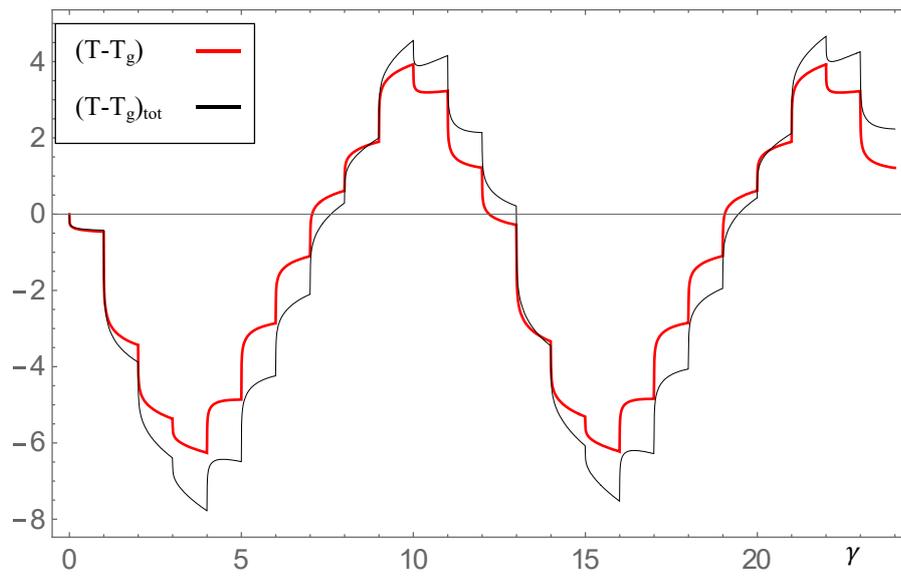


**Figura 70:** confronto tra la variazione di temperatura  $(T - T_g)$  e  $(T - T_g)_{tot}$ , per  $L=15\text{m}$  e  $D=15\text{cm}$ , in un periodo di 2 anni.

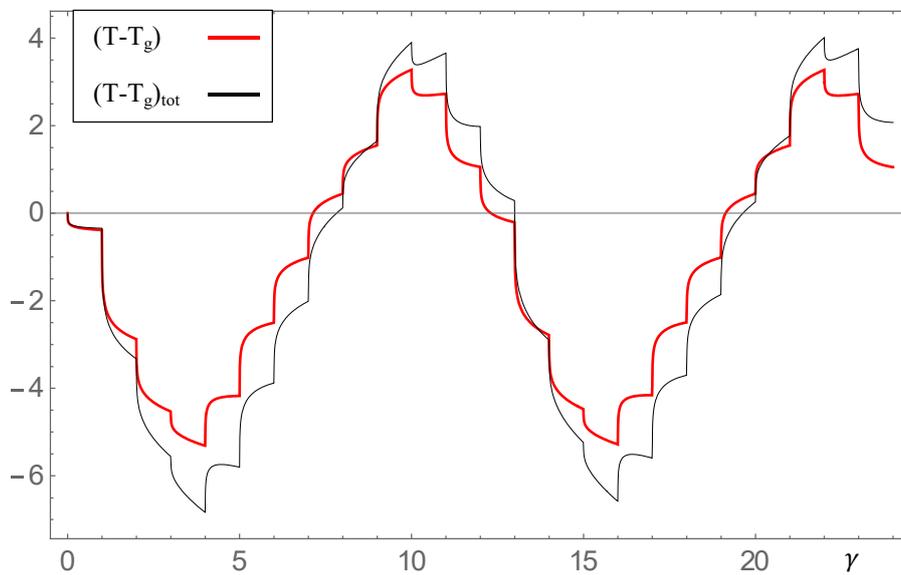
Si nota che minore è il diametro e maggiori sono gli scostamenti della temperatura della sonda all'interfaccia col terreno rispetto alla temperatura di riferimento  $T_g$ . Tale comportamento rispecchia quanto osservato in precedenza nello studio relativo alla variazione di temperatura superficiale della sonda sottoposta all'influenza del solo carico medio mensile: a parità di carico termico, la sonda con diametro minore subisce una variazione di temperatura superficiale maggiore.

