

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI  
BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea Magistrale in Matematica curriculum Didattico

# L' Equazione di Dirac e l' Antimateria

Tesi di Laurea in  
Fisica matematica

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
SANDRO GRAFFI

Presentata da:  
MICHELA TRONATI

Anno Accademico 2015/2016



# Ringraziamenti

Dedico questo lavoro di tesi ai miei genitori (al mio papino, sempre presente, ed alla mia ciummy, piccione viaggiatore ormai espertissimo) per tutto quello che hanno fatto per me in questi anni, chiedendo loro scusa per tutto quello che hanno dovuto sopportare, nella speranza siano comunque orgogliosi di me...

In primis devo ringraziare infinitamente il Prof. Graffi per la sua grandissima (e davvero unica) disponibilità, cortesia, gentilezza e per avermi aiutato nella realizzazione di questa tesi, dandomi anche numerosi consigli di cui farò tesoro sempre.

Desidero ringraziare tutte le persone che lavorano nelle biblioteche di Bologna per la loro disponibilità e gentilezza, in particolare un grazie speciale va al personale del dipartimento di Matematica.

Ringrazio tutti i parenti che mi sono stati vicini, i Professori (in particolare la Prof.ssa Caliceti) che mi hanno insegnato molto (e non solo a livello universitario), gli amici (specie Brenda, lontana ma sempre vicina), tutto il personale e lo Staff del C.G. (ci vuole davvero coraggio, per essere *liberi*), i colleghi di Matematica ed Astrofisica che mi sono stati accanto in questi anni, nessuno

escluso (ho preferito non fare nomi per non dimenticare nessuno, cosa molto probabile visto la mia ormai nota “memoria pessima”).

Un ringraziamento particolare e sincero a Cristina ed Angelo per tutto (voi sapete a cosa mi riferisco... Siete unici davvero, ringrazio il Cielo per avervi conosciuto e per la vostra Amicizia vera).

Infine desidero dedicare questo lavoro a me stessa, alla mia grinta, alla mia voglia di fare, alla mia ”forza” che mi ha permesso di non mollare mai, nonostante tutte le difficoltà di questi ultimi anni... Con tanto orgoglio, posso dire finalmente di avercela fatta!!!

Un pensiero a F. (ce l’ ho fatta anche per/grazie a te...).

# Indice

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introduzione</b>   | <b>8</b>  |
| <b>I primi anni</b>   | <b>11</b> |
| <b>1 I primi anni</b>   | <b>12</b> |
| 1.1 Meccanica ed elettromagnetismo a confronto . . . . .        | 13        |
| 1.2 La teoria della relatività . . . . .                        | 15        |
| 1.3 La teoria quantistica: i primi passi . . . . .              | 17        |
| 1.4 Gli studi universitari di Dirac . . . . .                   | 20        |
| <b>La meccanica quantistica</b>                                 | <b>24</b> |
| <b>2 La meccanica quantistica</b>                               | <b>24</b> |
| 2.1 La nascita della meccanica quantistica . . . . .            | 24        |
| 2.2 Dirac entra in scena: l' algebra dei numeri $q$ . . . . .   | 27        |
| 2.3 La meccanica ondulatoria di Schrödinger . . . . .           | 29        |
| 2.3.1 L' equazione di Schrödinger nel dettaglio . . . . .       | 30        |
| 2.4 L' effetto Compton e la statistica di Fermi-Dirac . . . . . | 36        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 2.5      | L' alba dell' elettrodinamica quantistica . . . . .  | 38         |
|          | <b>L' elettrone relativistico e l' antimateria</b>   | <b>42</b>  |
| <b>3</b> | <b>L' elettrone relativistico e l' antimateria</b>   | <b>42</b>  |
| 3.1      | L' equazione di Klein-Gordon . . . . .   | 43         |
| 3.1.1    | L' equazione di Klein-Gordon nel dettaglio . . . . .   | 47         |
| 3.2      | Lo spin dell' elettrone . . . . .  | 51         |
| 3.3      | L' equazione di Pauli . . . . .  | 53         |
| 3.4      | L' equazione di Dirac . . . . .  | 56         |
| 3.4.1    | L' equazione di Dirac nel dettaglio . . . . .  | 63         |
| 3.4.2    | Corrispondenza non-relativistica . . . . .   | 66         |
| 3.4.3    | L' equazione di Dirac in forma covariante nel dettaglio . . . . .                                | 71         |
| 3.4.4    | Soluzioni dell' equazione di Dirac per una particella libera . . . . .                           | 75         |
| 3.4.5    | La soluzione di Dirac in un caso speciale . . . . .  | 78         |
| 3.4.6    | L' elettrone libero in moto . . . . .  | 80         |
| 3.5      | Incredibili successi, problemi inaspettati . . . . .   | 84         |
| 3.6      | La teoria dei buchi: elettroni e positroni . . . . .   | 86         |
| 3.7      | La scoperta del positrone . . . . .  | 90         |
| 3.7.1    | Soluzioni con energia negativa nel dettaglio: interpretazione di Stuckelberg e Feynman . . . . . | 94         |
|          | <b>L' elettrodinamica quantistica</b>  | <b>102</b> |
| <b>4</b> | <b>L' elettrodinamica quantistica</b>  | <b>102</b> |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 4.1      | Le cosiddette "correzioni radiative" . . . . .                       | 104        |
| 4.2      | Il monopollo magnetico e le costanti cosmologiche . . . . .          | 107        |
| 4.3      | Il principio della " bellezza matematica " e l' eredità di Dirac . . | 112        |
|          | <b>Conclusione</b>   | <b>117</b> |
| <b>5</b> | <b>Conclusione</b>   | <b>117</b> |
|          | <b>Bibliografia</b>  | <b>119</b> |
| <b>6</b> | <b>Bibliografia</b>  | <b>119</b> |



# Introduzione

Il 13 novembre 1995, ad undici anni dalla sua morte, nell' Abbazia di Westminster, si è celebrata una manifestazione in memoria di Paul Adrien Maurice Dirac, nel corso della quale gli è stata dedicata una semplice targa.

In quest' ultima compaiono solamente gli anni della sua nascita e della sua morte, il suo nome, la parola " fisico " ed un' equazione concisa: la sua equazione relativistica dell' elettrone in meccanica quantistica. Tale targa riflette la personalità di Dirac che, contrariamente ad altri grandi fisici dell' epoca, non coltivò mai alcuna attività sociale e non scrisse neanche libri di divulgazione in cui descrivere le proprie idee filosofiche o il proprio rapporto con i colleghi.

La personalità di Dirac spiega il motivo per cui era un grande sconosciuto al pubblico: la sua morte, infatti, il 20 ottobre 1984 a Tallahassee (Florida), venne commentata solo da una nota piuttosto breve del *Times*.

Senza alcun dubbio, Dirac è considerato dalla comunità scientifica come uno dei fisici più brillanti della storia: nel Regno Unito fa parte del trio dei grandi fisici, insieme a Newton (pilastro della meccanica) e Maxwell (colosso dell' elettromagnetismo). Le teorie di questi ultimi permettevano di spiegare,

alla fine del XIX secolo, quasi la totalità dei fenomeni naturali: tutto era già costruito e l' unica cosa che un fisico del calibro di Dirac potesse fare era impostare calcoli specifici per risolvere problemi concreti, o condurre esperimenti più dettagliati (tutto nell' ambito della meccanica e dell' elettromagnetismo).

All' orizzonte del XX esimo secolo, vi erano però solo due "piccoli" problemi che Lord Kelvin chiamò "piccole nubi" : così, dall' incoerenza tra Newton e Maxwell nacque la teoria della relatività e la radiazione di corpo nero, problema conosciuto da tempo, portò con sé la nascita del mondo quantistico.

Il lavoro di Planck sulla radiazione di corpo nero (che segnò l' inizio della teoria quantistica), apparve nel 1900 (due anni prima della nascita di Dirac) e nel 1905 Einstein pubblicò la teoria speciale della relatività, spiegando nello stesso anno l' effetto fotoelettrico. Dieci anni più tardi apparve la teoria della relatività generale. La profonda crisi economica in cui versava l' Inghilterra dopo la fine della Prima Guerra Mondiale spinse Dirac a trasferirsi a Cambridge per cominciare una vita di studio nel campo della fisica, dopo aver completato i suoi studi in matematica all' Università di Bristol. Dopo l' arrivo a Cambridge nel 1923, pur affascinato dalla teoria della relatività, Dirac si interessò ai lavori di Werner Heisenberg sulla cosiddetta "meccanica quantistica". L' impatto di Heisenberg su Dirac fu incredibile: dal suo isolamento a Cambridge, Dirac sviluppò i propri lavori in modo completamente autonomo.

Quando sviluppò la sua teoria relativistica dell' elettrone, uno dei suoi contributi più importanti, i suoi colleghi dell' Università di Cambridge se ne resero conto solo leggendo la pubblicazione in biblioteca.

Il periodo 1925-1933 della vita di Dirac è conosciuto come "*periodo eroico*". I suoi lavori ne fecero uno dei fisici più importanti della storia: tali lavori, infatti, modificarono completamente il panorama della fisica esistente ai suoi tempi e, cosa più importante, costituirono le "*fondamenta*" di gran parte dello sviluppo successivo della fisica teorica. In soli otto anni passò dall'essere un completo sconosciuto a ricevere il Premio Nobel.

Dirac è uno dei creatori della meccanica quantistica: in modo indipendente dai suoi colleghi tedeschi, elaborò una nuova formulazione della teoria quantistica, denominata "*algebra quantistica*". La sua teoria della trasformazione ingloba le due formulazioni conosciute della teoria quantistica: matriciale ed ondulatoria, e raggiunse la formulazione matematica definitiva con l'opera di John von Neumann (1903-1957).

Il più grande risultato scientifico di Dirac fu lo sviluppo dell'equazione quantistica relativistica dell'elettrone e la formulazione dell'interazione radiazione-materia. Dalle equazioni di Dirac nacque il mondo delle antiparticelle e, con esso, il modo di spiegare e descrivere come la radiazione interagisca con la materia.

