

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

**Variazioni isoperiodiche
di superfici di traslazione**

Tesi di Laurea in Sistemi Dinamici

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Stefano Francaviglia

Presentata da:
Davide Dobrilla

III Sessione
Anno Accademico 2015/2016

a Giorgio, Lucia, Valdo e Tina

Indice

Introduzione	v
1 Superfici di traslazione	1
1.1 Definizioni equivalenti ed esempi	1
1.2 Motivazioni allo studio	9
1.3 Spazi di moduli e coordinate dei periodi	13
1.4 (X,G) -strutture ed ologonomia	16
1.5 Foliazioni	21
1.6 Foliazione isoperiodica	24
2 Falsi ottagoni	29
2.1 Muovere punti con taglia e cucì	29
2.2 Tagli iterati sull'ottagono	33
2.3 Esistenza di infiniti falsi ottagoni	45
Conclusioni	49
Bibliografia	51

Elenco delle figure

1.1	Semipiani con identificazioni in ordine ciclico.	3
1.2	Realizzazione geometrica in \mathbb{R}^3	3
1.3	Due poligoni rappresentanti la stessa superficie di traslazione	5
1.4	Singularità conica di angolo diverso da $2k\pi$	6
1.5	Superficie di traslazione di genere 2.	7
1.6	Superficie square-tiled di genere 3	8
1.7	Spiegamento del quadrato e superficie di traslazione ottenuta. . . .	9
1.8	Poligoni che si ottengono sfogliando il triangolo di angoli $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{10}$. .	11
1.9	Equivalenza delle due superfici di traslazione ottenute	11
1.10	Modello Wind-tree con 6 alberi.	12
1.11	Foliazione intorno ad un punto singolare	23
1.12	Intersezione della foglia isoperiodica in $\mathcal{H}(1,1)$ con $\mathcal{H}(2)$	25
1.13	Sistema dinamico $f_t := S_t \circ R_t : S' \longrightarrow S'$	25
1.14	Superficie di traslazione del sistema dinamico	26
2.1	Segmenti gemelli nel punto singolare della superficie di traslazione di genere 2.	29
2.2	Procedimento per muovere un punto singolare	30
2.3	Movimento del punto singolare con una gemella chiusa	31
2.4	Gemelle del segmento $P_{(1)}A$	33
2.5	Primo movimento del punto singolare	34
2.6	Secondo movimento del punto singolare	35
2.7	Terzo movimento del punto singolare.	36
2.8	Quarto movimento del punto singolare.	36
2.9	Configurazioni possibili all'iterazione generica del processo di tagli. .	38
2.10	Gemelle del segmento, configurazione I	39
2.11	Taglio ed identificazione al passo $k+1$, configurazione I	39
2.12	Gemelle del segmento, configurazione II	40
2.13	Taglio ed identificazione al passo $k+1$, configurazione II	41
2.14	Gemelle del segmento, configurazione III	41
2.15	Taglio ed identificazione al passo $k+1$, configurazione III	42
2.16	Due sistole della stessa lunghezza, iterazione $k = 2$	45
2.17	Palla di raggio 1 centrata in P	46

Introduzione

Le superfici di traslazione sono un argomento di studio molto diffuso in matematica. Possono essere definite in tre modi equivalenti: come differenziali abeliani (ovvero 1-forme olomorfe) su superfici di Riemann, come superfici topologiche con il dato di un insieme discreto di singolarità coniche (dette anche di tipo sella) o come poligoni con identificazioni sui lati date per traslazione. Possono inoltre essere pensate come (X, G) -strutture ramificate, cosa che consente quindi di parlare di mappa sviluppante ed ologonomia su di esse.

Il loro studio è collegato a molti aspetti della geometria e della topologia ma anche ad altri argomenti apparentemente lontani come lo studio dei sistemi dinamici in dimensione 1. In particolare questo ultimo argomento conduce allo studio delle superfici di traslazione ed alla loro foliazione orizzontale. In particolare c'è un'analogia tra la foliazione orizzontale su una superficie di traslazione e la dinamica dei polinomi iterati sul campo complesso. Lo studio della dinamica dei polinomi quadratici $z \mapsto z^2 + c$ porta allo studio degli insiemi di Julia che a loro volta ci conducono all'insieme di Mandelbrot. Questo costituisce di fatto una sorta di parametrizzazione degli insiemi di Julia. I punti che gli appartengono rappresentano infatti gli insiemi di Julia connessi. Quindi se pensiamo che ciascuno di questi insiemi rappresenta un sistema dinamico, possiamo pensare l'insieme di Mandelbrot come una sorta di sistema dinamico di tutti i sistemi dinamici (potremmo dire un meta-sistema dinamico) che contiene in sé le informazioni su tutti i sistemi dinamici associati agli insiemi di Julia.

In maniera analoga le superfici di traslazione possono essere raggruppate in spazi di moduli caratterizzati dal genere delle superfici che vi appartengono. Tali spazi ammettono una naturale stratificazione, individuata dal dato topologico della superficie (genere, numero e ordine delle singolarità coniche), e delle coordinate privilegiate, dette coordinate dei periodi. Su ogni strato e più generalmente sullo spazio di moduli usando tali coordinate è data in modo naturale una foliazione particolare, individuata dai periodi assoluti costanti: la foliazione isoperiodica (o assoluta o nucleo).

In questa tesi abbiamo voluto affrontare un problema riguardante tale foliazione nello strato $\mathcal{H}(2) \subset \mathcal{H}_2$. Il problema, chiamato da McMullen dei falsi ottagoni, consiste nel dimostrare che esistono infinite superfici di traslazione in tale strato con gli stessi periodi assoluti dell'ottagono che tuttavia siano diverse dall'ottagono. Tale problema ha trovato una risposta affermativa da parte di McMullen [9] attraverso lo studio delle foliazioni delle superfici modulari di Hilbert e da parte di Calsamiglia, Deroin e Francaviglia [1] che deducono il risultato dall'ergodicità della foliazione isoperiodica.

Noi di questo problema abbiamo dato una dimostrazione semplice che coinvolge solo taglia e cucì topologico sulla superficie.

Capitolo 1

Superfici di traslazione

In questo primo capitolo cercheremo di dare una panoramica di quello che sono le superfici di traslazione, dando tre definizioni equivalenti ed alcuni esempi di problemi le cui soluzioni sono legate allo studio di tali oggetti. Studieremo il loro spazio di moduli e vedremo poi come esse possono essere pensate come (X, G) -strutture. Studieremo infine le loro foliazioni cercando di mettere in evidenza l'importanza di quella isoperiodica.

1.1 Definizioni equivalenti ed esempi

La prima definizione di superficie di traslazione è data da un punto di vista analitico.

Definizione 1.1.1. *Una superficie di traslazione è una coppia (X, ω) , con X superficie di Riemann (che supporremo compatta e connessa) ed ω 1-forma olomorfa su X . Due forme differenziali ω, ω' definiscono su X la stessa struttura di traslazione se esiste un biolomorfismo tra (X, ω) ed (X, ω') che manda ω in ω' .*

Per quello che vogliamo vedere ci basta sapere che una 1-forma differenziale olomorfa su una superficie di Riemann X è un oggetto che in ogni carta con coordinata z si scrive come $\omega = f(z)dz$, dove la f è una funzione olomorfa sulla carta. Per ogni coppia di carte che si sovrappongono, dette z e ζ le due coordinate e rispettivamente $\omega = f(z)dz$ ed $\omega = g(\zeta)d\zeta$ le due scritture della forma differenziale nelle due carte, la relazione che le lega è data da

$$g(\zeta) \frac{d\zeta}{dz} = f(z).$$

Altro fatto che non ci serve dimostrare ma ci è utile ricordare è che ogni 1-forma olomorfa è chiusa ma non esatta e che in particolare su di una superficie di Riemann ammette un numero finito di zeri contati con molteplicità, precisamente pari a $2g - 2$, dove g rappresenta il genere della superficie.

La seguente proposizione ci consente di capire meglio come possiamo pensare una superficie di traslazione.

Proposizione 1.1.1. *Sia (X, ω) una superficie di traslazione. Allora per ogni punto in cui ω non si annulla esiste una carta locale z tale che $\omega = dz$, mentre negli intorni dei punti in cui ω ha zeri di ordine k le coordinate locali sono tali che $\omega = z^k dz$.*

Dimostrazione. Per quanto riguarda gli intorni dei punti in cui ω non si annulla ho $\omega = f(z)dz$ con $f \neq 0$ in ogni punto e quindi basta riscalarlo per ottenere $\omega = dz$. Consideriamo dunque un intorno di un punto p_0 in cui ω ha uno zero di ordine k e prendiamo una coordinata \tilde{z} . In tale coordinata potremo scrivere $\omega = \tilde{z}^k g(\tilde{z})$ dove g è una funzione olomorfa con $g(0) \neq 0$. Ora l'integrale

$$\int_0^{\tilde{z}} g(t)t^k dt$$

si annulla con molteplicità $k + 1$ in 0 . Se definiamo quindi

$$z^{k+1} = (k + 1) \int_0^{\tilde{z}} g(t)t^k dt$$

applicando d ad entrambi i membri ottengo esattamente $z^k dz = \omega$, da cui segue l'enunciato. \square

Definizione 1.1.2. *Indicheremo con Σ l'insieme degli zeri di ω e lo chiameremo insieme singolare (o insieme dei punti singolari o insieme delle singolarità). I punti in Σ saranno detti singolari, mentre quelli in $X \setminus \Sigma$ non singolari.*

Quello che abbiamo appena visto con la proposizione precedente è che per ogni punto p_0 non singolare posso scegliere carte locali tali che $\omega = dz$. Tale scelta non è unica. L'unicità si ottiene se aggiungiamo la condizione $z(p_0) = 0$.

In altri termini tale scelta è unica a meno di traslazione. Questo segue dal fatto che presa una funzione f olomorfa tale che $df = dz$ si ha l'esistenza di una costante C tale che $f(z) = z + C$.

Quindi in particolare possiamo dare su $X \setminus \Sigma$ un atlante in cui i cambi di carta siano traslazioni. Esso sarà costituito da tutte le coordinate locali z con la proprietà che $\omega = dz$.

Osservazione 1.1.1. *Il ragionamento appena concluso ci dà una struttura molto particolare su $X \setminus \Sigma$: le traslazioni infatti preservano la metrica standard su \mathbb{C} che è quella piatta. Tale metrica, via pullback, viene dunque riportata su $X \setminus \Sigma$.*

In più abbiamo che le traslazioni conservano anche le direzioni degli assi reale ed immaginario e quindi su $X \setminus \Sigma$ abbiamo per ogni punto la possibilità di fissare un asse immaginario, convenzionalmente chiamato Nord.

Nei punti singolari le cose funzionano diversamente. Se infatti consideriamo una singolarità p_0 di ordine k in un suo intorno possiamo fissare una coordinata z tale che $z(p_0) = 0$ e $\omega = (k + 1)z^k dz$ (a meno di riscalarlo è quella costruita poco sopra). Questa non è altro che il pullback della 1-forma dz attraverso la mappa di rivestimento ramificato $z \mapsto z^{k+1}$, essendo $d(z^{k+1}) = (k + 1)z^k dz$. Quindi per ogni punto dell'intorno escluso p_0 possiamo scegliere una coordinata locale $\tilde{z} = z^{k+1}$, nella quale risulterà $\omega = d\tilde{z}$.

La metrica che abbiamo quindi intorno ai punti singolari è quella che si ottiene facendo il pullback della metrica piatta su \mathbb{C} attraverso la mappa $z \mapsto z^{k+1}$ e quindi non più piatta. In definitiva quindi non possiamo definire su X una metrica che sia piatta, in quanto intorno ai punti singolari avremo angoli di $2\pi(k+1)$. Formalizziamo meglio questo concetto.

Definizione 1.1.3. *Una singolarità conica di ordine k è un punto $p \in X$ che ammette un intorno omeomorfo a k copie del semipiano superiore e k copie di quello inferiore incollate in ordine ciclico lungo il semiasse positivo e negativo come in figura.*

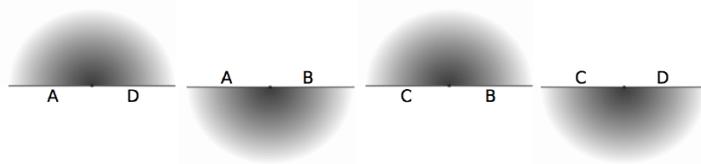


Figura 1.1: Semipiani con identificazioni in ordine ciclico.

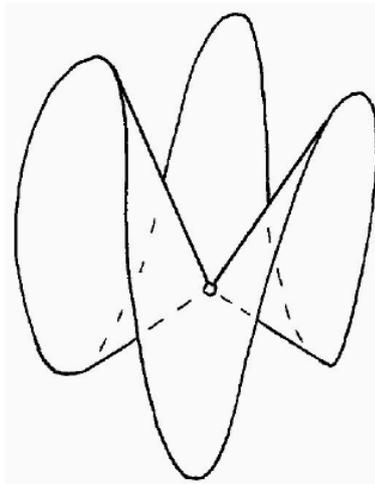


Figura 1.2: Realizzazione geometrica in \mathbb{R}^3 .

Una singolarità conica di ordine k si dice avere angolo di $2\pi k$ per ovvie ragioni geometriche.

Le singolarità di ordine 1 corrispondono dunque ai punti regolari.

In particolare abbiamo visto che intorno ad uno zero di ordine k della forma ω abbiamo una singolarità conica di ordine $k+1$.

Quello che abbiamo appena detto ci conduce alla formulazione della seconda definizione di superficie di traslazione:

Definizione 1.1.4. *Una superficie di traslazione è una superficie topologica X chiusa con il dato di un insieme finito di punti Σ ed un atlante complesso su $X \setminus \Sigma$ in cui i cambi di carta siano traslazioni ed ogni punto in Σ sia una singolarità conica di ordine $k + 1$ per qualche k . Due atlanti di questo tipo definiscono la stessa superficie di traslazione se sono compatibili¹.*

Quanto visto prima è la dimostrazione che la prima definizione di superficie di traslazione implica la seconda. Mostrando il viceversa abbiamo il seguente risultato.

Proposizione 1.1.2. *La prima e la seconda definizione di superficie di traslazione sono equivalenti.*

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che dalla seconda definizione possiamo dare su X struttura di superficie di Riemann e costruire una forma differenziale olomorfa ω .

La struttura che abbiamo dalla seconda definizione ci dà un atlante complesso su $X \setminus \Sigma$ le cui carte sono traslazioni che, essendo biolomorfismi, ci danno la struttura di superficie di Riemann su $X \setminus \Sigma$. La forma differenziale olomorfa su tale spazio è costruita ponendo $\omega = dz$ per ogni coordinata locale z . Resta quindi da vedere come definire carte e ω intorno ai punti di Σ .

Sia dunque $p_0 \in \Sigma$ singolarità di ordine k . In un suo intorno U_{p_0} possiamo scegliere una coordinata z in cui la mappa di rivestimento ramificato $z \mapsto \frac{z^{k+1}}{k+1}$ sia un'isometria locale $U_{p_0} \setminus \{p_0\} \rightarrow U_0 \setminus \{0\} \subset \mathbb{C}$.

L'unicità di tale coordinata è a meno di traslazione e quindi ottenuta imponendo la condizione $z(p_0) = 0$. I calcoli precedenti mostrano che in tale coordinata avremo $\omega = z^k dz$ su $U_{p_0} \setminus \{p_0\}$.

Per concludere resta da mostrare che i cambi di carta che coinvolgono intorni delle singolarità sono anch'essi biolomorfismi. Consideriamo dunque un punto singolare p_0 ed un suo intorno U_{p_0} . Supponiamo che z sia una coordinata tale che $\omega = z^k dz$ in U_{p_0} e \tilde{z} sia un'altra coordinata in un secondo aperto contenuto in U_{p_0} e non contenente p_0 tale che $\omega = d\tilde{z}$. Allora il cambio di coordinata sarà dato da $\tilde{z}(z) = C + \int_0^z t^k dt$, con C costante. Questo al di fuori di $z = 0$ è un biolomorfismo. La forma differenziale olomorfa è dunque costruita come nella proposizione 1.1.1 a pagina 2 usando le carte locali appena descritte.

Risulta abbastanza immediato verificare che due superfici equivalenti nella prima definizione lo sono anche nella seconda e viceversa. \square

La terza ed ultima definizione di superficie di traslazione che daremo è la più concreta.

Definizione 1.1.5. *Una superficie di traslazione è una classe di equivalenza di un insieme di poligoni P_1, \dots, P_n in \mathbb{C} , tali che*

- *ciascun P_i ha bordo orientato in modo che il poligono sia sulla sinistra*
- *per ogni lato $s_i \in P_i$ esiste un lato $s_j \in P_j$ che abbia la stessa lunghezza del primo, che sia ad esso parallelo e che abbia orientazione opposta.*

¹Due atlanti si dicono compatibili se la loro unione è a sua volta un atlante.

I lati s_i ed s_j vengono identificati per traslazione. Ciascun lato è identificato esattamente con un altro lato.

Due insiemi di poligoni soddisfacenti tale relazione definiscono la stessa superficie di traslazione se sul primo di essi si possono effettuare operazioni di taglia e cucì topologico che, sempre attraverso traslazioni, portano al secondo (si veda la figura sotto).

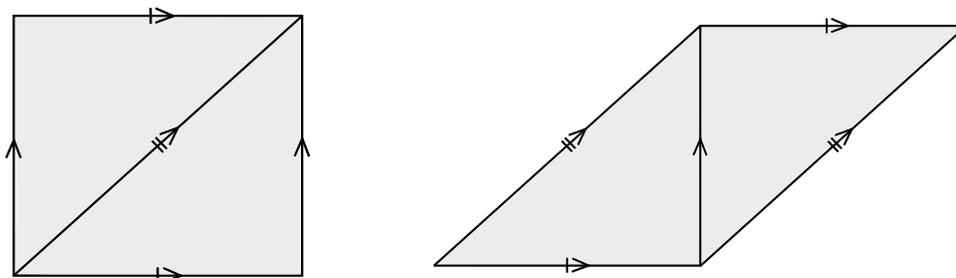


Figura 1.3: Due poligoni rappresentanti la stessa superficie di traslazione

Per poter provare che questa terza definizione è equivalente alle due precedentemente date dobbiamo introdurre due definizioni preliminari.

Definizione 1.1.6. Una connessione di sella su una superficie di traslazione è un segmento che unisce due singolarità e che non contiene al suo interno altre singolarità. E' ammesso anche il caso in cui tale segmento vada da una singolarità in sé stessa.

Definizione 1.1.7. Una triangolazione su una superficie di traslazione X è un insieme $\{s_k\}_{k \in \Delta}$ di connessioni di sella, con Δ insieme finito, tale che:

- $\forall i, j \in \Delta, \text{int}(s_i) \cap \text{int}(s_j) = \emptyset$
- ogni componente di $X \setminus \cup_{k \in \Delta} s_k$ sia un triangolo.

Qua dobbiamo fare attenzione: quando parliamo di triangoli intendiamo in base al contesto due concetti differenti: il triangolo vero e proprio, ovvero l'involuppo convesso di 3 punti non allineati nel piano, oppure la porzione di superficie la cui immagine in carte è un triangolo. Nella definizione precedente stiamo ovviamente usando la seconda accezione.

