

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

**APPLICAZIONI
MECCANICO-STATISTICHE
DELL'INTEGRAZIONE
GAUSSIANA MULTIDIMENSIONALE**

Tesi di Laurea in Fisica Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
PIERLUIGI CONTUCCI

Presentata da:
ENRICO CARIANI

Seconda Sessione
Anno Accademico 2009-2010

*Ai miei amici
che hanno condiviso con me
questa fetta di vita indimenticabile,
nell'universo della matematica*

Introduzione

La presente tesi affronta lo studio dell'integrazione gaussiana multidimensionale e ne mostra un'applicazione ad un modello meccanico-statistico sugli *spin glasses*.

Il primo capitolo, di generalità sugli spazi di probabilità e sulle variabili aleatorie, ha lo scopo di fissare le idee sull'ambiente in cui ci si muoverà.

Nel secondo capitolo ci si sofferma a definire e descrivere la distribuzione gaussiana in una ed in n dimensioni. In particolare, si considera separatamente il caso bivariato, che bene mette in luce le varie proprietà e caratteristiche: a tal proposito, è dato il listato di uno specifico programma al calcolatore (scritto dall'autore) che genera una nube di punti gaussiani centrati attorno ad un valor medio e con varianza e correlazione desiderati.

Nel terzo capitolo si enuncia il teorema di integrazione gaussiana per parti, del quale sia se ne dà una dimostrazione diretta sia si propone la prova di M. Talagrand. Vengono illustrate inoltre varie conseguenze di questo importante teorema, tra cui la formula di Wick.

Infine, un ultimo capitolo prende in esame il modello meccanico-statistico aleatorio di Sherrington-Kirkpatrick e presenta un'applicazione della formula di Wick al calcolo della stabilità termodinamica degli *spin glasses*, ricavando il primo polinomio di Aizenman-Contucci.

Indice

Introduzione	i
1 Spazi di probabilità e variabili aleatorie	1
2 La distribuzione gaussiana	5
2.1 Caso unidimensionale	5
2.1.1 Determinazione della costante K di normalizzazione . .	6
2.1.2 Significato probabilistico di μ e di σ	6
2.1.3 Distribuzione normale standard	7
2.2 Caso multivariato	7
2.2.1 Determinazione della costante K di normalizzazione . .	8
2.2.2 Significato probabilistico di μ e di A	8
2.3 Caso 2-dimensionale	10
2.3.1 Insiemi di livello	11
2.3.2 Applicazione	13
3 Alcuni importanti risultati e la formula di Wick	17
3.1 Integrazione gaussiana per parti	17
3.2 Conseguenze	20
4 Applicazione della formula di Wick al calcolo della stabilità termodinamica degli <i>spin glasses</i>	25
A Integrale di Gauss	31
B Metodo di Box-Muller	33
C <i>File</i> di funzioni	35

Bibliografia

39

Elenco delle figure

2.1	Grafico della funzione densità di probabilità di una variabile aleatoria con distribuzione gaussiana di media 1 e varianza 4.	5
2.2	Grafico della funzione densità di probabilità di una variabile aleatoria con distribuzione gaussiana standard.	7
2.3	Grafico della funzione densità di probabilità di un vettore aleatorio con distribuzione gaussiana bidimensionale $\mathcal{N}((0, 0), (2, 5))$, $\rho = 0$	11
2.4	Curve di livello tracciate sul grafico della funzione densità di probabilità di un vettore aleatorio con distribuzione $\mathcal{N}((0, 0), (2, 5))$	12
2.5	Grafico di 1000 punti con distribuzione gaussiana bivariata con media $(1, 1)$, varianza $(1, 1)$ e coefficiente di correlazione $\rho = 0.25$	16
2.6	Grafico di 1000 punti con distribuzione gaussiana bivariata con media $(1, 1)$, varianza $(1, 1)$ e coefficiente di correlazione $\rho = 0.9$	16

Capitolo 1

Spazi di probabilità e variabili aleatorie

Sia Ω un insieme non vuoto.

Definizione 1.1 (σ -algebra). Una σ -algebra (o tribù) \mathcal{F} è una famiglia di sottoinsiemi di Ω t.c.

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(ii) $F \in \mathcal{F} \implies F^c = \Omega \setminus F \in \mathcal{F}$

(iii) $\forall (F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ successione in \mathcal{F} , $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \in \mathcal{F}$

Osservazione 1. $\Omega \in \mathcal{F}$

Osservazione 2. $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \in \mathcal{F}$

Definizione 1.2 (σ -algebra generata). Sia \mathcal{M} una famiglia di sottoinsiemi di Ω . Si chiama σ -algebra generata da \mathcal{M} la più piccola σ -algebra contenente \mathcal{M} , ossia

$$\sigma(\mathcal{M}) = \bigcap_{\mathcal{F} \text{ } \sigma\text{-algebra } \supseteq \mathcal{M}} \mathcal{F}$$

Definizione 1.3 (σ -algebra di Borel). Si chiama σ -algebra di Borel la σ -algebra

$$\mathcal{B} = \{H \mid H \text{ aperto di } \mathbb{R}^n\}$$

Definizione 1.4 (misura di probabilità). Una misura di probabilità sulla σ -algebra \mathcal{F} è un'applicazione

$$P : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty[$$

tale che:

- (i) $P(F) \geq 0 \quad \forall F \in \mathcal{F}$
- (ii) $P(\Omega) = 1$
- (iii) $\forall (F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ successione di elementi di \mathcal{F} a due a due disgiunti (ossia t.c. $F_i \cap F_j = \emptyset$ per $i \neq j$), vale che

$$P\left(\bigcup_{i \geq 1} F_i\right) = \sum_{i \geq 1} P(F_i)$$

I precedenti punti sono detti assiomi di Kolmogorov.

Ne viene che

- (i) $0 \leq P(F) \leq 1 \quad \forall F \in \mathcal{F}$
- (ii) $P(\emptyset) = 0$
- (iii) $P(F^c) = 1 - P(F) \quad \forall F \in \mathcal{F}$

Definizione 1.5 (spazio di probabilità). Uno spazio di probabilità è una terna ordinata (Ω, \mathcal{F}, P) con \mathcal{F} σ -algebra su Ω e P misura di probabilità su \mathcal{F} .

L'insieme Ω si chiama spazio campionario. Un elemento $E \in \mathcal{F}$ è detto evento e $P(E)$ è detta probabilità dell'evento E . Un evento E tale per cui $P(E) = 1$ (risp. $P(E) = 0$) si dice certo (risp. impossibile).

Definizione 1.6 (densità di probabilità). Sia $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione \mathcal{B} -misurabile, non-negativa e t.c. $\int_{\mathbb{R}} p(x) dx = 1$. Allora si dice che p è la densità della misura di probabilità P così definita:

$$P(H) = \int_H p(x) dx, \quad \text{con } H \in \mathcal{B}$$

Definizione 1.7 (variabile aleatoria, vettore aleatorio). Un vettore aleatorio su (Ω, \mathcal{F}, P) è una funzione

$$\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

tale che

$$\xi^{-1}(H) \in \mathcal{F}, \quad \text{con } H \in \mathcal{B}$$

Per $n = 1$, si parla di variabile aleatoria (reale).

Definizione 1.8 (distribuzione). Sia ξ un vettore aleatorio. Si chiama distribuzione di ξ la funzione

$$\begin{aligned} P^{(\xi)} : \mathbb{R}^n &\rightarrow [0, 1] \\ y &\mapsto P(\xi \leq y) \end{aligned}$$

Nel caso particolare in cui $n = 1$, se ξ ha densità p allora

$$P^{(\xi)}(y) = P(\xi \leq y) = \int_{-\infty}^y p(x) dx$$

Definizione 1.9 (valore di aspettazione). Sia ξ un vettore aleatorio su (Ω, \mathcal{F}, P) . Il valore di aspettazione o valore atteso di ξ è il vettore di \mathbb{R}^n

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_{\Omega} \xi dP$$

Intuitivamente, il valore di aspettazione è una sorta di media dei valori assunti da ξ , pesati rispetto alla probabilità P .

Risulta che, se ξ è una variabile aleatoria reale con densità di probabilità $p(x)$, il valore di aspettazione è dato da

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx,$$

qualora tale integrale converga assolutamente.

Definizione 1.10 (varianza). Sia ξ una variabile aleatoria reale. Allora la sua varianza è

$$\text{Var}(\xi) = \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}(\xi))^2)$$

Intuitivamente, la varianza indica di quanto ξ si scosta in media dal proprio valore atteso.