Dalla combinazione dell'equazione quantistica relativistica dell'elettrone e della teoria quantistica della radiazione nacque l'elettrodinamica quantistica: la teoria che spiega il comportamento degli elettroni e degli antielettroni e come questi interagiscono con la luce e tra di loro. Dirac, infatti, fu il primo a parlare di scambi di fotoni nel processo di interazione tra particelle ed a menzionare concetti come massa e carica effettive e tecniche di rinormalizzazione.

Ancora oggi, mentre tutti conoscono la formula di Einstein, l'equazione di Dirac continua ad essere quasi una perfetta sconosciuta: in perfetto stile Dirac, si tratta di un'equazione formalmente semplice e concisa:  $(i\gamma \cdot \partial + m)\psi = 0$  . Nascondeva, però, un'autentica sorpresa e l'interpretazione delle sue soluzioni portò con sé una vera rivoluzione: l'antimateria.

# Capitolo 1

## I primi anni

All' inizio del XX secolo, nell' ambito della fisica, si verificò un' autentica rivoluzione portata dalla comparsa della teoria della relatività, con il suo nuovo concetto di spazio e tempo, e dallo sviluppo della teoria quantistica, con le sue leggi strane e sorprendenti. I primi anni di Dirac coincisero con questi profondi cambiamenti. La solida impalcatura della fisica classica, dominata dalla meccanica di Newton e dall' elettromagnetismo di Maxwell, cominciava a sgretolarsi ed a lasciar posto alla cosiddetta " *fisica moderna* " .

Paul Adrien Maurice Dirac nacque l'8 agosto del 1902 a Bristol, in Inghilterra. Nel 1905 Einstein pubblicò i suoi tre lavori famosi, tra i quali la teoria della relatività speciale e la spiegazione dell' effetto fotoelettrico che poggiava sulla nascente teoria quantistica: ventitrè anni più tardi, Paul Dirac sarebbe stato il primo a mettere insieme le due teorie.

Il carattere profondamente introverso di Dirac e la sua estrema difficoltà

nel relazionarsi con gli altri furono delle costanti nella sua vita: l' assenza di relazioni sociali fece sì che egli si concentrasse sul proprio mondo, nel quale lo studio della natura e, in particolare, della matematica, divenne il centro della sua vita. Nel 1914, in coincidenza con l' inizio della Prima Guerra Mondiale, Paul Dirac cominciò gli studi secondari presso l' Istituto Merchant Venturer's: l' istruzione impartita nell' istituto si concentrava fondamentalmente sullo studio delle scienze, delle lingue moderne e delle materie pratiche. Fin dai primi mesi di scuola, Paul dimostrò di avere delle qualità innate per le materie scientifiche, specialmente per la matematica e per la rappresentazione geometrica di figure tridimensionali. Molti anni più tardi, dimostrò che la capacità di visualizzare geometricamente i problemi fu ciò che gli permise di sviluppare alcune delle sue più importanti teorie in fisica, così come descritto nel libro del Prof. Juan Antonio Caballero Carretero ([2]).

## 1.1 Meccanica ed elettromagnetismo a confronto

Per comprendere l' opera scientifica di Dirac ed i suoi contributi, è necessario conoscere la situazione del mondo della fisica mentre egli era ancora uno studente, dato che fu allora che si svilupparono le nuove teorie che modificarono completamente la visione del mondo naturale. Galileo e Newton stabilirono le leggi che permisero di descrivere il movimento dei corpi: un concetto essenziale era il cosiddetto "*sistema di riferimento*", rispetto al quale si stabilisce la

situazione nello spazio e nel tempo di uno o diversi avvenimenti. Nella seconda metà del XIX secolo, il fisico britannico James Clerk Maxwell (1831-1879) elaborò la teoria dell' elettromagnetismo formulata attraverso quattro equazioni fondamentali, le *equazioni di Maxwell*, nelle quali compare in forma esplicita la velocità della luce. La domanda che sorse immediatamente fu: rispetto a quale sistema di riferimento parliamo di velocità della luce? In base al principio di Galileo-Newton, la velocità dipende dal sistema di riferimento scelto per la sua determinazione. La grande difficoltà che si pone nell' elettromagnetismo è che il cambiamento di velocità della luce produce, a sua volta, una modifica nelle stesse equazioni di Maxwell (in altre parole, le leggi dell' elettromagnetismo si modificano di fronte alle trasformazioni di Galileo). Tale risultato porta ad una incoerenza tra le leggi dell' elettromagnetismo e della meccanica.

Nel XIX secolo, tutti i fisici erano convinti che la luce fosse un fenomeno ondulatorio e che, così come qualsiasi altro fenomeno ondulatorio, necessitasse di un mezzo materiale in cui propagarsi: questo mezzo venne chiamato "etere". Si supposeva che riempisse tutto lo spazio. Lo stesso etere avrebbe costituito in questo modo un sistema assoluto di riferimento. Era assolutamente necessario misurare la velocità della luce rispetto all' etere: questo fu l' obiettivo dell' esperimento di Albert A. Michelson (1852-1931) ed Edgard Morley (1838-1923) realizzato nel 1887. Il risultato che si ottenne fu che la velocità della luce era esattamente la stessa in qualsiasi direzione spaziale si misurasse: ciò implicava l' assenza di velocità di trascinamento rispetto all' etere e portò a spiegazioni molto diverse, tutte relazionate con la possibile modifica delle equazioni dell'

elettromagnetismo. Inizialmente, la maggior parte degli scienziati era convinta della validità delle equazioni di Newton e delle trasformazioni di Galileo: infine arrivò la teoria della relatività speciale, che confermò, invece, la validità delle equazioni di Maxwell.

## 1.2 La teoria della relatività

Albert Einstein (1879-1955) individuò nel tempo assoluto di Newton l'incoerenza tra la meccanica e l'elettromagnetismo: Einstein abbandonò l'idea dell'etere e della possibile esistenza di un sistema di riferimento assoluto. La teoria della relatività si costruisce, quindi, a partire da due postulati fondamentali:

1. *Principio di relatività*: tutte le leggi fisiche sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali;
2. *Principio della costanza della velocità della luce*: la velocità della luce nel vuoto è sempre la stessa, indipendentemente dal sistema di riferimento inerziale considerato.

Il primo postulato è una generalizzazione del principio di relatività di Galileo-Newton; il secondo risulta più strano e si trova in chiara contraddizione con le trasformazioni di Galileo (in cui la velocità di un oggetto dipende dal sistema di riferimento in cui si misura). Si percepiscono, quindi, in maniera nuova i concetti di spazio e tempo: nella meccanica di Newton il passare del tempo

è assoluto e, pertanto, identico per tutti gli osservatori. Nello schema di Einstein, al contrario, avvenimenti simultanei in un sistema di riferimento non lo sono (in generale) in un altro: in altre parole, la simultaneità degli avvenimenti dipende dal sistema di riferimento. Questo risultato suggerisce, quindi, che il tempo possa trascorrere (essere misurato) in modo diverso in sistemi differenti.

La conclusione che si ottiene dai postulati di Einstein è che il tempo misurato si dilata nei sistemi inerziali in movimento: vale a dire che il tempo trascorre più rapidamente quando lo misuriamo nello stesso sistema di riferimento in cui ci troviamo (chiamato " *sistema proprio* "). Infine, anche la lunghezza di un oggetto dipende dal sistema in cui si realizza la misurazione, posto che misurare la lunghezza implichi determinare allo stesso tempo gli estremi dell' oggetto.

Un nuovo aspetto che emerse dalla teoria della relatività e che ebbe un enorme impatto sulla teoria quantistica fu il cosiddetto " *principio di equivalenza massa-energia* " .

Nella teoria relativistica, la massa di un corpo dipende dal sistema di riferimento ed aumenta con la velocità dello stesso, tendendo ad un valore infinito quando la velocità del corpo si avvicina alla velocità della luce. La relazione tra la massa a riposo e l' energia totale del corpo è data dalla famosa equazione di Einstein:  $E = mc^2$ .

Quest' equazione descrive l' equivalenza tra massa ed energia  $E$ ; dunque, significa che la radiazione o interazione (vale a dire l' energia) può trasformarsi in massa (in particelle) e, al contrario, le particelle (massa) possono distruggersi producendo energia. L' utilizzo di sistemi di riferimento non inerziali portò

Einstein alla teoria della relatività generale pubblicata nel 1916. Dirac fu il primo scienziato ad incorporare in modo coerente la teoria relativistica nel mondo quantistico.

### 1.3 La teoria quantistica: i primi passi

La seconda rivoluzione nella fisica ebbe luogo con la nascita della teoria quantistica, nata per spiegare il comportamento del mondo subatomico. L' applicazione delle leggi della meccanica e dell' elettromagnetismo a questi sistemi fu un disastro: tutte le previsioni erano in assoluto disaccordo con le evidenze sperimentali. Generalmente, si accetta come data di nascita della teoria quantistica l' anno 1900, quando Max Planck pubblicò il suo lavoro sulla radiazione di corpo nero.

La teoria classica della radiazione non era in grado di descrivere il comportamento delle misurazioni sperimentali nel caso di alte frequenze; Planck riuscì a spiegare in modo soddisfacente i risultati sperimentali con la seguente ipotesi:

*La radiazione viene emessa o assorbita in multipli interi di una certa quantità limite, il "quanto".*

Questa spiegazione, che lo stesso Planck considerò difficile da accettare, costituiva un cambiamento radicale rispetto a tutte le teorie preesistenti: era la prima volta che, nella scienza, si ammetteva che la radiazione (cioè l' energia) potesse essere emessa (o assorbita) soltanto in forma discreta. Alcuni anni più

tardi, nel 1905, Einstein usò l' ipotesi di Planck e, per suo tramite, riuscì a spiegare l' effetto fotoelettrico: questo fenomeno consiste nel fatto che quando la radiazione incide su determinati materiali metallici si osserva l' emissione di elettroni, sotto forma di corrente elettrica. Tale emissione (o la sua assenza) non dipende criticamente dall' intensità della radiazione incidente, ma dalla sua frequenza. L' ipotesi di Einstein fu considerare che la luce fosse costituita da particelle di energia data, denominate "fotoni" (i *quanti* di Planck) di energia  $h\nu$ , dove  $\nu$  è la frequenza della radiazione ed  $h$  è la costante di Planck: per questo lavoro, Einstein ricevette il Premio Nobel nel 1921.