Lemma 1.1.1. Ogni superficie di traslazione X data nella seconda definizione (via atlante complesso) ammette una triangolazione $K = \cup_{k \in \Delta} s_k$.

Dimostrazione. Consideriamo in X un insieme di connessioni di sella con interni disgiunti. Vogliamo che ogni componente di $X \setminus \cup_{k \in \Delta} s_k$ sia un triangolo. Alla collezione iniziale di connessioni di sella ne possiamo aggiungere fino ad ottenere che la superficie X sia divisa in (almeno) 2 componenti connesse. Se queste due risultano essere triangoli abbiamo concluso. Altrimenti ne scegliamo una delle due e iteriamo lo stesso ragionamento fino ad ottenere tutti triangoli.

□

A questo punto siamo in grado di dimostrare l'equivalenza tra questa ultima definizione e le due precedenti.

Proposizione 1.1.3. *La seconda e la terza definizione di superficie di traslazione sono equivalenti.*

Dimostrazione. Consideriamo una superficie di traslazione X definita come in 1.1.4 a pagina 4. Dal lemma 1.1.1 nella pagina precedente essa sarà triangolabile. Allora otteniamo la struttura della terza definizione procedendo così: tagliamo la superficie lungo ogni connessione di sella ed otterremo un insieme di triangoli nel piano complesso e su ciascuno diamo identificazione sui lati seguendo i tagli appena fatti. E' evidente che tale insieme di poligoni soddisfa le condizioni della terza definizione.

Se invece consideriamo X con al struttura data in 1.1.5 a pagina 4 sappiamo che ogni lato è identificato ad un solo altro della sua stessa lunghezza per traslazione. Per definire l'atlante prendiamo la coordinata naturale z su \mathbb{C} per ogni intorno dei punti nell'interno di ciascun poligono. Analogamente facciamo per ogni intorno di punti nell'interno dei bordi (dopo avere incollato i poligoni gli intorni di tali punti saranno a loro volta isometrici a \mathbb{C}). Abbiamo così l'atlante complesso (costruito su tutta la superficie eccetto che nei vertici) in cui i cambi di carta sono traslazioni. Infine una parte dei vertici dei poligoni va a costruire l'insieme delle singolarità coniche. Intorno ad essi infatti gli angoli sono forzati ad essere $2k\pi$, altrimenti verrebbe a mancare la possibilità di scelta della direzione Nord in ogni loro intorno.

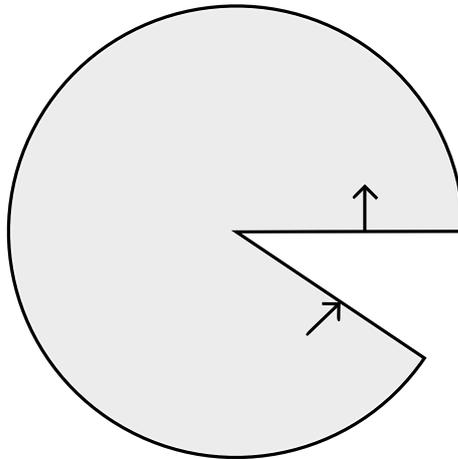


Figura 1.4: Singolarità conica di angolo diverso da $2k\pi$

Anche in questo caso risulta abbastanza immediato verificare che due superfici equivalenti nella seconda definizione lo sono anche nella terza e viceversa. \square

Osservazione 1.1.2. *Il fatto che in una singolarità conica non sia possibile fissare una direzione Nord che sia coerente su tutto il disco, corrisponde al fatto che il modello di tale singolarità è ottenuto non per traslazione, bensì per rotazione.*

Vediamo l'esempio su cui ci focalizzeremo nel secondo capitolo. Lo presentiamo usando la terza definizione che è la più immediata.

Esempio 1.1.1. Consideriamo l'ottagono con le identificazioni sui lati date come in figura:

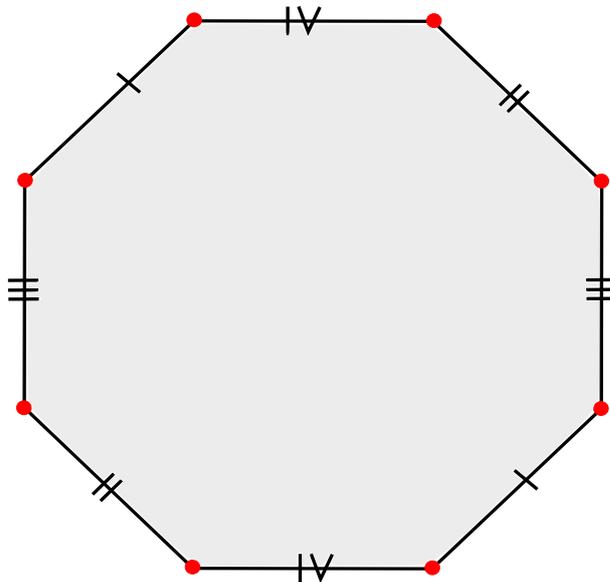


Figura 1.5: Superficie di traslazione di genere 2.

Questa è evidentemente una superficie di traslazione, essendo le identificazioni date per traslazione su lati della stessa lunghezza. La chiameremo con un po' di abuso di linguaggio *ottagono*.

Dal teorema di classificazione delle superfici sappiamo che essa è la somma connessa di due tori, ovvero una superficie orientabile di genere 2. Quando si identificano i lati tutti i vertici dell'ottagono vanno a coincidere in uno solo. Conseguentemente intorno a tale punto avremo otto copie di un angolo di $\frac{3\pi}{4}$, ovvero un angolo totale di 6π . Quindi l'ottagono ha un'unica singolarità conica di ordine 3.

Esempio 1.1.2. Un ulteriore esempio di superficie di traslazione è quello che va sotto il nome di *square-tiled surface*, ovvero quelle superfici che possono essere tassellate con quadrati. Il genere di tali superfici, così come il numero e l'ordine delle singolarità coniche, dipende da come sono dati gli incollamenti sui lati. Nella figura seguente ne vediamo un esempio di genere $g = 3$, con due singolarità coniche, in A di ordine 2 ed in B di ordine 4.

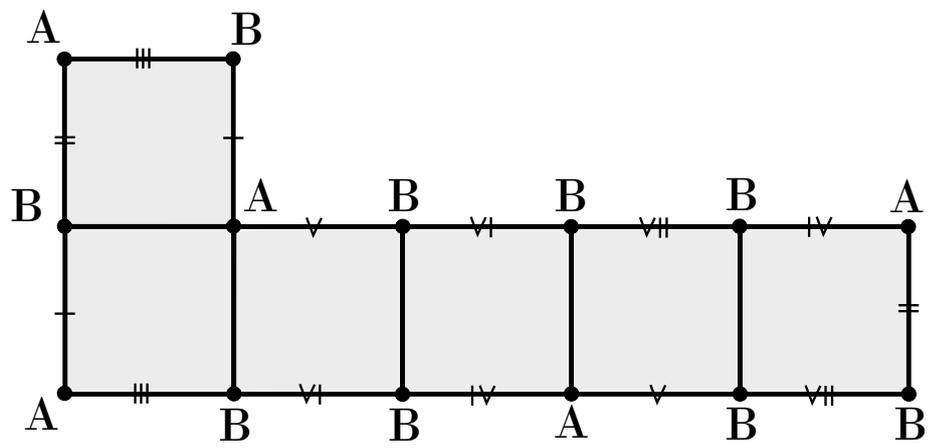


Figura 1.6: Superficie square-tiled di genere 3

1.2 Motivazioni allo studio

Lo studio dei biliardi in poligoni razionali (ovvero quei poligoni in cui gli angoli sono multipli razionali di π) è uno degli ambiti che ci riconduce allo studio delle superfici di traslazione. Vediamo in che senso.

Un biliardo è un sistema dinamico costituito da un punto che si muove su segmenti retti in una porzione di piano (il tavolo) con la condizione che al bordo l'angolo di riflessione è uguale all'angolo di incidenza.

Quando in particolare il tavolo del biliardo è costituito da un poligono razionale si può procedere allo studio delle traiettorie tramite il processo di "spiegamento" (unfolding): invece di riflettere la traiettoria quando essa incontra un lato del poligono, la prolunghiamo lungo la retta e riflettiamo il poligono lungo il lato di incidenza. L'ipotesi di razionalità porta dopo un numero finito di passi ad ottenere nuovamente il poligono iniziale traslato.

Questo in particolare ci dice che dopo un numero finito di riflessioni ritroveremo sempre (almeno) una copia traslata di ciascun lato. Tali lati verranno identificati (banalmente lo sono anche i lati di riflessione con sé stessi). Quello che si ottiene tramite queste identificazioni è una superficie di traslazione compatta e connessa. Vediamo qualche esempio concreto per capire meglio.

Esempio 1.2.1. Consideriamo il biliardo nel quadrato Q . Il processo di spiegamento è quello illustrato in figura: quando la traiettoria incontra il lato BC , lungo questo riflettiamo Q e prolunghiamo al suo interno la traiettoria. Iteriamo questo ragionamento per ogni incidenza sui bordi del quadrato. Otteniamo quindi infiniti quadrati nel piano dove la nostra traiettoria è una linea retta. Le identificazioni sono sui lati (orientati) paralleli che lasciano il quadrato dalla parte opposta. Questo ci porta quindi ad avere una superficie di traslazione. Attraverso taglia e cucì topologico si vede che essa è un toro.

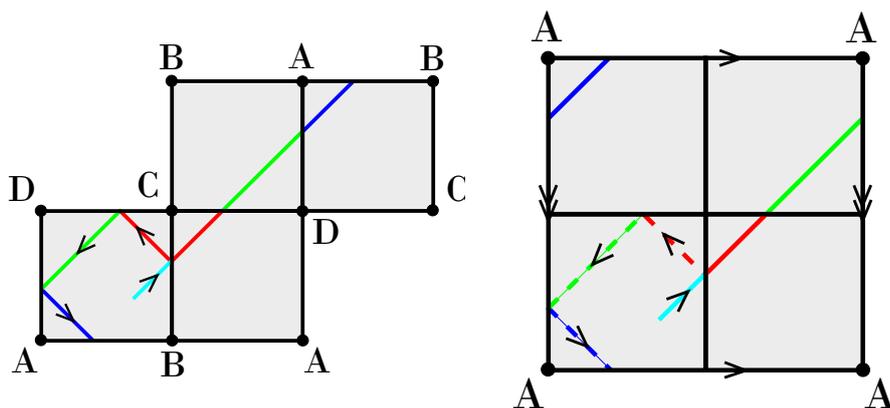
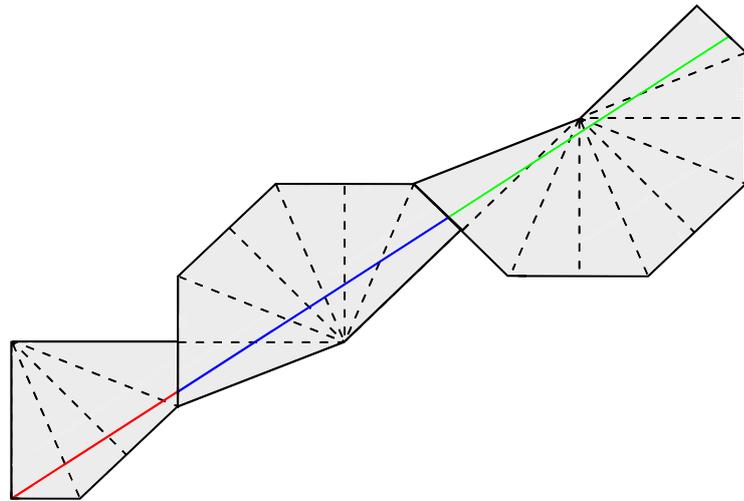
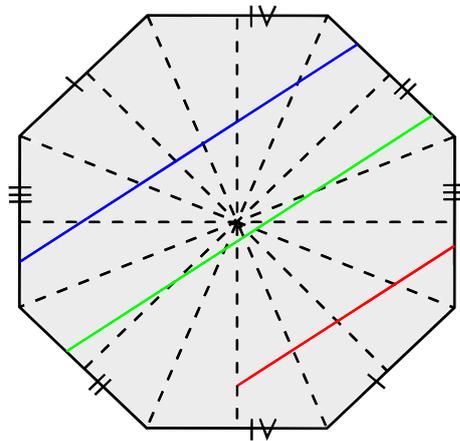


Figura 1.7: Spiegamento del quadrato e superficie di traslazione ottenuta.

Esempio 1.2.2. Consideriamo il biliardo nel triangolo rettangolo con angoli di $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}$. Con un procedimento analogo a quello fatto per il quadrato si ottiene che lo studio delle traiettorie in tale biliardo ci riconduce allo studio dell'ottagono.



(a) Spiegamento del triangolo



(b) Superficie di traslazione ottenuta

E' da osservare che il processo di spiegamento non è univoco. Un esempio è dato dal triangolo di angoli $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{10}$. Con esso si possono infatti ottenere due figure diverse (le identificazioni sono sottintese dato che non c'è ambiguità):

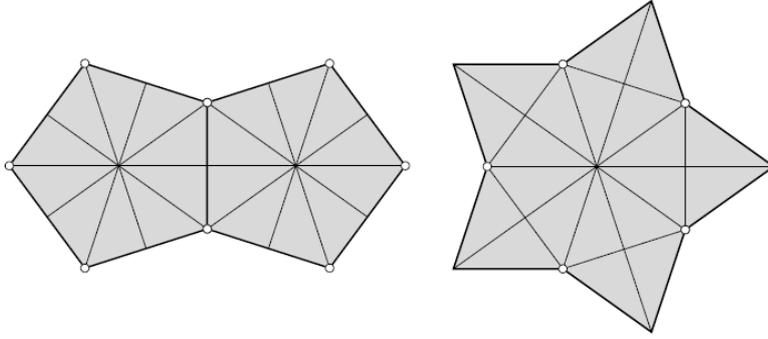


Figura 1.8: Poligoni che si ottengono sfogliando il triangolo di angoli $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{10}$.

E' tuttavia vero che tale processo conduce comunque alla stessa superficie di traslazione. Infatti i due poligoni si possono ottenere l'uno dall'altro tagliando lungo i bordi ed incollando per traslazione come mostrato in figura.

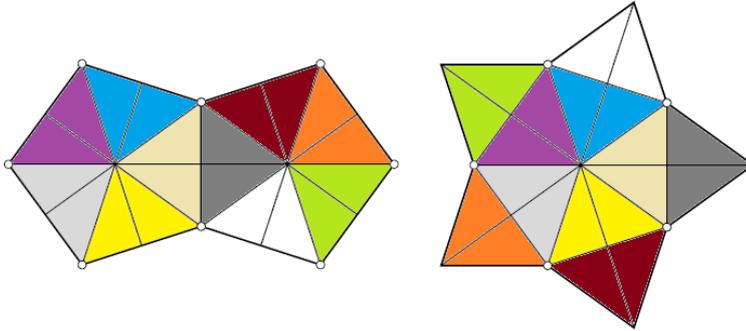


Figura 1.9: Equivalenza delle due superfici di traslazione ottenute

Questo fatto è sempre vero. Vediamo perché.

Dato un poligono P con angoli che siano multipli razionali di π , consideriamo il gruppo $G \subset O_2(\mathbb{R})$ generato dalle riflessioni lungo i lati di P . La razionalità degli angoli in P garantisce che tale gruppo sia finito. Prese allora un numero di copie del poligono pari alla cardinalità di tale gruppo, si incollano i lati secondo la regola di riflessione, ovvero: se $h \in G$ è la riflessione lungo un lato e di uno dei poligoni gP , allora e si incolla con la sua immagine in hgP . Il fatto che si possano ottenere sfogliamenti diversi corrisponde alla possibilità di operare le riflessioni in diverso ordine. E' quindi evidente che con un taglia e cuci lungo i lati di riflessione sia possibile passare da uno sfogliamento ottenuto con una determinata successione di riflessioni ad un secondo ottenuto operando con un ordine diverso.

Un particolare tipo di biliardo è il modello Wind-Tree, introdotto per la prima volta da Paul e Tatiana Ehrenfest nel 1912 che lo proposero per lo studio dell'interpretazione statistica della seconda legge della termodinamica e per quello relativo

all'applicabilità dell'equazione di Boltzmann.

E' un particolare tipo di biliardo dove il punto (rappresentante il vento) si muove su un tavolo costituito da un rettangolo al cui interno sono disposti in modo simmetrico degli ostacoli (gli alberi), usualmente anch'essi rettangolari o quadrati che non possono essere attraversati e su cui quindi il punto rimbalza analogamente a quando incontra il bordo del tavolo.

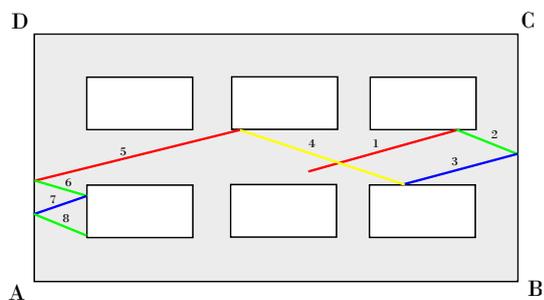


Figura 1.10: Modello Wind-tree con 6 alberi.

Possiamo quindi procedere allo spiegamento di tale biliardo esattamente come fatto per il quadrato, con l'accortezza che questa volta avremo molte più componenti di bordo che dovranno essere identificate.

Il risultato di tale procedimento è nuovamente una superficie di traslazione il cui genere sarà maggiore rispetto a quello delle superfici che abbiamo esaminato prima.

1.3 Spazi di moduli e coordinate dei periodi

Possiamo osservare che ogni superficie di traslazione nella sua struttura ha tre dati topologici: il genere, l'insieme dei punti singolari (gli zeri di ω) e l'ordine di tali singolarità (la molteplicità degli zeri $+1$). Gli ultimi due dati si possono rappresentare attraverso una stringa $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ dove ciascun α_i rappresenta l'ordine dell' i -esimo zero della forma ω . Da tale stringa possiamo ottenere anche il genere della superficie attraverso il teorema di Riemann-Roch (o volendo di Gauss-Bonnet), da cui segue:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i = 2g - 2.$$

Quindi nella stringa α abbiamo tutto il dato topologico della nostra superficie.

Esempio 1.3.1. La superficie identificata dal dato $\alpha = (2)$ è quella di genere 2 con un'unica singolarità conica di ordine 3 e quindi di angolo 6π , ovvero l'ottagono. L'unica altra possibilità che abbiamo in genere 2 è data dalla stringa $\alpha = (1, 1)$, in cui i punti singolari sono due, entrambi con angolo 4π . Nell'esempio in figura 1.1.2 a pagina 8 il dato è $\alpha = (1, 3)$.

Tuttavia, tenendo conto di dati puramente topologici, α non ci consente di distinguere tra due superfici che siano ottenute l'una dall'altra con una trasformazione lineare non degenere. Quindi ad ogni α avremo associate diverse superfici di traslazione.

Possiamo dunque costruire lo spazio di tutte le superfici di traslazione con dato topologico fissato.

