

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

**Studio della funzione di massa degli aloni di  
materia oscura utilizzando la libreria C++  
CosmoBolognaLib**

**Relatore:**

**Prof. Lauro Moscardini**

**Presentata da:**

**Jacopo Neri**

**Correlatori:**

**Dott. Federico Marulli**

**Dott. Alfonso Veropalumbo**

Anno Accademico 2016/2017



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Basi di cosmologia</b>	<b>7</b>
2.1	Breve introduzione alla relatività generale . . . . .	7
2.1.1	Evidenze sperimentali . . . . .	8
2.2	Cosmologia . . . . .	9
2.2.1	Metrica FLRW . . . . .	10
2.2.2	Modelli di Friedmann . . . . .	11
2.2.3	Materia oscura . . . . .	12
2.2.4	Energia oscura e modello $\Lambda$ CDM . . . . .	14
2.3	Formazione delle strutture su grande scala . . . . .	16
2.3.1	Condizioni iniziali e ammassi di galassie . . . . .	16
2.3.2	Teoria lineare e lunghezza d'onda di Jeans . . . . .	17
2.3.3	Teoria non lineare e simulazioni N-body . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Funzione di massa e codici per il suo calcolo</b>	<b>19</b>
3.1	Funzione di massa . . . . .	19
3.1.1	Modello PS . . . . .	20
3.1.2	Modelli successivi a PS . . . . .	21
3.2	Calcolo della funzione di massa . . . . .	21
3.2.1	CosmobolognaLib . . . . .	22
3.2.2	Calcolo della funzione di massa . . . . .	22
3.2.3	HMFcalc . . . . .	24
3.3	Confronto tra CBL e HMFcalc . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Euclid Cluster Challenge</b>	<b>29</b>
4.1	Introduzione alla missione Euclid . . . . .	29
4.2	Scopo e strumenti . . . . .	30
4.2.1	Simulazione e catalogo di aloni . . . . .	30
4.2.2	Codice e cluster di calcolo Blade Runner . . . . .	31
4.3	Risultati . . . . .	33

4.3.1	Stima dei parametri cosmologici . . . . .	33
4.3.2	Confronto tra le varie funzioni di massa . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>39</b>
<b>Appendice A</b>	<b>Tabella funzioni di massa</b>	<b>41</b>
<b>Appendice B</b>	<b>Codice per il calcolo della funzione di massa</b>	<b>44</b>
<b>Bibliografia</b>		<b>47</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

Nella fisica moderna, ed in particolare in cosmologia, uno dei maggiori problemi ancora aperti è rappresentato dalla materia e dall'energia oscura (sez. 2.2.3, 2.2.4). Modelli teorici e misurazioni stimano che attualmente più del 95% del nostro Universo è composto da queste componenti oscure che non sappiamo caratterizzare.

Per risolvere questo problema ci sono esperimenti in corso e in allestimento con lo scopo di raccogliere dati dall'Universo che verranno confrontati con opportuni modelli teorici con lo scopo di fornire una descrizione precisa della natura di materia ed energia oscura, della loro distribuzione e della percentuale di energia totale dell'Universo che occupano. Un esperimento in allestimento che cercherà di risolvere questi problemi verrà effettuato dalla sonda Euclid (sez. 4.1), che verrà lanciata nel 2021.

I dati raccolti dagli esperimenti, come detto, sono confrontati con i modelli teorici per estrarre vincoli sui parametri relativi a materia ed energia oscura. In tal senso un modello teorico di grande importanza è rappresentato dalla funzione di massa (sez. 3.1). Tramite la funzione di massa si può studiare la formazione delle strutture su grande scala dell'Universo che è dominata dalla gravità, e dunque dagli effetti di materia ed energia oscura. Nello specifico la funzione di massa è definita come la densità comovente di strutture con una certa massa  $M$  in un volume  $V$ , dove per strutture si intende aloni virializzati di materia oscura.

Esistono varie formulazioni teoriche della funzione di massa (sez. 3.1.1, 3.1.2). L'importanza della funzione di massa è data dal fatto che è possibile estrarre da essa i parametri cosmologici attraverso un'analisi statistica (sez. 4.3.1). Prima di iniziare l'analisi dei dati degli esperimenti è tuttavia essenziale stabilire il livello di affidabilità delle varie formulazioni della funzione di massa presenti in letteratura. Non potendo effettuare esperimenti sull'Universo, la comunità scientifica si avvale di simulazioni numeriche i cui parametri cosmologici sono noti. Analizzando queste simulazioni si può stabilire l'affidabilità del modello di funzione di massa in base alla precisione con la quale è possibile vincolare i parametri cosmologici noti della simulazione.

Gli scopi di questo lavoro di tesi sono i seguenti:

- Contestualizzare la funzione di massa in un modello cosmologico con materia ed energia oscura (cap. 2).
- Implementare diversi modelli di funzioni di massa all'interno della libreria C++ CosmoBolognaLib [24] [31]. Associare un errore alle varie funzioni di massa dopo averle confrontate con quelle calcolate dalla libreria python HMF [27] [32] (cap. 3).
- Confrontare le diverse funzioni di massa con i risultati di una simulazione N-body, estraendo una stima dei parametri cosmologici noti della simulazione per stabilire quale funzione di massa teorica riproduce più fedelmente la funzione di massa della simulazione (cap. 4).

# Capitolo 2

## Basi di cosmologia

### 2.1 Breve introduzione alla relatività generale

La cosmologia moderna nasce nel 1915 dopo la formulazione della relatività generale ad opera di Albert Einstein. Uno dei risultati più importanti del fisico tedesco fu l'equazione del campo gravitazionale che, in unità naturali ( $c = 1$ ), assume la forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu} . \quad (2.1)$$

La parte sinistra dell'equazione rappresenta il tensore di Einstein  $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ , un tensore (0,2) simmetrico, con divergenza nulla (grazie all'identità di Bianchi) e quindi dotato di 6 componenti indipendenti. Il tensore di Einstein è composto dal tensore di Ricci  $R_{\mu\nu}$ , dalla curvatura scalare,  $R$ , e dal tensore metrico,  $g_{\mu\nu}$ . Entrambe queste componenti sono costruite a partire dal tensore di Riemann che descrive la curvatura intrinseca di una varietà differenziale. La parte destra dell'equazione (2.1) corrisponde al tensore energia-impulso  $T_{\mu\nu}$ , anch'esso un tensore (0,2), simmetrico e con divergenza nulla, che descrive il flusso di energia e quantità di moto nel sistema considerato. Per un fluido perfetto e massivo con quadrivelocità  $u^\mu$ , pressione  $p$  e densità  $\rho$  (entrambe misurate da un osservatore immobile rispetto al fluido) il tensore energia-impulso è dato da:

$$T_{\mu\nu} = u_\mu u_\nu (\rho + p) + pg_{\mu\nu} . \quad (2.2)$$

Quindi l'equazione di campo di Einstein mette in relazione la quantità di materia (o energia) presente all'interno di un sistema con la curvatura spazio-temporale del sistema stesso; risolvere l'equazione (2.1) significa quindi definire una metrica spazio-temporale. La soluzione più semplice dell'equazione di campo di Einstein fu proposta da Karl Schwarzschild pochi mesi

dopo la pubblicazione della relatività generale. Questa soluzione prende in esame una sorgente sferica di campo gravitazionale, con carica elettrica nulla e non rotante circondata dal vuoto. All'esterno della sorgente non vi è materia o energia e quindi si annulla il tensore energia-impulso. La soluzione completa passa attraverso la determinazione del valore della costante di integrazione ricavato utilizzando l'approssimazione Newtoniana, ovvero imponendo che sia recuperata la forma dell'equazione della gravitazione universale di Newton a grande distanza dalla sorgente. La soluzione di Schwarzschild è data da:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_H}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{R_H}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.3)$$

La soluzione rappresenta la metrica di uno spazio-tempo 4-dimensionale curvato intrinsecamente dalla sorgente del campo gravitazionale posta nell'origine. Il parametro  $R_H$  è chiamato raggio di Schwarzschild e corrisponde alla distanza tra l'orizzonte degli eventi ed il centro della sorgente: in unità naturali e per una sorgente di massa  $M$ , il raggio di Schwarzschild è pari a  $2G_N M$ , dove  $G_N$  è la costante di gravitazione universale. Notiamo che la metrica è singolare in due punti (trascurando le singolarità eliminabili date dalle coordinate angolari),  $r = R_H$  e  $r = 0$ . La prima singolarità dipende dal sistema di coordinate scelto (a curvatura finita) ed è quindi eliminabile. La seconda rappresenta invece una singolarità fisica (curvatura infinita) comune ad ogni sistema di coordinate e quindi non è possibile eliminarla. Questo è comprovato dalla formula della curvatura scalare, che risulta infinita per  $r = 0$ , data dall'invariante scalare quadratico di Kretschmann:

$$R = 48 \frac{M^2 G_N^2}{r^6}, \quad (2.4)$$

dove  $r$  è la distanza dal centro della sorgente del campo gravitazionale.

### 2.1.1 Evidenze sperimentali

Le 4 principali evidenze sperimentali a sostegno della relatività generale sono:

- Precessione del perielio di Mercurio: la teoria di Einstein riesce a rendere conto della differenza di 43" al secolo tra la precessione del perielio di Mercurio prevista dalle gravità newtoniana e quella osservata sperimentalmente.
- Deflessione della luce: deformando lo spazio, la gravità teorizzata da Einstein è anche in grado di deviare i fotoni nonostante la loro massa nulla. Nel 1919 Arthur Eddington e suoi collaboratori osservarono la deviazione della luce di una stella prodotta dal Sole durante un'eclissi solare totale effettuando la misurazione simultaneamente in Africa e in Brasile.
- Redshift gravitazionale: nel 1959 Pound e Rebka osservarono che un fascio di raggi gamma che viaggiava lungo un percorso di 72 metri dalla torre del Jefferson Physical



Laboratory di Harvard al suolo perdeva energia se viaggiava in senso contrario al campo gravitazionale. Questo esperimento confermò ancora una volta la teoria della relatività generale mettendo in luce come il campo gravitazionale sia in grado di piegare lo spazio-tempo, come previsto da Einstein (interagendo anche con i fotoni, nonostante la loro massa nulla).

- **Onde gravitazionali:** la relatività generale prevede l'esistenza delle onde gravitazionali, ovvero increspature dello spazio-tempo generate da masse accelerate. Le onde gravitazionali attualmente osservabili sono quelle prodotte da eventi che coinvolgono masse molto alte, come collisioni tra buchi neri o sistemi binari di pulsar. Il 14 Settembre 2015 LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) ha misurato per la prima volta le onde gravitazionali prodotte da due buchi neri in collisione a 1.3 miliardi di anni luce dalla Terra [25].

## 2.2 Cosmologia

Due anni dopo la formulazione della teoria della relatività generale, Albert Einstein cercò di applicare la teoria per studiare l'Universo su grande scala. Tra le 4 forze fondamentali della natura, la gravità è quella dominante su grande scala ed è quindi fondamentale per dare una descrizione precisa dell'Universo. La moderna cosmologia si basa su due principi fondamentali:

- **Principio Copernicano** secondo il quale non vi sono osservatori privilegiati nell'Universo
- **Principio Cosmologico** secondo il quale l'Universo è omogeneo e isotropo, cioè non esistono posizioni o direzioni privilegiate

L'isotropia dell'Universo su grande scala è comprovata dalle osservazioni, mentre l'omogeneità deriva dall'isotropia e dal principio Copernicano. Con il suo lavoro Einstein cercò anche di eliminare l'apparente paradosso di un Universo finito ma senza bordo. Prendendo ancora una volta spunto dalla geometria, descrisse l'Universo come una 3-sfera, uno spazio tridimensionale finito ma senza bordi. La metrica di questo spazio 4-dimensionale con coordinate  $(x, y, z, w)$  è la seguente:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2 + dw^2 . \quad (2.5)$$

L'uguaglianza è stata ottenuta sostituendo  $(x, y, z)$  con le coordinate sferiche  $(\rho, \theta, \varphi)$  e  $d\Omega^2 = \sin^2(\theta)d\theta^2 + d\varphi^2$ .

## 2.2.1 Metrica FLRW

Utilizzando la geometria proposta da Einstein nel 1917, possiamo costruire una soluzione dell'equazione (2.1) che soddisfi i due principi descritti nella sezione precedente. L'omogeneità dell'Universo implica che si possa definire un tempo  $t$  tale per cui in ogni istante tutti i parametri fisici, ad esempio pressione e densità, siano uguali in tutto l'Universo. La metrica si può quindi ridurre nella forma  $ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2$ , dove parte temporale e parte spaziale sono separate. Per ricavare il valore della parte spaziale  $dl^2$  partiamo dall'equazione (2.5) imponendo la proprietà della sfera come luogo di punti equidistanti dal centro per giungere ad una equazione tra differenziali:

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = \rho^2 + w^2 = S^2, \quad (2.6)$$

$$\rho d\rho + w dw = 0 \longrightarrow dw^2 = \frac{\rho^2 d\rho^2}{S^2 - \rho^2}. \quad (2.7)$$

Inserendo questo risultato nell'equazione (2.5) e imponendo  $\rho = rS(t)$  con  $S(t)$  funzione di scala dipendente dal tempo (non può dipendere dalle coordinate spaziali per conservare l'isotropia) otteniamo:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - S^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (2.8)$$

dove  $k$  può assumere i valori 0,+1,-1. Questa metrica è stata ricavata indipendentemente da Friedmann, Lemaitre, Robertson e Walker tra il 1922 e il 1935. Notiamo che a seconda dei valori di  $k$  si verificano 3 casi diversi:

- **Universo piatto per  $k = 0$ :** la metrica prende la forma delle usuali coordinate polari sferiche in  $R^3$ , non vi è quindi curvatura spaziale (spazio Euclideo).
- **Universo chiuso per  $k = +1$ :** la metrica assume la forma che descrive una sfera 3-dimensionale (spazio Ellittico).
- **Universo aperto per  $k = -1$ :** la metrica descrive un iperboloide 3-dimensionale (spazio Iperbolico).

