

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea in Matematica

π
E LE
FUNZIONI CIRCOLARI

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:

Chiar.mo Prof.

ERMANNANO LANCONELLI

Presentata da:

MARTA FALASCHI

Sessione II
Anno Accademico 2009-2010

*A Tommy
e alla
mia famiglia...*

Introduzione

Il mondo è stato creato con delle frasi, composte di parole, formate da lettere. Dietro queste ultime sono nascosti numeri, rappresentazione di una struttura, di una costruzione ove appaiono senza dubbio degli altri mondi ed io voglio analizzarli e capirli, perché l'importante non è questo e quel fenomeno, ma il nucleo, la vera essenza dell'universo.

Albert Einstein

Capire la matematica è capire la natura stessa, perché la matematica è il miglior linguaggio che conosciamo per poterla interpretare: i numeri primi, la successione di Fibonacci, i frattali, il pi greco, sono solo alcuni esempi di matematica che agisce nel mondo della natura. Dalla spirale logaritmica della conchiglia del Nautilus all'esagono delle cellette dell'alveare, dalla stella a sei punte del cristallo di neve alla geometria del sistema solare, sono tutti affascinanti esempi di come la Natura possa risolvere e costruire in maniera così egregia e semplice la propria stessa essenza!

Il seguente elaborato tratta di π e delle funzioni circolari ed è suddiviso in tre capitoli.

Il primo è un percorso attraverso la storia di π : anche la matematica ha una sua storia, non meno travagliata e non meno affascinante d'ogni altra disciplina e conoscerla è sicuramente il primo passo da affrontare per comprenderla.

Infatti, benché spesso sconcertanti e difficili, i percorsi della matematica sono

in ultima istanza riconducibili a motivazioni squisitamente umane, pratiche, a problemi alla cui risoluzione l'intelligenza umana si è applicata sin dalle origini e che sono pertanto agevolmente comprensibili (col senno di poi) attraverso la ricostruzione di quegli sforzi e di quelle motivazioni; attraverso, insomma, la storia degli uomini, delle loro civiltà, delle loro idee e dei loro errori.

Il secondo capitolo presenta la teoria delle funzioni circolari e le loro principali proprietà.

Questo secondo capitolo, ricco di definizioni e proposizioni, introduce matematicamente il concetto di π , la sua definizione e formalizzazione.

Infine, l'ultimo capitolo, approfondisce la proprietà della non razionalità di π , ovvero dimostra come sia impossibile ottenere il valore π attraverso il rapporto fra due numeri interi.

Indice

Introduzione	ii
1 Un numero fondamentale: π	1
1.1 π nella storia	1
1.2 π nei nostri giorni	11
1.2.1 π e i fiumi	11
2 Le funzioni circolari	15
2.1 Teoria delle funzioni circolari	17
2.1.1 Alcune premesse	17
2.1.2 Proprietà delle funzioni $L(u)$ e $\alpha(u)$	21
2.1.3 Risultati finali	25
2.2 Proprietà della funzioni circolari	28
3 Non razionalità di π	31
3.1 Proprietà della funzione $f(x)$	34
3.2 Proprietà della funzione $F(x)$	36
3.3 Dimostrazione della non razionalità di π	39
Bibliografia	41

Elenco delle figure

1.1	Egizi: quadrato circoscritto al cerchio	2
1.2	Archimede: poligoni inscritti e circoscritti alla circonferenza . .	5
1.3	Funzione $f(t)$	8
2.1	Grafici funzioni circolari: coseno (verde), seno (blu), tangente (Rosso), cosecante (Giallo), secante (Magenta), cotangente (Ciano)	16
2.2	Circonferenza unitaria	17
2.3	Rappresentazione di α	20
2.4	Grafico dell'applicazione L e L^{-1}	25
2.5	Funzioni circolari e Circonferenza unitaria	30
3.1	Johann Heinrich Lambert	32

Capitolo 1

Un numero fondamentale: π

1.1 π nella storia

π 'nasce' in Mesopotamia, circa 6000 anni fà.

La Mesopotamia, la terra fertile tra il Tigri e l'Eufrate è da molti considerata la culla della civiltà moderna, e non c'è da stupirsi quindi, se i primi studi riguardanti π sono stati svolti tra le sponde del Tigri e l'Eufrate.

In Mesopotamia il ruolo della geometria è quasi sempre legato ad applicazioni pratiche.

Già nel IV millennio a.C. i sumeri annotano, su tavolette ancora redatte col primitivo sistema di scrittura detto pittografico, esempi per calcolare le aree dei campi col sistema della base per l'altezza. Molto presto anche il rapporto fra la circonferenza e il suo diametro, quello che noi ci siamo abituati a chiamare π , è stato individuato: deducendolo approssimativamente dalla misurazione concreta.

Essi conoscono certamente il teorema di Pitagora e la similitudine dei triangoli. Per ottenere l'area del cerchio usano la formula

$$A = \frac{c^2}{12}$$

dove c indica la circonferenza.

Ciò equivale ad usare per π il valore 3.

Per i loro scopi pratici i sumeri non si preoccupano di cercare una approssimazione più fine e si accontentano di una grossolana determinazione. Del resto, per conoscere la capacità o il contenuto di un granaio cilindrico, non è indispensabile una grande precisione; così come per prevedere il numero di mattoni per un fusto di colonna.

Successivamente i babilonesi, che, in tempi successivi, occupano la Mesopotamia, per calcolare la lunghezza della circonferenza inscritta nell'esagono regolare usano un rapporto che implicava per π il valore di $3 + \frac{1}{8}$, che equivale a 3,125. Il valore assegnato a π dai babilonesi è approssimato per difetto.

Gli antichi egizi assegnano invece a π un valore approssimato per eccesso.

La testimonianza di come gli egizi riescano a calcolare il valore π è contenuta in un papiro noto col nome di Rhind, l'antiquario scozzese che lo acquistò nel secolo scorso, o di Ahmes, lo scriba che lo compilò attorno al 1650 a.C. vantandosi di trascriverlo da un testo più antico, risalente al Medio Regno e composto tra il 2000 e il 1800 a.C.

Prendendo in considerazione il quadrato (di lato nove) circoscritto al cerchio considerato e dividendolo in nove quadratini uguali (di lato tre) si osserva che l'area del cerchio corrisponde circa all'area dell'ottagono evidenziato in figura 1.1. [2]

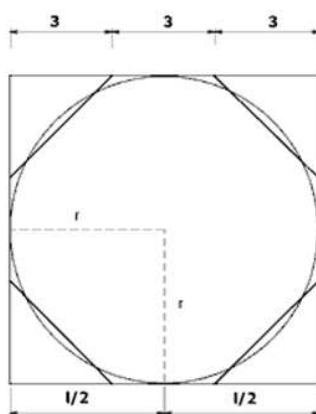


Figura 1.1: Egizi: quadrato circoscritto al cerchio

Dunque, basta conoscere l'area dell'ottagono, per avere, all'incirca, l'area del cerchio. L'area dell'ottagono è facile da ricavare: da tempo gli egizi calcolano le aree di quadrati e triangoli; risulta evidente che

$$Area_{ottagono} = Area_{quadrato} - 4Area_{triangolo}$$

Ovvero:

$$Area_{ottagono} = 81 - 18 = 63$$

Il valore 63 non discosta molto da 64: è l'area di un quadrato di lato uguale a otto unità!

Si prende questa come area del cerchio inscritto nel quadrato di lato 9.

Ahmes osserva:

I posteri torceranno forse il naso di fronte alle approssimazioni del mio procedimento; ma io intanto sono in grado di compiere un passo ulteriore, e ricavarli, da questo caso particolare, la regola generale che mi consentirà, dato un cerchio qualsiasi, di calcolarne l'area. Debbo soltanto scoprire che cos'è che ha trasformato l'area di un cerchio di diametro 9 nell'area di un quadrato di lato 8.