Definizione 1.3.1. *Ad un dato topologico α si associa lo spazio indicato con $\mathcal{H}(\alpha)$ costituito da tutte le superfici di traslazione aventi tale dato. Tali spazi sono chiamati strati. Indicheremo con \mathcal{H}_g lo spazio di tutte le superfici di traslazione di genere g . Tale spazio si trova anche indicato con $\Omega\mathcal{M}_g$. Lo strato $\mathcal{H}(2g - 2)$ si chiama strato minimale, mentre $\mathcal{H}(1, \dots, 1)$ è detto strato principale.*

Vediamo come è possibile dare in modo naturale delle coordinate su ogni strato. Come abbiamo visto ogni superficie di traslazione può essere pensata come unione di poligoni i cui lati sono identificati a coppie per traslazione. Un modo di interpretare questa costruzione è il seguente: consideriamo $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^2$ linearmente indipendenti ed a partire da essi costruiamo una linea spezzata nella maniera più naturale: fissato il punto iniziale nell'origine, trasliamo il primo vettore in modo che abbia in essa il suo punto iniziale. Trasliamo poi il secondo in modo che il punto finale del primo coincida con quello iniziale del secondo e così per ogni altro vettore il punto finale del j -esimo corrisponderà con quello iniziale del $(j+1)$ -esimo. Sempre a partire dall'origine costruiamo una seconda linea spezzata diversa dalla prima in modo che non si abbiano vettori o singoli punti sovrapposti tra le due, eccettuati punto iniziale e finale. Per costruzione le due spezzate hanno in comune solo questi due punti e formano quindi un poligono i cui lati a due a due sono

paralleli. Identificandoli otteniamo una superficie di traslazione.

Questo modo di vedere le cose ci è utile perché ci consente di osservare che la superficie ottenuta è univocamente determinata dagli n vettori iniziali. Le coordinate che si usano sullo strato sono individuate da tali vettori.

Formalmente: siano P_j, P_{j+1} rispettivamente il punto iniziale e finale di v_j . Al variare di j , alcuni di essi nella nostra costruzione corrisponderanno ai punti singolari. Se allora pensiamo v_j come numero complesso, visto che localmente $\omega = dz$, avremo che

$$v_j = \int_{P_j}^{P_{j+1}} dz = \int_{\gamma_j} \omega$$

dove γ_j è il cammino sulla superficie di traslazione che in carte corrisponde a v_j . Quando andiamo ad identificare i lati è possibile che alcuni tra i P_i vadano a coincidere dando origine a dei lacci γ_i , mentre altri restino separati lasciando così cammini aperti.

In termini di omologia i lacci rappresentano una base per il gruppo $H_1(X; \mathbb{Z})$ che viene completata ad una base di $H_1(X, \Sigma; \mathbb{Z})$ dai cammini rimanenti che nel caso relativo risultano a loro volta lacci. Abbiamo quindi la seguente definizione:

Definizione 1.3.2. *Data una superficie di traslazione (X, ω) con insieme singolare Σ , una base $\{\gamma_j\}_{j=1}^n$ del primo gruppo di omologia relativa $H_1(X, \Sigma; \mathbb{Z})$ tale che $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$ siano base per il primo gruppo di omologia $H_1(X; \mathbb{Z})$, si chiamano coordinate dei periodi le seguenti:*

$$\left(\int_{\gamma_1} \omega, \dots, \int_{\gamma_{2g}} \omega, \int_{\gamma_{2g+1}} \omega, \dots, \int_{\gamma_n} \omega \right) \in \mathbb{C}^n$$

dove $n = 2g + s - 1$.

Le componenti per $i = \{1, \dots, 2g\}$ si chiamano periodi assoluti, quelle per $i = \{2g + 1, \dots, n\}$ periodi relativi. La mappa

$$\Theta : H_1(X, \Sigma; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

è detta mappa del periodo, o semplicemente periodo, associato ad una superficie di traslazione.

Tali coordinate ci danno su ogni strato le carte su \mathbb{C}^n . I cambi di carta sono le matrici di cambio di base del gruppo di omologia relativa, ovvero elementi di $GL(n, \mathbb{Z})$.

Per essere più precisi, ogni strato ha una struttura di orbifold, ovvero uno spazio topologico che localmente è il quoziente per un gruppo finito (per una definizione rigorosa si veda [11]). Più precisamente si ha la seguente proposizione.

Proposizione 1.3.1. *Ogni strato $\mathcal{H}(\alpha)$ è un orbifold complesso di dimensione $n = 2g + s - 1$ dove s indica il numero di componenti del vettore α . Al di fuori dei punti singolari esso ammette un atlante di carte in \mathbb{C}^n con cambi di carta in $GL(n, \mathbb{Z})$.*

Dimostrazione. Diamo solo un'idea.

Consideriamo una superficie S di genere g con un insieme di punti fissato Σ di

cardinalità s . Consideriamo lo spazio $\tilde{\mathcal{H}}(\alpha)$ di tutte le superfici di traslazione (X, ω) con una classe di omeomorfismi $f : S \rightarrow X$ che manda Σ negli zeri di ω . Fissata ora una base del gruppo di omologia relativa $\{\gamma_j\}_{j=1}^n$, si ha una mappa

$$\tilde{\mathcal{H}}(\alpha) \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad (X, \omega, [f]) \mapsto \left(\int_{\gamma_i * f} \omega \right)_{i=1}^n$$

Tale mappa è localmente un biunivoca su opportuni aperti di \mathbb{C}^n .

Il quoziente di $\tilde{\mathcal{H}}(\alpha)$ per il mapping class group² di S risulta essere lo strato $\mathcal{H}(\alpha)$. \square

Osservazione 1.3.1. *Sappiamo che lo spazio $\text{Hom}(H_1(X, \Sigma; \mathbb{Z}), \mathbb{C})$ è isomorfo a $H^1(X, \Sigma; \mathbb{C})$. Possiamo quindi pensare i periodi anche come classi di coomologia $[\omega] \in H^1(X, \Sigma; \mathbb{C})$.*

Ci limitiamo a riportare solo alcuni degli importanti risultati sulla struttura degli strati omettendone le dimostrazioni che richiederebbero un notevole lavoro che esula da questa tesi. Tali dimostrazioni possono essere trovate in [6].

Teorema 1.3.1. *[6, Corollario 1.] Lo strato minimale $\mathcal{H}(2g - 2) \in \mathcal{H}_g$ ha al più tre componenti connesse. In particolare:*

- Se $g = 2$ allora $\mathcal{H}(2)$ è connesso
- Se $g = 3$ allora $\mathcal{H}(4)$ ha due componenti connesse
- Se $g \geq 4$ allora $\mathcal{H}(6)$ ha tre componenti connesse.

E' allora interessante capire come sono "posizionati" gli altri strati rispetto a quello minimale, ovvero studiare se dato un punto in uno strato un suo intorno interseca anche punti di quello minimale e viceversa. Si hanno i due seguenti risultati.

Teorema 1.3.2. *[6, Corollario 2, Proposizione 4.]*

- Per ogni strato $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$ e per ogni componente connessa $S \subset \mathcal{H}(2g - 2)$, esiste esattamente una componente connessa $S' \subset \mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$ tale che S sia contenuta nella chiusura \bar{S}' di S' in \mathcal{H}_g , ovvero S' sia adiacente ad S
- La chiusura di una qualsiasi componente connessa dello strato $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$ contiene almeno una componente connessa dello strato $\mathcal{H}(2g - 2)$

Come conseguenza di questo teorema si ha che anche gli strati $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$ hanno al più tre componenti connesse. Quello che a noi nella fattispecie interessa è il caso $g = 2$ in cui avremo quindi che gli unici due strati esistenti, $\mathcal{H}(2)$ e $\mathcal{H}(1, 1)$, sono entrambi connessi.

In particolare la chiusura di $\mathcal{H}(1, 1)$ corrisponderà a tutto \mathcal{H}_2 .

²Il mapping class group associato ad una varietà M topologica è definito come il quoziente topologico di $\text{Aut}(M)/\text{Aut}_0(M)$, dove il gruppo $\text{Aut}(M)$ è dotato della topologia compatta-aperta e $\text{Aut}_0(M)$ è la componente connessa contenente id_M .

1.4 (X,G)-strutture ed ologonomia

Introduciamo ora un nuovo tipo di struttura geometrica, attraverso il quale possiamo vedere da un nuovo punto di vista le superfici di traslazione. Tutti gli spazi topologici che andremo a considerare saranno supposti Hausdorff ed a base numerabile.

Consideriamo dunque uno spazio topologico X .

Definizione 1.4.1. *Uno pseudogruppo su X è un insieme \mathcal{G} di omeomorfismi tra aperti di X tale che:*

- *I domini degli elementi $g \in \mathcal{G}$ ricoprono tutto X*
- *La restrizione di un elemento $g \in \mathcal{G}$ ad un qualsiasi aperto contenuto nel suo dominio appartiene ancora a \mathcal{G}*
- *La composizione di due elementi in \mathcal{G} , quando è definita, appartiene ancora a \mathcal{G}*
- *\mathcal{G} contiene l'inverso di ogni suo elemento*
- *se $g : U \rightarrow V$ è un omeomorfismo, U, V aperti in X , $U = \cup_{i \in I} U_i$ e $g|_{U_i} \in \mathcal{G}$, allora $g \in \mathcal{G}$.*

Osserviamo che ogni pseudogruppo è non vuoto (contiene almeno l'identità su ciascun aperto di X).

Definizione 1.4.2. *Una \mathcal{G} -struttura è uno spazio topologico M dotato di un \mathcal{G} -atlante, ovvero un insieme di carte a valori in X e cambi di carta in \mathcal{G} . Questo significa che esistono un ricoprimento aperto U_i di M e delle mappe $\phi_i \in \mathcal{G}$, $\phi_i(U_i) \rightarrow X$ che siano omeomorfismi sull'immagine tali che $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$, quando definita, sia in \mathcal{G} .*

Due \mathcal{G} -atlanti definiscono la stessa \mathcal{G} -struttura se sono compatibili.

Dato un omeomorfismo locale $h : N \rightarrow M$ con N spazio topologico ed una \mathcal{G} -struttura M , è possibile dare una \mathcal{G} -struttura anche su N attraverso il pullback di quella su M . Un *isomorfismo* tra due \mathcal{G} -strutture è un omeomorfismo $h : N \rightarrow M$ tale che la \mathcal{G} -struttura pullback su N coincida con quella che N possiede.

Definizione 1.4.3. *Sia X una varietà e G un gruppo che agisce su di essa. Sia poi \mathcal{G} lo pseudogruppo generato dalle restrizioni degli elementi in G agli aperti di X . Allora la \mathcal{G} -struttura M è detta (X, G) -varietà.*

Vediamo alcuni esempi di tali strutture:

Esempio 1.4.1. • se $X = \mathbb{E}^n$, lo spazio euclideo n -dimensionale, G il gruppo delle isometrie di tale spazio, le (\mathbb{E}^n, G) -varietà sono quelle che prendono il nome di euclidee o piatte.

- se $X = \mathbb{R}^n$ e $G = C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ allora le (\mathbb{R}^n, C^r) -varietà sono le varietà di classe C^r . Il caso C^∞ è quello delle varietà lisce, quello di C^ω quello delle varietà reali analitiche.

- se $X = \mathbb{C}^n$ e $G = \text{Biol}(\mathbb{C}^n)$, le (\mathbb{C}^n, G) -varietà sono dette varietà complesse di dimensione n . Il caso $n = 1$ è quello familiare delle superfici di Riemann.

Vogliamo ora definire l'olonomia associata ad una (X, G) -varietà. Premettiamo una definizione.

Definizione 1.4.4. *Un gruppo G che agisce su uno spazio topologico X si dice rigido se ogni suo elemento è univocamente determinato dal comportamento che assume su un aperto.*

Segue dalla definizione che se ho un gruppo rigido che agisce su una varietà questo sarà univocamente determinato dal suo comportamento in una singola carta. Un esempio di gruppo rigido è quello delle funzioni analitiche reali C^ω .

Consideriamo ora una (X, G) -varietà M , con X varietà di classe C^ω e G gruppo dei diffeomorfismi che agiscono transitivamente su X di classe C^ω . Prendiamo un atlante $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ di M e per ogni coppia di carte compatibili poniamo:

$$\varphi_{ij} := \phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \phi_i(U_i \cap U_j).$$

Per il principio del prolungamento analitico (o in una costruzione più generale per la rigidità del gruppo) ogni elemento $g \in G$ è determinato dal comportamento che assume su un aperto in X . Quindi a meno di modificare l'atlante possiamo associare ad ogni mappa φ_{ij} un elemento di G , leggendo quindi una mappa localmente costante a valori in G . Se componiamo ulteriormente φ_{ij} con ϕ_j otteniamo una nuova mappa che come la precedente leggiamo a valori in G :

$$\varphi_{ij} \equiv \varphi'_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow G.$$

Tale mappa, che indicheremo con abuso di notazione nuovamente con φ_{ij} , è anch'essa localmente costante. Quindi, con questo procedimento abbiamo assegnato per ogni punto $x \in (U_i \cap U_j)$ un elemento $\varphi_{ij}(x) \in G$.

Fissiamo ora un punto base $x_0 \in M$ e fissiamo una carta (U_0, ϕ_0) di un suo intorno. Prendiamo poi \tilde{M} il rivestimento universale³ di M e la mappa di rivestimento $\pi : \tilde{M} \longrightarrow M$. Scegliamo un punto $\tilde{\alpha} \in \tilde{M}$ tale che $\pi(\tilde{\alpha}) = \alpha(1)$. Prendiamo poi una partizione t_0, \dots, t_n dell'intervallo $[0, 1]$ tale che $t_0 = 0$, $t_n = 1$ e $\alpha([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$ (a meno di rinominare gli aperti coordinati si può sempre ottenere una suddivisione siffatta). Poniamo inoltre $x_i = \alpha(t_i)$. A questo punto modifichiamo le carte a partire dal primo intervallo in modo che $\phi_{i-1|U_{i-1} \cap U_i} = \phi_i|U_{i-1} \cap U_i$ in un intorno di x_{i+1} . Poiché come abbiamo visto ogni cambio di carta può essere letto come un elemento in G avremo che l' i -esima carta sarà data da

$$\psi_i = \varphi_{01}(x_1)\varphi_{12}(x_2) \dots \varphi_{i-1,i}(x_i)\phi_i$$

La successione di carte ψ_i appena costruita si chiama *prolungamento analitico di ϕ_0 lungo α* . Essendo lo spazio \tilde{M} semplicemente connesso l'ultima carta ϕ_n è la

³Il rivestimento universale di una varietà M è uno spazio di rivestimento semplicemente connesso. Esso è unico. Fissato un punto base $x_0 \in M$, è costruito come lo spazio delle classi di omotopia dei cammini $\alpha : [0, 1] \longrightarrow M$ uscenti da x_0 . Indichiamo i suoi elementi con $\tilde{\alpha}$. Per maggiori dettagli si veda [5] o un qualsiasi altro libro di topologia algebrica.

stessa per tutti i cammini omotopi e quindi dipenderà soltanto da punto iniziale e finale. Poniamo $\phi_0^\alpha \equiv \psi_n$. Osserviamo che al variare del punto base x_0 e della carta (U_0, ϕ_0) , ϕ_0^α differirà solo per composizione con elementi in G .

Definizione 1.4.5. *Si chiama mappa sviluppante di M relativa al punto x_0 ed alla carta (U_0, ϕ_0) la mappa*

$$D : \tilde{M} \longrightarrow X, \quad \tilde{\alpha} \longmapsto (\phi_0^\alpha \circ \pi)(\tilde{\alpha})$$

Preso ora un elemento in $\gamma \in \pi_1(M)$ ⁴ ad esso avremo associata la carta ϕ_0^γ . Essendo però γ un laccio avremo che le due carte ϕ_0 e ϕ_0^γ hanno intersezione non vuota, essendo il punto base x_0 comune ad entrambe in quanto inizio e fine del cammino γ . Chiamiamo $g_\gamma \in G$ l'elemento tale che $\phi_0^\gamma = g_\gamma \phi_0$. Osserviamo inoltre che per ogni $\gamma \in \pi_1(M)$ e $\tilde{\alpha} \in \tilde{M}$ si ha che $D(\gamma\tilde{\alpha}) = g_\gamma D(\tilde{\alpha})$, ovvero abbiamo un morfismo di gruppi tra $\pi_1(M)$ e G . Abbiamo dunque la seguente definizione.

Definizione 1.4.6. *L'elemento $g_\gamma \in G$ è detto ologonomia (o monodromia) di γ . L'omomorfismo di gruppi $hol : \pi_1(M) \longrightarrow G, \gamma \longmapsto g_\gamma$ è detto ologonomia. La sua immagine si chiama ologonomia di M e verrà indicata con $hol(M)$.*

Tradotto a parole, la sviluppante non fa altro che mappare il sollevamento di un cammino della superficie in un cammino orientato su X e restituirci il punto finale, mentre l'ologonomia misura la "distanza"⁵ tra punto iniziale e finale del cammino proiettato dalla sviluppante.

E' da notare che l'ologonomia per come è definita dipende dalle scelte fatte nella costruzione della mappa sviluppante. Si verifica che al variare di D la mappa hol cambia per coniugazione con elementi in G .

Vogliamo ora collegare queste strutture alle superfici di traslazione. Per poterlo fare abbiamo però bisogno di un ulteriore passo.

Definizione 1.4.7. *Sia X una superficie e G un gruppo che vi agisce. Sia poi M una superficie con il dato di un insieme di punti finito Σ . Si dice che M è una (X, G) -varietà ramificata se:*

- $M \setminus \Sigma$ è una (X, G) -varietà,
- Per ogni coppia di aperti coordinati su M contenenti un punto $p \in \Sigma$ le carte locali sono rivestimenti ramificati ed esiste una mappa $\varphi_{ij} \in G$ tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} & U_i \cap U_j & \\ \phi_i \swarrow & & \searrow \phi_j \\ \phi_i(U_i \cap U_j) & \xrightarrow{\varphi_{ij}} & \phi_j(U_i \cap U_j) \end{array}$$

⁴Dovremmo riferirci a $\pi_1(M, x_0)$, con punto base fissato. Tuttavia $\pi_1(M, x_0) \cong Aut(\tilde{M})$, gruppo degli automorfismi del rivestimento universale, dove l'isomorfismo è dato associando ad un elemento $\gamma \in Aut(\tilde{M})$ la proiezione su M del cammino di estremi x_0 e $\gamma(x_0)$. Penseremo dunque $\pi_1(M)$ come $Aut(\tilde{M})$.

⁵Parliamo di distanza perché nel caso delle superfici di traslazione l'ologonomia è effettivamente la distanza degli estremi del cammino che stiamo considerando in carte. In generale possiamo pensare l'elemento nel gruppo che corrisponde ad un laccio come quello che ci dà la "distanza".

In particolare si ha quindi che ad ogni (X, G) -varietà ramificata M è sempre associata una (X, G) -varietà $M \setminus \Sigma$. Se il gruppo in questione è rigido, allora su tale struttura abbiamo definita l'olonomia. Vogliamo ora estendere tale mappa alla (X, G) -varietà ramificata.