La scoperta dell' elettrone da parte di Thomson nel 1898 aveva sollevato immediatamente la seguente domanda: come sono fatti gli atomi? Il fatto che fossero neutri, implicava l' esistenza all' interno di ciascun atomo di una carica positiva uguale a quello degli elettroni: la risposta sulla struttura atomica venne da Ernest Rutherford (1871-1937) e dai suoi famosi esperimenti sulla diffusione. L' analisi delle misurazioni sperimentali portava ad una conclusione evidente: la quasi totalità della massa degli atomi era concentrata in uno spazio centrale, le cui dimensioni erano inferiori di cinque ordini di grandezza rispetto alle dimensioni dell' atomo nel caso dell' idrogeno.

Nacque così il concetto di *nucleo atomico* in cui sono contenute tutte le cariche positive (i protoni); gli elettroni, invece, gravitano su orbite determinate intorno al nucleo.

Questo modello "planetario" presentava, tuttavia, un problema importante: non poteva spiegare la stabilità degli atomi.

Tutte le particelle cariche che si muovono con accelerazione non nulla emettono energia: di conseguenza, gli elettroni nelle proprie orbite si sarebbero dovuti avvicinare in maniera progressiva al nucleo fino a collassare (fatto assolutamente in disaccordo con la natura).

Una prima soluzione a questi problemi venne nel 1913 dal fisico danese Niels Bohr (1885-1962), che sviluppò il primo modello quantistico dell' atomo, basato sui due seguenti postulati, enunciati nel caso dell' idrogeno:

1. L' elettrone si muove a momento angolare quantizzato (ossia il momento angolare  $L$  può assumere solo valori discreti), multipli interi della costante di Planck;
2. l' elettrone non emette o cambia energia quando rimane su uno stato stazionario, ma solo se passa da uno stato stazionario ad un altro.

Con il primo postulato si spiega la stabilità atomica; con il secondo si riescono a spiegare le osservazioni spettroscopiche. Il modello di Bohr (applicato all' atomo più semplice, ossia l' idrogeno) costituì la prima applicazione della nascente *teoria quantistica* alla struttura della materia. Con Bohr si completò la prima tappa nella teoria quantistica, in cui erano stati formulati postulati essenziali e si erano spiegati alcuni fenomeni del mondo atomico.

## 1.4 Gli studi universitari di Dirac

Paul Dirac iniziò i suoi studi all' Università di Bristol come alunno in ingegneria e, proprio in questi anni, emerse la sua eccezionale inclinazione per la matematica.

Il 7 novembre 1919, durante il secondo anno di Dirac all' università, alcuni giornali riportarono la notizia delle misurazioni portate a termine da una spedizione scientifica britannica sull' isola africana di Principe, diretta dagli astronomi Frank W. Dyson e Arthur S. Eddington. Durante un' eclissi solare, i due scienziati avevano misurato lo spostamento della posizione relativa di una stella e avevano verificato che le loro misurazioni non concordavano con la previsione della meccanica di Newton, ma si adattavano perfettamente a quella della teoria della relatività generale sviluppata da Einstein.

La notizia si sparse rapidamente all' interno della società e tutti cominciarono a parlare di questa nuova rivoluzione scientifica. Dirac se ne sentì affascinato fin dal primo momento ed il suo obiettivo da allora fu quello di studiare ed arrivare a comprendere la nuova teoria, anche se non fu inizialmente facile. Nei mesi seguenti, dunque, iniziò a studiare approfonditamente il testo pubblicato da Eddington, *Spazio, tempo e gravitazione*, sino a padroneggiare completamente la teoria della relatività sia speciale che generale.

A causa della profonda crisi economica che la Gran Bretagna attraversò dopo la Prima Guerra Mondiale, Dirac non riuscì a trovare lavoro come ingegnere e, per questo motivo, nel settembre del 1921 cominciò gli studi di

matematica all' Università di Bristol. Le sue qualità innate e la sua ossessione per il lavoro gli permisero di completare gli studi in soli due anni: in questo periodo approfondì l' ambito della geometria descrittiva e compì studi avanzati sulla meccanica di Newton e sull' elettromagnetismo di Maxwell. Apprese, inoltre, la cosiddetta " *formulazione hamiltoniana*" della meccanica classica introdotta da William R. Hamilton, essenziale nella sua costruzione delle leggi fondamentali della teoria quantistica.

Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) fu un matematico, fisico ed astronomo irlandese che riformulò le equazioni della meccanica di Newton facendo uso del calcolo delle variazioni e del principio di minima azione. Hamilton, inoltre, introdusse il concetto di *quaternione* (una tetrade di numeri che generalizzano i numeri complessi).

Non appena seppe di essere stato ammesso all' Università di Cambridge nel 1923, Dirac chiese di poter lavorare sotto la supervisione del Professor Ebenezer Cunningham (1881-1977), un esperto di teoria elettromagnetica e di relatività, per continuare ed approfondire la teoria di Einstein. Non essendo accettato dal docente, fu assegnato al Professor Ralph Fowler (1889-1944), principale esponente della fisica teorica a Cambridge e l' unico che manteneva frequenti contatti con il circolo di Niels Bohr (dove era nata e continuava a svilupparsi la teoria quantistica) e con i principali centri di ricerca in Germania. Sotto la supervisione di Fowler, Dirac cominciò ad addentrarsi nella nuova teoria quantistica che conosceva solo superficialmente ed a studiare i modelli atomici sviluppati alcuni anni prima da Bohr e Sommerfeld. Solo sei mesi dopo essere

arrivato a Cambridge, pubblicò il suo primo lavoro sulla rivista *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*.

Come riportato nel libro di Juan Antonio Caballero Carretero, ([2]), Dirac disse:

*”Sceglievo un problema generico che contenesse la fisica espressa in forma non relativistica e cercavo di trascriverlo seguendo i principi della relatività. Era come un gioco. In alcune occasioni, il risultato sembrava sufficientemente interessante da essere pubblicato.”* (Cit. Paul Dirac)



## Capitolo 2

# La meccanica quantistica

La meccanica quantistica, con i suoi concetti così lontani dalla fisica classica, cominciò a costituirsi a partire dal 1925 come una teoria perfettamente coerente e capace di spiegare i più diversi fenomeni del mondo atomico. Dirac, insieme ad altri, su uno degli artefici di questa costruzione: sempre con uno sguardo diverso ed originale, cercò di dare alla teoria una solida base formale.

### 2.1 La nascita della meccanica quantistica

Nel maggio del 1925, Niels Bohr visitò Cambridge e tenne diversi seminari sui problemi della teoria quantistica: Bohr parlò dei problemi che affliggevano la teoria quantistica e della sua impotenza nel risolverli. Tra coloro che assistettero ai seminari di Bohr c'era Dirac, che fu colpito dalla personalità del fisico danese e dalla forza e sicurezza che questi trasmetteva nei suoi ragionamenti:

tuttavia, mostrò una certa reticenza di fronte alle argomentazioni di Bohr, considerandole eccessivamente focalizzate su ragionamenti di tipo filosofico senza una solida base matematica. Come scritto nel libro di Juan Antonio Caballero Carretero ([2]), Dirac disse:

” Anche se Bohr mi ha colpito molto, tutti i suoi argomenti sono di tipo qualitativo. Quello che cercavo io erano argomenti che potessero essere espressi sotto forma di equazioni e poche volte il lavoro di Bohr è formulato in questo modo. ” (Cit. Paul Dirac)

A fine luglio 1925, un giovane fisico tedesco di soli otto mesi più grande di Dirac, Werner Heisenberg, visitò Cambridge dove tenne un seminario sulla spettroscopia atomica all' interno dello schema generale della teoria quantistica conosciuta fino a quel momento (la teoria di Bohr-Sommerfeld). La sua nuova formulazione della teoria quantistica arrivò nelle mani di Fowler e questi lo passò immediatamente a Dirac, il quale poté finalmente dedicare tutta la sua attenzione a problemi ” *fondamentali*”.

In questi anni cominciò una vera e propria competizione tra le menti giovani più brillanti della fisica per costruire e consolidare una nuova visione del mondo naturale che spiegasse il comportamento del mondo su scala microscopica. Tra il 1925 ed il 1927, comparvero tre formulazioni apparentemente differenti della nuova teoria quantistica, elaborate in tre centri distinti: a Gottinga (Germania), Heisenberg, Born e Jordan svilupparono la cosiddetta *meccanica matriciale*; a Zurigo (Svizzera), Schrödinger creò la *meccanica ondulatoria*; a Cambridge (Inghilterra), Dirac sviluppò la sua personale visione della nuova teoria.

Questi cinque fisici, insieme a Pauli, sono considerati come i fondatori della meccanica quantistica.

Dirac, in particolare, ebbe come primo obiettivo quello di estendere la nuova teoria fino ad incorporarvi la relatività.

In che cosa consisteva la nuova teoria sviluppata da Heisenberg e perchè venne considerata rivoluzionaria? Ricordiamo che nel 1927 introdusse il *principio di indeterminazione* che si esprime come:  $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ , dove  $\Delta x$  indica la incertezza sulla misura della posizione  $x$  e  $\Delta p$  l' incertezza sulla misura dello impulso  $p$  di una particella, mentre  $\hbar$  è la *costante di Planck ridotta* ( $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ).

Nella teoria quantistica, questo principio implica l' esistenza di un limite fondamentale nella precisione in cui coppie di variabili (come la posizione e l' impulso) possono essere determinate, cioè misurate.

Nella teoria classica, la traiettoria di una particella è un concetto perfettamente definito che può essere, inoltre, determinato: l' immagine stessa dell' atomo di Bohr consiste di elettroni che si muovono su traiettorie definite intorno ad un nucleo, le *orbite elettroniche*. La proposta di Heisenberg implicava una modifica radicale della proposta di Bohr: la posizione, la velocità e la traiettoria non sono grandezze che si possono misurare con precisione e, pertanto, conviene sostituirle con altre che abbiano un' interpretazione quantistica più soddisfacente, come i livelli di energia e l' ampiezza delle transizioni.

