Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di laurea in Matematica

INVARIANZA RELATIVISTICA DELLE EQUAZIONI DI MAXWELL

Relatore:
Prof.ssa
Elisa Ercolessi

Presentato da:
Filippo Bianchini

Sessione unica
2015-2016

Indice

Introduzione

Sul finire del XIX secolo, la Fisica raggiunse un traguardo straordinario, riuscendo a spiegare tutti i fenomeni elettrici e magnetici attraverso una teoria unitaria e perfettamente coerente, espressa dalle *quattro equazioni di Maxwell*, cosiddette dal loro ideatore, il fisico matematico scozzese James Clerk Maxwell (1831-1879).
Esse permisero di dedurre, per via puramente teorica, che non esiste un campo elettrico separato dal campo magnetico, entrambi di natura vettoriale, ma che l'uno e l'altro sono manifestazioni di un'unica realtà fisica, il *campo elettromagnetico*.

Inoltre, esse predissero con sorprendente esattezza che tale campo elettromagnetico dovesse propagarsi nello spazio sotto forma di onde, nonostante nessun esperimento avesse rivelato una simile propagazione ondosa. La successiva scoperta delle onde elettromagnetiche da parte di *Heinrich Hertz* rappresentò il più alto trionfo della costruzione maxwelliana.

Se assieme all'equazione di Newton $\mathbf{f} = m\,\mathbf{a}$, a partire dalla quale venne dedotta tutta la teoria oggi nota come meccanica classica, anche le equazioni di Maxwell compongono una teoria fisica perfettamente compiuta e coerente, (la cosiddetta fisica classica), ci si deve aspettare che anch'esse risultino invarianti rispetto alle trasformazioni di Galileo, ma così non fu. Cambiando il sistema di riferimento adottato, le equazioni di Maxwell non cambiavano solo nella forma, non erano più valide!
Questa incongruenza indusse i fisici teorici alla ricerca di trasformazioni per cui le equazioni dell'elettromagnetismo risultassero invarianti e chi le trovò fu il fisico olandese Hendrik Lorentz. La modifica delle trasformazioni di Galileo formulata da Lorentz, portò ad una necessaria modifica della teoria classica della meccanica, dovendo tuttavia mantenere il principio di relatività galileiana, ovvero le equazioni della fisica devono rimanere le stesse in ogni sistema di riferimento.

Il grande merito della teoria della relatività di Einstein è stato quello di aver consentito, a partire dalle trasformazioni di Lorentz, l'estensione del principio di relatività galileiana a tutti i fenomeni, non solo quelli meccanici. Quest'estensione dei postulati fondamentali della fisica classica aprì la strada ai più arditi sviluppi della fisica moderna.

In questa tesi, volta a dimostrare l'invarianza relativistica delle equazioni di Maxwell, partiamo da un esempio, che mostra come la simultaneità sia un concetto relativo, non assoluto; giungiamo poi, partendo da alcune ipotesi e tramite alcuni passaggi algebrici, alle trasformazioni di Lorentz e grazie a queste ricaviamo il teorema di addizione relativistica delle velocità o di Einstein. Le trasformazioni di Lorentz e tale teorema ci permettono di vedere come varino al cambiare del sistema di riferimento, (riferimenti in moto relativo l'uno rispetto all'altro), quantità quali impulso, energia, massa e forza ed inoltre come si trasformino il campo elettrico $\mathbf{E}$ ed il campo magnetico $\mathbf{B}$ che introduciamo nell'ambito dell'elettromagnetismo all'inizio del secondo capitolo. Questi due campi sono legati indissolubilmente dalle equazioni di Maxwell, equazioni dalle quali, tramite alcuni passaggi matematici, si ricavano le equazioni delle onde elettromagnetiche. A questo punto introduciamo i potenziali del campo elettromagnetico utili a rendere compatta la notazione della covarianza relativistica dell'elettrodinamica, ultimo nonché centrale paragrafo della tesi.

Capitolo 1

Cinematica relativistica

1.1 La relatività della simultaneità

Nelle «*Conversazioni con Albert Einstein*», paragrafo tratto dal testo «*Physics*» di R. Resnick e D. Halliday, R. Shankland, storico e fisico statunitense, scrive: «Chiesi al Professor Einstein per quanto tempo aveva lavorato alla teoria della relatività ristretta prima del 1905. Egli mi disse di avere incominciato all'età di sedici anni e di averci lavorato per dieci anni; dapprima come studente quando, naturalmente, poteva dedicare a questo argomento solo parte del tempo, ma il problema lo accompagnò sempre. Egli abbandonò molti tentativi infruttuosi, finché alla fine: 'mi venne in mente che il concetto di tempo era discutibile!'» Che cosa metteva in dubbio Einstein riguardo il concetto di tempo? Era il postulato, spesso fatto inconsciamente e non meditato, che esistesse un tempo universale che fosse lo stesso per tutti gli osservatori. Infatti, nelle discussioni prerelativistiche, questa ipotesi era implicita data l'assenza di un'equazione di trasformazione del tempo nelle equazioni di Galileo ed è per rendere esplicito tale postulato che si include l'equazione $t = t'$ come quarta equazione nelle trasformazioni di Galileo. Cioè la medesima scala temporale applicata in tutti i sistemi di riferimento inerziali costituì una premessa fondamentale della meccanica Newtoniana.

Per costruire una scala universale dei tempi, bisogna riuscire a dare un significato, indipendente dal sistema di riferimento, ad affermazioni quali «Gli eventi A e B sono avvenuti nello stesso istante». Einstein fece notare che quando si dice che un treno arriva alle 7 precise ciò significa che il passaggio della lancetta dell'orologio dalle 7 e l'arrivo del treno presso l'orologio sono simultanei. Non si ha certamente una scala universale dei tempi se osservatori inerziali differenti non concordano sulla simultaneità di due eventi. Cerchiamo dapprima di costruire una scala dei tempi non ambigua in un singolo sistema di riferimento; poi possiamo costruire esattamente allo stesso modo scale dei tempi in tutti i riferimenti inerziali e confrontare quello che differenti osservatori hanno da dire sulla sequenza di due eventi A e B.

Si supponga che gli eventi avvengano in uno stesso luogo in un particolare sistema di riferimento. Noi possiamo avere in quel luogo un orologio che registra l'istante in cui avviene ciascun evento. Se la lettura è la stessa per ciascun evento, noi possiamo logicamente considerare i due eventi simultanei. Ma che cosa succede se i due eventi hanno luogo in posizioni differenti? Immaginiamo ora che ci sia un orologio nella posizione di ciascun evento — l'orologio in A è della stessa natura di quello in B, naturalmente — questi orologi possono registrare l'istante in cui accadono gli eventi ma, prima di potere confrontare le loro letture, dobbiamo essere sicuri che essi siano sincronizzati.

Alcuni «ovvi» metodi di sincronizzazione degli orologi risultano essere erronei. Per esempio, possiamo regolare i due orologi in modo che essi segnino lo stesso tempo *visti* dall'osservatore A. Ciò significa che ogni volta che A guarda l'orologio di B questo segna per lui lo stesso tempo del suo orologio. Il difetto di questo metodo è che se l'osservatore B usa lo stesso criterio (cioè che gli orologi sono sincronizzati se segnano sempre lo stesso tempo per *lui*), egli troverà che gli orologi *non* sono sincronizzati se A dice che lo *sono*. La ragione è che questo metodo trascura il fatto che ci vuole del tempo per la luce per andare da B ad A e viceversa. Sappiamo che se la distanza fra gli orologi è L, un osservatore vedrà l'altro orologio in ritardo di $2L/c$ quando l'altro osservatore ritiene che essi siano in sincronismo. Non possiamo certamente avere degli osservatori in uno stesso sistema di riferimento che non siano d'accordo sulla sincronizzazione o meno degli orologi, quindi dobbiamo respingere questo metodo.

Un apparente modo di uscire da questa difficoltà è semplicemente di regolare i due orologi in modo che segnino lo stesso tempo e poi muoverli verso le posizioni in cui avvengono gli eventi. (In linea di principio abbiamo bisogno di orologi in ogni punto del nostro sistema di riferimento per registrare l'istante in cui avvengono gli eventi, ma una volta che sappiamo come sincronizzare due orologi noi possiamo sincronizzare, uno ad uno, tutti gli orologi). La difficoltà in questo caso consiste nel fatto che non sappiamo a priori niente del tempo e perciò non possiamo assumere che il moto degli orologi (che possono presentare velocità, accelerazioni e percorsi differenti durante la sistemazione nelle loro posizioni) non influenzi le loro letture e la loro capacità di segnare il tempo. Anche secondo la meccanica classica, il moto può influenzare il ritmo a cui vanno gli orologi.

Quindi, la cosa più logica da fare è di mettere i nostri orologi in posizione e sincronizzarli per mezzo di segnali. Se avessimo un metodo di trasmettere segnali con velocità infinita, non ci sarebbero complicazioni. I segnali andrebbero dall'orologio A all'orologio B, all'orologio C, e così via, in un tempo nullo. Si potrebbe fare uso di un tale segnale per fare segnare a tutti gli orologi lo stesso tempo. Ma nessun segnale noto gode di questa proprietà. Tutti i segnali noti richiedono un tempo finito per percorrere una certa distanza, e il tempo aumenta con la distanza percorsa. Il migliore segnale da scegliere sarebbe un segnale la cui velocità dipenda dal minor numero di fattori possibile.

Ora dobbiamo vedere come si possono sincronizzare i nostri orologi tenendo conto del tempo finito di trasmissione del segnale.

Un metodo consiste nel mettere una sorgente luminosa esattamente nel punto di mezzo della retta congiungente A e B e informare ciascun osservatore di mettere il proprio orologio al tempo $t = 0$ quando gli arriva il segnale luminoso d'accensione. La luce impiegherà un tempo eguale per arrivare dal punto di mezzo ad A e a B, quindi questo procedimento sincronizza effettivamente gli orologi.