Come prima osservazione abbiamo che se M è una superficie e Σ un insieme finito di punti su di essa allora è data una sommersione $\pi_1(M \setminus \Sigma) \longrightarrow \pi_1(M)$. Intuitivamente per ogni buco che creiamo nella superficie abbiamo un nuovo laccio che prima non compariva. Quindi le classi dei lacci intorno ai punti in Σ , chiamiamole γ_i , sono proprio quelle che in $\pi_1(M)$ non compaiono. In più l'olonomia in $M \setminus \Sigma$ di ciascuna γ_i è banale, perché quello che si vede nelle carte locali intorno di ogni punto singolare è semplicemente un laccio in X la cui classe di omotopia è quella banale e conseguentemente una volta sollevati nel rivestimento universale corrispondono ad un punto. Quindi in particolare il nucleo della mappa di olonomia $hol : \pi_1(M \setminus \Sigma) \longrightarrow G$ è costituito da tali lacci e quindi essa induce una nuova mappa $hol' : \pi_1(M) \longrightarrow G$ che chiameremo sempre olonomia e continueremo ad indicare con hol .

Definizione 1.4.8. *Sia M una (X, G) -varietà ramificata. La mappa $hol' \equiv hol : \pi_1(M) \longrightarrow G$ si chiama olonomia di M , come nel caso non ramificato.*

Quello che ora ci interessa mostrare è che le superfici di traslazione sono $(\mathbb{C}, Trasl(\mathbb{C})) \equiv (\mathbb{C}, \mathbb{C})$ -varietà.

Proposizione 1.4.1. *Sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

- a) (X, ω) è una superficie di traslazione
- b) X è una $(\mathbb{C}, Trasl(\mathbb{C}))$ -varietà ramificata.

Dimostrazione. Data una superficie di traslazione (X, ω) , per definizione al di fuori dell'insieme singolare essa ha un atlante di carte a valori in \mathbb{C} e cambi di carta che sono traslazioni. Abbiamo inoltre visto che sugli intorni dei punti singolari le carte sono rivestimenti ramificati e che su due intorni coordinati di questo tipo il cambio di carta è dato proprio per traslazione. Questo ci dà quindi la struttura di (\mathbb{C}, \mathbb{C}) -varietà ramificata.

Viceversa se X è una $(\mathbb{C}, Trasl(\mathbb{C}))$ -varietà ramificata, su di essa abbiamo definita la mappa sviluppante D che come abbiamo detto proietta in carte locali (e quindi nel nostro caso in \mathbb{C}) una curva orientata. Se come coordinata in tali carte consideriamo z , allora la forma differenziale che ci dà la struttura di superficie di traslazione è costruita su X come il pullback della 1-forma dz su \mathbb{C} attraverso la mappa sviluppante, ovvero $\omega = D^*(dz)$. \square

A questo punto cerchiamo di capire cosa rappresentano la mappa sviluppante e l'olonomia per le superfici di traslazione. Per farlo ripercorriamo la costruzione della mappa sviluppante tenendo in considerazione che stiamo parlando di $(\mathbb{C}, Trasl(\mathbb{C}))$ -varietà ramificate. Sappiamo che il cambio di carta

$$\varphi_{ij} := \phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \phi_i(U_i \cap U_j).$$

nel nostro caso è dato per traslazione. Il nostro elemento φ_{ij} sarà dunque individuato da un vettore $v_{ij} \in Trasl(\mathbb{C})$.

Chiamato dunque \tilde{X} il rivestimento universale della nostra superficie di traslazione X , fissiamo $x_0 \in X$ punto base, prendiamo un elemento $\tilde{\alpha} \in \tilde{X}$, sollevamento di un cammino α uscente da x_0 tale che $\pi(\tilde{\alpha}) = \alpha(1)$. Seguendo lo stesso ragionamento fatto per il caso generico, costruiamo il prolungamento analitico carta contenente il punto base. L' i -esima carta sarà dunque data da

$$\psi_i = v_{01} \circ v_{12} \circ \cdots \circ v_{i-1,i} \phi_i$$

Tale carta individua nel piano complesso il punto finale della spezzata costituita dai vettori di traslazione individuati dalle carte precedenti. L'ultima carta corrisponderà dunque al punto finale del cammino α letto nelle carte ψ_i .

In definitiva quindi abbiamo che la sviluppante ci dà il punto finale della spezzata corrispondente al sollevamento $\tilde{\alpha}$.

In questa lettura, l'olonomia ci darà il vettore di traslazione per cui il punto finale ed iniziale di un laccio letto in carte differiscono. Ripensando alla costruzione delle coordinate dei periodi via poligoni ci si accorge dunque di un'analogia tra queste, mappa sviluppante ed olonomia. Si ha dunque la seguente proposizione.

Proposizione 1.4.2. *Dato un cammino $\alpha \in X$ ed il suo sollevamento $\tilde{\alpha} \in \tilde{X}$, si ha l'uguaglianza:*

$$\Theta(\alpha) = D(\tilde{\alpha}(1)) - D(\tilde{\alpha}(0))$$

In particolare, se il cammino è chiuso, ovvero $\gamma \in \pi_1(X) \cong \text{Aut}(\tilde{X})$ e $p \in \tilde{X}$, allora la mappa di olonomia individua i periodi assoluti della superficie, ovvero

$$\Theta(\gamma) = \text{hol}(\gamma) = D(\gamma(p)) - D(p),$$

Dimostrazione. La prima parte dell'enunciato segue dalla definizione di mappa sviluppante e dalla $(\mathbb{C}, \text{Trasl}(\mathbb{C}))$ -struttura di X .

Per quanto riguarda i periodi assoluti, per poter concludere bisogna osservare che l'olonomia, definita sul gruppo fondamentale della superficie X , passa al quoziente su $H_1(X; \mathbb{Z})$ essendo il gruppo delle traslazioni su \mathbb{C} abeliano. Questo e la prima parte della proposizione concludono la dimostrazione. \square

Questo fatto ci tornerà utile nel seguito della trattazione per mostrare che i movimenti di punti singolari che introdurremo all'inizio del secondo capitolo sono variazioni isoperiodiche.

1.5 Foliazioni

Le foliazioni sono un importante oggetto geometrico che viene usato per lo studio delle varietà. Localmente una foliazione ci consente di vedere la nostra varietà come unione di sottovarietà di dimensione più bassa. Vediamo nel dettaglio.

Definizione 1.5.1. *Sia M una varietà di dimensione n senza bordo. Un atlante $\{U_i, \varphi_i\}$ di classe C^r si dice atlante foliato di codimensione k se i cambi di carta*

$$\varphi_{ij} \equiv \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}|_{\varphi_j(U_i \cap U_j)} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$$

sono della forma

$$\varphi_{ij}(x, y) = (\alpha_{ij}(x, y), \beta_{ij}(y)), \quad x \in \mathbb{R}^{n-k}, y \in \mathbb{R}^k$$

Due atlanti foliati si dicono equivalenti se sono compatibili.

Una foliazione su M , generalmente indicata con $\mathcal{F}(M)$ il dato su M di un atlante foliato massimale. Diremo che (M, \mathcal{F}) è una varietà foliata.

Data una foliazione $\mathcal{F}(M)$, presa la mappa di proiezione $p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ e definita $f_i := p \circ \varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^k$, si chiamano *placche* della foliazione le componenti della fibra di f_i .

Al variare delle carte, le placche definiscono una base per una nuova topologia τ su M , detta *topologia delle foglie*. Le componenti di tale topologia si chiamano appunto *foglie* della foliazione $\mathcal{F}(M)$. Queste sono sottovarietà di dimensione $n - k$ immerse iniettivamente in M . In particolare questo significa che per ogni punto $x \in M$ esiste un'unica foglia, che indicheremo con L_x , che lo contiene.

Un *omomorfismo foliato* tra due varietà foliate (M, \mathcal{F}) ed (M', \mathcal{F}') è una mappa

$$f : (M, \mathcal{F}) \longrightarrow (M', \mathcal{F}')$$

continua sia nella topologia naturale di M ed M' , sia per quella delle foglie sulle due varietà (ovvero è una mappa che manda foglie in foglie). Di conseguenza sarà definito un *isomorfismo*.

Infine, una foliazione si dice *orientabile* se per ogni coppia di carte nell'atlante foliato si ha che gli omeomorfismi locali definiti dalle carte

$$\varphi_{ij} : (\mathbb{R}^n, \tau_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \tau_0)$$

in cui τ_0 è la topologia prodotto di quella naturale su \mathbb{R}^{n-k} e quella delle foglie su \mathbb{R}^k , preservano l'orientazione. Intuitivamente questo vuol dire che le foglie possono essere orientate coerentemente.

Osservazione 1.5.1 (Foliazioni come \mathcal{G} -strutture.). *Consideriamo lo pseudogruppo \mathcal{G} generato dai diffeomorfismi tra aperti di \mathbb{R}^n che mandano il fattore orizzontale nel fattore orizzontale, ovvero quelli nella forma*

$$\phi(x, y) = (\phi_1(x, y), \phi_2(y)), \quad x \in \mathbb{R}^{n-k}, y \in \mathbb{R}^k$$

Questi sono quei diffeomorfismi che in ogni punto hanno matrice Jacobiana $n \times n$ con il blocco inferiore sinistro $(n - k) \times k$ nullo.

Le \mathcal{G} -strutture di questo tipo sono esattamente le foliazioni di codimensione k .

Nel caso in cui M sia una superficie, abbiamo che le uniche foliazioni ammissibili non banali saranno quelle di codimensione (e conseguentemente di dimensione) 1. Essendo le foglie delle sottovarietà, ci aspettiamo che esse siano copie di \mathbb{R} o di S^1 . Si ha infatti la seguente proposizione.

Proposizione 1.5.1. *Sia $\mathcal{F}(M)$ una foliazione su M , superficie connessa. Allora le foglie di $\mathcal{F}(M)$ sono omeomorfe ad \mathbb{R} oppure ad S^1 .*

Dimostrazione. Sappiamo che le uniche due varietà di dimensione 1, Hausdorff ed a base numerabile sono, a meno di omeomorfismo, \mathbb{R} ed S^1 .

Essendo M Hausdorff, tale proprietà viene ereditata naturalmente dalle foglie. Provando che esse sono anche a base numerabile abbiamo concluso.

Consideriamo dunque una base numerabile $\mathcal{U} = \{U_i\}$ per M . Non è restrittivo supporre che a ciascuno di essi sia associata una carta φ_i . Consideriamo P_1, \dots, P_k placche tali che ciascuna di esse sia contenuta in un U_j . Definiamo poi una k -catena come una stringa (P_1, \dots, P_k) con la proprietà che $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset \forall i = 1, \dots, k-1$. Presa dunque una foglia $L \in \mathcal{F}(M)$ ed un punto $p \in L$, chiamiamo A_k l'insieme delle k -catene tali che $p \in P_1$. Tale A_k è numerabile. Inoltre le placche di \mathcal{U} contenute in L costituiscono una base per la topologia di L , che risulta essere numerabile poiché ogni suo elemento appartiene ad un qualche A_k . \square

Diretta conseguenza di tale proposizione è che l'insieme delle foglie di una foliazione su ogni superficie è non numerabile.

Per quanto riguarda le superfici abbiamo un risultato di esistenza di foliazioni abbastanza restrittivo. Omettiamo la dimostrazione di questo teorema dovuta a Kneser, rimandando per tutti i dettagli a [4].

Teorema 1.5.1. *Le uniche superfici chiuse che ammettono una foliazione di classe C^r sono quelle che hanno caratteristica di Eulero nulla.*

Siccome sappiamo che le superfici di traslazione sono superfici orientabili ottenute incollando poligoni e quindi di fatto superfici con genere $g \geq 1$, e quindi con caratteristica di Eulero diversa da 0. Dunque le foliazioni sulle superfici di traslazione non saranno foliazioni definite nel senso usuale. Vediamo dunque come sono fatte.

Considerata (X, ω) , abbiamo che in carte locali la forma differenziale è data da $\omega = dz$. Se identifichiamo canonicamente \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 e scriviamo $dz = dx + idy$, abbiamo un modo canonico per definire su tale spazio una foliazione orizzontale ed una verticale. Questo corrisponde al fissare $dy = cost$ per il caso orizzontale o $dx = cost$ per il caso verticale. Tale struttura, via pullback, produce una foliazione (nel senso sopra definito) su $X \setminus \Sigma$ con le foglie che si incontrano nei punti di Σ in singolarità di tipo sella (si veda figura 1.5). Intorno a tali punti la foliazione è ottenuta facendo il pullback attraverso la mappa di rivestimento ramificato e quindi ogni foglia sarà replicata in base all'indice di ramificazione.

Una foliazione di questo tipo si dice singolare.

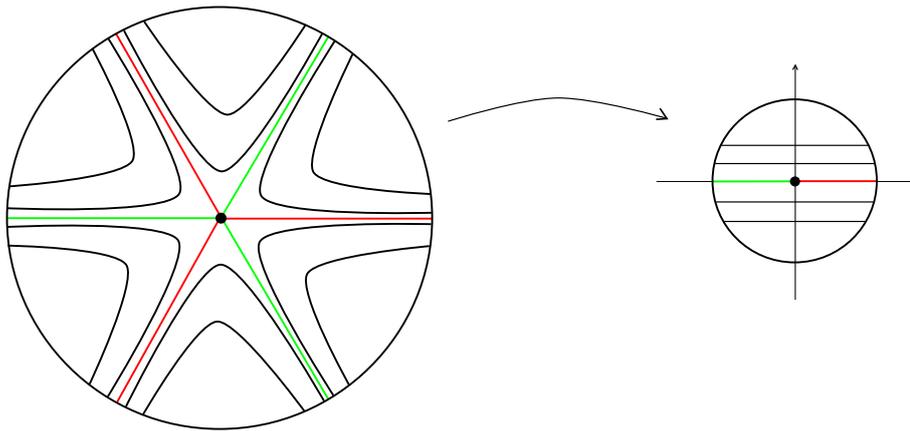


Figura 1.11: Foliiazione intorno ad un punto singolare

Definizione 1.5.2. *Si chiama foliazione orizzontale sulla superficie di traslazione (X, ω) la foliazione singolare ottenuta facendo il pullback della foliazione orizzontale $dy = \text{cost}$ attraverso le carte locali. Analogamente si definisce quella verticale con il pullback di $dx = \text{cost}$.*

Lo studio della foliazione orizzontale è particolarmente interessante, come vedremo nella sezione successiva.

1.6 Foliazione isoperiodica

In questa sezione introdurremo l'oggetto su cui poi andremo a lavorare nel secondo capitolo. Faremo una piccola parentesi sul perché questo oggetto sia molto interessante da studiare, partendo da un esempio tratto da un seminario tenuto da C. McMullen.

Nello spazio di moduli, la foliazione che ha periodi assoluti costanti è detta foliazione isoperiodica o foliazione periodo assoluto (absolute period foliation) o foliazione nucleo (kernel foliation).

Definizione 1.6.1. *Dato uno strato $\mathcal{H}(\alpha) \subset \mathcal{H}_g$ con coordinate dei periodi definite come in 1.3.2 a pagina 14. Si chiama foliazione isoperiodica dello strato la foliazione le cui foglie sono date dalle preimmagini di $\{x\} \times \mathbb{C}^{s-1}$, ovvero quella in cui ogni foglia è individuata da periodi assoluti costanti.*

Nota 1.6.1. *In letteratura i periodi assoluti si trovano anche indicati come*

$$hol(X) = Per(X, \omega).$$

Si ha la seguente proposizione.

Proposizione 1.6.1. *Ogni foglia della foliazione isoperiodica di uno strato $\mathcal{H}(\alpha)$ interseca lo strato minimale $\mathcal{H}(2g-2)$ in un insieme discreto di punti, il quale costituisce a sua volta una foglia della sua foliazione isoperiodica.*

Dimostrazione. Lo strato $\mathcal{H}(2g-2)$, avendo solo un punto singolare, si caratterizza per non avere periodi relativi. Infatti quelli che sono i lacci che si chiudono su di esso sono lacci a tutti gli effetti nel gruppo di omologia della superficie. Formalmente si ha che le coordinate dei periodi in questo strato sono costituite solo dalle prime $2g$ componenti. La foliazione isoperiodica su tale strato è quindi data imponendo che tutte le coordinate siano costanti.

Se ora consideriamo la foliazione isoperiodica di un qualsiasi altro strato $\mathcal{H}(\alpha)$, ogni sua foglia sarà caratterizzata da periodi assoluti costanti che sono diversi al variare delle foglie stesse. Se una di esse intersecasse lo strato minimale in un insieme continuo di punti, questo corrisponderebbe ad avere una sottovarietà di dimensione $2g$ dello strato minimale in cui tutti i periodi sarebbero costanti. Questo contraddice il fatto che su ogni poligono che identifichi una superficie di traslazione posso applicare perturbazioni piccole a piacere sui lati in modo da ottenere un nuovo poligono che abbia periodi assoluti diversi dal primo. \square

Vogliamo ora allargare un po' il discorso per far capire perché tale oggetto sia così interessante e per mostrare più strettamente la connessione tra lo studio delle superfici di traslazione ed i sistemi dinamici in dimensione 1.

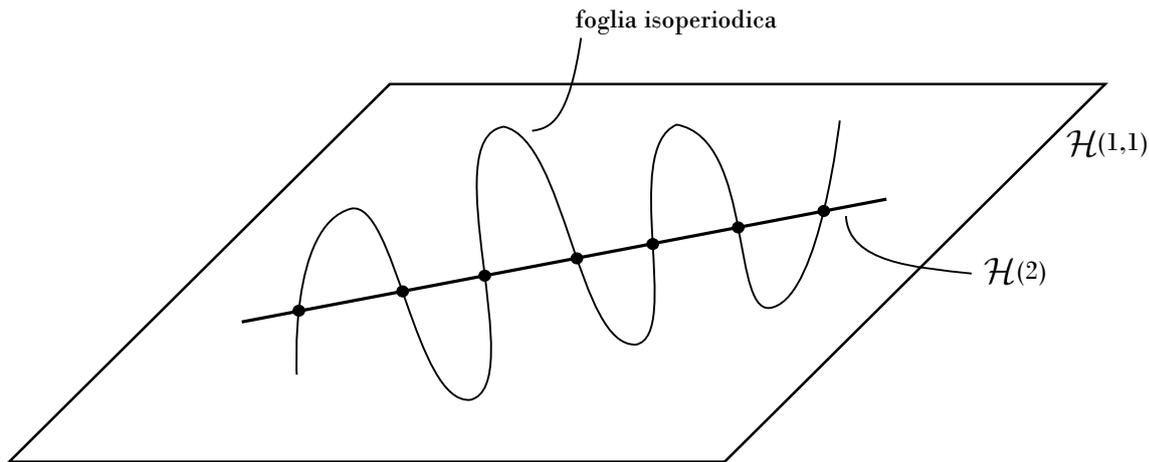


Figura 1.12: Intersezione della foglia isoperiodica in $\mathcal{H}(1,1)$ con $\mathcal{H}(2)$

Esempio 1.6.1 (Rotazioni accoppiate). Data una circonferenza di lunghezza 1, consideriamo su di essa il sistema dinamico dato come segue: applichiamo sulla circonferenza una rotazione di un determinato valore t e chiamiamo tale mappa R_t . Prendiamo poi all'interno di tale circonferenza un segmento di lunghezza L , irrazionale, tagliamolo dalla prima circonferenza ed incolliamo i suoi estremi in modo da ottenere una circonferenza di lunghezza L . Incolliamo anche gli estremi del restante pezzo della circonferenza originale, in modo da ottenerne una seconda di lunghezza $1 - L$. Su entrambe applichiamo poi una rotazione di $-t$, al termine della quale le incolliamo nuovamente in modo da riottenere la circonferenza di lunghezza 1 iniziale. Chiamiamo questa seconda mappa S_t . Possiamo dunque considerare il sistema dinamico descritto dalla funzione $f_t := S_t \circ R_t : S' \rightarrow S'$.