Con quest' idea fondamentale (e considerando una situazione particolarmente semplice, quella di un pendolo non lineare o una molla che oscilli non li-

nearmente intorno alla propria posizione di equilibrio), Heisenberg dimostrò che la descrizione delle proprietà dinamiche (come la posizione o la velocità di una particella) richiedeva l'introduzione di operatori che dipendevano da due numeri interi (numeri quantici) relazionati con la transizione tra due stati quantici definiti. Questa dipendenza da due indici, significava che le grandezze precedenti venivano descritte come una tavola quadrata di numeri con file e colonne; inoltre aveva una strana proprietà: il prodotto non soddisfaceva la proprietà commutativa (in altre parole, il risultato finale dipendeva dall'ordine dei fattori nel prodotto).

## 2.2 Dirac entra in scena: l'algebra dei numeri $q$

L'intervento di Born e Jordan, permise di riguardare l'intuizione di Heisenberg nel prodotto di matrici infinite; da qui la prima formulazione della meccanica quantistica, quella matriciale (Born-Heisenberg-Jordan, 1925). La corrispondenza tra le variabili quantistiche e quelle classiche e la formulazione di Hamilton della meccanica classica, portarono Dirac alla sua nuova teoria del mondo quantistico: nel novembre del 1925, completò il suo lavoro con il suggestivo titolo di *Le equazioni fondamentali della meccanica quantistica* ed il suo articolo fu pubblicato sulla rivista *Proceedings of the Royal Society*.

Dirac sviluppò la propria formulazione della meccanica quantistica in modo indipendente dai suoi colleghi Born e Jordan a Gottinga ed introdusse la cosiddetta *notazione dei numeri  $q$*  per riferirsi alle variabili quantistiche.

Stabili così una distinzione chiara tra i numeri  $q$ , dove la lettera  $q$  si riferisce a *quantum* (quantistico) o *queer* (particolare, strano) ed i numeri  $c$ , dove la  $c$  sta per *classic* (classico) o *commuting* (commutativo). Esprimeva, così, chiaramente la differenza tra il mondo quantistico e quello classico. Nell'estate del 1926, Dirac elaborò una nuova versione della sua teoria quantistica, denominata *algebra dei numeri  $q$* . Questo lavoro suscitò un particolare interesse in Jordan, studioso degli aspetti matematici della meccanica quantistica. Dirac introdusse la definizione generale di differenziale delle variabili quantistiche (numeri  $q$ ) e, a partire da essa, ricavò le relazioni fondamentali delle regole di commutazione tra gli operatori di posizione ( $q$ ), momento ( $p$ ) e momento angolare orbitale ( $L$ ), relazioni che erano state ottenute precedentemente nella formulazione matriciale di Born, Jordan ed Heisenberg.

L'algebra dei numeri  $q$  nacque, quindi, come una formulazione alternativa alla meccanica di Born, Jordan ed Heisenberg: Dirac dimostrò che a partire dal suo schema, si potevano spiegare i principali risultati del mondo subatomico.

A partire dalla primavera del 1926, il massimo interesse per la teoria quantistica si spostò inaspettatamente sull'Università di Zurigo: lì un fisico meno famoso, Erwin Schrödinger (1887-1961), sviluppò un nuovo schema della meccanica quantistica.

## 2.3 La meccanica ondulatoria di Schrödinger

Nella teoria di Schrödinger, lo stato di un sistema quantistico è definito da una funzione complessa denominata *funzione d'onda*  $\Psi$ , che dipende dal tempo e da tutte le coordinate che definiscono il sistema oggetto di studio. Questa funzione d'onda è la soluzione di un'equazione differenziale di primo ordine nel tempo, che si esprime con la forma:

$$i\hbar \frac{d\Psi(\vec{r},t)}{dt} = H(\vec{r},t)\Psi(\vec{r},t) = \left( -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2M^2} + V(\vec{r},t) \right) \Psi(\vec{r},t).$$

L'operatore  $H$  è la funzione hamiltoniana, che include tutte le informazioni sull'energia totale, cinetica e potenziale del sistema;  $r = (x, y, z)$  = coordinate del punto.

L'energia cinetica (dovuta al movimento) è definita attraverso il termine:

$$-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2M^2}$$

dove  $M$  è la massa del sistema e  $\nabla^2$  l'operatore laplaciano:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Infine, il termine  $V(r, t)$  rappresenta l'energia potenziale.

Nel caso in cui la funzione hamiltoniana non dipenda dal tempo, le soluzioni dell'equazione di Schrödinger danno luogo ai cosiddetti *stati stazionari*.

L'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo permette così di determinare la funzione d'onda dipendente dalle variabili spaziali:

$$H(\vec{r})\psi(\vec{r}) = \left( -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2M^2} + V(\vec{r}) \right) \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}).$$

In questa situazione (stato stazionario), l'operatore hamiltoniano che agisce sulla funzione d'onda dà luogo all'energia totale del sistema. In altre parole, l'energia  $E$  è un valore proprio (*autovalore*) dell'operatore hamiltoniano. L'equazione di Schrödinger non è compatibile con la teoria della relatività. Si osservi, infatti, che il modo in cui le variabili spaziale e temporale vengono trattate nell'equazione è diverso.

Mentre il tempo appare come una derivata di primo ordine, le coordinate spaziali compaiono in derivate di secondo ordine. Questo aspetto è in contraddizione con il principio essenziale della teoria relativistica: il trattamento simmetrico delle quattro componenti, le tre spaziali e quella temporale, che danno origine al cosiddetto *quadrivettore spazio-tempo*.

### 2.3.1 L'equazione di Schrödinger nel dettaglio

L'equazione di Schrödinger non può essere derivata dalle leggi della meccanica classica. Consideriamo il più semplice sistema fisico possibile, e cioè quello di una particella libera isolata.

L'Hamiltoniana non relativistica è:

$$H = \frac{p^2}{2m}.$$

In meccanica quantistica, ogni osservabile fisica è rappresentata da un operatore autoaggiunto, lineare, che agisce sulla funzione d'onda  $\Psi$ . Così, per esempio, (in coordinate) si assumono le corrispondenze:

$$\begin{aligned} H &\rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{p} &\rightarrow \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \end{aligned} \quad (*)$$

che conducono all'equazione non relativistica di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{-\hbar^2 \vec{\nabla}^2}{2m} \Psi(\vec{r}, t).$$

Si assume che le (\*) rimangano valide anche in presenza di interazioni.

Dalla forma non relativistica della hamiltoniana totale:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}, t)$$

si giunge, pertanto, all'equazione di Schrödinger in forma generale:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left( \frac{-\hbar^2 \vec{\nabla}^2}{2m} + V(\vec{r}, t) \right) \Psi(\vec{r}, t).$$

Nella maggior parte dei casi, il potenziale è indipendente dal tempo, nel qual caso si conserva l'energia (problema stazionario).

Per un problema stazionario, si possono quindi separare le coordinate temporali e spaziali, e si arriva all' equazione Schrödinger indipendente dal tempo:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) \exp(-i\frac{Et}{\hbar}) \Rightarrow H\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$$

In meccanica quantistica la funzione d' onda rappresenta lo stato di un sistema fisico.

È una funzione complessa delle coordinate spaziali e del tempo ed il suo significato è quello di un' ampiezza di probabilità (da cui l' utilizzo dei due termini come sinonimi, oppure di definizione del primo in funzione del secondo), ovvero il suo modulo quadro rappresenta la densità di probabilità delle posizioni.

La densità di probabilità che lo stato abbia posizione  $r$  sarà quindi il modulo quadro della funzione d' onda valutata nel punto  $r$ :

$$\rho(\vec{r}) = |\psi(\vec{r})|^2.$$

Abbiamo anche bisogno della densità di corrente di probabilità,  $j$  . La conservazione di probabilità implica l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0,$$

La densità della corrente corrispondente all' equazione di Schrödinger è:

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{2im} (\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - (\vec{\nabla} \Psi) \Psi)$$

e si trova che è definita positiva.

Nonostante le reticenze di Dirac (il quale non fece alcuna menzione alla nuova formulazione di Schrödinger nella sua tesi di dottorato), la meccanica ondulatoria ebbe un successo spettacolare; essenziale fu l'interpretazione fisica della *funzione d'onda*: in essa si stabilisce che la densità di probabilità di trovare una particella è data dal modulo al quadrato della funzione d'onda (Max Born, 1926).

La dimostrazione dell'equivalenza matematica tra il linguaggio delle onde e l'algebra delle matrici o numeri  $q$ , portò Dirac ad accettare che la nuova meccanica ondulatoria risultasse più facile da usare per risolvere determinati problemi. Così, in pochissimo tempo, Dirac pubblicò un nuovo lavoro intitolato *Sulla teoria della meccanica quantistica*, in cui, per la prima volta, faceva uso della teoria ondulatoria applicata a sistemi di particelle identiche.

Che cosa si intende per "*particelle identiche*" nel contesto della teoria quantistica e in che cosa consisteva esattamente il nuovo contributo di Dirac?

Per rispondere a tale domanda, dobbiamo tornare al 1925 e formulare una nuova domanda: perchè gli elementi chimici si possono classificare in gruppi che mostrano proprietà chimiche simili?

Pauli spiegò che le proprietà chimiche erano una conseguenza del modo in cui gli elettroni si disponevano nelle rispettive orbite elettroniche. Ciascun elettrone era descritto da una serie di numeri quantici che caratterizzavano la funzione d'onda; tali numeri quantici definivano le energie dell'elettrone, il suo momento angolare orbitale, la proiezione del momento angolare lungo l'asse

$z$  ed una nuova proprietà che dovette essere introdotta per spiegare i dati sperimentali: lo *spin* (che sarà descritto in dettaglio nel capitolo seguente).

Pauli enunciò il suo principio di esclusione:

*Due elettroni non possono occupare lo stesso stato quantico, vale a dire che non possono avere la stessa serie di numeri quantici.*

Questo principio permetteva di spiegare perchè gli elettroni atomici si disponessero su orbite elettroniche diverse man mano che venivano occupate le altre. Di fatto, il *principio di Pauli* permette di comprendere perchè la materia è come la conosciamo.

Altra proprietà essenziale del mondo quantistico è che le particelle identiche sono indistinguibili: nella fisica classica, la posizione di una particella ed il suo stato di moto sono perfettamente determinati, cosicchè, anche in presenza di varie particelle identiche, si potrà sempre sapere in che posizione si trovi ciascuna di esse.