Vale che

$$\text{Var}(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}(\xi))^2$$

Inoltre

$$\text{Var}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}(\xi))^2 p(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx \right)^2,$$

se tali integrali convergono assolutamente.

Definizione 1.11 (covarianza). Siano ξ, η due variabili aleatorie reali. Allora la loro covarianza è

$$\text{Cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}(\xi)) \mathbb{E}(\eta - \mathbb{E}(\eta))$$

Nel caso in cui $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ sia un vettore aleatorio, la matrice di covarianza $C = (C_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ è definita da

$$C_{i,j} = \text{Cov}(\xi_i, \xi_j), \quad \text{per } i, j = 1, \dots, n$$

ossia

$$C = \begin{pmatrix} \text{Var}(\xi_1) & \text{Cov}(\xi_1, \xi_2) & \cdots & \text{Cov}(\xi_1, \xi_n) \\ \text{Cov}(\xi_2, \xi_1) & \text{Var}(\xi_2) & \cdots & \text{Cov}(\xi_2, \xi_n) \\ \vdots & & \ddots & \\ \text{Cov}(\xi_n, \xi_1) & \text{Cov}(\xi_n, \xi_2) & \cdots & \text{Var}(\xi_n) \end{pmatrix}$$

Osservazione 3. Si noti che $\text{Cov}(\xi_i, \xi_i) = \text{Var}(\xi_i)$. Inoltre, poichè $\text{Cov}(\xi_i, \xi_j) = \text{Cov}(\xi_j, \xi_i)$, la matrice di covarianza è simmetrica.

Definizione 1.12 (indipendenza). Sia (Ω, \mathcal{F}, P) uno spazio di probabilità e siano $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n$ sotto- σ -algebre di \mathcal{F} . $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n$ si dicono indipendenti se, per ogni insieme di eventi $G_i \in \mathcal{G}_i$, con $i = 1, \dots, n$, vale

$$P(G_1 \cap \dots \cap G_n) = P(G_1) \cap \dots \cap P(G_n)$$

Se ξ_1, \dots, ξ_n sono variabili aleatorie, esse si dicono indipendenti se lo sono le corrispondenti σ -algebre generate.

Capitolo 2

La distribuzione gaussiana

2.1 Caso unidimensionale

Definizione 2.1. Sia ξ una variabile aleatoria. Siano poi $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Si dice che ξ ha distribuzione gaussiana di parametri μ, σ se la sua densità di probabilità è data da:

$$p(x) = Ke^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}, \quad \text{con } x \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

In questo caso si scrive $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

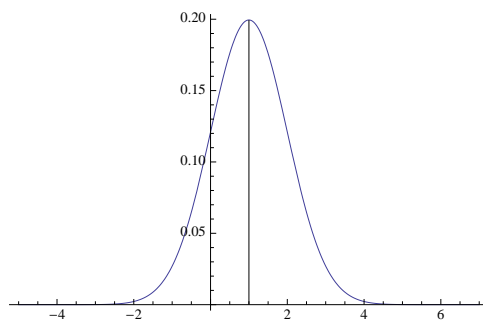


Figura 2.1: Grafico della funzione densità di probabilità di una variabile aleatoria con distribuzione gaussiana di media 1 e varianza 4.

2.1.1 Determinazione della costante K di normalizzazione

Poichè per gli assiomi di Kolmogorov deve essere $\int_{\mathbb{R}} p(x) dx = 1$, allora:

$$\frac{1}{K} = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}} \sigma dy = \sigma \sqrt{2\pi},$$

ove si è posto $\frac{x-\mu}{\sigma} = y$. Quindi:

$$K = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}$$

2.1.2 Significato probabilistico di μ e di σ

Il valore di aspettazione di ξ è dato da:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi) &= K \int_{\mathbb{R}} x e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx = \\ &= K \int_{\mathbb{R}} (x - \mu) e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx + \mu = \quad \left(\frac{x-\mu}{\sigma} = y \right) \\ &= \underbrace{K \int_{\mathbb{R}} \sigma y e^{-\frac{y^2}{2}} \sigma dy}_{=0 \text{ (funzione dispari)}} + \mu = \mu, \end{aligned}$$

Quindi μ è il valore di aspettazione della variabile aleatoria ξ .

Ora, la varianza di ξ è:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\xi) &= \mathbb{E}(\xi^2) - \mathbb{E}(\xi)^2 = \\ &= K \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx - \mu^2 \end{aligned}$$

Con il cambiamento di variabili $\frac{x-\mu}{\sigma} = y$, si ottiene:

$$\begin{aligned}
 & K \int_{\mathbb{R}} (\sigma y + \mu)^2 e^{-\frac{y^2}{2}} \sigma \, dy - \mu^2 = \\
 = & K \left(\int_{\mathbb{R}} \sigma^2 y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} \sigma \, dy + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} 2\sigma y \mu e^{-\frac{y^2}{2}} \sigma \, dy}_{=0 \text{ (funzione dispari)}} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \mu^2 e^{-\frac{y^2}{2}} \sigma \, dy}_{=\sqrt{2\pi}\sigma\mu^2} \right) - \mu^2 = \\
 = & \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(\sigma^3 \int_{\mathbb{R}} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} \, dy + \sqrt{2\pi}\sigma\mu^2 \right) - \mu^2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \sigma^3 \sqrt{2\pi} = \sigma^2
 \end{aligned}$$

Quindi σ^2 rappresenta la varianza della variabile aleatoria ξ .

2.1.3 Distribuzione normale standard

Nel caso particolare in cui $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ si parla di distribuzione normale standard $\mathcal{N}(0, 1)$, avente densità di probabilità:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \text{con } x \in \mathbb{R}.$$

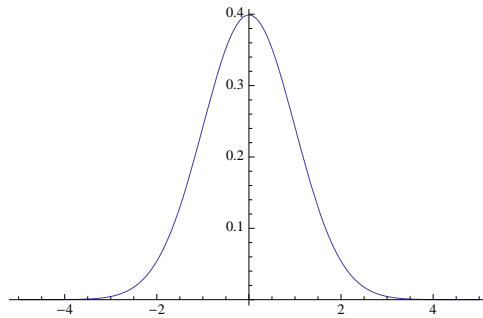


Figura 2.2: Grafico della funzione densità di probabilità di una variabile aleatoria con distribuzione gaussiana standard.

2.2 Caso multivariato

Definizione 2.2. Sia $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ un vettore aleatorio. Siano poi A una matrice $n \times n$ simmetrica definita positiva a valori reali ed $\mu \in \mathbb{R}^n$. Si dice

che ξ ha distribuzione gaussiana se la sua densità di probabilità è data da:

$$p(x) = Ke^{-\frac{1}{2}\langle A(x-\mu), x-\mu \rangle}, \quad \text{con } x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.2)$$

2.2.1 Determinazione della costante K di normalizzazione

Affinchè $\int_{\mathbb{R}^n} p(x)dx = 1$, deve essere:

$$\frac{1}{K} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle A(x-\mu), x-\mu \rangle} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle Ay, y \rangle} dy,$$

ove si è posto $x - \mu = y$. Essendo A simmetrica, è diagonalizzabile; esisterà dunque una matrice S ortogonale ($S^t = S^{-1}$) t.c. $S^t A S = D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$. Si osservi che $\det D = \det A$. Con il cambiamento di variabili $y = Sz$, si ottiene:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle ASz, Sz \rangle} dz = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle Dz, z \rangle} dz = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n d_i z_i^2} dz = \\ & = \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}d_i z_i^2} dz_i = \prod_{i=1}^n \sqrt{\frac{2\pi}{d_i}} = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det D}} = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det A}}, \end{aligned}$$

da cui:

$$K = \frac{\sqrt{\det A}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$$

2.2.2 Significato probabilistico di μ e di A

Il valore di aspettazione di ξ_i è dato da:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi_i) &= K \int_{\mathbb{R}^n} x_i e^{-\frac{1}{2}\langle A(x-\mu), x-\mu \rangle} dx = \\ &= K \int_{\mathbb{R}^n} (x_i - \mu_i) e^{-\frac{1}{2}\langle A(x-\mu), x-\mu \rangle} dx + \mu_i = \\ &= K \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} y_i e^{-\frac{1}{2}\langle Ay, y \rangle} dy}_{=0 \text{ (funzione dispari)}} + \mu_i = \mu_i, \end{aligned}$$

ove si è posto $x - \mu = y$.

Quindi il vettore μ ha per componenti i valori di aspettazione delle variabili aleatorie ξ_i .