Attraverso questo ragionamento gli Egizi calcolano l'area del cerchio utilizzando la seguente relazione:

$$A = \left(\frac{8}{9}\right)^2 d^2$$

dove d indica il diametro della circonferenza.

Ciò equivale ad usare per π un valore pari a 3,156.

Chiamando p il valore della costante cercata si verifica subito la precedente affermazione:

$$A = pr^2 = p\left(\frac{9}{2}\right)^2$$

$$A = 64 = 8^2$$

$$p = 4\left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3,156$$

Ecco dunque trovata la costante cercata che, moltiplicata per il quadrato del raggio di un cerchio qualsiasi, mi dà la sua area. Sì, noi posteri raffinati abbiamo qualcosa da rimproverare ad Ahmes: la approssimazione relativamente buona di π può riempirci di ammirazione; ma non ci basta: a parte ogni altra considerazione, non sappiamo se i matematici egizi si fossero resi conto che le aree del quadrato e del cerchio considerati non erano esattamente uguali; e la mancanza di rigore nei passaggi fa rabbrivire ogni insegnante di matematica di scuola media.

Chi affronta per primo, con autentica consapevolezza e grande rigore scientifico, il problema del rapporto fra la circonferenza e il suo raggio è un greco (e questo spiega il nome che all'enigmatica costante è assegnato): Archimede di Siracusa.

Il grande Archimede di Siracusa (287-212 a.C.) in *'Misurazione di un cerchio'* mostra che esiste un singolo e unico valore costante (π) che mette in relazione l'area e la circonferenza con un arbitrario valore (raggio). Inoltre Archimede è il primo a calcolare i primi due decimali esatti di π .

Propone di immaginare la circonferenza come compresa fra due insiemi di poligoni regolari, uno inscritto, l'altro circoscritto: partendo da un esagono, si continua a raddoppiare il numero dei lati; i perimetri dei poligoni iscritti formano una successione e quelli dei poligoni circoscritti un'altra successione: e le due successioni 'oscillano' come un pendolo attorno al valore vero, 'irraggiungibile' di π .

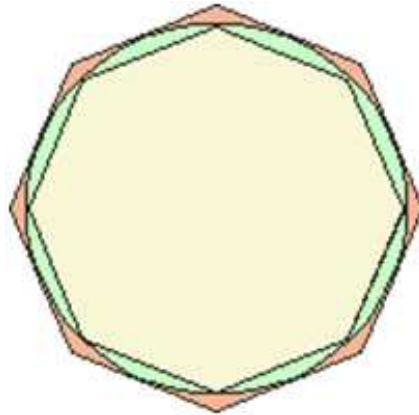


Figura 1.2: Archimede: poligoni inscritti e circoscritti alla circonferenza

Se si continua indefinitamente in questo procedimento, le oscillazioni si fanno sempre più strette attorno a π , o, come si direbbe in termini matematici, 'convergono allo stesso limite': questo limite è la lunghezza della circonferenza e, se il diametro di quest'ultima è l'unità, il limite comune è π . Archimede decide di fermarsi (lo immaginiamo stremato da calcoli estenuanti) al poligono di 96 lati; in corrispondenza del quale trova un valore di π compreso fra:

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70}$$

vale a dire fra:

$$3,140 < \pi < 3,142$$

E', in fondo, un piccolo progresso dal punto di vista numerico, rispetto ai valori ottenuti dagli egiziani e dai babilonesi; ma con il rigore e la straordinaria lucidità concettuale condensate nel metodo adottato per compiere questo piccolo passo Archimede fa compiere alla matematica e alla ragione umana un balzo immenso, che ancor oggi siamo indotti a considerare con reverente stupore e ammirazione.

Tra l'altro si deve osservare che le successioni convergenti al limite di π sono entrambe irrazionali e che Archimede, senza troppo preoccuparsene, sostituisce ad esse delle successioni razionali, adottando così, circa 21 secoli prima che Weierstrass e Cantor lo autorizzassero, il procedimento che consiste nel fare corrispondere a una successione di numeri irrazionali una successione di numeri razionali.

Sono serviti quasi due millenni per passare da una a tre cifre esatte del nostro numero. Non basterà invece il tempo passato e futuro dell'umanità per trovare tutte le altre cifre.

Lambert dimostra nel 1761 che π è un numero non razionale, e quindi le sue cifre decimali sono illimitate e non periodiche. Successivamente, nel 1882, Lindemann dimostra che π è un numero trascendente (significa che esso non può essere ottenuto da un'equazione algebrica a coefficienti razionali), ponendolo in una particolare categoria di numeri irrazionali, che si distinguono rispetto a quelli cosiddetti algebrici.

Pur non potendo quindi scrivere tutte le cifre di π , alcuni grandi matematici hanno tuttavia affrontato il problema di scoprire un procedimento che permettesse di trovare quante cifre decimali si desiderano.

Il racconto riprende per descriverne le tappe più significative.

I romani non dedicano molti sforzi allo studio delle scienze (che non siano quelle giuridiche o militari). Essi si limitano alla conoscenza, senza ulteriori approfondimenti, delle opere dei greci. Gran parte della geometria di Archimede, per via della sua complessità, finisce per essere dimenticata.

Gli uomini del medioevo devono risolvere problemi di stretta sopravvivenza (del corpo e dell'anima) e non possono certo dedicarsi agli studi scientifici.

Il Rinascimento, segna uno spettacolare rifiorire della scienza. In tale periodo, tra i matematici, si sviluppa un'ampia ricerca sui numeri irrazionali.

François Viète (1540-1603) dedica parte del suo tempo libero all'astronomia, alla trigonometria e ai simboli algebrici. Nel 1593 riprendendo il metodo di Archimede ed usando le radici quadrate, calcola il valore di π considerando poligoni regolari di 4, 8, 16,... lati inscritti in un cerchio di raggio unitario.

Così definendo per ricorsione:

$$a_1 = \sqrt{2}$$

$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$$

ottiene:

$$\frac{2}{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \frac{a_i}{2}$$

Il reciproco del valore ottenuto, moltiplicato per 2, fornisce un valore sempre più approssimato di π , quanto maggiore è il numero di termini. I primi quattro termini forniscono il valore approssimato 3,140331 con le prime due cifre decimali esatte. Con sei termini si ha: 3,141513, le cui prime quattro cifre decimali sono esatte. Occorrono dieci termini per avere sei cifre decimali esatte: 3,141592...

L'inglese John Wallis, nella sua *'Arithmetica infinitorum'* (1655), usa una frazione, i cui termini sono costituiti da una serie ininterrotta di moltiplicazioni. Dal numero di fattori usati dipende l'approssimazione di π :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdots} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1}$$

Wallis usa numeri razionali per calcolare π , contrariamente a Viète che usa le radici quadrate. Tuttavia la formula di Wallis richiede almeno 1000 termini per avere le prime due cifre decimali esatte di π .

Lo scozzese James Gregory individua nel 1671 lo sviluppo in serie della funzione arcotangente.

Utilizzando tale sviluppo il grande Gottfried Wilhelm von Leibniz ottiene nel 1674 il famoso risultato:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cdots$$

Infatti:

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Ponendo $x = 1$ risulta:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Si arriva dunque a definire π come il quadruplo della somma a segni alternati dei reciproci nella successione dei numeri dispari. Peccato che occorranzo ben 764 termini per calcolare π anche solo con la precisione ottenuta da Archimede.

A questo punto va detto che π non ha ancora assunto il suo attuale nome. E' il matematico inglese William Jones che, nel 1706 usa il simbolo π , in onore di Pitagora (l'iniziale di Pitagora nell'alfabeto greco è appunto Π , ma, trattandosi di un numero, si preferisce usare la minuscola). Tuttavia, ancora nel 1739 lo svizzero Leonhard Euler (1707-83), da noi italianizzato in Eulero, usava il simbolo p .

