ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

DIMOSTRAZIONI CLASSICHE DEI TEOREMI DI APPROSSIMAZIONE DI RUNGE NEL PIANO COMPLESSO

Tesi di Laurea in Istituzioni di Geometria superiore

Relatore:
Chiar.mo Prof.
COEN SALVATORE

Presentata da:
FONTANA ANDREA

Seconda Sessione
Anno Accademico 2009/2010

Introduzione

Sappiamo che ogni funzione intera puo essere approssimata uniformemente sui compatti di $\mathbb{C}$ con una successione di polinomi: basta scegliere i polinomi di Taylor della funzione.
Non è tuttavia possibile approssimare le funzioni $f(z) = \frac{1}{z}$, $g(z) = e^{\frac{1}{z}}$ con polinomi o con funzioni intere uniformemente sui compatti del piano bucato $\mathbb{C} \setminus 0$.
Infatti supponiamo che una tale successione $\{f_n\}$ esista e consideriamo la circonferenza S unitaria di centro l' origine. Poichè le 1-forme differenziali $f_n(z)\, dz$ sono esatte su $\mathbb{C} \setminus 0$ vale

$$\int_S f_n(z)\, dz = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Questo contraddice il fatto che si dovrebbe avere:

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f_n(z)\, dz = \int_S \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i$$

É d'altra parte vero che non solo per la funzione $f(z)$, ma anche per $g(z)$ sappiamo che questa è limite uniforme sui compatti di una sucessione di funzioni razionali con polo in 0 (si ricorre semplicemente ai loro sviluppi di Laurent).

É evidente che il problema di stabilire quando una funzione olomorfa su un dominio complesso D possa essere approssimata uniformemente sui compatti di un aperto A da polinomi o da funzioni razionali con poli fuori da A è importante in quanto l'esistenza di tali approssimazioni può comportare l'estensione alle funzioni olomorfe su D di proprietà valide per i polinomi o per le funzioni razionali quando esse sono invarianti rispetto a limiti funzionali uniformi sui compatti.
Inoltre può essere anche importante per le applicazioni stabilire degli algoritmi o per lo meno dei metodi per determinare le funzioni approssimanti in casi ragionevoli.

A questo genere di problemi dedicò molto studio Carl Runge (1856-1927), un matematico tedesco considerato uno dei fondatori dell'Analisi Numerica in Germania ed assai stimato anche come fisico (vedi Appendice).
I lavori di Runge seppero dare risposte definitive ai primi problemi fondamentali su queste questioni di approssimazione.

Diamo ora alcune definizioni che risulteranno fondamentali in seguito.
Chiameremo *regione di Runge* ogni aperto complesso D tale che le funzioni olomorfe su D siano tutte approssimabili uniformemente sui compatti di D tramite polinomi. Diremo che una coppia (D, A) di aperti di $\mathbb{C}$ con $A \subseteq D$ è una *coppia di Runge* quando ogni funzione olomorfa su A può essere approssimata uniformemente sui compatti di A da una successione di restrizioni ad A di funzioni olomorfe su D. Infine si dice *buco* di un aperto D una componente connessa limitata di $\mathbb{C} \setminus D$.

I risultati principali a cui arriveremo in questa tesi sono i seguenti:

Innanzitutto il **Teorema 5.0.28** che dice in particolare che *se un aperto complesso A non ha buchi allora è una regione di Runge.*
In realtà dimostreremo un teorema più generale da cui poi si ottiene questo come caso particolare ponendo $D = \mathbb{C}$.
Il teorema più generale che dimostreremo è il seguente:
Teorema 5.0.26. ***Caratterizzazione topologica delle coppie di Runge.*** *Siano A e D due aperti di $\mathbb{C}$ con $A \subseteq D$, allora A e D formano una coppia di Runge se e solo se nello spazio $D \setminus A$ non ci sono componenti connesse compatte.*

Il problema dell' approssimazione con funzioni razionali che prima avevamo intravisto si risolve con grande generalità. Infatti dimostreremo il teorema seguente.
Teorema 4.0.21. ***Teorema sull'approssimazione razionale di Runge.*** *Sia A aperto di $\mathbb{C}$ tale che A abbia dei buchi e sia $P \subseteq \mathbb{C} \setminus A$ un insieme che interseca ogni buco di A.*
Allora ogni funzione $f \in O(A)$ può essere approssimata uniformemente sui compatti di A tramite funzioni razionali con poli in P.

Tutti questi risultati sono, nell' ambito della dimostrazione che qui forniamo, basati sul risultato seguente:
Teorema 2.0.3. ***Teorema dello spostamento dei poli.***
Sia Z una componente connessa di $\mathbb{C} \setminus K$, con K compatto di $\mathbb{C}$, e siano $a, b \in Z$. Allora la funzione $(z - a)^{-1}$ può essere approssimata uniforme-

mente su K da polinomi in $(z-b)^{-1}$.

La dimostrazione, dovuta a Runge, è diretta ed è, ora, un risultato classico.

Infine, come ultima parte di questa tesi, daremo anche delle applicazioni dei teoremi dimostrati. Soprattutto determineremo una successione di polinomi che converge puntualmente ad una funzione non olomorfa (addirittura non continua) e tale che la successione dei polinomi derivati converge alla funzione nulla puntualmente, ma non uniformemente sui compatti di $\mathbb{C}$.
Un' altra applicazione che mostreremo è una dimostrazione di tipo classico del teorema di Mittag - Leffler sui domini complessi.

Il piano della tesi è il seguente.

Nel primo capitolo viene affrontato il 'problema di Runge sui compatti'. Per ogni compatto K del piano complesso si dice che una funzione $f : K \to \mathbb{C}$ è olomorfa su K se essa è la restrizione a K di una funzione olomorfa in un intorno aperto di K.

Nel primo e nel secondo capitolo introduciamo gli strumenti fondamentali e di carattere 'elementare' di cui ci serviremo in seguito, un risultato sulle quadrettature dei compatti ed il già citato teorema sullo spostamento dei poli.
Si arriva, cosi, tra l' altro a dimostrare che se K è un compatto del piano ed f è una funzione olomorfa su K, allora fissato arbitrariamente un punto in ogni componente connessa di $\mathbb{C} \setminus K$, f può essere approssimata uniformemente su K da una successione di funzioni razionali con poli nei punti prima fissati.

Nel terzo capitolo ci concentriamo più precisamente sul problema dell' approssimazione polinomiale migliorando i risulati precedenti quando si tratti della componente connessa non limitata di $\mathbb{C} \setminus K$, giungendo così al **piccolo teorema di Runge sull'approssimazione polinomiale**:
Teorema 3.0.11.
Sia K compatto di $\mathbb{C}$ e supponiamo che $\mathbb{C} \setminus K$ sia connesso, allora ogni funzione $f \in O(K)$ può essere approssimata uniformemente su K da polinomi

Esaurito il discorso relativo alle funzioni olomorfe sui compatti, affrontiamo nel capitolo quarto il caso di funzioni olomorfe su un aperto D complesso e riusciamo a dimostrare il precedente **Teorema 4.0.21.**

E' nel capitolo quinto che dimostriamo il **Teorema 5.0.26.** sulle coppie di Runge e il **Teorema 5.0.28.** sulle regioni di Runge

Nell'ultimo capitolo, come applicazione della teoria (ma particolarmente del piccolo teorema di Runge), definiamo quelle successioni di polinomi convergenti puntualmente ad una funzione discontinua di cui già abbiamo parlato. Una volta svolta la teoria di Runge diventa relativamente diretta la dimostrazione del teorema di Mittag- Leffler su aperti del piano.

Facciamo infine alcune considerazioni. E' un risultato fondamentale osservato fin dalla nascita della teoria che le caratterizzazioni delle regioni di Runge così come le caratterizzazioni delle coppie di Runge siano espresse mediante proprietà topologiche.
Uno dei motivi per cui si è preferito (seguendo le linee di [Remmert]) fornire una dimostrazione classica è che con questa si giunge a dimostrare con metodi abbastanza 'naturali' ed in certi casi, con metodi che si prestano ad applicazioni concrete per i casi più semplici, proprietà, in realtà, di carattere riposto.
Sfortunatamente questi metodi sono difficilmente applicabili al caso delle funzioni a più variabili per cui si sono lentamente nel tempo stabiliti metodi più potenti, giungendo, tra l' altro, a verificare che l' analogo naturale del concetto di coppia di Runge non è un concetto topologico per $n > 1$.
Solo per completezza ricordiamo (ma qui queste proposizioni non sono dimostrate) che un dominio di $\mathbb{C}$ non ha buchi se e solo se è semplicemnete connesso e che il numero dei buchi è il numero di Betti del dominio.

Indice

Capitolo 1

Approssimazioni tramite funzioni razionali

In questo capitolo ci chiederemo se data una funzione olomorfa su un compatto K è sempre possibile approssimarla uniformemente su K tramite funzioni razionali con poli fuori da K e vedremo che la risposta è affermativa Per prima cosa diamo la seguente definizione:

Definizione 1.1. Sia K compatto di $\mathbb{C}$ e sia $f : K \to \mathbb{C}$, si dice che f è olomorfa su K se esiste un aperto $U \supset K$ ed esiste una funzione g olomorfa su U tale che g coincide con f su K. In altre parole f è olomorfa su K se si può estendere olomorficamente intorno a K.
Indichiamo con $O(K)$ l'insieme delle funzioni olomorfe su K.

Diamo subito il seguente importante risultato:

Teorema 1.0.1. *Sia A aperto di $\mathbb{C}$ e sia K un insieme compatto contenuto in A, allora esistono un numero finito di segmenti verticali o orizzontali $\sigma^1, ..., \sigma^n$ in $A \setminus K$ tali che ogni funzione f olomorfa su A può essere approssimata uniformemente su K da funzioni razionali della forma:*

$$q(z) = \sum_{j=1}^{k} \frac{c_j}{z - w_j}, \qquad c_j \in \mathbb{C}, \quad w_j \in \bigcup_{i=1}^{n} |\sigma^i|$$

Premettiamo alla dimostrazione del teorema la seguente osservazione ed il seguente lemma:

Osservazione 1. Sia A aperto di $\mathbb{C}$ e sia $f : A \to \mathbb{C}$ olomorfa. Sia poi R un rettangolo chiuso coi lati paralleli agli assi, allora certamente R è un compatto a bordo e per il teorema di rappresentazione integrale di Cauchy vale:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(s)}{s-z}\, ds \qquad \forall z \in \mathring{R}$$

Mentre se $z \notin R$ vale:

$$\int_{\partial R} \frac{f(s)}{s-z}\, ds = 0$$

Da cui otteniamo che:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(s)}{s-z}\, ds = \begin{cases} f(z) & z \in \mathring{R} \\ 0 & z \notin R \end{cases}$$

Lemma 1.0.2. *Sia A aperto di $\mathbb{C}$ e sia K un insieme compatto tale che $K \subset A$. Allora esiste un numero finito di segmenti orizzontali o verticali $\sigma^1, ..., \sigma^n$ in $A \setminus K$ e tutti di lunghezza uguale tali che per ogni $f \in O(K)$ e $\forall z \in K$:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{v=1}^{n} \int_{\sigma^v} \frac{f(s)}{s-z}\, ds$$

Dimostrazione. Definiamo $\delta = 1$ nel caso in cui $A = \mathbb{C}$ altrimenti poniamo $\delta = dist(K, \partial A)$
In ogni caso (poichè K è compatto) si avrà $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$.
A questo punto stendiamo su $\mathbb{C}$ un reticolo di quadrati con lati paralleli agli assi e con diagonale d tale che $d < \delta$.
Ora poichè K è compatto, esso interseca solamente un numero finito di questi quadrati del reticolo che chiameremo $Q^1, ..., Q^m$. Si avrà allora certamente che $K \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} Q^k$
Inoltre se consideriamo un punto $z_k \in Q^k \cap K$ si ha per definizione di δ che tutta la pallina B di centro z_k e raggio δ è contenuta in A. Da cui ne segue che tutto il quadrato Q^k è contenuto in A, infatti se $s_k \in Q^k$ si ha che $|s_k - z_k| < d < \delta$.
Quindi $s_k \in B \subseteq A$. Ripetendo il ragionamento per ogni $k = 1, ..., m$ si ha che ogni $Q^k \subseteq A$ e quindi

$$\bigcup_{k=1}^{m} Q^k \subseteq A$$

Consideriamo ora i segmenti che costituiscono i bordi dei quadrati Q^k e indichiamo con $\sigma^1, ..., \sigma^n$ quei segmenti che non sono lati in comune di due quadrati diversi Q^p, Q^q con $p \neq q$.
Mostriamo ora che $\forall v = 1, ..., n$ $|\sigma^v| \subset A \setminus K$. Avremmo così ottenuto un insieme finito di segmenti orizzontali o verticali di lunghezza uguale e tutti in $A \setminus K$.
Chiaramente ogni $\sigma^v \subset A$. Inoltre se K intersecasse un segmento σ^h, allora entrambi i quadrati del reticolo che hanno quel segmento come lato comune, non sarebbero disgiunti da K e quindi apparterrebbero all'insieme dei Q^k.
In altri termini esisterebbero due quadrati distinti Q^i e Q^j che hanno come lato comune il segmento σ^h; ciò però non è possibile per definizione di σ^1,...,σ^n; quindi ogni σ^v deve essere disgiunto da K.