Ora, la covarianza di ξ_i e ξ_j è:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\xi_i, \xi_j) &= \mathbb{E}((\xi_i - \mu_i)(\xi_j - \mu_j)) = \\ &= K \int_{\mathbb{R}^n} (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) e^{-\frac{1}{2}\langle A(x-\mu), x-\mu \rangle} dx = \\ &= K \int_{\mathbb{R}^n} y_i y_j e^{-\frac{1}{2}\langle Ay, y \rangle} dy \end{aligned}$$

Con il cambiamento di variabili $y = Sz$ ($\Rightarrow y_i = \sum_{k=1}^n s_{ik} z_k$), ove S è una matrice ortogonale che diagonalizza A , si ottiene:

$$K \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k, h \in \{1, \dots, n\}} s_{ik} z_k s_{jh} z_h e^{-\frac{1}{2}\langle ASz, Sz \rangle} dz$$

Poichè per $h \neq k$ la funzione integranda è dispari, l'integrale precedente si riduce a

$$\begin{aligned} &K \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^n s_{ik} s_{jk} z_k^2 e^{-\frac{1}{2}\langle Dz, z \rangle} dz = \\ &= \sum_{k=1}^n s_{ik} s_{jk} K \int_{\mathbb{R}^n} z_k^2 e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n d_i z_i^2} dz = \\ &= \sum_{k=1}^n s_{ik} s_{jk} d_k^{-1} \in SD^{-1}S^t = A^{-1}, \end{aligned}$$

dove si è utilizzato il fatto che $\int_{\mathbb{R}} z_k z_h e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n d_i z_i^2} dz_i$ è uguale a $\sqrt{2\pi} d_k^{-\frac{3}{2}}$ per $h = k$.

Pertanto la matrice A è l'inversa della matrice di covarianza C .

Osservazione 4. Si noti che se $\text{Cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$ per $i \neq j$ allora A^{-1} e quindi anche A è diagonale. Così $p(x_1, \dots, x_n) = p(x_1) \cdot \dots \cdot p(x_n)$ e dunque ξ_1, \dots, ξ_n sono indipendenti. Questo vale nel solo caso gaussiano: in generale, infatti, covarianza nulla non implica indipendenza.

2.3 Caso 2-dimensionale

È interessante considerare a parte il caso bivariato. Indicando con ξ_1 e ξ_2 le componenti, la matrice di covarianza assume la forma:

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \text{Cov}(\xi_1, \xi_2) \\ \text{Cov}(\xi_1, \xi_2) & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix},$$

dove si è introdotto il coefficiente di correlazione $\rho = \rho_{12} = \frac{\text{Cov}(\xi_1, \xi_2)}{\sigma_1 \sigma_2}$ tra ξ_1 e ξ_2 . Quindi:

$$\begin{aligned} C^{-1} &= \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \rho^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho \sigma_1 \sigma_2 \\ -\rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{1 - \rho^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & -\frac{\rho}{\sigma_1 \sigma_2} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1 \sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\begin{pmatrix} x - \mu_1 & y - \mu_2 \end{pmatrix} C^{-1} \begin{pmatrix} x - \mu_1 \\ y - \mu_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - \rho^2} \left[\frac{(x - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2 \frac{\rho(x - \mu_1)(y - \mu_2)}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{(y - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]$$

ed essendo $\det C = (1 - \rho^2) \sigma_1^2 \sigma_2^2$, si trova:

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1 - \rho^2)} \left[\frac{(x - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2 \frac{\rho(x - \mu_1)(y - \mu_2)}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{(y - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]}$$

Viceversa, data una forma quadratica del tipo $\sum_{i,j} \alpha_{i,j} x_i x_j$, ci si può sempre ricondurre ad una rappresentazione matriciale associata ad una matrice simmetrica di componenti

$$a_{i,j} = \begin{cases} \alpha_{i,i} & \text{se } i = j \\ \frac{\alpha_{i,j} + \alpha_{j,i}}{2} & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

La matrice di covarianza C è diagonalizzabile in quanto simmetrica. Esiste dunque una matrice ortogonale S t.c. $S^t C S = D = \text{diag}(d_1, d_2)$. Si vuole ora trovare esplicitamente S nel caso in cui $\sigma_1 = \sigma_2$, ossia $C = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \rho \sigma^2 \\ \rho \sigma^2 & \sigma^2 \end{pmatrix}$. Una matrice che soddisfa tali condizioni è:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Difatti:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \\ & = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\sigma^2 + 2\rho\sigma^2 & 0 \\ 0 & 2\sigma^2 + 2\rho\sigma^2 \end{pmatrix} = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 + \rho & 0 \\ 0 & 1 + \rho \end{pmatrix} \end{aligned}$$

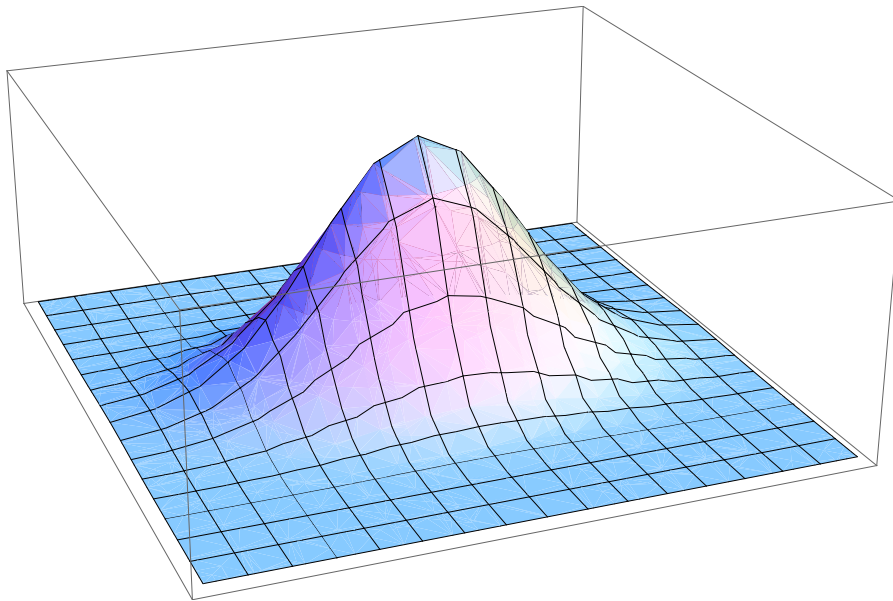


Figura 2.3: Grafico della funzione densità di probabilità di un vettore aleatorio con distribuzione gaussiana bidimensionale $\mathcal{N}((0,0), (2,5))$, $\rho = 0$.

2.3.1 Insiemi di livello

Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione e $k \in \mathbb{R}$, si chiama insieme di livello di f associato a k l'insieme

$$f^{-1}(k) = \{x \in A \mid f(x) = k\}$$

dato dalla preimmagine di k tramite f .

Gli insiemi di livello della densità di probabilità della gaussiana multivariata sono dati da

$$\langle A(x - \mu), x - \mu \rangle = k^2,$$

al variare di $k > 0$.

Non è restrittivo considerare il caso $\mu = 0$. Si vuole studiare l'insieme $\langle Ax, x \rangle = k^2$. Essendo C una matrice simmetrica e definita positiva, esiste una base ortonormale e_1, \dots, e_n di autovettori di C t.c.

$$C e_i = \lambda_i e_i$$

Inoltre, poichè $A = C^{-1}$,

$$A e_i = \frac{1}{\lambda_i} e_i$$

Quindi, nella base e_1, \dots, e_n , C è una matrice diagonale di elementi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ed $A = \text{diag} \left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n} \right)$. Allora, dette y_1, \dots, y_n le coordinate nella base e_1, \dots, e_n , l'equazione $\langle Ax, x \rangle = k^2$ diventa

$$\frac{y_1^2}{\lambda_1} + \dots + \frac{y_n^2}{\lambda_n} = k^2,$$

che rappresenta un'ellisse avente come assi gli assi cartesiani e come ampiezze i valori $\sqrt{\lambda_i}$.

Pertanto, nelle coordinate originarie x_1, \dots, x_n , gli insiemi di livello sono ellissoidi con assi dati dagli autovettori di C ed ampiezze lungo gli assi date dalle radici quadrate dei corrispondenti autovalori.