Ora che abbiamo un procedimento per sincronizzare gli orologi in un sistema di riferimento, possiamo giudicare l'ordine temporale degli eventi in quel riferimento. Il tempo di un evento è misurato dall'orologio la cui posizione coincide con quella dell'evento. Eventi che accadono in due luoghi diversi si devono chiamare *simultanei* quando gli orologi corrispondenti registrano per essi lo stesso tempo. Supponiamo che un osservatore inerziale trovi che due eventi separati sono simultanei. Questi stessi eventi saranno considerati simultanei da un osservatore o da un altro sistema inerziale che sia in movimento rispetto al primo con velocità v? (Si noti che ciascun osservatore usa un identico procedimento per sincronizzare gli orologi nel suo sistema di riferimento). Se ciò non succede, la simultaneità non è indipendente dal sistema di riferimento usato per descrivere gli eventi. Invece di essere assoluto il concetto di simultaneità sarebbe un concetto relativo. Infatti, vedremo che ciò è proprio vero in diretta contraddizione col postulato classico.

Per comprendere questo fatto, consideriamo un esempio. Ci siano due sistemi di riferimento S' e S in moto relativo l'uno rispetto all'altro.

Ciascun riferimento ha i suoi metri e i suoi orologi sincronizzati.
Gli osservatori notano che due fulmini colpiscono ciascuno di essi, lasciando segni permanenti nei riferimenti.[1] Supponiamo che in seguito, per mezzo di misure, ciascun osservatore inerziale scopra di essere stato esattamente equidistante dai segni lasciati nel suo sistema di riferimento. Nella Fig. 1.1(a), questi segni sono lasciati in A, B nel riferimento S e in A' e B' nel riferimento S', e gli osservatori sono in O e O'. Poiché ciascun osservatore sa che si trovava nel punto di mezzo dei segni lasciati da questi eventi, egli concluderà che essi furono simultanei se i segnali luminosi provenienti da essi arrivano simultaneamente al suo orologio (cfr. la definizione di simultaneità data in precedenza). Se, d'altra parte, un segnale arriva prima dell'altro, egli concluderà che un evento precedette l'altro. Poiché ciascun osservatore ha un sistema sincronizzato di orologi, egli può concludere che gli orologi posti nei segni segnavano lo stesso tempo quando i segni furono lasciati (caso simultaneo) o che essi segnavano tempi diversi (caso non simultaneo). In linea di principio esistono molte differenti possibilità per i risultati di queste misure.
Supponiamo, per esempio, che l'osservatore S trovi che i fulmini hanno colpito simultaneamente. Anche l'osservatore S' troverà questi eventi simultanei?
Nelle Fig. 1.1(b)-(d) noi consideriamo il punto di vista dell'osservatore S e vediamo il riferimento S' muoversi, per esempio verso destra. All'istante in cui è arrivato il fulmine in A e A', questi due punti coincidono, e all'istante in cui il fulmine arriva in B e B' anche

[1] Il punto essenziale è di avere sorgenti luminose che lascino dei segni permanenti. Andrebbero altrettanto bene, per esempio, dei candelotti di dinamite.

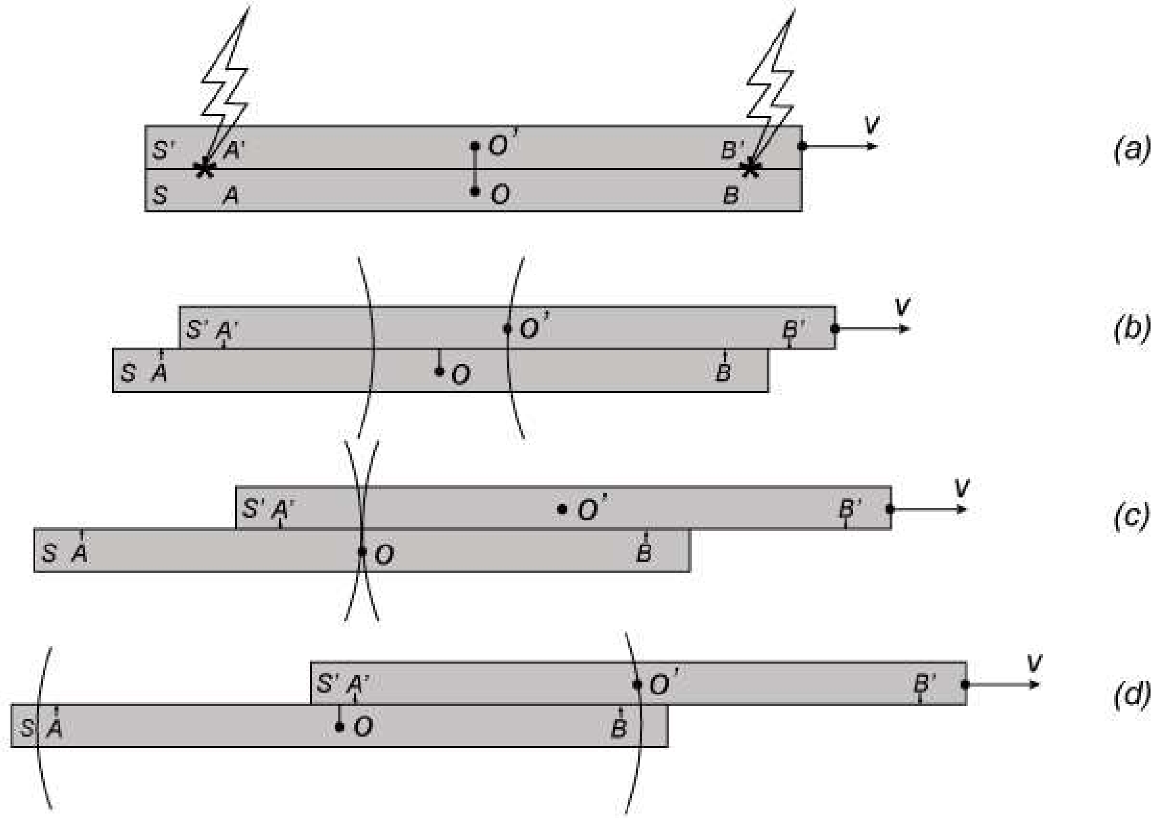


Figura 1.1

questi due punti coincidono. L'osservatore S ha trovato che questi due eventi avvengono allo stesso istante, quindi in quell'istante per lui anche O e O' devono coincidere. Tuttavia, *i segnali luminosi provenienti dagli eventi impiegano un tempo finito per arrivare in O e durante questo tempo O' si sposta verso destra* (Fig. 1.1(b)-(d)).

Quindi, il segnale proveniente dall'evento BB' arriva in O' (Fig. 1.1(b)) prima di arrivare in O (Fig. 1.1(c)), mentre il segnale proveniente dall'evento AA' arriva in O (Fig. 1.1(c)) prima di arrivare in O' (Fig. 1.1(d)). Coerentemente colla nostra ipotesi di partenza l'osservatore S trova che gli eventi sono simultanei (entrambi i segnali arrivano in O allo stesso istante). L'osservatore S', tuttavia, trova che l'evento BB' precede nel tempo l'evento AA'; per lui essi *non* sono simultanei. Perciò, due eventi separati che sono simultanei rispetto ad un sistema di riferimento non sono necessariamente simultanei rispetto ad un altro riferimento.

Ora avremmo potuto, allo stesso modo, supporre che i fulmini avessero colpito in modo che l'osservatore S' li consideri simultanei.

Quindi, *nessuno dei due* riferimenti è privilegiato e la situazione è perfettamente

simmetrica. La simultaneità è quindi proprio un concetto relativo, non assoluto.
Nessuno dei due osservatori può asserire in modo assoluto di essere in riposo. Invece, ciascun osservatore può correttamente dire solo che l'altro si muove rispetto a lui e che i segnali viaggiano con velocità finita c rispetto ad esso. Dovrebbe essere chiaro che se avessimo un segnale infinitamente veloce la simultaneità sarebbe un concetto assoluto in quanto i riferimenti non si sposterebbero affatto l'uno rispetto all'altro nel tempo (nullo) che il segnale impiegherebbe per raggiungere gli osservatori.

Alcune altre conclusioni derivano automaticamente dalla relatività della simultaneità. Misurare la lunghezza di un oggetto significa localizzare simultaneamente i suoi estremi. Poiché la simultaneità è un concetto relativo, anche le misure di lunghezza dipenderanno dal sistema di riferimento e saranno relative. Inoltre, si trova che il ritmo con cui battono gli orologi dipende dal sistema di riferimento. Ciò può essere illustrato nel modo seguente. Consideriamo due orologi, uno su un treno e uno sulla terra, e supponiamo che nel momento in cui passano uno vicino all'altro, (cioè nell'istante in cui coincidono) essi segnino lo stesso tempo (cioè le lancette degli orologi sono nelle stesse posizioni). Ora, se gli orologi continuano ad essere d'accordo, possiamo dire che essi vanno collo stesso ritmo. Ma, quando essi si trovano a grande distanza l'uno dall'altro, noi sappiamo dalla precedente discussione che le loro lancette non possono avere simultaneamente posizioni identiche sia misurate dall'osservatore sulla terra che da quello sul treno. Quindi, anche le misure degli intervalli di tempo sono relative, cioè dipendono dal sistema di riferimento degli osservatori.

Sulla base della relatività delle misure di lunghezza e di tempo è forse possibile spiegare il fatto sperimentale che osservatori che siano in moto relativo l'uno rispetto all'altro misurino la stessa velocità della luce c. Nei paragrafi successivi esamineremo più accuratamente queste questioni.

1.2 Derivazione delle equazioni di trasformazione di Lorentz

Abbiamo visto che le equazioni di trasformazione di Galileo devono essere sostituite da delle nuove che siano consistenti con l'esperienza. In questo paragrafo descriveremo queste nuove equazioni, usando i postulati della teoria della relatività ristretta, ovvero:
1) *Non esiste un sistema di riferimento privilegiato.*
2) *La velocità della luce è indipendente dal moto.*
3) *Spazio e tempo sono interdipendenti.*
4) *Riferimenti inerziali in moto relativo sono collegati dalle trasformazioni di Lorentz.*
Una discussione del primo postulato è stata fatta nel primo paragrafo mentre il secondo verrà argomentato nei paragrafi successivi. Qui mostreremo il quarto postulato dalle quali trasformazioni verrà anche esplicitata l'interdipendenza fra spazio e tempo.