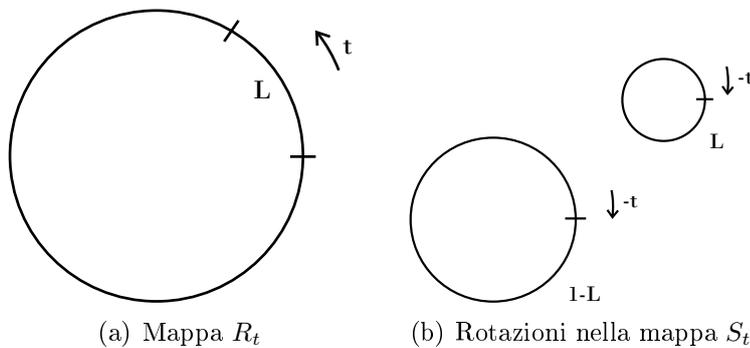


Figura 1.13: Sistema dinamico $f_t := S_t \circ R_t : S' \rightarrow S'$

Uno degli aspetti che si possono studiare della mappa f_t è la sua periodicità. E' una verifica non troppo complicata che tale mappa per valori di t sufficientemente piccoli è periodica. L'insieme dei valori di t per cui essa non è periodica si chiama insieme di biforcazione, usualmente indicato con B_t .

Il modo naturale di condurre questo studio passando da dimensione reale 1 a 2 conduce allo studio delle superfici di traslazione ed alla loro foliazione orizzontale. Il procedimento standard è il seguente.

Dalla circonferenza di lunghezza 1 dell'esempio precedente, costruiamo un cilindro, che dopo una lunghezza arbitraria spezza in due manici, uno di circonferenza L e l'altro di circonferenza $1 - L$. Questi due manici, dopo una seconda lunghezza lungo la quale sono separati, tornano poi ad unirsi per riformare il cilindro di circonferenza 1. Incollando la circonferenza da cui siamo partiti con quella finale otteniamo una superficie di genere 2 con due punti singolari. Su tale superficie è data in modo naturale struttura di traslazione, data come già visto nelle sezioni precedenti attraverso le carte locali. Sarà quindi definita in modo altrettanto naturale la foliazione orizzontale, individuata dalla parte immaginaria della forma differenziale che individua la superficie di traslazione. Il nostro sistema dinamico può essere visto in questi termini: la rotazione R_t consiste nel tagliare il cilindro prima della divisione nei due manici, effettuare la rotazione sulla componente a destra del taglio e poi incollare nuovamente. La mappa S_t consiste in un'operazione simile su entrambi i manici dove la rotazione viene però effettuata di $-t$. Queste due operazioni che non cambiano la struttura della superficie in sé, modificano tuttavia radicalmente la struttura della foliazione orizzontale. E' infatti facile osservare che foglie che prima erano chiuse per diversi valori di t possano diventare aperte o viceversa.

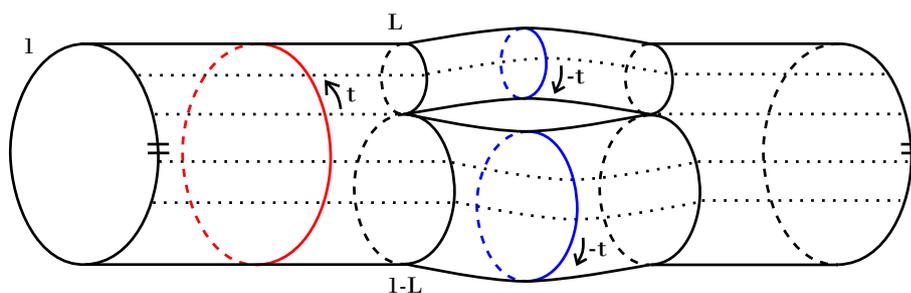


Figura 1.14: Superficie di traslazione del sistema dinamico

La dinamica della foliazione orizzontale sulla superficie di traslazione che abbiamo appena costruito è descritta esattamente dalla mappa f_t . In questo caso l'insieme di biforcazione è dato da quei valori di t per cui la foliazione risulta essere aperiodica (ovvero avere tutte le foglie aperte).

Quello che cambia sulla superficie, al variare di t sono i periodi relativi, mentre restano costanti quelli assoluti.

Abbiamo quindi due fatti:

- Una corrispondenza tra foliazione orizzontale e dinamica del sistema.
- L'invarianza dei periodi assoluti al variare di t .

Mettendo insieme queste due cose possiamo pensare che la foglia isoperiodica in $\mathcal{H}(1, 1)$ individuata dalla nostra superficie sia una sorta di parametrizzazione di tutti i sistemi dinamici del tipo da noi descritto.

In modo analogo possiamo fare lo stesso ragionamento a partire dalle trasformazioni di scambio di intervallo (generalmente abbreviato con I.E.T.), che generalizzano

le rotazioni accoppiate. Questo ci porta allo studio della foliazione orizzontale di superfici di traslazione di genere più alto e quindi in uno strato generico $\mathcal{H}(\alpha) \subset \mathcal{H}_g$. Volendo ampliare ulteriormente il discorso, possiamo trovare un analogo delle I.E.T. nello studio della dinamica delle mappe razionali e più precisamente dei polinomi iterati. L'analogia è in particolare con lo studio della dinamica della famiglia dei polinomi quadratici $x \mapsto x^2 + c$. Così come per le I.E.T. è interessante lo studio dell'insieme di biforcazione, nel caso dei polinomi quadratici su \mathbb{R} ci si concentra sul diagramma di biforcazione, che ci dà una descrizione degli attrattori per tale famiglia.

Analogamente alle I.E.T. che si "sollevano" allo studio delle foliazioni orizzontali su superfici di traslazione, possiamo passare dallo studio della famiglia dei polinomi quadratici in \mathbb{C} del tipo $z \mapsto z^2 + c$. Tale studio porta agli insiemi di Julia, che svolgono lo stesso "ruolo" della foliazione orizzontale nel caso delle superfici di traslazione. Nella nostra analogia allo spazio di moduli, corrisponde l'insieme di Mandelbrot, che parametrizza nei suoi punti gli insiemi di Julia connessi.

Capitolo 2

Falsi ottagoni

L'ottagono, come superficie di traslazione, giace nello strato $\mathcal{H}(2) \subset \mathcal{H}_2$. Lo studio dei falsi ottagoni è quello delle superfici di traslazione $(X, \omega) \in \mathcal{H}(2)$ con $Per(X, \omega) = Per(X_0, \omega_0)$, dove (X_0, ω_0) indica l'ottagono, tali che $(X, \omega) \neq (X_0, \omega_0)$. E' stato congetturato che ne esistano infiniti.

Tale congettura è stata risolta affermativamente in [9], attraverso lo studio delle foliazioni sulle superfici modulari di Hilbert, e in [1], dove gli autori dimostrano che la foliazione isoperiodica è ergodica e da questo fatto deducono il risultato.

Lo studio che si è condotto in questa tesi è stato una dimostrazione semplice di questo fatto che coinvolgesse solo chirurgie topologiche. L'idea è stata quella di considerare la sistola dell'ottagono, ovvero il laccio più corto basato nel punto singolare, considerare che esso è un invariante per distinguere superfici diverse. A partire dall'ottagono abbiamo quindi operato con tagli e cucì topologico cercando di ottenere superfici in cui tale laccio fosse di lunghezze diverse.

2.1 Muovere punti con taglia e cucì

Il primo concetto che dobbiamo introdurre è come muovere un punto singolare su una superficie di traslazione. Come abbiamo già visto un punto singolare è un punto intorno a cui si ha un angolo di $2k\pi$. Abbiamo anche mostrato che in un suo intorno una carta locale è data dalla mappa di rivestimento ramificato $z \mapsto z^k$. Se allora prendiamo un segmento uscente dal punto singolare nella sua immagine in carta, la sua preimmagine sulla superficie sarà una stella uscente dal punto singolare di segmenti di lunghezza uguale a quella del segmento originale.

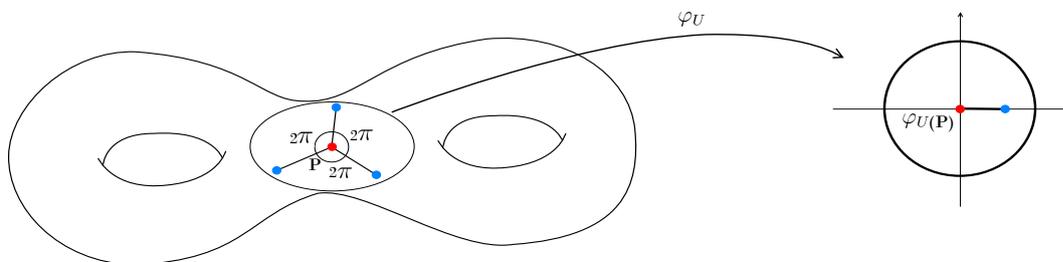


Figura 2.1: Segmenti gemelli nel punto singolare della superficie di traslazione di genere 2.

Definizione 2.1.1. Chiamiamo le copie del segmento sulla superficie gemelle del segmento iniziale. Diciamo che due segmenti nella stella sono adiacenti se tra di essi abbiamo un angolo di 2π .

Nella discussione che stiamo per fare considereremo solo gemelle embedded sulla superficie e che non si intersechino tra loro. Questo servirà poi nella seconda sezione del capito ad evitare che a seguito del tagli e cucì la superficie si disconnetta. Tra due gemelle adiacenti possiamo operare un taglia e cucì topologico per muovere il punto singolare con il seguente procedimento: chiamato P il punto singolare, A, A' i punti finali delle due gemelle, tagliamo lungo PA ed PA' (ogni segmento si intende orientato) partendo dal punto P fino ad arrivare a A (e rispettivamente ad A'). Chiamiamo P' il nuovo punto che si viene a formare all'inizio del taglio. A questo punto abbiamo quattro segmenti, $PA, PA', P'A, P'A'$. Prima di procedere osserviamo che intorno ai punti A, A', P' abbiamo angoli di 2π , i primi due in quanto punti regolari, il terzo in quanto angolo tra gemelle adiacenti. Ora incolliamo i segmenti che abbiamo ottenuto, PA con PA' e AP' con $A'P'$. Il risultato di questa operazione è che al punto singolare P iniziale abbiamo tolto un angolo di 2π e quindi diventerà una singolarità di ordine $k - 1$, il punto A va a coincidere con A' e siccome ciascuno di essi aveva un angolo di 2π si crea in questo punto una nuova singolarità di ordine 2 ed infine il punto P' risulta essere regolare. Osserviamo che questo modo di incollare può essere schematizzato in questo modo.

Proposizione 2.1.1. Chiamiamo a il segmento ottenuto dal taglio di PA che lascia (localmente) la superficie alla sua destra, b quello che lascia la superficie a sinistra. Chiamiamo poi a' il segmento ottenuto dal taglio di PA' che lascia la superficie alla sua sinistra, b' quello che lascia la superficie a destra. Il procedimento sopra descritto equivale ad incollare a con a' e b con b' .

In figura abbiamo la descrizione geometrica di ciò che accade.

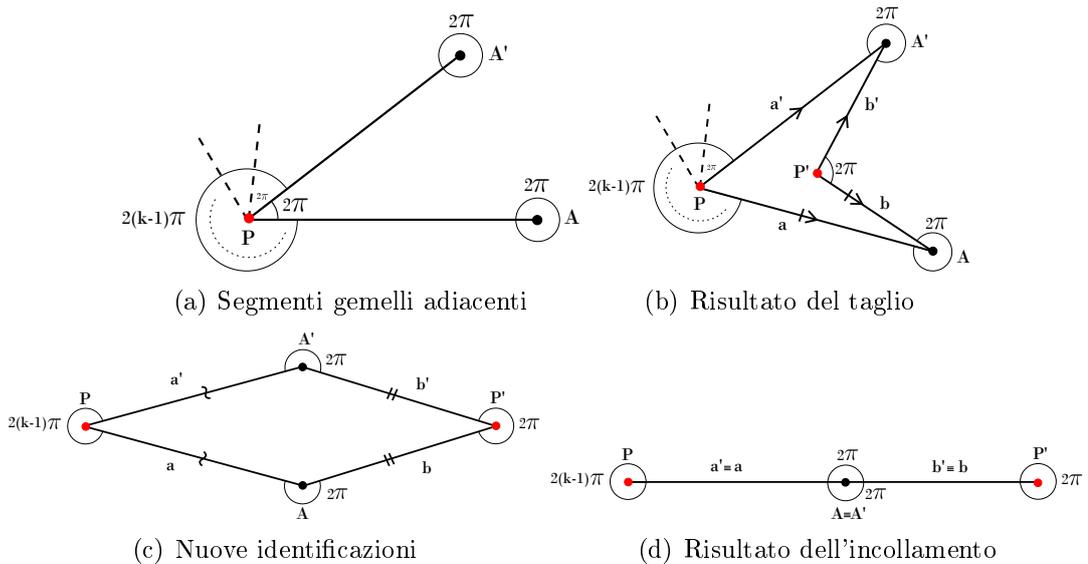


Figura 2.2: Procedimento per muovere un punto singolare

Nel caso dell'ottagono la singolarità è di ordine 3 e quindi ogni segmento che noi consideriamo uscente dal punto singolare avrà due gemelle. Nelle nostre notazioni il segmento iniziale e le due gemelle saranno adiacenti tra loro. L'effetto di un taglia e cuci in una situazione come la nostra comporta lo sdoppiamento della singolarità di ordine 3 in due singolarità di ordine 2, ovvero il passaggio dallo strato $\mathcal{H}(2)$ allo strato $\mathcal{H}(1, 1)$ che a noi non interessa.

Osserviamo tuttavia che se avessimo una gemella che si chiude sul punto singolare formando un laccio ed operassimo il taglia e cuci lungo essa ed un'altra delle due otterremo di aver mosso il punto singolare mantenendo tuttavia un'unica singolarità di ordine 3. Infatti, se il punto A' coincidesse con P , alla fine del movimento avremmo che al punto singolare originale P avremmo tolto 2π dell'angolo in P' aggiungendogli contemporaneamente i 2π dell'angolo in A , così da ottenere di nuovo la singolarità dell'ordine iniziale.

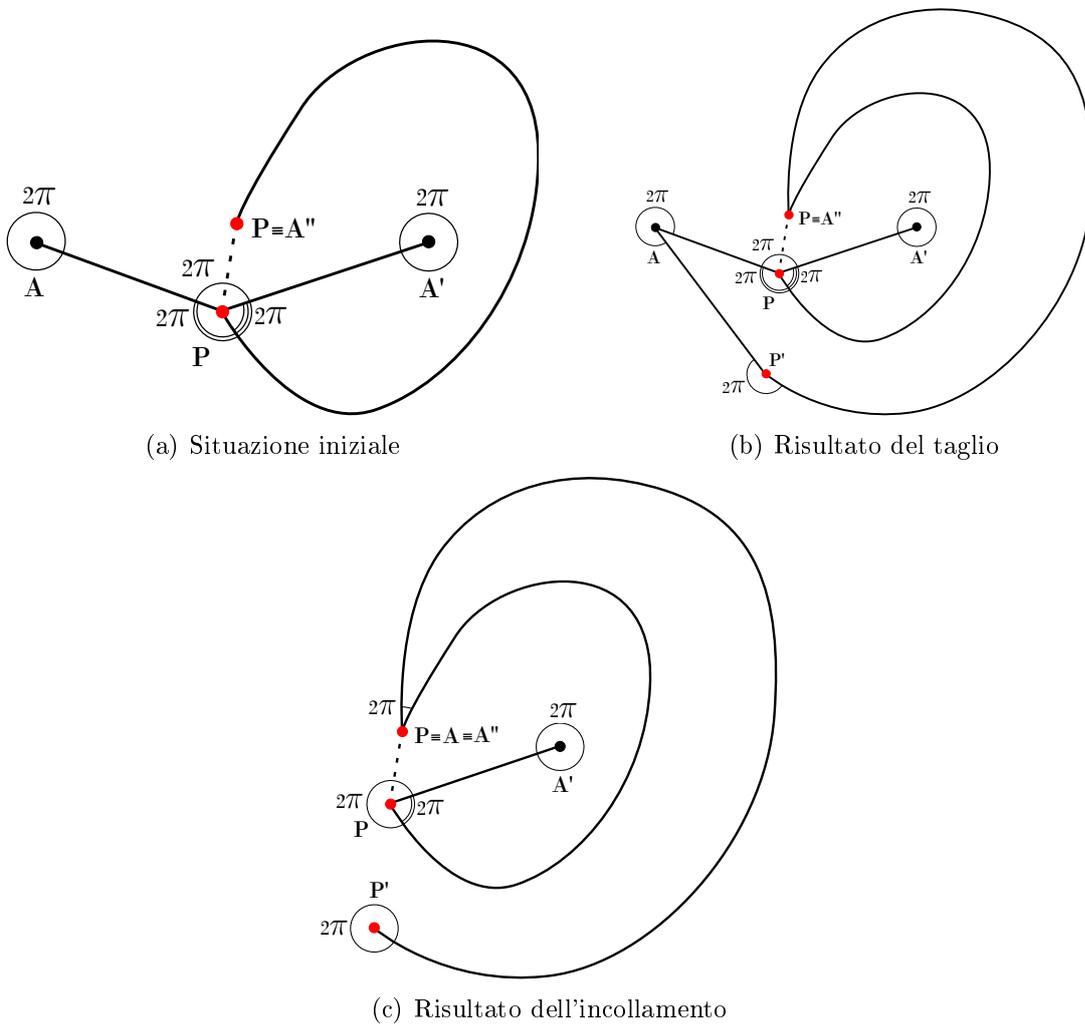


Figura 2.3: Movimento del punto singolare con una gemella chiusa

Prima di passare alla sezione successiva diamo un ultimo risultato.

Proposizione 2.1.2. *I movimenti di un punto singolare su una superficie di traslazione sono le deformazioni isoperiodiche della superficie, ovvero mantengono*

invariati i periodi assoluti della superficie di traslazione modificando invece quelli relativi.

Dimostrazione. Il movimento di un punto singolare è una chirurgia locale e quindi interamente contenuto in un aperto coordinato U_i . Su tale aperto abbiamo definita la mappa sviluppante. Inoltre possiamo sempre trovare un aperto $U \subset U_i$ che abbia intersezione vuota con i segmenti ed i punti coinvolti nella chirurgia. Allora la mappa sviluppante ristretta su tale aperto non cambia durante la chirurgia e conseguentemente, per rigidità non cambia nella sua definizione globale. Ne segue che i periodi assoluti, dati da $\Theta(\gamma) = D(\gamma(p)) - D(p)$, sono indipendenti dal punto iniziale, cioè quello che si voleva. \square

2.2 Tagli iterati sull'ottagono

Una volta visto come spostare il punto singolare in modo da continuare ad ottenere una singolarità di ordine 3, vediamo cosa comporta spostare il punto singolare nell'ottagono.