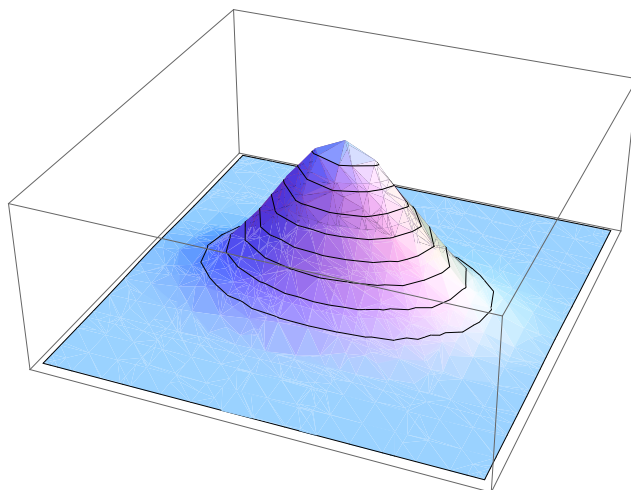


Figura 2.4: Curve di livello tracciate sul grafico della funzione densità di probabilità di un vettore aleatorio con distribuzione $\mathcal{N}((0, 0), (2, 5))$.

2.3.2 Applicazione

Qui di seguito è riportato il *main* di un programma scritto in linguaggio C che tratta le gaussiane bivariate.

Prendendo in *input* da terminale il valor medio (μ_1, μ_2) , la varianza (σ_1^2, σ_2^2) , il coefficiente di correlazione ρ ed un intero n , genera n numeri casuali gaussiani con distribuzione $\mathcal{N}((\mu_1, \mu_2), (\sigma_1, \sigma_2))$ e coefficiente di correlazione ρ e li rappresenta attraverso punti su un piano cartesiano.

L'algoritmo si basa sul metodo di Box-Muller (v. Appendice B). Per il *file* delle funzioni, si veda l'Appendice C.

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>
#include <sys/types.h>
#include "gra_lib.h"
#include "draw_fun.h"

#define DIM 10000

int main()
{
    const double PI=3.141593;
    const float EPS=0.1;
    Window Wscene,Warea;
    char ch;
    int n,i,vxmin,vymin,vxmax,vymax;
    double x1[DIM],x2[DIM],y1[DIM],y2[DIM],z1[DIM],z2[DIM],
    mu1,mu2,sigma1_quadro,sigma2_quadro,sigma1,sigma2,rho,xmin,xmax,ymin,ymax;

    printf("Introdurre la media mu1 sull'asse X1.\n");
    scanf("%lf", &mu1);
    printf("Introdurre la media mu2 sull'asse X2.\n");
    scanf("%lf", &mu2);
    printf("Introdurre la varianza sigma1_quadro sull'asse X1.\n");
    scanf("%lf", &sigma1_quadro);
    printf("Introdurre la varianza sigma2_quadro sull'asse X2.\n");
    scanf("%lf", &sigma2_quadro);
    printf("Introdurre il coefficiente di correlazione rho.\n");
    scanf("%lf", &rho);
    printf("Introdurre il numero n di punti con distribuzione gaussiana di media (mu1,mu2),
    varianza (sigma1_quadro,sigma2_quadro) e coefficiente di correlazione rho
    che si intendono generare.\n");
    scanf("%d", &n);
```

```
sigma1=(double)sqrt(sigma1_quadro);
sigma2=(double)sqrt(sigma2_quadro);

/* Generazione di due liste x1 e x2 di numeri pseudo-casuali compresi tra 0 e 1 */

srand(time(NULL));
for (i=0; i<n; i++)
  x1[i]=(double)(rand())/((double)RAND_MAX);
for (i=0; i<n; i++)
  x2[i]=(double)(rand())/((double)RAND_MAX);

/* Trasformazioni di Box-Muller: vengono definite altre due liste y1 e y2 di numeri
aventi distribuzione gaussiana standard */

for (i=0; i<n; i++)
  y1[i]=sqrt(-2*log(x2[i]))*sin(2*PI*x1[i]);
for (i=0; i<n; i++)
  y2[i]=sqrt(-2*log(x2[i]))*cos(2*PI*x1[i]);

/* z1 --> N(mu1,sigma1) z2 --> N(mu2,sigma2), con coefficiente di aggregazione rho */

for (i=0; i<n; i++)
  z1[i]=mu1+rho*sigma1*y1[i]+sqrt(1-rho*rho)*sigma1*y2[i];
for (i=0; i<n; i++)
  z2[i]=mu2+sigma2*y1[i];

/* Grafica */

vxmin=0;
vxmax=1250;
vymin=0;
vymax=900;

InitGraph();
ForeColor(16);
CreateWindow(&Wscene,vxmin,vymin,vxmax-vxmin,vymax-vymin,WHITE,
  "Distribuzione gaussiana bivariata");
vxmin+=10;
vxmax-=200;
vymin+=10;
vymax-=50;
ForeColor(RED);
```

```
CreateSubWindow(&Warea,Wscene,vxmin,vymin,vxmax-vxmin,vymax-vymin,WHITE);

extent(n,z1,z2,&xmin,&xmax,&ymin,&ymax);

ClearWindow(Warea);

draw_points(Warea,n,xmin-EPS,xmax+EPS,ymin-EPS,ymax+EPS,vxmin,vxmax,vymin,vymax,z1,z2);
draw_star(Warea,1,xmin-EPS,xmax+EPS,ymin-EPS,ymax+EPS,vxmin,vxmax,vymin,vymax,mu1,mu2);

printf("Press Enter to EXIT.\n");
scanf("%c",&ch);

return 0;

