ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea in Matematica

La formula di Riemann-Hurwitz

Tesi di Laurea in Geometria

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Luca Migliorini

Presentata da:
Simone Marzioni

II Sessione
Anno Accademico 2009/2010

Alla mia famiglia

Introduzione

Diversamente da quanto accade sui reali, dove è possibile scegliere una delle due determinazioni della funzione $\sqrt{x}$, non è possibile definire una funzione olomorfa $\sqrt{z}$ sul piano complesso $\mathbb{C}$. Se però tagliamo il piano lungo la semiretta reale $[0, +\infty)$ possiamo definire due distinte funzioni olomorfe $\pm\sqrt{z}$ in $\mathbb{C} - [0, +\infty)$ come

$$\pm\sqrt{z} = \pm\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$$

dove $z = re^{i\theta}$. Se estendiamo la funzione $\sqrt{z}$ allo spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ definendo $\sqrt{\infty} = \infty$ possiamo pensare al taglio di prima come ad un arco con estremi 0 ed ∞. Prendiamone due copie, allarghiamone i tagli (come a voler aprire le sfere) ed incolliamole insieme. Otteniamo un nuovo spazio X, ancora omeomorfo ad una sfera, sul quale possiamo definire una funzione $\sqrt{z}$ olomorfa che vale $+\sqrt{z}$ sulla prima sfera e $-\sqrt{z}$ sulla seconda. Possiamo pensare allo spazio X come ad una compattificazione del luogo degli zeri della curva affine $w^2 = z$. In maniera simile, sia k un numero pari ed $a_1, ..., a_k \in \mathbb{C}$, possiamo definire una funzione olomorfa

$$\sqrt{(z - a_1)...(z - a_k)}$$

(o equivalentemente rappresentare la curva affine $w^2 = (z - a_1)...(z - a_k)$) tagliando $\mathbb{P}_1$ lungo i cammini $[a_1, a_2]$, $[a_3, a_4]$, ... ed incollando lungo i tagli le due copie di $\mathbb{P}_1$. Quello che otteniamo però, se $k > 2$, non è omeomorfo ad una sfera bensì ad una somma connessa di $\frac{k}{2} - 1$ tori (o ad una sfera con $\frac{k}{2} - 1$ manici, a seconda dei gusti). Queste considerazioni intuitive sono alla base dello studio delle superfici di Riemann, l'oggetto principale di questa tesi. In particolare andremo a studiare alcune proprietà fondamentali delle funzioni olomorfe definibili tra esse tramite strumenti dell'analisi complessa, e vedremo che la struttura locale di tali funzioni è molto semplice. Da qui cercheremo di capire le conseguenze topologiche di tali proprietà: troveremo che le funzioni olomorfe sono, topologicamente, dei rivestimenti (a meno di un insieme eccezzionale di punti detti di ramificazione) e troveremo una formula che lega le proprietà analitiche di questi rivestimenti con le loro proprietà topologiche (formula di Riemann-Hurwitz). Applicheremo poi questi risultati al caso in cui la superficie di Riemann è il luogo degli zeri di un polinomio, ovvero una curva algebrica, trovando un legame tra proprietà topologiche e proprietà algebriche. Infine, nell'ultimo capitolo, daremo una definizione di differenziali sulle superfici di Riemann: ancora troveremo dei collegamenti tra le loro proprietà e la topologia della superficie su cui sono definiti. Dedurremo infine una formula che lega molto sinteticamente il numero dei manici (o genere) della superfice individuata da un polinomio con il suo grado.

Indice

Capitolo 1

Preliminari

1.1 Superfici di Riemann

Innanzi tutto richiamiamo la definizione topologica di superfice, dopodichè daremo la definizione di atlante olomorfo e di superficie di Riemann.

Definizione 1.1. Sia S uno spazio topologio di Hausdorff a base numerabile. S è una superficie se $\forall x \in S\ \exists U$ intorno aperto di x omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{C}$

Definizione 1.2. Sia S una superficie. Una coppia (U, φ),dove U è un aperto di S e $\varphi : U \to V$ è un omeomorfismo da U a V aperto di $\mathbb{C}$, è detta *carta* su S. Sia $\Phi = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)/\alpha \in A\}$ una collezione di carte (dove A è un insieme di indici opportuno). Φ è detto *atlante olomorfo* se e solo se valgono:

- $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = S$
- Se $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ e (U_β, φ_β) appartengono a Φ e $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ allora l'omeomorfismo

  $$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

  deve essere olomorfo ($\varphi_{\alpha\beta}$ è detta funzione di transizione).

Una coppia (X, Φ) in cui X è una superficie e Φ è un atlante olomorfo è detta *superficie di Riemann*.Diremo che due atlanti olomorfi Φ e Ψ di X definiscono la stessa superficie di Riemann se la loro unione è ancora un atlante olomorfo di X. Se non necessario ometteremo il nome dell'atlante e parleremo di una superficie di Riemann indicando solo lo spazio topologico.

1.2 Curve affini piane

Partiamo dalla definizione di curva affine piana in $\mathbb{C}^2$

Definizione 1.3 (curva affine piana)**.** Sia $P(x, y)$ un polinomio non costante a coefficenti in campo complesso, senza fattori ripetuti (ovvero $P(x, y) \neq (Q(x, y))^2 R(x, y)$ con R e Q polinomi). Allora la *curva affine piana* definita da $P(x, y)$ è:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : P(x, y) = 0\}.$$

Osservazione 1. L'assunzione che i polinomi non abbiano fattori ripetuti ci dice che se $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ definiscono la stessa curva affine in $\mathbb{C}^2$ allora vale

$$P(x, y) = \lambda Q(x, y)$$

con $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ (Vale banalmente anche il viceversa)

Definizione 1.4 (Grado di una curva)**.** Sia C una curva definita da $P(x, y)$. Il grado d della curva C è il grado del polinomio $P(x, y)$ con la sua usuale definizione.

Definizione 1.5 (punti singolari)**.** Un punto (a, b) di una curva C è detto *punto singolare* o *singolaritá* della curva se

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a, b) = 0 = \frac{\partial P}{\partial y}(a, b).$$

L'insieme dei punti singolari di C è chiamato $Sing(C)$. Se $Sing(C) = \emptyset$, C è detta non singolare.

Definizione 1.6. (molteplicità di un punto) La molteplicità di un curva C definita dal polinomio $P(x, y)$ nel punto (a, b) è il più piccolo intero m tale che almeno una delle derivate $m-$esime sia non nulla. Ovvero $\exists i,j \geq 0$ tali che $i + j = m$ e vale

$$\frac{\partial^m P}{\partial x^i \partial y^j}(a, b) \neq 0$$

Possiamo a questo punto dimostrare un risultato che ricollega le curve affini con le superfici di Riemann. Innanzi tutto osserviamo che essendo definite le curve come come luogo degli zeri di un polinomio esse sono (a meno dei punti singolari) superfici in senso topologico.Dimostriamo ora la seguente proposizione.

Proposizione 1.2.1. *Se C è una curva affine in $\mathbb{C}^2$ definita dal polinomio $P(x, y)$ allora $C - Sing(C)$ ammette un atlante olomorfo.*

Dimostrazione. Sia $(a, b) \in C$ tale che $\frac{\partial P}{\partial y}(a, b) \neq 0$ (possiamo sempre supporre ciò vero a meno di scambiare x con y). Allora, per il teorema della funzione implicita, esistono due intorni aperti V e W in $\mathbb{C}$, di a e b rispettivamente ed esiste una funzione $f : V \to W$ tali che $P(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$ per ogni $x \in V$ e $y \in W$. Consideriamo $U = \{(x, y) \in C : x \in V, y \in W\}$. E' un intorno aperto di (a, b) in $C - Sing(C)$. consideriamo, poi, $\Phi : U \to V$ definita come $\Phi(x, y) = x$: è continua e con inversa continua $x \mapsto (x, f(x))$ Quindi (U, Φ) è una carta intorno al punto (a, b). Inoltre le funzioni di transizione sono tutte dellla forma $x \mapsto (x, f(x)) \mapsto f(x)$ dove f è olomorfa. Pertanto l'atlante generato da tali carte è olomorfo. $\square$

In definitiva, data una curva affine C otteniamo una Superficie di Riemann considerando $C - Sing(C)$. Per i nostri fini sono interessanti le superfici compatte; la prossima osservazione metterà in risalto che le curve finora considerate non vanno bene:

Osservazione 2. Sia $P(x, y)$ il polinomio che definisce la curva C in $\mathbb{C}^2$.Fissato $a \in \mathbb{C}$, $P(a, y)$ è un polinomio in una variabile a coefficenti complessi e, per il teorema fondamentale dell'algebra $\exists b \in \mathbb{C}$ tale che $P(a, b) = 0$.Potendo fare questo discorso per ogni a, abbiamo che la nostra curva C in $\mathbb{C}^2$ non potrà mai essere limitata; in particolare non potrà mai essere compatta.

Dobbiamo perciò trovare un ambiente di lavoro diverso da $\mathbb{C}^2$. Prima però diamo un risultato di algebra e delle ultime definizioni riguardanti le curve affini.Ricordiamo che un polinomio non nullo $P(x_1, ..., x_n)$ è detto omogeneo di grado d se vale $P(\lambda x_1, ..., \lambda x_n) = \lambda^d P(x_1, ...x_n)$.

Lemma 1.2.2. *Se $P(x, y)$ è un polinomio omogeno di grado d ed a coefficienti complessi vale la seguente fattorizzazione in polinomi lineari:*

$$P(x, y) = \prod_{i=1}^{d} (\alpha_i x + \beta_i y)$$

con α_i,$\beta_i \in \mathbb{C}$ coefficienti opportuni.

Dimostrazione. Per omogeneità possiamo scrivere:

$$P(x, y) = y^d \sum_{r=0}^{d} a_r (\frac{x}{y})^r = y^d Q(\frac{x}{y})$$

dove non tutti i coefficienti a_j sono nulli. Se e è il il massimo tra $\{0, .., d\}$ tale che $a_e \neq 0$, allora Q è un polinomio di grado e in $\frac{x}{y}$, e per il teorema fondamentale dell'algebra fattorizza in $Q(\frac{x}{y}) = a_e \prod_{i=1}^{e} (\frac{x}{y} - c_i)$ con $c_1, ..., c_e \in \mathbb{C}$. Rimoltiplicando y^d si ottiene la tesi. $\square$

Definizione 1.7. Sia (a, b) un punto di molteplicità m della curva C definita da $P(x, y)$. Il lemma 1.2.2 ci dice che il polinomio omogeneo

$$\sum_{i+j=m} \frac{\partial^m P}{\partial x^i \partial y^j}(a, b) \frac{(x - a)^i (y - b)^j}{i!j!}$$

si fattorizza nel prodotto di m fattori lineari.Le curve (rette) definite da questi singoli fattori sono dette *rette tangenti* a C in (a, b).

Osservazione 3. Un punto è non singolare se e solo se ha molteplicità $m = 1$. Ne viene dalla definizione precedente che un punto non singolare ha una sola retta tangente definita dal polinomio lineare

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial P}{\partial y}(a, b)(y - b) = 0$$

.