Si ricorda, infatti, che per una sonda geotermica di 15 m, con un diametro di 5 cm, sottoposta al solo carico termico, nel mese di gennaio ( $\gamma = 4$ ), si registra sulla superficie una differenza di temperatura pari a  $-6.16^\circ\text{C}$  rispetto alla temperatura del terreno indisturbato. Considerando anche gli effetti delle variazioni di temperatura della superficie del terreno, la differenza di temperatura diventa  $-8.19^\circ\text{C}$ . Per una sonda di pari lunghezza, ma con un diametro di 15 cm, tale differenza passa da un valore di  $-4.64^\circ\text{C}$  a  $-6.68^\circ\text{C}$ .

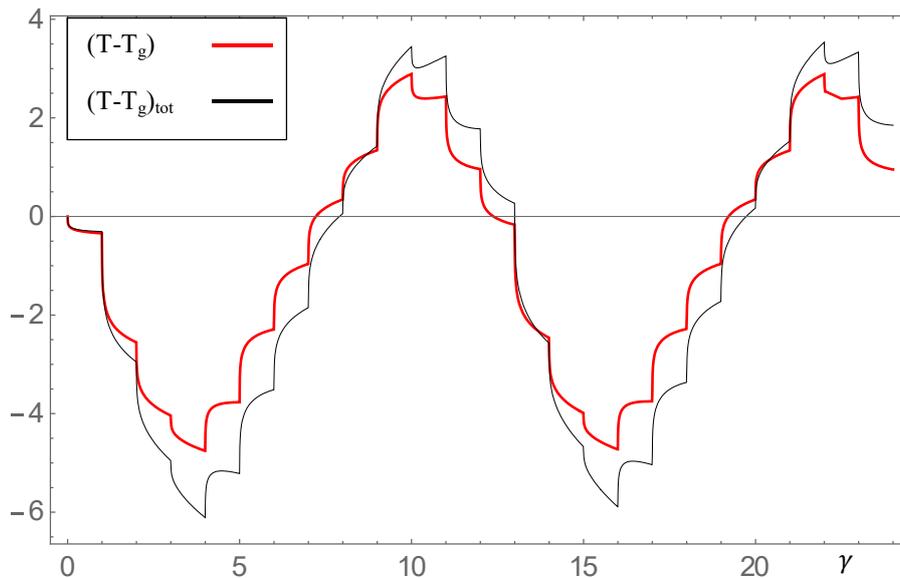
- $L = 20 \text{ m}$



**Figura 71:** confronto tra la variazione di temperatura  $(T - T_g)$  e  $(T - T_g)_{tot}$ , per  $L=20\text{m}$  e  $D=5\text{cm}$ , in un periodo di 2 anni.



**Figura 72:** confronto tra la variazione di temperatura  $(T - T_g)$  e  $(T - T_g)_{tot}$ , per  $L=20\text{m}$  e  $D=10\text{cm}$ , in un periodo di 2 anni.