}
```

Ecco due *screenshots* che propongono due diversi esempi di *output* del programma.

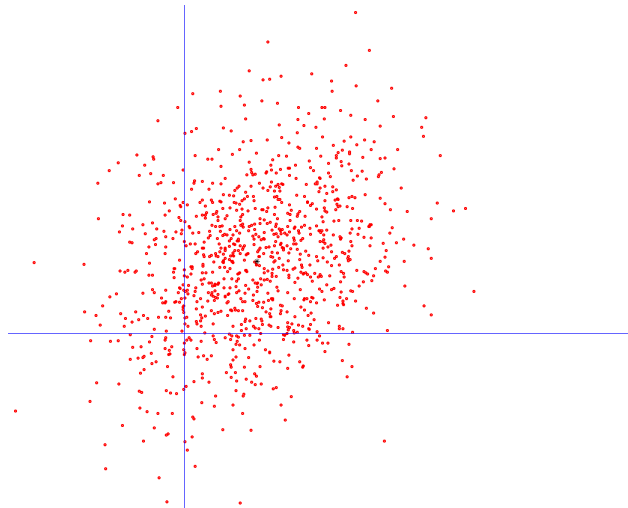


Figura 2.5: Grafico di 1000 punti con distribuzione gaussiana bivariata con media $(1, 1)$, varianza $(1, 1)$ e coefficiente di correlazione $\rho = 0.25$.

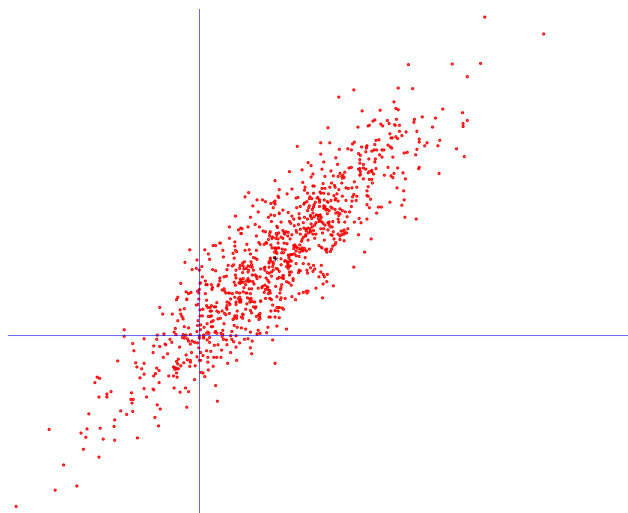


Figura 2.6: Grafico di 1000 punti con distribuzione gaussiana bivariata con media $(1, 1)$, varianza $(1, 1)$ e coefficiente di correlazione $\rho = 0.9$.

Capitolo 3

Alcuni importanti risultati e la formula di Wick

3.1 Integrazione gaussiana per parti

Teorema 3.1.1 (di integrazione gaussiana per parti). *Sia $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ un vettore di variabili aleatorie gaussiane con matrice di covarianza $C = (C_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ e sia F una funzione differenziabile e limitata. Allora:*

$$\mathbb{E}(\xi_i F(\xi)) = \sum_{j=1}^n C_{i,j} \mathbb{E} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_j}(\xi) \right) \quad (3.1)$$

Dimostrazione.

Non è restrittivo considerare variabili aleatorie a media nulla: $\eta = \xi - \mu$.

- Caso unidimensionale.

1. Sia $\eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Si deve provare che $\mathbb{E}(\eta F(\eta)) = \mathbb{E}(F'(\eta))$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(F'(\eta)) &= K \int_{\mathbb{R}} \frac{dF}{dy}(y) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \\ &= K \left[F(y) e^{-\frac{1}{2}y^2} \right]_{y=-\infty}^{y=+\infty} - K \int_{\mathbb{R}} F(y) \frac{d}{dy} \left(e^{-\frac{1}{2}y^2} \right) dy = \\ &= 0 + K \int_{\mathbb{R}} F(y) e^{-\frac{1}{2}y^2} y dy = \mathbb{E}(\eta F(\eta)) \end{aligned}$$

2. Più in generale, se η è t.c. $\text{Var}(\eta) = \sigma^2$, si ha:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(F'(\eta)) &= K \int_{\mathbb{R}} \frac{dF}{dy}(y) e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = \\ &= K \left[F(y) e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \right]_{y=-\infty}^{y=+\infty} - K \int_{\mathbb{R}} F(y) \frac{d}{dy} \left(e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \right) dy = \\ &= 0 + K \int_{\mathbb{R}} F(y) e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \frac{y}{\sigma^2} dy = \quad (\frac{y}{\sigma}=t) \\ &= K \int_{\mathbb{R}} F(y) e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{t}{\sigma} \frac{1}{\sigma} dt = \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E}(\eta F(\eta)), \text{ ossia}\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(\eta F(\eta)) = \sigma^2 \mathbb{E}(F'(\eta)) = \mathbb{E}(\eta^2) \mathbb{E}(F'(\eta))$$

• Caso multivariato.

1. Indipendenza. Siano η_1, \dots, η_n variabili aleatorie gaussiane indipendenti con varianza unitaria ($A = C = I_n$, $C_{i,j} = \delta_{i,j}$). Si tratta di mostrare che $\mathbb{E}(\eta_i F(\eta)) = \mathbb{E}\left(\frac{\partial F}{\partial \eta_i}\right)$ ¹. Si ha:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{\partial F}{\partial \eta_i}\right) &= K \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial y_i} F(y) e^{-\frac{1}{2}\langle y, y \rangle} dy^{(n)} = \\ &= K \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial y_i} F(y) e^{-\frac{1}{2}\|y\|^2} dy^{(n)} = \\ &= K \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[F(y) e^{-\frac{1}{2}\|y\|^2} \right]_{y_i=-\infty}^{y_i=+\infty} dy^{(n-1)} - \\ &\quad - K \int_{\mathbb{R}^n} F(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \left(e^{-\frac{1}{2}\|y\|^2} \right) dy^{(n)} = \\ &= 0 + K \int_{\mathbb{R}^n} F(y) e^{-\frac{1}{2}\|y\|^2} y_i dy^{(n)} = \\ &= K \int_{\mathbb{R}^n} F(y) e^{-\frac{1}{2}\langle y, y \rangle} y_i dy^{(n)} = \mathbb{E}(\eta_i F(\eta))\end{aligned}$$

¹Infatti, essendo $C_{i,j} = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$,

$$\sum_{j=1}^n C_{i,j} \mathbb{E}\left(\frac{\partial F}{\partial \eta_j}\right) = C_{i,i} \mathbb{E}\left(\frac{\partial F}{\partial \eta_i}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{\partial F}{\partial \eta_i}\right)$$

2. Caso generale (variabili aleatorie non indipendenti). Sia $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ un vettore aleatorio gaussiano e sia $C = A^{-1}$ la matrice di covarianza.

Direttamente:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(\frac{\partial F}{\partial \eta_j} \right) &= K \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial y_j} F(y) e^{-\frac{1}{2} \langle Ay, y \rangle} dy^{(n)} = \\
&= K \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[F(y) e^{-\frac{1}{2} \langle Ay, y \rangle} \right]_{y_j=-\infty}^{y_j=+\infty} dy^{(n-1)} - \\
&\quad - K \int_{\mathbb{R}^n} F(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \left(e^{-\frac{1}{2} \langle Ay, y \rangle} \right) dy^{(n)} \stackrel{2}{=} \\
&= 0 + K \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^n a_{j,k} y_k e^{-\frac{1}{2} \langle Ay, y \rangle} F(y) dy^{(n)} = \\
&= \sum_{k=1}^n a_{j,k} K \int_{\mathbb{R}^n} y_k F(y) e^{-\frac{1}{2} \langle Ay, y \rangle} dy^{(n)} = \\
&= \sum_{k=1}^n a_{j,k} \mathbb{E}(\eta_k F(\eta))
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n C_{i,j} \mathbb{E} \left(\frac{\partial}{\partial \eta_j} F(\eta) \right) &= \sum_{j=1}^n C_{i,j} \sum_{k=1}^n a_{j,k} \mathbb{E}(\eta_k F(\eta)) = \\
&= \sum_{k=1}^n \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n C_{i,j} a_{j,k} \right)}_{=\delta_{i,k}} \mathbb{E}(\eta_k F(\eta)) = \\
&= \mathbb{E}(\eta_i F(\eta))
\end{aligned}$$

²I termini del prodotto scalare $\langle Ax, x \rangle$ in cui compare x_j sono:

$$2 a_{j,1} x_j x_1 + 2 a_{j,2} x_j x_2 + \dots + a_{j,j} x_j^2 + \dots + 2 a_{j,n} x_j x_n$$

Oppure (*Dimostrazione di M. Talagrand*):

Sia \mathcal{G} uno spazio vettoriale gaussiano (i.e. spazio vettoriale delle combinazioni lineari di v.a. gaussiane) e siano $g, g_1, \dots, g_n \in \mathcal{G}$. Si considerino le variabili aleatorie:

$$g'_k = g_k - g \frac{\mathbb{E}(g_k g)}{\mathbb{E}(g^2)} \quad (3.2)$$

Esse sono tali che $\mathbb{E}(g'_k g) = 0$, così g è indipendente dalla famiglia (g'_1, \dots, g'_n) .

Se F è una funzione reale di variabile reale differenziabile e limitata, vale che (cfr. caso unidimensionale):

$$\mathbb{E}(gF(g)) = \mathbb{E}(g^2) \mathbb{E}(F'(g)) \quad (3.3)$$

Sia ora F una funzione di n variabili. Si considerino le variabili g'_k di (3.2) e si applichi la (3.3) a $(g'_k)_{k \leq n}$. Poichè $g_k = g'_k + g \frac{\mathbb{E}(g_k g)}{\mathbb{E}(g^2)}$, si ha:

$$\mathbb{E}(gF(g_1, \dots, g_n)) = \sum_{k \leq n} \mathbb{E}(g g_k) \mathbb{E}\left(\frac{\partial F}{\partial g_k}(g_1, \dots, g_n)\right)$$

□

3.2 Conseguenze

Teorema 3.2.1 (caso $n = 2$). *Siano η_1, η_2 variabili aleatorie gaussiane a media nulla con covarianza $C_{1,2}$ e sia F differenziabile e limitata. Allora:*

$$\mathbb{E}(\eta_1 \eta_2) = C_{1,2} \quad (3.4)$$

Dimostrazione. Viene subito prendendo come F la variabile aleatoria η_2 e considerando che $\mathbb{E}(\eta_2) = 0$.

Oppure con calcolo diretto:

$$\mathbb{E}(\eta_1 \eta_2) = K \iint_{\mathbb{R}^2} y_1 y_2 e^{-\frac{1}{2}\langle Ay, y \rangle} dy_1 dy_2$$

Sia ora S una matrice ortogonale ($S^t = S^{-1}$) t.c. $S^t A S = D = \text{diag}(d_1, d_2)$.
Con il cambiamento di variabili $y = Sz$ ($\Rightarrow y_i = \sum_{k=1,2} s_{ik} z_k$), si ottiene:

$$K \iint_{\mathbb{R}^2} \sum_{k,h \in \{1,2\}} s_{1k} z_k s_{2h} z_h e^{-\frac{1}{2} \langle A S z, S z \rangle} dz_1 dz_2$$

Poichè per $h \neq k$ la funzione integranda è dispari, l'integrale precedente si riduce a

$$\begin{aligned} & K \iint_{\mathbb{R}^2} \sum_{k=1}^2 s_{1k} s_{2k} z_k^2 e^{-\frac{1}{2} \langle D z, z \rangle} dz_1 dz_2 = \\ &= \sum_{k=1}^2 s_{1k} s_{2k} K \iint_{\mathbb{R}^2} z_k^2 e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1,2} d_i z_i^2} dz_1 dz_2 = \sum_{k=1}^2 s_{1k} s_{2k} d_k^{-1} = \\ &= \frac{s_{11} s_{21}}{d_1} + \frac{s_{12} s_{22}}{d_2} = \frac{s_{11} s_{21} d_2 + s_{12} s_{22} d_1}{d_1 d_2} = (A^{-1})_{1,2} = C_{1,2} \end{aligned}$$