Proprio Euler nel 1743 fornisce una ennesima formula per il calcolo di π :

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \dots$$

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione 2π -periodica definita su $] -\pi, \pi[$ nel seguente modo:

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{se } -\pi < t < \pi \\ 0 & \text{se } t = -\pi \end{cases}$$

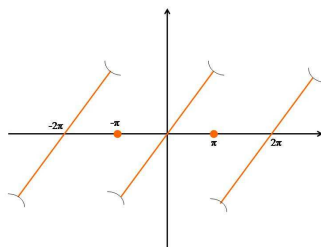


Figura 1.3: Funzione $f(t)$

Si arriva al precedente risultato utilizzando lo sviluppo in serie di Fourier della funzione sommabile f :[10]

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt$$

dove $a_k = 0$ e $b_k = \frac{2(-1)^{k-1}}{k}$ per ogni $k \geq 0$.

Utilizzando la Formula di Parseval si ottiene:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

Quindi risulta:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}$$

ma anche:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^3}{3} = \frac{2}{3} \pi^2$$

unendo le due uguaglianze si ha:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

La formula di Eulero è più efficace di quella di Leibniz, per il fatto di usare solo termini positivi. Essa richiede tuttavia un numero di termini ancora piuttosto alto per ottenere le prime due cifre decimali esatte di π . Per avere 3,14 occorrono almeno 600 termini, contro i 764 richiesti dalla formula di Leibniz.

Nel 1777 lo scienziato e matematico Comte de Buffon appronta un metodo probabilistico per stimare il valore di π . Buffon dimostra che la probabilità che un ago (di lunghezza pari alla distanza tra due righe di un foglio di carta) intersechi una riga del foglio di carta (a righe equidistanti) è uguale al doppio dell'inverso di π .

$$p = \frac{2}{\pi}$$

Comunque il calcolo di π non riguarda solo il passato. Ancora oggi il numero

π affascina molti studiosi, che attraverso l'uso del calcolatore hanno sviluppato svariati algoritmi per il suo calcolo. [14]

Nel 1914 il prodigioso indiano Srinivasa Ramanujan determina la somma infinita:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n!)(1103 + 26390n)}{(n!)^4(396)^{4n}}$$

e si presta bene al calcolo delle cifre di π con l'uso del calcolatore. Ancor più recentemente, nel 1990, i fratelli David e Gregory Chudnovsky usano la seguente relazione per il calcolo di π :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{13591409}{163 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 127} + n \right) \frac{6n!}{3n!(n!)^3} \frac{(-1)^n}{640320^{3n}} = \\ = \left(\frac{640320^{\frac{3}{2}}}{163 \cdot 8 \cdot 27 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 127} \right) \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

Combinando il loro algoritmo con la tecnologia di un supercomputer, calcolano con successo π fino alla **miliardesima** cifra decimale.

1.2 π nei nostri giorni

Per molti π è solo un semplice numero composto da infinite cifre o uno strano simbolo matematico insignificante, per altri invece è molto ma molto di più.[13]

1.2.1 π e i fiumi

Eistein, da un punto di vista fisico, è tra i primi ad interessarsi al fenomeno dei meandri di un fiume.

In seguito il professore Hans-Hendrik Stolum, naturalista presso l'università di Cambridge, calcola il rapporto che intercorre tra la lunghezza totale del fiume e la lunghezza in linea d'aria. Tale rapporto è variabile da fiume a fiume, ma si avvicina al valore di 3.14.

Hans Stolum spiega che il fiume è un 'sistema dinamico debolmente caotico' (weakly chaotic dynamical system) adducendo al fatto che le ripetitività dei pattern di un fiume possono far pensare ad un sistema frattalico. Con delle simulazioni, si è potuto calcolare che la sinuosità (sinuosity), ovvero il rapporto tra la lunghezza effettiva e quella ideale in linea retta, può variare da un minimo di 1 ad un massimo di circa 3.5, con un valore medio di 3.14.

Ovviamente nessuno è riuscito ancora a definire bene la 'formula del fiume' ma la teoria del Caos sembra la strada più interessante da percorrere.

In molti, incuriositi, si sono interessati a questo fatto scrittori come Baricco: *[...] anche se mi sforzo, mi viene solo in mente quella storia dei fiumi, se proprio voglio trovare qualcosa che mi faccia digerire tutta questa faccenda, finisco per pensare ai fiumi, e al fatto che si son messi lì a studiarli perché giustamente non gli tornava 'sta storia che un fiume, dovendo arrivare al mare, ci metta tutto quel tempo, cioè scelga, deliberatamente, di fare un sacco di curve, invece di puntare dritto allo scopo, devi ammettere che c'è qualcosa di assurdo, ed è esattamente quello che pensarono anche loro, c'è qualcosa di assurdo in tutte quelle curve, e così si son messi a studiare la faccenda e*

quello che hanno scoperto alla fine, c'è da non crederci, è che qualsiasi fiume, proprio qualsiasi fiume, prima di arrivare al mare fa esattamente una strada tre volte più lunga di quella che farebbe se andasse dritto, sbalorditivo se ci pensi, ci mette tre volte tanto quello che sarebbe necessario, e tutto a furia di curve, appunto, solo con questo stratagemma delle curve, e non questo fiume o quello, ma tutti i fiumi, come se fosse una cosa obbligatoria, una specie di regola uguale per tutti, che è una cosa da non credere, veramente, pazzesca, ma è quello che hanno scoperto con scientifica sicurezza a forza di studiare i fiumi, tutti i fiumi, hanno scoperto che non sono matti, è la loro natura di fiumi che li obbliga a quel girovagare continuo, e perfino esatto, tanto che tutti, e dico tutti, alla fine, navigano per una strada tre volte più lunga del necessario, anzi per essere esatti, tre volte virgola quattordici, giuro, il famoso π greco, non ci volevo credere, in effetti, ma pare che sia proprio così, devi prendere la loro distanza dal mare, moltiplicarla per π greco e hai la lunghezza della strada che effettivamente fanno, il che, ho pensato, è una gran figata, perché, ho pensato, c'è una regola per loro vuoi che non ci sia per noi, voglio dire, il meno che ti puoi aspettare è che anche per noi sia più o meno lo stesso, e che tutto questo sbandare da una parte e dall'altra, come se fossimo matti, o peggio smarriti, in realtà è il nostro modo di andare dritti, modo scientificamente esatto, e per così dire già preordinato, benché indubbiamente simile a una sequenza disordinata di errori, o ripensamenti, ma solo in apparenza perché in realtà è semplicemente il nostro modo di andare dove dobbiamo andare, il modo che è specificatamente nostro, la nostra natura, per così dire, cosa volevo dire?, quella storia dei fiumi, sì, è una storia che se ci pensi è rassicurante, tanto che ho deciso di crederci [...]

e Singh:

[...] Un particolare numero sembra determinare la lunghezza dei fiumi che formano meandri. Il prof Hans Stolum, uno scienziato della terra dell'università di Cambridge, ha calcolato il rapporto tra la lunghezza effettiva dei fiumi dalla sorgente alla foce e la loro lunghezza in linea d'aria. Anche se il rapporto varia tra un fiume e un altro, il valore medio è leggermente superiore a

3, cioè la lunghezza effettiva è circa 3 volte maggiore della distanza diretta in linea d'aria. In realtà il rapporto è circa 3,14, che è il valore approssimato di π greco ossia del rapporto tra la circonferenza e di diametro del cerchio. Nel caso dei fiumi, π greco è il risultato di una battaglia tra l'ordine e il caos. Einstein fu il primo a suggerire che i fiumi tendono a seguire un percorso sempre più tortuoso perché la corrente, essendo più veloce sulla parte esterna di una curva, produce un'erosione maggiore sulla sponda corrispondente, così che la curvatura in quel punto aumenta. Più accentuata è la curvatura, più forte è la corrente sulla sponda esterna e di conseguenza maggiore è l'erosione. [...] L'equilibrio tra questi due fattori opposti conduce a un rapporto medio che vale π greco tra l'effettiva distanza in linea retta tra la sorgente e la foce. Il rapporto di π greco si trova più comunemente in quei fiumi che scorrono attraverso pianure che hanno un dislivello molto tenue, come i fiumi in Brasile o nella tundra siberiana. Pitagora comprese che i numeri erano celati in tutte le cose, dall'armonia musicale alle orbite dei pianeti. [...]