Al contrario, nel mondo quantistico, la posizione non è chiaramente definita: di conseguenza, se abbiamo due elettroni (chiamiamoli  $a$  e  $b$ ) e due stati determinati ( $m$  ed  $n$ ), non possiamo sapere in che stato si trovi ciascun elettrone.

Di fatto, la situazione corrispondente all' elettrone  $a$  nello stato  $m$  (che annotiamo come  $a_m$ ) e l' elettrone  $b$  nello stato  $n$  ( $b_n$ ) è ugualmente probabile della combinazione inversa:  $a_n b_m$ .

Usando una terminologia un po' più tecnica, (facendo riferimento al Vol. 1 di James D. Bjorken, Sidney D. Drell, [1]) entrambe le combinazioni rappresentano lo stesso stato quantico e pertanto devono essere proporzionali, essendo la costante di proporzionalità  $+1$  o  $-1$  (si noti che se scambiamo due volte di seguito la posizione dei due elettroni, la combinazione risultante deve essere identica a quella iniziale).

Dirac arrivò alla conclusione che la descrizione più generale dello stato quantico dei due elettroni doveva essere una combinazione lineare di entrambe le possibilità:  $a_m b_n \pm a_n b_m$ .

Si osservi che se consideriamo il segno positivo e se scambiamo gli stati  $m$  ed  $n$  o gli elettroni  $a$  e  $b$ , otteniamo esattamente lo stesso risultato: questa proprietà si chiama *combinazione simmetrica*. Al contrario, al segno negativo corrisponde una combinazione antisimmetrica, vale a dire che lo scambio degli stati (o degli elettroni) implica un cambio di segno globale.

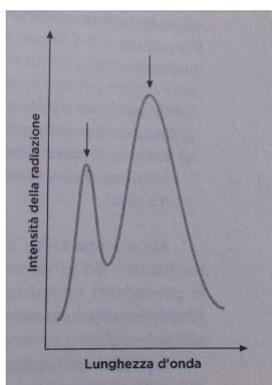
Il comportamento delle due soluzioni è, quindi, molto diverso, ma quale di esse è coerente con il *principio di esclusione* di Pauli?

Dirac concluse che l' unica risposta possibile corrispondeva alla combinazione antisimmetrica. In tale situazione, se i due elettroni si trovano nello stesso stato, vale a dire  $m=n$ , la combinazione risultante è identicamente nulla (e significa che tale stato non può esistere).

## 2.4 L' effetto Compton e la statistica di Fermi-Dirac

Nel 1905 Einstein introdusse il concetto di "quanti" luminosi, chiamati *fotoni*, con energia ed impulso determinati. L' esperimento che mise più chiaramente in evidenza la natura corpuscolare della luce, fu condotto nel 1923-1924 dal fisico statunitense Arthur H. Compton (1892-1962).

Questo lavoro coincise con l' ipotesi sulla natura duale della materia, la cosiddetta dualità *onda-particella*, introdotta da Louis di Broglie. Compton osservò che quando una radiazione con lunghezza d' onda data colpiva un blocco di grafite, la radiazione dispersa veniva emessa con due lunghezze d' onda differenti: una era identica a quella corrispondente alla radiazione incidente, mentre l' altra risultava spostata rispetto alla precedente di una misura che dipendeva dall' angolo di dispersione (come mostra la figura).



Questo risultato sperimentale era in contraddizione con la teoria classica della radiazione, secondo la quale la radiazione dispersa non poteva dipendere dall'angolo di incidenza.

Compton spiegò la variazione della lunghezza d'onda della radiazione dispersa, considerando il processo come una collisione elastica tra il fotone (particella) incidente e l'elettrone del blocco di grafite.

**L'analisi di Dirac:** Dirac conosceva gli esperimenti di Compton e decise di applicare la sua formulazione della meccanica quantistica a tale processo. Non solo fu capace di riprodurre la modifica della lunghezza d'onda della radiazione dispersa, ma ottenne anche l'intensità di tale radiazione, verificando che il suo risultato era leggermente diverso da quello che Compton aveva ricavato nel 1923. Il suo lavoro, pubblicato alla fine dell'aprile nel 1926, ricevette un'ottima accoglienza all'interno della comunità fisica ma il suo stile di scrittura, troppo conciso e con un linguaggio matematico difficile da seguire, trasformava i suoi lavori in messaggi quasi indecifrabili per molti dei suoi colleghi.

Quando Dirac si rese conto che le sue previsioni non coincidevano con i dati di Compton, segnalò che questa discrepanza " suggeriva che la grandezza assoluta dei valori di Compton era troppo piccola ". Poco tempo dopo la pubblicazione del lavoro, Compton scrisse a Dirac dicendogli che le nuove misurazioni realizzate all'Università di Chicago confermavano completamente la sua teoria; inoltre, Dirac ricevette una lettera da parte del fisico italiano Enrico Fermi (1901-1954) che diceva:

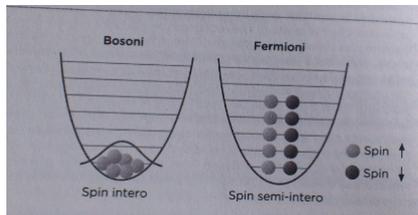
*Nel suo recente lavoro ha sviluppato una teoria dei gas ideali basandosi su*

*principi di esclusione di Pauli. Vorrei richiamare la sua attenzione su un lavoro simile che ho pubblicato agli inizi del 1926.*

Dirac immediatamente si scusò con Fermi, riconoscendo di aver visto il suo lavoro, ma di non avergli prestato particolare attenzione in quel momento.

Ancora una volta, altri fisici lo avevano preceduto nella risoluzione del problema: a partire da quel momento, l'analisi statistica di particelle come gli elettroni cominciò ad essere nota come *statistica di Fermi-Dirac*.

Anni dopo, nel 1947, lo stesso Dirac introdusse i termini "fermioni" e "bosoni" per riferirsi alle particelle che soddisfacevano le statistiche di Fermi-Dirac e di Bose-Einstein, rispettivamente.



La figura illustra il comportamento dei bosoni (a sinistra) e dei fermioni (a destra): tutti i bosoni (spin intero) tendono ad occupare lo stato di minima energia; i fermioni (spin semi-intero) sono governati dal *principio di esclusione* di Pauli e non possono occupare stati con gli stessi numeri quantici.

## 2.5 L' alba dell' elettrodinamica quantistica

All' inizio del febbraio del 1927, Dirac si spostò a Gottinga, dove rimase per i cinque mesi successivi e dove incontrò i fondatori della meccanica matriciale:

Born, Jordan ed Heisenberg.

All' epoca, l' Università di Gottinga era uno dei centri di ricerca più prestigiosi del mondo, non solo come culla della nascita della nuova teoria quantistica, ma per la sua tradizione di eccellenza nel campo della matematica: Dirac approfittò della permanenza a Gottinga per consolidare ed acquisire nuove conoscenze in diversi rami della matematica. Per questo motivo, frequentò corsi sulla teoria dei gruppi: si trattava di un ramo della matematica che si era sviluppato durante il XIX secolo, ma che, grazie ai lavori di Weyl e di Eugene P. Wigner (1902-1995), era diventato una parte importante della fisica teorica.

Negli anni seguenti, Hermann Weyl (1885-1955) e Wigner avrebbero fatto ampio uso delle tecniche della teoria dei gruppi nell' ambito della meccanica quantistica.

Dirac apprezzò in modo particolare il lavoro di Weyl e pubblicò due lavori in cui sviluppò le basi della teoria quantistica della radiazione.

Di fatto, Dirac è considerato il fondatore dell' elettrodinamica quantistica.

Dirac fu, inoltre, il primo fisico che sviluppò una teoria quantistica dell' interazione radiazione-materia.

Nel luglio del 1927, Dirac tornò all' Università di Cambridge: in soli due anni era diventato uno dei fisici più rinomati a livello internazionale, grazie soprattutto alla comparsa dei suoi due primi lavori sull' interazione radiazione-materia.

Ma la parte più spettacolare doveva ancora arrivare: all' inizio del 1928, Dirac sbalordì tutti i suoi colleghi con un' equazione le cui soluzioni nasconde-

vano oscure sorprese e problemi inaspettati, ma in cui la relatività e la teoria quantistica si davano, finalmente, la mano.



## Capitolo 3

# L' elettrone relativistico e l' antimateria

La teoria quantistica dell' elettrone è probabilmente il più importante contributo di Dirac, che riuscì ad unire in un' equazione gli aspetti essenziali delle due grandi teorie del XX secolo: la relatività e la teoria quantistica.

L' *equazione di Dirac* comprendeva la proprietà dello *spin* e spiegava perfettamente il momento magnetico dell' elettrone.

Ma nascondeva, inoltre, fatti del tutto inaspettati, come i valori negativi dell' energia: emerse così per la prima volta il concetto di *antimateria*.

### 3.1 L' equazione di Klein-Gordon

Nell' ottobre del 1927 si tenne a Bruxelles una nuova edizione del famoso Congresso Solvay, a cui fu invitato anche Dirac: tale congresso era rimasto celebre per le vivaci discussioni tra Bohr ed Einstein sui fondamenti della meccanica quantistica e sul principio di indeterminazione di Heisenberg.

Ad un certo punto del congresso, Dirac disse a Bohr che stava lavorando su un' equazione relativistica dell' elettrone ed il fisico danese gli fece notare che il problema era già stato risolto da Klein: Dirac, però, non era pienamente convinto della teoria di Klein, che non soddisfaceva alcuno dei principi fondamentali della meccanica quantistica.

Nel giro di poco più di due mesi, il mondo della fisica sarebbe stato sorpreso dalla nuova idea di Dirac: il fascino della teoria della relatività era tale per cui lo studioso non smetteva di pensare a come poterla includere nel mondo quantistico.

Ci provò per la prima volta dopo la pubblicazione del lavoro seminale di Heisenberg, anche se non ottenne alcun risultato. Qualche mese più tardi, quando studiò l' effetto Compton e la formulazione ondulatoria, Dirac impiegò una versione relativistica dell' equazione onda, versione su cui avevano già lavorato diversi fisici e che, anni più tardi, sarebbe stata chiamata *equazione di Klein-Gordon*, dai fisici Oskar Klein (1894-1977) e Walter Gordon (1893-1939).