La funzione di scala  $S(t)$  è strettamente collegata al concetto di redshift: immaginando una galassia G con coordinate  $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$  che emette un fotone verso l'osservatore posto nell'origine possiamo calcolare in quale istante  $t_1$  deve essere emesso il fotone per raggiungere l'osservatore al tempo presente  $t_0$ . Secondo la relatività generale il fotone si muove lungo le geodetiche di tipo luce dello spazio-tempo, per le quali vale  $ds = 0$  (dove  $ds$  è l'elemento di linea definito dalla 2.8). Otteniamo quindi:

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{S(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}; \quad (2.9)$$

supponendo che il fotone successivo venga emesso da G al tempo  $t_1 + \Delta t_1$  e venga ricevuto dall'osservatore al tempo  $t_0 + \Delta t_0$  abbiamo:

$$\int_{t_1 + \Delta t_1}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{cdt}{S(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (2.10)$$

Imponendo che  $S(t)$  rimanga invariata lungo gli intervalli  $\Delta t_1$  e  $\Delta t_0$  possiamo sottrarre le due equazioni precedenti ottenendo:

$$\frac{c\Delta t_0}{c\Delta t_1} = \frac{S(t_0)}{S(t_1)} \equiv 1 + z, \quad (2.11)$$

dove l'ultima eguaglianza è stata ricavata osservando che  $\frac{c\Delta t_0}{c\Delta t_1}$  è il rapporto tra la lunghezza d'onda del fotone misurata da un osservatore a riposo rispetto a G e quella misurata dall'osservatore posto nell'origine. Il redshift è una grandezza fondamentale in campo cosmologico e può essere utilizzato anche per definire il tempo.

## 2.2.2 Modelli di Friedmann

Nel ricavare la metrica FLRW abbiamo assunto un Universo riempito con un fluido perfetto di materia ed energia, il tensore energia-impulso è quindi dato da (2.2) e soddisfa l'equazione di continuità:

$$\nabla_\mu T_0^\mu = -\frac{d\rho}{dt} - 3\frac{\dot{S}}{S}(\rho + p) = 0. \quad (2.12)$$

Assumendo che il fluido soddisfi anche un'equazione di stato nella forma  $p = w\rho$  e inserendo questa informazione nell'equazione (2.12) che esprime la conservazione dell'energia otteniamo:

$$\rho \propto S^{-3(1+w)}. \quad (2.13)$$

Quest'ultima equazione, a seconda della componente principale del fluido, diventa:

- **Materia:** la pressione è pressochè nulla ( $w = 0$ ) e quindi dall'ultima formula otteniamo:

$$\rho \propto S^{-3}. \quad (2.14)$$

- **Radiazione:** non essendoci massa la traccia del tensore energia-impulso è nulla, otteniamo quindi:

$$w = \frac{1}{3} \text{ da cui } \rho \propto S^{-4}. \quad (2.15)$$

Tornando alla metrica (2.8) e inserendola nell'equazione di campo di Einstein otteniamo quelle che sono chiamate equazioni di Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{S}}{S}\right)^2 + \frac{k}{S^2} = \frac{8\pi G\rho}{3}, \quad (2.16)$$

$$3\frac{\ddot{S}}{S} = -4\pi G(\rho + 3p) . \quad (2.17)$$

Il rapporto  $\frac{\dot{S}}{S} = H$  è chiamato costante di Hubble (nonostante non sia costante in generale). La prima equazione definisce le condizioni iniziali, la seconda può essere riscritta con opportune sostituzioni come:

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 S^2} , \quad (2.18)$$

con

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{critical}} = \frac{8\pi G\rho}{3H^2} . \quad (2.19)$$

Notiamo che a seconda dei valori della densità recuperiamo i 3 casi definiti nella sezione precedente:

$$\begin{aligned} \rho < \rho_{critical} &\longleftrightarrow \Omega < 1 \longleftrightarrow k = -1 \longleftrightarrow \textit{Universo aperto} \\ \rho = \rho_{critical} &\longleftrightarrow \Omega = 1 \longleftrightarrow k = 0 \longleftrightarrow \textit{Universo piatto} \\ \rho > \rho_{critical} &\longleftrightarrow \Omega > 1 \longleftrightarrow k = +1 \longleftrightarrow \textit{Universo chiuso} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Per una densità uguale alla densità critica abbiamo un Universo che inizia con una singolarità (Big Bang) e continua ad espandersi sempre più lentamente fino a raggiungere un equilibrio. Per una densità maggiore di quella critica l'espansione dell'Universo rallenta fino ad arrestarsi e poi cambia verso riportando l'Universo ad una singolarità (Big Crunch). Per una densità minore di quella critica si assiste invece ad una espansione che asintoticamente diventa lineare.

### 2.2.3 Materia oscura

Al modello cosmologico ideato fino ad ora dobbiamo aggiungere due componenti osservate sperimentalmente ma non predette dalla teoria, la materia oscura (DM) e l'energia oscura (DE). La materia oscura è stata introdotta in seguito allo studio della riga a 21 cm emessa dalle galassie. La riga a 21 cm è prodotta da una reazione fortemente proibita che coinvolge un atomo di idrogeno neutro: questo atomo ha due stati iperfini (spin del protone parallelo o antiparallelo allo spin dell'elettrone). L'energia dello stato parallelo è maggiore di quella dello stato antiparallelo e quindi può avvenire uno spin-flip con conseguente emissione o assorbimento di un fotone di lunghezza d'onda pari a 21 cm. Studiando le galassie con questa riga possiamo investigare il comportamento del gas di idrogeno neutro al loro interno. Osservando il profilo di velocità in un grafico velocità rotazionale/distanza dal centro ci si aspetta un andamento crescente fino al raggio  $R$  della galassia, seguito da un andamento proporzionale a  $\sqrt{\frac{1}{r}}$ , dove  $r$  rappresenta la distanza dal centro della galassia. L'andamento appena descritto può

essere ottenuto imponendo la conservazione dell'energia meccanica del corpo rigido. Quello che viene osservato è invece un andamento come quello raffigurato nella seguente figura.

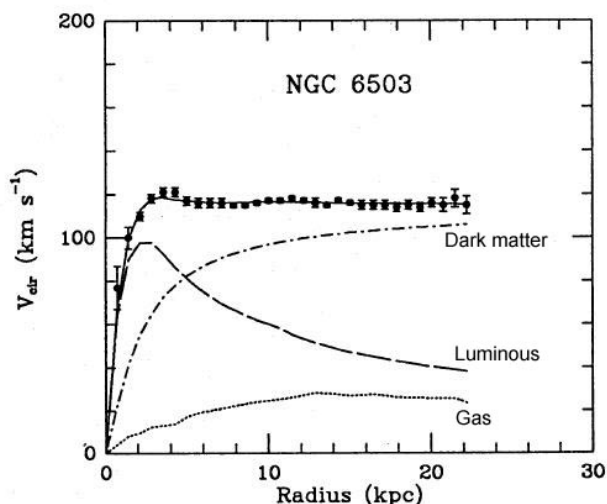


Figura 2.1: Profilo rotazionale della galassia NGC 6503 con indicate le varie componenti: materia luminosa, gas e materia oscura, [21].

Per giustificare queste curve fu introdotta la materia oscura. Dal grafico possiamo infatti osservare che la materia luminosa ha l'andamento previsto: la velocità è infatti crescente all'interno del raggio galattico della materia luminosa ( $\sim 2 \text{ kpc}$ ), dopo il quale decresce proporzionalmente a  $\sqrt{\frac{1}{r}}$ . Insieme alla materia luminosa è però presente una componente di materia oscura che, in genere, si estende per 5-10 volte il raggio della materia luminosa (nel caso della galassia NGC 6503 il raggio galattico è infatti pari a 9.197 kpc). Dalla Figura 2.1 possiamo inoltre osservare che la massa della materia oscura supera quella della materia luminosa e che la materia oscura diventa dominante sulla materia luminosa nella parte esterna della galassia. Dalle osservazioni si calcola che attualmente una percentuale superiore all'85% della materia dell'Universo sia materia oscura. Questo tipo di materia interagisce esclusivamente per mezzo della forza gravitazionale. Altre prove sperimentali a sostegno di questa teoria derivano dallo studio della dispersione delle velocità delle stelle nelle galassie (o delle galassie negli ammassi), da effetti di lensing gravitazionale, da osservazioni in banda X e dallo studio della CMB (Cosmic Microwave Background). Esistono diverse teorie sul tipo di particelle di cui è composta la materia oscura: la più accreditata è il modello CDM (cold dark matter). Secondo questo modello la materia oscura presente nell'Universo è formata da particelle che in passato sono state in equilibrio termico con la radiazione e che si sono disaccoppiate quando non erano più relativistiche. La materia oscura si inserisce nel modello descritto nella sezione precedente considerando che  $\Omega$  rappresenti la somma di tre quantità:

$\Omega_{bar}$ , relativa alla frazione di materia barionica o luminosa,  $\Omega_{rad}$ , relativa alla quantità di radiazione, e  $\Omega_{DM}$  relativa alla frazione di materia oscura.

## 2.2.4 Energia oscura e modello $\Lambda$ CDM

Nel 1998, dopo uno studio effettuato sulle supernove SN1a (ottime candele campione con curve di luminosità note), due gruppi di astronomi pubblicarono i risultati delle loro ricerche riguardo possibili anomalie nell'espansione dell'Universo [28] [29]. La luminosità delle candele campione lontane ( $z > 1$ ) era infatti del 25% minore rispetto alle previsioni del modello di Friedmann. Una delle spiegazioni più accreditate e che riesce anche a rendere conto di particolari effetti della CMB è la presenza di una componente di energia oscura, o energia del vuoto, che contrasta l'azione della forza gravitazionale. A livello teorico questo comportò la reintroduzione della costante cosmologica  $\Lambda$ , inizialmente introdotta e poi cancellata da Einstein nell'equazione (2.1). Questo parametro si comporta come un fluido con equazione di stato:

$$p = -\rho = \frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (2.21)$$

L'energia oscura può essere inserita nell'equazione di Friedmann considerando:

$$\Omega = \Omega_{\Lambda} + \Omega_{DM} + \Omega_{bar} + \Omega_{rad}. \quad (2.22)$$

Attualmente si pensa che circa il 70 % dell'energia dell'Universo sia composto da energia oscura. Utilizzando le equazioni (2.21), (2.15), (2.14) possiamo graficare l'andamento dell'energia delle componenti di materia, radiazione e energia oscura in funzione del redshift (o del tempo).

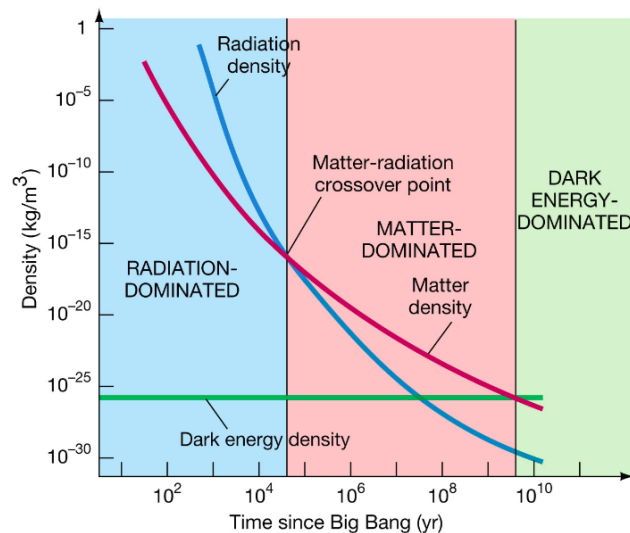


Figura 2.2: Andamento delle varie componenti dell'Universo in funzione del tempo

Da quest'ultimo grafico possiamo concludere che l'Universo inizialmente era dominato dalla radiazione, in seguito vi è stata l'epoca in cui la densità di materia ha superato quella di radiazione, mentre solo "recentemente" l'energia oscura è diventata dominante. Questo grafico permette anche di spiegare le differenze di luminosità osservate tra candele campione che hanno  $0 < z < 1$  e quelle più lontane descritte all'inizio di questa sezione. La presenza di energia oscura, con la sua pressione negativa, provoca infatti un'accelerazione dell'espansione dell'Universo che comporta un aumento delle distanze: ciò spiega perchè le supernovae lontane hanno luminosità più basse delle previsioni teoriche. Possiamo inoltre graficare i vincoli sui parametri di materia ed energia oscura ricavati combinando i risultati provenienti dalle osservazioni delle supernovae, dalla struttura su grande scala e dell'anisotropia della CMB osservata dai satelliti WMAP e Planck.