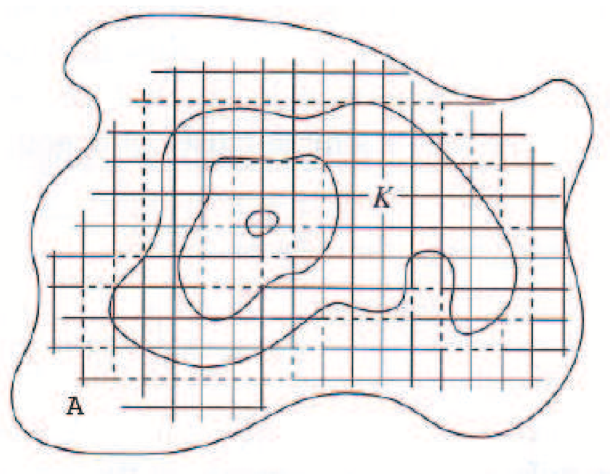


Figura 1.1: figura 1 I segmenti tratteggiati sono i σ^v

Ora osserviamo che se facciamo l'integrale lungo i bordi dei quadrati, poichè ogni lato in comune tra due differenti quadrati del reticolo viene percorso due volte e in senso opposto, si ha:

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{\partial Q^k} \frac{f(s)}{s-z} ds = \sum_{v=1}^{n} \int_{\sigma^v} \frac{f(s)}{s-z} ds \qquad \forall z \in A \setminus \bigcup_{k=1}^{m} \partial Q^k$$

Così per l'osservazione 1 se $z \in \mathring{Q}^i$ si ha:

$$\int_{\partial Q^i} \frac{f(s)}{s-z} ds = 2\pi i f(z) \qquad mentre \qquad \int_{\partial Q^k} \frac{f(s)}{s-z} ds = 0 \quad \forall k \neq i$$

Quindi sommando:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{v=1}^{n} \int_{\sigma^v} \frac{f(s)}{s-z}\, ds$$

Se invece ora $z \in K$ si trova sul bordo di un certo Q^k si ha che $z \notin |\sigma^v|$ $\forall v = 1, ..., n$.
Così se scegliamo una successione di punti $z_j \in \mathring{Q}^k$ che tende a z si ha che per ogni z_j vale

$$f(z_j) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{v=1}^{n} \int_{\sigma^v} \frac{f(s)}{s-z_j}\, ds$$

Da cui mandando j all'infinito poichè l'uguaglianza si conserva al limite e la funzione a destra dell'uguale è continua nella z e $z \notin |\sigma^v|$ si ha che:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{v=1}^{n} \int_{\sigma^v} \frac{f(s)}{s-z}\, ds$$

In conclusione la tesi vale $\forall z \in K$ □

Dimostrazione. (teorema 1.0.1)
Scegliamo $\sigma^1, ..., \sigma^n$ come nel lemma precedente. Sappiamo che essi sono segmenti verticali o orizzontali in $A \setminus K$ e sappiamo che se f è una funzione olomorfa su A vale:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{v=1}^{n} \int_{\sigma^v} \frac{f(s)}{s-z}\, ds \qquad \forall z \in K$$

Ora fissato $v = 1, ..., n$, la funzione $\frac{f(s)}{s-z}$ nelle variabili s, z è continua su $|\sigma^v| \times K$, che è un insieme compatto. Così essa è anche uniformemente continua su $|\sigma^v| \times K$.
In particolare $\forall\, \epsilon > 0 \,\exists\, \delta_v > 0$ tale che:

$$\left| \frac{f(s)}{s-z} - \frac{f(s')}{s'-z} \right| < \frac{\epsilon}{L(\sigma^v)\, n} \qquad \forall\, (s, s', z) \,\in |\sigma^v| \times |\sigma^v| \times K \,:\, |s - s'| < \delta_v$$

Dove abbiamo indicato con $L(\sigma^v)$ la lunghezza del segmento σ^v.
Ora, fissato $\epsilon > 0$, possiamo dividere σ^v in ulteriori segmenti $\pi_v^1, ..., \pi_v^{r_v}$ tutti

di lunghezza $< \delta_v$ e poi scegliere arbitrariamente $w_{v\,\mu} \in |\pi_v^\mu|$.
A questo punto definiamo per ogni $\mu = 1, ..., r_v$

$$c_{v\,\mu} := \int_{\pi_v^\mu} -f(w_{v\,\mu})\, ds$$

Ripetiamo lo stesso discorso per ogni $v = 1, ..., n$ dopodichè definiamo la seguente funzione razionale che ha poli solo dentro l'unione di tutti i σ_v

$$q(z) = \sum_{v=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{r_v} \frac{1}{2\pi i} \frac{c_{v\,\mu}}{z - w_{v\,\mu}}$$

osserviamo ora che $\forall z \in K$ vale:

$$|f(z) - q(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{v=1}^{n} \left(\int_{\sigma^v} \frac{f(s)}{s-z}\, ds - \sum_{\mu=1}^{r_v} \frac{c_{v\,\mu}}{z - w_{v\,\mu}} \right) \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{v=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{r_v} \left(\int_{\pi_v^\mu} \frac{f(s)}{s-z}\, ds - \frac{c_{v\,\mu}}{z - w_{v\,\mu}} \right) \right| < \sum_{v=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{r_v} \left| \int_{\pi_v^\mu} \frac{f(s)}{s-z}\, ds - \frac{c_{v\,\mu}}{z - w_{v\,\mu}} \right|$$

$$= \sum_{v=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{r_v} \left| \int_{\pi_v^\mu} \frac{f(s)}{s-z}\, ds - \int_{\pi_v^\mu} - \frac{f(w_{v\,\mu})}{z - w_{v\,\mu}}\, ds \right| = \sum_{v=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{r_v} \left| \int_{\pi_v^\mu} \frac{f(s)}{s-z} - \frac{f(w_{v\,\mu})}{w_{v\,\mu} - z}\, ds \right|$$

$$\leq \sum_{v=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{r_v} \max_{s \in \pi_v^\mu} \left| \frac{f(s)}{s-z} - \frac{f(w_{v\,\mu})}{w_{v\,\mu} - z} \right| \; L(\pi_v^\mu)$$

Adesso poichè s e $w_{v\,\mu}$ appartengono allo stesso segmento π_v^μ si ha che $|s - w_{v\,\mu}| < \delta_v$ per cui:

$$\sum_{v=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{r_v} \max_{s \in \pi_v^\mu} \left| \frac{f(s)}{s-z} - \frac{f(w_{v\,\mu})}{w_{v\,\mu} - z} \right| \; L(\pi_v^\mu) < \sum_{v=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{r_v} \frac{\epsilon}{L(\sigma^v)\, n} L(\pi_v^\mu) =$$

$$\sum_{v=1}^{n} \frac{\epsilon}{n} \frac{1}{L(\sigma^v)} \sum_{\mu=1}^{r_v} L(\pi_v^\mu) = \sum_{v=1}^{n} \frac{\epsilon}{n} = \epsilon$$

In definitiva abbiamo visto che $\forall \epsilon > o$ esiste una funzione razionale $q(z)$ con poli solo dentro l'unione di tutti i σ_v tale che $|f - q|_K < \epsilon$

$\square$

Osserviamo adesso che tali funzioni razionali hanno poli solamente in $A \setminus K$ come volevamo e inoltre di conseguenza sono olomorfe intorno al compatto K.
Notiamo inoltre che l'insieme di segmenti $\sigma^1, ..., \sigma^n$ in cui si trovano i poli delle funzioni razionali non dipendono dalla funzione f che devono approssimare ma solamente dagli insiemi K e A.

Abbiamo visto in conclusione che su un compatto di $\mathbb{C}$ è sempre possibile approssimare uniformemente una funzione olomorfa tramite funzioni razionali con poli fuori dal compatto.

Capitolo 2

Teoremi di Runge

Cercheremo ora di capire quando e come possiamo controllare i poli di queste funzioni razionali che approssimano uniformemente una certa funzione olomorfa f su un compatto K, ovvero quando e fino a che punto possiamo essere noi a scegliere in quale insieme rinchiudere questi poli di tali funzioni razionali.
Vedremo in realtà che ognuno di questi poli che si trova in un punto a può essere spostato in un altro punto qualsiasi della componente connessa Z di $\mathbb{C} \setminus K$ che contiene il punto a. Da questa asserzione otterremo il teorema di approssimazione di Runge che afferma che per potere rinchiudere in un insieme a nostra scelta tutti i poli delle funzioni razionali che approssimano f su K, ci basterà scegliere un insieme qualunque tale che intersechi tutte le componenti connesse di $\mathbb{C} \setminus K$.

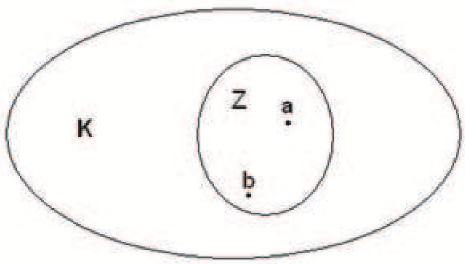


Figura 2.1

.

Teorema 2.0.3. ***Teorema dello spostamento dei poli***
Sia Z una componente connessa di $\mathbb{C} \setminus K$, e siano $a, b \in Z$. Allora la funzione $(z-a)^{-1}$ può essere approssimata uniformemente su K da polinomi in $(z-b)^{-1}$

.

Premettiamo alla dimostrazione del teorema le seguenti due osservazioni:

Osservazione 2. Sia Z una componente connessa di $\mathbb{C} \setminus K$ allora Z è un aperto di $\mathbb{C}$.
Sappiamo infatti che Z è aperto e chiuso in $\mathbb{C} \setminus K$, ma poichè $\mathbb{C} \setminus K$ è aperto nello spazio ambiente anche Z è aperto in $\mathbb{C}$

Osservazione 3. Se sotto le ipotesi del teorema, si ha che la funzione $(z-a)^{-1}$ può essere approssimata uniformemente da polinomi in $(z-b)^{-1}$ su K e la funzione $(z-b)^{-1}$ può essere approssimata uniformemente su K da polinomi in $(z-c)^{-1}$, allora $(z-a)^{-1}$ può essere approssimata uniformemente da polinomi in $(z-c)^{-1}$.
Infatti dalle ipotesi segue che esistono due successioni di polinomi p_n e q_n tali che $p_n(\frac{1}{z-b})$ converge uniformemente a $(z-a)^{-1}$ su K e analogamente fa $q_n(\frac{1}{z-c})$ a $(z-b)^{-1}$
Poniamo $\delta = \inf\{|z-b| \,/\, z \in K\}$, si ha allora che $\forall z \in K$ $\frac{1}{z-b} \in B(0, \delta^{-1})$
Inoltre poichè $q_n(\frac{1}{z-c})$ converge uniformemente su K a $\frac{1}{z-b}$ possiamo supporre che $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, z \in K$ $q_n(\frac{1}{z-c}) \in \overline{B(0, 2\,\delta^{-1})} =: T$ che è un insieme compatto.
Sia allora $n \in \mathbb{N}$ arbitrario.
Sappiamo che esiste $m_n \in \mathbb{N}$ tale che $|p_{m_n}(\frac{1}{z-b}) - \frac{1}{z-a}| < \frac{1}{n} \qquad \forall\, z \in K$

Ora poichè p_{m_n} è un polinomio, esso è uniformemente continuo su T, esiste quindi $\delta > 0$ tale che
$|p_{m_n}(v) - p_{m_n}(w)| < \frac{1}{n}$ tutte le volte che $v, w \in T$ e $|v-w| < \delta$.
Inoltre esiste anche $k_n \in \mathbb{N}$ tale che $|q_{k_n}(\frac{1}{z-c}) - \frac{1}{z-b}| < \delta \qquad \forall\, z \in K$
Allora:

$$\left| p_{m_n}\left(\frac{1}{z-b}\right) - p_{m_n}\left(q_{k_n}\left(\frac{1}{z-c}\right)\right)\right| < \frac{1}{n} \qquad \forall\, z \in K$$

in quanto $|\frac{1}{z-b} - q_{k_n}(\frac{1}{z-c})| < \delta$ e $\frac{1}{z-b}$, $q_{k_n}(\frac{1}{z-c}) \in T \qquad \forall\, z \in K$.