Nota 2.2.1. *Una volta effettuate le identificazioni, ogni vertice dell'ottagono va a coincidere in un unico punto, quello singolare, che noi chiameremo P . Nel tentativo di dare una descrizione il più precisa possibile di quello che succede, nei disegni abbiamo inserito la notazione al pedice $P_{(i)}$ per indicare i vertici dell'ottagono prima delle identificazioni. Tale notazione è dunque strettamente legata alla posizione del punto. Ad esempio i punti indicati con $P_{(1)}$ e $P_{(2)}$ sono lo stesso punto P in due posizioni diverse sulla figura, mentre i punti $P_{(1)}$ e $P'_{(2)}$ corrispondono a due punti diversi. Ogni segmento è sempre inteso orientato.*

Consideriamo sull'ottagono di lato 1 un segmento uscente dal punto $P_{(1)}$ della stessa lunghezza del lato e parallelo al lato $P_{(2)}P_{(3)}$. Chiamiamo A il suo punto finale. Per trovare le gemelle di tale segmento lo ruotiamo prima in senso orario e poi in senso antiorario di 2π .

Quindi seguendo le identificazioni sui lati otteniamo che la prima gemella è il segmento $P_{(8)}A'$, mentre la seconda la vediamo sui due segmenti identificati $P_{(2)}A''_{(3)} \equiv P_{(2)}P_{(3)}$ e $P_{(7)}A''_{(6)} \equiv P_{(7)}P_{(6)}$ come in figura.

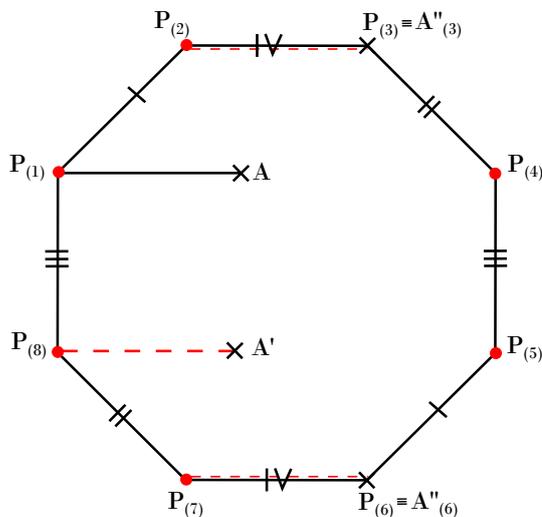


Figura 2.4: Gemelle del segmento $P_{(1)}A$

Seguendo la logica mostrata nella sezione precedente vogliamo muovere il punto singolare P in A tagliando lungo $P_{(1)}A$ e $P_{(2)}P_{(3)} \sim P_{(7)}P_{(6)}$. Osserviamo che tali segmenti sono embedded e privi di autointersezioni. Trascurando quindi il segmento $P_{(8)}A'$, effettuiamo il taglio. Otteniamo quattro segmenti che poi identifichiamo a due a due, seguendo la regola data nella proposizione 2.1.1 a pagina 30. Nel nostro caso il segmento ottenuto dal taglio su $P_{(1)}A$ che ha il poligono sulla sinistra

va incollato con quello ottenuto dal taglio di $P_{(2)}P_{(3)} \sim P_{(7)}P_{(6)}$ che ha il poligono sulla destra. In particolare noi abbiamo che i due segmenti ottenuti dal taglio su $P_{(1)}A$ sono $P_{(1a)}A$ e $P'_{(1b)}A$, che rispettivamente lasciano la superficie a sinistra ed a destra, mentre i due segmenti derivanti dal taglio su $P_{(2)}P_{(3)} \sim P_{(7)}P_{(6)}$ sono $P_{(2)}P_{(3)}$ e $P'_{(7)}P_{(6)}$, che rispettivamente lasciano la superficie a destra ed a sinistra. Quindi incolleremo $P_{(1a)}A$ e $P_{(2)}P_{(3)}$. I due segmenti rimanenti verranno incollati di conseguenza. Vediamo in figura per capire meglio. Per visualizzare meglio le cose dividiamo l'ottagono in due poligoni, il trapezio isoscele superiore e la parte restante. I segmenti tratteggiati dello stesso colore indicano quelli derivanti dal taglio su un segmento, mentre quelli continui colorati individuano le nuove identificazioni dopo il taglio.

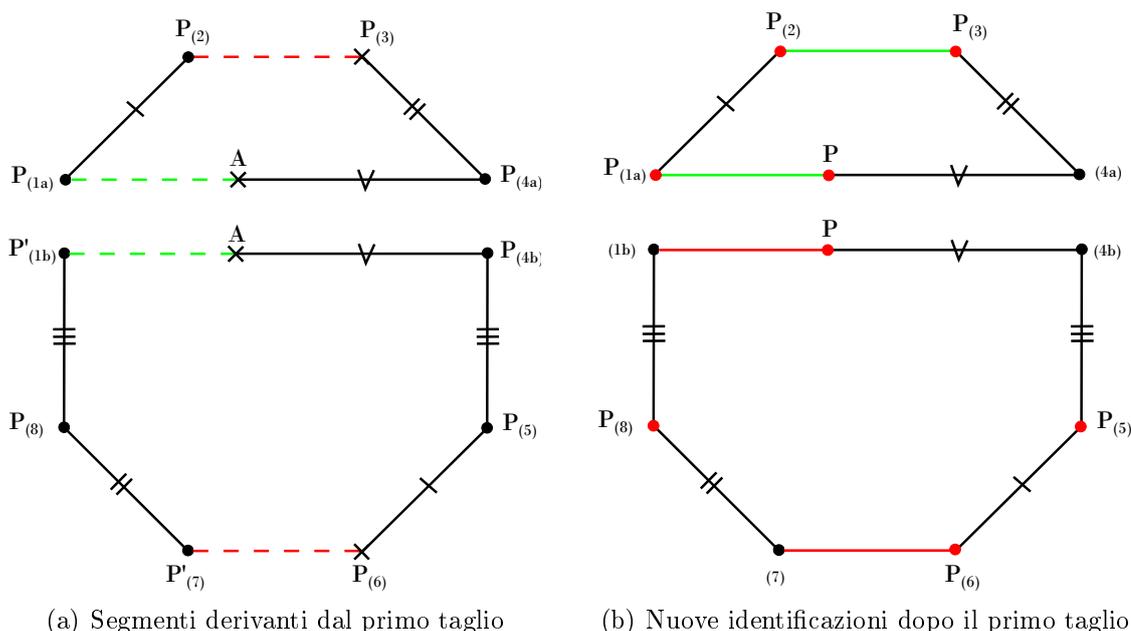


Figura 2.5: Primo movimento del punto singolare

Se seguiamo le nuove identificazioni e rinominiamo i vertici ci accorgiamo che il punto singolare, che continuiamo a chiamare con P e nella figura indichiamo con il pallino rosso, si è spostato come volevamo. Per verificarlo basta contare l'ampiezza dell'angolo che abbiamo intorno ad esso, che risulta essere 6π . Notiamo anche che i punti in posizione $(1b)$, $(4a)$, $(4b)$, (7) , che prima erano copie del punto singolare, ora corrispondono ad un punto regolare.

Nota 2.2.2. *Nei disegni seguenti il punto marcato in rosso indicherà sempre il punto singolare mentre i punti marcati in nero quelli regolari. Ogni tratteggio indicherà sempre un taglio ed ogni linea continua colorata l'identificazione tra segmenti.*

Ora a partire da questa nuova configurazione effettuiamo un altro taglio, partendo dal punto singolare appena creato P , seguendo la direzione orizzontale e muovendoci sempre di lunghezza 1. Seguendo lo stesso ragionamento fatto per il primo taglio, cerchiamo le due gemelle (che risultano sempre essere i segmenti $P_{(8)}A'$ e $P_{(2)}P_{(3)}$ con il suo identificato), tagliamo lungo quella chiusa ed incolliamo

sempre seguendo la proposizione 2.1.1 a pagina 30. Otteniamo la configurazione in figura 2.6.

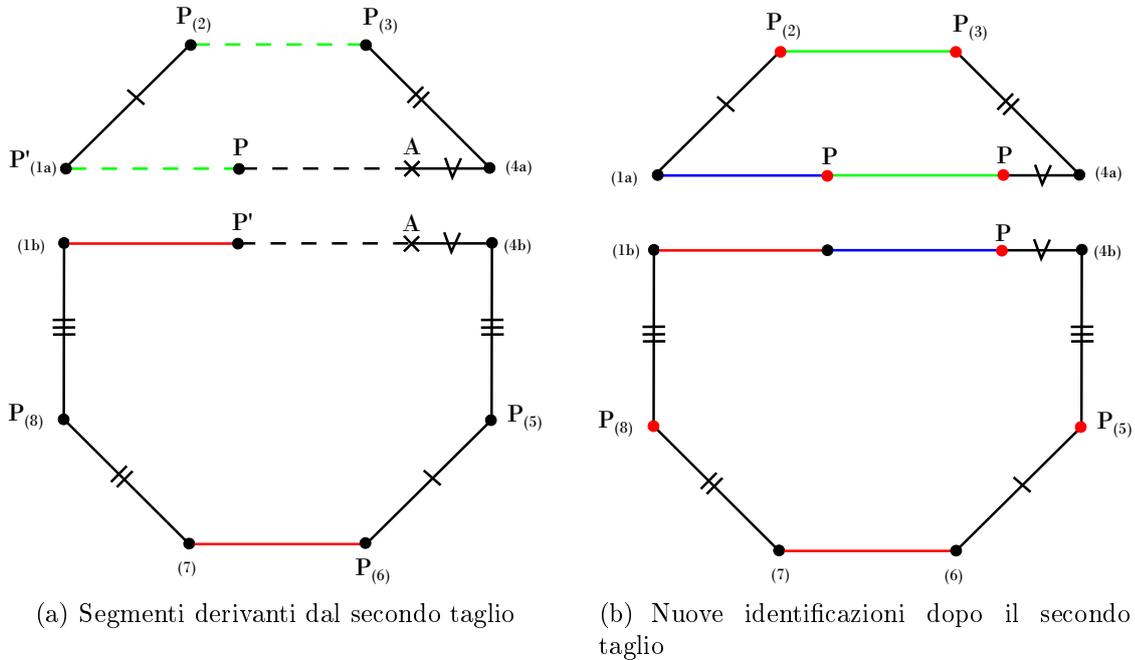


Figura 2.6: Secondo movimento del punto singolare

A questo punto iteriamo il ragionamento, tagliando sempre in orizzontale, sempre nello stesso verso, sempre uscendo dal punto singolare appena creato e sempre della lunghezza 1. Il terzo ed il quarto taglio che andiamo ad operare sono un po' più complicati in quanto bisogna seguire con attenzione dov'è il segmento lungo il quale vogliamo effettuare il taglio. Quando infatti vogliamo individuare il segmento di lunghezza 1 su cui fare il terzo taglio, essendo la base maggiore del nostro trapezio (ovvero il segmento (1a)(4a) di lunghezza $1 + \sqrt{2}$, siamo costretti a proseguire seguendo le identificazioni lungo la base del poligono inferiore (il segmento (7)(6)) per quanto riguarda la parte restante del segmento sulla base del trapezio, lungo il lato in alto del poligono inferiore (il segmento (1b)(4b)) per quanto riguarda quella del segmento nel poligono inferiore. Alla stessa maniera quando opereremo il quarto taglio. In ognuno di questi casi le due gemelle del segmento lungo cui si si vuole muovere sono sempre $P_{(8)}A'$ e $P_{(2)}P_{(3)}$ con il suo identificato. Si vedano le figure 2.7 e 2.8. Per non appesantire troppo le figure sono omesse le identificazioni sui lati che non vengono toccati dai tagli.

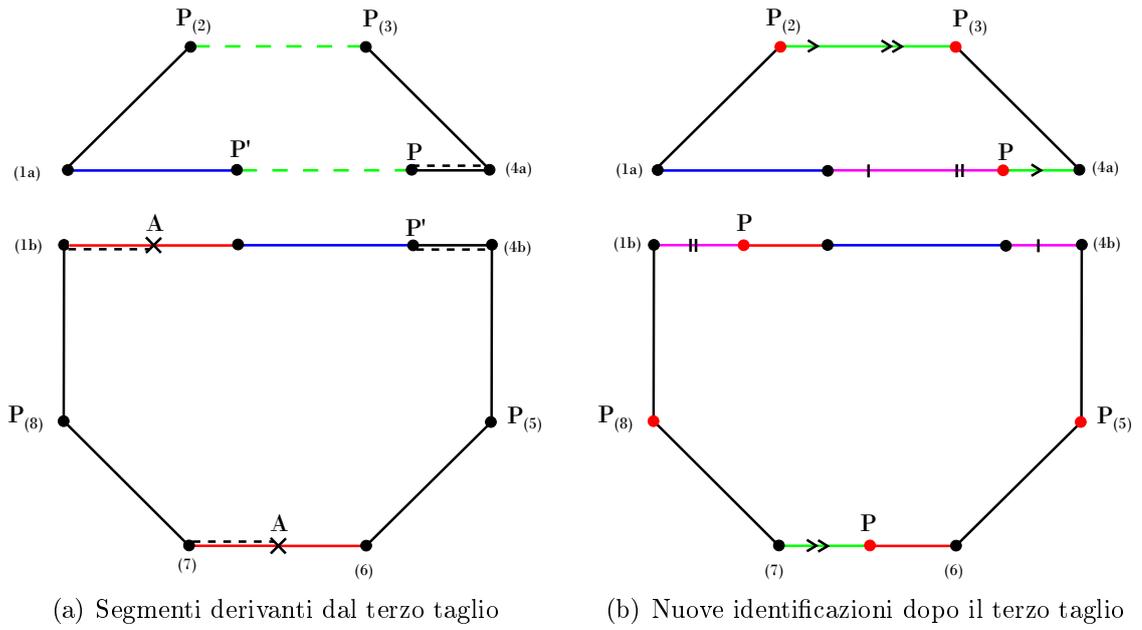


Figura 2.7: Terzo movimento del punto singolare.

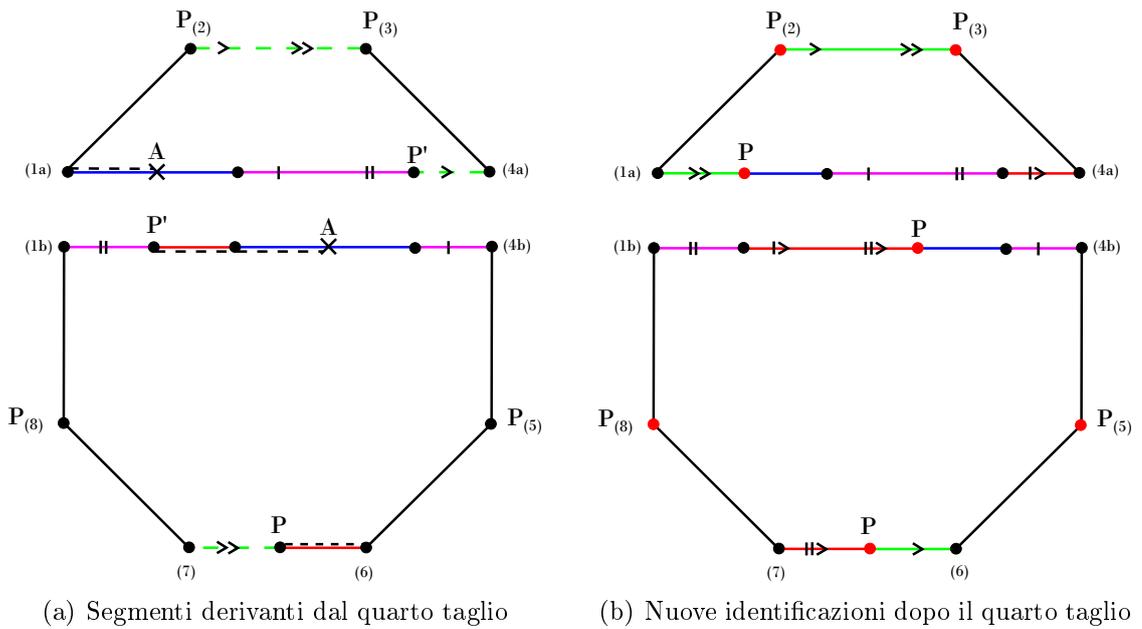


Figura 2.8: Quarto movimento del punto singolare.

Possiamo pensare a questo punto di iterare il procedimento di taglio all'infinito. Abbiamo dimostrato il seguente teorema.

Teorema 2.2.1. *Ad ogni iterazione del procedimento di tagli l'ottagono, presentato nella sua scomposizione in poligono superiore ed inferiore, è tale che:*

- *Le identificazioni sui lati non orizzontali sono le stesse dell'ottagono di partenza.*
- *Il punto singolare compare sempre nelle posizioni (2), (3), (5), (8) e lungo il segmento (1b)(4b).*
- *Le identificazioni sui lati orizzontali sono date da una delle tre seguenti configurazioni (si veda la figura 2.2 nella pagina seguente):*

I) Il punto singolare derivante dallo spostamento precedente compare sul segmento (1a)(4a) a distanza minore o uguale a 1 dal punto in (1a). Il segmento di lunghezza 1 che lo precede viene identificato con $P_{(2)}P_{(3)}$. Tale identificazione crea una copia del punto singolare anche sul segmento (7)(6). Il segmento di lunghezza 1 che precede tale copia si identifica con quello della stessa lunghezza che precede il punto singolare su (1b)(4b), ovunque esso sia posizionato. La parte rimanente del segmento (1b)(4b) viene identificata per traslazione con quella rimanente sui due segmenti (1a)(4a) e (7)(6).

II) Il punto singolare derivante dallo spostamento precedente compare sul segmento (1a)(4a) a distanza compresa tra 1 e $1 + \sqrt{2}$ dal punto in (1a). Il segmento di lunghezza 1 che lo precede viene identificato con $P_{(2)}P_{(3)}$. Tale identificazione crea un'altra copia del punto singolare sul segmento (1a)(4a). Il segmento di lunghezza 1 che precede tale copia si identifica con quello della stessa lunghezza che precede il punto singolare su (1b)(4b), ovunque esso sia posizionato. La parte rimanente del segmento (1b)(4b) viene identificata per traslazione con quella rimanente sui due segmenti (1a)(4a) e (7)(6).

III) Il punto singolare derivante dallo spostamento precedente compare sul segmento (7)(6) a distanza minore di 1 dal punto in (7). Il segmento di lunghezza 1 che lo precede viene identificato con $P_{(2)}P_{(3)}$. Tale identificazione crea una copia del punto singolare sul segmento (1a)(4a). Il segmento di lunghezza 1 che precede tale copia si identifica con quello della stessa lunghezza che precede il punto singolare su (1b)(4b), ovunque esso sia posizionato. La parte rimanente del segmento (1b)(4b) viene identificata per traslazione con quella rimanente sui due segmenti (1a)(4a) e (7)(6).