Capitolo 2

Le funzioni circolari

Lo studio delle funzioni circolari risale al tempo dei Babilonesi, gran parte del lavoro fondamentale è svolto dai Greci, indiani e arabi.

Il più antico riferimento alla funzione seno risale a Sulba Sutras, scritto nell'antica India dall'VIII al VI secolo a.C. Più tardi, le funzioni circolari sono studiate da Ipparco di Nicea (180-125 a.C.), Aryabhata (476-550), Varahamihira, Brahmagupta, Abu'l-Wafa, Omar Khayyam, Bhaskara II, Nasir al-Din Tusi, Regiomontano (1464), Ghiyath al-Kashi (XIV secolo), Ulugh Beg (XIV secolo), Madhava (1400 circa), Retico, il suo discepolo Valentin Otho.

All' *'Introductio in analysin infinitorum'* (1748) di Leonardo Eulero si riconosce il merito di aver stabilito la trattazione analitica delle funzioni circolari in Europa, definendole come serie infinite e presentando la **'formula di Eulero'**.

Tali funzioni sono rilevanti per lo studio dei triangoli ed inoltre sono indispensabili per lo studio di moti periodici. Di fatto in fisica quando si parla di moto armonico semplice sicuramente si farà riferimento alla funzione seno. Inoltre le funzioni seno e coseno sono usate per descrivere la proiezione in una dimensione del moto circolare uniforme, le piccole oscillazioni di un pendolo, le onde acustiche o elettromagnetiche e tanti altri fenomeni.

Non è banale, a parte per alcuni angoli semplici, calcolare il valore delle funzioni circolari.

Prima dell'avvento dei computer, il metodo più usato per approssimare tali funzioni era quello di interpolare da una tavola dei loro valori, calcolate con una precisione di molte cifre significative. Queste tavole sono state utilizzate fin da quando le funzioni circolari sono state descritte, ed erano tipicamente generate tramite ripetute applicazioni delle identità di bisezione e di addizione di angoli, partendo da angoli noti. I computer moderni usano una grande varietà di tecniche. Un metodo comune, specialmente sui processori di fascia alta dotati di unità floating point (a virgola mobile), è quello di combinare un'approssimazione polinomiale (come le serie di Taylor o una funzione razionale) con una tabella precalcolata - in altri termini, questi algoritmi cercano prima nella tabella l'angolo più vicino disponibile, quindi utilizzano il polinomio per calcolare la correzione.

Su dispositivi semplici che sono privi di moltiplicatore hardware, vi è un algoritmo chiamato CORDIC (insieme ad altre tecniche correlate) che risulta più efficiente, dal momento che utilizza solo operazioni di shift e addizioni. Tutte queste tecniche sono solitamente implementate a livello hardware per motivi di prestazioni.

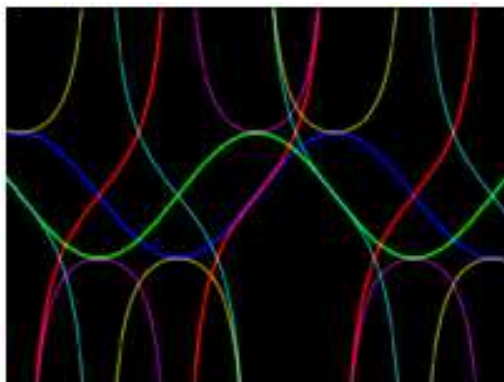


Figura 2.1: Grafici funzioni circolari: coseno (verde), seno (blu), tangente (Rosso), cosecante (Giallo), secante (Magenta), cotangente (Ciano)

2.1 Teoria delle funzioni circolari

In questo paragrafo si cerca di porre le basi per la costruzione delle funzioni circolari.[12][9]

2.1.1 Alcune premesse

Per studiare la teoria delle funzioni circolari è opportuno introdurre la circonferenza unitaria:

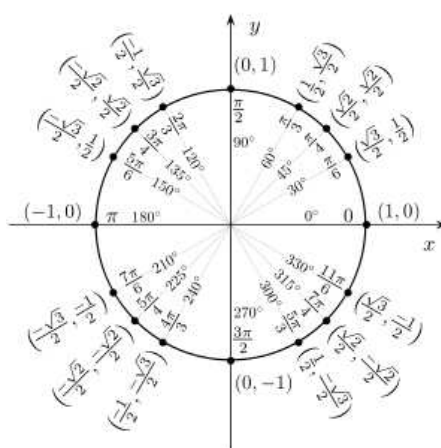


Figura 2.2: Circonferenza unitaria

Definizione 2.1. Con U si indica la circonferenza unitaria in \mathbb{R}^2 con centro l'origine degli assi, ovvero

$$U := \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$$

si definisce inoltre

$$U^+ := \{z \in \mathbb{C} / \text{Im}(z) > 0\}$$

la semicirconferenza unitaria formata dai complessi con parte immaginaria non negativa, cioè in altri termini primo e secondo quadrante.

E anche:

$$U^* := U^+ \cup -1$$

Proposizione 2.1.1. U è un sottogruppo rispetto all'operazione di moltiplicazione.

Dimostrazione. Per dimostrare la tesi è opportuno verificare i seguenti punti:

- se $z, z' \in U \Rightarrow zz' \in U$
- se $z \in U \Rightarrow z^{-1} \in U$

Il primo punto si verifica nel seguente modo:

$$z, z' \in U \Rightarrow |z| = |z'| = 1 \Rightarrow |zz'| = |z||z'| = 1 \Rightarrow zz' \in U$$

il secondo

$$z \in U \Rightarrow 1 = |z|^2 = zz' \Rightarrow \bar{z} = z^{-1}$$

$$|\bar{z}| = |z| = 1 \Rightarrow z^{-1} \in U$$

□

Inoltre (U, \cdot) è sottogruppo di $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$

Definizione 2.2. Per ogni $u \in U$ si chiama arco di estremi 1 ed u l'insieme:

$$\widehat{1, u} = \begin{cases} v \in U, \operatorname{Im}(v) \geq 0, \operatorname{Re}(v) \geq \operatorname{Re}(u) & \text{se } \operatorname{Im}(u) > 0 \\ v \in U, \operatorname{Im}(v) \leq 0, \operatorname{Re}(v) \leq \operatorname{Re}(u) & \text{se } \operatorname{Im}(u) < 0 \end{cases}$$

Definizione 2.3. Per ogni $u \in U$ si indica con $\alpha(u)$ l'unico elemento di U^+ il cui quadrato è uguale ad u , ovvero

$$(\alpha(u))^2 = u$$

$$\forall u \in U^+$$

Proposizione 2.1.2. Per ogni $u \in U \setminus \{1\}$ esiste ed è unico un $\alpha \in U^+$ tale che $\alpha^2 = u$.

Dimostrazione.

UNICITA':

$\alpha, \beta \in U$. Per ipotesi $Im(\alpha) > 0$, $Im(\beta) > 0$ e inoltre $\alpha^2 = u = \beta^2$
 $\Rightarrow \alpha^2 - \beta^2 = 0 \Rightarrow (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = 0$.

Poichè $Im(\alpha) > 0$, $Im(\beta) > 0$ si ha $\alpha + \beta \neq 0$

Quindi dalle ultime due relazioni otteniamo $\alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$

ESISTENZA:

Se $u \in U$ e $Im(u) > 0$ poniamo $\alpha(u) = \frac{1+u}{|1+u|}$

Se $u = -1$ si pone $\alpha = 1$

Se $u \in U$ e $Im(u) < 0$ poniamo $\alpha(u) = -\frac{1+u}{|1+u|}$

Ora dimostriamo che $\alpha^2 = u$

Per $u = -1$ è dimostrato. Per gli altri due casi ponendo $u = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$ si svolge il seguente calcolo:

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \left(\frac{1+u}{|1+u|} \right)^2 = \left(\frac{1+a+ib}{|1+a+ib|} \right)^2 = \frac{(1+a)^2 - b^2 + 2i(1+a)b}{(1+a)^2 + b^2} = \\ &= \frac{1+a^2+2a-b^2+2i(1+a)b}{1+a^2+2a+b^2} = \frac{2a^2+2a+2i(1+a)b}{2+2a} = \\ &= \frac{a(a+1)+i(1+a)b}{a+1} = a+ib = u \end{aligned}$$

□

Graficamente α è il punto medio dell'arco di estremi 1 e u .