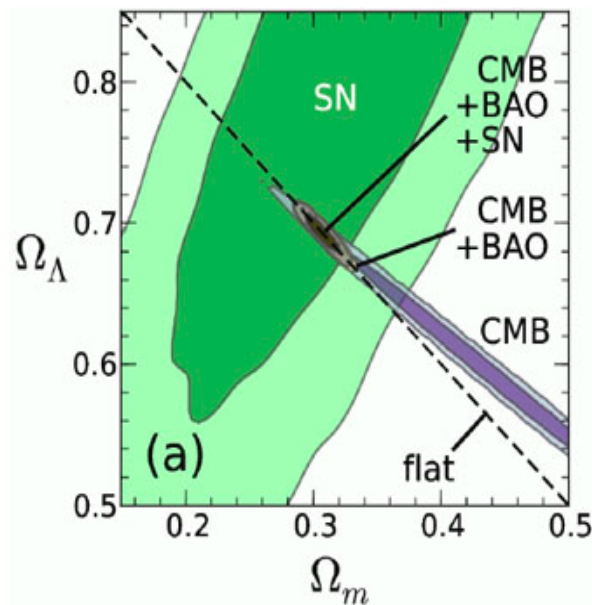


Figura 2.3: Confronto dei vincoli su  $\Omega_\Lambda$  e  $\Omega_m = \Omega_{DM} + \Omega_{bar}$  ricavati dalle supernovae (SN), dalle oscillazioni acustiche barioniche (BAO) e dalla CMB (grazie alle osservazioni dei satelliti WMAP e Planck). I colori scuri indicano una precisione di 1-sigma (68%), quelli chiari di 2-sigma (95%). [30]

Dal grafico emerge il modello di un Universo piatto a bassa densità di materia e dominato dall'energia oscura (modello  $\Lambda$ CDM). L'andamento temporale della densità delle varie componenti è determinato dal grafico 2.2.

## 2.3 Formazione delle strutture su grande scala

Trascurando la parte relativa al Big Bang, che non verrà approfondita in questo testo, la formazione delle strutture su grande scala nell'Universo è un problema chiave in cosmologia. Si osserva infatti la formazione di strutture discrete nell'Universo, dalle galassie ai superammassi, e c'è quindi bisogno di una teoria che renda conto della loro distribuzione disomogenea e della loro composizione. Il principio cosmologico è infatti valido per dimensioni superiori a  $100/500h^{-1} Mpc$ ; sotto questa scala si osservano una varietà di strutture contrapposte a regioni a bassissima densità, chiamate vuoti. Attualmente si ritiene che queste strutture siano nate come piccole fluttuazioni di materia e/o energia nell'Universo primordiale, crescendo e aggregandosi nel tempo attraverso un processo gerarchico dominato dall'instabilità gravitazionale. Le prime perturbazioni erano le più piccole e sono collassate formando corpi di piccola scala che si sono a loro volta aggregati per formare le strutture su grande scala tramite l'azione della gravità.

### 2.3.1 Condizioni iniziali e ammassi di galassie

Le condizioni iniziali per la formazione delle strutture dipendono fortemente dal modello cosmologico considerato, dallo spettro delle fluttuazioni iniziali e dalla loro distribuzione statistica (assunta solitamente Gaussiana). In particolare sono rilevanti i parametri cosmologici  $\Omega_\Lambda$ ,  $H_0$ ,  $\Omega_m$  (e le sue componenti,  $\Omega_{bar}$  e  $\Omega_{DM}$ , relative alla densità di materia barionica e materia oscura); ha grande rilevanza anche il modello di materia oscura considerato (l'unico modello in grado di riprodurre una formazione gerarchica bottom-up è il CDM). A seconda dell'ampiezza delle fluttuazioni esistono due teorie per spiegare la formazione delle strutture, la teoria lineare e la teoria non lineare, che verranno approfondite nelle prossime due sezioni. Dalle conclusioni della sezione 2.2.3, sappiamo che la materia oscura rappresenta la componente dominante della materia totale dell'Universo attuale ed è quindi una delle componenti più importanti per studiare le strutture che si sono formate più di recente: gli ammassi e superammassi di galassie. Essendo in maggiore quantità, la materia oscura domina il collasso gravitazionale. Le strutture su grande scala possono essere considerate come aloni di materia oscura al centro dei quali si formano sottostrutture di materia luminosa osservabile. Gli ammassi di galassie hanno masse che possono andare da  $10^{13}$  a più di  $10^{15}$  masse solari, mentre il loro diametro va da 1 a 3 Mpc. Gli ammassi di galassie sono composti per circa l'80 % di materia oscura, il restante 20 % è composto principalmente da gas caldo. Le stelle e le galassie occupano solo il 3-5 % della massa totale. Gli ammassi che verranno considerati in questo testo sono oggetti in equilibrio, o virializzati, nei quali il collasso gravitazionale si è arrestato ed è completamente bilanciato dalla forza centrifuga.



### 2.3.2 Teoria lineare e lunghezza d'onda di Jeans

La teoria lineare per lo studio delle strutture su grande scala può essere applicata a fluttuazioni di piccola ampiezza, che vengono considerate come perturbazioni delle soluzioni di un Universo omogeneo e isotropo. Matematicamente possiamo definire le perturbazioni attraverso un campo di densità con la seguente formula:

$$\delta(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x}) - \rho_0}{\rho_0}, \quad (2.23)$$

dove  $\rho_0$  rappresenta la densità media dell'Universo. La teoria lineare può essere applicata quando  $|\delta(\vec{x})| \ll 1$ . La più semplice soluzione perturbativa fu ricavata nel 1920 da James Jeans imponendo che il moto di un fluido autogravitante (con densità  $\rho$ , pressione  $p$ , velocità  $\vec{v}$  e campo gravitazionale  $\vec{g}$ ) soddisfacesse le equazioni di continuità, di Eulero e di Poisson:

$$\begin{aligned} \frac{\delta\rho}{\delta t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{v}) &= 0, \\ \frac{\delta\vec{v}}{\delta t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + \frac{\vec{\nabla}p}{\rho} - \vec{g} &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{g} &= 4\pi G\rho. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Jeans cercò le soluzioni a questo problema in termini di perturbazione alla soluzione statica e ne trovò 5: 2 adiabatiche, 1 entropica e 2 vorticosi. Analizzando le soluzioni adiabatiche dipendenti dal tempo ricavò la formulazione della lunghezza d'onda di Jeans.

$$\lambda_J = v_* \sqrt{\frac{\pi}{\rho_0 G}}, \quad (2.25)$$

dove  $v_* = \langle v_x^{-2} \rangle \equiv \sigma$  se consideriamo la distribuzione delle velocità di Maxwell. La lunghezza d'onda di Jeans,  $\lambda_J$ , individua la scala alla quale la forza di gravità eguaglia la pressione in un fluido autogravitante. Se una perturbazione ha una lunghezza d'onda maggiore di  $\lambda_J$  avviene un collasso gravitazionale e la perturbazione cresce esponenzialmente. Se la lunghezza d'onda è minore di  $\lambda_J$  domina la pressione e la perturbazione si propaga sotto forma di onda. La soluzione trovata da Jeans non tiene conto della relatività generale e dell'espansione dell'Universo ma l'ordine di grandezza di  $\lambda_J$  rappresenta comunque un'ottima approssimazione della scala alla quale inizia il collasso gravitazionale. La dipendenza dal tempo delle perturbazioni non è più esponenziale ma dipende dalla componente dominante nell'Universo:

$$\begin{aligned} \delta(z) &\sim (1+z)^{-1} \text{ se domina la materia,} \\ \delta(z) &\sim (1+z)^{-2} \text{ se domina la radiazione.} \end{aligned} \quad (2.26)$$

### 2.3.3 Teoria non lineare e simulazioni N-body

La teoria non lineare viene applicata quando  $|\delta(\vec{x})| \geq 1$ , in questo caso infatti non possiamo risolvere più il problema in termini perturbativi. La soluzione analitica del problema è stata ricavata nei casi più semplici. Un'ottima approssimazione per perturbazioni non lineari fu ricavata da Zel'dovich nel 1970, tuttavia attualmente si preferisce utilizzare la teoria lineare per imporre le condizioni iniziali in una simulazione numerica a N corpi (N-body). In queste simulazioni viene modellato un volume cubico (che rappresenta l'Universo) con all'interno un numero elevato di particelle che interagiscono gravitazionalmente. Esistono diversi modelli di simulazione: nella condizione ideale per ogni particella è calcolato il potenziale gravitazionale e quindi la legge oraria, tuttavia questo metodo necessita di un'immensa potenza computazionale. Un altro metodo utilizzato consiste nel dividere il cubo attraverso una griglia tridimensionale per poi ricavare le leggi orarie delle singole particelle dalla misura del campo di densità e delle sue variazioni. I risultati ottenuti con le simulazioni N-body sono in ottimo accordo con le osservazioni sperimentali quando si utilizza, come nel nostro caso, un modello di Universo  $\Lambda$ CDM a bassa densità ( $\Omega_M \sim 0.3$ ), confermando ancora una volta le conclusioni della sezione 2.2.4.

# Capitolo 3

## Funzione di massa e codici per il suo calcolo

### 3.1 Funzione di massa

Nel capitolo precedente abbiamo visto come l'omogeneità e l'isotropia dell'Universo non sono in contrasto con le strutture osservate sperimentalmente. L'interesse teorico sta nell'individuare queste strutture ad una data scala e nel descriverne la frequenza di comparizione. L'unico approccio efficace è quello statistico e le strutture alle quali siamo interessati sono i grandi aloni di materia oscura corrispondenti agli ammassi di galassie. In questo contesto definiamo la funzione di massa degli aloni di materia oscura, l'argomento principale di questo scritto. La funzione di massa  $n(M)$  è definita da:

$$dN = n(M)dM , \tag{3.1}$$

dove  $dN$  è il numero di aloni di materia oscura per unità di volume comovente con massa compresa tra  $M$  e  $M + dM$ . L'importanza della funzione di massa deriva dal fatto che attraverso essa possiamo imporre dei limiti al valore di molti parametri cosmologici ( $\Omega_M$  e l'ampiezza scalare delle fluttuazioni  $A_s$  ad esempio). Attraverso la funzione di massa possiamo quindi fare cosmologia di precisione affinando i modelli teorici. A livello empirico la funzione di massa è il risultato di un banale conteggio delle strutture con una certa massa  $M$  all'interno di un certo volume.

### 3.1.1 Modello PS

Nell'articolo "Formation of Galaxies and Clusters of Galaxies by Self-Similar Gravitational Condensation", pubblicato nel 1974 [1], William H. Press e Paul Schechter (PS) ricavarono la prima formulazione analitica della funzione di massa sotto l'ipotesi di un collasso sferico di una regione di raggio  $R$  e massa  $M$ . Il campo di densità, assunto lineare e dato dalla formula (2.23), viene filtrato su scala  $R$  per eliminare tutte le informazioni in eccesso. Analiticamente definiamo una funzione di filtro  $W_R$  e definiamo il campo lineare come:

$$\delta(x, R) = \int d^3x' \delta(x') W_R(x - x') \equiv \delta_M . \quad (3.2)$$

Solitamente viene utilizzata la funzione di filtro top-hat definita 1 se  $|x - x'| < R$  e 0 altrimenti. PS assunsero un campo di densità con una distribuzione statistica gaussiana data da:

$$P(\delta_M) d\delta_M = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_M^2}} \exp\left(-\frac{\delta_M^2}{2\sigma_M^2}\right) d\delta_M , \quad (3.3)$$

dove  $\sigma_M^2$  rappresenta la varianza del campo di densità filtrata alla scala di  $R$  (corrispondente ad una massa  $M = \frac{4}{3}\pi\rho_0 R^3$ ), e dipende dal redshift, come è evidente dalla seguente formula:

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 P_m(k, z) \tilde{W}_R^2(k) dk . \quad (3.4)$$

In quest'ultima equazione,  $P_m$  rappresenta lo spettro di potenza delle fluttuazioni di densità, mentre  $\tilde{W}_R$  è la trasformata di Fourier della funzione di filtro. L'idea di PS è quella di studiare la quantità di materia che si aggrega ad una certa massa  $M$  osservando la porzione del campo di densità iniziale che eccede una certa densità di soglia  $\delta_c$ . La probabilità che questo avvenga è data da:

$$P_{<\delta_c}(M) = \int_{\delta_c}^\infty P(\delta_M) d\delta_M . \quad (3.5)$$

Il valore di  $\delta_c$  più utilizzato e valido per qualsiasi cosmologia è  $\delta_c=1.686$  e corrisponde alla densità lineare sopra la quale si formano strutture non lineari in equilibrio. Per trovare il numero di oggetti di massa  $M$  isolati (circondati dal vuoto) è necessario sottrarre la probabilità (3.5) calcolata in  $M + dM$  a quella calcolata in  $M$ . L'equazione così costruita ha però due problemi:

- Viene ignorato il fatto che certi oggetti che appaiono come strutture isolate ad una scala  $M$  possano essere parti di una struttura su scala maggiore; questo problema è risolto assumendo che gli oggetti ad una data scala  $M$  siano gli ultimi ad essersi formati.
- Non considera le regioni con densità più bassa della media dell'Universo, quelle in cui  $\delta < 0$ ; per risolvere questo problema PS inserirono un fattore correttivo moltiplicativo pari a 2.