Un punto singolare di moltemplicità m è detto *ordinario* se ha m rette tangenti distinte.

1.3 Spazio proiettivo e curve proiettive piane

Richiamiamo velocemente il concetto di spazio proiettivo ed alcuni risultati fondamentali con particolare riferimento al caso complesso.

Definizione 1.8 (spazio proiettivo)**.** Lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}_n$ di dimensione n è l'insieme dei sottospazi di dimensione uno su $\mathbb{C}$ dello spazio vettoriale $\mathbb{C}^{n+1}$.

Le coordinate nello spazio proiettivo si ottengono partendo da un vettore non nullo $(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ e definendo le coordinate omogenne $[x_0, ..., x_n]$ come segue:

$$\mathbb{P}_n = \{[x_0, ..., x_n] : (x_0, ..., x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}\}$$

e vale $[x_0, ..., x_n] = [y_0, ..., y_n]$ se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ tale che $x_j = \lambda y_j$ $\forall j = 0, ..., n$.

Definiamo ora $\Pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{P}_n$ come

$$\Pi(x_0, ..., x_n) = [x_0, ..., x_n].$$

Considerando la topologia quoziente tramite questa mappa dotiamo lo spazio proiettivo di una topologia. I seguenti sono risultati di topologia fondamentali:

Proposizione 1.3.1. $\mathbb{P}_n$ *è compatto.*

Proposizione 1.3.2. $\mathbb{P}_n$ *è Hausdorff.*

Definizione 1.9 (trasformazione proiettiva)**.** Una trasformazione proiettiva di $\mathbb{P}_n$ è una biiezione

$$f : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$$

tale che esiste un isomorfismo di spazi vettoriali $\alpha : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ per cui valga:

$$f \circ \Pi = \Pi \circ \alpha$$

Osservazione 4. Una trasformazione proiettiva è continua. Infatti sono continue Π e α.

Definizione 1.10. Un iperpiano in $\mathbb{P}_n$ è l'immagine tramite Π di $V - \{0\}$ dove V è un iperpiano di $\mathbb{C}^{n+1}$.

Enunciamo, infine, un'ultimo risultato di geometria proiettiva, indispensabile ai nostri fini

Teorema 1.3.3. *Dati $n+2$ punti distiniti $p_0, ..., p_n$ e q in $\mathbb{P}_n$ tra i quali non ce ne siano $n+1$ giacenti nello stesso iperpiano, esiste ed è unica una trasformazione proiettiva che porta p_i in $[0, ..., 0, 1, 0, ...0]$ (dove l'elemento 1 si trova nell'i-esima posizione) e q in $[1, ..., 1]$.*

Possiamo finalmente definire le nostre curve proiettive piane. Fissiamo, d'ora in poi l'attenzione su $\mathbb{P}_2$:

Definizione 1.11 (Curva proiettiva piana)**.** Sia $P(x, y, z)$ un polinomio omogeneo a coefficenti complessi in tre variabili senza fattori ripetuti.La curva proiettiva piana C definita da P è:

$$C = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}_2 : P(x, y, z) = 0\}$$

Osservazione 5. La scelta delle coordinate omogenee non influisce sulla condizione $P(x, y, z) = 0$ perchè P è un polinomio omogeneo. Inoltre la condizione per cui due polinomi P e Q definiscono la stessa curva rimane la stessa del caso delle curve affini, infatti due polinomi omogenei complessi si annullano negli stessi punti se e solo se sono uno multiplo dell'altro.

Come per il caso delle curve affini parleremo di grado della curva riferendoci al grado del polinomio.Analogamente $[a, b, c]$ è un punto singolare della curva proiettiva C definita da P se vale

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a, b, c) = \frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c) = \frac{\partial P}{\partial z}(a, b, c) = 0$$

e parleremo di $Sing(C)$ come l'insieme di punti singolari di C. Continuando con le analogie con le curve affini, una retta proiettiva è una curva proiettiva definita da un polinomio lineare e, se la curva C è definita dal polinomio omogeneo $P(x, y, z)$ nel punto non singolare $[a, b, c]$, allora diremo che la *retta tangente* alla curva nel punto è la retta priettiva

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a,b,c)x + \frac{\partial P}{\partial y}(a,b,c)y + \frac{\partial P}{\partial z}(a,b,c)z = 0$$

.

Ecco ora il risultato a cui eravamo interessati che differenzia le curve proiettive da quelle affini:

Proposizione 1.3.4. *Una curva proiettiva in* $\mathbb{P}_2$ *è* compatta *e* Hausdorff.

Dimostrazione. Dalla definizione di curva proiettiva e dalla definizione della topologia quoziente di $\mathbb{P}_2$ si ha che una curva è un sottoinsieme chiuso. Essendo un chiuso dentro un compatto Hausdorff (proposizioni 1.3.1 ed 1.3.2) si ha che le curve sono compatte e di Hausdorff. □

Per concludere il nostro discorso sulle curve proiettive mancano due passaggi: ricollegarle a quelle affini e mostrare che sono anchesse superfici di Riemann. Per fare questo dobbiamo riprendere ancora qualche strumento di geometria proiettiva e qualche risultato di topologia.

Definimo dei sottoinsiemi particolari di $\mathbb{P}_2$ chiamati U_0, U_1, U_2 così:

$$U_j := \{[x_o, x_1, x_2] \in \mathbb{P}_2 : x_j \neq 0\}$$

Definiamo inoltre tre funzioni $\Phi_j : U_j \to \mathbb{C}^2$ tali che

$$\Phi_0([x_o, x_1, x_2]) = (\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0})$$

$$\Phi_1([x_o, x_1, x_2]) = (\frac{x_0}{x_1}, \frac{x_2}{x_1})$$

$$\Phi_2([x_o, x_1, x_2]) = (\frac{x_0}{x_2}, \frac{x_1}{x_2})$$

Proposizione 1.3.5.

1. *U_j è aperto per ogni $j = 0, 1, 2$.*

2. *Φ_j è un omeomorfismo tra U_j e $\mathbb{C}^2$.*

Fissiamo ora le idee su U_2 e consideriamo il suo complementare in $\mathbb{P}_2$ ovvero $\{[x, y, z] \in \mathbb{P}_2 : z = 0\}$. Si tratta di una retta priettiva i cui punti sono tutti e soli quelli del tipo $[x, y, 0]$ ed è identificabile banalmente con $\mathbb{P}_1$ (d'altro canto, in maniera analoga si vede che quest'ultimo è l'unione di un punto con un aperto omeomorfo a $\mathbb{C}$). Ciò da l'idea di dividere i punti di una curva proiettiva C definita dal polinomio omogeno $P(x, y, z)$ in quelli contenuti in U_2 e quelli contenuti nel suo complementare (diremo che sono *punti all'infinito*). I primo sono quelli per cui vale $P(x, y, 1) = 0$ mentre i secondi sono quelli per cui $P(x, y, 0) = 0$; notiamo che i primi possono essere visti come i punti di una curva affine in $\mathbb{C}^2$ definita dal polinomio $P(x, y, 1)$. Viceversa se partiamo da una curva affine C definita da un polinomio $P(x, y)$ di grado d allora i suoi punti in $\mathbb{C}^2$ possono essere identificati con i punti in U_2 della curva definita dal polinomio omogeno $z^d P(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$.

Osservazione 6. Se una curva proiettiva è non singolare allora la corrispondente curva affine è non singolare. Il viceversa non vale ma si ha il seguente lemma.

Lemma 1.3.6. *Sia $[a, b, c]$ un punto di una curva proiettiva definita da $P(x, y, z)$. Supponiamo $c \neq 0$.Allora $[a, b, c]$ è un punto non singolare della curva proiettiva $\widehat{C}$ se e solo se $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$ è punto non singolare della curva affine C definita da $P(x, y, 1)$*

Dimostrazione. Premettiamo il seguente risultato:

Lemma 1.3.7 (Relazione di Eulero)**.** *Sia $Q(x, y, z)$ un polinomio omogeno di grado d. Allora*

$$x\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z) + y\frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z) + z\frac{\partial Q}{\partial z}(x, y, z) = mQ(x, y, z).$$

Dimostrazione. $Q(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^m Q(xy, z)$
Differenziando in λ e ponendolo poi uguale ad 1 si ha la tesi. □

Torniamo ora al lemma, il punto $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$ è un punto singolare di C se e solo se il polinomio P e le sue derivate prime nelle prime due componenti (ovvero in x ed in y) si annullano nel valore $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1)$. Poichè $c \neq 0$ e per l'omogeneità di P ciò succede se e solo se il polinomio e le sue prime due derivate si annullano nel punto (a, b, c).Perchè la relazione di Eulero sia soddisfatta ciò succede se e solo se anche $\frac{\partial P}{\partial z}(a, b, c) = 0$. In definitiva tutto ciò succede se e solo se $[a, b, c]$ è punto singolare della curva proiettiva $\widehat{C}$ □

Dimostriamo infine che anche queste hanno struttura di superfici di Riemann tramite una proposizione analoga della proposizione 1.2.1. (Assumiamo,senza dimostrarlo, che i punti singolari siano finiti. Per i nostri fini saranno interessanti le curve proiettive non singolari per le quali la nostra assunzione sarà ovvia).

Proposizione 1.3.8. *Sia C una curva proiettiva.Allora $C - Sing(C)$ ammette un atlante olomorfo.*

Dimostrazione. Supponiamo C definita dal polinomio omogeneo $P(x, y, z)$. Sia $[a, b, c]$ un punto non singolare di C, in particolare supponiamo $\frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c) \neq 0$. Dalla relazione di Eulero (lemma 1.3.7) si ha che

$$a\frac{\partial P}{\partial x}(a, b, c) + b\frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c) + c\frac{\partial P}{\partial z}(a, b, c) = 0$$

da cui si ha $a \neq 0$ o $c \neq 0$.Supponiamo $c \neq 0$.Per omogeneità possiamo dire che $\frac{\partial P}{\partial y}(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1) \neq 0$. Dal teorema della funzione implicita si ha che esistono un intorno V di $\frac{a}{c}$, un intorno W di $\frac{b}{c}$ e una funzione olomorfa $f : V \to W$ tali che per ogni $x \in V$ e per ogni $y \in W$ vale

$$P(x, y, 1) = 0 \Leftrightarrow y = f(x).$$

Restringendo eventualmente V e W otteniamo che $U := \{[x, y, 1] \in C : x \in V, y \in W\}$ è intorno aperto di $[a, b, c]$ in $C - Sing(C)$. Considerando la mappa $\Phi : U \to V$ definita da $\Phi([x, y, z]) = \frac{x}{z}$ abbiamo un omeomorfismo con inversa $w \mapsto [w, f(w), 1]$.(U, Φ) sarà così una nostra carta. Si verifica immediatamente che scelte diverse porterebbero a carte compatibili, pertanto abbiamo un atlante olomorfo. □

1.4 Funzioni definite sulle superfici di Riemann

Parlare di atlanti olomorfi e di superfici di Riemann serve per poter definire funzioni olomorfe sulle superfici stesse.