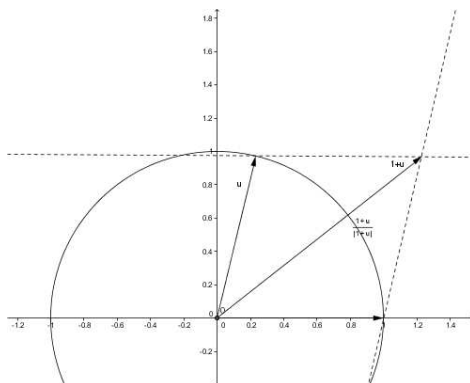


Figura 2.3: Rappresentazione di α

Definizione 2.4. Si definisce $\alpha(u) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ tale che:

$$\begin{cases} \alpha_0(u) = u \\ \alpha_{n+1}(u) = \alpha(\alpha_n(u)) \end{cases}$$

In questo modo si è definito la successione 'punto medio' di ogni segmento tale da creare segmenti sempre più piccoli avvicinandosi sempre di più alla circonferenza, per n che tende all'infinito.

Dopo aver definito l'arco si può caratterizzare la sua lunghezza:

Definizione 2.5. Si definisce la successione:

$$L_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$L_n(u) = 2^n |\alpha_n(u) - 1| \quad (2.1)$$

Tale successione è la lunghezza di una poligonale regolare di 2^n lati inscritti nell'arco di estremi 1 e u .

La successione è convergente.

Infatti la 2.1 risulta crescente e ponendo

$$M_n(u) = \frac{2L_n(u)}{|\alpha_n(u) + 1|}$$

si ha

$$L_n \leq M_n \leq M_1$$

Quindi L_n è anche superiormente limitata.

Definizione 2.6. Per ogni $u \in U^+$ si definisce la lunghezza dell'arco di estremi 1 e u come :

$$L(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n(u)$$

Definizione 2.7. Si definisce inoltre:

$$\pi := L(-1)$$

2.1.2 Proprietà delle funzioni $L(u)$ e $\alpha(u)$

Analizziamo di seguito alcuni aspetti importanti delle funzioni $L(u)$ e $\alpha(u)$ sopra definite.

Proposizione 2.1.3. Siano $u \in U^+$ e $v \in U^*$, si ottiene:

$$\alpha(uv) = \alpha(u)\alpha(v)$$

Dimostrazione. Per definizione di $\alpha(u)$ si ha che è quell'unico elemento tale che

$$\alpha^2(u) = u$$

Si noti però che

$$(\alpha(u)\alpha(v))^2 = uv$$

dunque è quell'unico elemento in U^+ che elevato al quadrato da uv .

Quindi è $\alpha(uv)$. □

Ovviamente lo stesso risultato è verificato anche per α_n .

Proposizione 2.1.4. *Siano $u \in U^+$ e $v \in U^*$, si ottiene:*

$$L(uv) = L(u) + L(v)$$

Dimostrazione. Prima di verificare la tesi dimostriamo il seguente risultato:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n(\alpha_n(u) - 1) = iL(u) \quad (2.2)$$

Se $u = 1$ è banale, poniamo $u \neq 1$, otteniamo:

$$\begin{aligned} 2^n(\alpha_n(u) - 1) &= \frac{\alpha_n(u) - 1}{|\alpha_n(u) - 1|} L_n(u) = \frac{\alpha^2(\alpha_n(u) - 1)}{|\alpha^2(\alpha_n(u) - 1)|} L_n(u) = \\ &= \frac{\alpha_{n+1}^2(u) - 1}{|\alpha_{n+1}^2(u) - 1|} L_n(u) = \frac{\alpha_{n+1}(u)(\alpha_{n+1}(u) - \overline{\alpha_{n+1}(u)})}{|\alpha_{n+1}(u) - \overline{\alpha_{n+1}(u)}|} L_n(u) = \\ &= \alpha_{n+1}(u) L_n(u) i \frac{Im(\alpha_{n+1}(u))}{|Im(\alpha_{n+1}(u))|} \end{aligned}$$

Dalla convergenza di $L_n(u)$ e dalla relazione

$$|\alpha_n(u) - 1| = \frac{L_n(u)}{2^n}$$

si ricava:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(u) = 1$$

Inoltre essendo

$$Im(\alpha_{n+1}(u)) \geq 0$$

è verificata la 2.2.

Usando 2.2 e la Proposizione 2.1.3 otteniamo:

$$\begin{aligned} iL(uv) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n(\alpha_n(uv) - 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n(\alpha_n(u)\alpha_n(v) - 1) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (2^n(\alpha_n(u) - \overline{\alpha_n(v)})\alpha_n(v)) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (2^n(\alpha_n(u) - 1) - (\overline{\alpha_n(v)} - 1)\alpha_n(v)) = \\ &= iL(u) - i\overline{L(v)} = i(L(u) + L(v)) \end{aligned}$$

Dividendo tutto per i si verifica la tesi. □

Corollario 2.1.5. Per ogni $u \in U \setminus U^+$, risulta:

$$L(u) = L(\pi) + L(-u)$$

Dimostrazione. Nel caso in cui $u = -1$ la relazione è verificata per la Definizione 2.7 e per le definizioni di $L(u)$ e $\alpha(u)$, infatti $L(-1) = \pi$ e $L(-u) = L(1) = 0$. Mentre, quando $u \neq -1$, visto che $u \in U \setminus U^+ \Rightarrow -u \in U^+$ risulta utilizzando la Proposizione 2.1.4:

$$L(u) = L((-1)(-u)) = L(-1) + L(-u) = \pi + L(-u)$$

□

Corollario 2.1.6. Per ogni $u \in U^+$, risulta:

$$L(u) < \pi$$

Dimostrazione. Nel caso in cui $u = 1$ la relazione è verificata. Mentre, quando $u \neq 1$, visto che $-\bar{u} \in U^+$ risulta utilizzando la Proposizione 2.1.4:

$$\pi = L(-1) = L(u(-\bar{u})) = L(u) + L(-\bar{u}) > L(u)$$

Poichè $L(-\bar{u}) > 0$.

□

Corollario 2.1.7. Se L è l'applicazione $L : U \rightarrow \mathbb{R}$ con $u \mapsto L(u)$ si ha che L/U^* è iniettiva

Dimostrazione. Per verificare la tesi è sufficiente dimostrare che $\forall u, v \in U^*$ se $L(u) = L(v)$ allora $u = v$

Sia $u\bar{v}$ che $v\bar{u} \in U^*$ quindi per la Proposizione 2.1.4 è verificata la seguente relazione:

$$L(u) = L(v(u\bar{v})) = L(v) + L(u\bar{v})$$

Imponendo $L(u) = L(v)$ risulta

$$L(u\bar{v}) = 0 \Rightarrow u\bar{v} = 1 \Rightarrow u \frac{1}{v} = 1 \Rightarrow u = v$$

□

Proposizione 2.1.8. *L'applicazione $L/U^* : U^* \rightarrow [0, \pi[$ è biettiva.*

Dimostrazione. Dal Corollario 2.1.7 segue l'iniettività della funzione.

Dal Corollario 2.1.6 risulta $L(U^*) \subseteq [0, \pi]$, infatti $L(-1) = \pi$ e $L(1) = 0$.

Per verificare la tesi è opportuno analizzare la suriettività della funzione.