Poniamo allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ $\quad h_n(\frac{1}{z-c}) = p_{m_n}\left(q_{k_n}\left(\frac{1}{z-c}\right)\right)$

Allora chiaramente h_n è un polinomio in $(z-c)^{-1}$ che converge uniformemente su K alla funzione $(z-a)^{-1}$, infatti:

$$\left|h_n\left(\frac{1}{z-c}\right)-\frac{1}{z-a}\right| \leq \left|h_n\left(\frac{1}{z-c}\right)-p_{m_n}\left(\frac{1}{z-b}\right)\right|+\left|p_{m_n}\left(\frac{1}{z-b}\right)-\frac{1}{z-a}\right|$$
$$< \left|p_{m_n}\left(q_{k_n}\left(\frac{1}{z-c}\right)\right)-p_{m_n}\left(\frac{1}{z-b}\right)\right|+\frac{1}{n}<\frac{2}{n} \qquad \forall\, z \in K$$

.

Dimostrazione. (Teorema dello spostamento dei poli).
Sia $V = \left\{b \in Z \Big/ \frac{1}{z-a}\, può\, essere\, approssimato\, uniformemente\, su\, K\right.$
$\left. da\, polinomi\, in\, \frac{1}{z-b}\right\}$
Per dimostrare il teorema ci basta mostrare che $V = Z$, e per mostrare questo, essendo Z connesso ci basta vedere che V è non vuoto, aperto e chiuso in Z.
Ora certamente $a \in V$ quindi $V \neq \emptyset$
V è aperto infatti:
Sia $c \in V$, allora poichè $V \subseteq Z$ e Z è aperto in $\mathbb{C}$ esiste $\delta > 0$ tale che $B(c,\delta) \subseteq Z$ mostriamo che $B(c,\delta) \subseteq V$.
Sia $d \in B(c,\delta)$ per mostrare che $d \in V$ ci basta mostrare per l'osservazione 3 che esiste una successione di polinomi in $(z-d)^{-1}$ che approssima uniformemente su K $\frac{1}{z-c}$.
Consideriamo allora la seguente serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z-d}\left(\frac{c-d}{z-d}\right)^k$$

Essa converge uniformemente su K a $\frac{1}{z-c}$ in quanto $|c-d| < \delta$ mentre per ogni $z \in K$ vale $|z-d| \geq \delta$. Così al variare di $n \in \mathbb{N}$ troncando la serie all'ennesimo termine si ottiene una successione di polinomi in $(z-d)^{-1}$ che converge uniformemente su K a $\frac{1}{z-c}$.
Di conseguenza V è aperto in $\mathbb{C}$ e quindi in Z.
Per mostrare che V è chiuso facciamo vedere che il suo complementare in Z è aperto.

Sia $w \in Z \setminus V$; poichè Z è aperto esiste un $\delta > 0$ tale che $B(w,\delta) \subseteq Z$ mostriamo che $B(w,\delta) \subseteq Z \setminus V$, ne seguirà che $Z \setminus V$ è aperto in $\mathbb{C}$ e di conseguenza è aperto in Z da cui ne viene che V è chiuso in Z.
Sia allora $d \in B(w,\delta)$ ragionando come sopra possiamo costruire una serie di potenze in $(z-w)^{-1}$ e quindi una successione di polinomi in $(z-w)^{-1}$ che converge uniformemente su K a $(z-d)^{-1}$; da questo e dall'osservazione 3 segue che se esistesse una successione di polinomi in $(z-d)^{-1}$ che convergesse uniformemente a $(z-a)^{-1}$ allora esisterebbe anche una successione di polinomi in $(z-w)^{-1}$ che convergerebbe uniformemente a $(z-a)^{-1}$, il chè sarebbe assurdo. Quindi $d \in Z \setminus V$.

$\square$

Proposizione 2.0.4. *Sia K compatto di $\mathbb{C}$, sia f olomorfa su K e siano $Z_1, Z_2, ..., Z_m$ le componenti connesse di $\mathbb{C} \setminus K$.*
Per ogni $i = 1, ..., m$ sia z_i un punto ad arbitrio della componente Z_i.
Allora f può essere approssimata uniformemente su K da funzioni razionali che hanno poli solamente nell'insieme $\{z_1, z_2, ..., z_m\}$

Dimostrazione. .
Sia $\epsilon > 0$; per il teorema 1.0.1 sappiamo che esiste una funzione razionale

$$q(z) = \sum_{j=1}^{k} \frac{c_j}{z - w_j} \qquad w_1, ..., w_k \in \bigcup_{v=1}^{n} |\sigma^v|$$

tale che $|f - q|_K < \frac{\epsilon}{2}$.
Ora per ogni $j = 1, ..., k$ certamente si ha che $w_j \in Z_{r_j}$ con r_j opportuno dipendente da j, $1 \leq r_j \leq m$. Allora per il teorema dello spostamento dei poli sappiamo che esiste un polinomio p_j in $(z - z_{r_j})^{-1}$ tale che

$$\left| \frac{c_j}{z - w_j} - p_j \left(\frac{1}{z - z_{r_j}} \right) \right| < \frac{\epsilon}{2k} \quad \forall z \in K$$

A questo punto poniamo

$$p(z) := \sum_{j=1}^{k} p_j \left(\frac{1}{z - z_{r_j}} \right)$$

Allora si ha che p è una funzione razionale con poli solamente in $\{z_1, z_2, ..., z_m\}$ e vale:

$$|f - p|_K \leq |f - q|_K + |q - p|_K \leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{j=1}^{k} \left| \frac{c_j}{z - w_j} - p_j \left(\frac{1}{z - z_{r_j}} \right) \right|_K \leq \epsilon$$

$\square$

Definizione 2.1. Sia $P \subseteq \mathbb{C}$; indichiamo con $\mathbb{C}_P[z]$ l'insieme delle funzioni razionali i cui poli stanno tutti dentro l'insieme P.

.

Dalla proposizione precedente segue immediatamente il teorema di Runge:

Teorema 2.0.5. ***Teorema di Runge.***
Sia $P \subseteq \mathbb{C} \setminus K$ tale che intersechi tutte le componenti connesse di $\mathbb{C} \setminus K$; allora ogni funzione $f \in O(K)$ può essere approssimata uniformemente su K da funzioni in $\mathbb{C}_P[z]$

Dimostrazione. .
Sia f olomorfa su K e siano $Z_1, ..., Z_p$ le componenti connesse di $\mathbb{C} \setminus K$, poichè P le interseca tutte, per ogni $j = 1, ..., p$ esiste $z_j \in Z_j \cap P$. Quindi per la proposizione 2.0.4 f può essere approssimata uniformemente su K da funzioni razionali che hanno tutti poli nell'insieme $\{z_1, ..., z_p\}$ e quindi contenuti nell' insieme P

□

Corollario 2.0.6. *Sia A aperto di $\mathbb{C}$ e sia $K \subset A$, K compatto; allora se ogni componente connessa di $\mathbb{C} \setminus K$ interseca l'insieme $\mathbb{C} \setminus A$, ogni funzione $f \in O(K)$ può essere approssimata uniformemente su K da funzioni razionali che sono olomorfe su A*

Dimostrazione. .
Consideriamo l'insieme $P = \mathbb{C} \setminus A$, allora P interseca tutte le componenti connesse di $\mathbb{C} \setminus K$ per ipotesi e quindi per il teorema di Runge ogni funzione olomorfa su K può essere approssimata uniformemente da funzioni razionali che hanno poli contenuti in P, ovvero che hanno poli fuori dall'insieme A e perciò tali funzioni razionali sono olomorfe sull'aperto A

□

Abbiamo quindi visto che ogni polo delle funzioni razionali che approssimano una data funzione f può essere spostato in un qualsiasi altro punto della stessa componente connessa del complememtare del compatto K.
Inoltre possiamo anche richiedere che tali funzioni razionali siano olomorfe su un aperto contenete K sotto la condizione che il suo complementare intersechi tutte le componenti connesse del complementare di K.

Vediamo ora che possiamo invertire il teorema di Runge e il corollario 2.0.6 richiedendo però che non tutte le componenti connesse di $\mathbb{C} \setminus K$ vengano intersecate rispettivamente da P e da $\mathbb{C} \setminus A$, ma solo quelle limitate.
Dimostriamo prima il seguente lemma che utilizzeremo poi:

Lemma 2.0.7. *Sia Z componente connessa di $\mathbb{C} \setminus K$ allora $\partial Z \subseteq K$*

Dimostrazione. .
Per assurdo supponiamo esista $c \in \partial Z$ tale che $c \notin K$. Allora si avrà che $c \in \mathbb{C} \setminus K$; quindi esiste un disco D centrato in c e di raggio r tale che $D \subseteq \mathbb{C} \setminus K$. Ora per la definizione di ∂Z si ha che $D \cap Z \neq \emptyset$. Per cui, poichè D è connesso e Z è una componente connessa di $\mathbb{C} \setminus K$, si ha che $D \subseteq Z$ contraddicendo l'ipotesi che $c \in \partial Z$. Assurdo. □

Proposizione 2.0.8. *Sia K compatto contenuto in A aperto di $\mathbb{C}$ e supponiamo che ogni funzione in $O(K)$ può essere approssimata uniformemente su K da funzioni razionali senza poli in A; allora $\mathbb{C} \setminus A$ interseca ogni componente connessa limitata di $\mathbb{C} \setminus K$*

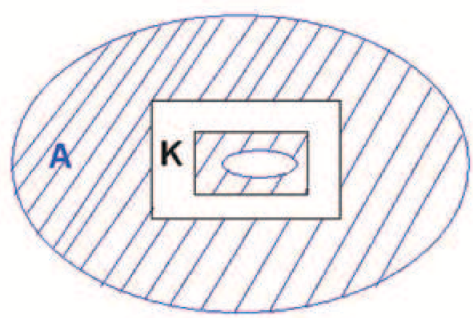


Figura 2.2: L'unica componente limitata di $\mathbb{C} \setminus K$ è intersecata da $\mathbb{C} \setminus A$

Dimostrazione. .
Per dimostrare la tesi mostriamo che se esiste una componente limitata di $\mathbb{C} \setminus K$ disgiunta da $\mathbb{C} \setminus A$ allora non si può approssimare uniformemente su K ogni funzione $\in O(K)$ tramite funzioni razionali senza poli in A.
Sia allora Z una componente limitata di $\mathbb{C} \setminus K$ disgiunta da $\mathbb{C} \setminus A$, allora $Z \subseteq A \setminus K$. A questo punto consideriamo la funzione $\frac{1}{z-a}$ con $a \in Z$; poichè $a \notin K$ essa è olomorfa su K.
Poniamo $\delta = \max\{|z-a| \,/\, z \in K\} = |z-a|_K$, e osserviamo che, poichè K è compatto allora $0 < \delta < \infty$.

Se ora tale funzione potesse essere approssimata uniformemente su K tramite funzioni razionali e senza poli in A, si avrebbe che esisterebbe $g(z)$ olomorfa su A tale che:
$|(z-a)^{-1} - g(z)|_K < \delta^{-1}$ da cui

$$|1 - (z-a)\, g(z)|_K < 1$$

.
Ora per il lemma precedente e per il principio del massimo per gli aperti limitati si ha che $|1-(z-a)\, g(z)|_Z < 1$.
Il chè è assurdo per essendo $a \in Z$. In definitiva abbiamo visto che tale funzione non può essere approssimata in modo uniforme su K tramite funzioni razionali senza poli in A e da questo segue la tesi della proposizione.