Definizione 1.12. Sia S una superficie di Riemann con atlante olomorfo Φ.Una funzione continua $f : S \to \mathbb{C}$ è detta olomorfa in $x \in S$ se e solo se esiste una carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \Phi$ tale che $x \in U_\alpha$, $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ e $f \circ \varphi_\alpha^{-1} : V_\alpha \to \mathbb{C}$ è olomorfa in $\varphi_\alpha(x)$ nel senso usuale di funzione olomorfa in un punto di $\mathbb{C}$. Una funzione è olomorfa se lo è in ogni punto.

Osservazione 7. La scelta della carta è ininfluente sul'olomorfia della funzione, poichè le funzioni di transizione sono olomorfe.

Definizione 1.13 (funzione olomorfa tra superfici di Riemann)**.** Siano S e T due superfici di Riemann con atlanti olomorfi rispettivamente Φ e Ψ.Una funzione continua $f : S \to T$ è detta olomorfa se

$$\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(W_\beta))} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(W_\beta)) \to Y_\beta$$

è olomorfa nel senso usuale di funzioni a variabile complessa, dove $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \Phi$, $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$, $(W_\beta, \psi_\beta) \in \Psi$ e $\psi_\beta : W_\beta \to Y_\beta$.

Esempio 1.1 (Sfera di Riemann)**.** Facciamo a questo punto un primo esempio di superficie di Riemann non del tutto banale e di estrema importanza. Consideriamo $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ con le coordinate omogenee $[x, y]$ ed identifichiamolo con $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ pensando ad $x \in \mathbb{C}$ come al punto $[x, 1] \in \mathbb{P}_1$ ed a ∞ come al punto $[1, 0]$. Come visto precedentemente $\mathbb{P}_1$ è identificabile con una retta proiettiva di $\mathbb{P}_2$ (ad esempio $z = 0$) pertanto deve avere un atlante olomorfo. Siano $U = \mathbb{P}_1 - \{\infty\}$, $V = \mathbb{P}_1 - \{0\}$, $\varphi : U \to \mathbb{C}$ e $\psi : V \to \mathbb{C}$ definite come segue

$$\varphi([x, y]) = x/y, \psi([x, y]) = y/x.$$

Allora $\{(U, \varphi), (V, \psi)\}$ è un atlante olomorfo di $\mathbb{P}_1$ infatti

$$\varphi \circ \psi^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C} - \{0\}$$

sono entranbe definite da $w \mapsto \frac{1}{w}$ che è olomorfa in tale dominio. Dobbiamo giustificare la parola sfera:

Lemma 1.4.1. *Una retta proiettiva L è omeomorfa ad $S^2 = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 = 0\}$*

Dimostrazione. Poichè una trasformazione proiettiva è continua possiamo assumere la nostra retta proiettiva come quella definita da $z = 0$ poiche tutte le altre le sono omeomorfe.Definiamo $f : S^2 \to L$ come

$$f(u, v, w) = [u + iv, 1 - w, 0].$$

f è continua poichè composizione di una mappa continua tra S^2 e $\mathbb{C}^3$ con la proiezione Π su $\mathbb{P}_2$, è biiettiva con inversa

$$f^{-1}([x, y, 0]) = (\frac{2Re(x\overline{y})}{|x|^2 + |y|^2}, \frac{2Im(x\overline{y})}{|x|^2 + |y|^2}, \frac{|x|^2 - |y|^2}{|x|^2 + |y|^2}).$$

Anche f^{-1} è continua poichè lo è $f^{-1} \circ \Pi$ ristretta a $\Pi^{-1}(L)$. □

Possiamo ora definire le funzioni meromorfe su una superficie di Riemann

Definizione 1.14 (funzione meromorfa su superfici di Riemann)**.** Una funzione meromorfa su di una superficie di Riemann S è una funzione $f : S \to \mathbb{P}_1$ olomorfa nel senso delle superfici di Riemann che non sia identicamente ∞ in una componente connessa di S

Osservazione 8. Se la superficie di Riemann considerata è il piano complesso stesso $\mathbb{C}$, la definizine si riaccorda con quella classica di funzione meromorfa, considerando i poli come punti in cui la funzione ha valore infinito

Osservazione 9. Sia S una superficie di Riemann compatta, allora non esistono funzioni olomorfe non costanti $f : S \to \mathbb{C}$. Cio viene dal teorema dell'applicazione aperta di analisi complessa riletto sulle superfici di Riemann. Le funzioni meromorfe sono però molto più interessanti per il seguente risultato:

Teorema 1.4.2 (di esistenza di Riemann)**.** *Sia S una superficie di Riemann compatta, allora esistono funzioni meromorfe non costanti definite su S.*

Dimostrazione. Per una dimostrazione si veda il corollario 14.13 di [1]. □

Notiamo inoltre che le funzioni meromorfe sono un caso particolare delle funzioni olomorfe tra due superfici di Riemann. In generale, per quest'ultime, vale un risultato di caratterizzazione locale.

Teorema 1.4.3. *Sia $f : S \to T$ una applicazione olomorfa tra due superfici di Riemann e supponiamo che $f(x_0) = y_0$. Allora esistono una carta (U, φ) di x_0 in S ed una carta (V, ψ) di y_0 in T tali che*

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(z) = z^k$$

per un qualche $k \geq 1$.

Dimostrazione. Scegliamo anzitutto due carte qualunque $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ e $(\tilde{v}, \tilde{\psi})$ con l'unica condizione che $\tilde{\varphi}(x_0) = 0$ e $\tilde{\psi}(y_o) = 0$. Allora $\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ è una funzione olomorfa a valori complessi e come tale ammette sviluppo in serie di Taylor attorno allo 0

$$\sum_{\jmath \geq 1} a_\jmath z^\jmath.$$

Sia k il minimo numero naturale tale che $a_k \neq 0$, allora il nostro sviluppo diventa

$$z^k(a_k + a_{k+1}z + ...) = z^k h(z)$$

dove $h(z)$ è una funzione olomorfa che non si annulla in 0. Sia ora α una radice k-esima di a_k e

$$g(z) := \alpha \exp(\frac{1}{k} \log(h(z)/a_k))$$

allora $(g(z))^k = h(z)$ e perciò $z^k h(z) = (zg(z))^k$. Ora $z \mapsto zg(z)$ è una applicazione olomorfa ed invertibile perciò è un cambio di coordinate valido $w = zg(z)$. Pertanto esistono (U, φ) e (V, ψ) tali che

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(w) = w^k$$

□

Capitolo 2

Formula di Riemann-Hurwitz

In questo capitolo si dimostra una formula che lega un invariante topologico delle curve proiettive (caratteristica di Eulero) al loro grado e al loro modo di rivestire $\mathbb{P}_1$. In realtà tratteremo un caso molto più generale che ci darà una formula che lega l'invariante topologico di due qualunque superfici di Riemann compatte attraverso alcune proprietà di una funzione olomorfa tra di esse. Vedremo poi che nel caso delle curve proiettive il legame è molto più intrinseco nelle curve stesse e dipende meno dalla funzione che scegliamo.

2.1 Rivestimenti ramificati

Innanzi tutto riprendiamo il concetto di rivestimento ed alcuni teoremi di sollevamento ad esso collegati. Essendo questi parte dei corsi di topologia tralascerò le loro dimostrazioni.

Definizione 2.1 (proiezione di rivestimento)**.** Siano X e Y spazi topologici. Una mappa $p : Y \to X$ è detta proiezione di rivestimento se ogni $x \in X$ ha un intorno aperto U in X tale che $p^{-1}(U)$ è una unione disgiunta di aperti di Y ognuno dei quali è mappato omeomorficamente su U da p

Teorema 2.1.1 (sollevamento)**.** *Sia $p : Y \to X$ una proiezione di rivestimento e sia $f : A \to X$ una funzione continua.Supponiamo A semplicemente connesso, connesso per archi, e localmente connesso per archi. Siano $y \in Y$*

ed $a \in A$ *tali che* $p(y) = f(a)$*, allora esiste ed è unica una mappa continua* $F : A \to Y$ *tale che* $F(a) = y$ *e* $p \circ F = f$*.*

Inoltre se f *è un omeomorfismo nella sua immagine* $f(A)$ *allora anche* F *è omeomorfismo sulle componenti connesse di* $p^{-1}(f(A))$*.*

Lemma 2.1.2. *Sia* $p : Y \to X$ *una funzione continua tale che per ogni* $x \in X$ *esiste un intorno aperto* U *di* x *per cui ogni componente connessa di* $p^{-1}(U)$ *contiene al più un punto di* $p^{-1}(x)$*. Supponiamo inoltre che* Y *è compatto e che esista* V *aperto di* X *per cui* $p : p^{-1}(V) \to V$ *è una priezione di rivestimento. Se* $f : [0,1] \to X$ *è continua e* $f^{-1}(V)$ *contiene l'aperto* $(0,1)$*, allora, dati* $t_0 \in (0,1)$ *ed* $y \in Y$ *tali che* $p(y) = f(t_0)$ *esiste ed è unica* $F : [0,1] \to Y$ *tale che* $F(t_0) = y$ *e* $p \circ F = f$*.*

Dimostrazione. Dal teorema del sollevamento abbiamo che esiste ed è unica $F : (0,1) \to Y$ tale che $F(t_0) = y$ e $p \circ F = f|_{(0,1)}$. E', quindi, sufficente mostrare che esistono $\lim F(t)$ per $t \to 0$ e per $t \to 1$. Dalle ipotesi $\exists U$ intorno aperto di $f(0)$ tale che ogni componente connessa di $p^{-1}(U)$ contiene al più un punto di $p^{-1}(f(0))$. Sia $\delta > 0$ abbastanza piccolo, allora $f((0,\delta]) \subseteq U$ e $F((0,\delta]) \subseteq p^{-1}(U)$. Poichè $F((0,\delta])$ è connesso, esso è contenuto in una sola componente connessa di $p^{-1}(U)$, chiamiamola W. Sia t_n successione in $(0,\delta]$ convergente a 0. Poichè Y è compatto esiste una sottosuccessione t_{n_k} tale che $F(t_{n_k})$ converge ad un certo $q \in Y$.Allora:

$$p(q) = \lim p \circ F(t_{n_k}) = \lim f(t_{n_k}) = f(0)$$

. Ora poichè,$\forall n$, $F(t_n) \in W$, q è un solo punto di $p^{-1}(f(0))$. Ciò dimostra l'esistenza di uno dei due limiti cercati. La dimostrazione per il caso $t \to 1$ è analoga. □

Sia $f : X \to Y$ applicazione olomorfa tra due superfici di Riemann e sia $p \in X$. Si definisce l'ordine di ramificazione di f nel punto p come

$$\nu_f(p) := k$$

dove k è lo stesso esponente dello sviluppo visto nel teorema 1.4.3. Un punto per cui $\nu_f(p) > 1$ si dice punto di ramificazione. L'insieme dei punti di ramificazione lo denoteremo con R mentre chiameremo $f(R)$ luogo di ramificazione.