Per dimostrare la suriettività di L/U^* verifichiamo la connessione di U^* e la continuità di L/U^* .

Ponendo:

$$U^* = f([-1, 1])$$

con $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $f(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$

si verifica subito la connessione di U^* , in quanto f è continua e l'intervallo $[-1, 1]$ è connesso.

Rimane da verificare la continuità di L/U^* . Come già visto nella dimostrazione del Corollario 2.1.7 risulta, se $u\bar{v} \in U^+$, che:

$$L(u) = L(v) + L(u\bar{v})$$

oppure

$$L(v) = L(u) + L(v\bar{u})$$

Si ha quindi che

$$\lim_{v \rightarrow u} u\bar{v} = \lim_{v \rightarrow u} v\bar{u} = |u|^2 = 1$$

Infine risulta:

$$\lim_{w \rightarrow 1, w \in U^+} L(w) = 0$$

infatti

$$L(w) \leq M_1(w) = \frac{2L_1(w)}{|\alpha_1(w) + 1|} = 4 \frac{|\alpha(w) - 1|}{|\alpha_1(w) + 1|} =$$

per la Definizione 2.4

$$4 \frac{\left| \frac{1+w}{|1+w|} - 1 \right|}{\left| \frac{1+w}{|1+w|} + 1 \right|} = 4 \frac{|1+w - |1+w||}{|1+w + |1+w||} = 0$$

□

2.1.3 Risultati finali

Teorema 2.1.9. *L'applicazione $L : U \rightarrow [0, 2\pi[$ è biettiva.*

Dimostrazione.

Deriva dalla proposizione 2.1.8 e dal Corollario 2.1.5

□

Conseguenza immediata del Teorema 2.1.9: Esiste

$$L^{-1} : [0, 2\pi[\rightarrow U$$

anch' essa biettiva.

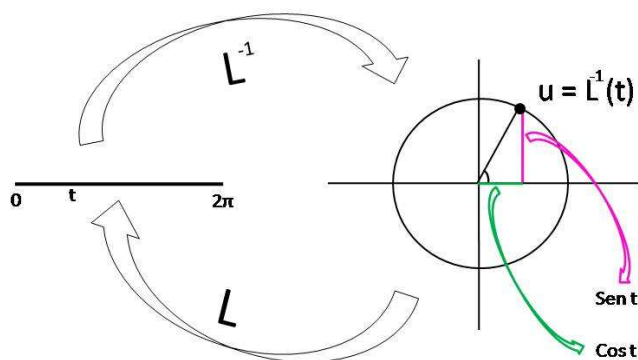


Figura 2.4: Grafico dell'applicazione L e L^{-1}

$$u = L^{-1}(t) \Leftrightarrow L(u) = t$$

Prolunghiamo L^{-1} per periodicità ponendo per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$e^{it} = \begin{cases} L^{-1}(t) & \text{se } t \in [0, 2\pi[\\ L^{-1}(t - 2k\pi) & \text{se } 2k\pi \leq t < 2(k+1)\pi \end{cases}$$

Definizione 2.8. Si pone inoltre

$$\cos(t) = \operatorname{Re}(e^{it}), \sin(t) = \operatorname{Im}(e^{it})$$

Osservazione 1. Le funzioni coseno e seno sono periodiche di periodo 2π .

Deriva infatti dalla Definizione 2.8 il seguente risultato:

$$e^{it} = e^{i(t+2\pi)}$$

$\forall t \in \mathbb{R}$

Proposizione 2.1.10. *L'applicazione $\mathbb{R} \ni t \rightarrow e^{it} \in U$ è un omeomorfismo fra i gruppi $(\mathbb{R}, +)$ e $(U, *)$.*

In altri termini per ogni $t, z \in \mathbb{R}$ si ha

$$e^{i(t+z)} = e^{it} e^{iz}$$

Dimostrazione. Per l'Osservazione 1 si può verificare la tesi solo $\forall t, z \in [0, 2\pi[$.

Suddividiamo la dimostrazione in tre parti:

1. $t \in [0, \pi[$, $z \in [0, \pi[$.

Esistono $u \in U^+$ e $v \in U^+$ tali che $L(u) = t$ e $L(v) = z$.

Per la Proposizione 2.1.4 risulta $L(uv) = L(u) + L(v) = t + z$ e poichè $t + z \in [0, 2\pi]$ si ha:

$$uv = L^{-1}(t + z)$$

oppure

$$e^{i(t+z)} = uv = e^{it} e^{iz}$$

2. $t \in [0, \pi[$, $z \in [\pi, 2\pi[$.

Esistono $u \in U^+$ e $v \in U \setminus U^+$ tali che $L(u) = t$ e $L(v) = z$.

Per la Proposizione 2.1.4 e per il Corollario 2.1.5 risulta:

$$t + z = L(u) + L(v) = L(u) + L(-v) + \pi = L(-uv) + \pi$$

Se $uv \in U^+$ per il Corollario 2.1.5 si ha $L(-uv) = \pi + L(uv)$ e quindi $t + z = 2\pi + L(uv)$ pertanto:

$$e^{i(t+z)} = e^{iL(uv)} = uv = e^{it}e^{iz}$$

Se $uv \in U \setminus U^+$ per il Corollario 2.1.5 si ha $L(-uv) = -\pi + L(uv)$ e quindi $t + z = L(uv)$ pertanto:

$$e^{i(t+z)} = e^{iL(uv)} = uv = e^{it}e^{iz}$$

3. $t \in [0, 2\pi[$, $z \in [0, 2\pi[$.

Esistono $u, v \in U \setminus U^+$ tali che $L(u) = t$ e $L(v) = z$. Risulta

$$t + z = L(u) + L(v) = L(-u) + L(-v) + 2\pi = L((-u)(-v)) + 2\pi = 2\pi + L(uv)$$

e così otteniamo:

$$e^{i(t+z)} = e^{iL(uv)} = uv = e^{it}e^{iz}$$

□

2.2 Proprietà della funzioni circolari

Dalle Proposizioni, dai Teoremi, dalle Definizioni enunciate nella sezione precedente si ricavano svariate proprietà delle funzioni circolari.

Osservazione 2. Dalla Definizione 2.8 risulta la **Formula di Eulero**:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$

Osservazione 3. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ risulta

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

Dimostrazione. Per l'Osservazione 3 si ha:

$$|\cos t + i \sin t|^2 = |e^{it}|^2 = 1 \Leftrightarrow \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

□

Osservazione 4. Per ogni $t, z \in \mathbb{R}$ risulta:

$$\cos(t + z) = \cos t \cos z - \sin t \sin z$$

$$\sin(t + z) = \sin t \cos z + \cos t \sin z$$

Queste relazioni si chiamano '*Formule di Addizione*'

Dimostrazione. Dalla Formula di Eulero e dalla Proposizione 2.1.10 si deduce la tesi:

$$\begin{aligned} & \cos(t + z) + i \sin(t + z) = \\ &= e^{i(t+z)} = e^{it} e^{iz} = (\cos t + i \sin t)(\cos z + i \sin z) = \\ &= (\cos t \cos z - \sin t \sin z) + i(\sin t \cos z + \cos t \sin z) \end{aligned}$$

□

Osservazione 5. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ risulta:

$$\cos(-t) = \cos t$$

$$\sin(-t) = -\sin t$$

Dimostrazione. Dalla Formula di Eulero risulta

$$\cos(-t) + i \sin(-t) = e^{i(-t)} \quad (2.3)$$

Inoltre

$$e^{i(-t)} e^{i(t)} = e^0 = 1$$

Quindi

$$e^{i(-t)} = \frac{1}{e^{i(t)}}$$

E' il reciproco, nella circonferenza unitaria il coniugato, di conseguenza si ha:

$$e^{i(-t)} = \overline{e^{it}} = \cos t - i \sin t \quad (2.4)$$

Da 2.3 e da 2.4 otteniamo la tesi. \square

Di seguito riportiamo alcuni esempi che interessano il calcolo del seno e del coseno di alcuni angoli.