□

Teorema 3.2.2 (caso $n = 3$). *Siano η_1, η_2, η_3 variabili aleatorie gaussiane a media nulla con matrice di covarianza $C = (C_{i,j})_{i,j=1,\dots,3}$ e sia F differenziabile e limitata. Allora:*

$$\mathbb{E}(\eta_1 \eta_2 \eta_3) = 0 \quad (3.5)$$

Dimostrazione.

$$\mathbb{E}(\underbrace{\eta_1 \eta_2 \eta_3}_F) = \sum_{j=1}^3 C_{1,j} \mathbb{E} \left(\frac{\partial}{\partial \eta_j} (\eta_2 \eta_3) \right) = 0 + C_{1,2} \mathbb{E}(\eta_3) + C_{1,3} \mathbb{E}(\eta_2) = 0$$

□

Teorema 3.2.3 (caso n dispari, $n = 2k+1$). *Siano $\eta_1, \dots, \eta_{2k+1}$ $2k+1$ variabili aleatorie gaussiane a media nulla con matrice di covarianza $C = (C_{i,j})_{i,j=1,\dots,2k+1}$ e sia F differenziabile e limitata. Allora:*

$$\mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^{2k+1} \eta_i \right) = 0 \quad (3.6)$$

Dimostrazione. Per induzione su k . L'enunciato è vero per $k = 1$ (cfr. Teor. 3.2.2). Lo si suppone ora vero per $2k - 1$ e lo si dimostra per $2k + 1$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\underbrace{\eta_1 \cdots \eta_{2k}}_F \eta_{2k+1}) &= \sum_{j=1}^{2k+1} C_{2k+1,j} \mathbb{E} \left(\frac{\partial}{\partial \eta_j} (\eta_1 \cdots \eta_{2k}) \right) = \\ &= \sum_{j=1}^{2k} C_{2k+1,j} \underbrace{\mathbb{E}(\eta_1 \cdots \eta_{j-1} \eta_{j+1} \cdots \eta_{2k})}_{\substack{2k-1 \text{ termini} \\ =0 \text{ (ip. indutt.)}}} + 0 = 0 \end{aligned}$$

□

Teorema 3.2.4 (caso n pari, $n = 2k$: **formula di Wick**). *Siano η_1, \dots, η_{2k} $2k$ variabili aleatorie gaussiane a media nulla con matrice di covarianza $C = (C_{i,j})_{i,j=1,\dots,2k}$ e sia F differenziabile e limitata. Allora:*

$$\mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^{2k} \eta_i \right) = \sum_{\pi \in \underline{2k}} \prod_{h=0}^{k-1} C_{i_{2h+1}(\pi), i_{2h+2}(\pi)}, \quad (3.7)$$

ove π varia nell'insieme di tutte le possibili coppie di due indici su $\underline{2k} = \{1, 2, \dots, 2k\}$.

Dimostrazione. Per induzione su k . L'asserto è vero per $k = 1$ (cfr. Teor. 3.2.1). Lo si suppone ora vero per $2k - 2$ e lo si dimostra per $2k$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\underbrace{\eta_1 \cdots \eta_{2k-1}}_F \eta_{2k}) &= \sum_{j=1}^{2k} C_{2k,j} \mathbb{E} \left(\frac{\partial}{\partial \eta_j} (\eta_1 \cdots \eta_{2k-1}) \right) = \\ &= \sum_{j=1}^{2k-1} C_{2k,j} \underbrace{\mathbb{E}(\eta_1 \cdots \eta_{j-1} \eta_{j+1} \cdots \eta_{2k-1})}_{2k-2 \text{ termini}} + 0 = \\ \text{ip. indutt.} &= \sum_{j=1}^{2k-1} C_{2k,j} \left(\sum_{\pi' \in \underline{2k-2}} \prod_{h=0}^{k-2} C_{i_{2h+1}(\pi'), i_{2h+2}(\pi')} \right) = \\ &= \sum_{\pi \in \underline{2k}} \prod_{h=0}^{k-1} C_{i_{2h+1}(\pi), i_{2h+2}(\pi)} \end{aligned}$$

□

Inoltre:

Teorema 3.2.5.

$$\mathbb{E}(e^{\langle \lambda, \eta \rangle}) = e^{\frac{1}{2} \langle C \lambda, \lambda \rangle}$$

Dimostrazione.

$$\mathbb{E}(e^{\langle \lambda, \eta \rangle}) = K \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \lambda, y \rangle} e^{-\frac{1}{2} \langle A y, y \rangle} dy$$

Sia ora S una matrice ortogonale ($S^t = S^{-1}$) t.c. $S^t A S = D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$.

Con il cambiamento di variabili $y = Sz$ e ponendo $S^{-1} \lambda =: \nu$, si ottiene:

$$\begin{aligned} & K \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \lambda, Sz \rangle} e^{-\frac{1}{2} \langle A S z, S z \rangle} dz = K \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \nu, z \rangle} e^{-\frac{1}{2} \langle D z, z \rangle} dz = \\ & = K \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \nu, z \rangle} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_i z_i^2} dz \stackrel{3}{=} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\nu_i^2}{d_i}} = \\ & = e^{\frac{1}{2} \langle D^{-1} \nu, \nu \rangle} = e^{\frac{1}{2} \langle S D^{-1} S^{-1} \lambda, \lambda \rangle} = e^{\frac{1}{2} \langle A^{-1} \lambda, \lambda \rangle} = e^{\frac{1}{2} \langle C \lambda, \lambda \rangle} \end{aligned}$$

□

³Si ha che $\sqrt{\frac{d}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\nu z - \frac{1}{2} d z^2} dz = e^{\frac{1}{2} \frac{\nu^2}{d}}$, infatti:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{\nu z - \frac{1}{2} d z^2} dz &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2} (\sqrt{d} z - i \frac{\nu}{\sqrt{d}})^2 - \frac{\nu^2}{2d}} dz = e^{-\frac{\nu^2}{2d}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2} (\sqrt{d} z - i \frac{\nu}{\sqrt{d}})^2} dz = \\ &= e^{-\frac{\nu^2}{2d}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{d}} dt = e^{-\frac{\nu^2}{2d}} \frac{1}{\sqrt{d}} \sqrt{2\pi} \end{aligned}$$

Capitolo 4

Applicazione della formula di Wick al calcolo della stabilità termodinamica degli *spin glasses*

Si consideri il modello di Sherrington-Kirkpatrick (SK), la cui hamiltoniana è definita sulle variabili di *spin* $\sigma_i = \pm 1$, con $i = 1, \dots, N$, come

$$H(\sigma) = -\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{1 \leq i < j \leq N} J_{ij} \sigma_i \sigma_j,$$

ove J_{ij} sono $\frac{N(N-1)}{2}$ variabili indipendenti con distribuzione gaussiana standard. La funzione di partizione Z è data da

$$Z = \sum_{\sigma} e^{-H(\sigma)}$$

Si consideri ora la deformazione parametrizzata da $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$H \longrightarrow H + \lambda K =: H_{\lambda},$$

con

$$K(\sigma) = -\frac{1}{N} \sum_{1 \leq i < j \leq N} J'_{ij} \sigma_i \sigma_j,$$

dove J'_{ij} sono variabili gaussiane indipendenti identicamente distribuite, indipendenti dalle J_{ij} , la cui covarianza è

$$q_{\sigma, \sigma'}^2 = \left(\frac{1}{N} \sum_i \sigma_i \sigma'_i \right)^2$$

Si consideri poi un numero arbitrario r di copie dello stesso sistema, ciascun sistema avente hamiltoniana $H^{(l)}$, con $l = 1, \dots, r$.

Per ogni copia l , si denoti con $\omega^{(l)}(-)$ il valore di aspettazione sugli *spin*, mediato rispetto lo stato di Boltzman-Gibbs. Se $f(\sigma)$ è un osservabile, si ha:

$$\omega^{(l)}(f(\sigma)) = \frac{\sum_{\sigma} f(\sigma) e^{-H^{(l)}(\sigma)}}{Z^{(l)}}$$

Si indichi con Ω il prodotto di tutti gli ω sulle copie del sistema:

$$\Omega = \bigotimes_{l=1}^r \omega^{(l)}$$

La misura sulle J è denotata con $\text{Av}(-)$, ossia il simbolo $\text{Av}(-)$ sta ad indicare l'integrazione gaussiana.

La *quenched measure* "combinata" è il doppio *average*

$$\langle - \rangle := \text{Av}[\Omega(-)]$$

Infine, si introducono le misure "deformate":

$$\omega_{\lambda}^{(l)}(-) := \frac{\omega^{(l)}(-\exp(\lambda K))}{\omega^{(l)}(\exp(\lambda K))},$$

$$\Omega_{\lambda} := \bigotimes_l \omega_{\lambda}^{(l)}$$

e

$$\langle - \rangle_{\lambda} := \text{Av}[\Omega_{\lambda}(-)]$$

Si vogliono calcolare:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \langle q^2 \rangle_{\lambda} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \langle q^2 \rangle_{\lambda}$$

Anzitutto si osservi che:

$$\langle q_{\sigma,\tau}^2 \rangle = \text{Av} \left[\Omega(K(\sigma)K(\tau)) \right] \quad (4.1)$$

Infatti:

$$\begin{aligned} & \text{Av} \sum_{\sigma,\tau} \frac{K(\sigma)K(\tau) e^{-H_\lambda(\sigma)-H_\lambda(\tau)}}{Z^2} = \\ &= \sum_{\sigma,\tau} \text{Av} \frac{K(\sigma)K(\tau) e^{-H_\lambda(\sigma)-H_\lambda(\tau)}}{Z^2} = \\ &\stackrel{\text{indip.}}{=} \sum_{\sigma,\tau} \text{Av} [K(\sigma)K(\tau)] \text{Av} \frac{e^{-H_\lambda(\sigma)-H_\lambda(\tau)}}{Z^2} \end{aligned}$$

Ricordando la regola di Wick, si ottiene:

$$\sum_{\sigma,\tau} q_{\sigma,\tau}^2 \text{Av} \frac{e^{-H_\lambda(\sigma)-H_\lambda(\tau)}}{Z^2}$$

da cui, portando fuori la media dalla sommatoria:

$$\text{Av} \left[\Omega(q_{\sigma,\tau}^2) \right] = \langle q_{\sigma,\tau}^2 \rangle$$