- *Le gemelle del segmento su cui si opera il taglio sono sempre i due segmenti $P_{(8)}A'$ e $P_{(2)}P_{(3)}$ (con il suo identificato). In particolare sono gli unici segmenti orizzontali di lunghezza 1 uscenti da una copia del punto singolare completamente contenuti nel poligono. Conseguentemente risultano sempre embedded sulla superficie.*

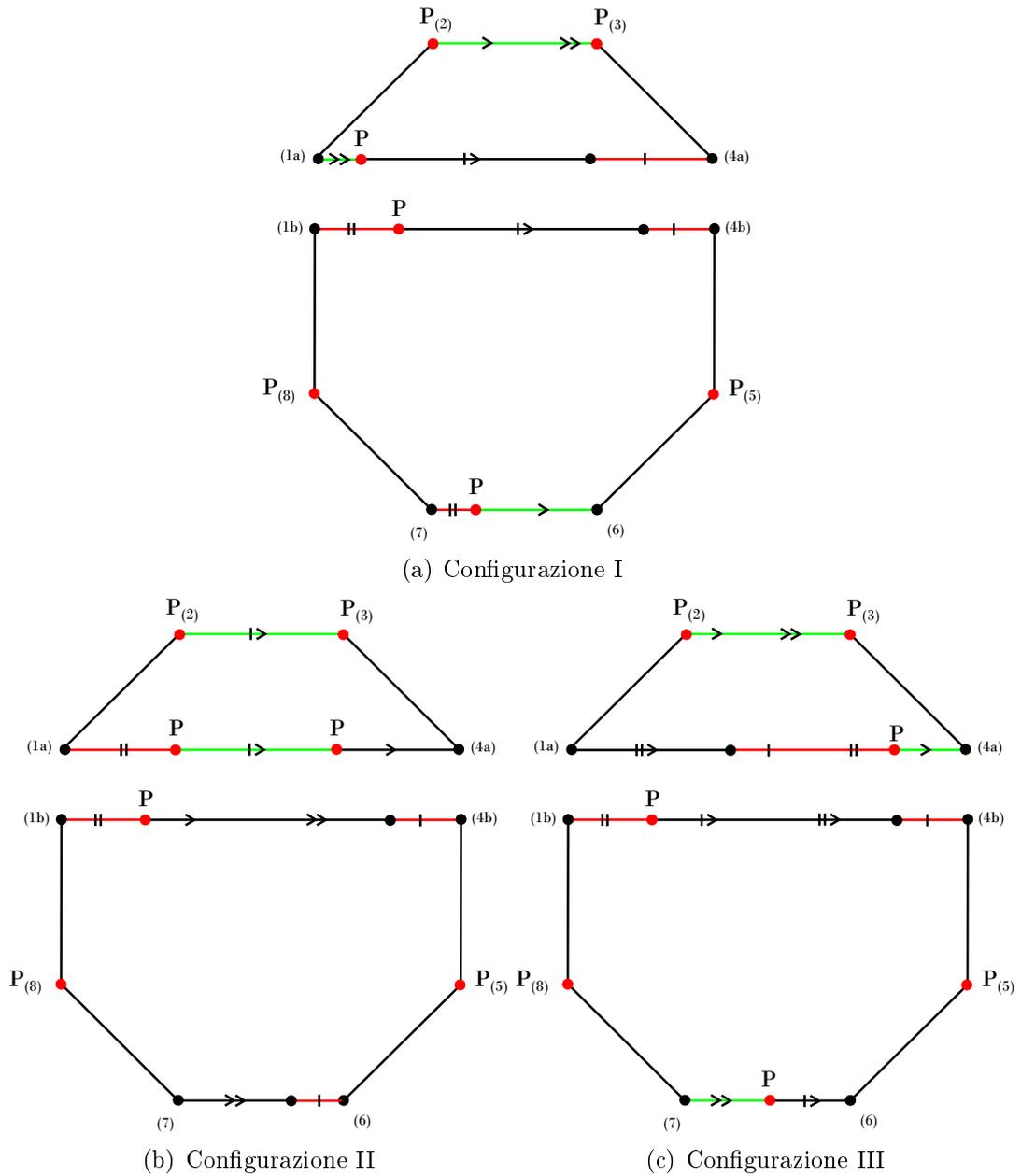


Figura 2.9: Configurazioni possibili all'iterazione generica del processo di tagli.

Dimostrazione. Procediamo per induzione sul numero di tagli.

$k=1$) Corrisponde al primo taglio (figure 2.2 a pagina 33 2.5 a pagina 34) operato sull'ottagono e quindi tutte le condizioni sono soddisfatte. In particolare il primo taglio corrisponde ad una configurazione di tipo I.

$k=n$) Dato l'ottagono in una delle configurazioni mostriamo che al taglio successivo valgono ancora tutte le condizioni. Studiamo singolarmente le singole configurazioni.

Configurazione I) Partendo dall'ottagono nella prima configurazione al passo generico, seguiamo il procedimento fatto per i primi tagli. Individuato dunque il segmento di lunghezza 1 uscente dal punto singolare su $(1a)(4a)$,

ruotandolo di 2π prima in senso orario e poi in senso antiorario seguendo le identificazioni, si verifica che le due gemelle sono esattamente $P_{(8)}A'$ e $P_{(2)}P_{(3)}$. Tali segmenti, essendo embedded in un dominio fondamentale della nostra superficie, lo sono anche una volta effettuati gli incollamenti e quindi non danno problemi.

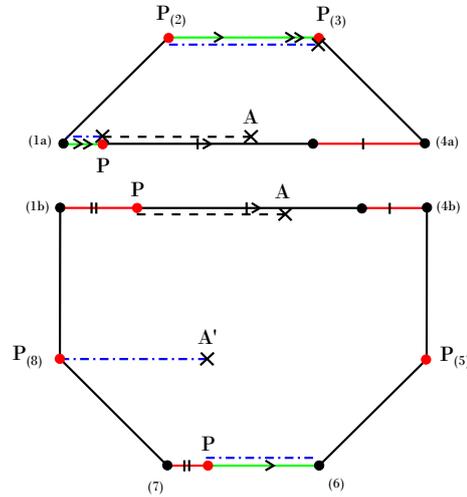
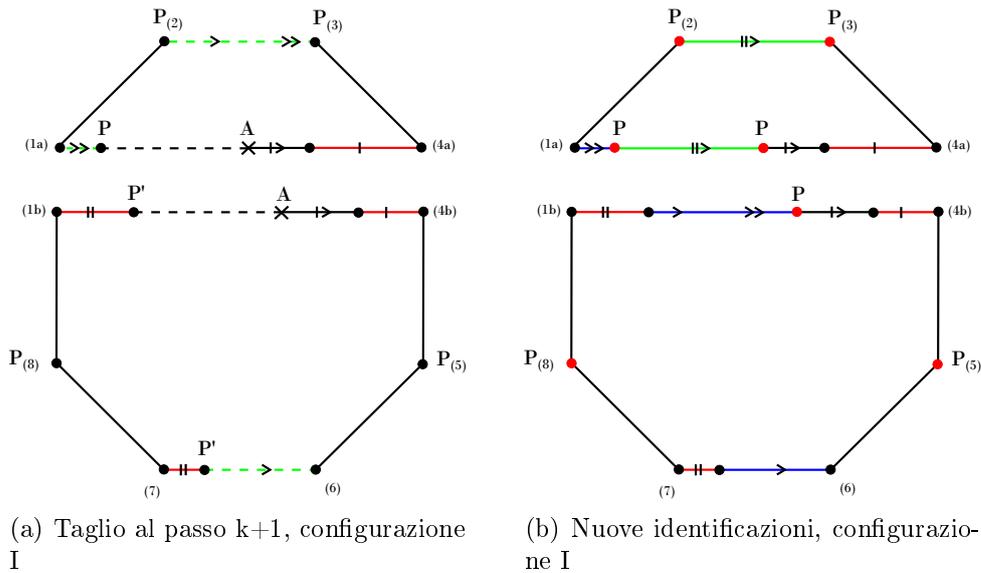


Figura 2.10: Gemelle del segmento, configurazione I

Trascurando dunque $P_{(8)}A'$ effettuiamo il taglio lungo il nostro nuovo segmento e $P_{(2)}P_{(3)}$. A seguire identifichiamo i lati seguendo la proposizione 2.1.1 a pagina 30. Segue che il segmento derivante dal taglio lungo PA che sta nel poligono superiore si identifica con $P_{(2)}P_{(3)}$, mentre i due segmenti restanti vengono identificati tra loro. Controllando le rimanenti identificazioni si verifica che siamo in una configurazione di tipo II.



(a) Taglio al passo $k+1$, configurazione I

(b) Nuove identificazioni, configurazione I

Figura 2.11: Taglio ed identificazione al passo $k+1$, configurazione I

In questo procedimento sono rimaste invariate le identificazioni sui lati non orizzontali ed è immediato verificare che il punto singolare compare sempre nelle posizioni (2), (3), (5), (8).

Configurazione II) Partendo dall'ottagono nella seconda configurazione al passo generico ripetiamo il ragionamento fatto per la prima configurazione. A partire dal punto singolare su (1a)(4a) più vicino al punto in (4a) individuiamo il segmento su cui andare a tagliare. A seconda della distanza di tale punto da (4a), il nostro segmento sarà completamente contenuto in (1a)(4a) oppure proseguirà lungo (7)(6). Analogamente a prima, ruotandolo di 2π prima in senso orario e poi in senso antiorario e seguendo le identificazioni, si verifica che le due gemelle sono esattamente $P_{(8)}A'$ e $P_{(2)}P_{(3)}$. Anche in questo caso essi risultano embedded.

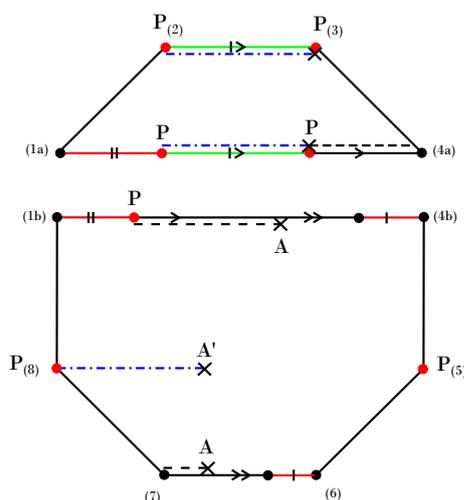


Figura 2.12: Gemelle del segmento, configurazione II

Trascurando dunque $P_{(8)}A'$ effettuiamo il taglio lungo PA e $P_{(2)}P_{(3)}$. Con lo stesso ragionamento fatto per la prima configurazione diamo le nuove identificazioni. In questo caso a seguito della chirurgia ci troveremo nuovamente in una configurazione di tipo II se il punto singolare da cui siamo partiti era a distanza maggiore di 1 dal punto in (4a), altrimenti in una configurazione di tipo III. Anche in questo caso sono rimaste invariate le identificazioni sui lati non orizzontali ed è immediato verificare che il punto singolare compare sempre nelle posizioni (2), (3), (5), (8).

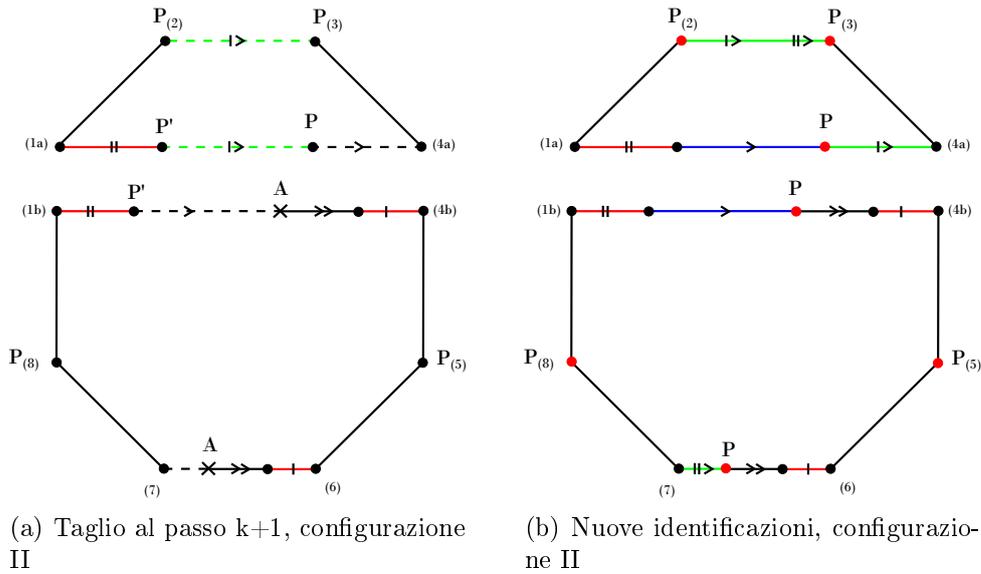


Figura 2.13: Taglio ed identificazione al passo $k+1$, configurazione II

Configurazione III) Partendo infine dall'ottagono nella terza configurazione al passo generico ripetiamo il ragionamento per le due configurazioni precedenti. A partire dal punto singolare su $(7)(6)$, individuamo il segmento su cui andare a tagliare. Analogamente a prima, ruotandolo di 2π prima in senso orario e poi in senso antiorario e seguendo le identificazioni, si verifica che le due gemelle sono esattamente $P_{(8)}A'$ e $P_{(2)}P_{(3)}$. Anche in questo caso esse risultano embedded.

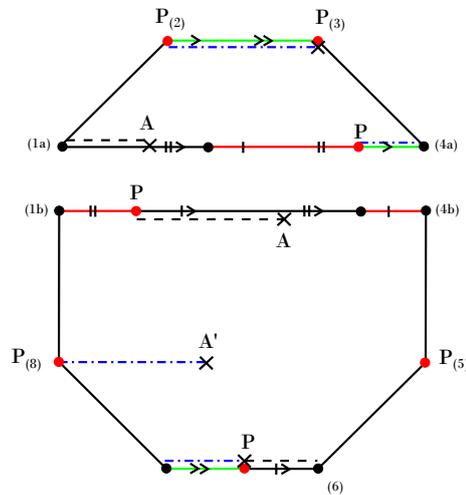


Figura 2.14: Gemelle del segmento, configurazione III

Trascurando dunque $P_{(8)}A'$ effettuiamo il taglio lungo PA e $P_{(2)}P_{(3)}$. Con lo stesso ragionamento fatto per la prima configurazione diamo le nuove identificazioni. Al termine della chirurgia ci troveremo in una configurazione di tipo I. Infine notiamo che sono rimaste invariate le identificazioni sui lati non orizzontali ed è immediato verificare che il punto singolare compare sempre nelle posizioni $(2), (3), (5), (8)$.

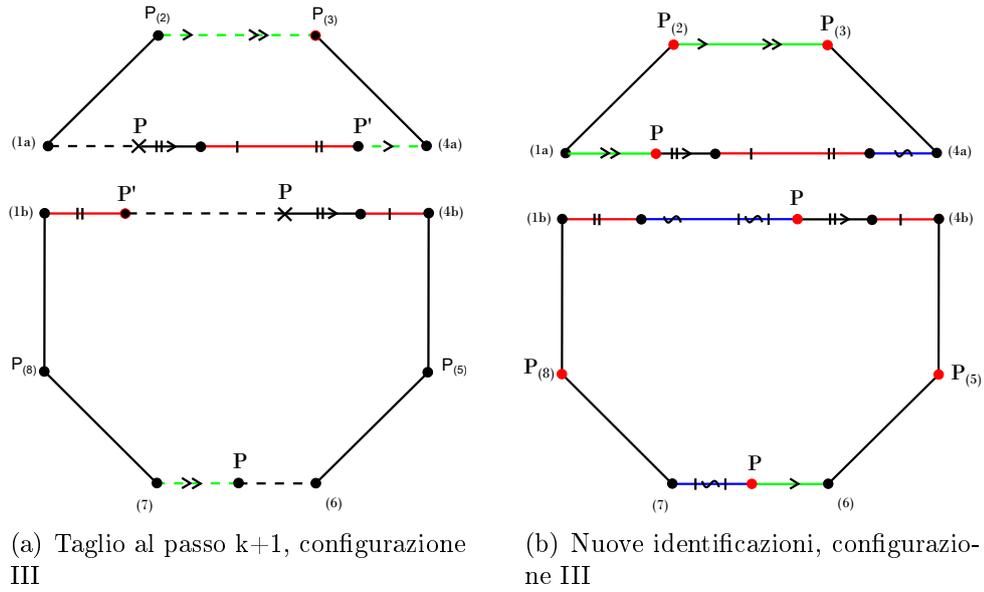


Figura 2.15: Taglio ed identificazione al passo $k+1$, configurazione III

Quindi supposto vero il passo generico abbiamo mostrato che al taglio successivo valgono tutte le proprietà quindi per induzione il teorema è dimostrato. \square

Corollario 2.2.1. *Ad ogni passo dell'iterazione compare sempre almeno una copia del punto singolare P sul segmento (1a)(4a). In particolare ad ogni passo abbiamo sempre una copia del punto singolare su (1a)(4a) e (7)(6) nella posizione in cui era stato spostato al passo precedente.*

Dimostrazione. La prima parte segue immediatamente dal teorema. Per la seconda basta notare che il punto da cui esce il segmento su cui andare a tagliare su (1a)(4a) e (7)(6) è il punto iniziale del segmento che andrà poi identificato con $P_{(2)}, P_{(3)}$. \square

Corollario 2.2.2. *Il processo di tagli è ciclico. In particolare, scritto $k = q_a(2 + \sqrt{2}) + r_a$ e $k = q_b(1 + \sqrt{2}) + r_b$ con $q_a, q_b \in \mathbb{Z}^+$, $0 < r_a < 2 + \sqrt{2}$ e $0 < r_b < 1 + \sqrt{2}$, si ha che:*

- r_b rappresenta la distanza del punto singolare P sul segmento (1b)(4b) dal punto in posizione (1b) sull'ottagono. All'occorrenza indicheremo con P_{r_b} il punto sul segmento (1b)(4b)
- r_a rappresenta la distanza del punto singolare P sul segmento (1a)(4a) dal punto in posizione (1a) sull'ottagono se $0 < r_a < 1 + \sqrt{2}$, altrimenti P si trova sul segmento (7)(6) ed $r_a - (1 + \sqrt{2})$ è la sua distanza dal punto in posizione (7). Indicheremo all'occorrenza tale punto con P_{r_a} . In particolare quindi si ha:
 - se $0 < r_a \leq 1$ allora la configurazione dell'ottagono è I
 - se $1 < r_a < 1 + \sqrt{2}$ allora la configurazione dell'ottagono è II
 - se $1 + \sqrt{2} < r_a < 2 + \sqrt{2}$ la configurazione dell'ottagono è III

Dimostrazione. Per mostrare che il procedimento è ciclico basta osservare che se al passo k ed al passo $k + 1$ siamo in una configurazione di tipo II, il passo $k + 2$ necessariamente ci porta ad una configurazione di tipo III. Questo per semplici questioni di misura: se al passo k e $k + 1$ siamo in configurazione II, significa che il punto singolare nel quale ci siamo spostati al passo k è a distanza compresa tra 1 e $\sqrt{2}$ dal punto in $(1a)$. Quindi al passo $k + 1$ sarà a distanza compresa tra 2 e $1 + \sqrt{2}$ dal punto in $(1a)$. Necessariamente al passo successivo il segmento su cui vogliamo effettuare il taglio proseguirà lungo il segmento $(7)(6)$, portandoci ad una configurazione di tipo III.