Di conseguenza otteniamo:

$$n(M)dM = 2\frac{\rho_0}{M} (P_{<\delta_c}(M) - P_{<\delta_c}(M + dM)) = -2\frac{\rho_0}{M} \frac{dP_{<\delta_c}(M)}{d\sigma_M} \frac{d\sigma_M}{dM} dM. \quad (3.6)$$

Utilizzando il teorema fondamentale del calcolo per risolvere la derivata della probabilità otteniamo la funzione di massa di PS:

$$n(M)dM = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d\sigma_M}{dM} \frac{\delta_c \rho_0}{M \sigma_M^2} \exp\left(-\frac{\delta_c^2}{2\sigma_M^2}\right) dM. \quad (3.7)$$

La procedura standard consiste quindi nel partire dallo spettro di potenza per calcolare  $\sigma_M$  e la sua derivata per poi risolvere, con questi dati, l'equazione (3.7). Infine sottolineiamo che la dipendenza dai parametri cosmologici entra in  $\sigma_M$  e  $\rho_0$ .

### 3.1.2 Modelli successivi a PS

Esistono numerosi modelli della funzione di massa successivi a PS. Questi modelli possono essere divisi in due categorie. Da una parte vi sono i modelli analitici che generalizzano la funzione di PS rivedendo alcune approssimazioni definite nella sezione precedente. Il modello di Ravi K. Sheth e Giuseppe Tormen (ST) [8] ad esempio modifica la funzione di PS sotto l'ipotesi di un più generale collasso ellittico. Altre correzioni alla (3.7) sono state effettuate imponendo una distribuzione statistica delle fluttuazioni non Gaussiana o dando una diversa soluzione ai due problemi evidenziati al termine della sezione precedente. Altri autori, come Courtin[18], Watson[9], Angulo[19] e Manera[11], hanno invece modificato analiticamente la funzione di PS aggiungendo dei parametri liberi che sono stati successivamente fissati tramite best fit effettuati sui risultati di simulazioni numeriche N-body. Alcuni modelli di funzione di massa si differenziano anche per la diversa dipendenza dal redshift; inoltre ogni modello è stato validato su determinati intervalli di redshift e di massa, come riportato nella lista in Appendice A.

## 3.2 Calcolo della funzione di massa

In questo lavoro di tesi è stata usata la libreria C++ CosmoBolognaLib (CBL) [24] [31] per calcolare la funzione di massa proposta da vari autori, utilizzando due diversi metodi per ricavare lo spettro di potenza. I risultati ottenuti sono stati confrontati con le funzioni di massa calcolabili mediante il codice HMFcalc [32], disponibile al sito web <http://hmf.icrar.org/>. Il risultato del confronto ha permesso di stabilire l'affidabilità delle CBL nel calcolo della funzione di massa e verrà utilizzato nel capitolo successivo per stimare al meglio l'errore sulla funzione di massa.

### 3.2.1 CosmolognaLib

Le CBL sono librerie C++ che mettono a disposizione numerosi strumenti per effettuare calcoli cosmologici. In questa tesi è stata utilizzata la versione 3.2 di tali librerie. Tutte le funzioni cosmologiche utilizzate per il calcolo della funzione di massa sono membri pubblici della classe `cosmobl::Cosmology`. Per calcolare la funzione di massa è necessario impostare una determinata cosmologia attraverso il costruttore della classe `Cosmology` che richiede in input tutti i parametri cosmologici che permettono di definire una determinata cosmologia. I più rilevanti sono: la densità di materia  $\Omega_m$ , la densità di radiazione  $\Omega_{rad}$ , la densità di energia oscura  $\Omega_\Lambda$ , il parametro adimensionale di Hubble  $h$ , l'ampiezza scalare iniziale dello spettro di potenza  $A_s$ , due parametri per l'equazione di stato dell'energia oscura, l'indice spettrale, la distribuzione statistica delle fluttuazioni. Dopo aver definito la cosmologia, la CBL mette a disposizione vari metodi per calcolare la funzione di massa: questi metodi permettono di calcolare la funzione prendendo in ingresso vari parametri tra cui gli autori della funzione di massa e il metodo per calcolare lo spettro di potenza. Gli autori che verranno considerati nel seguente testo sono: PS, ST, Reed[12], Courtin, Crocce[13], Jenkins[14], Warren[15], Watson-FOF, Watson-SOH, Manera, Tinker[16], Peacock[17], Angulo FOF e Angulo Sub. Lo spettro di potenza è calcolato sfruttando il codice CAMB e, solo nella parte iniziale, il metodo di Eisenstein-Hu (EH); entrambi questi metodi sono contenuti in classi esterne allegate alla distribuzione della CBL. Nel prossimo capitolo verrà utilizzato un altro metodo della classe `Cosmology` che calcola la funzione di massa direttamente dall'output di una simulazione numerica e verranno sfruttati anche i metodi della classe `Statistics` che permettono di eseguire analisi statistiche. In particolare verranno utilizzati i metodi che implementano il Markov Chain Monte Carlo e il likelihood sampling.

### 3.2.2 Calcolo della funzione di massa

Utilizzando le classi e i metodi descritti nella sezione precedente risulta molto facile scrivere un programma che calcoli la funzione di massa e la rappresenti in un grafico. Il seguente grafico è stato ottenuto utilizzando la funzione di massa definita da PS e ST, calcolando lo spettro di potenza attraverso CAMB, per 3 diversi valori di redshift (0, 0.5, 1). Il programma C++ per generare i dati mostrati nel seguente grafico è riportato in Appendice B. I parametri cosmologici sono stati impostati attraverso un file `parameter.ini`, mentre il grafico è stato generato grazie ad un programma python che sfrutta la libreria `matplotlib`.

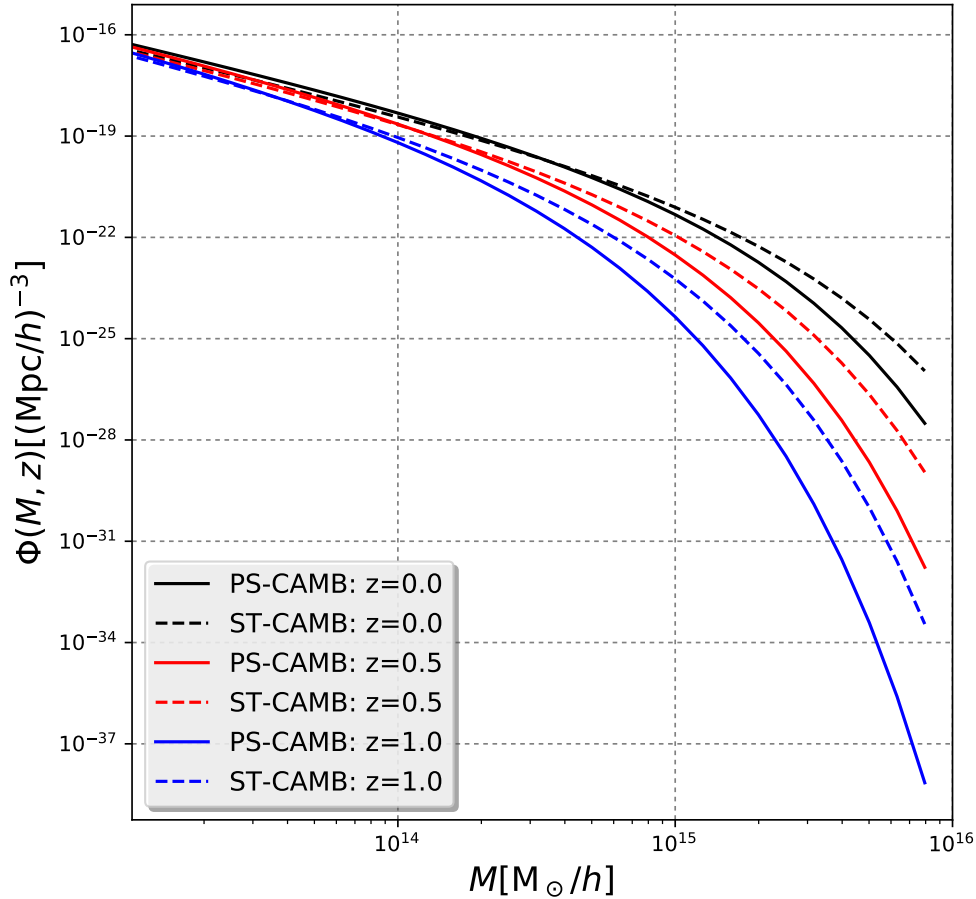


Figura 3.1: Grafico delle funzioni di massa definite da PS e ST, utilizzando CAMB per calcolare  $\sigma_M$ , per valori di redshift uguali a 0, 0.5 e 1.

Dal grafico in Fig. 3.1 possiamo osservare la differenza tra la funzione di massa definita da PS sotto l'ipotesi di un collasso sferico e quella definita da ST imponendo invece un collasso ellittico. In particolare, per  $z = 0$ , la funzione di ST risulta minore della funzione definita da PS per valori inferiori a  $\sim 5 \cdot 10^{14} M_{\odot}/h$  mentre i ruoli si invertono per valori di massa superiori. La funzione di massa cala all'aumentare del redshift, così come diminuisce il valore al quale ST supera PS, come evidente dal seguente grafico.

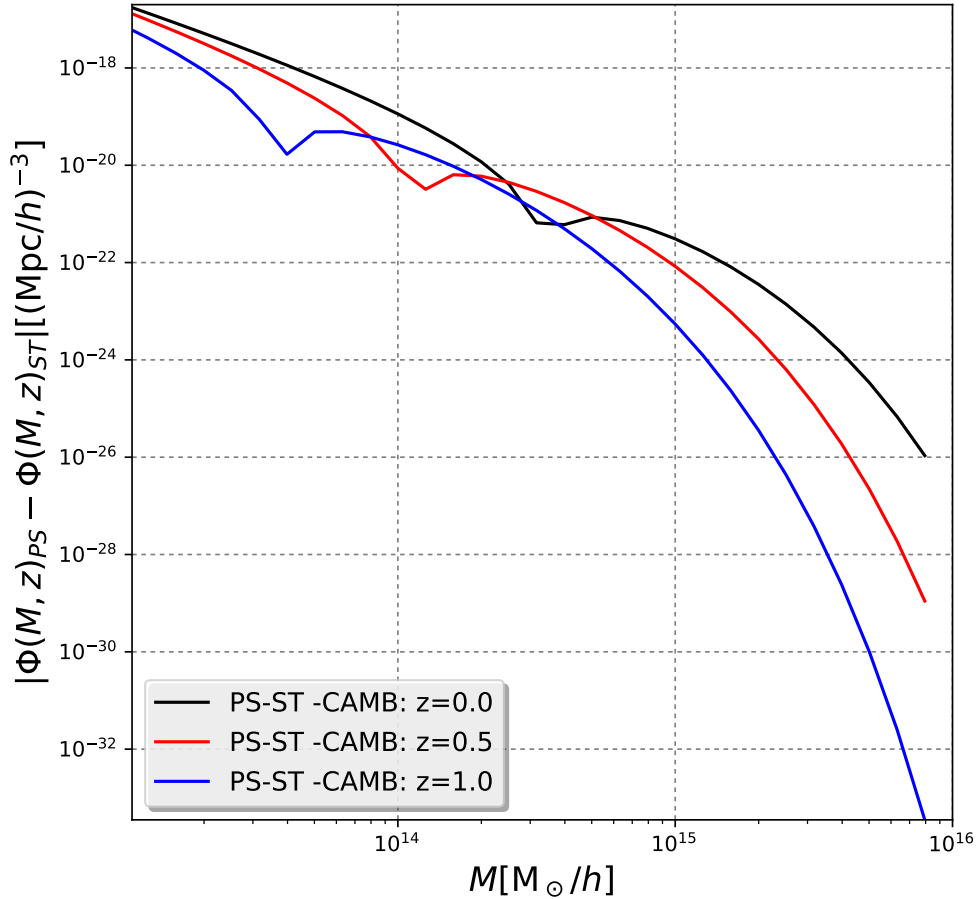


Figura 3.2: Valore assoluto della differenza tra le funzioni di massa definite da PS e ST, utilizzando CAMB per calcolare  $\sigma_M$ , per valori di redshift uguali a 0, 0.5 e 1. Il punto angoloso di ogni curva corrisponde al valore di massa per il quale la funzione di ST supera quella di PS.

Infine sottolineiamo che il dominio dei grafici va da  $10^{13}M_{\odot}/h$  a  $10^{16}M_{\odot}/h$  perchè gli ammassi di galassie hanno una massa compresa in questo intervallo (vedi sezione 2.3.1).

### 3.2.3 HMFcalc

HMF-calc è una web-application scritta da Steven Murray in collaborazione con l'International Centre for Radio Astronomy Research (ICRAR). L'applicazione, disponibile al sito web



<http://hmf.icrar.org/>, si basa sulla libreria python open source hmf. Come la CBL, permette di calcolare la funzione di massa proposta da vari autori sfruttando vari metodi per calcolare lo spettro di potenza. Per quanto riguarda il metodo CAMB è possibile inserire direttamente nell'applicazione la funzione di trasferimento calcolata tramite la CBL; in questo modo verrà ottimizzato il confronto tra HMFcalc e CBL riportato nella prossima sezione. La versione della libreria HMF utilizzata è la 2.1.