□

Proposizione 2.0.9. *Sia K compatto di $\mathbb{C}$ e sia $P \subseteq \mathbb{C} \setminus K$ tale che ogni funzione $\in O(K)$ può essere approssimata uniformemente su K da funzioni in $\mathbb{C}_p[z]$, allora P interseca tutte le componenti connesse limitate di $\mathbb{C} \setminus K$.*

Dimostrazione. .
Per il teorema dello spostamento dei poli possiamo supporre che se P interseca una componente connessa di $\mathbb{C} \setminus K$ la interseca in un punto soltanto. Perciò non è restrittivo supporre che P sia un insieme di punti isolati e quindi un insieme chiuso.
Mostriamo che P interseca in almeno un punto ogni componente connessa limitata di $\mathbb{C} \setminus K$.
Poniamo $A = \mathbb{C} \setminus P$, allora A è aperto e vale $K \subseteq A$. Ora osserviamo che se una funzione appartiene all'insieme $\mathbb{C}_p[z]$ allora essa non ha poli in A, quindi per la proposizione precedente ogni componente limitata di $\mathbb{C} \setminus K$ interseca $\mathbb{C} \setminus A = P$

□

Capitolo 3

Approssimazioni tramite polinomi

Abbiamo visto nei precedenti capitoli che possiamo sempre approssimare uniformemente una funzione olomorfa su un compatto tramite funzioni razionali e anche in che modo e fino a che punto possiamo controllare i poli di tali funzioni razionali; in questo capitolo invece cercheremo di fare tali approssimazioni non più tramite funzioni razionali ma addirittura tramite polinomi.
Può essere conveniente vedere un polinomio come una funzione razionale che ha poli all'infinito, in questo caso il problema diventa equivalente a quello di spostare all'infinito i poli delle funzioni razionali che sappiamo che approssimano la nostra funzione sul compatto.
Ora ricordando il teorema di spostamento dei poli, sappiamo che se una funzione razionale ha un polo che si trova su una componente connessa di $\mathbb{C} \setminus K$ allora è possibile spostare quel punto di polo in un altro qualsiasi punto che stia nella stessa componente. Quindi se noi supponiamo che tale componente sia illimata viene intuitivo pensare di poter spostare il polo fino all'infinito. Vedremo qui di seguito nella prima proposizione del capitolo che effettivamente ciò è formalmente possibile.

Osservazione 4. Osserviamo prima di andare avanti che esiste sempre una ed una sola componente connessa illimitata di $\mathbb{C} \setminus K$.
Esistenza:
Poichè K è limitato esiste certamente un disco D centrato nell'origine e di raggio r tale che $K \subseteq D$.
Allora certamente $\mathbb{C} \setminus D$ è un insieme connesso ed è contenuto in $\mathbb{C} \setminus K$, per cui esiste una componente connessa di $\mathbb{C} \setminus K$ contenente $\mathbb{C} \setminus D$, il quale è illimitato e quindi anche tale componente sarà illimitata.
Unicità:
Siano Z e V due componenti illimitate di $\mathbb{C} \setminus K$ mostriamo che $Z = V$.
Chiaramente essendo illimitati e K compatto esiste una curva continua che

collega Z e V senza passare per K. Di conseguenza Z e V sono due insiemi connessi e non disgiunti; così la loro unione è ancora un insieme connesso, ma essendo Z e V componenti connesse di $\mathbb{C} \setminus K$ ne segue che $Z = V$

Proposizione 3.0.10. *Sia K compatto di $\mathbb{C}$, sia Z la componente connessa illimitata di $\mathbb{C} \setminus K$ e sia $a \in Z$.*
Allora è possibile approssimare la funzione $\frac{1}{z-a}$ in modo uniforme su K tramite polinomi.

Dimostrazione. .
Poichè K è limitato e Z è illimato certamente esiste $w \in Z$ tale che $B(0, |w|) \supseteq K$. Per quanto già visto nel teorema dello spostamento dei poli sappiamo che $\frac{1}{z-a}$ può essere approssimata uniformemente su K da polinomi in $\frac{1}{z-w}$. Ora però tutte le funzioni del tipo $(z - w)^{-n}$ sono olomorfe su $B(0, |w|)$ e di conseguenza possono essere approssimate uniformemente su K dal loro sviluppo di Taylor. Di conseguenza, sempre per l'osservazione 3, su K si può approssimare uniformemente la funzione $\frac{1}{z-a}$ tramite polinomi. $\square$

Da questa proposizione segue immediatamente il risultato centrale di questo capitolo:
il **piccolo teorema di Runge sull'approssimazione polinomiale**

Teorema 3.0.11. .
Sia K compatto di $\mathbb{C}$ e supponiamo che $\mathbb{C} \setminus K$ sia connesso, allora ogni funzione $f \in O(K)$ può essere approssimata uniformemente su K da polinomi

Dimostrazione. .
Sappiamo che ogni funzione olomorfa su K può essere approssimata da funzioni razionali del tipo:

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{c_j}{z - w_j}$$

con $w_1, ..., w_k$ appartenenti alla stessa componente connessa $\mathbb{C} \setminus K$ che certamente è illimitata. Perciò per la proposizione precedente, ogni espressione del tipo $\frac{c_j}{z-w_j}$ può essere approssimata tramite polinomi; in conclusione
ogni funzione $\in O(K)$ può essere approssimata uniformemente su K tramite polinomi. $\square$

.

Da questo teorema seguono varie osservazioni:

Osservazione 5. Nel teorema dello spostamento dei poli è necessaria l'ipotesi che a e b si trovino nella stessa componente Z; infatti basta osservare il seguente esempio:
Consideriamo il compatto $\gamma = \partial B(0,1)$, e siano $a = 0$ e $b = 2$, allora a e b non appartengono alla stessa componente connessa di $\mathbb{C} \setminus \gamma$ e la funzione $\frac{1}{z}$ non può essere approssimata uniformemente su γ tramite polinomi in $\frac{1}{z-2}$.
Infatti per quanto visto prima $\frac{1}{z-2}$ può essere approssimata uniformemente su $B(0,1)$ e quindi su γ tramite polinomi, da cui seguirebbe che anche la funzione $\frac{1}{z}$ si possa approssimare tramite polinomi il chè non è possibile come avevamo visto nell'introduzione.

.

Andremo ora a rafforzare la tesi della proposizione 2.0.4 togliendo dall'insieme $\{z_1, z_2, ..., z_m\}$ gli elementi appartenenti alle componenti connesse illimitate di $\mathbb{C} \setminus K$.

Proposizione 3.0.12. *Sia K compatto di $\mathbb{C}$, sia f olomorfa su K e siano $Z_1, Z_2, ..., Z_{m-1}$ le componenti connesse limitate di $\mathbb{C} \setminus K$.*
Per ogni $i = 1, ..., m-1$ sia z_i un punto ad arbitrio della componente Z_i.
Allora f può essere approssimata uniformemente su K da funzioni razionali che hanno poli solamente nell'insieme $\{z_1, z_2, ..., z_{m-1}\}$

Dimostrazione. .
Sia come nella proposizione 2.0.4 $\epsilon > 0$ fissato ad arbitrio e

$$q(z) = \sum_{j=1}^{k} \frac{c_j}{z - w_j} \qquad w_1, ..., w_k \in \bigcup_{v=1}^{n} |\sigma^v|$$

tale che $|f - q|_K < \frac{\epsilon}{2}$.
Allora per ogni j tale che w_j appartiene a una componente limitata si ragiona come nella dimostrazione della proposizione 2.0.4 mentre per i w_j che appartengono alla componente illimitata sappiamo che esistono polinomi p_j in z tali che approssimano uniformemente su K l'espressioni $\frac{c_j}{z-w_j}$. A questo punto basta definire la funzione razionale $p(z)$ come nella proposizione 2.0.4 e osservare che essa ha poli solamente nell'insieme $\{z_1, z_2, ..., z_{m-1}\}$. $\square$

Possiamo quindi indebolire le ipotesi del teorema di Runge e del corollario 2.0.6 chiedendo rispettivamente che P intersechi solo le componenti connesse limitate di $\mathbb{C} \setminus K$ o che solamente ogni componente connessa limitata di $\mathbb{C} \setminus K$ intersechi l'insieme $\mathbb{C} \setminus A$. Precisiamo queste affermazioni nei seguenti due corollari:

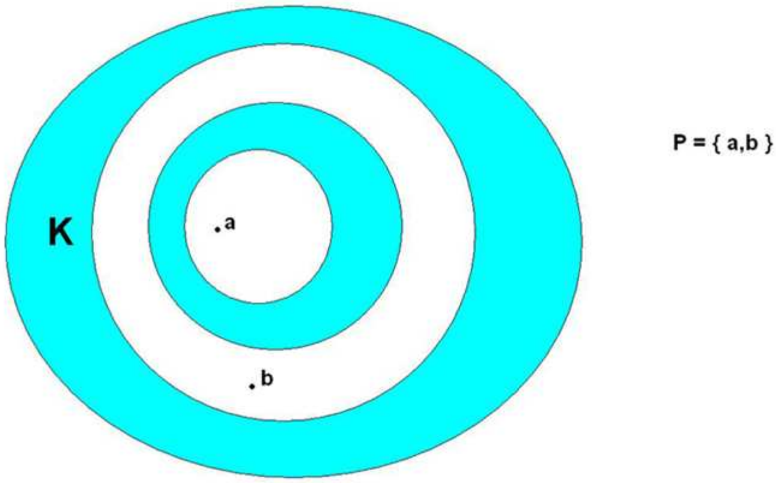


Figura 3.1: Non serve che P intersechi la componente illimitata di $\mathbb{C} \setminus K$

Corollario 3.0.13. *Sia $P \subseteq \mathbb{C} \setminus K$ tale che intersechi tutte le componenti connesse limitate di $\mathbb{C} \setminus K$; allora ogni funzione $\in O(K)$ può essere approssimata uniformemente su K da funzioni in $\mathbb{C}_P[z]$*

Dimostrazione. .
Segue direttamente dalla proposizione 3.0.12 □

Corollario 3.0.14. *Sia A aperto di $\mathbb{C}$ e sia $K \subset A$, K compatto; allora se ogni componente connessa limitata di $\mathbb{C} \setminus K$ interseca l'insieme $\mathbb{C} \setminus A$, ogni funzione $\in O(K)$ può essere approssimata uniformemente su K da funzioni razionali che sono olomorfe su A*

Dimostrazione. .
Viene dal corollario 3.0.13 ponendo $P = \mathbb{C} \setminus A$ □

Abbiamo ottenuto così il seguente risultato:

Teorema 3.0.15. *Siano A aperto di $\mathbb{C}$ e K compatto contenuto in A, e sia poi $P \subseteq \mathbb{C} \setminus K$. Allora:*

1. *Ogni funzione in $O(K)$ può essere approssimata uniformemente su K da funzioni in $\mathbb{C}_P[z]$ se e solo P interseca tutte le componenti connesse limitate di $\mathbb{C} \setminus K$*

2. *Ogni funzione in $O(K)$ può essere approssimata uniformemente su K da funzioni razionali senza poli in A se e solo se ogni componente connessa limitata di $\mathbb{C} \setminus K$ interseca $\mathbb{C} \setminus A$*

Dimostrazione. .
Viene dalle proposizioni 2.0.8 e 2.0.9 e dai corollari 3.0.13 e 3.0.14 □

.

Abbiamo visto nel piccolo teorema di Runge che se l'insieme $\mathbb{C} \setminus K$ è connesso allora è possibile approssimare ogni funzione olomorfa uniformemente su K tramite polinomi, vedremo ora, come conseguenza del teorema precedente che vale anche il viceversa:

Proposizione 3.0.16. *Sia K compatto di $\mathbb{C}$ tale che ogni funzione $\in O(K)$ può essere approssimata uniformemente su K tramite polinomi, allora $\mathbb{C} \setminus K$ è connesso*

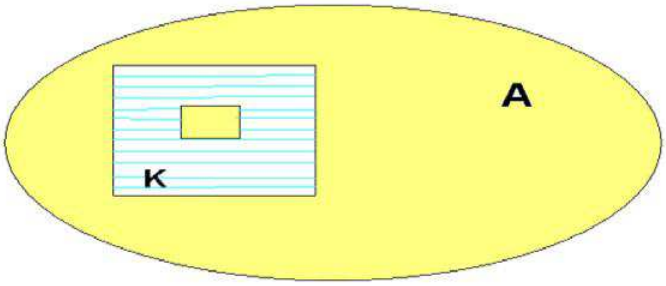
Dimostrazione. .
Per il punto due del teorema 3.0.15 prendendo $A = \mathbb{C}$ si ha che se ogni funzione $\in O(K)$ può essere approssimata uniformemente su K tramite funzioni razionali senza poli, ovvero tramite polinomi, allora ogni componente limitata di $\mathbb{C} \setminus K$ deve intersecare l'insieme vuoto. Da ciò segue chiaramente che $\mathbb{C} \setminus K$ non può avere componenti limitate e poichè sappiamo che $\mathbb{C} \setminus K$ ha una ed una sola componente illimitata, allora essa deve coincidere con tutto $\mathbb{C} \setminus K$, ovvero $\mathbb{C} \setminus K$ è connesso.