Proposizione 2.1.3. *Sia $f : X \to Y$ olomorfa con X ed Y superfici di Riemann compatte e connesse. Valgono le seguenti affermazioni*
(i) L'insieme R è finito;
(ii)la restrizione $f : X - R \to Y - f(R)$ è una proiezione di rivestimento a n fogli per un qualche $n \in \mathbb{N}$;
(iii) per ogni $q \in Y$ esiste un intorno V di q in Y tale che ogni componente connessa di $f^{-1}(V)$ contiene al più un elemento di $f^{-1}(q)$;
(iv)per ogni $q \in Y$ vale $n = \sum_{p\in f^{-1}(q)} \nu_f(p)$. In altre parole ciò è equivalente a dire che $\#f^{-1}(q) = n - \sum_{p\in f^{-1}(q)}(\nu_f(p) - 1)$.

Dimostrazione. Procediamo in ordine. (i) Per ogni punto $p \in R$ troviamo un intorno del punto in X nel quale la funzione f si esprime come $f(z) = z^k$ (dove $k = \nu_f(p)$ e la scrittura sottointende la lettura tramite carte) che è invertibile in tutto l'intorno eccettuato il punto p stesso. In altre parole per ogni punto di ramificazione esiste tutto un suo intorno che non contiene altri punti di ramificazione. Poichè X è uno spazio compatto R non potrà che essere un insieme finito .

(ii) Sia $q \in Y - f(R)$ e sia $f^{-1}(q) = \{p1, ..., p_n\}$. Sia V un intorno di q in $Y - f(R)$ ed U_i un intorno di p_i in $X - R$.A meno di restringerli opportunamente si può supporre gli U_i disgiunti e tali che la restrizione $f|_{U_i}$: $U_i \to V$ sia un biolomorfismo (viene banalmente dalla struttura locale delle funzioni olomorfe (1.4.3)). Vogliamo mostrare che $f^{-1}(V) = \coprod U_i$. Se così non fosse posso trovare una successione di intorni aperti N_α di q tali che esistono $t_\alpha \in N_\alpha$ per cui $f^{-1}(t_\alpha) \notin \coprod U_i$. Ma i t_α si accumolano in q. Pertanto avrei $f^{-1}(q) \notin \coprod U_i$ che contraddice le ipotesi. Inoltre il numero n di preimmagini di ogni punto è costante nell'intorno aperto V di q e, dato che un discorso analogo vale per ogni $q \in Y - f(R)$, tale n sarà costante su tutta la superficie $Y - f(R)$.
(iii) Sia p un elemento della preimmagine di q. Localmente attorno ad esso

f si può scrivere nella forma $z \mapsto z^k$ con $k \geq 1$ perciò esistono un intorno U di p ed un intorno V di q nei quali nessun punto apparte p viene mappato in q (o meglio la mappa localmente manda solamente 0 in 0, che poi sulla superficie sono p e q). Restringendo V in maniera tale che il discorso valga per ogni $p \in f^{-1}(q)$ si ha la tesi.

(iv)Per i punti precedenti dobbiamo considerare il caso $q \in f(R)$. Come prima possiamo prendere gli intorni opportunamente in modo da avere che $f|_{U_i} : U_i \to V$ non sia ora una biolomorfia ma la mappa (letta attraverso carte locali su U_i e V) $z \mapsto z^{\nu_f(p_i)}$. Allora ogni punto $q' \in V$ diverso da q (e perciò non di ramificazione) avrà $\sum_i \nu_f(p_i)$ preimmagini (dove la somma si intende al variare delle preimmagini p_i del punto q). D'altro canto non essendo di ramificazione q' avrà n preimmagini, da cui segue la tesi. $\square$

A questo punto possiamo dire che se $f : X \to Y$ è una applicazione olomorfa tra superfici di Riemann questa rispetta le ipotesi del lemma 2.1.2 e prende il nome di *rivestimento ramificato.*

2.2 Triangolazioni di Superfici di Riemann Compatte

Definizione 2.2. Diamo un simbolo al triangolo standard dentro $\mathbb{R}^2$ di vertici $(1, 0), (0, 0), (0, 1)$:

$$\triangle := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

ed uno per la sua parte interna:

$$\triangle^o = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x + y < 1\}$$

Osservazione 10. Il lemma 2.1.2 vale ancora se si sostituisce all'intervallo $[0, 1]$ il triangolo $\triangle$ e all'aperto $(0, 1)$ il triangolo a cui sono stati tolti i tre vertici $(1, 0), (0, 0), (0, 1)$.

Definizione 2.3 (triangolazione di una superficie di Riemann)**.** Sia X una superficie di Riemann compatta.Siano:
(a) V un insieme finito non vuoto di punti di X chiamati vertici;
(b) L un insieme finito non vuoto di mappe $l : [0, 1] \to X$ dette lati;
(c) F un insieme finito non vuoto di mappe $f : \triangle \to X$ dette facce;
V, L ed F definiscono una triangolazione di X se soddisfano le seguenti affermazioni:
(i)$V = \{l(0) : l \in L\} \cup \{l(1) : l \in L\}$;
(ii) per ogni $l \in L$ la sua restrizione all'aperto $(0, 1)$ è un omeomorfismo con $l((0, 1))$. Inoltre per ogni $v \in V$ si ha che $v \notin l((0, 1))$ e per ogni $l_1, l_2 \in L$ si ha $l_1((0, 1)) \cap l_2((0, 1)) = \varnothing$;
(iii) se $f \in F$ la sua restrizione all'aperto $\triangle^o$ è un omeomorfismo con una componente connessa K_f di $X - \Gamma$ dove

$$\Gamma = \bigcup_{l \in L} l([0, 1])$$

. Inoltre se $r : [0, 1] \to [0, 1]$ e $\sigma_i : [0, 1] \to \triangle$ sono definite come

$$r(t) = 1 - t,\ \sigma_1(t) = (t, 0),\ \sigma_2(t) = (1 - t, t),\ \sigma_3(t) = (0, 1 - t)$$

allora $f \circ \sigma_i$ e $f \circ \sigma_i \circ r$ sono lati $l^i_f \in L$ per ogni $i = 1, 2, 3$;
(iv) la corrispondenza $f \mapsto K_f$ tra le facce e le componenti connesse di $X - \Gamma$ è biiettiva;
(v) Per ogni $l \in L$ esistono e sono uniche una faccia $f^+_l \in F$ tale che $l = f^+_l \circ \sigma_i$ ed una faccia $f^-_l \in F$ tale che $l = f^-_l \circ \sigma_i \circ r$, in entrambi casi i è un valore opportuno di $\{1, 2, 3\}$.

Osservazione 11. Questa definizione di triangolazione è più restrittiva rispetto a quella standard utilizzata in topologia. Indichiamone le differenze principali: innanzi tutto la definizione più generale vale per spazi topologici di dimensione qualunque, mentre questa, essendo per superfici, è limitata ai soli spazi di dimensione (in senso topologico) 2. Poi gli insiemi V, L ed F li assumiamo finiti perchè, avendo a che fare con spazi compatti, sarà possibile triangolarli con un numero finito di vertici, lati e facce: in topologia si utilizzano anche triangolazioni con un numero infinito di elementi per triangolare spazi non compatti.Per finire il punto (v) della nostra definizione assume che la triangolazione sia coerentemente orientata: in topologia quella di avere triangolazioni del genere è una proprietà che hanno solo certi spazi che vengono chiamati orientabili (in senso topologico). Nel momento in cui vedremo che ogni Superficie di Riemann compatta ammette una triangolazione come da noi definita, avremo immediatamente come corollario che le Superfici di Riemann compatte sono tutte superfici orientabili.

Proposizione 2.2.1 (triangolazione di $\mathbb{P}_1$)**.** *Sia* $V = \{p_1, ..., p_r\}$ *un qualsiasi insieme di almeno tre punti di* $\mathbb{P}_1$*. Allora esiste una triangolazione di* $\mathbb{P}_1$ *con* V *insieme di vertici,* $3r - 6$ *lati e* $2r - 4$ *facce.*

Dimostrazione. Analizziamo il caso $r = 3$.Identifichiamo $\mathbb{P}_1$ con $\mathbb{C} \cup \infty$ nella usuale maniera. Per il teorema 1.3.3 esiste una trasformazione proiettiva che porta p_1 in 1, p_2 in $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ e p_3 in $e^{\frac{4\pi i}{3}}$.Uniamo questi tre punti con i tre archi della circonferenza unitaria in $\mathbb{C}$.Abbiamo così diviso $\mathbb{P}_1$ in due aperti disgiunti e la circonferenza unitaria di $\mathbb{C}$. I due aperti sono omeomorfi e si va da uno all'altro tramite la trasformazione proiettiva $w \mapsto \frac{1}{w}$; inoltre è noto che esiste un omeomorfismo $\triangle \mapsto \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ tale da portare i vertici del triangolo nei tre punti 1, $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ e $e^{\frac{4\pi i}{3}}$ ed i lati negli archi di circonferenza. Abbiamo perciò trovato una triangolazione di $\mathbb{P}_1$ con tre punti, tre lati e due facce. Andiamo ora per induzione supponendo di avere una triangolazione come da tesi per $r-1$ vertici ($\{p_1, ..., p_{r-1}\}$) e cercandone una per r vertici ($r > 3$).Se p_r cade nell'interno di una faccia f possiamo suddividere tale faccia in tre nuove congiungendo p_r con i vertici di essa aggiungendo così tre lati e due facce al totale. Se invece p_r cade lungo un lato l spezziamo questo in due (ovvero il lato che va da $l(0)$ a p_r e quello da p_r ad $l(1)$), ed aggingiamo poi altri due lati congiungenti p_r rispettivamente con i vertici opposti ad l delle facce f_l^+ ed f_l^- (questa operazione crea due nuovi lati e due nuove facce). In definitiva abbiamo creato anche in questo caso una nuova triangolazione aggiungendo tre lati e due facce. $\square$

Osservazione 12. Se prendiamo una triangolazione (V, L, F) di una superficie di Riemann X possiamo sempre chiedere che un insieme finito di punti (chiamiamolo S) sia contenuto nell'insieme V. Possiamo in più chiedere che suddividendo opportunamente le facce ogni punto di S sia vertice di, al più, una sola faccia $f \in F$.