### **3.3 Confronto tra CBL e HMFcalc**

Per eseguire il confronto tra la funzione di massa calcolata dalle CBL e quella calcolata da HMFcalc sono stati implementati diversi programmi python. Il confronto verrà eseguito per due diversi metodi di calcolo dello spettro di potenza (CAMB, EH), per tutti gli autori della funzione di massa citati nella sezione relativa alla CBL e per cinque diversi valori di redshift (0, 0.5, 1, 3, 5) o nel sottinsieme di redshift in cui sono definite le diverse funzioni. Nell'eseguire il confronto è necessario ricordare che la formulazione teorica delle funzioni di massa è identica tra le due librerie, mentre la precisione con cui vengono eseguiti i calcoli potrebbe essere diversa. Infatti la web-application che si basa su una libreria python esegue i calcoli con un numero di cifre significative inferiore a quello della libreria CBL. Per ovviare a questo problema è stato necessario operare direttamente sulla libreria HMF eseguendo piccole modifiche per aumentare il numero di cifre significative. Il risultato del confronto è un insieme di tabelle e grafici, uno per ogni autore, che prendono in esame la differenza percentuale tra la funzione di massa definita da CBL e quella definita da HMFcalc. Lo scopo del confronto è infatti stabilire un errore da associare al modello teorico della funzione di massa definita da ogni autore osservando la differenza tra la funzione di massa stimata dalla CBL e da HMFcalc.

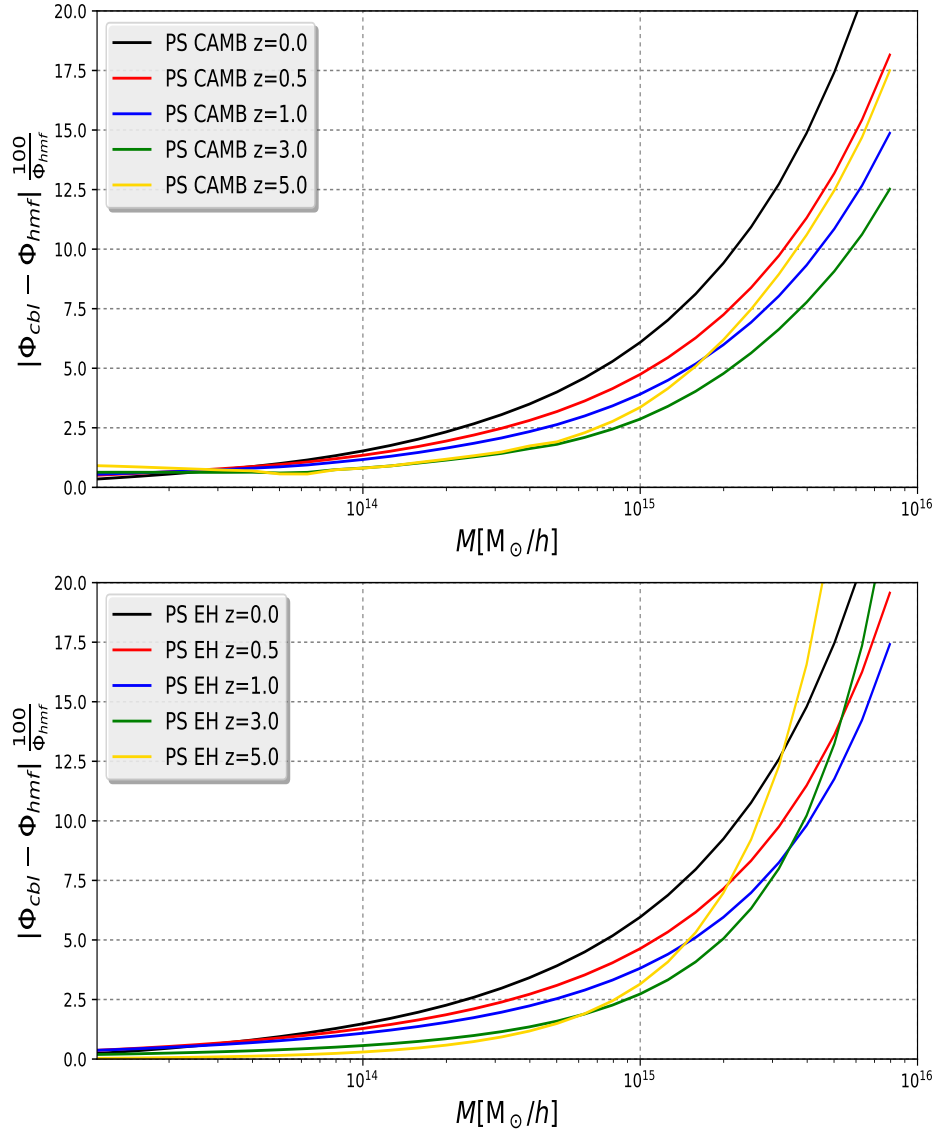


Figura 3.3: Differenza percentuale tra la funzione di massa calcolata dalla CBL e da HMFcalc.

In Figura 3.3 è mostrata la differenza percentuale tra le funzioni di massa calcolate con il metodo PS . Per tutti gli autori si osserva che la discrepanza cresce all'aumentare della mas-

sa mentre non è stata riscontrata nessuna correlazione con il redshift. È stato inoltre implementato un programma python per calcolare la differenza percentuale media nell'intervallo  $10^{13}M_{\odot} < M < 10^{16}M_{\odot}$  per ogni autore e per i cinque valori di redshift; l'output del programma è rappresentato nelle seguenti tabelle.

Autore MF	$z = 0$	$z = 0.5$	$z = 1$	$z = 3$	$z = 5$
PS	5.652	4.425	3.687	2.943	3.781
ST	3.898	3.074	2.574	—	—
Jenkins	0.109	0.152	0.204	0.441	0.664
Warren	0.118	—	—	—	—
Reed	4.239	3.337	2.793	2.242	2.869
Tinker	1.688	2.599	3.947	—	—
Crocce	0.108	0.160	0.238	—	—
Angulo FOF	0.116	—	—	—	—
Angulo Sub	0.133	—	—	—	—
Watson SOH	0.120	0.244	0.352	1.066	2.343
Watson FOF	0.116	0.177	0.269	0.946	2.116
Peacock	4.291	—	—	—	—
Courtin	3.712	—	—	—	—
Manera	4.200	6.316	—	—	—

Tabella 3.1: Differenza percentuale media per funzioni di massa il cui spettro di potenza è stato calcolato con il metodo CAMB. Il simbolo "—" segnala che la funzione non è definita a quel redshift.

Autore MF	$z = 0$	$z = 0.5$	$z = 1$	$z = 3$	$z = 5$
PS	5.594	4.441	3.791	3.620	5.568
ST	3.835	3.061	2.622	—	—
Jenkins	0.109	0.172	0.247	0.564	0.854
Warren	0.127	—	—	—	—
Reed	4.179	3.331	2.850	2.715	4.131
Tinker	1.668	2.616	4.018	—	—
Crocce	0.108	0.195	0.325	—	—
Angulo FOF	0.123	—	—	—	—
Angulo Sub	0.152	—	—	—	—
Watson SOH	0.134	0.291	0.466	1.709	4.048
Watson FOF	0.125	0.228	0.383	1.539	3.643
Peacock	4.229	—	—	—	—
Courtin	3.649	—	—	—	—
Manera	6.298	4.001	—	—	—

Tabella 3.2: Errore percentuale per funzioni di massa il cui spettro di potenza è stato calcolato con il metodo EH.

Possiamo subito notare che la differenza percentuale media della tabella relativa a EH risulta, in media, più alto a parità di autore rispetto alla tabella relativa a CAMB; questo è dovuto al fatto, già citato, che nel metodo CAMB è stato possibile dare in input a HMFcalc direttamente la funzione di trasferimento precedentemente calcolata dalla CBL, mentre non è stato possibile fare lo stesso per il metodo EH. La differenza percentuale media è comunque sempre sotto il 7 % in ottimo accordo con le previsioni, confermando che CBL e HMFcalc risultano in buon accordo nel calcolo delle funzioni di massa.

# Capitolo 4

## Euclid Cluster Challenge

### 4.1 Introduzione alla missione Euclid

Nel Giugno del 2012 l'agenzia spaziale europea (ESA) ha approvato e calendarizzato una missione spaziale chiamata Euclid [22]. Lo scopo di questa missione è lo studio di materia ed energia oscura. La missione inizierà nel 2021 con il lancio del satellite Euclid verso il punto L2, dove la sonda stazionerà per i successivi 6 anni. Il satellite ospiterà due strumenti scientifici, il Visible Instrument (VIS) e il Near Infrared Spectrometer Photometer (NISF) che effettueranno una scansione del cielo extragalattico con lo scopo di ottenere cataloghi di milioni di galassie e ammassi di galassie. La missione osserverà oggetti fino a redshift  $\sim 2$  (distanti cioè fino a 10 miliardi di anni luce), in questo modo sarà possibile studiare sia un Universo dominato dalla materia oscura che il più recente Universo dominato dall'energia oscura. La sonda Euclid ha quindi l'obiettivo di aumentare l'attuale comprensione della materia e dell'energia oscura effettuando le seguenti misurazioni:

- Misurazione delle oscillazioni acustiche barioniche nella distribuzione delle galassie per calcolare l'espansione dell'Universo e la quantità di energia oscura.
- Misurazione degli effetti di lensing gravitazionale debole per mappare la materia oscura e stimare la quantità di energia oscura.
- Misurazione della velocità di crescita delle strutture cosmiche per testare la teoria della relatività generale di Einstein e confrontarla con le teorie che cercano di rendere conto della materia oscura modificando la formulazione del campo gravitazionale.
- Misurazione delle condizioni iniziali dell'Universo primordiale.

- Misurazione dell'abbondanza degli ammassi di galassie per derivare i parametri cosmologici sfruttando i modelli teorici per la funzione di massa

Tuttavia per effettuare misure cosmologiche precise, la comunità scientifica necessita di modelli teorici affidabili. In tal senso, in relazione all'ultimo punto della lista precedente, è necessario stabilire quale autore ha definito la funzione di massa teorica più affidabile. Infatti confrontando i cataloghi di ammassi di galassie forniti da Euclid con un modello teorico affidabile della funzione di massa per gli aloni di materia oscura sarà possibile ricavare ulteriori vincoli sui parametri cosmologici. Ovviamente non è possibile conoscere a priori i parametri cosmologici dell'Universo. Sfruttiamo quindi i risultati di simulazioni N-body (con condizioni iniziali note) per stabilire quale autore ha definito la funzione di massa più affidabile, ovvero quella che meglio riproduce i parametri cosmologici imposti nella simulazione.

## 4.2 Scopo e strumenti

In quest'ultimo capitolo quindi calcoleremo la funzione di massa direttamente da un catalogo di aloni generato da una simulazione per poi confrontarla con i vari modelli teorici. Implementeremo un'analisi statistica su due parametri liberi della funzione di massa teorica confrontando successivamente i valori di best-fit con i parametri cosmologici noti della simulazione. Il risultato di questo confronto fungerà da indice di affidabilità per i vari modelli teorici. Per eseguire questa comparazione è stato implementato un codice C++ e python che sfruttasse le classi della libreria CBL descritte nella sezione 3.2.1.

### 4.2.1 Simulazione e catalogo di aloni

Il catalogo di aloni utilizzato è stato estratto dalle simulazione N-body Mice (Marenostrum Institut de Ciències de l'Espai Simulations [26]) sotto forma di 3 file ascii. La simulazione è stata effettuata con  $2048^3$  particelle ognuna di massa  $M_p = 3.6610^{12}M_\odot/h$  contenute in una regione cubica di lato  $L = 7680Mpc/h$ . I 3 file ascii, uno per ogni redshift, rispettivamente 0, 0.5, 1, contengono una tabella di 7 colonne; ogni riga, corrispondente ad un alone, è nella forma (npart, x, y, z, vx, vy, vz), dove npart è il numero di particelle contenute nell'alone, mentre (x,y,z) e (vx,vy,vz) sono la posizione e la velocità del centro di massa dell'alone. A seconda del valore di redshift varia il numero di aloni e la loro massa massima:

- $z=0.0$  NumAloni = 1328794 maxMassa =  $8.33 \cdot 10^{15}M_\odot/h$
- $z=0.5$  NumAloni = 334768 maxMassa =  $5.65 \cdot 10^{15}M_\odot/h$
- $z=1.0$  NumAloni = 43169 maxMassa =  $2.52 \cdot 10^{15}M_\odot/h$

I parametri cosmologici della simulazione, che sono noti e verranno utilizzati per il confronto finale, sono:

- Densità di materia barionica,  $\Omega_b = 0.044$
- Densità totale di materia,  $\Omega_m = 0.25$
- Densità di energia oscura,  $\Omega_\Lambda = 0.75$
- Indice spettrale delle fluttuazioni,  $n_s = 0.95$
- Ampiezza scalare delle fluttuazioni non normalizzata,  $A_s = 2.445 \cdot 10^{-9}$
- Parametro di Hubble (in unità 100 km/sec/Mpc),  $h = 0.7$

#### 4.2.2 Codice e cluster di calcolo Blade Runner

L'analisi cosmologica sul catalogo di aloni è stata svolta grazie ad un codice C++ e python scritto da Alfonso Veropalumbo. Il codice è diviso in 3 parti.

La prima parte calcola la funzione di massa direttamente dal catalogo di aloni e successivamente avvia un'analisi statistica che sfrutta le catene di Markov. In queste catene viene calcolata una funzione di massa teorica, modificando il valore dei 2 parametri liberi  $\Omega_m$  e  $A_s$ . I parametri liberi sono quindi la frazione di materia  $\Omega_m$  e l'ampiezza scalare delle fluttuazioni non normalizzate  $A_s$ ; la loro distribuzione a priori è considerata Gaussiana ed è rispettivamente:

- da 0.1 a 0.5 per  $\Omega_m$ , il cui valore di fiducia è 0.25;
- da 1 a 5 per il  $\ln(10^{10}A_s)$ , il cui valore di fiducia è 3.19663.