Con calcolo esplicito, si trova che la derivata prima è:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \lambda} \langle q_{\sigma, \tau}^2 \rangle_\lambda &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \text{Av} \left[\Omega_\lambda(K(\sigma)K(\tau)) \right] = \\
&= \text{Av} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \Omega_\lambda(K(\sigma)K(\tau)) \right] = \\
&= \text{Av} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\sum_{\sigma, \tau} \frac{K(\sigma)K(\tau) e^{-H_\lambda(\sigma)} e^{-H_\lambda(\tau)}}{Z^2} \right) \right] = \\
&= \text{Av} \left[\sum_{\sigma, \tau} \frac{K(\sigma)K(\tau)(K(\sigma) + K(\tau)) e^{-H_\lambda(\sigma)} e^{-H_\lambda(\tau)} Z^2}{Z^4} - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{\sigma, \tau} \frac{K(\sigma)K(\tau) e^{-H_\lambda(\sigma)} e^{-H_\lambda(\tau)}}{Z^2} \cdot \sum_{\sigma, \tau} \left(\frac{K(\sigma) e^{-H_\lambda(\sigma)}}{Z} + \frac{K(\tau) e^{-H_\lambda(\tau)}}{Z} \right) \right] = \\
&= \text{Av} \left[\Omega_\lambda(K^2(\sigma)K(\tau)) + \Omega_\lambda(K(\sigma)K^2(\tau)) - \right. \\
&\quad \left. - \Omega_\lambda(K(\sigma)K(\tau)) \left(\Omega_\lambda(K(\sigma)) + \Omega_\lambda(K(\tau)) \right) \right] = \\
&= \text{Av} \left[\Omega_\lambda(K(\sigma)) \cdot \left(\Omega_\lambda(K(\sigma)K(\tau)) - \Omega_\lambda(K(\sigma))\Omega_\lambda(K(\tau)) \right) \right]
\end{aligned}$$

Tale derivata, in $\lambda = 0$, si annulla banalmente per disparità.

Osservando poi che

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \lambda} \text{Av} \left[\sum_{\sigma} \frac{f(\sigma) e^{-H_\lambda(\sigma)}}{Z} \right] = \\
&= \text{Av} \left[\sum_{\sigma} \frac{f(\sigma)K(\sigma) e^{-H_\lambda(\sigma)} Z}{Z^2} - \sum_{\sigma} \frac{K(\sigma) e^{-H_\lambda(\sigma)}}{Z} \cdot \sum_{\sigma} \frac{f(\sigma) e^{-H_\lambda(\sigma)}}{Z} \right],
\end{aligned}$$

una seconda derivazione rispetto a λ dà:

$$\begin{aligned}
&\text{Av} \left[\Omega_\lambda^2(K(\sigma)K(\tau)) - \right. \\
&\quad - 4\Omega_\lambda(K(\sigma))\Omega_\lambda(K(\tau))\Omega_\lambda(K(\sigma)K(\tau)) + \\
&\quad + 3\Omega_\lambda^2(K(\sigma))\Omega_\lambda^2(K(\tau)) + \\
&\quad \left. + \Omega_\lambda(K(\sigma))\Omega_\lambda(K(\sigma)K^2(\tau)) - \Omega_\lambda^2(K(\sigma))\Omega_\lambda(K^2(\tau)) \right]
\end{aligned}$$

Ora, in $\lambda = 0$ gli ultimi due termini si cancellano e per la regola di Wick si ottiene:

$$\langle q_{1,2}^4 \rangle - 4\langle q_{1,2}^2 q_{1,3}^2 \rangle + 3\langle q_{1,2}^2 q_{3,4}^2 \rangle, \quad (4.2)$$

che è il primo polinomio di Aizenman-Contucci.

Sotto l'ipotesi di stabilità termodinamica, deve essere:

$$\langle \text{---} \rangle_\lambda = \langle \text{---} \rangle$$

e quindi le derivate di qualsiasi ordine rispetto a λ devono annullarsi. In particolare, l'espressione (4.2) tenderà a zero al limite termodinamico.

Appendice A

Integrale di Gauss

Si vuole calcolare:

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

Si consideri:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dx \right) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) e^{-y^2} dy = \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) = I^2 \end{aligned}$$

Passando alle coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}, \quad \text{con } \rho > 0, \vartheta \in [0, 2\pi]$$

si ha:

$$\begin{aligned}
 \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-\rho^2 \cos^2 \vartheta - \rho^2 \sin^2 \vartheta} \rho d\rho d\vartheta = \\
 &= \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-\rho^2 (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta)} \rho d\rho d\vartheta = \\
 &= \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\vartheta = \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \rho \left(\int_0^{2\pi} d\vartheta \right) d\rho = \\
 &= 2\pi \int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho = \\
 &= 2\pi \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^y \rho e^{-\rho^2} d\rho = \\
 &= 2\pi \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[-\frac{e^{-\rho^2}}{2} \right]_{\rho=0}^{\rho=y} = \\
 &= 2\pi \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(-e^{y^2} + 1 \right) = \pi
 \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \begin{cases} I^2 & \text{(teorema di riduzione)} \\ \pi & \text{(cambiamento di variabili)} \end{cases}$$

In definitiva:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Appendice B

Metodo di Box-Muller

Dato un vettore x di variabili casuali, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, le cui componenti abbiano una funzione densità di probabilità $P(x)$, la corrispondente densità di probabilità $D(y)$ delle componenti del vettore $y = y(x)$ è data da

$$D(y) = P(x) |\det \mathcal{J}|, \quad (\text{B.1})$$

dove \mathcal{J} è una matrice $n \times n$ i cui elementi sono $\mathcal{J}_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial y_j}$.

Con questa premessa, si vuole ora determinare una trasformazione $y = y(x)$ che associ ad un vettore di variabili casuali x_i distribuite uniformemente un vettore di altrettante variabili la cui distribuzione sia quella di Gauss, con media nulla e varianza unitaria. Con un calcolatore, difatti, è possibile generare le x_i distribuite uniformemente all'interno di un intervallo $[a, b]$. La funzione densità di probabilità di ciascuna x_i è $P(x) = \frac{1}{b-a}$. Si può sempre scegliere $a = 0$ e $b = 1$, in modo tale che $P(x) = 1$.

Si consideri il caso $n = 2$.

L'equazione (B.1), riscritta, dà

$$\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{y_1^2}{2}} e^{-\frac{y_2^2}{2}} = \left| \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \frac{\partial x_2}{\partial y_2} - \frac{\partial x_2}{\partial y_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \right| \quad (\text{B.2})$$

Si devono dunque determinare le funzioni $x_1 = x_1(y_1, y_2)$ e $x_2 = x_2(y_1, y_2)$. Ora, per esempio

$$x_2 = e^{-\frac{y_1^2 + y_2^2}{2}} \quad (\text{B.3})$$

Sostituendo le derivate parziali di x_2 rispetto a y_1 e y_2 in (B.2) si trova

$$\left| y_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_2} - y_2 \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \right| = \frac{1}{2\pi} \quad (\text{B.4})$$

Essendo la differenza al primo membro una costante, sarà $x_1 = F\left(\frac{y_1}{y_2}\right)$; così:

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = F'\left(\frac{y_1}{y_2}\right) \frac{1}{y_2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial x_1}{\partial y_2} = -F'\left(\frac{y_1}{y_2}\right) \frac{y_1}{y_2^2}$$

La (B.4) diventa allora

$$\left| F'\left(\frac{y_1}{y_2}\right) \left(\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^2 + 1 \right) \right| = \frac{1}{2\pi}$$

da cui

$$\left| F'\left(\frac{y_1}{y_2}\right) \right| = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1 + \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^2},$$

la cui soluzione è:

$$F\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{y_1}{y_2}\right) + C \quad (\text{B.5})$$

Prendendo $C = 0$, da (B.3) e da (B.5) e ricordando che $F\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = x_1$, si ottiene:

$$\frac{y_1}{y_2} = \tan(2\pi x_1) \quad \text{e} \quad y_1^2 + y_2^2 = -2 \ln x_2 \quad (\text{B.6})$$

Pertanto:

$$\begin{cases} y_1 = \sqrt{-2 \ln x_2} \sin(2\pi x_1) \\ y_2 = \sqrt{-2 \ln x_2} \cos(2\pi x_1) \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Con queste trasformazioni, partendo da due variabili x_1 e x_2 distribuite uniformemente nell'intervallo $[0, 1]$, si ottengono due variabili gaussiane standard y_1 e y_2 .

In generale, per avere variabili aleatorie con media (μ_1, μ_2) , varianza (σ_1^2, σ_2^2) e coefficiente di correlazione ρ basta porre:

$$\begin{cases} z_1 = \mu_1 + \rho \sigma_1 y_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \sigma_1 y_2 \\ z_2 = \mu_2 + \sigma_2 y_1 \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

Appendice C

File di funzioni