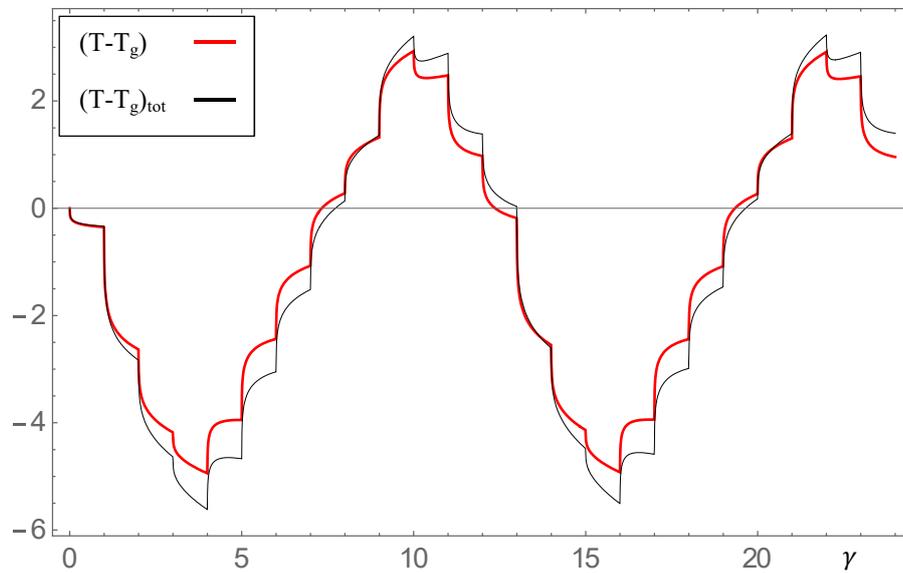
**Figura 73:** confronto tra la variazione di temperatura  $(T - T_g)$  e  $(T - T_g)_{tot}$ , per  $L=20\text{m}$  e  $D=15\text{cm}$ , in un periodo di 2 anni.

Anche per una sonda di lunghezza 20 m si osserva che la differenza tra la temperatura sulla sua superficie e quella di riferimento del terreno aumenta col diminuire del diametro, in accordo con quanto visto per la sonda di 15 m. In entrambi i casi lo studio è stato condotto prendendo in considerazione valori di diametro pari a 5 cm, 10 cm e 15 cm.

Per la sonda di lunghezza  $L=15\text{ m}$  sono state utilizzate le *g-function*  $g(0.5, \tau^*)$  relative a  $L^* = 300, 150, 100$ , mentre per la sonda con  $L=20\text{ m}$  quelle corrispondenti a  $L^* = 400, 200, 133$ . Si ricorda, però, che le *g-function* all'interfaccia tra la sonda e il terreno ( $r^* = 0.5$ ), a parità di diametro e quindi di  $\tau^*$ , differiscono di poco al variare di  $L^*$ ; proprio per questo i profili di temperatura dovuti al solo carico termico, per fissato diametro, sono simili tra loro. Infatti, per un diametro di 15 cm, nel mese di gennaio ( $\gamma = 4$ ) per una sonda di 15 m si registra un valore di  $-4.64^\circ\text{C}$ , mentre per la sonda di 20 m un valore di  $-4.76^\circ\text{C}$ . A fare la differenza fra le due sonde è l'effetto delle variazioni stagionali di temperatura alle varie profondità del terreno. Tali variazioni si smorzano all'aumentare della profondità. Per la sonda di 15 m si hanno differenze di temperatura ( $\theta_{tot}$ ) che vanno da  $-2.17^\circ\text{C}$  a  $+1.27^\circ\text{C}$ ; per la sonda di 20 m queste differenze vanno da  $-1.63^\circ\text{C}$  a  $+0.93^\circ\text{C}$ .