#### **Formulazione matematica dell' equazione di Klein-Gordon:**

Nella meccanica relativistica, la massa dipende dal sistema di riferimento

inerziale.

Chiamiamo  $m$  la massa propria di una particella, o *massa a riposo*, cioè la massa della particella nel suo sistema di riferimento. Supponiamo che questa particella si muova a velocità  $v$ . Per semplicità, consideriamo il caso di una particella libera, cioè senza alcun tipo di interazione.

In questa situazione, l'energia totale e la quantità di moto sono dati da:

$$E = \gamma mc^2; \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v}; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

dove è stato introdotto il cosiddetto *fattore di Lorentz*  $\gamma$ .

Combinando le espressioni dell'energia e delle quantità di moto, si ottiene la seguente relazione:

$$E^2 = c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4.$$

Si osservi che per le particelle a riposo l'energia totale è  $E = mc^2$ , mentre per le particelle senza massa (il caso dei fotoni) l'energia è data da  $E = cp$ .

E' possibile tentare di costruire l'equazione d'onda quantistica a partire dall'espressione precedente dell'energia, sostituendo le variabili classiche con i corrispondenti operatori quantistici (principio di corrispondenza):

$$E \Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}; \quad \vec{p} \Rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}.$$

Facendo uso di questo principio, si ottiene la seguente equazione quantistica relativistica:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4) \Phi(\vec{r}, t).$$

Questa è la cosiddetta *equazione di Klein-Gordon*, che si esprime solitamente in forma più concisa, introducendo il cosiddetto operatore di D'Alambert:

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2,$$

$$\left( \square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \Phi(\vec{r}, t) = 0.$$

L'espressione precedente è detta forma "covariante" dell'equazione di Klein-Gordon.

L'operatore è chiaramente invariante sotto le trasformazioni di Lorentz, il che implica che la stessa funzione d'onda  $\Phi$  debba essere indipendente dal sistema di riferimento inerziale.

In che cosa consisteva l'equazione relativistica di Klein-Gordon e perché risultò inaccettabile per Dirac?

Per rispondere a tali domande e capire le reticenze di Dirac, dobbiamo tornare agli inizi del 1926, quando Schrödinger stava elaborando la formulazione ondulatoria della meccanica quantistica: proprio come Dirac, anche il fisico austriaco si rendeva conto di quanto fosse importante includere considerazioni relativistiche nella sua formulazione.

Al contrario dell'equazione di Schrödinger, l'equazione di Klein-Gordon è coerente con l'espressione relativistica dell'energia ed inoltre soddisfa le pro-

prietà richieste dalla relatività (cioè non si modifica rispetto alle trasformazioni di Lorentz). In altre parole, è valida indipendentemente dal sistema di riferimento inerziale considerato: tale equazione è differenziale di secondo ordine non solo per quanto riguarda le variabili spaziali (come quella di Schrödinger), ma anche per la variabile temporale.

La formulazione della meccanica ondulatoria, con la sua equazione d'onda, permette non solo di risolvere quest'equazione determinando la funzione d'onda, ma anche di introdurre una densità di probabilità ed una densità di corrente che devono soddisfare la cosiddetta "equazione di continuità" o "di conservazione".

E' proprio il caso dell'equazione di Klein-Gordon, in cui si definisce una densità di corrente che conferma le proprietà generali della teoria relativistica: il problema fondamentale di tale equazione emerge con l'interpretazione della densità di probabilità.

Nel caso dell'equazione di Schrödinger, la densità di probabilità (in accordo con l'interpretazione di Born) è data dal modulo al quadrato della funzione d'onda (cioè è definita positiva); al contrario, l'equazione di Klein-Gordon porta ad una densità di probabilità che può essere positiva, negativa o nulla (conseguenza della presenza di una derivata di secondo ordine rispetto al tempo).

Quindi, per conoscere il valore della funzione d'onda in un determinato istante, è necessario non solo conoscere la funzione d'onda un istante prima, ma anche la sua derivata (sempre nell'istante preso in considerazione). In altre

parole, il fatto che l' equazione di Klein-Gordon sia di secondo ordine, implica che sono necessarie due condizioni indipendenti per determinare completamente la funzione d' onda: una conseguenza di questo risultato è che la densità di probabilità può essere negativa.

Ma come si può spiegare il fatto che la probabilità di trovare una particella in un determinato luogo possa essere negativa?

Alla fine del 1926, la maggior parte dei fisici era cosciente dei problemi legati all' equazione di Klein-Gordon: non solo era difficile accettare che potessero esistere densità con probabilità negative, ma pareva inoltre impossibile includere nell' equazione la nuova proprietà quantistica dello *spin*.

Numerosi fisici studiarono il problema cercando di trovare una versione " migliorata " dell' equazione di Klein-Gordon includendo gli effetti dello *spin* all' interno della teoria di Schrödinger: fu Dirac quello che riuscì a prospettare il problema in forma più originale (a partire dai principi fondamentali, sviluppò un' equazione in cui lo *spin* era conseguenza naturale della stessa teoria relativistica).

### 3.1.1 L' equazione di Klein-Gordon nel dettaglio

Per una particella libera, la relazione relativistica energia-quantità di moto è:

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$$

oppure

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$$

In analogia con l'equazione di Schrödinger, si può provare a partire da quest'ultima equazione, che produrrebbe:

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = \left( \sqrt{-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4} \right) \phi.$$

Tuttavia, come si evince nel Vol. 1 di James D. Bjorken e Sidney D. Drell ([1]), questa forma è problematica, in quanto comporta gradienti della funzione d'onda di ordine arbitrario, tramite sviluppo della radice quadrata. Questo implica che l'equazione è non locale. Inoltre, poiché le coordinate spaziali e temporali non sono trattate sullo stesso piano, la forma dell'equazione dipende dal sistema di riferimento.

Pertanto, viene tentata la prima relazione, che è quadratica in  $E$  e che porta a:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = (-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4) \phi.$$

Questa è l'equazione di Klein-Gordon. Si noti che, richiedendo l'invarianza relativistica e rifiutando la radice quadrata, siamo arrivati ad una equazione differenziale, che è del secondo ordine in  $\frac{\partial}{\partial t}$ .

Utilizzando la notazione:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu},$$

dove:

$$x^\mu = (t, x^1, x^2, x^3)$$

$$\text{e } x_\mu = (t, -x^1, -x^2, -x^3);$$

si può riscrivere l' equazione di Klein-Gordon in forma esplicitamente covariante:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = 0$$

sottointendendo, al solito, la somma sugli indici ripetuti.

D' ora in poi (la maggior parte del tempo) useremo unità naturali, dove  $\hbar = c = 1$ .

Inserendo le soluzioni dell' *equazione libera delle onde* nella equazione di Klein-Gordon, si trova che  $\omega^2 = p^2 + m^2$ , il che implica che ci sono soluzioni positive e con energia negativa, cioè  $E = \omega = \pm\sqrt{p^2 + m^2}$ .

Chiaramente, l' equazione di Klein-Gordon è covariante (invariante per trasformazioni di Lorentz). Tuttavia, utilizzando il modulo quadrato del rapporto energia-quantità di moto, abbiamo anche introdotto le soluzioni con energia negativa. Di conseguenza, lo spettro dell' equazione di Klein-Gordon non è limitato dal basso, che porta a problemi di stabilità. Più tardi, vedremo che le soluzioni ad energia negativa possono essere reinterpretate in termini di antiparticelle.

Per l' equazione di Klein-Gordon si può anche definire una densità di probabilità e una corrente di probabilità:

$$\rho = \frac{i}{2m} \left[ \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) \phi \right]$$

$$\vec{j} = \frac{1}{2im} \left[ \phi^* \vec{\nabla} \phi - (\vec{\nabla} \phi^*) \phi \right].$$

L' equazione di continuità può essere proposto in forma covariante definendo il quadri-vettore:

$$j^\mu = (\rho, \vec{j}) = (i/2m) [\phi^* \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^*) \phi]:$$

da cui:

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0.$$

La densità di probabilità non è definita positiva. Come esempio, si consideri una particella non interagente.

La corrispondente densità di probabilità è  $p = \frac{E}{mV}$ , che è positiva per soluzioni di energia positiva e negativa per soluzioni energetiche negative.

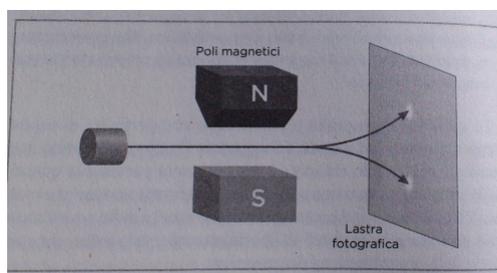
Così, una densità di probabilità negativa è possibile (il che darebbe problemi con l'interpretazione della funzione d'onda).

In questo modo, l' equazione di Klein-Gordon è oggi conosciuta come equazione quantistica relativistica con *spin* zero ed è usata, nel quadro della teoria dei campi quantistici, per descrivere il comportamento di particelle senza *spin*, come i pioni. Questi ultimi esistono in tre stati di carica elettrica diversi: pioni positivi, negativi e neutri.

## 3.2 Lo spin dell' elettrone

La proprietà di *spin*, ricordiamo, fu introdotta come conseguenza di alcuni risultati sperimentali che non si potevano spiegare con le teorie esistenti (in particolare l' esperimento di Stern-Gerlach): fu, quindi, necessario introdurre un nuovo numero quantico che permettesse di caratterizzare il modo in cui gli elettroni si disponevano negli atomi.

L'immagine successiva mostra l' **esperimento di Stern-Gerlach**: il fascio di atomi emesso dalla sorgente, si sdoppia in due componenti discrete quando attraversa un campo magnetico. Questo risultato evidenzia la quantizzazione del momento magnetico: lo *spin*.



Nel 1925, Pauli introdusse quattro numeri quantici per descrivere gli stati elettronici: i primi tre (principale, orbitale, magnetico) erano quelli di Bohr e di Sommerfeld,  $(n, l, m_l)$  ed il quarto, chiamato  $m_s$ , (ed il cui significato fisico ancora non si conosceva), poteva acquisire solo due valori. L' anno successivo, Pauli introdusse il suo famoso principio di esclusione, che permetteva di capire come si distribuivano gli elettroni nei diversi livelli energetici (ossia la loro configurazione elettronica).