□

Capitolo 4

Approssimazioni su insiemi aperti

Mentre fino ad ora ci siamo occupati solamente di approssimazioni su insiemi compatti, in questo capitolo vedremo cosa succede su insiemi aperti. In particolare cercheremo di vedere come diventano sugli aperti i teoremi visti precedentemente.
Quello che faremo in realtà sarà una generalizzazione dei teoremi di approssimazione visti fin ora in quanto cercheremo, fissato un insieme aperto A, di approssimare uniformemente ogni funzione $\in O(A)$ su ogni compatto K contenuto in A.
Ricordiamo che abbiamo visto che se K è un compatto contenuto in A, possiamo approssimare ogni funzione olomorfa su K con funzioni razionali olomorfe su A se ogni componente connessa limitata di $\mathbb{C} \setminus K$ interseca l'insieme $\mathbb{C} \setminus A$.
Osserveremo subito nel prossimo lemma che possiamo sempre estendere K ad un nuovo compatto H in modo che H sia ancora contenuto in A e tale che ogni componente connessa limitata di $\mathbb{C} \setminus H$ intersechi $\mathbb{C} \setminus A$.
A questo punto sappiamo che una funzione $\in O(A)$ può essere approssimata uniformemente su H e quindi su K tramite funzioni razionali $\in O(A)$.



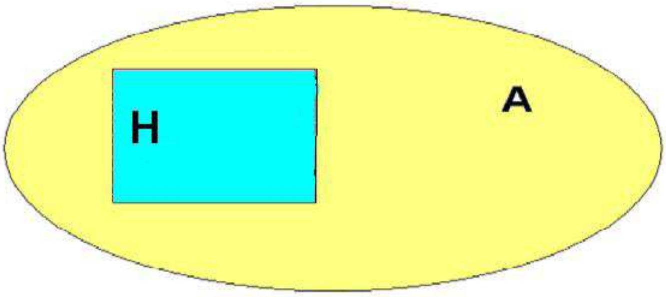


Figura 4.1: L'estensione di K ad H con le caratteristiche richieste

Lemma 4.0.17. *Sia A aperto di $\mathbb{C}$, allora per ogni compatto K contenuto in A, esiste un compatto H contenente K e contenuto in A tale che ogni componente connessa limitata di $\mathbb{C} \setminus H$ interseca $\mathbb{C} \setminus A$.*

Dimostrazione. .
Fissiamo K compatto contenuto in A.
Osserviamo che se $A = \mathbb{C}$, allora in questo caso possiamo scegliere un $R > 0$ tale che $K \subseteq \overline{B(0, R)}$ e a questo punto possiamo porre $H = \overline{B(0, R)}$; allora chiaramente H è un compatto contenente K e contenuto in A, inoltre $\mathbb{C} \setminus H$ non ha componenti connesse limitate; quindi possiamo assumere che A sia diverso da $\mathbb{C}$.

In questo caso $\partial A \neq \emptyset$ e quindi possiamo scegliere un numero reale r tale che

$0 < r < dist(K, \partial A)$.
Sia allora $M = \{z \in A \,/\, dist(z, \partial A) \geq r\}$; chiaramente vale $K \subseteq M$.
Inoltre M è un insieme chiuso in quanto sappiamo che la funzione distanza è continua e quindi M è la preimmagine di un insieme chiuso tramite una funzione continua. Sia ora D un disco chiuso centrato nell'origine tale che $K \subseteq D$ e definiamo $H := M \cap D$.
Osserviamo subito che H è compatto poichè intersezione di chiusi e contenuto in D che è limitato, inoltre H contiene K poichè sia M che D lo contengono mentre H è contenuto in A poichè lo è M.
Sia allora Z una componente connessa limitata di $\mathbb{C} \setminus H$ diversa dall'insieme vuoto, mostriamo che Z interseca l'insieme $\mathbb{C} \setminus A$.
Per definizione $\mathbb{C} \setminus H = (\mathbb{C} \setminus M) \cup (\mathbb{C} \setminus D)$, ed inoltre $\mathbb{C} \setminus D$ è connesso e illimitato; da queste cose ne viene che poichè Z è una componente connessa limitata deve essere $Z \subseteq \mathbb{C} \setminus M$; infatti se così non fosse si troverebbe un insieme connesso di $\mathbb{C} \setminus H$ illimitato e contenente Z.
Sia allora $w \in Z$; se $w \in \mathbb{C} \setminus A$, siamo a posto in quanto ne segue che Z interseca l'insieme $\mathbb{C} \setminus A$.
Se invece $w \notin \mathbb{C} \setminus A$, allora poichè $Z \subseteq \mathbb{C} \setminus M$, si ha che $w \in (\mathbb{C} \setminus M) \setminus (\mathbb{C} \setminus A)$.
Osservando che $(\mathbb{C} \setminus M) \setminus (\mathbb{C} \setminus A) = A \setminus M$, ne viene che $w \in A \setminus M$; da cui per definizione di M si ha che $dist(w, \partial A) < r$.
Questo implica che $B(w, r) \cap \mathbb{C} \setminus A \neq \emptyset$, ovvero esiste $v \in B(w, r)$ tale che $v \in \mathbb{C} \setminus A$; per concludere basta osservare che poichè $w \in Z$ allora tutto $B(w, r) \subseteq Z$ e quindi in particolare $v \in Z$.
In conclusione abbiamo quindi visto che ogni componente connessa limitata di $\mathbb{C} \setminus H$ interseca l'insieme $\mathbb{C} \setminus A$. □

.

Vale quindi il seguente teorema:

Teorema 4.0.18. *Sia A aperto di $\mathbb{C}$ e sia K compatto contenuto in A fissato, allora ogni funzione $f \in O(A)$ può essere approssimata uniformemente su K tramite funzioni razionali olomorfe su A*

Dimostrazione. .
Sia $f \in O(A)$ e sia K l'insieme compatto contenuto in A. Per il lemma 4.0.17 sappiamo che esiste un compatto H tale che $K \subseteq H \subseteq A$ ed inoltre ogni componente connessa limitata di $\mathbb{C} \setminus H$ interseca l'insieme $\mathbb{C} \setminus A$. Allora per

il corollario 3.0.14 sappiamo che f può essere approssimata uniformemente su H, ed in particolare su K da funzioni razionali che sono olomorfe su A.

$\square$

Vogliamo ora trovare l'analogo del teorema di Runge visto nel secondo capitolo. Per fare questo ricordiamo la definizione di buco di un insieme data nell'introduzione e diciamo che un insieme aperto A ha dei buchi se esiste almeno un buco di A diverso dall'insieme vuoto.

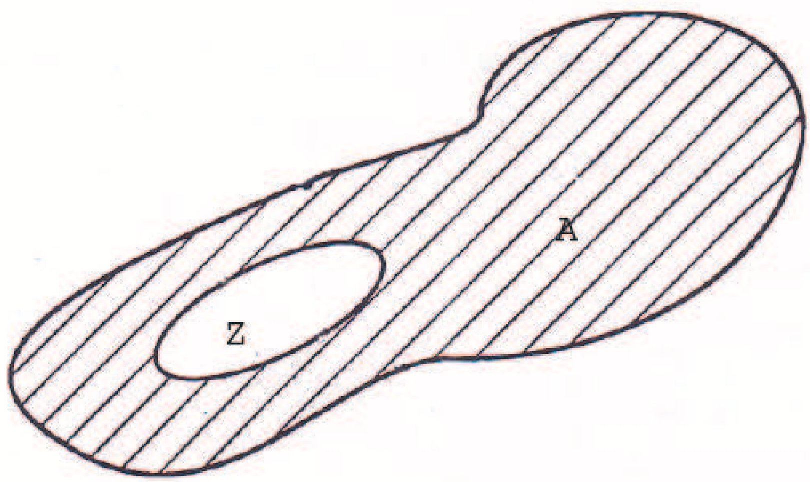


Figura 4.2: Z è un buco dell'insieme A

Osservazione 6. Se A è un aperto e Z è un buco di A allora Z è un insieme compatto. Infatti per definizione di buco di A si ha che Z è limitato, inoltre essendo una componente connessa di $\mathbb{C} \setminus A$ si ha che Z è chiuso in $\mathbb{C} \setminus A$, poichè però A è un insieme aperto si avrà che Z è chiuso anche in $\mathbb{C}$, da cui ne segue che Z è compatto.

Abbiamo visto nel lemma 4.0.17 che possiamo sempre ingrandire un compatto fino ad H dentro A fino a fare in modo che ogni componente connessa limitata di $\mathbb{C} \setminus H$ interseca l'insieme $\mathbb{C} \setminus A$, vediamo ora nel seguente lemma che in realtà vale anche che ogni componente connessa limitata di $\mathbb{C} \setminus H$ contiene un buco di A; in altre parole ogni componente connessa e limitata di $\mathbb{C} \setminus H$ contiene una componente connessa limitata di $\mathbb{C} \setminus A$.

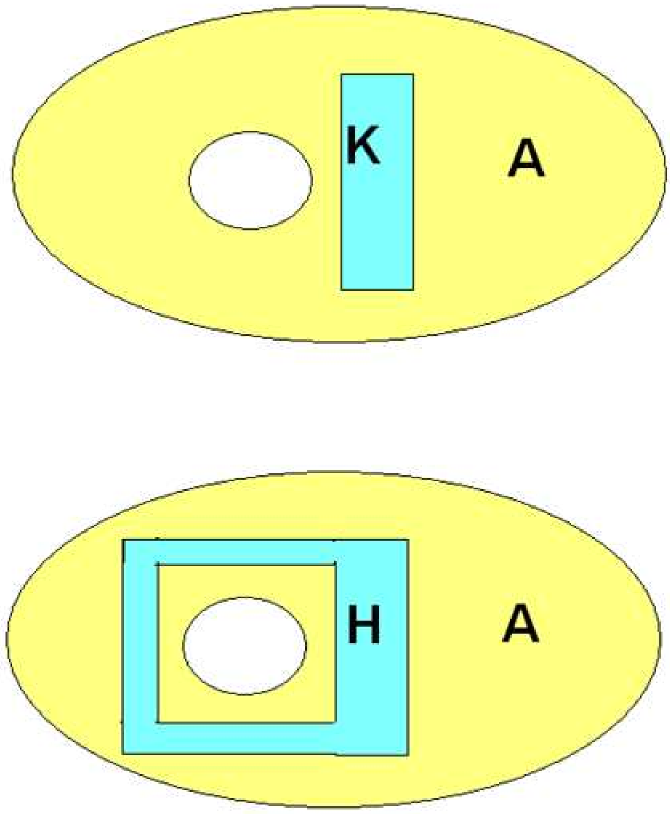


Figura 4.3

.

Lemma 4.0.19. *Sia A aperto di $\mathbb{C}$, allora per ogni compatto K contenuto in A, esiste un compatto H contenuto in A e contenente K tale che ogni componente connessa limitata di $\mathbb{C} \setminus H$ contiene un buco di A*

Dimostrazione. Se l'insieme A non ha buchi non c'è nulla da dimostrare, se A ha buchi scegliamo H come nella dimostrazione del lemma 4.0.17, dobbiamo solo dimostrare che ogni componente connessa limitata di $\mathbb{C} \setminus H$ contiene una componente connessa limitata di $\mathbb{C} \setminus A$.
Sia allora Z una componente connessa limitata di $\mathbb{C} \setminus H$, sappiamo già che essa interseca l'insieme $\mathbb{C} \setminus A$; quindi esiste una componente S di $\mathbb{C} \setminus A$ tale che $Z \cap S \neq \emptyset$. Ora poichè $\mathbb{C} \setminus A \subseteq \mathbb{C} \setminus H$, si ha che S è un insieme connesso di $\mathbb{C} \setminus A$.
Da questo ne segue che deve essere $S \subseteq Z$; inoltre poichè Z è limitata anche S lo sarà, quindi in conclusione ogni componente connessa limitata Z di $\mathbb{C} \setminus H$ contiene un buco di A. □

Possiamo ora vedere gli analoghi del piccolo teorema di Runge sull'approssimazione polinomiale e del teorema di Runge del secondo capitolo:

Teorema 4.0.20. ***Teorema di approssimazione polinomiale di Runge.*** *Sia A aperto di $\mathbb{C}$ tale che A non ha buchi, allora ogni funzione $f \in O(A)$ può essere approssimata uniformemente sui compatti di A tramite polinomi*

Dimostrazione. .
Sia $f \in O(A)$ e sia K compatto di A; sia poi H compatto definito come nella dimostrazione del lemma 4.0.17. Vogliamo vedere che $\mathbb{C} \setminus H$ è connesso.
Abbiam visto che $\mathbb{C} \setminus H$ ha una ed una sola componente illimitata, quindi per far vedere che è connesso ci basterà far vedere che non ha componenti connesse limitate.
Supponiamo per assurdo che Z sia una componente connessa limitata di $\mathbb{C} \setminus H$ non vuota, allora per il lemma 4.0.17 esiste $w \in Z \cap \mathbb{C} \setminus A$.
In particolare quindi w apparterrà una componente connessa di $\mathbb{C} \setminus A$ che chiameremo S. Ora però, poichè $\mathbb{C} \setminus A \subseteq \mathbb{C} \setminus H$, si avrà che S è un insieme connesso di $\mathbb{C} \setminus H$ e quindi esiste Z' componente di $\mathbb{C} \setminus H$ contenente l'insieme S.
Ora però sia Z che Z' sono componenti di $\mathbb{C} \setminus H$ non disgiunte, in quanto contengono entrambe w, quindi per definizione di componenti connesse deve essere $Z = Z'$. In particolare quindi si ha che $S \subseteq Z$, da cui ne segue che anche S è limitato e quindi S è una componente non vuota e limitata di $\mathbb{C} \setminus A$. In altre parole S è un buco di A e questo contraddice le ipotesi.
Abbiamo quindi visto che $\mathbb{C} \setminus H$ è connesso; a questo punto sappiamo già per il piccolo teorema sull'approssimazione polinomiale che f può essere approssimata uniformemente su H, ed in particolare su K, tramite polinomi. □

.