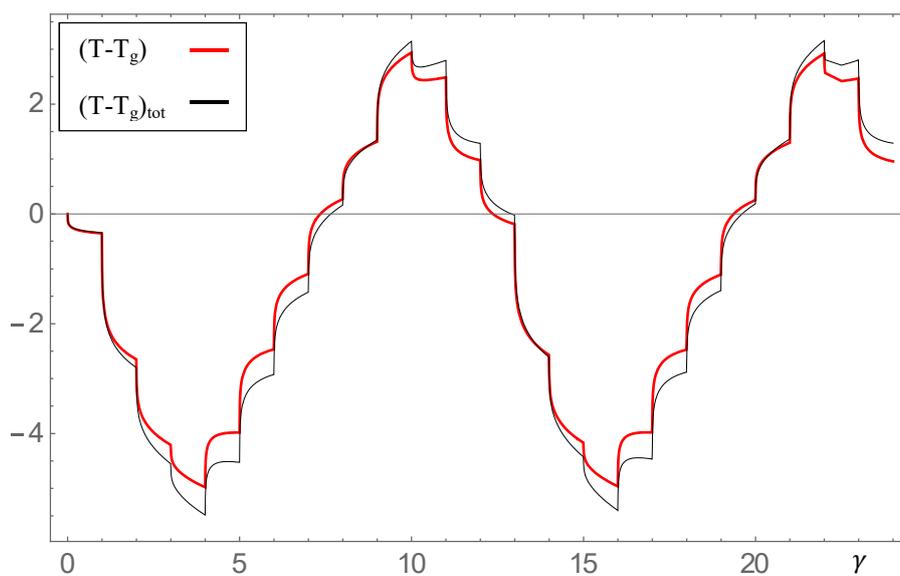
Nelle Figure 74, 75 e 76 sono riportati i diagrammi di  $(T - T_g)$  e di  $(T - T_g)_{tot}$  per sonde lunghe 45, 60 e 75 m rispettivamente.

- $L = 45 \text{ m}$



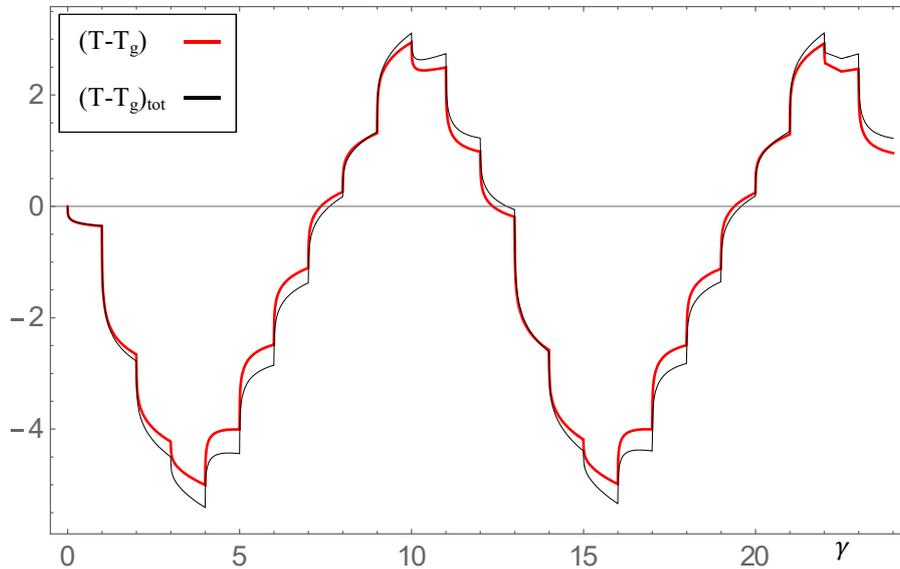
**Figura 74:** confronto tra la variazione di temperatura  $(T - T_g)$  e  $(T - T_g)_{tot}$ , per  $L=45\text{m}$  e  $D=15\text{cm}$ , in un periodo di 2 anni.

- $L = 60 \text{ m}$



**Figura 75:** confronto tra la variazione di temperatura  $(T - T_g)$  e  $(T - T_g)_{tot}$ , per  $L=60\text{m}$  e  $D=15\text{cm}$ , in un periodo di 2 anni.

- $L = 75 \text{ m}$



**Figura 76:** confronto tra la variazione di temperatura  $(T - T_g)$  e  $(T - T_g)_{tot}$ , per  $L=75\text{m}$  e  $D=15\text{cm}$ , in un periodo di 2 anni.