Per mostrare poi che la teoria è consistente colla discussione del paragrafo precedente, descriveremo nuovamente tutte le caratteristiche particolari delle nuove equazioni di trasformazione.

Noi osserviamo un evento in un sistema di riferimento inerziale S e ne caratterizziamo la posizione e il tempo specificando le coordinate x, y, z, t dell'evento. In un secondo riferimento inerziale S' questo *stesso evento* è registrato colle coordinate spazio-temporali x', y', z', t'. Ora cerchiamo le relazioni funzionali $x' = x'\ (x, y, z, t)$, $y' = y'\ (x, y, z, t)$, $z' = z'\ (x, y, z, t)$, $t' = t'\ (x, y, z, t)$. Cioè, vogliamo le equazioni di trasformazione che legano le coordinate spazio-temporali di un evento rispetto ad un osservatore con le coordinate dello stesso evento rispetto all'altro osservatore.

Supponiamo che lo spazio e il tempo siano omogenei e se poniamo $t = t'$ quando O e O' coincidono, allora abbiamo le equazioni lineari (nella forma più generale che esse possano prendere)

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t \\ t' &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t \end{aligned} \tag{1.1}$$

Qui, i coefficienti a_{ij} $(i, j = 1, ...4)$, sono delle costanti che dobbiamo determinare per ottenere le equazioni di trasformazione esatte. Si noti che non escludiamo la possibile dipendenza delle coordinate spaziali e temporali l'una dall'altra.

Per determinare questi sedici coefficienti facciamo uso dei postulati della relatività, cioè (1) il principio di relatività — non esiste alcun riferimento inerziale privilegiato, le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi inerziali — e (2) il principio della costanza della velocità della luce — la velocità della luce nel vuoto ha lo stesso valore c in tutti i sistemi inerziali.
Procediamo dapprima supponendo che l'asse x coincida continuamente con l'asse x'. Ciò impone che per $y = 0$, $z = 0$ (che caratterizzano punti sull'asse x) si abbia sempre che $y' = 0$, $z' = 0$ (che caratterizzano punti sull'asse x'), Quindi le formule di trasformazione per y e z devono essere del tipo

$$y' = a_{22}y + a_{23}z \qquad e \qquad z' = a_{32}y + a_{33}z$$

Cioè, i coefficienti a_{21}, a_{24}, a_{31} e a_{34} devono essere zero. Similmente, il piano x-y (che è caratterizzato da $z = 0$) si deve trasformare nel piano x'-y' (che è caratterizzato da $z' = 0$); e così, per i piani x-z e x'-z', $y = 0$ deve dare $y' = 0$. Ne segue che a_{23} e a_{32} sono zero e perciò

$$y' = a_{22}y \qquad e \qquad z' = a_{33}z$$

Questi coefficienti costanti, a_{22} e a_{33}, possono essere valutati usando il postulato di relatività. Illustriamo il procedimento per a_{22}. Supponiamo di avere un'asta posta lungo l'asse y che risulta di lunghezza unitaria rispetto a S. Secondo l'osservatore S', la lunghezza dell'asta sarà a_{22}, (cioè, $y' = a_{22} \times 1$). Ora, supponiamo che la stessa asta sia portata a riposo lungo l'asse y' del riferimento S'. L'osservatore accentato deve misurare per quest'asta, quando essa è in riposo nel suo riferimento, la stessa lunghezza (unitaria) misurata dall'osservatore non accentato quando l'asta è in riposo rispetto ad esso; altrimenti ci sarebbe un'asimmetria nei riferimenti. In questo caso tuttavia l'osservatore S troverebbe che la lunghezza dell'asta è $1/a_{22}$ [cioè $y = (1/a_{22})y' = (1/a_{22})\times 1$]. Ora, per la natura reciproca di queste misure di lunghezza, il primo postulato richiede che queste misure diano risultati identici, poiché altrimenti i riferimenti non sarebbero fisicamente equivalenti. Quindi si deve avere $a_{22} = 1/a_{22}$, ossia $a_{22} = 1$. Il medesimo ragionamento si può fare per determinare $a_{33} = 1$. Perciò le nostre due equazioni centrali di trasformazione diventano

$$y' = y \qquad e \qquad z' = z \tag{1.2}$$

Rimangono le equazioni di trasformazione per x' e t', cioè,

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t$$

e

$$t' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t$$

Consideriamo dapprima l'equazione per t'. Per ragioni di simmetria, supponiamo che t' non dipenda da y e z. Altrimenti, orologi disposti nel piano y-z simmetricamente rispetto all'asse x (quali quelli in $+y$,$-y$ o $+z$, $-z$), sembrerebbero in disaccordo osservati da S', il che sarebbe in contraddizione con l'isotropia dello spazio. Quindi $a_{42} = a_{43} = 0$. Per quanto riguarda l'equazione per x', sappiamo che un punto avente $x' = 0$ sembra muoversi nel verso positivo dell'asse delle x con velocità v, quindi l'affermazione $x' = 0$ deve essere identica a quella $x = vt$. Perciò, ci aspettiamo che $x' = a_{11}(x - vt)$ sia l'equazione di trasformazione corretta. (Cioè, $x = vt$ dà sempre $x' = 0$ in questa equazione). Quindi, $x' = a_{11}x - a_{11}vt = a_{11}x + a_{14}t$. Questa equazione dà $a_{14} = -va_{11}$, e le nostre quattro equazioni si sono ora ridotte alle

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= a_{41}x + a_{44}t. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Resta ora il problema di determinare i tre coefficienti a_{11}, a_{41} e a_{44}. Per fare ciò usiamo il principio della costanza della velocità della luce.
Supponiamo che al tempo $t = 0$ un'onda elettromagnetica sferica lasci l'origine di S, che coincide con l'origine di S' in quel momento. L'onda si propaga con velocità c in tutte le direzioni in ciascun riferimento inerziale. La sua propagazione è, allora, descritta dall'equazione di una sfera il cui raggio si espande nel tempo con velocità c sia nel sistema di coordinate accentato che in quello non accentato. Cioè

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \tag{1.4}$$

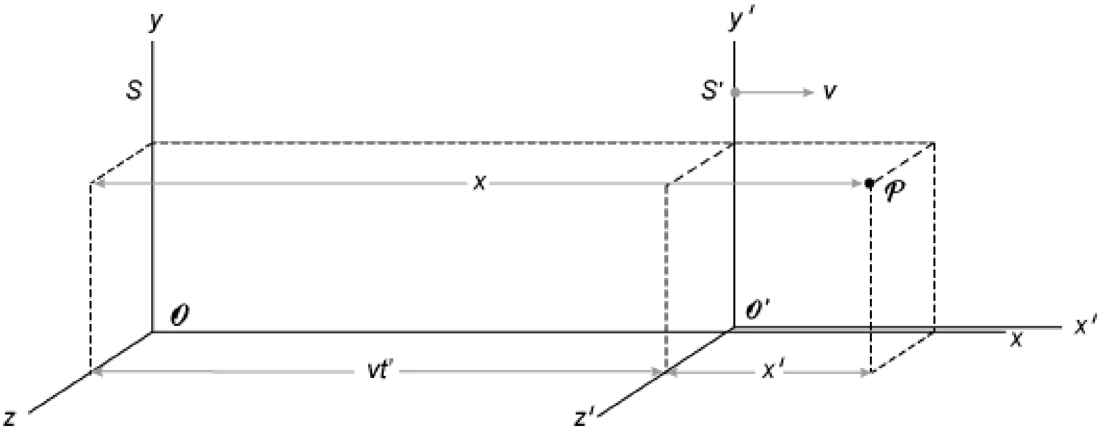


Figura 1.2

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2. \tag{1.5}$$

Se ora sostituiamo nell'Eq.(1.5) le equazioni di trasformazione (Eq.(1.3)), otteniamo una equazione che deve essere equivalente alla (1.4). Semplici passaggi algebrici mostrano che questo è possibile solo se i coefficienti valgono:

$$\begin{aligned} a_{44} &= 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \\ a_{11} &= 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \\ a_{41} &= -\frac{v}{c^2}/\sqrt{1 - v^2/c^2}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Sostituendo questi valori nelle Eq.(1.3), otteniamo, infine, le nuove equazioni di trasformazione che cercavamo,

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

le cosiddette [2] *equazioni di trasformazione di Lorentz.*

Prima di illustrare il significato di queste equazioni le dobbiamo sottoporre a due necessarie verifiche. In primo luogo, se scambiamo i due nostri sistemi di riferimento ossia — il che è lo stesso — consideriamo come coordinate spazio-temporali dell'evento quelle osservate in S' piuttosto che in S, la sola variazione permessa dal principio di relatività è quella, fisicamente comprensibile, del cambiamento della velocità relativa da v a $-v$. Si verifica con alcuni passaggi algebrici che le equazioni sono invarianti se si cambia v con $-v$.

Un altro requisito è che per velocità piccole rispetto a c, cioè per $v/c \ll 1$, le Eq.(1.7) diventino

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \tag{1.8}$$

che sono le equazioni delle trasformazioni classiche di Galileo, come si dimostra facilmente espandendo le radici quadrate in serie di Taylor per v/c piccolo.

1.3 L'addizione relativistica delle velocità

Nella fisica classica, se abbiamo un treno che si muove con velocità $\mathbf{v}$ rispetto alla terra e un passeggero sul treno si muove con velocità $\mathbf{u}'$ rispetto al treno, le velocità $\mathbf{u}$ del passeggero rispetto alla terra è semplicemente la somma vettoriale delle due velocità, cioè

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v}. \tag{1.9}$$

Questo è semplicemente il teorema di addizione classico, o di Galileo, delle velocità. Come si sommano le velocità nella teoria della relatività ristretta?