Esempio 2.1. Per ricavare il seno e il coseno di zero è necessario utilizzare la Formula di Eulero applicata in zero:

$$\cos 0 + i \sin 0 = e^0 = 1$$

Da cui otteniamo:

$$\cos 0 = 1$$

$$\sin 0 = 0$$

Esempio 2.2. Ora ricaviamo seno e coseno di π .

$$\cos \pi + \sin \pi = e^{i\pi} = -1$$

Da cui otteniamo:

$$\cos \pi = -1$$

$$\sin \pi = 0$$

Esempio 2.3. Infine, come ultimo esempio, calcoliamo seno e coseno di $\frac{\pi}{2}$.

$$\cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

Infatti:

$$(e^{i\frac{\pi}{2}})^2 = e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\pi} = -1$$

Da cui otteniamo:

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1$$

Per concludere riportiamo un grafico che illustra come le funzioni circolari possono essere costruite geometricamente a partire dalla circonferenza unitaria.

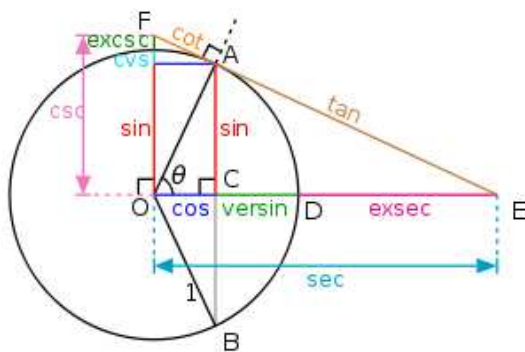


Figura 2.5: Funzioni circolari e Circonferenza unitaria

Capitolo 3

Non razionalità di π

La scoperta dei numeri irrazionali è tradizionalmente attribuita a Pitagora, o più precisamente al pitagorico Ippaso di Metaponto, che produce una argomentazione (probabilmente con considerazioni geometriche) della non razionalità della radice quadrata di 2.

Secondo la tradizione Ippaso scopre i numeri irrazionali mentre tenta di rappresentare la radice quadrata di 2 come frazione. Tuttavia Pitagora crede nell'assolutezza dei numeri razionali, e non può accettare l'esistenza dei numeri irrazionali. Egli non è in grado di confutare la loro esistenza con la logica, ma le sue credenze non possono tollerarne l'esistenza e, secondo una leggenda, per questo condanna Ippaso a morire annegato.

Il XVI secolo vede infine l'accoglienza favorevole da parte della comunità matematica dei numeri negativi, interi e frazionari. Il XVII secolo vede, da parte di matematici, l'uso sempre più frequente delle frazioni decimali con la notazione moderna.

I successivi cento anni videro i numeri immaginari diventare un potente strumento nelle mani di Abraham de Moivre, e specialmente di Leonhard Euler. Per il XIX secolo rimane da completare la teoria dei numeri complessi, dimostrare l'esistenza dei numeri trascendenti, dividere gli irrazionali in algebrici e trascendenti, e compiere uno studio scientifico su un argomento che è rimasto quasi in letargo dai tempi di Euclide, la teoria degli irrazionali.

L'anno 1872 vede la pubblicazione delle teorie di Karl Weierstrass (tramite il suo allievo Kossak), Eduard Heine (Crelle, 74), Georg Cantor (Annalen, 5), e Richard Dedekind. Méray prende nel 1869 lo stesso punto di partenza di Heine, ma generalmente si attribuisce tale teoria all'anno 1872. Il metodo di Weierstrass è completamente avviato da Pincherle (1880), e quello di Dedekind riceve maggiore risalto tramite il successivo lavoro dell'autore (1888) e il più recente appoggio di Tannery (1894). Weierstrass, Cantor, e Heine basano le loro teorie sulle serie infinite, mentre Dedekind, riallacciandosi a Euclide, fonda la sua sull'idea di un taglio. L'argomento riceve successivi contributi per opera di Weierstrass, Kronecker (Crelle, 101), e Méray. I numeri trascendenti vengono per la prima volta distinti dagli irrazionali algebrici da Kronecker.

Lambert prova (1761) che π non può essere razionale, e che e^n è non razionale se n è razionale (eccetto $n = 0$), dimostrazione, comunque, che lascia molto a desiderare.



Figura 3.1: Johann Heinrich Lambert

L'esistenza di numeri trascendenti viene per la prima volta stabilita da Liouville (1844, 1851); una proposizione più forte, che afferma che gli irrazionali e i trascendenti hanno cardinalità maggiore di quella degli algebrici, viene trovata da Georg Cantor nel 1873.

Charles Hermite (1873) prova per primo la trascendenza di e , e Ferdinand von Lindemann (1882), partendo dalle conclusioni di Hermite, mostra lo stesso per π . La dimostrazione di Lindemann viene semplificata molto da Weierstrass (1885), e ulteriormente da David Hilbert (1893); infine resa quasi elementare da Hurwitz e Gordan.

Di seguito riportiamo una dimostrazione analitica della non razionalità di π , per fare ciò è necessario introdurre due funzioni $f(x)$ e $F(x)$ e le loro proprietà. [1]

3.1 Proprietà della funzione $f(x)$

La funzione $f(x)$ presa in considerazione è:

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$$

Osservazione 6. La funzione $f(x)$ ristretta all'intervallo $I = [0, 1]$ è limitata

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{n!}$$

$\forall x \in I$

Dimostrazione. La funzione $f(x)$ è una funzione polinomiale continua in I , per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo in I . Inoltre, in tale intervallo, la funzione non è mai negativa. Dato che:

$$f(0) = f(1) = 0$$

é chiaro che il valore minimo assunto dalla funzione è 0. Per lo studio del valore massimo dalla funzione, ricavata la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{nx^{n-1}(1-x)^n - n(1-x)^{n-1}x^n}{n!} = \frac{nx^{n-1}(1-x)^{n-1}(1-2x)}{n!}$$

risulta

$$f'(x) = 0$$

per

- $x = 0$
- $x = 1$
- $x = \frac{1}{2}$

Poichè

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{n!}$$

$x = \frac{1}{2}$ è un punto di massimo per la funzione.

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{n!}$$

□

Osservazione 7. La funzione $f(x)$ è invariante per trasformazione $x \mapsto 1-x$, ossia

$$f(x) = f(1-x)$$

Dimostrazione.

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$$

calcolando $f(1-x)$ otteniamo

$$f(1-x) = \frac{(1-x)^n(1-1+x)^n}{n!} = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$$

□

Osservazione 8. La derivata k -esima della funzione $f(x)$ calcolata in zero e in uno è un numero intero, per cui

$$f^k(0), f^k(1) \in \mathbb{Z}$$

Dimostrazione. Per il binomio di Newton

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k x^{k+n}$$

$f(x)$ è una funzione polinomiale di grado $2n$, Inoltre per $k < n$ e per $k > 2n$, $f(x) = 0$. La serie può essere trasformata nel seguente modo:

$$f(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=n}^{2n} \binom{n}{2k-n} (-1)^{k-n} x^k = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{n!} \binom{n}{2k-n} (-1)^{k-n} x^k$$

Per il teorema sulle serie convergenti, del tipo:

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k$$

il termine

$$a_k = \frac{f^k(0)}{k!}$$

Da cui si evince:

$$f^k(0) = a_k k! = \frac{k!(-1)^{k-n}}{n!} \binom{n}{2k-n} \in \mathbb{Z}$$

inoltre per l'Osservazione 7 vale

$$f^k(1) \in \mathbb{Z}$$

□

3.2 Proprietà della funzione $F(x)$

La funzione $F(x)$ presa in considerazione è la seguente:

$$F(x) = b^n \sum_{k=0}^n (-1)^k f^{(2k)}(x) (a/b)^{n-k}$$

con $a, b \in \mathbb{Z}^+$

Osservazione 9. La funzione $F(x)$ in zero e in uno è un numero intero, ossia

$$F(0), F(1) \in \mathbb{Z}$$

Dimostrazione. La funzione $F(x)$ può essere riscritta nel seguente modo:

$$F(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k f^{(2k)}(x) a^{n-k} b^k$$