Tutti i parametri della funzione di massa, già definiti nella sezione 3.2.1, sono contenuti in un file parameter.ini, a cui ogni programma ha accesso, e sono fissati ai valori con cui è stata effettuata la simulazione (lo spettro di potenza viene calcolato utilizzando CAMB). Vengono utilizzate le catene di Markov perchè permettono una variazione dei parametri nella direzione in cui è minimizzata la differenza con la funzione di massa calcolata sul catalogo: in questo modo è necessario un numero di iterazioni minore di quello di un normale algoritmo di Monte Carlo. Utilizzando queste catene possiamo stabilire entro una certa incertezza quali sono i valori dei parametri liberi per i quali la funzione di massa definita da un certo autore riproduce al meglio la funzione di massa calcolata direttamente sul catalogo.

Nella seconda parte viene sfruttato un programma python che analizza e grafica i risultati delle catene. Il grafico più rilevante è sicuramente quello che rappresenta il valore dei due parametri liberi nelle catene in un grafico di dispersione come il seguente.

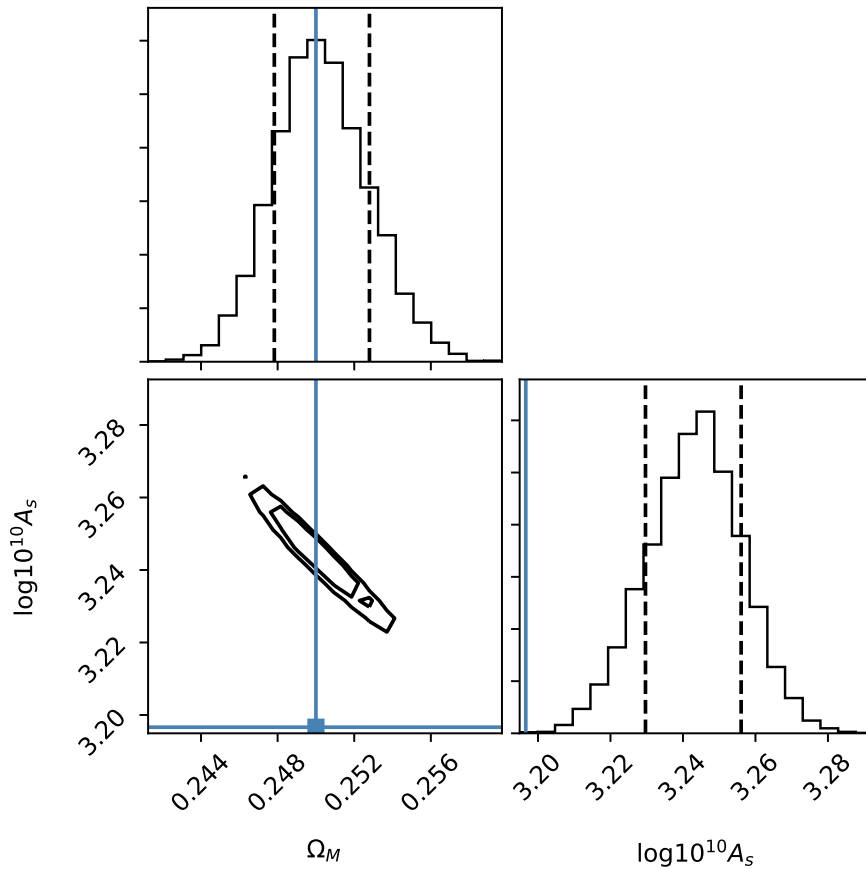


Figura 4.1: Grafico di dispersione di  $\Omega_m$  e  $\ln(10^{10}A_s)$  (relativi alla funzione di massa definita da Crocce [13]); il punto blu nella finestra in basso a sinistra indica i valori assunti nella simulazione N-body analizzata.

In questo grafico il punto blu rappresenta il valore di fiducia (con cui è stata eseguita la simulazione) dei due parametri liberi.

Nell'ultima parte viene prodotto un file di output con tutte le informazioni ricavate dall'analisi. Il suddetto procedimento è stato ripetuto per tutti i seguenti autori della funzione di massa: PS, ST, Reed, Courtin, Crocce, Jenkins, Warren, Watson-FOF, Watson-SOH, Manera, Tinker, Peacock, Angulo-FOF, Angulo-Sub.

La prima e l'ultima parte dell'analisi cosmologica necessitano di una potenza di calcolo superiore a quella di un normale pc; è stato quindi sfruttato il cluster di calcolo Blade Runner dell'Università di Bologna che permette di lanciare programmi in parallelo su più 'lame'. Per questo lavoro di tesi sono state utilizzate 2 lame ognuna contenente 24 processori con 64 Gb di Ram e 2 GHz di frequenza di clock. L'intero processo dura all'incirca 17 h ed è stato ripetuto per 14 autori diversi.



## 4.3 Risultati

Il risultato del programma utilizzato nella sezione precedente è un elenco di file contenenti le catene, la funzione di massa "di fiducia" definita direttamente dalla simulazione e la funzione di massa teorica calcolata con i parametri  $A_s$  e  $\Omega_m$  che meglio fittano i dati delle catene. Per analizzare i risultati, prima osserveremo quali autori riescono a riprodurre più fedelmente i parametri cosmologici assunti nella simulazione, poi graficheremo la differenza tra la funzione di massa definita da questi autori e quella di fiducia.

### 4.3.1 Stima dei parametri cosmologici

Grazie al codice descritto nella sezione 4.2.2, per ogni diverso autore della funzione di massa possiamo ricavare un grafico nella forma 4.1 dal quale possiamo estrarre il valore medio di  $A_s$  e  $\Omega_m$  con la relativa deviazione standard. I dati quindi sono:

- $\Omega_{m,sim}$ ,  $\ln(10^{10}A_{s,sim})$  definiti dalla simulazione e uguali a (0.25, 3.19663);
- $\Omega_{m,mis} \pm \Delta\Omega_{m,mis}$ ,  $\ln(10^{10}A_{s,mis}) \pm \Delta\ln(A_{s,mis})$  definiti dalle catene e diversi per ogni autore.

Per osservare la variazione dei parametri teorici a seconda dell'autore scelto per la funzione di massa, grafichiamo la differenza percentuale tra i valori teorici e quelli di fiducia:

$$E\%_{\Omega_m} = |\Omega_{m,sim} - \Omega_{m,mis}| \frac{100}{\Omega_{m,sim}} \quad (4.1)$$
$$\Delta E\%_{\Omega_m} = \Delta\Omega_{m,mis} \frac{100}{\Omega_{m,sim}}$$

La formula per definire  $E\%_{\ln(A_s)} \pm \Delta E\%_{A_s}$  è analoga alla (4.1) dopo aver svolto le adeguate sostituzioni. Definendo questi parametri otteniamo 3 grafici, uno per ogni valore di redshift (0,0.5,1). Per una migliore visualizzazione dei risultati sono stati graficati solo i valori per i quali la distanza percentuale dai parametri di fiducia è minore dell'8%. Va anche ricordato che alcune funzioni di massa possono non essere definite a certi valori di redshift, in tal senso è utile consultare le Tabelle 3.1 e 3.2.

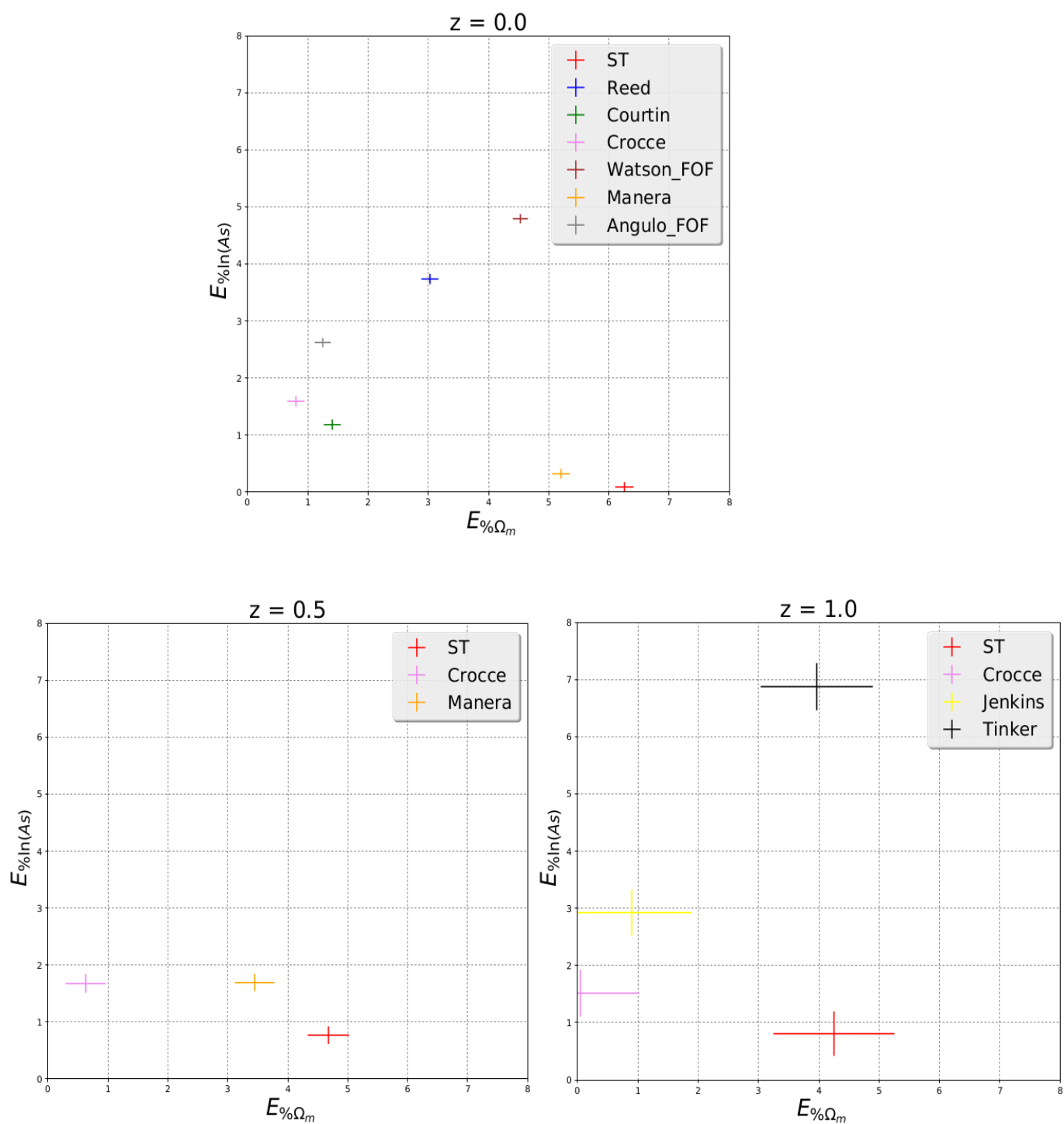


Figura 4.2: Grafici riportanti gli errori percentuali tra  $\Omega_{m,mis}$  e  $\ln(10^{10}A_{s,mis})$  (calcolati dalle catene per ogni diverso autore della funzione di massa) e i valori di fiducia della simulazione.

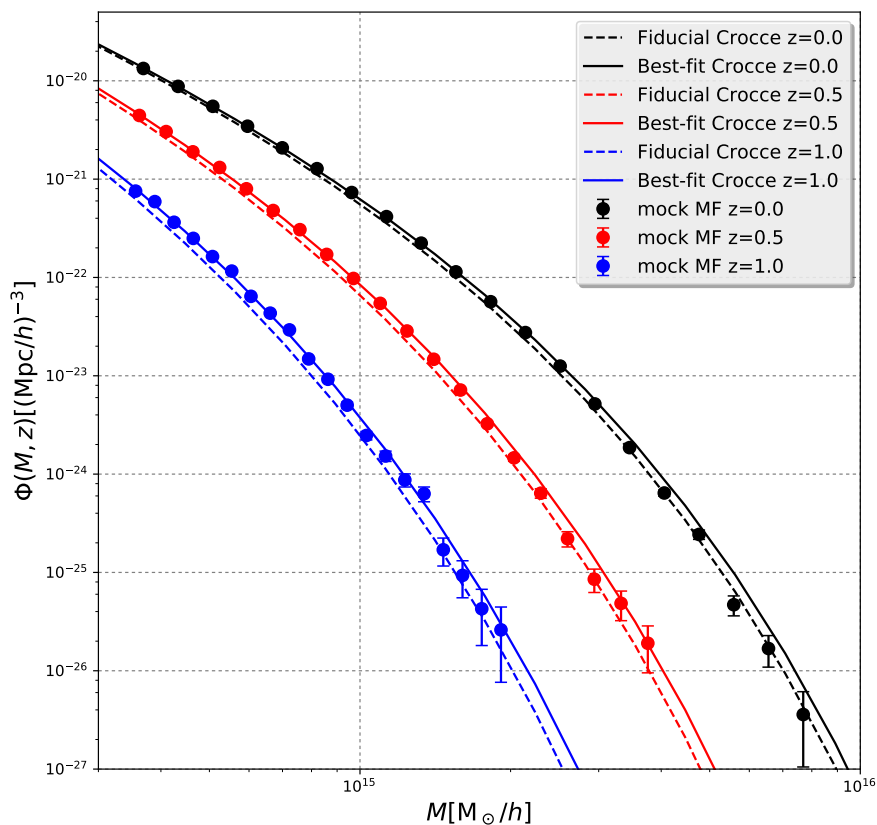
Per semplificare ulteriormente l'analisi dei dati nella seguente tabella sono riportati i valori relativi a tutti gli autori graficati. L'errore percentuale è riportato come nella formula (4.1) senza il valore assoluto.