Consideriamo, per il momento, il caso particolare in cui tutte le velocità sono dirette lungo la direzione comune x-x' dei due riferimenti inerziali S e S'. Sia S il riferimento della terra e S' quello del treno, la cui velocità relativa alla terra è v. La velocità del passeggero nel riferimento S' è u', e la sua posizione sul treno col passare del tempo può

[2] Fu Poincaré a dare questo nome alle equazioni. Lorentz, nella sua teoria classica degli elettroni, le aveva proposte prima di Einstein. Tuttavia, Lorentz considerò come v la velocità relativa ad un riferimento assoluto dell'etere e diede una differente interpretazione alle equazioni.

essere descritta da $x' = u't'$. Qual è la velocità del passeggero osservata dalla terra? Usando le trasformazioni di Lorentz (Eq.(1.7)), si ha

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = u't' \qquad e \qquad t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Combinando questi risultati si ha

$$x - vt = u'\Big(t - \frac{v}{c^2}x\Big),$$

che si può scrivere come

$$x = \frac{(u' + v)}{(1 + u'v/c^2)}t. \tag{1.10}$$

Se indichiamo con u la velocità del passeggero relativa alla terra la sua posizione rispetto alla terra è data, in funzione del tempo, da $x = ut$. Confrontando con l'Eq.(1.10) si ottiene

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \tag{1.11}$$

Questo è il *teorema relativistico di addizione delle velocità*, o di *Einstein*.

Se u e v sono molto piccole rispetto a c, l'Eq.(1.11) si riduce al risultato classico, Eq.(1.9), $u = u' + v$ poiché allora il secondo termine nel denominatore dell'Eq.(1.11) è trascurabile rispetto ad uno. D'altra parte, se $u' = c$, si ha sempre che $u = c$ indipendentemente dal valore di v. Naturalmente $u' = c$ significa che il nostro «passeggero» è un impulso luminoso e noi sappiamo che un'ipotesi usata per derivare le formule di trasformazione era proprio questa: cioè, che tutti gli osservatori misurassero la stessa velocità c per la luce. Formalmente, si ha, per $u' = c$,

$$u = \frac{c + v}{1 + cv/c^2} = \frac{c + v}{c(c + v)}c^2 = c.$$

Quindi, qualunque velocità (inferiore a c) sommata relativisticamente a c dà come risultante c. In questo senso, c gioca nella relatività lo stesso ruolo che una velocità infinita gioca nel caso classico.

Il risultato fondamentale è che la velocità della luce è indipendente dalla velocità della sorgente e che, (come segue dall'Eq.(1.12)), l'addizione di due velocità, ciascuna più piccola di c, non può superare la velocità della luce.

Finora, abbiamo considerato solo la trasformazione di velocità parallela alla direzione del moto relativo dei due riferimenti (la direzione x-x'). Per tenere conto di ciò, dovremmo mettere l'indice x ad u e u' nell'Eq.(1.11), ottenendo

$$u_x = \frac{u_x{}' + v}{1 + u_x{}'(v/c^2)} \tag{1.12}$$

Per velocità che sono perpendicolari alla direzione del moto relativo, il risultato è più complesso. Immaginiamo che un oggetto si muova parallelamente all'asse y' in S'. Esso venga osservato nei punti $y_1{}'$ e $y_2{}'$ agli istanti $t_1{}'$ e $t_2{}'$, rispettivamente, così che la sua velocità in S' sia $u_y{}' = \Delta y'/\Delta t' = (y_2{}' - y_1{}')/(t_2{}' - t_1{}')$. Per trovare la sua velocità in S, usiamo le equazioni di trasformazione di Lorentz e otteniamo

$$y_2{}' - y_1{}' = y_2 - y_1$$

$$t_2{}' - t_1{}' = \frac{t_2 - t_1 - (x_2 - x_1)v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta t - \Delta x(v/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

così che

$$\frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{\Delta t - \Delta x(v/c^2)} = \frac{(\Delta y/\Delta t)\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \left(\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\right)v/c^2}.$$

Ora $\Delta y/\Delta t$ è u_y e $\Delta x/\Delta t$ è u_x, quindi

$$u_y{}' = u_y \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - u_x(v/c^2)}.$$

Confrontando con l'Eq.(1.12), possiamo scrivere la corrispondente trasformazione inversa. Cambiamo semplicemente v in $-v$ e scambiamo le quantità accentate e non accentate, ottenendo

$$u_y = u_y{}' \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + u_x{}'(v/c^2)}. \tag{1.13}$$

Esattamente allo stesso modo si trova anche

$$u_z = u_z{}' \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + u_x{}'(v/c^2)}. \tag{1.14}$$

Ponendo $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, detto *il fattore di Lorentz*, riassumiamo nella tabella seguente le equazioni di trasformazione delle velocità.

$u_x{}' = \dfrac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2}$	$u_x = \dfrac{u_x{}' + v}{1 + u_x{}' v/c^2}$
$u_y{}' = \dfrac{u_y}{(1 - u_x v/c^2)\gamma}$	$u_y = \dfrac{u_y{}'}{(1 + u_x{}' v/c^2)\gamma}$
$u_z{}' = \dfrac{u_z}{(1 - u_x v/c^2)\gamma}$	$u_z = \dfrac{u_z{}'}{(1 + u_x{}' v/c^2)\gamma}$

Notiamo che le componenti perpendicolari, o trasverse, (cioè u_y e u_z) della velocità di un oggetto viste dal riferimento S sono legate sia alle componenti trasverse ($u_y{}'$ e $u_z{}'$) che a quella parallela ($u_x{}'$) della velocità dell'oggetto nel riferimento S'. Il risultato non è semplice poiché nessuno degli osservatori è un osservatore proprio, cioè a riposo nel suo sistema di riferimento. Se scegliamo, tuttavia, un riferimento in cui $u_x{}' = 0$, per le velocità trasverse si ha $u_z = u_z{}'/\gamma$ e $u_y = u_y{}'/\gamma$. Ma non essendo interessata alcuna contrazione per gli intervalli di spazio trasversi, qual'è l'origine del fattore γ? Si deve solo ricordare che la velocità, essendo un rapporto di intervallo di spazio e di intervallo di tempo, dipende anche dalla variabile tempo, di modo che è implicata la dilatazione del tempo. Effettivamente, questo caso speciale di trasformazione della velocità trasversa è un effetto diretto della dilatazione del tempo.

1.4 Le proprietà di trasformazione dell'impulso, dell'energia, della massa e della forza

Cominciamo con una relazione fra la velocità u di una particella in S e la sua velocità u' in S', cioè

$$c^2 - u^2 = \frac{c^2(c^2 - u'^2)(c^2 - v^2)}{(c^2 + u_x{}'v)^2}$$

Se dividiamo ambo i membri per c^2, invertiamo, ed estraiamo la radice quadrata, troviamo

$$\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{(1 + u_x{}'v/c^2)\gamma}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}}, \tag{1.15}$$

un'eguaglianza che si dimostra utile.

Possiamo ora ottenere le trasformazioni per le componenti dell'impulso e per l'energia. Nel riferimento S si ha (per definizione)

$$p_x = \frac{m_0 u_x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \qquad p_y = \frac{m_0 u_y}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

$$p_z = \frac{m_0 u_z}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \qquad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

dove con m_0 è indicata la massa a riposo.

Nel riferimento S' le quantità corrispondenti sono (per definizione)

$$p_x{}' = \frac{m_0 u_x{}'}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}}, \qquad p_y{}' = \frac{m_0 u_y{}'}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}},$$

$$p_z{}' = \frac{m_0 u_z{}'}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}}, \qquad E' = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}}.$$

Usando l'Eq.(1.15) e quelle di trasformazione per le componenti della velocità viste nel capitolo precedente, (oltre che la *formula della massa relativistica* $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$ di un corpo di massa m che si muove alla velocità u e l'equazione che che lega l'energia cinetica K di una particella in moto molto rapido con il suo impulso p, $(K + m_0 c^2)^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2$ dove l'energia totale E vale $E = K + m_0 c^2$, equazioni che non stiamo ora a derivare o commentare) si ottengono le trasformazioni per le componenti dell'impulso e per l'energia. Esse sono riassunte nella tabella seguente.

$p_x{}' = (p_x - Ev/c^2)\gamma$	$p_x = (p_x{}' + E'v/c^2)\gamma$
$p_y{}' = p_y$	$p_y = p_y{}'$
$p_z{}' = p_z$	$p_z = p_z{}'$
$E' = (E - vp_x)\gamma$	$E = (E' + vp_x{}')\gamma$

Se si confrontano questi risultati colle trasformazioni di Lorentz di partenza che legano x, y, z, t e x', y', z', t' si trova una impressionante analogia. Le quantità p_x, p_y, p_z e E/c^2 si trasformano esattamente come le coordinate spazio-temporali x, y, z, e t di una particella.

Quando la relatività è posta nella sua forma quadridimensionale (spazio-tempo) compare naturalmente un quadri-vettore impulso, la cui componente «temporale» è l'energia. Come si è visto precedentemente l'energia E l'impulso p sono interdipendenti. Forse la connessione più profonda tra l'energia e l'impulso nella relatività è questa: se l'energia e l'impulso sono conservati in un'interazione per un osservatore inerziale, essi sono necessariamente conservati in questa interazione per qualunque altro osservatore inerziale; inoltre, se l'impulso è conservato, anche l'energia deve essere conservata.