Teorema 4.0.21. ***Teorema sull'approssimazione razionale di Runge.*** *Sia A aperto di $\mathbb{C}$ tale che A abbia dei buchi e sia $P \subseteq \mathbb{C} \setminus A$ un insieme che interseca ogni buco di A.*
Allora ogni funzione $f \in O(A)$ può essere approssimata uniformemente sui compatti di A tramite funzioni in $\mathbb{C}_P[z]$

Dimostrazione. .
Sia $f \in O(A)$ e sia K compatto di A; per il lemma 4.0.19 esiste un compatto H contenuto in A e contenente K tale che ogni componente connessa limitata di $\mathbb{C} \setminus H$ contiene un buco di A.
Ovviamente ne segue che ogni componente connessa limitata di $\mathbb{C} \setminus H$ interseca l'insieme P.
Allora come conseguenza del teorema di Runge si ha che f può essere approssimata uniformemente su H, e quindi in particolare su K, da funzioni in $\mathbb{C}_P[z]$. □

Osservazione 7. Nelle ipotesi del teorema precedente in realtà basta che sia la chiusura di P ad intersecare ogni buco di A, infatti:
Sia Z una componente connessa limitata di $\mathbb{C} \setminus H$ e sia $w \in Z \cap \overline{P}$; poichè Z è aperto in $\mathbb{C}$ esiste $\epsilon > 0$ tale che $B(w, \epsilon) \subseteq Z$; inoltre poichè $w \in \overline{P}$ sappiamo che esiste una successione w_n in P tale che $w_n \to w$; in particolare esiste $w_{\overline{n}} \in P \cap B(w, \epsilon) \subseteq P \cap Z$.
In conclusione abbiamo visto che se la chiusura di P interseca ogni componente connessa limitata di $\mathbb{C} \setminus H$ allora lo stesso fa l'insieme P.

Concludiamo il capitolo con la seguente proposizione:

Proposizione 4.0.22. *Sia A aperto di $\mathbb{C}$, allora esiste sempre un insieme P al più numerabile tale che ogni funzione $f \in O(A)$ può essere approssimata uniformemente sui compatti di A tramite funzioni in $\mathbb{C}_P[z]$*

Dimostrazione. .
Se l'insieme A non ha buchi per il teorema 4.0.20 basta prendere $P = \emptyset$.
Se invece A ha buchi vediamo per prima cosa che esiste sempre un insieme che interseca tutti i buchi di A, questo insieme è il suo bordo ∂A.
Sia infatti Z un buco di A, ovvero una componente connessa limitata di $\mathbb{C} \setminus A$, e siano $a \in Z$ e $b \in A$; sia poi σ il segmento di $\mathbb{C}$ che congiunge a con b. Se $a \in \partial A$, non c'è nulla da dimostrare; supponiamo allora $a \notin \partial A$, ovvero $a \in \mathbb{C} \setminus \overline{A}$.
Mostriamo che deve essere $|\sigma| \cap \partial A \neq \emptyset$. L'insieme $|\sigma| \cap A$ non è vuoto perchè contiene il punto b, inoltre è aperto in $|\sigma|$ poichè A è aperto; l'insieme

$|\sigma| \cap \mathbb{C} \setminus \overline{A}$ non è vuoto poichè contiene a, inoltre è aperto in $|\sigma|$ poichè $\mathbb{C} \setminus \overline{A}$ è aperto. Quindi poichè $\mathbb{C} = A \cup \left(\mathbb{C} \setminus \overline{A}\right) \cup \partial A$, se fosse $|\sigma| \cap \partial A = \emptyset$ si avrebbe che $|\sigma| = (|\sigma| \cap A) \cup \left(|\sigma| \cap \mathbb{C} \setminus \overline{A}\right)$, ovvero $|\sigma|$ si scriverebbe come unione di due aperti non vuoti disgiunti ma questo non può avvenire poichè $|\sigma|$ è connesso.
Quindi esiste $c \in |\sigma|$ tale che $c \in \partial A$.
Se esistessero più punti appartenenti a $|\sigma \cap \partial A$ indichiamo con c il primo in modo che il tratto di segmento σ che congiunge a con c sia tutto contenuto in $\mathbb{C} \setminus A$. A questo punto la restrizione del segmento $|\sigma|$ da a a c è un insieme connesso e non disgiunto da Z, quindi deve essere contenuto in Z, da cui segue che in particolare $c \in Z \cap \partial A$.
Per concludere basta osservare che poichè $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ è un insieme numerabile e denso in $\mathbb{C}$, allora in particolare per ∂A, esiste un insieme numerabile che chiameremo P la cui chiusura è ∂A e di conseguenza si può applicare il teorema 4.0.21 ed ottenere la tesi.

$\square$

Capitolo 5

Coppie di Runge

Il filo conduttore del capitolo sarà cercare di capire quando due insiemi aperti A e D sono tali che ogni funzione olomorfa su A può essere approssimata uniformemente sui compatti di A da funzioni olomorfe su D, dove D contiene A.
Se questo succede, come avevamo già visto nell'introduzione, si dice che A e D formano una **coppia di Runge.**

Esempio 5.1. .
Il disco unitario centrato nell'origine D e $\mathbb{C}$ formano una coppia di Runge.
Infatti poichè ogni compatto di D è contenuto in un opportuno disco chiuso contenuto in D si ha che ogni funzione $f \in O(D)$ per il piccolo teorema di Runge può essere approssimata uniformemente da polinomi, e quindi da funzioni olomorfe su $\mathbb{C}$, indipendentemente dalla scelta del compatto.

Esempio 5.2. .
Sia $D^* = \{z \in \mathbb{C} / \, 0 < |z| < 1\}$, ovvero il disco unitario privato dell'origine; allora D^* e $\mathbb{C}$ non sono una coppia di Runge.
Infatti la funzione $f = \frac{1}{z}$ è olomorfa su D^*, mentre l'insieme
$K = \{z \in \mathbb{C} / \, |z| = r\}$, con $0 < r < 1$, è un compatto di D^*, ma f non può essere approssimata uniformemente su K da nessuna funzione olomorfa su $\mathbb{C}$.
Questo poichè la forma differenziale associata ad una funzione intera è esatta su $\mathbb{C}$, essendo localmente esatta su un semplicemente connesso; a questo punto basta ragionare come visto nell'introduzione per vedere che una qualsiasi funzione olomorfa su $\mathbb{C}$ non può approssimare uniformemente su un cerchio la funzione $\frac{1}{z}$.

Daremo ora una caratterizzazione topologica delle coppie di Runge.
Per fare questo avremo però bisogno del seguente lemma e del teorema di

Sura-Bura.

Lemma 5.0.23. *Siano A e D due insiemi aperti di $\mathbb{C}$ tali che $A \subseteq D$; allora per ogni compatto K aperto in $D \setminus A$, esiste un aperto V contenente K, la cui chiusura è un insieme compatto contenuto in D e tale che $\partial V \subseteq A$*

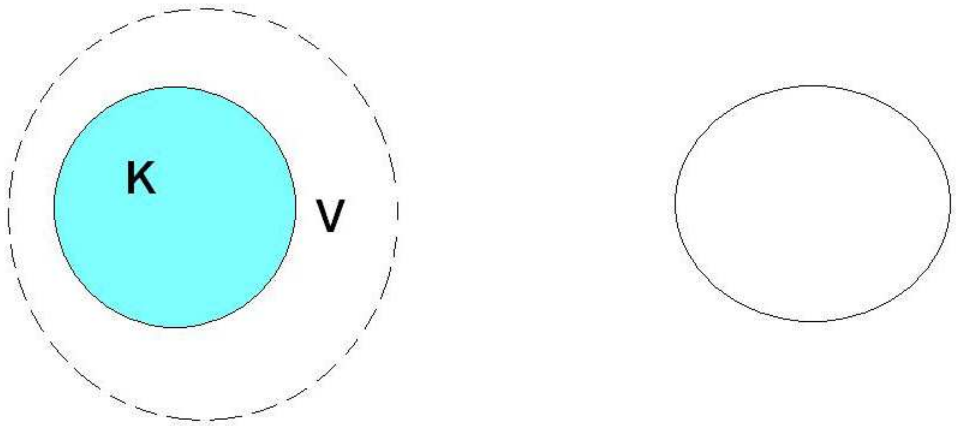


Figura 5.1: Nel caso in cui $D = \mathbb{C}$, A è tutto $\mathbb{C}$ tranne due dischi chiusi disgiunti e K è uno dei due dischi è facile trovare V con le caratteristiche richieste

Dimostrazione. .
Poniamo $B = (D \setminus A) \setminus K$ in modo che si abbia $D \setminus A = K \cup B$ con K e B disgiunti e B chiuso in $D \setminus A$ in quanto K è aperto in $D \setminus A$.
Ora poichè $D \setminus A$ è chiuso in D si ha che anche B è chiuso in D. Di conseguenza $D \setminus B$ è aperto in D è quindi in $\mathbb{C}$.
Così l'insieme $D \setminus B$ è un aperto contenente K che è un insieme compatto.
Possiamo quindi ricoprire K con un numero finito di dischi tali che la loro

chiusura sia ancora contenuta in $D \setminus B$.
Sia allora V l'unione di questi dischi e mostriamo che V possiede le proprietà richieste. Certamente V è aperto e contiene K; inoltre la chiusura di V è per definizione un insieme chiuso, limitato e contenuto in $D \setminus B$. In particolare la chiusura di V è un compatto contenuto in D.
Infine si ha che poichè $\overline{V} \cap B = \emptyset$, in particolare $\partial V \cap B = \emptyset$. Ma poichè $K \subseteq V$ anche $\partial V \cap K = \emptyset$ perciò $\partial V \cap D \setminus A = \emptyset$. Ma $\partial V \subseteq D$ quindi deve essere $\partial V \subseteq A$

□

Teorema 5.0.24. ***Teorema di Sura-Bura.***
Sia X uno spazio topologico di Hausdorff e localmente compatto, allora ogni componente connessa compatta A di X ha una base di intorni costituita da insiemi compatti che sono aperti in X

Dimostrazione. .
Mostriamo prima il teorema nel caso particolare in cui X sia compatto.
Sia A una componente connessa compatta di X, indichiamo con $\mathbf{H}$ la famiglia di tutti gli insiemi compatti F aperti in X e contenenti A.
Osserviamo che in particolare $X \in \mathbf{H}$. Indichiamo con B l'intersezione di tutti gli insiemi $F \in \mathbf{H}$; allora B è compatto e contiene A.
Per dimostrare il teorema ci basta allora mostrare che $A = B$ e che ogni insieme aperto di X che contiene B contiene anche un elemento di $\mathbf{H}$.
Sia allora U un aperto di X contenente B, certamente si ha che

$$(X \setminus U) \cap \left(\bigcap_{F \in \mathbf{H}} F \right) = \emptyset$$

Ora, poichè X è compatto e U aperto, $X \setminus U$ è ancora compatto e quindi esistono $F_1, ..., F_p \in \mathbf{H}$ tali che

$$(X \setminus U) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{p} F_j \right) = \emptyset$$

In conclusione si ha che $\bigcap_{j=1}^{p} F_j \in \mathbf{H}$ ed è contenuta in U.
Mostriamo infine che $A = B$. Poichè A è una componente connessa e B contiene A basterà mostrare che B è connesso.
Sia allora $B = B_1 \cup B_2$ con B_1 e B_2 chiusi di X disgiunti; mostriamo che uno dei due insiemi deve essere vuoto.
Poichè $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)$ e A è connesso deve essere $A = (A \cap B_1)$ oppure $A = (A \cap B_2)$. Supponiamo che si verifichi la prima eventualità e

quindi $A \subseteq B_1$. Ora osserviamo che per definizione sia B_1 che B_2 sono insiemi compatti e quindi, essendo disgiunti ed essendo lo spazio di Hausdorff, esistono due insiemi V_1 e V_2 aperti disgiunti di X tali che $B_1 \subseteq V_1$ e $B_2 \subseteq V_2$. Ora certamente $B \subseteq (V_1 \cup V_2)$, quindi per quanto visto sopra esiste un insieme $F \in \mathbf{H}$ tale che $B \subseteq F \subseteq (V_1 \cup V_2)$.
Vale allora che $F \cap (X \setminus V_2) = F \cap V_1$, e indichiamo tale insieme con W. Poichè sia F che $X \setminus V_2$ sono insiemi compatti si ha che W è compatto;
inoltre poichè sia F che V_1 sono aperti di X si ha che anche W è un aperto di X; infine poichè $A \subseteq B \subseteq F$ e $A \subseteq B_1 \subseteq V_1$ si ha che $A \subseteq W$. Quindi $W \in \mathbf{H}$ e di conseguenza $B \subseteq W \subseteq V_1$.
Da ciò, e dal fatto che V_1 e V_2 sono disgiunti, ne segue che $B \cap V_2 = \emptyset$ e quindi in particolare $B_2 = \emptyset$. In conclusione deve essere $A = B$ e da ciò segue l'asserto.