Proposizione 2.2.2. *Sia $g : X \to Y$ una mappa olomorfa tra due superfici di Riemann. Supponiamo che (V, L, F) sia una triangolazione di Y tale che V contenga il luogo di ramificazione $g(R)$ di g e tale che per ogni $f \in F$ $f(\triangle)$ contenga al più un punto di $g(R)$.Allora esiste una triangolazione $(\tilde{V}, \tilde{L}, \tilde{F})$ di X tale che:*

$$\tilde{V} = \phi^{-1}(V),$$

$\tilde{L} = \{\tilde{l} : [0, 1] \to C : \tilde{l}$ *è continua,* $\phi \circ \tilde{l} \in L\}$, $\tilde{F} = \{\tilde{f} : \triangle \to C : \tilde{f}$ *è continua,* $\phi \circ \tilde{f} \in f\}$.
Inoltre, se $\nu_g(p)$ è l'indice di ramificazione di g nel punto p e d è il il numero di fogli del rivestimento $g : X - R \to Y - f(R)$ allora valgono:

$$\#\tilde{V} = d\#V - \sum_{p \in R} (\nu_g(p) - 1),$$

$$\#\tilde{L} = d\#L,$$

$$\#\tilde{F} = d\#F$$

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che $\tilde{V}$, $\tilde{L}$ e $\tilde{F}$ rispettano le condizioni per essere una triangolazione ((i)-(v) della definizione 2.3). Dal punto (iii)della proposizione 2.1.3 se $f \in F$, $p \in X$ tali che $g(p) = f(t)$ per qualche $t \in \triangle$ diverso dai vertici allora esiste ed è unica una mappa

$$\tilde{f} : \triangle \to X$$

tale che $g \circ \tilde{f} = f$ e $\tilde{f}(t) = p$. Dalla proposizione 2.1.3 (ii) $g^{-1}(f(t))$ consiste in esattamente d punti (non essendo p di ramificazione) pertanto avremo esattamente d mappe continue $\tilde{f} : \triangle \to X$ ognuna con un diverso punto fissato dei d a disposizione nella preimmagine. Ne viene che

$$\#\tilde{F} = d\#F.$$

Ne viene inoltre che $C - g^{-1}(V) \subseteq \bigcup_{\tilde{f}\in\tilde{F}} \tilde{f}(\triangle) =: G$ e pertanto G è denso in X. Ma essendo $\triangle$ compatto anche G lo è: pertanto G è anche chiuso e, di conseguenza, $G = X$. Ne viene che $g^{-1}(V)$ non potrà che essere esattamente $\{\tilde{f}(t) : \tilde{f} \in \tilde{F}, t \in \{(0,1),(0,0),(1,0)\}\}$. Ora, presa $\tilde{f} \in \tilde{F}$, sia $g \circ \tilde{f} \circ \sigma_i$ che $g \circ \tilde{f} \circ \sigma_i \circ r$ appartengono ad L per $1 \leq i \leq 3$ (con le σ_i e la r definite come nella definizione 2.3), pertanto $\tilde{f} \circ \sigma_i$ e $\tilde{f} \circ \sigma_i \circ r$ appartengono a $\tilde{L}$. Ne segue, ancora, che ,se $t \in \{(0,0),(0,1),(1,0)\}$,

$$\tilde{f}(t) \in \{\tilde{l}(0) : \tilde{l} \in \tilde{L}\} \cup \{\tilde{l}(1) : \tilde{l} \in \tilde{L}\}$$

che ci dice perciò

$$g^{-1}(V) = \{\tilde{l}(0) : \tilde{l} \in \tilde{L}\} \cup \{\tilde{l}(1) : \tilde{l} \in \tilde{L}\};$$

ciò prova la condizione (i) della definizione. Dal lemma 2.1.2 e dalla (iii) della 2.1.3 segue che se $l \in L$, $p \in X$ e $g(p) = l(t)$ per $t \in (0,1)$ esiste ed è unica $\tilde{l} : [0,1] \to X$ tale che $g \circ \tilde{l} = l$ e $\tilde{l}(t) = p$; inoltre la restrizione di $\tilde{l}$ all'intervallo $(0,1)$ è un omeomorfismo sulla sua immagine. Dall'unicità di $\tilde{l}$ segue la condizione (ii) della definizione di triangolazione. Segue inoltre che

$$g^{-1}(\Gamma) = \tilde{\Gamma}$$

dove

$$\Gamma = \bigcup_{l\in L} l([0,1])$$

mentre

$$\tilde{\Gamma} = \bigcup_{\tilde{l}\in\tilde{L}} \tilde{l}([0,1]).$$

Inoltre, se $t \in (0,1)$ ed $l \in L$ allora $g^{-1}(t)$ consiste di esattamente d punti di X (poichè $l(t)$ non appartiene a al luogo di ramificazione $g(R)$). Come visto per le facce ne segue che

$$\#\tilde{L} = d\#L.$$

Dal teorema del sollevamento (2.1.1) se $\tilde{f} \in \tilde{F}$ allora la restrizione di $\tilde{f}$ a $\triangle^o$ è un omeomorfismo sull'immagine, che è una componente connessa di

$g^{-1}(f(\triangle^o))$ dove $f = g \circ \tilde{f}$. Poichè $f(\triangle^o)$ è una componente connessa di $Y - \Gamma$, ne viene che $\tilde{f}(\triangle^o)$ è una componente connessa di $g^{-1}(Y - \Gamma) = X - g^{-1}(\Gamma) = X - \tilde{\Gamma}$. Con ciò abbiamo finito di dimostrare la parte (iii) della definizione. La condizione (iv) è intrinseca nei discorsi precedenti e la condizione (v) segue da considerazioni del tutto analoghe (infatti preso $\tilde{l} \in \tilde{L}$ passiamo a considerare $l = g \circ \tilde{l}$, allora in Y varrà l'ipotesi (v) e gurdando le preimmagini delle due faccie trovate troveremo quelle che ci servono). Poichè V contiene $g(R)$ (da 2.1.3 (iv)) abbiamo infine anche che

$$\#\tilde{V} = d\#V - \sum_{p \in R} (\nu_g(p) - 1).$$

□

Questa proposizione è molto potente ma di per se ha bisogno di essere più consistente. Non abbiamo ancora dimostrate l'esistenza di molti oggetti utilizzati nella dimostrazione ma possiamo gia dedurne un primo corollario importante.

Corollario 2.2.3 (triangolazione di una superficie di Riemann)**.** *Sia S una superficie di Riemann compatta. Allora esiste una triangolazione di S nel senso della definizione 2.3.*

Dimostrazione. Poichè sappiamo che esiste una triangolazione di $\mathbb{P}_1$ (2.2.1) e poichè sappiamo che esiste sempre una funzione olomorfa $f : S \to \mathbb{P}_1$ (ovvero esiste sempre una funzione meromorfa definita su S 1.4.2) allora dalla 2.2.2 segue immediatamente che S è triangolabile. □

Per avere altre conseguenze dobbiamo introdurre ancora qualche concetto topologico.

2.3 Caratteristica di Eulero e formula di Riemann-Hurwitz

In questa sezione considereremo un invariante topologico (la caratteristica di Eulero) e vedremo il suo collegamento con i rivestimenti ramificati.

Partiamo da una superficie di Riemann compatta X e prendiamo una sua triangolazione (V, L, F). Consideriamo i tre spazi vettoriali

$$\mathbb{C}^{\#V} =: C_0(X), \mathbb{C}^{\#L} =: C_1(X), \mathbb{Q}^{\#F} =: C_2(X)$$

(identificabili con gli spazi vettoriali che hanno per base gli insiemi V, L ed F) e le tre applicazioni lineari

$$\partial_0 : C_0(X) \to \mathbb{C};$$

$$\partial_1 : C_1(X) \to C_0(X);$$

$$\partial_2 : C_2(X) \to C_1(X);$$

definite come segue:

$$\partial_0(\sum_{v \in V} \lambda_v v) = \sum_{v \in V} \lambda_v$$

$$\partial_1(\sum_{l \in L} \lambda_l l) = \sum_{l \in L} \lambda_l (l(1) - l(0))$$

$$\partial_2(\sum_{f \in F} \lambda_f f) = \sum_{f \in F} \lambda_f (\pm l_f^1 \pm l_f^2 \pm l_f^3)$$

dove i vari λ sono coefficenti complessi mentre il segno $\pm$ dipende dal fatto che $l_f^i = f \circ \sigma_i$ (segno positivo) o che sia uguale ad $f \circ \sigma_i \circ r$ (segno negativo).

Osserviamo subito $\partial_0 \circ \partial_1 = 0 = \partial_1 \circ \partial_2$. Pertanto

$$\text{Im}\partial_1 \subseteq \text{Ker}\partial_0, \ \text{Im}\partial_2 \subseteq \text{Ker}\partial_1.$$

Possiamo pertanto definire

$$H_1 := \frac{\text{Ker}\partial_1}{\text{Im}\partial_2},$$

$$H_0 := \frac{\mathrm{Ker}\partial_0}{\mathrm{Im}\partial_1}$$

E' un teorema fondamentale di topologia algebrica (ed in particolare di omologia) il seguente:

Teorema 2.3.1 (invarianza topologica dell'omologia)**.** *Gli spazi $H_i(X)$ di uno spazio topologico X non dipendono dalla triangolazione dello spazio e sono invarianti topologici.*

Diamo una prima definizione di caratteristica di Eulero che ne permette un calcolo semplice.

Definizione 2.4 (caratteristica di Eulero)**.** Sia X una superfice di Riemenna compatta triangolata da (V, L, F). Allora definiamo la caratteristica di Eulero di $\chi(X)$ come il numero

$$\#V - \#L + \#F$$

Osserviamo subito come tale definizione dipenda esplicitamente dalla triangolazione scelta.

Vogliamo dimostrare il seguente:

Lemma 2.3.2.

$$\chi(X) = \dim(H_0) - \dim(H_1) + k + 1$$

Dove k è il numero di componenti connesse di X.

Ne verrà immediatamente che χ è un invariante topologico.

Dimostrazione. Per i teoremi di omomorfismo abbiamo subito che:

$$\#V = \dim \mathrm{Ker}\partial_0 + \dim \mathrm{Im}\partial_0 \#E = \dim \mathrm{Ker}\partial_1 + \dim \mathrm{Im}\partial_1 \#F = \dim \mathrm{Ker}\partial_2 + \dim \mathrm{Im}\partial_2$$

pertanto $\chi(X) = \dim H_0 - \dim H_1 + \dim Im\partial_0 + \dim \mathrm{Ker}\partial_2$. Poichè $V \neq \varnothing$ si ha che $\dim \mathrm{Im}\partial_0 = 1$. Inoltre, per il punto (v) della definizione 2.3 si ha che (scegliendo opportuni coefficenti)

$$\partial_2(\sum_{f \in F} \lambda_f f) = \sum_{l \in L}(\lambda_{f_l^+} - \lambda_{f_l^-})l$$

che è nullo se e solo se $\lambda_{f_l^+} = \lambda_{f_l^-}$ $\forall l \in L$. Siano $X_1, ..., X_k$ le componenti connesse di X, sia $f \in F$ allora $f(\triangle)$ è completamente contenuta in una componente connessa di X e vale $X = \bigcup_{f \in F} f(\triangle)$. Inoltre, se $f \neq \tilde{f}$, allora $f(\triangle) \cap \tilde{f}(\triangle) \neq \varnothing$ se e solo se esiste $l \in L$ tale che $\{f_l^+, f_l^-\} = \{f, \tilde{f}\}$. Ne segue che $f(\triangle)$ e $\tilde{f}(\triangle)$ sono contenuti nella stessa componente connessa se e solo se esistono una successione

$$f = f_0, f_1, ...f_m = \tilde{f}$$

di facce e una successione

$$l_1, ..., l_m$$

di lati tali che $\{f_{l_j}^+, f_{l_j}^-\} = \{f_j, f_{j+1}\}$ per $j = 1, .., m$. Ne viene che un elemento $\sum_{f \in F} \lambda_f f$ in $C_2(X)$ soddisfa la condizione $\lambda_{f_l^+} = \lambda_{f_l^-}$ per ogni lato $l \in L$ se e solo se esistono $c_1, ..., c_k \in \mathbb{C}$ tali che $\lambda_f = c_i$ quando $f(\triangle) \subseteq X_i$. Ne viene che $\dim \mathrm{Ker}\partial_2 = k$. $\square$

Come corollario immediato abbiamo che la caratteristica di eulero è indipendente dalla triangolazione ed invariante per omemorfismo.