Si noti che le equazioni di trasformazione per la massa seguono direttamente dalle trasformazioni per l'energia. Cioè $E = mc^2$ dove $m = m_0/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ e $E' = m'c^2$ dove $m' = m_0/\sqrt{1 - u'^2/c^2}$, quindi, dalle equazioni che legano E ed E', si ha

$$m = m'(1 + u_x'v/c^2)\gamma \tag{1.16a}$$

e la sua inversa

$$m' = m(1 - u_x'v/c^2)\gamma \tag{1.16b}$$

Le equazioni (1.16a) e (1.16b) sono le equazioni di trasformazione per la massa. Infine, presentiamo le equazioni di trasformazione per la forza. Nel riferimento S si ha

$$F_x = \frac{d}{dt}(mu_x), \qquad F_y = \frac{d}{dt}(mu_y), \qquad F_z = \frac{d}{dt}(mu_z),$$

mentre le corrispondenti quantità nel riferimento S' sono

$$F_x' = \frac{d}{dt'}(m'u_x'), \qquad F_y' = \frac{d}{dt'}(m'u_y'), \qquad F_z' = \frac{d}{dt'}(m'u_z').$$

Esse sono legate dalle seguenti trasformazioni

$$F_x = \frac{F_x' + (v/c^2)\ \mathbf{u}' \cdot \mathbf{F}'}{(1 + u_x'v/c^2)}, \qquad F_y = \frac{F_y'}{(1 + u_x'v/c^2)\gamma}, \qquad F_z = \frac{F_z'}{(1 + u_x'v/c^2)\gamma} \tag{1.17a}$$

e

$$F_x' = \frac{F_x - (v/c^2)\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}}{(1 - u_xv/c^2)}, \qquad F_y' = \frac{F_y}{(1 - u_xv/c^2)\gamma}, \qquad F_z' = \frac{F_z}{(1 - u_xv/c^2)\gamma}. \tag{1.17b}$$

Le equazioni (1.17a) e (1.17b) sono le equazioni di trasformazione per le componenti della forza. Come verifica, notiamo che al limite newtoniano, $v/c \ll 1$, queste equazioni si riducono a $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$, come richiesto.

Capitolo 2

Relatività ed elettromagnetismo

2.1 Le leggi di trasformazione per E e B

La forza elettromagnetica (o di *Lorentz*) su una particella di carica q che si muove con velocità $\mathbf{u}$, in un punto e ad un istante in cui il campo d'induzione magnetica è $\mathbf{B}$, è

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}).$$

Sebbene la forza elettrica non dipenda dal moto della carica esploratrice, la forza magnetica dipende da questo moto. Comunque, il moto di una particella dipende dal riferimento in cui viene descritto, di modo che non dovremmo essere sorpresi per il fatto che anche i campi dipendono dal riferimento in cui sono descritti. Descriveremo qui le trasformazioni per i campi a partire da casi particolari; i risultati, tuttavia, hanno validità del tutto generale.

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che le equazioni di trasformazione per la forza da un riferimento S ad un altro riferimento S', in cui la particella che subisce la forza è istantaneamente in riposo, cioè $\mathbf{u}' = 0$, sono

$$\begin{aligned} F_x &= {F_x}', \\ F_y &= {F_y}'\sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{{F_y}'}{\gamma}, \\ F_z &= {F_z}'\sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{{F_z}'}{\gamma}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Si consideri una particella di carica q istantaneamente in riposo in S', dove esistono un campo elettrico $\mathbf{E}'$ e un campo magnetico $\mathbf{B}'$. La forza elettromagnetica sulla particella sarà $\mathbf{F}' = q\,\mathbf{E}'$, poiché non si esercita nessuna forza magnetica su una particella in riposo. Nel riferimento S la forza corrispondente è data da $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, poiché in questo riferimento la carica ha una velocità $\mathbf{v}$, la velocità di S' rispetto a S. Prendiamo $\mathbf{v}$ lungo l'asse comune x-x' di modo che $v_x = v$ e $v_y = v_z = 0$.

Usiamo le le Eq.(2.1), una alla volta. Essendo $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_x = v_y B_z - v_z B_y = 0$, troviamo che $F_x = q[E_x + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_x] = qE_x$ e $F_x{}' = qE_x{}'$. Allora l'equazione $F_x{}' = F_x$ ci dà $qE_x{}' = qE_x$ e si ha quindi

$$E_x{}' = E_x$$

per l'equazione di trasformazione per $E_x{}'$.

Usando l'equazione per la componente y, si ha $qE_y{}'/\gamma = q[E_y + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_y]$ ossia, poiché $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_y = v_z B_x - v_x B_z = vB_z$, la equazione di trasformazione per $E_y{}'$ è

$$E_y{}' = \gamma(E_y - vB_z).$$

Analogamente, dall'equazione per la componente z otteniamo l'equazione di trasformazione per $E_z{}'$, cioè

$$E_z{}' = \gamma(E_z + vB_y).$$

Possiamo perciò riassumere le *trasformazioni per le componenti del campo elettrico nel seguente modo*

$$\begin{aligned} E_x{}' &= E_x & E_x &= E_x{}' \\ E_y{}' &= \gamma(E_y - vB_z) & E_y &= \gamma(E_y{}' + vB_z{}') \\ E_z{}' &= \gamma(E_z + vB_y) & E_z &= \gamma(E_z{}' - vB_y{}'). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Facciamo notare che la restrizione che la velocità $\mathbf{v}$ di S' rispetto a S sia diretta lungo l'asse x non è necessaria poiché l'orientazione di questo asse è arbitraria.

Studiamo ora la trasformazione delle componenti del campo *magnetico*.
Consideriamo ancora un caso relativamente semplice i cui risultati sono tuttavia generali. Come prima, il moto relativo dei due riferimenti S e S' avviene lungo l'asse comune x-x'. Si consideri una particella di carica q che si muove nel riferimento S' nella direzione y', con velocità u'. Allora, essendo $u = u_y{}'$, la forza in S', $\mathbf{F}' = q(\mathbf{E}' + \mathbf{u}' \times \mathbf{B}')$, ha le componenti $F_x{}' = q(E_x{}' + u_y{}' B_z{}')$, $F_y{}' = qE_y{}'$, e $F_z{}' = q(E_z{}' - u_y{}' B_x{}')$ nel riferimento accentato S'. Per ottenere la forza in S, dobbiamo dapprima sapere qual'è la velocità della particella in questo riferimento non accentato S. Abbiamo perciò bisogno delle equazioni di trasformazione per la velocità, Eq.(1.12)-(1.14), dalle quali si ha $u_x = v$, $u_y = u_y{}'/\gamma$ e $u_z = 0$. Cioè, sebbene in S' la particella si muova solo lungo l'asse y, in S la velocità della particella ha una componente sia lungo x che lungo y. Perciò la forza $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$ in S ha le componenti $F_x = q(E_x + u_y B_z)$, $F_y = q(E_y - vB_z)$ e $F_z = q(E_z + vB_y - u_y B_x)$.

Ora che abbiamo le componenti della forza in ciascun riferimento inerziale, dobbiamo sostituirle nelle equazioni generali di trasformazione della forza (Eq.(1.17a) e (1.17b)) per ottenere le relazioni fra i campi. Se facciamo ciò e usiamo inoltre le Eq.(2.2), troveremo che ${B_x}' = B_x$ e ${B_z}' = \gamma[B_z - (v/c^2)E_y]$. Per trovare come si trasforma la componente y del campo magnetico, dovremmo fare muovere la particella nella direzione z' invece che nella direzione y'. Troveremmo, con un procedimento simile, che ${B_y}' = \gamma[B_y + (v/c^2)B_z]$. Quindi, possiamo riassumere *le trasformazioni per le componenti del campo dell'induzione magnetica* nel modo seguente

$$\begin{aligned} {B_x}' &= B_x & B_x &= {B_x}' \\ {B_y}' &= \gamma(B_y + \frac{v}{c^2}E_z) & B_y &= \gamma({B_y}' - \frac{v}{c^2}{E_z}') \\ {B_z}' &= \gamma(B_z - \frac{v}{c^2}E_y) & B_z &= \gamma({B_z}' + \frac{v}{c^2}{E_y}'). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ancora una volta, non c'è bisogno di porre la limitazione che la velocità relativa $\mathbf{v}$ di S' rispetto a S sia lungo l'asse x. Vediamo quindi la interdipendenza di $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, poiché le nostre leggi di trasformazione legano tutte le sei componenti di $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ piuttosto che darci due leggi di trasformazione distinte, una per $\mathbf{E}$ e una per $\mathbf{B}$. I campi elettrici e magnetici non possono esistere indipendentemente come quantità ma sono interdipendenti.

Le equazioni di trasformazione per il campo elettromagnetico sono riassunte nella tabella seguente

${E_x}' = E_x$	$E_x = {E_x}'$
${E_y}' = \gamma(E_y - vB_z)$	$E_y = \gamma({E_y}' + v{B_z}')$
${E_z}' = \gamma(E_z + vB_y)$	$E_z = \gamma({E_z}' - v{B_y}')$
${B_x}' = B_x$	$B_x = {B_x}'$
${B_y}' = \gamma(B_y + vE_z/c^2)$	$B_y = \gamma({B_y}' - v{E_z}'/c^2)$
${B_z}' = \gamma(B_z - vE_y/c^2)$	$B_z = \gamma({B_z}' + v{E_y}'/c^2)$

Esempio: si supponga che un campo elettromagnetico sia *puramente elettrico* nel riferimento inerziale S, cioè $\mathbf{E} \neq 0$ ma $\mathbf{B} = 0$; descriviamo questo campo nel riferimento inerziale S'.

Dalle Eq.(2.2)-(2.3), introducendo le componenti dei campi parallela ($\|$) e perpendicolare ($\perp$) alla direzione della velocità relativa, si ha che, in S'

$$E_\|' = E_\| \qquad B_\|' = 0$$

$$E_\perp' = \gamma E_\perp \qquad B_\perp' = -\frac{\gamma}{c^2}(\mathbf{v} \times \mathbf{E})_\perp$$

Ma

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{E}) = \mathbf{v} \times \mathbf{E}_\perp = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}_\perp'}{\gamma} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}'}{\gamma}$$

Perciò

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}_\perp' = \frac{-\gamma}{c^2}(\mathbf{v} \times \mathbf{E}) = -\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}'}{c^2}.$$

Nel riferimento S' *esiste* un campo magnetico $\mathbf{B}'$ come esiste un campo elettrico $\mathbf{E}'$, perciò quello che appare all'osservatore S come un puro campo elettrico $\mathbf{E}$ appare all'osservatore S' come un campo sia elettrico che magnetico. Da notare che se fosse stato $\mathbf{E} = 0$ e $\mathbf{B} \neq 0$, in S' esisterebbe sempre sia un campo elettrico $\mathbf{E}'$ che un campo magnetico $\mathbf{B}'$, basterebbe utilizzare lo stesso procedimento mostrato ora per vederlo.