<b>Autore</b>	$z$	$\Omega_{m,mis} \pm \Delta\Omega_{m,mis}$	$\ln(A_{s,mis}) \pm \Delta\ln(A_{s,mis})$	$E\% \Omega_m \pm \Delta E\%_m$	$E\% \ln(A_s) \pm \Delta E\%_{A_s}$
ST	0	$0.2656 \pm 0.0004$	$3.199 \pm 0.003$	$-6.26 \pm 0.15$	$-0.09 \pm 0.08$
Reed	0	$0.2424 \pm 0.0004$	$3.316 \pm 0.003$	$3.03 \pm 0.14$	$-3.73 \pm 0.09$
Courtin	0	$0.2465 \pm 0.0004$	$3.234 \pm 0.003$	$1.40 \pm 0.14$	$-1.18 \pm 0.09$
Crocce	0	$0.2480 \pm 0.0004$	$3.247 \pm 0.003$	$0.80 \pm 0.14$	$-1.59 \pm 0.09$
Watson FOF	0	$0.2387 \pm 0.0003$	$3.349 \pm 0.003$	$4.53 \pm 0.12$	$-4.79 \pm 0.09$
Manera	0	$0.2630 \pm 0.0004$	$3.207 \pm 0.003$	$-5.20 \pm 0.15$	$-0.32 \pm 0.08$
Angulo FOF	0	$0.2531 \pm 0.0003$	$3.280 \pm 0.003$	$-1.25 \pm 0.13$	$-2.62 \pm 0.08$
ST	0.5	$0.2617 \pm 0.0009$	$3.221 \pm 0.005$	$-4.7 \pm 0.3$	$-0.77 \pm 0.15$
Crocce	0.5	$0.2484 \pm 0.0008$	$3.250 \pm 0.005$	$0.6 \pm 0.3$	$-1.68 \pm 0.16$
Manera	0.5	$0.2586 \pm 0.0008$	$3.251 \pm 0.005$	$-3.4 \pm 0.3$	$-1.69 \pm 0.15$
ST	1	$0.261 \pm 0.002$	$3.222 \pm 0.012$	$-4.2 \pm 1.0$	$-0.8 \pm 0.4$
Crocce	1	$0.249 \pm 0.002$	$3.245 \pm 0.013$	$0.05 \pm 0.9$	$-1.5 \pm 0.4$
Jenkins	1	$0.252 \pm 0.002$	$3.290 \pm 0.013$	$-0.9 \pm 0.9$	$-2.9 \pm 0.4$
Tinker	1	$0.240 \pm 0.002$	$3.416 \pm 0.013$	$3.9 \pm 0.9$	$-6.9 \pm 0.4$
<b>Fiducial</b>		$\Omega_{mFID} = 0.25$		$\ln(A_{sFID}) = 3.19663$	

Tabella 4.1: Parametri cosmologici ricavati dalle catene di Markov ed errori percentuali rispetto ai parametri della simulazione presenti nell'ultima riga.

### 4.3.2 Confronto tra le varie funzioni di massa

Dai risultati della sezione precedente emerge che gli autori della funzione di massa che meglio riproducono i dati della simulazione per ogni valore di redshift sono Crocce e ST; notiamo che, solo per  $z = 0$ , anche le funzioni di massa definite da Courtin, Reed e Watson FOF determinano dei parametri in buono accordo con quelli di fiducia (con un errore percentuale minore dell'1 %). L'errore percentuale medio sui tre valori di redshift di Crocce è pari a 0.551%, mentre per ST è pari a 2.21%. Dall'ultima tabella possiamo notare anche che, indipendentemente dall'autore, il valore di  $\ln(10^{10}A_{s,mis})$  sovrastima il valore di fiducia. L'ultimo passo dell'analisi cosmologica consiste nel graficare e studiare la differenza tra la funzione di massa teorica e quella di fiducia calcolata direttamente dalla simulazione. Per ottenere i grafici è stato utilizzato un programma python che sfrutta l'output del programma descritto nella sezione 4.2.2.



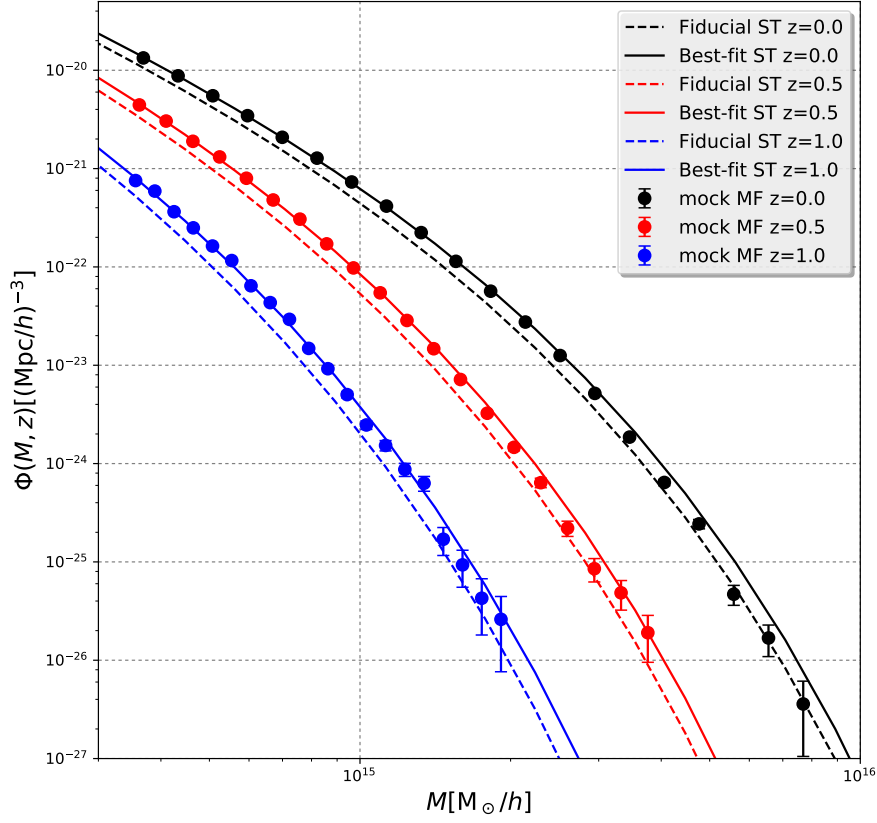


Figura 4.3: Confronto tra la funzione di massa teorica con i parametri di best fit calcolati dalle catene, con i parametri di fiducial (fiducial) e la funzione di massa calcolata direttamente dalla simulazione (MOCK-MF). Il confronto è eseguito per gli autori (ST e Croce) che meglio riproducono i parametri di fiducial per tutti i valori di redshift indicati in legenda.

Dai grafici precedenti emerge un ottimo accordo tra la funzione di massa calcolata direttamente dalla simulazione (Mock-MF) e le due funzioni di massa teoriche. Ricordiamo che lo spettro di potenza delle funzioni di massa fiducial è stato calcolato con i parametri cosmologici presenti nell'ultima riga della Tabella 4.1, mentre per le funzioni best-fit lo spettro di potenza è stato calcolato con i parametri definiti dalle catene di Markov, diversi per ogni autore e ogni redshift (vedi Tab. 4.1). Come visto nella Sezione 3.3 e nella Tabella 3.1 occorre tener presente che anche il calcolo delle funzioni di massa teoriche contiene un errore. Per ST l'errore percentuale è pari al 3.898% per  $z = 0$ , 3.074% per  $z = 0.5$  e 2.574% per  $z = 1$ ; per quanto riguarda

Crocce l'errore percentuale è pari al 0.108 % per  $z = 0$ , 0.160 % per  $z = 0.5$  e 0.238 % per  $z = 1$ . Tenendo conto di ciò possiamo concludere che entrambi gli autori hanno definito una funzione di massa in grado di riprodurre, entro le incertezze, la funzione di massa calcolata direttamente dalla simulazione. L'autore che meglio riproduce funzione di massa e parametri della simulazione è Crocce come evidente dai grafici e dalle tabelle precedenti. Per Crocce inoltre l'errore percentuale relativo al confronto con HMFcalc (Sezione 3.3) è minore di quello relativo alla funzione di massa di ST; ciò garantisce una migliore affidabilità delle CBL nel calcolo della funzione di massa di Crocce.

# Capitolo 5

## Conclusioni

La funzione di massa definita da Crocce ha riprodotto i parametri cosmologici della simulazione con un errore percentuale minore dell'1% ed è stata in grado di riprodurre ottimamente la funzione di massa derivata dalla simulazione come evidente dal primo grafico della Figura 4.3. La funzione di massa definita da Crocce è quindi un ottimo candidato per studiare e analizzare statisticamente i dati che verranno ottenuti dalla sonda Euclid. Il procedimento utilizzato per ricavare dei limiti sui parametri cosmologici dell'Universo a partire dalla funzione di massa sarà lo stesso descritto nella sezione 4.3.1 con la differenza che i parametri cosmologici dell'Universo, al contrario di quelli della simulazione, non sono noti a priori. Dall'analisi statistica effettuata nell'ultimo capitolo possiamo concludere che la funzione di massa teorica definita da Crocce riproduce, dato in ingresso un catalogo di aloni di materia oscura, i parametri cosmologici con un errore percentuale massimo dell'1%. L'errore associato ai parametri cosmologici dell'Universo sarà quindi il risultato della somma in quadratura dell'errore del modello teorico della funzione di massa e dell'errore statistico associato alla quantità e alla qualità dei dati sperimentali. Concludendo, il satellite Euclid e l'analisi statistica che verrà implementata utilizzando la funzione di massa permetteranno di stimare con grande precisione i parametri cosmologici. Una stima precisa dei parametri cosmologici reali è essenziale per creare un modello preciso e affidabile dell'Universo.





# Appendice A

## Tabella funzioni di massa

Nella seguente lista sono riportate tutte le funzioni di massa, con i rispettivi domini di definizione, utilizzate nel testo. Le funzioni di massa sono nella forma:

$$n(M) = \frac{d\sigma_M}{dM} \frac{\rho_0}{M\sigma_M} f(v). \quad (\text{A.1})$$

Utilizziamo la convenzione  $v \equiv \frac{\delta_c}{\sigma_M}$  e ricordiamo che la varianza di massa e la sua derivata sono ricavabili dalla formula (3.4). Per ogni autore è indicato se la funzione di massa è stata derivata analiticamente (A) o se è il risultato di un fit eseguito sul risultato di simulazioni numeriche N-body (F).

- **ST (2001)** (A)  $f_{ST} = A \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \left[ 1 + \left( \frac{v^2 p}{a} \right) \right] v \exp\left(-\frac{av^2}{2}\right)$   
dove  $A = 0.3222$ ,  $a = 0.707$ ,  $p = 0.3$ ; valido per  $0.5 < v^2 < 10$  e  $0 \leq z \leq 2$
- **Jenkins (2001)** (F)  $f_J = A \exp\left(-(\ln(\sigma_M^{-1}) + a)^b\right)$   
dove  $A = 0.315$ ,  $a = 0.61$ ,  $b = 3.8$ ; valido per  $-1.2 < \ln(\sigma_M^{-1}) < 1.05$  e  $0 \leq z \leq 5$
- **Reed (2003)** (F)  $f_R = f_{ST} \exp\left(\frac{-A}{2 \cosh(2\sigma_M^a)}\right)$   
dove  $A = 0.7$ ,  $a = 5$ ; valido per  $-1.7 < \ln(\sigma_M^{-1}) < 0.9$  e  $0 \leq z \leq 15$
- **Warren (2006)** (F)  $f_W = A(\sigma_M^{-a} + b) \exp(-c\sigma_M^{-2})$   
dove  $A = 0.7234$ ,  $a = 1.625$ ,  $b = 0.2538$ ,  $c = 1.1982$ ; valido per  $-1.7 < \ln(\sigma_M^{-1}) < 0.9$  e  $0 \leq z \leq 30$