Esempio 2.1. Per quanto visto in 2.2.1 $\chi(\mathbb{P}_1) = 2$

A questo punto possiamo dedurre immediatamente un corollario della proposizione 2.2.2 che è poi il teorema principale che intendevamo dimostrare:

Teorema 2.3.3 (Formula di Riemann-Hurwitz)**.** *Siano X ed Y due superfici di Riemann compatte. Supponiamo che esista una mappa olomorfa $f : X \to Y$ e sia R l'insieme dei punti di ramificazione di X tramite f. Supponiamo inoltre che il numero di fogli del rivstimento $f : X - R \to Y - f(R)$ sia n. Vale la seguente relazione*

$$\chi(X) = n\chi(Y) - \sum_{p \in R} (\nu_f(p) - 1).$$

Dimostrazione. Immediata dalla proposizione 2.2.2 e dalla definizione di χ $\square$

Ancora non sappiamo se esistono mappe olomorfe tra qualunque superficie di Riemnn ma siamo sicuri che esistono mappe meromorfe non costanti su ogni superficie di Riemann. Pertanto tale formula è applicabile al calcolo della caratteristica di eulero di una superficie di Riemann X qualunqe considerando una funzione meromorfa su di essa e quindi prendendo $Y = \mathbb{P}_1$. Purtroppo non abbiamo un metodo preciso per definire le funzioni meromorfe. In certi casi particolari, però, questo è possibile.

2.4 Riemann-Hurwitz per curve proiettive

Consideriamo una curva proiettiva C non singolare generata dal polinomio oomogeneo $P(x, y, z)$ di grado d. A meno di effettuare una trasformazione proiettiva possiamo assumere che $[0, 1, 0] \notin C$. Risulta così ben definita la mappa

$$\phi : C \to \mathbb{P}_1$$

tale che

$$[x, y, z] \mapsto [x, z].$$

Tale mappa è continua e olomorfa nel senso della definizione 1.13 pertanto deve essere un rivestimento ramificato. Vogliamo capire come funziona in tale senso.

Consideriamo un punto $[a, b, c] \in C$ tale che

$$\frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c) \neq 0.$$

Allora localmente esiste una funzione φ olomorfa tale che $y = \varphi(x)$ se $[x, y, 1] \in C$. Inoltre una carta locale di C potrebbe essere $\frac{x}{z}$ che è anche una carta locale di $\mathbb{P}_1$. Quindi ϕ localmente potrà essere espressa tramite carte come la mappa $\frac{x}{z} \mapsto \frac{x}{z}$. Di conseguenza $[a, b, c]$ avrà indice $\nu_\phi = 1$. Quindi un punto di C per cui $\frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c) \neq 0$ non è un punto di ramificazione.

Ora, chiamiamo $[a, b, c]$ un punto per cui

$$\frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c) = 0$$

e sia k la molteplicità di zero del polinomio $P(a, y, c)$ in $y = b$. Abbiamo che $\frac{\partial P}{\partial x}(a, b, c) \neq 0$, pertanto localmente possiamo scrivere $x = \varphi(y)$ con φ funzione olomorfa ed $[x, y, 1] \in C$.Supponiamo (con una traslazione sottointesa) che $\varphi^{(j)}(b) = 0$ per $1 \leq j < m$. Se deriviamo rispetto ad y l'equazione $P(\varphi(y), y, 1) = 0$ m volte otteniamo che

$$\varphi^{(m)}(b) = -\frac{\partial^m P}{\partial y^m}(\varphi(b), b, 1)/\frac{\partial P}{\partial x}(\varphi(b), b, 1)$$

da cui segue che m è pari a $k + 1$. Poichè, tramite ovvie carte, ϕ si comporta come $\frac{y}{z} \mapsto \frac{\varphi(y)}{z}$ se applichiamo un cambio di coordinate che ci porti alla classica scrittura $w \mapsto w^{\nu_\phi}$ vediamo subito che $\nu_\phi([a, b, c]) = k$. In definitiva abbiamo mostrato che l'indice di ramificazione in questo specifico caso è una proprietà che dipende solamente dalle caratteristiche algebriche di P. E' infatti la molteplicità di zero in y del polinomio P. Pertanto la formula di Riemann-Hurwitz che diventa in questo caso

$$\chi(C) = 2d - \sum_{p \in R} (\nu_\phi(p) - 1)$$

che è un legame diretto tra proprietà algebriche e proprietà topologiche!

Capitolo 3

Differenziali sulle superfici di Riemann

Quest'ultimo capitolo tratta la nozione di differenziale olomorfo (e meromorfo) su una Superficie di Riemann. Anche qui mostreremo un forte legame tra alcune proprietà dei differenziali meromorfi e proprietà topologiche della superficie di Riemann su cui sono definiti.

Definizione 3.1. Un cammino differenziabile a tratti su di una superficie di Riemann S è una mappa continua $\gamma : [a, b] \to S$ tale che la sua lettura, tramite una carta ϕ, su un aperto di $\mathbb{C}$ è un cammino differenziabile a tratti nel senso solito.

Definizione 3.2 (Differenziale meromorfo)**.** Siano f, g due funzioni meromorfe definite su una superfice di Riemann S.Diremo che una espressione

$$fdg$$

è un differenziale meromorfo su S. Inoltre, se $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ sono altre due funzioni meromorfe su S, diremo che

$$fdg = \tilde{f}d\tilde{g}$$

se e solo se per ogni carta (U, φ) abbiamo che

$$(f \circ \varphi^{-1})(g \circ \varphi^{-1})' = (\tilde{f} \circ \varphi^{-1})(\tilde{g} \circ \varphi^{-1}).$$

In realtà esiste una definizione meno globale di differenziale meromorfo

Definizione 3.3. Sia $\Phi := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A \, \varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha\}$ un atlante olomorfo su una superficie di Riemann S. Allora un differenziale meromorfo η su S è dato da una collezione

$$\{\eta_\alpha : V_\alpha \to \mathbb{P}_1 : \alpha \in A\}$$

di funzioni meromorfe tali che se $\alpha, \beta \in A$, e $u \in U_\alpha \cap U_\beta$ allora vale

$$\eta_\alpha(\varphi_\alpha(u)) = \eta_\beta(\varphi_\beta(u))(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})'(\varphi_\alpha(u)).$$

Date due funzioni meromorfe f e g possiamo ottenere il differenziale $\eta = fdg$ secondo questa definizione ponendo $\eta_\alpha = (f \circ \varphi_\alpha^{-1})(g \circ \varphi_\alpha^{-1})'$.

Osservazione 13. Se η e ζ sono due differenziali meromorfi secondo la definizione 3.3, e ζ non è identicamente nullo su una componente connessa di S allora possiamo considerare il rapporto η_α/ζ_α : si tratta di una funzione meromorfa su V_α che soddisfa la relazione

$$\frac{\eta_\alpha(\varphi_\alpha(u))}{\zeta_\alpha(\varphi_\alpha(u))} = \frac{\eta_\beta(\varphi_\beta(u))}{\zeta_\beta(\varphi_\beta(u))}$$

per ogni $u \in U_\alpha$. Equivalentemente esiste una funzione meromorfa f tale che $\eta = f\zeta$. Per mostrare che ogni differenziale del tipo 3.3 si può scrivere nella forma fdg della definizione 3.2 ci basta assumer che su ogni superficie di Riemann esiste almeno una funzione meromorfa non costante g, infatti dg sarebbe un differenziale e per ogni η si scriverebbe $\eta = fdg$ per una qualche f meromorfa su S. Ma g esiste per il teorema di esistenza di Riemann (1.4.2).

Esempio 3.1. Se S è il piano complesso $\mathbb{C}$ allora un differenziale meromorfo fdg può essere sempre scritto nella forma hdz dove $h = fg'$ e z rappresenta la funzione identica.

Definizione 3.4. Diremo che un differenziale meromorfo fdg ha un polo nel punto $p \in S$ se la funzione meromorfa $(f \circ \varphi^{-1})(g \circ \varphi^{-1})'$ ha un polo nel punto $\varphi(p)$, dove (φ, U) è una carta olomorfa con U intorno aperto di p in S. Diremo che un differenziale è olomorfo se non ha nessun polo in questo senso.

Definizione 3.5. Sia f una funzione meromorfa su una superficie di Riemann S.Sia $p \in S$, scegliamo una carta (U, φ) di S tale che $p \in U$. Diremo che f ha un polo o uno zero di molteplicità m in p se per z vicino a $\varphi(p)$ possiamo scrivere rispettivamente:

$$f \circ \varphi^{-1}(z) = (z - \varphi(p))^{-m} g(z)$$

o

$$f \circ \varphi^{-1}(z) = (z - \varphi(p))^{m} g(z)$$

dove g è una funzione olomorfa che non si annulla in $\varphi(p)$.
Analogamente diremo che il differenziale meromorfo fdg ha un polo o uno zero di molteplicità m nel punto p se la funzione meromorfa $(f \circ \varphi^{-1})(g \circ \varphi^{-1})'$ ha un polo o uno zero di molteplicità m nel punto $\varphi(p)$.

Osservazione 14. Le definizioni precedenti non dipendono dalla scelta della carta (U, φ); infatti se (V, ψ) è un'altra carta olomorfa tale che $p \in V$, allora la funzione di transizione $\varphi \circ \psi^{-1}$ soddisfa la relazione

$$\varphi \circ \psi^{-1}(z) = \varphi(p) + (z - \psi(p))h(z)$$

con h olomorfa e non nulla nel punto $\psi(p)$. Analogamente nel caso dei differnziali meromorfi.

Definizione 3.6 (integrale)**.** Se fdg è un differenziale olomorfo su S allora definiremo il suo integrale lungo un cammino differenziabile a tratti $\gamma : [a, b] \to S$ come

$$\int_\gamma fdg = \int_a^b f \circ \gamma(t)(g \circ \gamma)'(t)dt.$$

Osservazione 15. L'integrale è ben definito.