2.2 Le equazioni di Maxwell

I campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ introdotti nel paragrafo precedente a partire dalla formula di Lorentz $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + v \times \mathbf{B})$, sono legati tra loro dalle *equazioni di Maxwell* che, nel caso in cui lo spazio interessato al campo sia completamente vuoto (tranne dove sono localizzate le sorgenti) e considerando i campi variabili nel tempo, sono

$$\begin{aligned} &I) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \varrho/\varepsilon_0 && II) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ &III) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && IV) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\Big(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\Big) \end{aligned} \tag{2.4}$$

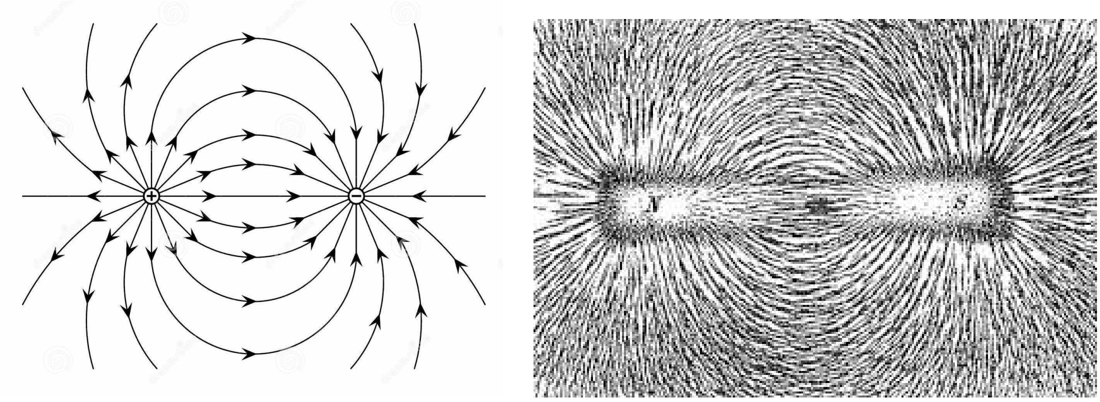
Osserviamo che queste equazioni rappresentano 8 equazioni scalari differenziali (visto che la prima e la seconda sono equazioni scalari, mentre la terza e la quarta sono vettoriali) non tutte fra di loro indipendenti, dato che contengono 6 incognite scalari $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ funzioni di x, y, z, t.

La prima equazione di Maxwell è sostanzialmente equivalente alla legge di Gauss per il campo elettrico, che dice che *il flusso del campo elettrostatico nel vuoto* **E** *attraverso una superficie chiusa qualunque* S *è pari alla somma algebrica (nel caso di distribuzione continua di cariche anche all'integrale) delle cariche contenute all'interno di* S*, divisa per* ε_0, in formule:

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{TOT}^{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_\tau \varrho(x, y, z, t)\, d\tau$$

dove ϱ è la densità di carica, τ è il volume racchiuso dalla superficie S e ε_0 è la costante dielettrica nel vuoto.
L'unica ipotesi che è stata aggiunta è che valga il teorema della divergenza, il quale dice che *il flusso di un vettore* **E** *attraverso una superficie chiusa* S *è pari all'integrale della divergenza di* **E** *calcolato sul volume* τ *racchiuso da* S, cioè la richiesta che il campo vettoriale **E** sia derivabile in ogni punto del dominio considerato.
L'aggiunta di tale ipotesi comporta tuttavia una differenza. L'equazione del teorema di Gauss collega fra di loro grandezze fisiche calcolate in *posizioni diverse*, ovvero il campo elettrostatico *sulla superficie* S alla densità di carica ϱ *nei punti interni alla superficie* S *stessa.* Ciò non pone alcun problema finché le grandezze in gioco sono costanti nel tempo; d'altra parte, un'eventuale variazione nel tempo — ad esempio — della densità ϱ *dentro* la superficie, non può tradursi in una simultanea variazione del campo elettrico *sulla* superficie, visto che nessun fenomeno fisico può propagarsi istantaneamente.
Al contrario, l'equazione I) è un'*equazione locale*, cioè lega fra di loro diverse grandezze fisiche calcolate nella stessa posizione.
Quest'ultima, a differenza dell'altra, si presta pertanto ad un'immediata generalizzazione al caso non stazionario che stiamo trattando, introducendo semplicemente la dipendenza dal tempo delle grandezze che in essa compaiono.

La seconda equazione di Maxwell o legge di Gauss per il campo magnetico, dice che *la divergenza di* **B** *è nulla*, cioè *il flusso di* **B** *attraverso una superficie chiusa è sempre nullo.*
Questo accade perché mentre le linee di forza di **E** escono dai punti dove sono localizzate la cariche positive (sorgenti del campo) e convergono nei punti dove sono localizzate le cariche negative (pozzi del campo), le linee di forza di **B** sono sempre linee chiuse: esse non possono uscire da un punto né convergere verso un punto, perché il campo magnetico non ammette né pozzi né sorgenti (non esistono monopoli magnetici), come mostrato in figura 2.1.



(a) *Linee di forza tra cariche elettriche di segno opposto.*

(b) *Disposizione di filamenti di materiale metallico attratti da un magnete.*

Figura 2.1: La figura (a) rappresenta l'attrazione all'interno di un *dipolo elettrico*, ovvero un sistema di due carche fisse, puntiformi, uguali in modulo ed opposte in segno. La figura (b) rappresenta la disposizione, per esempio su di un foglio, di materiale metallico attratto da un magnete posto sotto al foglio. L'esperimento mostra come li linee all'interno di un dipolo magnetico siano chiuse e per convenzione dirette da nord (N) verso sud (S).

Un'ulteriore profonda differenza è che mentre $\mathbf{E}$ è conservativo (in formule: $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$, ovvero in forma locale — nel caso stazionario — $\nabla \times \mathbf{E} = 0$[1]) $\mathbf{B}$ non è conservativo, come appare nella quarta equazione di Maxwell (che nel caso stazionario è $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$), dove μ_0 è la costante di permeabilità magnetica nel vuoto e $\mathbf{j}$ la densità di corrente elettrica.

A partire dal teorema del rotore consideriamo la relazione $\oint_{\delta S = l} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$. Per la definizione di *flusso magnetico* e poiché il dominio di integrazione è supposto costante nel tempo, si ha

$$-\frac{\partial \Phi_S(\mathbf{B})}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}.$$

Essendo i primi due membri di sinistra delle ultime due equazioni uguali alla *forza elettromotrice indotta* f_i, uguagliando gli integrandi segue la forma locale della *legge di Faraday*, che rappresenta la terza equazione di Maxwell, che dice in che modo un campo

[1] Tale relazione tra la forma locale o differenziale e quella globale deriva dal teorema di Stokes-Kelvin o teorema del rotore, il cui enunciato è: *sia l una linea chiusa orientata e S una superficie aperta che abbia l come contorno; il versore della normale $\hat{n}$ ad S sia orientato in modo da vedere come antiorario il verso positivo di l. Sia $\boldsymbol{v}$ un qualunque campo vettoriale, che abbia componenti continue insieme alle loro derivate parziali prime su tutti i punti di S e di l; allora* $\oint_l \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \nabla \times \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S}$.
Da notare il fatto che il rotore di un campo vettoriale $\mathbf{v}$ non dipende dal sistema di riferimento ma è una proprietà intrinseca del campo $\mathbf{v}$.

magnetico variabile induca un campo elettrico.
La quarta equazione descrive l'inverso, ovvero in che modo un campo elettrico variabile (o la densità di corrente elettrica $\mathbf{j}$) induca un campo magnetico, dove $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \varrho(\mathbf{r}, t)\,\mathbf{v}_d(\mathbf{r}, t)$ con $\mathbf{v}_d$ che indica la velocità di deriva, cioè la velocità media assunta da una particella a causa di un campo di forze e con $\varrho(\mathbf{r}, t) = q\,n(\mathbf{r}, t)$, con n numero di cariche per unità di volume.

Più avanti vedremo che tutte le informazioni relative al campo elettromagnetico possono essere fornite assegnando dei *potenziali generalizzati* (funzioni dello spazio-tempo: potenziale vettore $\mathbf{A}$ e potenziale scalare elettrico V). Queste quattro funzioni (i potenziali) hanno il vantaggio di presentare una straordinaria compattezza e simmetria per quanto riguarda le relazioni fra potenziali e sorgenti.