- **Peacock (2007)** (A)  $f_P = \frac{v \exp(-cv^2)}{(1+av^b)^2} [bav^{b-1} + 2cv(av^b + 1)]$   
dove  $a = 1.529$ ,  $b = 0.704$ ,  $c = 0.412$ ; valido per  $10^{10}M_\odot/h < M < 10^{15}M_\odot/h$  e  $z = 0$
- **Tinker (2008)** (F)  $f_T = A \left[ \left( \frac{b}{\sigma_M} \right)^a + 1 \right] \exp(-c\sigma_M^{-2})$   
dove  $A = 0.186(1+z)^{-0.14}$ ,  $a = 1.47(1+z)^{-0.06}$ ,  $b = 2.57(1+z)^{-\alpha}$ ,  $c = 1.19$ ,  $\alpha = \exp \left[ - \left( \frac{0.75}{\log(\frac{\Delta h}{75})} \right)^{1.2} \right]$ ; valido per  $-0.6 < \log(\sigma_M^{-1}) < 0.4$  e  $0 \leq z \leq 2.5$
- **Crocce (2010)** (F)  $f_C = A(\sigma_M^{-a} + b) \exp(-c\sigma_M^{-2})$   
dove  $A = 0.58(1+z)^{-0.13}$ ,  $a = 1.37(1+z)^{-0.15}$ ,  $b = 0.3(1+z)^{-0.084}$ ,  $c = 1.036(1+z)^{-0.024}$ ; valido per  $10^{10.5}M_\odot/h < M < 10^{15.5}M_\odot/h$  e  $0 \leq z \leq 2$
- **Courtin (2010)** (F)  $f_{Co} = f_{ST}$   
dove  $A = 0.348$ ,  $a = 0.695$ ,  $p = 0.1$ ; valido per  $-0.8 < \ln(\sigma_M^{-1}) < 0.7$  e  $z = 0$
- **Manera (2010)** (F)  $f_M = f_{ST}$   
dove  $(A, a, p) = (0.3222, 0.709, 0.248)$  a  $z = 0$ ,  $(A, a, p) = (0.3222, 0.724, 0.241)$  a  $z = 0.5$ ; valido per  $3.3 \cdot 10^{13}M_\odot/h < M < 3.3 \cdot 10^{15}M_\odot/h$  e  $0 \leq z \leq 0.5$
- **Angulo FOF (2012)** (F)  $f_{AF} = f_T$   
dove  $A = 0.201$ ,  $a = 1.7$ ,  $b = 2.08$ ,  $c = 1.172$ ; valido per  $10^8M_\odot/h < M < 10^{16}M_\odot/h$  e  $z = 0$
- **Angulo Sub (2012)** (F)  $f_{AS} = f_T$   
dove  $A = 0.265$   $a = 1.9$   $b = 1.675$   $c = 1.4$  valido per  $10^8M_\odot/h < M < 10^{16}M_\odot/h$  e  $z = 0$
- **Watson FOF (2012)** (F)  $f_{WF} = f_T$   
dove  $A = 0.282$ ,  $a = 2.163$ ,  $b = 1.406$ ,  $c = 1.21$ ; valido per  $-0.55 < \ln(\sigma_M^{-1}) < 1.31$  e  $0 \leq z \leq 30$
- **Watson SOH (2012)** (F)  $f_{WS} = f_T \Gamma(\Delta, \sigma_M, z)$   
dove  $\Gamma(\Delta, \sigma_M, z) = \exp \left( 0.023 \left( \frac{\Delta}{178} - 1 \right) \right) \left( \frac{\Delta}{178} \right)^{0.456\Omega_m(z) - 0.139} \exp \left( 0.072 \left( 1 - \frac{\Delta}{178} \right) \sigma_m^{-2.130} \right)$ ,

$(A, a, b, c) = (0.194, 2.267, 1.805, 1.287)$   $az = 0$ ,  $(A, a, b, c) = (0.563, 0.874, 3.810, 1.453)$  *per*  $z > 6$ ,  $(A, a, b, c) = (0.563, 0.874, 3.810, 1.453)$  *per*  $z > 6$ ,  $(A, a, b, c) = (\Omega_m(z)(1.907(1+z)^{-3.216} + 0.074), 3.136(1+z)^{-3.058} + 2.349, 5.907 + (1+z)^{-3.599} + 2.344, 1.318)$  *per*  $0 < z \leq 6$ ; *valido per*  $-0.55 < \ln(\sigma_M^{-1}) < 1.05$  *per*  $z = 0$ ,  $-0.06 < \ln(\sigma_M^{-1}) < 1.024$  *per*  $z > 0$  e nell'intervallo  $0 \leq z \leq 30$



# Appendice B

## Codice per il calcolo della funzione di massa

Programma C++ utilizzato per generare i dati graficati nella Figura 3.1. L'headers "externalFunctions.h" permette di leggere i parametri contenuti nel file "parameter.ini" riportato nella pagina seguente.

```
#include "externalFunctions.h"
string cosmobl::par::DirCosmo = DIRCOSMO, cosmobl::par::DirLoc = DIRL;
int main (int argc, char **argv) {
//-----
//-----lettura file di parametri-----
//-----
try {
if (argc!=1 && argc!=2) cosmobl::Error("Wrong number of parameters!"); if (system("clear")) {}
const string parameter_file = (argc==2) ? argv[1] : cosmobl::par::DirLoc+"parameter.ini";
Parameters par = parameters(parameter_file);
// -----
// -----setting della cosmologia utilizzando i parametri contenuti nel file-----
// -----
cosmobl::cosmology::Cosmology cosmology {par.Omega_M, par.Omega_b, par.Omega_nu, par.massless_neutrinos,
par.massive_neutrinos, par.Omega_L, par.Omega_radiation, par.hh, par.scalar_amp, par.n_s,
par.w0, par.wa, 0., 1, par.tau, "LCDM", par.unit};
cosmology.set_sigma8(0.8);
string autore[2]; autore[0]="PS"; autore[1]="ST";
for (int i=0;i<=1;i++){ //ciclo per gli autori
for (size_t zz=0; zz<par.redshift.size(); ++zz) { //ciclo per i valori di redshift
//-----creazione file output-----
string file = par.output_dir+"MF_z_"+cosmobl::conv(par.redshift[zz], cosmobl::par::fDP1)+"-"+autore[i]+".txt";
double lgM1 = par.lgMmin;
double lgM2 = lgM1+par.lgBinSize;
const int bin = int((par.lgMmax-par.lgMmin)/par.lgBinSize)+1;
for (int i=0; i<bin; ++i) { //ciclo per i valori di massa
double mass = pow(10., (lgM1+lgM2)*0.5);
// -----calcolo della funzione di massa-----
double MF = cosmology.mass_function(mass, par.redshift[zz], autore[i], par.method_SS, par.output_root,
par.Delta, par.interpType,par.Num,par.stepsize,par.norm, par.k_min, par.k_max, par.prec, par.file_par,
true, 1.686);
// -----scrittura su file-----
fout <<scientific << setprecision(5) << mass << " " <<scientific << setprecision(5)<<MF << endl;
lgM1 = lgM2;
lgM2 += par.lgBinSize;
} fout.clear(); fout.close();
}}catch(cosmobl::glob::Exception &exc) { cerr << exc.what() << endl;} return 0;}
```

## File "parameter.ini".

```
## -----  
## ----- MF parameters -----  
## -----  
  
output_dir = ../output/          ##Cartella di output  
lgMmin = 13.                    ##Logaritmo del valore minimo di massa per il quale verrà calcolata la funzione di massa  
lgMmax = 16.                    ##Logaritmo del valore massimo di massa  
lgBinSize = 0.1                 ##Dimensione logaritmica del bin di massa  
redshift = {0., 0.5, 1.}       ##Valori di redshift per il quale verrà calcolata la funzione di massa  
method_MF = PS                  ##Autore della funzione di massa  
method_SS = CAMB                ##Metodo per calcolare lo spettro di potenza  
output_root = ..                ##Cartella nella quale verrà calcolato lo spettro di potenza e la varianza di massa  
Delta = 200.                    ##Eccesso di densità rispetto alla media dell'Universo  
interpType = Steffen            ##Metodo di interpolazione dello spettro di potenza  
Num = -1                        ##Numero di punti utilizzati nell'interpolazione  
stepsize = 100.                ##Larghezza degli step utilizzati per calcolare le derivate  
norm = -1                       ##Se uguale a true viene normalizzato lo spettro di potenza  
k_min = 0.                      ##Modulo minimo del vettore d'onda per il quale viene calcolato lo spettro di potenza  
k_max = 100.                    ##Modulo massimo del vettore d'onda per il quale viene calcolato lo spettro di potenza  
prec = 1.e-4                    ##Precisione dell'integrazione necessaria per calcolare la varianza di massa  
file_par = NULL                 ##Nome dell'eventuale file di parametri cosmologici  
  
## -----  
## ----- Cosmology parameters-----  
## -----  
  
Omega_M = 0.25                  ##Densità totale di materia a z=0  
Omega_L = 0.75                  ##Densità di energia oscura a z=0  
Omega_b = 0.044                 ##Densità di materia barionica a z=0  
Omega_nu = 0.                   ##Densità di neutrini massivi a z=0  
scalar_amp = 2.445e-9           ##Ampiezza scalare iniziale non normalizzata dello spettro di potenza  
n_s = 0.95                      ##Indice spettrale delle fluttuazioni  
tau = 0.089                     ##Profondità ottica dello scattering di Thompson  
unit = false                    ##Tipo di unità di misura utilizzate (false=fisiche, true=cosmologiche)  
massless_neutrinos = 3.04       ##Numero effettivo di neutrini non massivi  
massive_neutrinos = 0           ##Numero di specie di neutrini massivi  
Omega_radiation = 0.            ##Densità di radiazione a z=0  
hh = 0.7                        ##Parametro adimensionale di Hubble  
wa = 0.                          ##Primo parametro per l'equazione di stato dell'energia oscura (parametrizzazione CPL)  
w0 = -1.                         ##Secondo parametro per l'equazione di stato dell'energia oscura
```

# Bibliografia

- [1] Casadio R., "Elements of Relativity", September 28, 2015.
- [2] Schwarzschild K., "Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie", Sitzungsber. Preuss. Akad. D. Wiss. 50, 1916.
- [3] Press W. H., Schechter P., "Formation of Galaxies and Clusters of Galaxies by Self-Similar Gravitational Condensation", Astrophysical Journal, Vol. 187, pp. 425-438 (1974), 02/1974.
- [4] Sourabh S. C., "Mass functions of dark matter halos revisited", School of Physical Sciences NISER, Bhubaneswar.
- [5] Despali G., Giocoli C., Angulo E. R., Tormen G., Sheth R. K., Baso G., Moscardini L., "The universality of the virial halo mass function and models for non-universality of other halo definitions", Astrophysical Journal, 9 Dec 2015.
- [6] Lukic Z., Heitmann K., Habib S., Bashinsky S., Ricker P. M., "The Halo Mass Function: High-Redshift Evolution and Universality", Astrophysical Journal, 14 Jan 2008.
- [7] Bhattacharya U., Lukic Z., Heitmann K., Habib S., Wagner C., White M., "Mass function predictions beyond  $\Lambda$ CDM", Astrophysical Journal, 18 Mar 2011.
- [8] Sheth R. K., Tormen, G., "Large-scale bias and the peak background split", Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 308, Issue 1, pp. 119-126.
- [9] Watson A. W., Iliev T. I., D'Aloisio A., Knebe A., Shapiro R. P., Yepes G., "The halo mass function through the cosmic ages", Astrophysical Journal, 9 Nov 2013.
- [10] Rovelli C., "La realtà non è come ci appare ", Raffaele cortina editore, 2014.
- [11] Manera M., Sheth R. K., Scoccimarro R., "Large scale bias and the inaccuracy of the peak-background split", Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Nov. 2009.

- [12] Reed D., Gardner J., Quinn T., Stadel J., Fardal M., Lake G., Governato F., "Evolution of the mass function of dark matter haloes", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Dec. 2003.
- [13] Crocce M., Fosalba P., Castander F. J., Gaztañaga E., "Simulating the Universe with MICE: the abundance of massive clusters", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Apr. 2010.
- [14] Jenkins A. R., Frenk C. S., White S. D. M., Colberg J. M., Cole S., Evrard a. E., Couchman H. M. P., Yoshida N., "The mass function of dark matter haloes", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Feb. 2001.
- [15] Warren M. S., Abazajian K., Holz D. E., Teodoro L., "Precision Determination of the Mass Function of Dark Matter Halos", *The Astrophysical Journal*, Aug. 2006.
- [16] Tinker J., Kravtsov A. V., Klypin A., Abazajian K., Warren M. S., Yepes G., Gottlöber S., Holz D. E., "Toward a halo mass function for precision cosmology: the limits of universality", *The Astrophysical Journal*, 2008.
- [17] Peacock J. A., "Testing anthropic predictions for and the cosmic microwave background temperature", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Aug. 2007.
- [18] Courtin J., Rasera Y., Alimi J.-M., Corasaniti P. S., Boucher V., Füzfa a., "Imprints of dark energy on cosmic structure formation - II. Non-universality of the halo mass function", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oct. 2010.
- [19] Angulo R. E., Springel V., White S. D. M., Jenkins A., Baugh C. M., Frenk C. S., "Scaling relations for galaxy clusters in the Millennium-XXL simulation", 2012.
- [20] Narlikar J. V., "An introduction to cosmology", 2002.
- [21] Van Albada et al., 1985, *ApJ*, 295, 305.
- [22] Laureijs et al. 2011, Amendola et al. 2016.
- [23] [www.uio.no/studier/emner/matnat/astro/AST4320/h12/undervisningsmateriale/psmassfunction.pdf](http://www.uio.no/studier/emner/matnat/astro/AST4320/h12/undervisningsmateriale/psmassfunction.pdf)
- [24] <https://github.com/federicomarulli/CosmoBolognaLib>
- [25] <https://www.ligo.caltech.edu/>
- [26] <http://maia.ice.cat/mice/>
- [27] <http://hmf.icrar.org/>
- [28] <https://arxiv.org/abs/astro-ph/9805201>



[29] <https://arxiv.org/abs/astro-ph/9812133>

[30] <https://ned.ipac.caltech.edu/level5/March14/Mortonson/Mortonson4.html>

[31] <https://arxiv.org/abs/1511.00012>

[32] <https://arxiv.org/abs/1306.6721>