Qualche mese più tardi, due giovani studenti dell'Università di Leida (Olanda), Samuel A. Goudsmit (1902-1978) e George E. Uhlenbeck (1900-1988), associarono il nuovo numero quantico con il momento angolare corrispondente al movimento di rotazione dell'elettrone su se stesso: la spiegazione di Goudsmit e Uhlenbeck fu rapidamente messa in discussione per le implicazioni che aveva.

Questi risultati sembravano decisamente assurdi e, di conseguenza, Goudsmit e Uhlenbeck chiesero al loro supervisore, Ehrenfest, di non far pubblicare il lavoro; la risposta di Ehrenfest, così come riportata da Juan Antonio Caballero Carretero ([2]), è entrata nella storia della teoria quantistica:

*E' da un pezzo che l' ho mandato a pubblicare. Non preoccupatevi, siete tutti e due sufficientemente giovani da potervi permettere qualche sciocchezza.*

Lo *spin* è una proprietà fondamentale che permette di capire il comportamento del mondo subatomico: è un concetto che non ha analogie nel mondo classico; è una proprietà puramente quantistica. Per questo motivo, non può essere interpretato come una rotazione della particella sul proprio asse nello spazio delle coordinate; lo *spin* non dipende dai gradi di libertà spaziale (vale a dire che non dipende dalle coordinate né dai momenti).

L'equazione di Schrödinger è definita esclusivamente all'interno dello spazio delle coordinate, quindi la funzione d'onda dipende univocamente dalle coordinate spaziali e temporali:  $\Psi(r, t)$ , con  $r$  vettore.

Lo *spin* deve essere aggiunto *ad hoc* come un nuovo grado di libertà: solo in questo modo, è possibile spiegare lo sdoppiamento delle linee spettrali nel

fascio di atomi dell' esperimento di Stern-Gerlach (con la divisione dell' asse in due parti simmetricamente distribuite).

A metà del 1926, la maggior parte dei fisici riteneva che la presenza dello *spin* fosse una conseguenza diretta della teoria della relatività applicata al mondo quantistico: questo spiegava come mai l' equazione di Schrödinger (coerente con la teoria non relativistica) non contenesse alcuna informazione sullo *spin*.

Il problema era duplice:

1. Come incorporare lo *spin* nell' equazione di Schrödinger?
2. Se lo *spin* è un effetto associato alla relatività, perchè non è presente nell' equazione di Klein-Gordon che, invece, è coerente con l' espressione relativistica dell' energia?

La risposta alla prima domanda arrivò da Pauli nel maggio del 1927, quando sviluppò la sua teoria dello *spin* e la incorporò nell' equazione di Schrödinger: nacque, in questo modo, la cosiddetta *equazione di Pauli*. La seconda questione venne risolta solo dopo la comparsa dell' equazione quantistica relativistica dell' elettrone: l' *equazione di Dirac*.

### 3.3 L' equazione di Pauli

Wolfgang Ernst Pauli (1900-1958) nacque a Vienna, ma nel 1918 si trasferì all' Università di Monaco, dove fu studente di Sommerfeld. Due mesi dopo

aver completato il dottorato, pubblicò un articolo monografico sulla teoria della relatività generale, lavoro che fu qualificato come "impossibile da migliorare" dallo stesso Einstein. Nel 1921, Pauli si spostò all' Università di Gottinga, dove lavorò come assistente di Born e conobbe Heisenberg ed un anno dopo iniziò la sua collaborazione con Niels Bohr nell' Istituto di fisica teorica di Copenaghen. Tra il 1923 ed il 1928, mentre era Professore all' Università di Amburgo, introdusse il numero quantico associato allo *spin* ed il suo famoso principio di esclusione (forse il suo lavoro più celebre).

Dopo la comparsa del lavoro fondamentale di Heisenberg sulla meccanica quantistica, Pauli partecipò molto attivamente alla costruzione della nuova teoria: descrisse lo spettro dell' atomo di idrogeno, sviluppò una propria versione della teoria quantistica del campo elettromagnetico ed introdusse la prima descrizione dello *spin*.

Nel 1930 Pauli postulò l' esistenza di una nuova particella, il *neutrino*, anche se dovettero trascorrere più di vent' anni perchè esso fosse rilevato.

Un suo contributo importante alla teoria quantistica fu la teoria oggi nota come *teoria non relativistica dello spin*.

Per Pauli, lo *spin* dell' elettrone doveva essere interpretato come un momento angolare intrinseco: introdusse, quindi, tre operatori che soddisfacevano le relazioni di commutazione degli operatori quantistici, formalmente analoghi a quelle corrispondenti agli operatori associati al movimento dell' elettrone nelle sue orbite, cioè a quelle del momento angolare cinetico.

D' altra parte, il fatto che il numero quantico  $m_s$  associato allo *spin* potes-

se assumere solo due valori, fu associato da Pauli alla teoria di Schrödinger, proponendo una funzione d'onda con due componenti, ciascuna delle quali relativa ad uno dei due possibili valori di  $m_s$ .

Così, gli operatori quantistici di *spin*, dovevano essere descritti come matrici  $2 \times 2$ .

Pauli introdusse la seguente notazione:

$$S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$$

dove l'indice  $i$  si riferisce ad una qualsiasi delle tre componenti ( $x, y, z$ ) ed il termine  $\sigma_i$  rappresenta le cosiddette *matrici di Pauli*:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

I possibili valori di  $m_s$  erano così  $\pm \frac{\hbar}{2}$ .

Una volta definiti gli *operatori di spin*, il passo successivo di Pauli fu relativamente semplice: così come l'elettrone in un'orbita possiede un momento cinetico orbitale, possiede anche un momento intrinseco associato allo *spin* che si può accoppiare con qualsiasi campo magnetico esterno.

Pauli applicò il suo modello all'atomo di idrogeno, verificando che la presenza dello *spin* nell'hamiltoniano dava origine ad un termine di interazione con lo stesso momento angolare orbitale dell'elettrone.

Senza dubbio, la teoria di Pauli ebbe grande successo poichè spiegava diversi fatti tra cui l'esperimento di Stern-Gerlach; Pauli, inoltre, incluse lo *spin* nella

equazione originale di Schrödinger: lo stesso Pauli riconobbe che ” *si deve esigere che la teoria finale sia formulata in forma relativistica invariante e che permetta di eseguire calcoli di ordine superiore* ”.

Questo fu il cammino intrapreso da Dirac: formulare l' equazione a partire dai principi fondamentali delle due teorie, quella della relatività e quella quantistica.

### 3.4 L' equazione di Dirac

Il 2 gennaio del 1928, la rivista *Proceedings of the Royal Society* ricevette un articolo intitolato ” *La teoria quantistica dell' elettrone*”, presentato da Fowler e firmato da Dirac. In esso, Dirac scriveva:

*In questo lavoro si vede come la mancanza di completezza delle teorie precedenti (equazione di Klein-Gordon e teoria di Pauli sullo spin) sia dovuta al fatto che non sono consistenti con la relatività o, alternativamente, con la teoria generale della trasformazione della meccanica quantistica. Sembra che l' hamiltoniano più semplice per un elettrone puntuale che soddisfi i principi base sia della relatività che della teoria della trasformazione permetta di spiegare tutte le evidenze sperimentali senza bisogno di alcuna supposizione ulteriore.*

In questo paragrafo, esaminerò il cammino intrapreso da Dirac per costruire la sua equazione quantistica relativistica.

Da una parte, l' equazione doveva rispettare i principi fondamentali della teoria quantistica. In particolare, "Lo stato iniziale di un sistema, determina completamente lo stato dello stesso in un istante successivo".

Questo significava che l' equazione d' onda doveva essere un' equazione differenziale di primo ordine nel tempo: in tal modo, la funzione d' onda in un qualsiasi istante determinava la funzione d' onda in un istante successivo.

Questa formulazione (che è coerente con l' equazione di Schrödinger, ma non con l' equazione di Klein-Gordon) portava ad una densità di probabilità definita positiva. Questo risultato era legato ad un altro degli aspetti fondamentali della teoria di trasformazione di Dirac: l' operatore hamiltoniano del sistema doveva essere autoaggiunto. Una simile proprietà assicurava che i autovalori di questo operatore, vale a dire le energie del sistema, fossero reali.

### **Operatori autoaggiunti e matrici di Pauli:**

Gli operatori autoaggiunti sono essenziali nella teoria quantistica, posto che gli autovalori associati agli stessi sono reali: nel caso dell' operatore hamiltoniano, la proprietà di "autoaggiunzione" ci assicura che l' energia del sistema che si sta studiando è reale.

Si dice che un operatore è *autoaggiunto* quando coincide con quello aggiunto.

Consideriamo il caso generale di un operatore quantistico rappresentato in forma matriciale da una matrice 2 x 2:

$$\hat{O} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

L'operatore aggiunto, è dato dalla matrice costruita a partire da quella originale, scambiando le file con le colonne e prendendo per ciascuna delle sue componenti i suoi rispettivi valori complessi coniugati.

E' rappresentato dalla "matrice aggiunta":

$$\hat{O}^\dagger = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* \end{pmatrix}$$

Se le due matrici coincidono, si dice che la matrice  $\hat{O}$  è autoaggiunta e si può dimostrare che i suoi autovalori sono reali.

Le tre matrici di Pauli  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  sono autoaggiunte e soddisfano le "relazioni di commutazione" :  $[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z$ ,  $[\sigma_y, \sigma_z] = 2i\sigma_x$  e  $[\sigma_z, \sigma_x] = 2i\sigma_y$ .

E' possibile dimostrare che qualsiasi matrice di dimensione 2 x 2 può essere sempre scritta come combinazione lineare delle tre matrici di Pauli, più la matrice identità.

Si definisce *traccia di una matrice* la somma degli elementi della diagonale; si osservi che la traccia delle matrici di Pauli è nulla.

Il secondo principio fondamentale che governa la formulazione di Dirac è il principio della relatività: l'equazione quantistica relativistica deve essere valida in qualsiasi sistema di riferimento inerziale.