Mostriamo ora il teorema nel caso generale.
Sia U un aperto di X contenente A; poichè X è localmente compatto e A è compatto esiste un insieme V aperto in X, contenente A e la cui chiusura è un compatto contenuto in U.
Inoltre certamente A è anche una componente connessa di $\overline{V}$. Allora, poichè $\overline{V}$ è uno spazio topologico compatto di cui A ne è una componente connessa compatta e poichè V è un aperto di $\overline{V}$ contenente A, per quanto già dimostrato esiste un insieme B compatto e aperto in $\overline{V}$ tale che $A \subseteq B \subseteq V$. Così poichè B è aperto in $\overline{V}$, è aperto anche in V e di conseguenza è aperto in X. In conclusione B è un aperto di X, compatto e tale che $A \subseteq B \subseteq U$.

$\square$

Corollario 5.0.25. *Uno spazio topologico X di Hausdorff e localmente compatto possiede delle componenti connesse compatte se e solo se esistono insiemi non vuoti compatti e aperti in X*

Dimostrazione. .
Supponiamo che esista Z componente connessa compatta di X, allora per il teorema di Sura-Bura Z possiede una base di intorni costituita da insiemi compatti e aperti in X. In particolare quindi esiste almeno un insieme compatto e aperto di X che contiene Z e quindi è diverso dal vuoto.
Viceversa supponiamo che esista un insieme A non vuoto che è compatto e aperto in X. Essendo compatto, A è chiuso in X poichè quest'ultimo è uno spazio topologico di Hausdorff. Allora A è un insieme che è sia aperto che chiuso in X e quindi deve essere unione di componenti connesse di X. Sia Z una di queste componenti connesse di X; si ha allora che Z è un insieme

chiuso in X e quindi chiuso in A essendoci contenuto, inoltre A che è compatto; da ciò segue che anche Z è un insieme compatto e quindi Z è una componente connessa compatta di X □

Teorema 5.0.26. ***Caratterizzazione topologica delle coppie di Runge.*** *Siano A e D due aperti di $\mathbb{C}$ con $A \subseteq D$, allora A e D formano una coppia di Runge se e solo se nello spazio $D \setminus A$ non ci sono componenti connesse compatte.*

Dimostreremo questo teorema in un caso ancor più generale, vale infatti il seguente teorema:

Teorema 5.0.27. *Siano A e D due aperti di $\mathbb{C}$ con $A \subseteq D$, le seguenti affermazioni sono equiva-lenti:*

1. *A, D sono una coppia di Runge*
2. *Nello spazio $D \setminus A$ non ci sono insiemi non vuoti compatti e aperti*
3. *Nello spazio $D \setminus A$ non ci sono componenti connesse compatte*
4. *Ogni funzione $f \in O(A)$ può essere approssimata uniformemente sui compatti di A da funzioni razionali senza poli in D*

Dimostrazione. .
1) $\Rightarrow$ 2) Sia K un sottinsieme di $D \setminus A$ compatto e aperto, vogliamo mostrare che $K = \emptyset$. Per il lemma 5.0.23 sappiamo che esiste un insieme aperto V contenente K, la cui chiusura è un insieme compatto contenuto in D e tale che $\partial V \subseteq A$.
Supponiamo ora per assurdo che esista un punto $k \in K$; allora la funzione $(z-k)^{-1} \in O(A)$; a questo punto, poichè ∂V è un insieme compatto contenuto in A sappiamo che esiste una successione di funzioni $g_n \in O(D)$ tali che:

$$\lim_{n\to\infty} \left|(z-k)^{-1} - g_n(z)\right|_{\partial V} = 0$$

Da questo segue che:

$$\lim_{n\to\infty} \left|1 - (z-k)\, g_n(z)\right|_{\partial V} = 0$$

Ora, poichè $\overline{V}$ è un insieme limitato, per il principio del massimo si ha che:

$$\lim_{n\to\infty} \left|1 - (z-k)\, g_n(z)\right|_{\overline{V}} = 0$$

Ma ciò è impossibile essendo $k \in K \subseteq V$. Così deve essere $K = \emptyset$

2) $\Rightarrow$ 3) Direttamente dal corollario 5.0.25

3) $\Rightarrow$ 4) Osserviamo innanzitutto che se l'insieme A ha dei buchi allora l'insieme $\mathbb{C} \setminus D$ interseca ogni buco di A. Infatti se esistesse Z componente connessa e limitata di $\mathbb{C} \setminus A$ disgiunta da $\mathbb{C} \setminus D$ si avrebbe che Z è un insieme compatto e $Z \subseteq D \setminus A$. Di conseguenza, poichè $D \setminus A \subseteq \mathbb{C} \setminus A$, si avrebbe che Z è una componente connessa compatta di $D \setminus A$ contrariamente a quanto avevamo supposto.
Così $\mathbb{C} \setminus D$ è un insieme contenuto in $\mathbb{C} \setminus A$ e tale che interseca tutti i buchi di A, allora dal teorema 4.0.21 con $P = \mathbb{C} \setminus D$ segue l'asserto.
Se invece l'insieme A non ha buchi per il teorema 4.0.20 ogni funzione $f \in O(A)$ può essere approssimata uniformemente sui compatti di A tramite polinomi e quindi in particolare tramite funzioni razionali senza poli in D

4) $\Rightarrow$ 1) Ovvia poichè le funzioni razionali senza poli in D sono funzioni olomorfe su D

$\square$

Nel caso particolare in cui un aperto A formi con $\mathbb{C}$ una coppia di Runge, ovvero A è una regione di Runge, vale il seguente teorema come caso particolare di quello precedente.

Teorema 5.0.28. ***Caratterizzazione topologica delle regioni di Runge.*** *Le seguenti affermazioni riguardo a un aperto $A \subseteq \mathbb{C}$ sono equivalenti:*

1. *A è una regione di Runge*
2. *Non ci sono insiemi aperti e compatti $\neq \emptyset$ nello spazio $\mathbb{C} \setminus A$*
3. *A non ha buchi*

Dimostrazione. .
1) $\Rightarrow$ 2) è l'implicazione 1) $\Rightarrow$ 2) del teorema 5.0.27 con $D = \mathbb{C}$

2) $\Rightarrow$ 3) è l'implicazione 2) $\Rightarrow$ 3) del teorema 5.0.27 con $D = \mathbb{C}$, ricordando che i buchi di A sono sempre componenti connesse compatte di $\mathbb{C} \setminus A$

3) $\Rightarrow$ 1) è l'implicazione 3) $\Rightarrow$ 1) del teorema 5.0.27 con $D = \mathbb{C}$ $\square$

Capitolo 6

Applicazioni dei teoremi di Runge

In questo capitolo mostreremo varie applicazioni e utilizzi che sono stati fatti dei teoremi di Runge e di altri teoremi visti nei precedenti capitoli. Partiamo dalla seguenti semplici conseguenze del piccolo teorema di Runge.

Proposizione 6.0.29. *Sia $\mathbb{E}$ il disco unitario di $\mathbb{C}$ centrato nell'origine, e sia K un compatto contenuto strettamente in $\partial\mathbb{E}$; allora esiste un polinomio P tale che $P(0) = 1$ e $|P|_K < 1$*

Dimostrazione. .
Poichè $K \neq \partial\mathbb{E}$, allora $\mathbb{C} \setminus K$ è connesso; infatti sappiamo che sia $\mathbb{E}$ che $\mathbb{C} \setminus \mathbb{E}$ sono connessi per archi ed inoltre possiamo scegliere un segmento non passante per K che collega il centro del disco con un punto esterno a questo; così si ha che $\mathbb{C} \setminus K$ è connesso per archi e quindi connesso.
Sappiamo così che per il piccolo teorema di Runge esiste un polinomio $\widetilde{P}$ tale che $\left|\widetilde{P} + \frac{1}{z}\right|_K < 1$ in quanto la funzione $\frac{1}{z}$ è olomorfa su K.
Così ponendo $P = 1 + z\widetilde{P}$ si ottiene un polinomio tale che $P(0) = 1$ e $|P|_K < 1$

□

Osserviamo inoltre che l'ipotesi che K sia diverso da $\partial\mathbb{E}$ è fondamentale in quanto ogni polinomio non costante tale che $P(0) = 1$ deve assumere sul bordo alcuni valori in modulo strettamente maggiori di 1 per il principio del massimo in aperti limitati.

Proposizione 6.0.30. *Sia $\mathbb{E}$ il disco unitario di $\mathbb{C}$ centrato nell'origine, e sia K un compatto contenuto strettamente in $\partial\mathbb{E}$; allora esistono un intorno aperto U di K e una funzione $Q(z) = b_0 + \frac{b_1}{z} + ... + \frac{b_{k-1}}{z^{k-1}} + \frac{1}{z^k}$, con $k \geq 1$, tale che $|Q|_U < 1$*

Dimostrazione. .
Per quanto visto nella proposizione precedente sappiamo che esiste un polinomio $P(z) = 1 + a_1 z + ... + a_k z^k$ tale che $|P|_K < 1$.
Poniamo allora $Q(z) = P(z)/z^k$, così su K, essendo $|z| \leq 1$, continua a valere $|Q|_K < 1$; inoltre per continuità esiste un intorno aperto U di K in cui continua a valere $|Q|_U < 1$ □

Proposizione 6.0.31. *Siano $A_1, ..., A_k, B_1, ..., B_l$ insiemi compatti di $\mathbb{C}$ e a due a due disgiunti; supponiamo inoltre che $\mathbb{C} \setminus (A_1 \cup ... \cup B_l)$ sia connesso e siano $u_1, ..., u_k, v_1, ..., v_l$ funzioni olomorfe su $\mathbb{C}$.*
Allora per ogni due numeri reali positivi ϵ e M esiste un polinomio p tale che $|\, u_j + p \,|_{A_j} \leq \epsilon\,, \qquad 1 \leq j \leq k \qquad$ *e*

$\min \{\, |\, v_i(z) + p(z) \,| \quad / \quad z \in B_i \,\} \geq M\,, \qquad 1 \leq i \leq l$

Dimostrazione. .
Sia $K := A_1 \cup ... \cup B_l$. Per ipotesi $\mathbb{C} \setminus K$ è connesso ed inoltre essendo gli insiemi chiusi e a due a due disgiunti, la funzione h definita come u_j sugli A_j e come $v_i - M - \epsilon$ sui B_i è olomorfa su K.
Così per il piccolo teorema di Runge esiste un polinomio p tale che
$|h + p\,|_K \leq \epsilon$. In particolare per $1 \leq j \leq k$ si ha $|u_j + p\,|_{A_j} \leq \epsilon$.
Inoltre, poichè $v_i + p = M + \epsilon + h + p$ su B_i , si ha che per ogni $z \in B_i$ con $1 \leq i \leq l$ vale:

$$|v_i(z) + p(z)\,| \geq M + \epsilon - |h(z) + p(z)\,| \geq M$$

□

Sappiamo che se una successione di funzioni olomorfe su un aperto A converge uniformemente sui compatti di A ad una certa funzione f allora anche f è una funzione olomorfa su A.
Mostreremo ora che l'ipotesi che la convergenza sia uniforme è fondamentale; infatti utilizzando ancora il piccolo teorema di Runge troveremo una successione di polinomi, e quindi di funzioni olomorfe in $\mathbb{C}$, che converge puntualmente in $\mathbb{C}$ ad una funzione non continua e quindi neanche olomorfa. Più precisamente vale il seguente teorema:

Teorema 6.0.32. .
Sia $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geq 0\}$. Esiste una successione di polinomi p_n con le seguenti proprietà:

$$1) \qquad \lim_{n\to\infty} p_n(0) = 1\,, \quad \lim_{n\to\infty} p_n(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$2) \qquad \lim_{n\to\infty} p_n^{(k)}(z) = 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C} \quad e \quad \forall k \geq 1$$