Dimostrazione. Dobbiamo vedere che se $fdg = \tilde{f}d\tilde{g}$ allora i loro integrali lungo una curva γ sono uguali. Poichè i differenziali sono uguali, le loro espressioni relative a una carta sono uguali. Pertanto basterà spezzare la curva γ un delle sottocurve in modo che ognuna di esse sia completamente contenuta in una carta. $\square$

Definizione 3.7. Se $\Psi : S \to R$ è una mappa olomorfa tra superfici di Riemann, ed fdg è un differenziale olomorfo su R allora possiamo definire un differenziale olomorfo $\Psi^*(fdg)$ su S come

$$\Psi^*(fdg) = (f \circ \Psi)d(g \circ \Psi).$$

3.1 Teorema dei residui

Scopo di questa sezione è dimostrare un teorema dei residui per le superfici di Riemann analogo a quello dell'analisi complessa che qui richiamo:

Teorema 3.1.1 (dei residui, di Cauchy)**.** *Sia $K \subseteq \mathbb{C}$ un compatto e sia f una funzione meromorfa su K e senza poli su ∂K. Siano $p_1, .., p_t$ poli di f in $K - \partial K$. Allora*

$$\int_{\partial K} f(z)dz = \pm 2\pi\imath \sum_{\jmath=1}^{t} res\{f; p_\jmath\}.$$

Necessitiamo innanzi tutto di un lemma topologico.

Lemma 3.1.2. *Sia $\{p_1, ..., p_r, q_1, ..., q_s\}$ un nsieme di $r+s$ punti di $\mathbb{C}$ con $r \geq 3$. Allora esiste una triangolazione (V, L, F) di $\mathbb{P}_1$ tale che $V = \{p_1, ..., p_r\}$ e $\{q_1, ..., q_s\}$ è completamente contenuto nell'interno di una faccia, ovvero esiste $f \in F$ tale che $q_\jmath \in f(\triangle^o)$ per ogni $\jmath = 1, ..., s$. Potremmo inoltre assumere che il punto ∞ sia contenuto nell'interno di un'altra faccia.*

Dimostrazione. Per induzione su r. Sia $r = 3$, tramite applicazione lineare possiamo assumere $0 \notin \{p_1, ..., p_3, q_1, ..., q_s\}$ e che tali punti abbiano argomento differente. Sia $R \in \mathbb{R}$ tale che $R > \max\{|p_1|, ..., |p_3|, |q_1|, ..., |q_s|\}$ e assumiamo infine che

$$\arg(p_1) < \arg(p_2) < \arg(p_3).$$

Ora, se $\varepsilon > 0$ è sufficentemente piccolo possiamo costruire una curva regolare a tratti l_1 da p_1 a p_2 considerando il segmento congiungente p_1 con il punto $R\exp(\varepsilon + \arg(p_1))$, l'arco di circonferenza di raggio R tra esso e il punto

$R\exp(-\varepsilon + \arg(p_2))$ ed infine il segmento tra quest'ultimo e p_2. Similmente possiamo definire l_2 ed l_3 tra p_2 e p_3 e tra p_3 e p_1. Se ε è sufficientemnte piccolo i punti $\{q_1, ..., q_s\}$ sono tutti contenuti nell'interno della curva chiusa ottenuta unendo l_1, l_2 ed l_3. Inoltre, poichè tale curva è omeomorfa ad una circonferenza e il suo interno ad un disco, per quanto visto nella proposizione 2.2.1 abbiamo ottenuto una triangolazione di $\mathbb{P}_1$ con $V = \{p_1, p_2, p_3\}$, $L = \{l_1, l_2, l_3\}$ e due facce (l'interno e l'esterno della curva chiusa formata dai lati); osserviamo inoltre che ∞ si trova nella faccia opposta a quella contenete 0 ed i punti q_i. Ora per ipotesi induttiva assumiamo $r > 3$ e di avere una triangolazione con $p_1, ..., p_{r-1}$ vertici tale che i punti $\{q_1, ..., q_s\}$ e il punto p_r siano completamente contenuti nell'interno di una faccia $f \in F$. Quindi $p_r = f(t)$ per qualche $t \in \triangle^o$. Componendo f con un omeomorfismo su $\triangle$ del tipo

$$(x, y) \mapsto (x + y)^{\alpha}(x, y)$$

per $\alpha > 0$ opportuno possiamo assumere che nessuno tra $q_1, ..., q_s$ appartena all'immagine tramite f del segmento γ_0 congiungente $(1, 0)$ con t. Possiamo perciò scegliere due punti s_1 ed s_2 in $\triangle^o$ vicini ad $(1, 0)$ e giacenti rispettivamente sopra e sotto la retta γ_0. Sia γ_1 l'unione di due segmenti: quello da s_1 ad s e quello da $(0, 1)$ ad s_1.Analogamente sia γ_2 l'unione del segmento da s_2 ad s con quello da s_2 a $(0, 0)$.Alla fine abbiamo suddiviso il nostro triangolo $\triangle$ in tre aree, ottenedo così una nuova triangolazione con vertici $p_1, ..., p_r$ e lati quelli precedenti più $f \circ \gamma_0$, $f \circ \gamma_1$ e $f \circ \gamma_2$. Inoltre, a patto che si prendano s_1 ed s_2 molto vicino al punto $(1, 0)$, i punti $q_1, ..., q_s$ si troveranno tutti nella stessa faccia (precisamente quella con vertici $f(s)$, $f((0, 0))$ e $f((0, 1))$). $\square$

Definizione 3.8 (residuo di un differenziale in un polo)**.** Sia $\omega = fdg$ un differenziale meromorfo definito su una superficie di Riemann compatta S e sia $p \in S$ un punto in cui ω abbia un polo. Sia (U, φ) una carta olomorfa di S con U intorno di p. Definiamo il residuo di ω in p come

$$res\{\omega, p\} := res\{(f \circ \varphi^{-1})(g \circ \varphi^{-1})', \varphi(p)\}$$

Osservazione 16. La definizione non dipende dalla scelta della carta (U, φ)

Dimostrazione. Poichè il residuo di una funzione meromorfa f su $\mathbb{C}$ è in un punto a è pari a $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz$ (dove γ è un cammino chiuso intorno ad a) ci basta verificare che tale integrale è uguale per le due funzioni meromofe ottenute dalla lettura del differenziale dg tramite due diverse carte. Si vede subito che la funzione di transizione compare come derivata ed agisce da cambio di variabile nell'integrale. □

Teorema 3.1.3. *Sia S una superficie di Riemann compatta, e sia ω un differenziale meromorfo su S con $q_1, ...q_t$ poli. Allora*

$$\sum_{\jmath=1}^{t} res\{\omega, q_\jmath\} = 0$$

Dimostrazione. Sia $\omega = gdh$.Per il teorema di esistenza di Riemann (1.4.2) esiste una funzione meromorfa $\phi : S \to \mathbb{P}_1$. Possiamo assumere che i punti 0, ∞ e $\phi(q_\jmath)$ per $\jmath = 1, ..., t$ siano tutti distinti e non appartengano al luogo di ramificazione di ϕ. Per il lemma 3.1.2 possiamo triangolare $\mathbb{P}_1$ con (V, L, F) in modo da assumere che il luogo di ramificazione di ϕ sia contenuto in V, mentre $\{\phi(q_1), ..., \phi(q_t)\}$ e 0 siano tutti nell'interno di una faccia $f_0 \in F$. Infine ∞ lo possiamo assumere nell'interno di una faccia $f_\infty \neq f_0$. Per la proposizione 2.2.2 esiste una triangolazione $(\tilde{V}, \tilde{L}, \tilde{F})$ in cui ogni faccia abbia al più un punto di ramificazione tra i sui vertici. Ciò significa (da 2.1.2) che se $\tilde{f} \in \tilde{F}$ e $f = \phi \circ \tilde{f}$ allora

$$\phi : \tilde{f}(\triangle) \to f(\triangle)$$

è un omeomorfismo la cui restrizione ad $\tilde{f}(\triangle - \{(0,0),(0,1),(1,0)\})$ è la restrizione di una carta olomorfa se $f \neq f_\infty$ (infatti tale restrizione può essere vista come una mappa in $\mathbb{C}$ e per la definizione di funzione olomorfa la si può intendere come carta di S). Se $f = f_\infty$ ci basta comporre con $z \mapsto \frac{1}{z}$ per ottenere lo stesso. Ora il bordo di $\tilde{f}(\triangle)$ in S è una curva $\tilde{\gamma}$ che è l'unione dei cammini $\tilde{f} \circ \sigma_i$ per $i = 1, 2, 3$ come definiti nella definizione 2.3. Componendo poi $\phi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ otteniamo una curva chiusa differenziabile a tratti su $\mathbb{P}_1$ la cui immagine è il bordo di $f(\triangle)$. Ora

$$\int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_{\gamma} (\phi|^{-1}_{\tilde{f}(\triangle)})^* \omega = \int_{\gamma} (g \circ \phi|^{-1}_{\tilde{f}(\triangle)})(h \circ \phi|^{-1}_{\tilde{f}(\triangle)})'(z) dz.$$

Se consideriamo $f = f_0$ e allora, per il teorema dei residui di Cauchy (ricordando che $\infty \notin f_0(\triangle)$) abbiamo che

$$\sum_{\tilde{f} \in \tilde{F}, \phi \circ \tilde{f} = f_0} \int_{\partial \tilde{f}(\triangle)} \omega = \sum_{\jmath=1}^{t} res\{\omega, q_\jmath\}.$$

D'altro canto tutti gli altri integrali, non avendo poli al loro interno, sono nulli (teorema di cauchy dell'analisi complessa, per il caso f_∞ basta comporre con $z \mapsto \frac{1}{z}$ per avere lo stesso) e quindi la somma

$$\sum_{\tilde{f} \in \tilde{F}} \int_{\partial f(\triangle)} \omega = \sum_{\jmath=1}^{t} res\{\omega, q_\jmath\}.$$

D'altra parte per la condizione di essere coerentemente orientate le triangolazioni di una superficie abbiamo che per ogni lato $\tilde{l} \in \tilde{L}$ possono essere trovate due faccie $\tilde{f}_l^+$ e $\tilde{f}_l^-$ tali che (usando la notazione della definizione 2.3) $\tilde{l} = \tilde{f}_l^+ \circ \sigma_i = \tilde{f}_l^- \circ \sigma_j \circ r$ per certi i, j. Naturalmente ogni integrale del tipo $\int_{\partial \tilde{f}(\triangle)} \omega$ può essere spezzato in tre integrali sui tre lati che formano il bordo di $\tilde{f}$ e, per quanto detto poco sopra, sommando su tutte le facce avremo che ogni lato comparirà due volte come dominio di integrazione e verrà percorso una volta in un senso e una volta nel senso opposto cancellando perciò i due integrali dalla somma (ciò viene dal calcolo degli integrali curviliei su $\mathbb{C}$). Pertanto in definitiva abbiamo

$$\sum_{\jmath=1}^{t} res\{\omega, q_\jmath\} = \sum_{\tilde{f} \in \tilde{F}} \int_{\partial f(\triangle)} \omega = 0.$$

$\square$

Le importanti conseguenze di questo teorema le vedremo a partire dalla prossima sezione dopo aver dato ancora qualche concetto importante.