```
/*file draw_fun.c*/

#include <stdio.h>
#include <math.h>

#include "gra_lib.h"

double min(double a,double b)
{
double c;
if (a<=b)
c=a;
else
c=b;
return c;
}

void extent(int n, double z1[], double z2[],
double *xmin, double *xmax, double *ymin, double *ymax)
{
int i;

*xmin=z1[0];
*xmax=z1[0];
*ymin=z2[0];
*ymax=z2[0];
for (i=0 ; i<n ; i++) {
if (z1[i]>*xmax) *xmax=z1[i];
else if (z1[i]<*xmin) *xmin=z1[i];
}
}
```

```

    for (i=0 ; i<n ; i++) {
        if (z2[i]>*ymax) *ymax=z2[i];
        else if (z2[i]<*ymin) *ymin=z2[i];
    }
}

void wind_view(double px,double py,int *ix,int *iy,
double scx,double scy,int vxmin,int vymax,double wxmin,double wymin)
{
    *ix=0.5 + scx * (px - wxmin) + vxmin;
    *iy=0.5 + scy * (wymin - py) + vymax;
}

void wind_assi(int *ix,int *iy,double scx,double scy,
int vxmin,int vymax,double wxmin,double wymin)
{
    *ix=0.5 + scx * (- wxmin) + vxmin;
    *iy=0.5 + scy * (wymin ) + vymax;
}

void assi(Window Warea,double xmin,double xmax,double ymin,double ymax,
int vxmin,int vxmax,int vymin,int vymax,
double wxmin,double wxmax,double wymin,double wymax)
{
double scx,scy,temp;
int ipx,ipy,i;

//  xmax=xmax+(xmax-xmin)/10;
//  ymax=yymax+(yymax-ymin)/10;

    scx=(vxmax-vxmin)/(wxmax-wxmin);
    scy=(vymax-vymin)/(wymax-wymin);
    temp=min(scx,scy);
    scx=temp;
    scy=temp;
    wind_assi(&ipx,&ipy,scx,scy,0,vymax-vymin,wxmin,wymin);
    DrawLine(Warea,ipx,0,ipx,vymax-vymin);
    DrawLine(Warea,0,ipy,vxmax-vxmin,ipy);
}

void draw_points(Window Warea,int n,double xmin,double xmax,double ymin,double ymax,
int vxmin,int vxmax,int vymin,int vymax,double pt_x[],double pt_y[])

{
int i;
int x1,x2,y1,y2;
double wxmin,wxmax,wymin,wymax;

```

```
double scx,scy,temp;
double px,py;

wxmin=xmin;
wxmax=xmax;
wymn=ymin;
wymax=ymax;

if(wymn==wymax)
{
    wymn=wymn-1.0;
    wymax=wymax+1.0;
}

//xmax=xmax+(xmax-xmin)/10;
//ymax=yymax+(ymax-ymin)/10;

scx=(vxmax-vxmin)/(wxmax-wxmin);
scy=(vymax-vymin)/(wymax-wymn);
temp=min(scx,scy);
scx=temp;
scy=temp;

px=pt_x[0];
py=pt_y[0];
wind_view(px,py,&x1,&y1,scx,scy,0,vymax-vymn,wxmin,wymn);

for (i=0 ; i<=n ; i++)
{
    px=pt_x[i];
    py=pt_y[i];

    wind_view(px,py,&x2,&y2,scx,scy,0,vymax-vymn,wxmin,wymn);

    ForeColor(RED);
    DrawCirc(Warea,x1,y1,1);
    DrawCirc(Warea,x1,y1,2);

    x1=x2;
    y1=y2;
}

ForeColor(BLUE);

assi(Warea,xmin,xmax,ymin,ymax,vxmin,vxmax,vymn,vymax,wxmin,wxmax,wymn,wymax);
```

```
    Flushflush();
}

void draw_star(Window Warea,int n,double xmin,double xmax,double ymin,double ymax,
    int vxmin,int vxmax,int vymin,int vymax,double pt_x,double pt_y)

{
    int i;
    int x,y;
    double wxmin,wxmax,wymin,wymax;
    double scx,scy,temp;
    double px,py;

    wxmin=xmin;
    wxmax=xmax;
    wymin=ymin;
    wymax=ymax;

    if(wymin==wymax)
    {
        wymin=wymin-1.0;
        wymax=wymax+1.0;
    }

    //xmax=xmax+(xmax-xmin)/10;
    //ymax=ymax+(ymax-ymin)/10;

    scx=(vxmax-vxmin)/(wxmax-wxmin);
    scy=(vymax-vymin)/(wymax-wymin);
    temp=min(scx,scy);
    scx=temp;
    scy=temp;

    px=pt_x;
    py=pt_y;
    wind_view(px,py,&x,&y,scx,scy,0,vymax-vymin,wxmin,wymin);

    ForeColor(BLACK);
    DrawStar(Warea,x,y);

    Flushflush();
}
```


Bibliografia

- [1] Y. G. SINAI, *Probability Theory: An Introductory Course*, Springer, Berlin, 1992
- [2] M. TALAGRAND *Spin Glasses: A Challenge for Mathematicians*, Springer, Berlin, 2003
- [3] M. AIZENMAN, P. CONTUCCI, On the Stability of the Quenched State in Mean Field Spin Glass Models, *Journal of Statistical Physics*, **92** (1998), n. 5/6, 765–783
- [4] A. BIANCHI, P. CONTUCCI, A. KNAUF, Stochastically Stable Quenched Measures, *Journal of Statistical Physics*, **117** (2004), n. 5/6, 831-844
- [5] P. CONTUCCI, Toward a Classification of Stochastically Stable Quenched Measures, *Markov Processes and Related Fields*, **9** (2002), n. 2, 167-176

Ringraziamenti

Ringrazio il Chiar.mo Prof. Pierluigi Contucci per la grande opportunità concessami affidandomi questo lavoro e per avermi guidato nel suo sviluppo.

Un grazie alla Dott.ssa Alessandra Bianchi per aver risolto i miei dubbi, ma soprattutto per la pazienza e la gentilezza dimostratemi.

Grazie ai miei compagni di studio, Valentina, Diego e Claudio, senza i quali forse non sarei arrivato fin qui o, comunque, senza i quali di sicuro non sarebbe stato tutto così bello.

Ringrazio i miei genitori per avermi sempre affiancato e supportato in ogni mia scelta.