3) *ogni successione* $p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, ..., p_n^{(k)}, ...$ *con* $k \in \mathbb{N}$, *converge uniformemente sui compatti di* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$, *ma nessuna converge uniformemente sui compatti di un qualunque intorno di un qualsiasi punto di* $\mathbb{R}^+$

Per la dimostrazione del teorema risulta necessario il seguente lemma:

Lemma 6.0.33. *Sia* K *un compatto contenuto in* A *aperto di* $\mathbb{C}$, *per ogni intero positivo* n *esiste una costante* C_n *dipendente solo da* n, K *e* A *tale che:*

$$\sup_K \left|f^{(n)}\right| \leq C_n \sup_A |f|$$

Dimostrazione. .
Poniamo

$$d = \frac{1}{2} \min_{z \in K} \{dist(z, \partial A)\}$$

Poichè K è un compatto contenuto in A e la funzione distanza è continua certamente si ha $d > 0$. Poniamo $C_n = \frac{n!}{d^n}$, allora fissato arbitrariamente $s \in K$ si ha che $\overline{B(s,d)} \subseteq A$ così vale:

$$f^{(n)}(s) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B(s,d)} \frac{f(z)}{(z-s)^{n+1}}\, dz$$

Ora poichè $|z - s| = d$ per $z \in \partial B(s,d)$ si ha:

$$|f^{(n)}(s)| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{2\pi d}{d^{n+1}} \max_{|z-s=d|} |f(z)| \leq C_n \sup_A |f|$$

Essendo s arbitrario in K ne segue la tesi $\square$

Dimostrazione. (teorema 6.0.32).
Sia $B_n(0)$ il disco di $\mathbb{C}$ centrato nell'origine e di raggio n, con $n \in \mathbb{N}$. Poniamo $I_n = \left\{ z \in \overline{B_n(0)} \quad tali\, che \quad dist(z, \mathbb{R}^+) \geq \frac{1}{n} \right\}$ e $K_n = 0 \cup \left[\frac{1}{n}, n\right] \cup I_n$.
Si ha che l'insieme K_n è compatto e $\mathbb{C} \setminus K_n$ è connesso per ogni $n \in \mathbb{N}$.

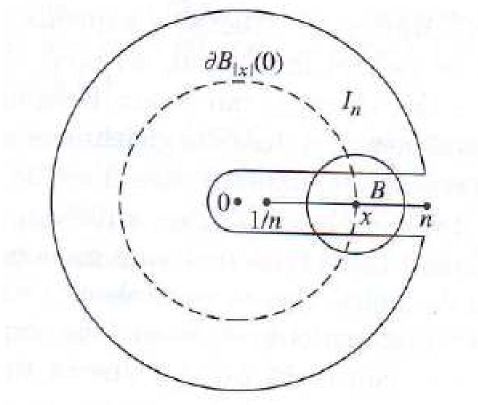


Figura 6.1

Costruiamo ora dei rettangoli compatti R_n e S_n rispettivamente attorno all'origine e all'intervallo $\left[\frac{1}{n}\,,\,n\right]$ in modo tale che R_n, S_n e I_{n+1} siano a due a due disgiunti. Definiamo il seguente insieme compatto $L_n := R_n \cup S_n \cup I_{n+1}$; L_n è allora un intorno di K_n tale che $K_n \subset \mathring{L}_n$. L'insieme $\mathbb{C} \setminus L_n$ è connesso.

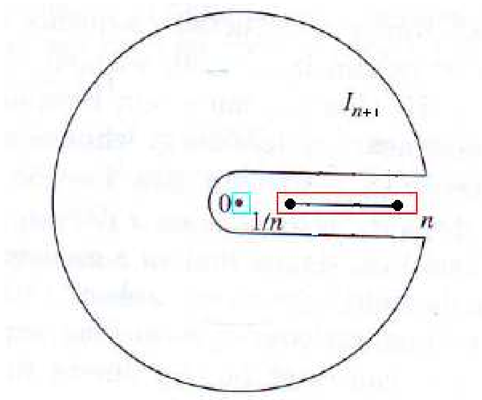


Figura 6.2: R_n è il rettangolo azzurro e S_n è quello rosso

Possiamo quindi definire la seguente funzione olomorfa su L_n:
$g_n(z) := 0 \quad$ per $z \in L_n \setminus R_n \qquad$ e $\qquad g_n(z) := 1 \quad$ per $z \in R_n$.
Così per il piccolo teorema di Runge, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un polinomio p_n tale che $|p_n - g_n|_{L_n} \leq \frac{1}{n}$.
Ora poichè K_n è un compatto contenuto in $\mathring{L}_n$, per il lemma precedente si

ha che esiste una costante C_n, dipendente solamente da n, K_n e L_n tale che:

$$\sup_{K_n} \left| p_n^{(k)} - g_n^{(k)} \right| \leq C_n \sup_{\mathring{L}_n} |p_n - g_n|$$

Inoltre, poichè $g_n^{(k)} = 0$ su $\mathring{L}_n$, possiamo scegliere i polinomi p_n in modo che valga anche $\left| p_n^{(k)} \right|_{K_n} \leq \frac{1}{n} \qquad per \quad k = 1, ..., n\,; \quad n \in \mathbb{N}.$

Così, poichè $\bigcup K_n = \mathbb{C}$, si ottengono le tesi 1) e 2).

Osserviamo ora che per costruzione, ogni successione $p_n^{(k)}$ converge uniformemente a zero sui compatti di $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, in quanto ogni compatto di tale insieme è contenuto nei K_n da un certo n in poi.

La successione di polinomi p_n invece, non può convergere uniformemementе in nessun disco compatto centrato nell'origine in quanto converge a una funzione discontinua nell'origine.

Inoltre tale successione non può convergere uniformemente in nessun disco compatto centrato in un punto $x > 0$. Infatti se accadesse ciò, la successione sarebbe uniformemente convergente sul cerchio centrato nell'origine e di raggio x (vedi figura 6.1). Allora per il principio del massimo la successione sarebbe uniformemente convergente su tutto il disco centrato nell'origine e di raggio x, ma sappiamo che ciò non è possibile.

Abbiamo quindi visto che la successione p_n non può convergere uniformemente sui compatti di un qualunque intorno di un qualsiasi punto di $\mathbb{R}^+$.

Per concludere la dimostrazione basta osservare che da sopra ne segue che anche ogni successione $p_n^{(k)}$ non può convergere uniformemente sui compatti di un qualunque intorno di un qualsiasi punto di $\mathbb{R}^+$. Questo poichè se f_n' è una successione di funzioni olomorfe che converge uniformemente su un disco compatto di centro x_0 ad una funzione f' e f_n è una successione di primitive puntualmente convergente alla funzione f, allora la successione f_n converge anche uniformemente sul disco compatto ad f. Infatti certamente vale:

$$f_n(z) = \int_{[x_0\,,\,z]} f_n'(s)\, ds \; + f_n(x_0)$$

Così sul disco compatto f_n converge uniformemente alla funzione

$$\int_{[x_0\,,\,z]} f'(s)\, ds \; + f(x_0) = f(z)$$

.

$\square$

Vogliamo infine applicare i teoremi di Runge per dare una dimostrazione abbastanza semplice (tratta da [Rudin]) del teorema di Mittag-Leffler .

Teorema 6.0.34. ***Teorema di Mittag-Leffler.***
Sia A aperto di $\mathbb{C}$ e sia $T \subseteq A$ un insieme senza punti d'accumulazione. Supponiamo che ad ogni punto $t \in T$ sia associato un intero positivo n_t e una funzione razionale

$$R_t(z) = \sum_{j=1}^{n_t} a_{t,j}\,(z-t)^{-j}$$

Allora esiste una funzione f meromorfa su A, i cui poli sono tutti e solamente i punti di T e tale che in ogni punto $t \in T$ la sua parte principale è R_t

Dimostrazione. .
Prima di tutto costruiamo una successione di insiemi compatti di A
$K_1 \subseteq K_2 \subseteq ...$ tali che ogni compatto di A sia contenuto in un opportuno K_m.
Per il lemma 4.0.17 possiamo supporre che ogni componente connessa limitata di $\mathbb{C} \setminus K_n$ intersechi l'insieme $\mathbb{C} \setminus A$.
Poniamo $T_1 = T \cap K_1$ e per ogni $n \geq 2$ poniamo $T_n = T \cap (K_n \setminus K_{n-1})$.
Ora poichè i T_n sono sottoinsiemi dei compatti K_n senza punti di accumulazione si ha che essi devono essere insiemi finiti. Definiamo

$$Q_n(z) \; = \sum_{t \in T_n} R_t(z) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Poichè i T_n sono tutti insiemi finiti si ha che ogni Q_n è una funzione razionale e per $n \geq 2$ si ha che i suoi poli stanno nell'insieme $K_n \setminus K_{n-1}$. In particolare la funzione Q_n è olomorfa su K_{n-1}.
Quindi per il corollario 2.0.6 esiste una funzione razionale S_n olomorfa su A tale che: $\quad |S_n - Q_n|_{K_{n-1}} < 2^{-n}$.
Definiamo allora su A la funzione f come segue e mostriamo che ha le proprietà richieste:

$$f(z) = Q_1(z) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(Q_n(z) - S_n(z)\right)$$

Fissato $N \in \mathbb{N}$ si ha:

$$f(z) = Q_1(z) + \sum_{n=2}^{N} \left(Q_n(z) - S_n(z)\right) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(Q_n(z) - S_n(z)\right)$$

Quindi sull'insieme K_N la serie è limitata per quanto visto prima e di conseguenza si ha che la serie converge uniformemente su K_N.
In particolare la seconda somma converge uniformemente ad una funzione olomorfa nell'interno di K_N. Inoltre poichè gli S_n hanno poli fuori da A la funzione:
$f-(Q_1+Q_2+...+Q_N)$ è olomorfa nell'interno di K_N. Così f ha precisamente le parti principali richieste nell'interno di K_N, e a causa dell'arbitrarietà di N ciò vale su tutto A.

$\square$

Appendice

Carl Runge (1856-1927)

Carl Runge nasce a Brema il 30 Agosto 1856 in una famiglia benestante, suo padre era un importante mercante. Concluse le scuole primarie, nel 1876 Runge si iscrive all'università di Monaco dove dopo una breve parentesi di studi classici si iscrive alla facoltà di fisica e matematica. Qui seguirà le lezioni assieme ad un compagno del calibro di Max Planck di cui diventerà amico e lo rimarrà per il resto della sua vita.
Nel 1877 Runge si trasferisce a studiare all'università di Berlino dove, dopo aver assistito alle lezioni di Karl Weierstrass, decide di dedicarsi alla matematica pura.
Nel 1880 presenta a Berlino la sua tesi di dottorato sulla geometria differenziale dopodichè rimasto a Berlino, inizia a collabore con Leopold Kronecker e lavora su un metodo per trovare numericamente la soluzione di equazioni algebriche le cui radici venivano espresse come serie infinite di funzioni razionali dei coefficienti dell'equazione.
All'inizio della sua carriera, Carl Runge, è molto restio a pubblicare i suoi lavori, ma poi conosciuto e diventato amico del matematico svedese Mittag-Leffler decide di pubblicare i suoi lavori in diversi articoli che apparirono nel 1885 sulla rivista dello stesso Mittag-Leffler: *Acta Mathematica.*
Nel 1886 Runge ottiene la cattedra di matematica presso l'università della tecnica di Hannover, dove rimarrà per ben diciotto anni.
Ad Hannover Runge si allontana dalla matematica pura e sposta i suoi studi sull'astrofisica e la spettroscopia, in particolare Runge inizia a studiare le lunghezze d'onda delle linee spettrali di vari elementi chimici. Durante questi anni di lavoro Runge pubblicherà molti lavori su questi argomenti ma nonostante questo per tutta la vita ha continuato a considerarsi un matematico.

Nel 1904 si trasferisce a Gottinga dove ottiene la cattedra di matematica applicata. Qui continua ad insegnare fino al 1925 anno in cui si ritira dall'insegnamtento.
Due anni dopo, il 3 Gennaio 1927, Carl Runge muore a Gottinga colpito da un' infarto.

Bibliografia

- [Remmert] Reinhold Remmert, *Classical topics in complex function theory,*
  Springer-Verlag, 1998.

- [Rudin] Walter Rudin, *Real and complex analysis,* McGraw-Hill, 1970.

- [Runge] Carl Runge, *Zur Theorie der analytischen functionen*
  «acta mathematica» , volume 6, numero 1, Institut Mittag-Leffler, 1885.

- J.J. O'Connor e E.F. Robertson, *Carl Runge Biography*
  sito internet: *http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Runge.html*