Per il resto della proposizione bisogna osservare che al passo generico dell'algoritmo di tagli sono identificati i punti $(1a) \sim (6)$, $(4a) \sim (7)$ e $(1b) \sim (4b)$. Le prime due coppie creano un laccio di lunghezza $2 + \sqrt{2}$, mentre la terza dà origine ad un laccio di lunghezza $1 + \sqrt{2}$. Il procedimento di tagli ad ogni passo sposta il punto singolare lungo questi due segmenti di una lunghezza 1 . Stiamo quindi pensando di "avvolgere" \mathbb{Z} su queste due circonferenze. Ad ogni passo dell'iterazione la distanza dal punto che base sulle due circonferenze (rispettivamente $(1a)$ e $(1b)$) corrisponderà proprio alla classe di resto rispettivamente modulo $2 + \sqrt{2}$ o $1 + \sqrt{2}$. \square

D'ora in avanti ci riferiremo a $k \in \mathbb{Z}^+$ come k -esimo taglio o k -esima iterazione del processo di taglio, che abbrevieremo per comodità con k -esima iterazione. Come nelle notazioni del corollario quando ci riferiremo a k ad esso associamo automaticamente q_a, q_b, r_a, r_b . Quando non ci sarà ambiguità scriveremo solo q o r senza notazione al pedice.

Corollario 2.2.3. *Sia $k \in \mathbb{Z}^+$ tale che $k = q(2 + \sqrt{2}) + r$, con $1 + \sqrt{2} < r < 2 + \sqrt{2}$ e $q \in \mathbb{Z}^+$; allora $k + 1 = (q + 1)(2 + \sqrt{2}) + r'$, dove $r' = r - (1 + \sqrt{2})$.*

Geometricamente questo vuol dire che la posizione del punto singolare quando si passa dalla configurazione III alla I, la distanza del punto singolare dal punto in (7) nella configurazione III è uguale alla distanza del nuovo punto singolare dal punto in $(1a)$ nella configurazione I.

Dimostrazione. Dalle due scritture $k = q(2 + \sqrt{2}) + r$ e $k + 1 = (q + 1)(2 + \sqrt{2}) + r - (1 + \sqrt{2})$ basta ricavare r , imporre l'uguaglianza e verificare che è sempre vera. \square

Per poter passare alla dimostrazione di esistenza di infiniti falsi ottagonì è bene dare un ultimo risultato.

Lemma 2.2.1. *Per ogni coppia di indici dell'iterazione diversi tra loro $k_1 = q_1(2 + \sqrt{2}) + r_1$ e $k_2 = q_2(2 + \sqrt{2}) + r_2$, con $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}^+$ e $0 < r_1, r_2 < 2 + \sqrt{2}$, si ha che $r_1 \neq r_2$.*

Dimostrazione. Ragionando per assurdo, se i due resti fossero uguali avremmo l'uguaglianza

$$k_1 - k_2 = q_1(2 + \sqrt{2}) - q_2(2 + \sqrt{2})$$

dove il primo membro è un intero e questo forza al secondo membro $q_1 = q_2$, da cui segue $k_1 = k_2$, contro le ipotesi. \square

Quindi con il susseguirsi delle iterazioni abbiamo che la copia del punto singolare P appena mossa comparirà sempre in una posizione diversa all'interno dei segmenti $(1a)(4a)$ e $(7)(6)$ creandovi quindi una successione infinita di punti diversi. Tuttavia questi due segmenti sono compatti. Quindi al variare di $k \in \mathbb{Z}^+$ troveremo su di essi un insieme denso di punti. In particolare questo accadrà anche se ci restringiamo all'intervallo $[0, 1 + \sqrt{2}]$, corrispondente al segmento $(1a)(4a)$. Questo è la chiave su cui si basa la dimostrazione dell'esistenza di infiniti falsi ottagoni.

2.3 Esistenza di infiniti falsi ottagoni

Per poter mostrare che esistono infiniti falsi ottagoni, che sono quelli che mano a mano si ottengono nel procedimento sviluppato nella sezione precedente, abbiamo bisogno di un invariante per capire quando due di essi sono diversi. Introduciamo quindi un nuovo elemento.

Definizione 2.3.1. *Chiamiamo sistola di una superficie di traslazione una connessione di sella chiusa di lunghezza minima sulla superficie.*

Osservazione 2.3.1. *L'esistenza della sistola su una superficie di traslazione è ovvia. Non si ha tuttavia l'unicità. Se ad esempio consideriamo la seconda iterazione dei tagli costruita nella sezione precedente è evidente che nel poligono superiore compaiono 2 sistole. Più banalmente, l'ottagono ne ha 4, corrispondenti ai 4 lati dopo l'identificazione.*

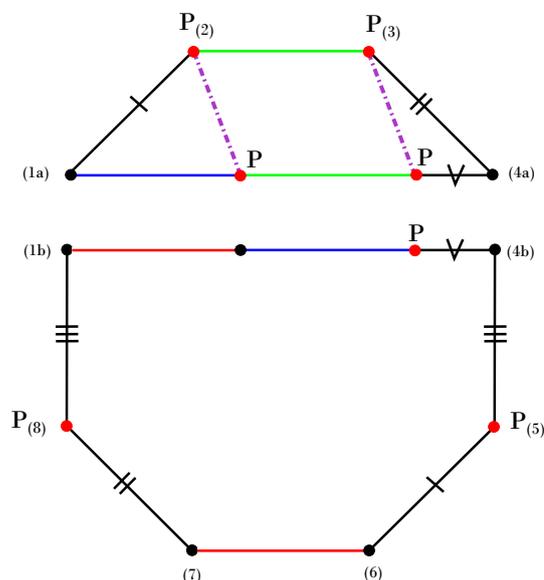


Figura 2.16: Due sistole della stessa lunghezza, iterazione $k = 2$

Vogliamo usare la sistola per dire che due superfici di traslazione aventi sistole differenti sono diverse.

Nota 2.3.1. *Chiameremo con $(X, \omega_k) \equiv X_k$ la superficie di traslazione ottenuta alla k -esima iterazione del processo di taglio.*

Proposizione 2.3.1. *Sia X_k la superficie di traslazione corrispondente alla k -esima iterazione del processo di tagli, scomposta come prima in poligono superiore ed inferiore. Allora ogni sistola è sempre contenuta nel poligono superiore.*

Dimostrazione. Consideriamo la palla di raggio 1 centrata nel punto singolare P . Analizziamo quello che succede per ogni settore della palla uscente dal punto singolare nelle diverse posizioni sull'ottagono. Nel poligono inferiore i settori uscenti

dai punti $P_{(8)}$ e $P_{(5)}$ non intersecano il segmento (7)(6) tranne che ai suoi estremi, corrispondenti ai valori $1 + \sqrt{2}$ e $2 + \sqrt{2}$ di r_a . Tuttavia $r_a \neq 2 + \sqrt{2}$ per ipotesi ed $r_a \neq 1 + \sqrt{2}$, perché $k, q \in \mathbb{Z}^+$. Analogamente tali settori intersecano solo negli estremi il segmento (1b)(4b) e quindi, visto che il punto P si sposta sui segmenti (7)(6) e (1b)(4b), la sua distanza da $P_{(8)}$ e $P_{(5)}$ sarà maggiore o uguale a 1, ovvero nel poligono inferiore la distanza tra due copie del punto P è sempre maggiore o 1. Invece nel poligono superiore il punto P si muove lungo (1a)(4a). Se tracciamo dunque i due settori della palla uscenti da $P_{(2)}$ e $P_{(3)}$ questi vanno a coprire tutta la superficie del poligono. Per il corollario 2.2.1 a pagina 42 il punto singolare P compare sempre in almeno una copia su (1a)(4a). Abbiamo quindi che una copia del punto P ricadrà sempre all'interno di una di questi due settori. Poiché essi hanno intersezione che interseca (1a)(4a) in un segmento, si ha che la distanza tra una copia di P su (1a)(4a) e uno tra $P_{(2)}$ e $P_{(3)}$ sarà minore di 1. In figura abbiamo la situazione per un passo generico dell'iterazione di tagli.

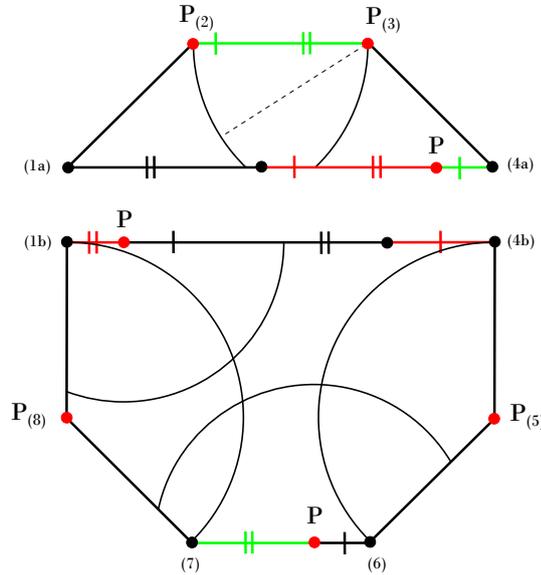


Figura 2.17: Palla di raggio 1 centrata in P .

□

Corollario 2.3.1. *Per ogni superficie X_k la sistola è la distanza minima tra il punto P_{r_a} ed i punti $P_{(1)}$ e $P_{(2)}$ se $0 < r_a < 1 + \sqrt{2}$ oppure tra P_{r_a-1} ed i punti $P_{(1)}$ e $P_{(2)}$ se $1 + \sqrt{2} < r_a < 2 + \sqrt{2}$.*

Dimostrazione. Segue dalla proposizione 2.3.1 e dal corollario 2.2.1 a pagina 42.

□

Osserviamo poi che nella nostra iterazione abbiamo poligoni corrispondenti a tagli diversi che hanno tuttavia la stessa sistola (ad esempio per $k = 1, 2, 3$). Per capire con che regolarità ciò accade diamo prima una definizione preliminare.

Definizione 2.3.2. Per ogni $q \in \mathbb{N}$ poniamo $K_q = \{k \in \mathbb{Z}, k > 0 | k = q(2 + \sqrt{2}) + r, 0 < r < 2 + \sqrt{2}\}$. Esso corrisponde al numero di iterazioni successive necessarie per tornare dalla configurazione I in sé stessa.

Lemma 2.3.1. La cardinalità di K_q è uguale a 3 o a 4.

Dimostrazione. Consideriamo un elemento $k \in K_q$ tale che $r < r_1$ per ogni altro $k_1 \in K_q$. Allora $r < 1$, altrimenti $k - 1 \in K_q$ e $k - 1 = q(2 + \sqrt{2}) + r - 1$, con $0 < r - 1 < r < 2 + \sqrt{2}$. Allora abbiamo che:

- $q(2 + \sqrt{2}) + r + 1 = k + 1 \in K_q$ poiché $r + 1 < 3 < 2 + \sqrt{2}$; questo vale anche per $k + 2$.
- $q(2 + \sqrt{2}) + r + 3 = k + 3 \in K_q \Leftrightarrow r + 3 < 2 + \sqrt{2}$
- $q(2 + \sqrt{2}) + r + j = k + j \notin K_q \forall j \in \mathbb{N}, j > 3$ essendo $r + j > 2 + \sqrt{2}$ per $j > 3$.

□

A questo punto possiamo descrivere come cambiano le sistole nelle iterazioni dei tagli.

Proposizione 2.3.2. a) Se $|K_q| = 3$, allora le due superfici $X_{k_1}, X_{k_2}, X_{k_3}$ hanno sistola della stessa lunghezza, pari a $\sqrt{r_1^2 - r_1\sqrt{2} + 1}$, dove $r_1 < r_2 < r_3$

b) Se $|K_q| = 4$ allora, ordinati i resti $r_1 < r_2 < r_3 < r_4$ corrispondenti alle iterazioni k_1, k_2, k_3, k_4 , le superfici X_{k_1}, X_{k_2} hanno sistola di lunghezza $\sqrt{r_1^2 - r_1\sqrt{2} + 1}$, mentre X_{k_3} ed X_{k_4} hanno sistola di lunghezza $\sqrt{r_3^2 - r_3(2 + \sqrt{2}) + 2 + \sqrt{2}}$

Dimostrazione. a) Siano $r_1 < r_2 < r_3$. Da un semplice conto di geometria piana risulta che la sistola per X_{k_1} ha lunghezza $\sqrt{r_1^2 - r_1\sqrt{2} + 1}$. Per verificare che anche la seconda superficie ha sistola di tale lunghezza basta osservare che, il quadrilatero $P_{r_1}, P_{r_2}, P_{(2)}, P_{(3)}$ è un parallelogramma. Infine la terza risulta avere stessa sistola per il corollario 2.2.1 a pagina 42.

b) Per i primi due poligoni si segue il ragionamento in a). Con un semplice conto si vede che per il terzo poligono la sistola è invece di lunghezza $\sqrt{r_3^2 - r_3(2 + \sqrt{2}) + 2 + \sqrt{2}}$. Si conclude come per il punto a) usando il corollario 2.2.1 a pagina 42.

□

Poiché condizione necessaria per essere equivalenti due superfici di traslazione è l'essere isometriche (segue dalla definizione, due superfici equivalenti sono ottenibili l'una dall'altra via taglia e cucì topologico che non modifica la metrica) abbiamo che a sistole diverse corrisponderanno superfici di traslazione diverse.

Posto $[X_r]$ l'insieme delle iterazioni dei tagli corrispondenti a superfici di traslazione

con la stessa sistola, ad ogni $[X_r]$ corrisponderà una superficie di traslazione diversa. Dalla proposizione precedente segue immediatamente che $[X_r]$ ha cardinalità finita. Essendo l'insieme dei resti infinito, avremo infinite $[X_r]$ diverse tra loro.

Avendo già dimostrato che i tagli sono deformazioni isoperiodiche (proposizione 2.1.2 a pagina 31), abbiamo dunque il risultato cercato, ovvero il seguente teorema.

Teorema 2.3.1. *Esistono infiniti falsi ottagoni.*

Conclusioni

Concludiamo facendo alcune osservazioni sul metodo utilizzato nel secondo capitolo. Per quanto riguarda i movimenti di punti singolari l'unica ipotesi che abbiamo fatto è che i segmenti gemelli fossero embedded e che non si intersecassero tra loro sulla superficie. I tagli iterati sull'ottagono hanno invece la peculiarità di essere effettuati sempre lungo uno stesso laccio chiuso di lunghezza 1 e lungo una sua gemella aperta che, se prolungata sulla direzione inizialmente fissata, si chiude a sua volta su un laccio di lunghezza irrazionale. Questo vuol dire che con il susseguirsi dei tagli tale gemella ricomparirà sempre lungo questo laccio irrazionale. L'incommensurabilità dei due fa sì che con l'iterazione dell'algoritmo di tagli il punto singolare vada a descrivere sulla circonferenza irrazionale un insieme discreto e denso di punti, a partire dai quali poi si è costruita la sistola.

Essendo ogni superficie di traslazione data per poligoni, viene dunque da pensare che il procedimento da noi descritto possa essere utilizzato ogniqualvolta sussistano su una superficie queste due condizioni.

Bibliografia

- [1] G. Calsamiglia, B. Deroin, S. Francaviglia. *A transfert principle: from periods to isoperiodic foliations*. arXiv:1511.07635.
- [2] A. Eskin, H. Masur, A. Zorich. *Moduli space of abelian differential: the principal boundary, counting problems and the Siegel-Veech constants*. arXiv:math/0202134
- [3] G. Forni, C. Matheus. *Introduction to Teichmüller theory and its applications to dynamics of interval exchange transformations, flows on surfaces and billiards*. arXiv:1311.2758v1
- [4] G. Hector, U. Hirsch. *Introduction to the geometry of foliations, Part A*. A. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, second edition, 1986.
- [5] A. Hatcher. *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [6] M. Kontsevich, A. Zorich. *Connected components of the moduli space of abelian differentials with prescribed singularities*. Invent. Math. 153 (2003), no. 3, 631–678.
- [7] H. B. Lawson Jr. *Foliations*. Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 80, Num. 3
- [8] H. Masur. *Ergodic theory of translation surfaces*. Handbook of dynamical systems. Vol. 1B, Elsevier B. V., Amsterdam, 2006, pp. 527-547.
- [9] C. T. McMullen. *Foliations of Hilbert modular surfaces*. Amer. J. Math. **129** (2007), 183-215.
- [10] C. T. McMullen. *Moduli spaces of isoperiodic forms on Riemann surfaces*. Duke Math. J. Vol. 163, Number 12 (2014), 2271-2323
- [11] W. P. Thurston. *The geometry and topology of three-manifold*. Princeton lecture notes (1980).
- [12] W. P. Thurston. *Three dimensional geometry and topology, volume 1*. Princeton University Press (1997).
- [13] M. Viana. *Dynamics of interval exchange transformations and Teichmüller flows*. Lecture notes of graduate courses taught at IMPA in 2005 and 2007.

- [14] A. Wright. *Translation surfaces and their orbit closures: an introduction for a broad audience*. EMS Surv. Math. Sci. 2 (2015), no. 1, 63-108.
- [15] A. Wright. *From rational billiards to dynamics on moduli spaces*. arXiv:1504.08290
- [16] A. Zorich. *Flat surfaces*. Frontiers in number theory, physics, and geometry. I, Springer, Berlin, 2006, pp. 437-583.

Ringraziamenti

In tanti in questi tre anni mi hanno di volta in volta dissuaso a lasciare l'università per fare altro. Ad ognuno di questi vanno i miei più sinceri ringraziamenti.

Per questa tesi in particolare voglio ringraziare alcune persone.

La prima è Stefano, perché in questi tre anni di magistrale c'è stato ogni volta che l'ho cercato, si trattasse di matematica o di chiacchiere. Perché anche questa volta, esattamente come per la tesi triennale, ha capito cosa mi piace studiare (molto meglio di me probabilmente) ed ha indovinato un argomento su cui quindi mi sono divertito veramente tanto a lavorare. E' riuscito a farmi ritrovare l'entusiasmo nello studio che era ormai disperso da tempo. Gliene sono incredibilmente grato. La seconda è Lorenzo Ruffoni. Nelle chiacchierate che abbiamo avuto negli ultimi due mesi è riuscito a farmi capire cose che altrimenti chissà quando avrei compreso. Probabilmente parte dell'entusiasmo che ho messo in questa tesi è anche riflesso del suo.

La terza è Sonia, che oltre ad essermi di fianco nella vita ha anche fatto quasi tutti i disegni che compaiono in questa tesi, sopportando dunque ogni mia pignoleria. Vorrei tanto sapere come ha fatto.

Voglio infine ringraziare altre due persone che hanno segnato il mio percorso di studi: Massimo Ferri e Nicoletta Cantarini. Entrambi, anche se in modi molto diversi, sono stati punti di riferimento per me durante questa magistrale.