Dai grafici sopra riportati si osserva che, in accordo con quanto osservato precedentemente, per le sonde di lunghezza  $L[m] = 45, 60, 75$  gli effetti delle variazioni stagionali di temperatura sono sempre meno influenti sulle loro prestazioni. Infatti il profilo della variazione di temperatura  $(T - T_g)_{tot}$ , all'aumentare della lunghezza, presenta uno scostamento sempre minore rispetto al profilo  $(T - T_g)$ , dovuto al solo carico termico. Ad esempio, nel mese di gennaio ( $\gamma = 4$ ), le oscillazioni stagionali, causano un'ulteriore diminuzione della temperatura superficiale della sonda di  $0.68^\circ\text{C}$  per  $L=45 \text{ m}$ , di  $0.51^\circ\text{C}$  per  $L=60 \text{ m}$  e di  $0.41^\circ\text{C}$  per  $L=75 \text{ m}$ . Tale comportamento conferma quanto osservato in precedenza: gli effetti della variazione di temperatura superficiale, all'aumentare della profondità  $L$ , si smorzano sempre più fino a poter essere considerate trascurabili.

Infine, si è ritenuto rilevante analizzare la percentuale di variazione di temperatura superficiale dovuta alle fluttuazioni della temperatura superficiale rispetto alla variazione dovuta al carico termico, per sonde aventi la stessa lunghezza ma diverso diametro. Si è scelto di prendere come riferimento temporale la fine del mese di gennaio del secondo anno ( $\gamma = 16$ ). Nelle Tabelle 14 e 15 sono riportati i risultati per le sonde di  $15 \text{ m}$  e di  $20 \text{ m}$ , al variare del diametro:

<b>L=15m</b>			
<b>D [cm]</b>	<b>T-T<sub>g</sub> [°C]</b>	<b>θ<sub>tot</sub> [°C]</b>	<b>θ<sub>tot</sub>/(T-T<sub>g</sub>) [%]</b>
0.05	-6.12	-1.69	27.5
0.1	-5.12	-1.69	32.9
0.15	-4.61	-1.69	36.6

**Tabella 14:** percentuale dello scostamento da  $T_g$  dovuta alle fluttuazioni di temperatura superficiale del terreno, al secondo anno, nel mese di gennaio, per la sonda L= 15m e per i diversi diametri D= 5cm, 10cm, 15cm.

<b>L=20m</b>			
<b>D [cm]</b>	<b>T-T<sub>g</sub> [°C]</b>	<b>θ<sub>tot</sub> [°C]</b>	<b>θ<sub>tot</sub>/(T-T<sub>g</sub>) [%]</b>
0.05	-6.22	-1.30	20.9
0.1	-5.28	-1.30	24.7
0.15	-4.73	-1.30	27.6

**Tabella 15:** percentuale dello scostamento da  $T_g$  dovuta alle fluttuazioni di temperatura superficiale del terreno, al secondo anno, nel mese di gennaio, per la sonda L= 20 m e per i diversi diametri D= 5cm, 10cm, 15cm.

Si ricorda che le variazioni della temperatura del terreno ( $\theta_{tot}$ ), causate dalle oscillazioni mensili di temperatura dell'aria esterna, sono maggiori al diminuire della distanza dalla superficie del terreno, ma non dipendono dal diametro della sonda.

Nonostante questo però, si osserva dai dati sopra riportati, che all'aumentare del diametro, a parità di lunghezza, la sonda risente maggiormente dell'influenza di tali variazioni. Ad esempio, per una sonda di 15 m, a 16 mesi dalla messa in funzione, nel mese di gennaio si riscontra un decremento di temperatura del 36.56% rispetto al valore di temperatura superficiale ottenuto considerando trascurabili gli effetti della variazioni di temperatura superficiale del terreno. Mentre per un diametro di 5cm si ha un decremento del 27.53%. Analogamente, per la sonda di 20 m, si registra un decremento del 27.56% per un diametro di 15cm contro un decremento del 20.93% per un diametro di 5cm.