2.3 Equazione delle onde elettromagnetiche

Consideriamo un mezzo dielettrico illimitato, isotropo e omogeneo: il campo elettromagnetico in tale mezzo è allora descritto dalle Eq.(2.4) sostituendo ε_0 e μ_0 con ε e μ legate tra di loro dalle relazioni $\varepsilon = \varepsilon_0\,\varepsilon_r$ e $\mu = \mu_0\,\mu_r$ dove l'indice r indica rispettivamente la costante dielettrica e magnetica relativa. Supponiamo inoltre che il dielettrico sia ovunque elettricamente neutro (assenza di cariche localizzate: $\varrho = 0$), le equazioni di Maxwell diventano allora

$$\begin{array}{llll} I) & \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 & II) & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ III) & \nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & IV) & \nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon\,\mu\,\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \tag{2.5}$$

Applichiamo l'operatore rotore alla terza equazione di Maxwell. Ricordando l'identità matematica $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla^2\,\mathbf{E} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E})$ e tenendo conto che ora la prima equazione vale $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, si ottiene

$$-\nabla^2\,\mathbf{E} = \nabla \times \Big(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\Big) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}).$$

Se confrontiamo questa relazione con la derivata temporale della quarta equazione delle (2.5), otteniamo

$$\nabla^2\,\mathbf{E} = \varepsilon\,\mu\,\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Un'equazione del tutto identica è soddisfatta anche da $\mathbf{B}$, come si verifica applicando l'operatore rotore alla quarta delle attuali equazioni di Maxwell, e confrontando con la derivata temporale della terza; per cui valgono in definitiva le equazioni

$$\begin{aligned} &\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon\,\mu\,\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \\ &\nabla^2 \mathbf{B} - \varepsilon\,\mu\,\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Osserviamo che benché queste equazioni costituiscano 6 equazioni scalari (quante sono le equazioni linearmente indipendenti fra le (2.5)), esse non sono equivalenti alle (2.5) stesse. Infatti le (2.6) sono state ottenute dalle (2.5) applicando l'operatore di rotore: dunque se $\mathbf{E}$ è una soluzione delle (2.5), le (2.6) sono soddisfatte anche da $\mathbf{E}+\mathbf{E}'$, dove $\mathbf{E}'$ è un qualunque campo irrotazionale ($\nabla \times \mathbf{E}' = 0$). Per conseguenza le (2.6) ammettono anche soluzioni spurie non solenoidali (cioè a divergenza non nulla). La solenoidalità delle soluzioni — che risulta automatica se si risolvono direttamente le (2.5) — deve essere imposta come condizione aggiuntiva se si parte dalle (2.6); e ciò si fa affiancando le (2.5) stesse alle (2.6).

Queste equazioni sono dette *equazioni delle onde elettromagnetiche* e la soluzione di un'equazione del tipo delle (2.6) è rappresentata da onde che si propagano con velocità $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$.

Prima di proseguire ricordiamo alcune definizioni e nomenclature relative alle onde. Una funzione $f(x,t)$ di x e di t rappresenta un'onda di ampiezza costante che si propaga lungo l'asse delle x se in essa la dipendenza dalla coordinata x e dal tempo t compare solo nella combinazione $\xi = x \mp vt$:

$$f(x,t) = f(\xi) = f(x \mp vt) \tag{2.7}$$

con v costante positiva. L'onda si dice *progressiva* o *regressiva* a seconda che nella $\xi = x \mp vt$ compaia il segno $-$ o $+$. Il motivo per cui la (2.7) rappresenta un'onda è il seguente: se consideriamo la f come funzione della variabile ξ, essa definisce un ben definito «profilo» $f(\xi)$; e tale profilo trasla senza cambiare forma lungo l'asse x con velocità $\pm v$. Infatti consideriamo un certo valore $\overline{\xi} = \overline{x} \mp v\overline{t}$ della variabile ξ: all'istante $\overline{t} + \Delta t$, lo stesso valore di $\overline{\xi}$ si presenta non più in $\overline{x}$, ma in $\overline{x} + \Delta x$ sia legato a Δt dalla relazione

$$\overline{x} \mp v\overline{t} = (\overline{x} + \Delta x) \mp v(\overline{t} + \Delta t) = \overline{x} \mp v\overline{t} + \Delta x \mp v\Delta t$$

ciò impone che sia $\Delta x \mp v\Delta t = 0$; da cui segue $\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \pm v$.

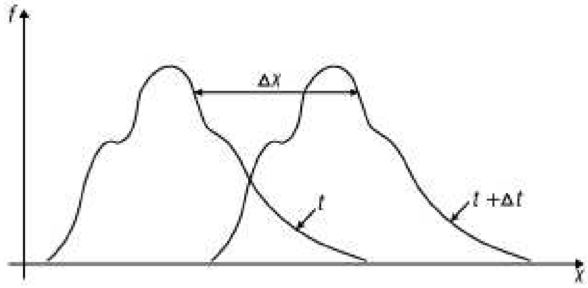


Figura 2.2

In forma più compatta le equazioni delle onde (2.6) possono essere scritte anche come

$$\Box\,\mathbf{E} = 0 \qquad \Box\,\mathbf{B} = 0 \tag{2.8}$$

dove l'operatore $\Box$ detto *dalambertiano* (così come ∇^2 è detto anche laplaciano), è definito come:

$$\Box = \nabla^2 - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Osserviamo che l'operatore dalambertiano $\Box$ è un operatore lineare:

$$\Box\,(a_1F_1 + a_2F_2) = a_1\Box F_1 + a_2\Box F_2$$

(con a_1,a_2 costanti e F_1,F_2 funzioni di x, y, z, t). Le (2.8) (così come le (2.6), di cui le (2.8) non sono altro che una diversa scrittura) rappresentano dunque, ciascuna, tre *equazioni differenziali* (alle derivate parziali nelle variabili x, y, z, t) *lineari* e *omogenee*. Le loro soluzioni soddisfano dunque il *principio di sovrapposizione*: ogni combinazione lineare di due o più soluzioni rappresenta anch'essa una soluzione.

Per conseguenza, esse possono essere risolte mediante *sviluppo in serie lineare*: in particolare, mediante *sviluppo in serie di Fourier*.

Per dare al dalambertiano una forma più compatta e più simmetrica, è usuale (specie negli sviluppi relativistici) introdurre il quadrivettore spazio-tempo

$$\underline{x} \equiv (x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) \equiv (x,\, y,\, z,\, vt) \qquad (v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu})$$

Ricordiamo che il quadrato di un quadrivettore è definito, secondo le notazioni da noi adottate, come

$$\underline{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$$

In termini del quadrivettore spazio-tempo, l'operatore dalambertiano è dunque esprimibile nella forma compatta

$$\Box = \left(\frac{\partial}{\partial\underline{x}}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}$$

2.4 Potenziali del campo elettromagnetico

Abbiamo già discusso come le equazioni di Maxwell costituiscano un sistema di sei equazioni indipendenti alle derivate parziali (del primo ordine) che legano fra di loro le sei componenti del campo elettrico e magnetico. Si tratta di equazioni fra di loro accoppiate (ciascuna contiene più di una delle sei funzioni incognite E_i, B_i ($i = x$, y, z)), che possono essere risolte direttamente solo in casi semplici.

In generale, conviene ricorrere alle equazioni relative a potenziali (vettore $\mathbf{A}$ e scalare V) la cui determinazione (quattro funzioni incognite) richiede la soluzione di sole quattro equazioni differenziali (del secondo ordine).

Il vantaggio di esprimere le equazioni del campo in termini di potenziali — oltre a quello di ridurre le equazioni da risolvere da sei a quattro — sta nel fatto che tali equazioni possono essere scritte in forma disaccoppiata, ciascuna di esse contenendo una sola delle quattro funzioni incognite A_x, A_y, A_z, V; ed inoltre nel fatto che in termini di potenziali la covarianza relativistica della teoria può essere espressa, come vedremo nel prossimo paragrafo, in termini assai eleganti e compatti.

Mostriamo anzitutto che la validità della seconda equazione di Maxwell $\quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ è condizione necessaria e sufficiente per l'introduzione del potenziale vettore.

Il potenziale vettore $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z, t)$ nel vuoto è definito come quel campo vettoriale tale per cui *il rotore del potenziale vettore* $\boldsymbol{A}$ è pari al campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$, in formule:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{A} \equiv \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}. \tag{2.9}$$

Poiché la divergenza di un rotore è identicamente nulla, la formula implica che sia: $\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} \equiv 0$, ma questa condizione è sempre verificata in virtù della seconda equazione di Maxwell, che ha validità del tutto generale.
Da notare che la (2.9) non definisce univocamente il potenziale vettore $\mathbf{A}$. Infatti, se $\mathbf{A}$ soddisfa la (2.9), anche $\mathbf{A}'$ legato ad $\mathbf{A}$ dalla relazione, detta *trasformazione di gauge,* $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f$ dove f è una qualunque funzione scalare (che ammetta derivate parziali seconde) soddisfa la (2.9); infatti essendo il rotore del gradiente di f nullo ($\nabla \times \nabla f = 0$) si ha che: $\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla f = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$.
Usando la trasformazione di gauge il potenziale vettore, che ovviamente è definito anche a meno di una costante additiva, può essere scelto in modo che sia nulla la sua divergenza, basta scegliere $\nabla^2 f = -\nabla \cdot \mathbf{A}$ per avere $\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0$.

Una volta dunque trovato un potenziale vettore $\mathbf{A}$ la cui divergenza è in generale non nulla, determinando una funzione f che soddisfi la suddetta relazione, si può sempre ottenere un nuovo potenziale vettore (che soddisfa cioè la (2.9)) e che ha in più divergenza nulla ed è quello che ipotizzeremo noi.