3.2 Divisori e grado dei differenziali

Definizione 3.9 (divisore)**.** Un divisore D su di una superficie di Riemann S è una somma formale

$$D = \sum_{p \in S} n_p p$$

tale che $n_p \in \mathbb{Z}$ per ogni $p \in S$ ed $n_p = 0$ per tutti i p tranne un numero al più finito. Il grado di un divisore D viene allora definito come

$$deg(D) = \sum_{p \in S} n_p$$

In maniera ovvia potremo parlare di somme e differenze di divisori. Diremo che $D \geq 0$ se tutti i suoi coefficienti sono non negativi($n_p \geq 0 \forall p$) e che $D \geq D'$ se e solo se $D - D' \geq 0$. Banale è che se $D \geq D'$ allora $degD \geq degD'$.

Definizione 3.10. Sia f una funzione meromorfa su S non identicamente nulla. Definiamo il divisore di f come

$$(f) = \sum_{p \in S} n_p p$$

dove n_p è la molteplicità di polo o di zero di f in p con segno positivo se è uno zero o segno negativo se si tratta di un polo. In maniera del tutto analoga si definisce il divisore di un differenziale meromorfo ω come (ω). Un divisore che è il divisre di una funzione meromofa è detto divisore principale. Un divisore di un differenziale meromorfo è detto divisore canonico. Due divisori D e D' sono detti linearmente equivalenti ($D \sim D'$) se $D - D'$ è un divisore principale.

Osservazione 17. E' ovvio che

$$(fg) = (f) + (g)$$

e che

$$(\frac{f}{g}) = (f) - (g).$$

Osservazione 18. Se ω ed η sono due differenziali meromorfi definiti su C abbiamo gia visto nell'osservazione 13 che esiste una funzione meromorfa f tale che $\omega = f\eta$.Pertanto

$$(\omega) = (f) + (\eta) \sim (\eta)$$

ovvero due divisori canonici sono sempre linearmente equivalenti.

A questo punto è interessante il seguente corollario del teorema dei residui

Corollario 3.2.1 (divisori principali)**.** *Un divisore principale su una superficie di Riemann S compatta ha grado nullo. Ovvero una funzione meromorfa ha lo stesso numero di poli e di zeri contati con le loro molteplicità.*

Dimostrazione. Sia g una funzione meromorfa su S non identicamente nulla. Consideriamo il differenziale $\frac{dg}{g}$. E' facile vedere che tale differenziale ha un polo in un punto a con residuo ρ se e solo se g ha uno zero in a con molteplicità ρ o un polo in a con molteplicità $-\rho$. Dal teorema dei residui (3.1.3) segue subito la tesi. □

Corollario 3.2.2. *Due divisori linearmente equivalenti su S hanno lo stesso grado. In particolare due divisori canonici hanno lo stesso grado*

Dimostrazione. Ovvia conseguenza di 3.2.1 □

Quello che vogliamo arrivare a dimostrare è una conseguenza della formula di Riemann-Hurwitz che leghi il grado di un divisore canonico su una curva proiettiva con la topologia di essa.

Esempio 3.2. Su $\mathbb{P}_1$ con le coordinate omogenee $[x, z]$ consideriamo il differenziale $d(\frac{x}{z})$. Nei punti diversi da ∞ possiamo considerare il differenziale come dx dove x è la coordinata in $\mathbb{C}$ e la forma non ha ne zeri ne poli. Ma all'infinito dobbiamo comporre con la carta $x \mapsto \frac{1}{x}$ e quindi $dx \mapsto d(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2}dx$ ed otteniamo un polo di molteplicità due.

Teorema 3.2.3. *Sia S una superficie di Riemann compatta e sia κ un divisore canonico su di essa. Allora vale*

$$deg(\kappa) = -\chi(S)$$

Dimostrazione. Per il corollario 3.2.1 ci basta dimostrare la formula per un qualunque differenziale meromorfo su S. Consideriamo il differenziale dx dell'esempio precedente su $\mathbb{P}_1$. Per il teorema di esistenza di Riemann esiste $f : S \to \mathbb{P}_1$ meromorfa.Consiaderiamo quindi su S il differenziale $f^*(dx)$. Andiamo a contare zeri e poli di questo. Poichè nel punto $\infty \in \mathbb{P}_1$ dx ha un polo di molteplicità 2 e poichè possiamo assumere che ∞ non è nel luogo di ramificazione di f, $f^*(dx)$ avrà n poli di molteplicità 2 su S (dove n è il numero dei fogli del rivestimento f).D'altro canto in ogni altro punto non di ramificazione f si comporta localmente come una mappa del tipo $z \mapsto z$ e pertanto non ci saranno altri zeri o poli poichè dx non ne ha altri su $\mathbb{P}_1$. Nei punti di ramificazione invece la mappa f si comporta localmente come $z \mapsto z^{\nu_f(p)}$ e componendo nel differenziale (per definizione di $f^*(dg) = d(g \circ f)$) si ha $d(z^k) = kz^{k-1}dz$. Pertanto in un punto di ramificazione p il nostro differenziale guadagna uno zero di ordine $\nu_f(p) - 1$.In definitiva abbiamo

$$deg(\kappa) = degf^*(dx) = -2n + \sum_{p \in R}(\nu_f(p) - 1) = -\chi(S)$$

□

3.3 Formula di genere-grado

Iniziamo facendo un esempio particolare di differenziale olomorfo su di una curva proiettiva non singolare. Per evitare confusione con la notazione facciamo alcune premesse. Siano $[X_0, X_1, X_2]$ le coordinate omogenee di $\mathbb{P}_1$. Sia C una curva proiettiva non singolare generata da $P(X_0, X_1, X_2)$. Fissiamo la notazione per le coordinate sulle carte U_0, U_1 e U_2. Siano

$$x = \frac{X_1}{X_0}, y = \frac{X_2}{X_0}$$

$$u = \frac{X_0}{X_1}, v = \frac{X_2}{X_1}$$
$$s = \frac{X_0}{X_2}, t = \frac{X_1}{X_2}$$

le carte rispettivamente di U_0, U_1, U_2 come definiti precedentemente. Consideriamo per ora $C \cap U_0$. Qui $P(X_0, X_1, X_2)$ può essere letto come un polinomio non omogeneo $P(1, x, y)$. Inoltre per il teorema della funzione implicita , se $P(1, \tilde{x}, \tilde{y}) = 0$ e $\frac{\partial P}{\partial y}(1, \tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0$ esiste tutto un intorno di $[1, \tilde{x}, \tilde{y}]$ tale che in esso si ha

$$P(1, x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$$

con f funzione olomorfa. In tale intornopotremo scrivere quindi

$$\frac{d}{dw}(P(1, w, f(w))) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial x}(1, w, f(w)) + \frac{\partial P}{\partial y}(1, w, f(x))f'(w) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{\partial P}{\partial y}(1, w, f(w))} = -\frac{f'(w)}{\frac{\partial P}{\partial x}(1, w, f(w))}.$$

Lo stesso identico discorso si può riproporre nel caso in cui $\frac{\partial P}{\partial x} \neq 0$ ottenedo però $x = g(y)$. Poichè la curva affine $C \cap U_0$ è non singolare tutti i suoi punti rientrano in uno di questi due casi. Interroghiamoci ora sul significato del differenziale dx in $U_0 \cap C$. Attorno ad un punto del primo tipo una carta locale è $\varphi(X_0, X_1, X_2) = \frac{X_1}{X_0}$ ma anche $x = \frac{X_1}{X_0}$. Poichè $dx = (x \circ \varphi^{-1})'$ deduciamo che dx ha gli stessi zeri e poli della funzione meromorfa costante 1 in $U_0 \cap C$. In maniera simile, $y = \frac{X_2}{X_0}$ e $y = f(x) = f(\frac{X_1}{X_0}) = f \circ \varphi$, da cui $dy = f'dx$ dove f' è calcolata nel punto $\frac{X_1}{X_0}$. Deduzioni del tutto analoghe ma con ruoli invertiti si possono fare nei casi in cui $\frac{\partial P}{\partial x} \neq 0$. In definitiva abbiamo visto che

$$\frac{dx}{\partial P/\partial y} = -\frac{dy}{\partial P/\partial x}$$

e pertanto non ha ne zeri ne poli in $C \cap U_0$. Cerchiamo di mostrare che è olomorfo su tutto C. Consideriamo la retta $X_0 = 0$. Nella carta U_1 si ha $x = 1/u$ e $y = v/u$. Il differenziale $\frac{dx}{\partial P/\partial y}$ diviene perciò

$$\frac{u^{d-3}du}{\partial P/\partial v}$$

. Se ora rifacciamo le stesse deduzioni fatte su $C \cap U_0$ in $C \cap U_1$ troveremo che questo ancora non ha poli. Come non ne ha quello scritto su U_2 che è

$$-\frac{s^{d-3}ds}{\partial P/\partial t}$$

. Potendo assumere $[0,0,1] \notin C$ il grado del nostro differenziale sarà pari ad $d-3$ volte la molteplicità di zero della funzione u. Essendo C una curva proiettiva di grado d ci saranno d punti in cui u si annulla (ce n'è uno in $\mathbb{P}_1$; se lo rivestiamo con C nella preimmagine ci saranno d punti corrispondenti).Pertanto il nostro differenziale ha grado $d(d-3)$.

Definiamo ora un nuovo invariante topologico.

Definizione 3.11 (Genere)**.** Sia S una superficie (topologica). Il genere di S è

$$g = \frac{1}{2}(2-\chi)$$

Il teorema 3.2.3 diventà perciò

$$deg(\kappa) = 2g - 2.$$

Ora per le nostre deduzioni precedenti diventa immediato il seguente corollario

Corollario 3.3.1 (Formula di genere-grado)**.** *Sia C una curva proiettiva non singolare di grado d e genere g. Vale la seguente formula*

$$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$$

Dimostrazione. Segue dalle deduzioni fatte fin'ora □

Osservazione 19. Il genere g di una superficie compatta ha una interpretazione intuitiva molto esplicita: il genere è il numero massimo di curve chiuse lungo cui la superficie può essere tagliata senza essere disconnessa. Nel caso in cui la superficie sia orientabile il genere è anche interpretabile dicendo che la superficie è omeomorfa ad una somma connessa di g tori (o equivalentemente ad una sfera con g manici). Mostrare che queste interpretazioni sono vere è un argomento di topologia che esce sicuramente dagli scopi di questa tesi.

La formula di genere grado mostra, che nel caso delle curve proiettive le proprietà topologiche e algebriche, nonostante provengano da definizioni completamente diverse, sono legate in maniera molto profonda. Infatti abbiamo provato come un concetto puramente topologico (il genere o la caratteristica di Eulero) su una superficie di Riemann possa essere definito tramite proprietà olomorfe (teorema 3.2.3) o addirittura, restringendoci al caso delle curve proiettive, possa essere definito tramite proprietà algebriche.

Bibliografia

[1] Otto Forster, *Lectures on Riemann Surfaces* Springer-Verlag, New York, 1981

[2] Frances Kirwan, *Complex Algebraic Curves* Cambridge University Press, 1992