Quindi

$$F(0) = \sum_{k=0}^n (-1)^k f^{(2k)}(0) a^{n-k} b^k$$

Per l'Osservazione 7

$$F(0) = F(1)$$

Dall'Osservazione 8 e poichè prodotto e somma di numeri interi è sempre un intero,

$$F(0) = F(1) \in \mathbb{Z}$$

□

Osservazione 10. Date le funzioni $f(x)$ e $F(x)$, ponendo, per assurdo, $\frac{a}{b} = \pi^2$ vale la seguente equazione:

$$\pi^2 a^n f(x) \sin(x\pi) = \frac{d}{dx}(F'(x) \sin(x\pi) - \pi(F(x)) \cos(x\pi))$$

Dimostrazione. Preso in considerazione il secondo membro, risulta:

$$\frac{d}{dx}(F'(x) \sin(x\pi)) = F''(x) \sin(x\pi) + F'(x)\pi \cos(x\pi)$$

$$\frac{d}{dx}(\pi F(x) \cos(x\pi)) = F'(x)\pi \cos(x\pi) - F(x)\pi^2 \sin(x\pi)$$

Da cui:

$$\frac{d}{dx}(F'(x) \sin(x\pi) - \pi(F(x)) \cos(x\pi)) = F''(x) \sin(x\pi) + F(x)\pi^2 \sin(x\pi)$$

Quindi tale uguaglianza è vera se:

$$\pi^2 a^n f(x) = F''(x) + F(x)\pi^2$$

Dalla definizione di $F(x)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} & F''(x) + F(x)\pi^2 = \\ & = b^n \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k f^{(2k+2)}(x) (\pi)^{2n-2k} + \pi^2 \sum_{k=0}^n (-1)^k f^{(2k)}(x) (\pi)^{2n-2k} \right) = \\ & = b^n \left(\pi^{2n} f^{(2)}(x) + \pi^{2n+2} f^{(0)}(x) - \pi^{2n-2} f^{(4)}(x) - \pi^{2n} f^{(2)}(x) + \pi^{2n-4} f^{(6)}(x) + \right. \\ & \quad \left. + \pi^{2n-2} f^{(4)}(x) \dots \dots \dots + \pi^0 f^{(2n+2)}(x) - \pi^2 f^{(2n)}(x) \right) \end{aligned}$$

Dalla risoluzione delle serie emerge l'annullamento di tutti i termini tranne due. Per cui:

- se n è pari

$$\begin{aligned} F''(x) + F(x)\pi^2 &= b^n(\pi^{2n+2}f^{(0)}(x) + f^{(2n+2)}(x)) = \\ &= b^n\pi^2\frac{a^n}{b^n}f(x) = \pi^2a^n f(x) \end{aligned}$$

- se n è dispari

$$\begin{aligned} F''(x) + F(x)\pi^2 &= b^n(\pi^{2n+2}f^{(0)}(x) - f^{(2n+2)}(x)) = \\ &= b^n\pi^2\frac{a^n}{b^n}f(x) = \pi^2a^n f(x) \end{aligned}$$

Tale passaggio è giustificato dato che $f^{(2n+2)}(x) = 0$ Infine risulta:

$$\begin{aligned} \pi^2a^n f(x) &= F''(x) + F(x)\pi^2 \\ \pi^2a^n f(x) \sin(x\pi) &= \frac{d}{dx}(F'(x) \sin(x\pi) - \pi(F(x)) \cos(x\pi)) \end{aligned}$$

□

Osservazione 11. Date le funzioni $f(x)$ e $F(x)$, ricordando che per assurdo $\frac{a}{b} = \pi^2$ vale la seguente uguaglianza:

$$F(1) + F(0) = a^n\pi \int_0^1 f(x) \sin(x\pi) dx$$

Dimostrazione. Dalla risoluzione dell'integrale

$$a^n\pi \int_0^1 f(x) \sin(x\pi) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \pi^2a^n f(x) \sin(x\pi) dx$$

Per l'Osservazione 10:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^1 \pi^2a^n f(x) \sin(x\pi) dx &= \frac{1}{\pi} [F'(x) \sin(x\pi) - \pi(F(x)) \cos(x\pi)]_0^1 = \\ &= \frac{1}{\pi} [0 - F(1)(-1)\pi - (0 - F(0)\pi)] = \frac{1}{\pi} [F(1)\pi + F(0)\pi] = F(1) + F(0) \end{aligned}$$

Quindi:

$$a^n\pi \int_0^1 f(x) \sin(x\pi) dx = F(1) + F(0)$$

□

3.3 Dimostrazione della non razionalità di π

Osservazione 12. Data la funzione $F(x)$ vale:

$$\exists n_1 \setminus \forall n > n_1 : 0 < F(1) + F(0) < 1$$

Dimostrazione. Per l'Osservazione 11 risulta:

$$0 < a^n \pi \int_0^1 f(x) \sin(x\pi) dx < 1$$

e per l'Osservazione 6:

$$0 < a^n \pi \int_0^1 f(x) \sin(x\pi) dx < \frac{a^n \pi}{n!} \int_0^1 \sin(x\pi) dx$$

Poichè $\sin(x)$ può essere maggiorato con uno otteniamo:

$$0 < a^n \pi \int_0^1 f(x) \sin(x\pi) dx < \frac{a^n \pi}{n!} \int_0^1 \sin(x\pi) dx < \frac{a^n \pi}{n!}$$

Dato che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n \pi}{n!} = 0$$

Risulta:

$$\exists n_1 \setminus \forall n > n_1 : \frac{a^n \pi}{n!} < 1$$

Infine:

$$\exists n_1 \setminus \forall n > n_1 : 0 < F(1) + F(0) < 1$$

□

Teorema 3.3.1. π^2 è non razionale

Dimostrazione. Dati

$$a, b \in \mathbb{Z}^+$$

e per assurdo

$$\frac{a}{b} = \pi^2$$

emergono due relazioni contrastanti. (Vedi Osservazione 9 e Osservazione 12).

Quindi

$$\frac{a}{b} \neq \pi^2 \implies \pi^2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

□

Corollario 3.3.2. π è non razionale

Dimostrazione. Se π fosse razionale lo sarebbe anche π^2 , contrariamente a quanto appena dimostrato.

Quindi:

$$\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

□

Bibliografia

- [1] Apostol, Mathematical Analysis, 2nd ed. World Student Series Edition 1977.

- [2] G.T.Bagni, Storia della Matematica, vol.1, Pitagora Editrice Bologna.

- [3] P.Beckmann, A History of Pi, 4th edition, Golem Press, Boulder CO 1977.

- [4] B.Bourbaki, Elementi di storia della matematica, Feltrinelli, Milano 1963.

- [5] B.D'Amore-F.Speranza, Lo sviluppo storico della matematica, vol.1, Armando, Roma 1989.

- [6] B.D'Amore-F.Speranza, Lo sviluppo storico della matematica, vol.2, Armando, Roma 1992.

- [7] Delahaye, Le fascinant nombre π , Pour la Science, Belin 1997.

- [8] H Hancock, Theory of Elliptic Functions, reprinted by Dover, New York 1958

- [9] E.Lanconelli, Lezioni di Analisi Matematica I, Pitagora Editrice Bologna.

- [10] E.Lanconelli, Lezioni di Analisi Matematica II, 2 vols. Pitagora Editrice Bologna.

- [11] P.Eymard-J.P.Lafon, The number π , American Mathematical Society 2000.

- [12] Knopp, Theory of Functions, 2 vols.F.Bagemihl, translator, Dover, New York 1945.

- [13] Ouaknin, Marc-Alain, I Misteri dei Numeri, Atlante.

- [14] <http://www.matematicamente.it/storia/storia-Pi-greco.pdf>