## 6 CONCLUSIONI

È stato dato un contributo al metodo delle *g-function* per la determinazione dell'evoluzione nel tempo del campo di temperatura nel terreno prodotto da campi di sonde geotermiche verticali, in assenza del moto dell'acqua di falda. Il contributo è costituito dalla estensione dei risultati riportati nel lavoro: E. Zanchini, S. Lazzari, Temperature distribution in a field of long Borehole Heat Exchangers (BHEs) subjected to a monthly averaged heat flux. *Energy* 59, 570-580, 2013.

La lunghezza  $L$  della sonda e la distanza radiale  $r$  dall'asse della sonda sono state adimensionalizzate rispetto al diametro  $D$  della sonda, adottando le notazioni  $L^* = L/D$  ed  $r^* = r/D$ . Mediante simulazioni numeriche attraverso COMSOL Multiphysics sono stati determinati valori numerici molto precisi delle *g-function* per  $L^* = 500, 400, 300, 200, 100$  e per  $r^* = 0.5, 30, 40, 60, 80, 120, 170, 230, 300, 400$ . Mediante interpolazioni polinomiali eseguite con in software Wolfram MATHEMATICA, le *g-function* sono state espresse come funzioni polinomiali del logaritmo del tempo adimensionale. Espressioni analitiche precise per sonde corte, cioè per  $L^*$  minore di 500, non erano disponibili. Inoltre, a differenza di quelle determinate da Zanchini e Lazzari (*Energy* 59, 2013), le nuove espressioni analitiche sono fra loro sommabili.

È stato poi analizzato l'effetto della variazione della temperatura superficiale del terreno sulla temperatura media all'interfaccia sonde-terreno, utilizzando una soluzione analitica del campo di temperatura prodotto da una variazione a scalino della temperatura superficiale e applicando il principio di sovrapposizione degli effetti nel tempo.

I risultati hanno mostrato che, in riferimento al clima di Bologna, gli effetti sono rilevanti su sonde di lunghezza compresa tra i 5 m e i 20 m di profondità, mentre possono essere considerati trascurabili per quelle che si sviluppano fino a una profondità superiore ai 45m, ovvero per le sonde abitualmente utilizzate. Si è inoltre evidenziato che, a parità di lunghezza delle sonde, le variazioni di temperatura registrate all'interfaccia tra sonde e terreno causate dalle fluttuazioni mensili di temperatura dell'aria esterna sono maggiormente rilevanti, in termini percentuali, per le sonde con i diametri maggiori.

## 7 Bibliografia

- [1] S. Basta, F. Minchio, *Geotermia e pompe di calore*, Verona: S. Basta, 2007.
- [2] E. Zanchini, S. Lazzari, Temperature distribution in a field of long Borehole Heat Exchangers (BHEs) subjected to a monthly averaged heat flux. *Energy*, 59, pp. 570-580, 2013.
- [3] J. Claesson, P. Eskilson, Conductive heat extraction by a deep borehole, analytical studies. Tech. rep.. Sweden: Lund University; 1987.
- [4] L. Lamarche, B. Beauchamp, A new contribution to the finite line-source model for geothermal boreholes. *Energy and Buildings* 39, 188-198, 2007.
- [5] T.V. Bandos, A. Montero, E. Fernandez, J.L.G. Santander, J.M. Isidro, J. Perez, P.J. Fernandez de Cordoba, J.F. Urchueguía, Finite line-source model for borehole heat exchangers: effect of vertical temperature variations. *Geothermics* 38, 263-270, 2009.
- [6] M. Fossa, The temperature penalty approach to the design of borehole heat exchangers for heat pump applications. *Energy and Buildings* 43, 1473-1479, 2011.
- [7] M. Fossa, A fast method for evaluating the performance of complex arrangements of borehole heat exchangers. *HVAC&R Research* 17(6), 948-958, 2011.
- [8] H. S. Carslaw, J. C. Jaeger, *Conduction of heat in solids*, Clarendon Press, 1986, pp. 58-59.