Ora, introducendo la (2.9) nella terza equazione di Maxwell, questa diviene:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) \quad \text{da cui} \quad \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$$

Dunque il vettore $\mathbf{E} + \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ è irrotazionale; perciò può essere scritto, istante per istante, come gradiente di una funzione scalare. Introduciamo quindi il potenziale scalare V come quella funzione di $\mathbf{r}$, t tale che:

$$-\nabla V = \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad \text{ovvero} \qquad -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E} \tag{2.10}$$

Vediamo così che il fatto stesso di introdurre i potenziali (cioè di scrivere $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ tramite la (2.10) e (2.9)) è subordinato alla condizione, necessaria e sufficiente, di validità della seconda e della terza equazione di Maxwell ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$; $\quad (\nabla \times \mathbf{E}) + \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$) che sono, fra le quattro equazioni di Maxwell, quelle omogenee, ovvero quelle in cui non compaiono i termini noti ϱ e $\mathbf{j}$ dovuti alle sorgenti; una volta introdotti i potenziali, tali equazioni risultano identicamente soddisfatte:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0;$$

$$(\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = \nabla \times (-\nabla V) \equiv 0$$

Per la determinazione dei potenziali, si ricorrerà dunque alle *equazioni di Maxwell non omogenee (prima e quarta)* dette *equazioni della dinamica dei potenziali.*

Sostituendo in tali equazioni al posto di $\mathbf{B}$ ed $\mathbf{E}$ la (2.9) e (2.10) otteniamo (limitandoci al caso che ε e μ siano costanti ed uniformi):

$$\begin{aligned} &\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\varrho}{\varepsilon} \\ &\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu \mathbf{j} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Queste equazioni costituiscono quattro equazioni fra di loro indipendenti nella quattro funzioni incognite $A_x(\mathbf{r}, t)$, $A_y(\mathbf{r}, t)$, $A_z(\mathbf{r}, t)$, $V(\mathbf{r}, t)$, e sono fra di loro *non disaccoppiate.* Esse possono essere trasformate in equazioni disaccoppiate utilizzando il margine di arbitrarietà che le definizioni (2.9) e (2.10) lasciano ai potenziali. Si verifica immediatamente che se $\mathbf{A}$ e V soddisfano la (2.9) e (2.10) (cioè sono i potenziali del campo elettromagnetico $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ presente in certe condizioni fisiche), gli stessi campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ si ottengono a partire da due potenziali $\mathbf{A}'$ e V' purché questi siano legati ad $\mathbf{A}$ e V dalle relazioni:

$$\begin{aligned} &\mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\varphi \\ &V \to V' = V - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned} \tag{2.12}$$

dove φ è una qualunque funzione scalare di $\mathbf{r}$, t derivabile almeno fino al secondo ordine in tutte le variabili x, y, z, t. La trasformazione (2.12) è detta *trasformazione di gauge* per i potenziali e la funzione φ è detta *funzione di gauge.* Che la (2.12) lasci invariati i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ è immediatamente dimostrabile in base a proprietà generali degli operatori differenziali:

$$\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla\varphi) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

$$(\nabla \times (\nabla\varphi) \equiv 0 : \text{è identicamente nullo il rotore di un gradiente})$$

$$-\nabla V' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla V + \nabla\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\varphi) = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E}$$

$$\Big(\nabla\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big) \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\varphi)\Big)$$

Una opportuna trasformazione di gauge consente di scegliere potenziali per i quali le equazioni dinamiche (2.11) siano disaccoppiate. Infatti, scegliendo opportunamente φ è possibile fare in modo che $\mathbf{A}$ e V soddisfino la relazione seguente, detta *condizione di Lorentz*:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t} = 0. \tag{2.13}$$

Se la (2.13) è soddisfatta, è immediato verificare che le (2.11) si riducono a:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu\,\mathbf{j} \\ \nabla^2 V - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\frac{\varrho}{\varepsilon} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Queste equazioni costituiscono *quattro equazioni disaccoppiate* nelle quattro funzioni incognite $\mathbf{A}$, V. Quando i potenziali soddisfano la condizione di Lorentz, e dunque le loro equazioni dinamiche sono le (2.14), si dice che essi appartengono alla *gauge di Lorentz.* Utilizzando l'operatore dalambertiano introdotto nel paragrafo precedente, le (2.14) possono essere scritte nella forma più compatta:

$$\Box \mathbf{A} = -\mu\,\mathbf{j} \qquad \text{e} \qquad \Box V = -\frac{\varrho}{\varepsilon}$$

2.5 Covarianza relativistica dell'elettrodinamica

Come abbiamo già accennato, la formulazione dell'elettrodinamica in termini di potenziale consente di esprimere in forma compatta la covarianza relativistica della teoria, come mostreremo in questo paragrafo supponendo di trovarci nel vuoto. Le nostre conclusioni valgono però anche in un mezzo isotropo e omogeneo indefinito pur di sostituire al posto di $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, velocità della luce nel vuoto, la velocità $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ della luce nel mezzo considerato.

Passando da un sistema di riferimento inerziale $S \equiv O(x, y, z)$ ad un secondo sistema inerziale $S' \equiv O(x', y', z')$ in moto traslatorio con velocità costante v lungo l'asse $x = x'$, indichiamo con l'insieme di quattro numeri il *quadrivettore spazio-tempo*

$$\underline{x} \equiv (x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) = (x,\, y,\, z,\, c\,t) \tag{2.15}$$

che si trasforma mediante la matrice di Lorentz (che qui indichiamo con la lettera L)

$$\underline{x}' = L\,\underline{x} \qquad \text{ovvero:} \qquad x'_i = \sum_k L_{ik}\,x_k = L_{ik}\,x_k$$

(d'ora in poi sugli indici ripetuti si sottintenderà che venga eseguita la sommatoria). La matrice di Lorentz è definita come

$$L = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \qquad \text{con} \quad \beta = \frac{v}{c} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Il modulo quadrato del quadrivettore spazio-tempo, definito come

$$\underline{x}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 \tag{2.16}$$

è relativisticamente invariante: il suo valore non cambia passando da un sistema di riferimento all'altro, cioè effettuando la sostituzione $\underline{x}' = L\underline{x}$. Ogni quaterna di numeri che si trasformi come $\underline{x}$ (cioè mediante la trasformazione $x'_i = L_{ik}\,x_k$) è detta un *quadrivettore*. Ogni quadrivettore soddisfa la condizione di invarianza del suo modulo (2.16).

Inoltre è immediato verificare che l'operatore dalambertiano:

$$\Box \equiv \Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big) \equiv \Big(\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_3}^2} - \frac{\partial^2}{\partial {x_4}^2}\Big)$$

è relativisticamente invariante, cioè non cambia le proprietà di trasformazione relativistica della funzione cui viene applicato.

Riprendendo l'equazione elettrodinamica disaccoppiata in notazione operatoriale $\Box\mathbf{A} = -\mu\,\mathbf{j}$ possiamo quindi scriverla ora nella forma di quadrivettore $\Box\underline{\mathbf{A}} = -\mu\,\underline{\mathbf{j}}$ dove (μ è sempre considerato nel vuoto così come nella precedente relazione) e $\mathbf{j}$ è il *quadrivettore di densità di corrente*, $\underline{\mathbf{j}} \equiv (j_1,\, j_2,\, j_3,\, j_4) = (\mathbf{j},\, \varrho\, c)$, mentre il quadrivettore potenziale $\underline{\mathbf{A}}$ è definito come $\underline{\mathbf{A}} \equiv (\mathbf{A},\, V/c)$ (con $\mathbf{A}$ potenziale vettore e V potenziale scalare); che tale quaterna costituisca un quadrivettore lo si vede a partire dalla relazione precedente essendo $\underline{\mathbf{j}}$ un quadrivettore e $\Box$ un invariante.

Espresse nella forma di quadrivettore, *le equazioni dell'elettrodinamica risultano covarianti a vista*: una volta trovata la soluzione $\mathbf{A}$ in un sistema di riferimento inerziale, la soluzione $\mathbf{A}'$ in un altro sistema di riferimento inerziale si ottiene per semplice applicazione della trasformazione di Lorentz

$$\underline{\mathbf{A}}' = L\ \ \underline{\mathbf{A}} \qquad \text{cioè} \qquad A'_i = L_{ik}\, A_k$$

ovvero, esplicitando la somma

$$\begin{aligned}
&A'_1 = \gamma(A_1 - \beta A_4) & & A'_x = \gamma(A_x - \beta\, V/c)\\
&A'_2 = A_2 & & A'_y = A_y\\
&A'_3 = A_3 & \Rightarrow \qquad & A'_z = A_z\\
&A'_4 = \gamma(-\beta A_1 + A_4) & & V'/c = \gamma\,(-\beta A_x + V/c)
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Noti i potenziali, i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ vengono ottenuti applicando la (2.9) e (2.10). Utilizzando il formalismo dei quadrivettori (e dei quadritensori che fra poco definiremo), anche le relazioni fra potenziali e campo possono essere poste in forma compatta e relativisticamente più significativa.

Introduciamo le quantità

$$F_{\mu\,\nu} \equiv \frac{\partial A_\mu}{\partial x_v} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \qquad (\mu,\, \nu = 1,\, 2,\, 3,\, 4) \tag{2.18}$$

Tenuto conto che A_μ e x_μ sono componenti di due quadrivettori, si dimostra facilmente che gli $F_{\mu\,\nu}$ (che possono essere scritti anche nella forma di matrice $4\times\, 4$) si trasformano secondo la legge:

$$F'_{\mu\,\nu} = L_{\mu\, i}\, L_{\nu\, j}\, F_{i\, j}\, \left(\equiv \textstyle\sum_{i,j=1}^{4}\, L_{\mu\, i}\, L_{\nu\, j}\, F_{i\, j}\right) \tag{2.19}$$

dove $L_{\alpha,\beta}$ sono gli elementi della matrice di Lorentz. Quando una matrice ($4{\times}4$) $F_{\mu\nu}$ si trasforma secondo la (2.19) si dice che rappresenta un tensore (o più precisamente un *quadritensore a due indici*). Nel caso specifico, il tensore $F_{\mu\nu}$ definito dalla (2.18) è detto tensore del campo elettromagnetico o semplicemente *tensore elettromagnetico*. Segue evidentemente dalla definizione (2.18) che

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \ \ (\text{ in particolare } \ F_{\mu\mu} = -F_{\mu\mu} = 0)$$

Il tensore elettromagnetico è un *tensore antisimmetrico.*

Confrontando la sua definizione (2,18) con le (2.9) e (2.10), è immediato verificare che il tensore elettromagnetico è costruito così come mostrato nella seguente matrice

$$F =| F_{\mu\nu} |= \begin{bmatrix} 0 & -B_z & B_y & E_x/c \\ B_z & 0 & -B_x & E_y/c \\ -B_y & B_x & 0 & E_z/c \\ -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c & 0 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

Applicando la trasformazione di Lorentz (2.19) al tensore (2.20), si verifica facilmente che si riottengono le trasformazioni (2.2) e (2.3) del campo elettromagnetico.

Bibliografia

[1] Robert Resnick *Introduzione alla relatività ristretta*. Casa Editrice Ambrosiana.

[2] Corrado Mencuccini, Vittorio Silvestrini *Elettromagnetismo-Ottica*. Liguori Editore, 1998.