Ma come introdurre questo aspetto nella costruzione dell'equazione? Nel contesto della teoria relativistica, il tempo e le coordinate spaziali sono componenti del *quadrivettore spazio-tempo*. Dirac concluse, allora, che non esisteva

nessuna ragione per trattare in modo diverso i due tipi di variabili all' interno dell' equazione d' onda quantistica.

Al contrario, se l' equazione d' onda doveva essere di primo ordine nella derivata temporale (per coerenza con la teoria quantistica), la teoria relativistica implicava che le variabili spaziali dovessero, allo stesso modo, essere introdotte attraverso le loro derivate prime.

Questo trattamento simmetrico del tempo e dello spazio era in consonanza con la formulazione relativistica, ma si allontanava dall' equazione non relativistica di Schrödinger, in cui le variabili del tempo e dello spazio appaiono in forma distinta: derivata di primo ordine rispetto al tempo e di secondo ordine rispetto allo spazio.

Per Dirac, la simmetria era una condizione fondamentale della teoria relativistica, che, a sua volta, doveva risultare coerente con l' espressione relativistica dell' energia.

$$E = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4} \text{ (particella libera)}$$

Riassumendo, la ricerca di una nuova equazione quantistica relativistica per l' elettrone intrapresa da Dirac, si può riassumere nei seguenti termini:

1. Dev' essere un' equazione differenziale del primo ordine nel tempo, che includa le variabili spaziali in forma simmetrica, cioè anch' esse con derivate del primo ordine;
2. l' operatore hamiltoniano dev' essere autoaggiunto, in modo che la densità di probabilità sia definita positiva e le energie siano definite reali;

3. deve riprodurre l'energia relativistica ed essere valida in qualsiasi sistema di riferimento inerziale.

Dirac propose la seguente equazione generale:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\vec{r}, t) = \left\{ -i\hbar c \left( \alpha_x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_z \frac{\partial}{\partial z} \right) + \beta mc^2 \right\} \Psi(\vec{r}, t).$$

Si osservi che entrambi i tipi di variabile (tempo e spazio) sono inclusi in forma simile: allo stesso modo, esiste un termine aggiuntivo  $\beta mc^2$  legato alla massa dell'elettrone, vale a dire alla massa dello stesso nel sistema in cui è a riposo.

L'equazione precedente, dipende da quattro coefficienti da determinare:  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$ ,  $\alpha_z$ ,  $\beta$ . La domanda è: come determinarli? Per farlo, Dirac doveva dimostrare la coerenza tra la sua equazione e l'espressione relativistica dell'energia.

Dirac era consapevole dell' "equivalenza" tra gli operatori quantistici e le corrispondenti grandezze classiche: di fatto, queste corrispondenze, avevano permesso di spiegare la forma dell'equazione di Schrödinger e l'equazione di Klein-Gordon.

Facendo uso di tale analogia tra il mondo quantistico e quello classico, l'equazione quantistica che Dirac stava proponendo conduceva alla seguente equazione classica per l'energia:

$$E = c(\alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z) + \beta mc^2.$$

Come mettere in relazione quest' equazione lineare nelle tre componenti del momento cinetico con la complicata espressione relativistica dell' energia in cui appare la radice quadrata?

Dirac stava cercando di trovare un modo che gli permettesse di "linearizzare" l' equazione relativistica dell' energia, determinando i quattro coefficienti sconosciuti. Il primo grande successo di Dirac fu scoprire che la sua equazione quantistica poteva essere consistente con l' espressione relativistica dell' energia solo se i coefficienti che aveva introdotto non commutavano tra loro e, inoltre, i loro quadrati si riducevano all' identità.

La corrispondenza matematica è data dalle formule seguenti, che si devono assumere ed interpretare:

$$\alpha_i \alpha_j = -\alpha_j \alpha_i \ (i \neq j); \ \alpha_i \beta = -\beta \alpha_i; \ (\alpha_i)^2 = (\beta)^2 = 1.$$

Gli indici  $i, j$  si riferiscono ad una qualsiasi delle tre componenti spaziali:  $x, y, z$ .

Così, i coefficienti non potevano essere numerici, e Dirac li interpretò come matrici, cosa che a sua volta richiedeva che la funzione d' onda,  $\Psi$ , oltre alla dipendenza dalle variabili spaziale e temporale, avesse natura vettoriale.

Questo risultato non costituiva una novità: nell' anno precedente, come sappiamo, Pauli aveva già introdotto le sue funzioni d' onda con due componenti legate ai due possibili valori dello *spin*.

E' chiaro che il problema non era ancora stato risolto: il carattere autoaggiunto dell' hamiltoniano implicava che le quattro matrici dovessero essere a

loro volta autoaggiunte. Dirac pensò in un primo momento ai prodotti tensoriali delle matrici di Pauli, le quali soddisfacevano tutte le condizioni richieste: ma le matrici di Pauli erano solo tre e Dirac aveva bisogno di trovarne quattro per costruire la sua equazione.

Dopo un periodo di studio, Dirac giunse alla conclusione che risultava impossibile aggiungere una quarta matrice alle tre di Pauli: di fatto, questo risultato era già noto in quegli anni grazie ai matematici che avevano dimostrato che per matrici quadrate di dimensioni  $N \times N$ , il numero massimo di matrici autoaggiunte indipendenti che "anticommutassero" tra loro era dato da  $N^2 - 1$  (*Lemma di Burnside*).

Di conseguenza, l' unica possibilità che Dirac aveva, era quella di aumentare la dimensione delle matrici.

Dopo aver dimostrato che la dimensione delle stesse doveva essere necessariamente pari, Dirac introdusse finalmente quattro matrici autoaggiunte di dimensioni  $4 \times 4$ : questa era la dimensione che risultava coerente con le proprietà generali della sua equazione. ([2])

Dirac disse:

*Mi ci sono volute diverse settimane per rendermi conto che non era necessario far uso di variabili con solo due file e due colonne. Perché non considerare quattro file e quattro colonne?*

### 3.4.1 L' equazione di Dirac nel dettaglio

La derivata seconda nell' equazione di Klein-Gordon, conduce alle soluzioni di energia negativa. Per evitare questo problema, Dirac cercò di trovare un' equazione, che fosse di primo ordine nel tempo, come l' equazione di Schrödinger, ma allo stesso tempo relativisticamente invariante.

Si scopre che, anche se la densità di probabilità è positiva per l' equazione di Dirac, ha anche soluzioni energetiche negative.

Questi risultati furono interpretati da Dirac (e sulla base di questo, predisse l' esistenza delle antiparticelle).

Questo è stato sicuramente uno dei più importanti contributi alla fisica moderna. L' equazione di Dirac descrive le particelle di spin  $\frac{1}{2}$ .

E' quindi l' equazione d' onda per gli elettroni, muoni, neutrini, quark, e anche per i nucleoni composti, in numero dispari.

Un' equazione relativisticamente covariante, che sia di primo ordine nella derivata temporale, deve essere di primo ordine anche nelle derivate spaziali.

Dirac adottò il seguente approccio:

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi = \frac{1}{i}\sum_{i=1}^3\alpha^i\frac{\partial\Psi}{\partial x^i} + \beta m\Psi = \left(\frac{1}{i}\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta m\right)\Psi,$$

dove  $\alpha^i$  e  $\beta$  sono costanti, che sono da determinare.

Facendo agire  $\partial/\partial t$  sull' equazione, otteniamo

$$i\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -i\sum_{i=1}^3\alpha^i\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i} + \beta m\frac{\partial\Psi}{\partial t},$$

che, usando l'equazione di Dirac, diventa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= \sum_{i=1}^3 (\alpha^i)^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial (x^i)^2} - \beta^2 m^2 \Psi \\ &+ \sum_{j \neq k} \frac{1}{2} (\alpha^j \alpha^k + \alpha^k \alpha^j) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^j \partial x^k} - i m \sum_{j=1}^3 (\alpha^j \beta + \beta \alpha^j) \frac{\partial \Psi}{\partial x^j}. \end{aligned}$$

Questa equazione si riduce all'equazione Klein-Gordon:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = (\vec{\nabla}^2 - m^2) \Psi,$$

che produce la desiderata relazione relativistica "energia-momento" se:

$$\begin{aligned} (\alpha^i)^2 &= 1 & \alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i &= 0 \quad (i \neq j) \\ \beta^2 &= 1 & \alpha^i \beta + \beta \alpha^i &= 0 \end{aligned}$$

o, in altre parole, se i coefficienti soddisfano le relazioni di anticommutazione:

$$\{\alpha^i, \alpha^j\} = \alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i = 2\delta^{ij} \quad \{\alpha^i, \beta\} = 0$$

e  $\beta^2 = 1$ .

Queste condizioni non possono essere soddisfatte dai numeri reali o complessi; pertanto, si devono considerare le matrici.

Le matrici devono:

1. essere autoaggiunte, dal momento che l'Hamiltoniana è autoaggiunta;
2. avere autovalori  $\pm 1$ , dal momento che  $(\alpha^i)^2 = \beta^2 = 1$ ;

3. avere traccia pari a zero, dal momento che, ad esempio,  $Tr(\alpha^i) = Tr(\beta\beta\alpha^i) = Tr(\beta\alpha^i\beta) = -Tr(\alpha^i)$ .

Ricordiamo ora le "matrici di Pauli":

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Poichè la dimensione più piccola possibile è  $N = 4$ , una scelta possibile è:

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dove 1 è la matrice unitaria 2 x 2.

Così, ad esempio:

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ciò implica che la funzione d'onda è un vettore avente 4 componenti:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad \Psi^\dagger = (\psi_1^* \quad \psi_2^* \quad \psi_3^* \quad \psi_4^*)$$

Le corrispondenti densità di probabilità e corrente sono:

$$\rho = \Psi^\dagger \Psi \quad \vec{j} = \Psi^\dagger \vec{\alpha} \Psi.$$

La densità è definita positiva, poichè è una somma di quadrati:

$$\rho = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2.$$

### 3.4.2 Corrispondenza non-relativistica

Prima di costruire le soluzioni generali dell' equazione di Dirac libera, esploriamo il limite non relativistico, per vedere che l' equazione ha un senso fisico.

Si consideri un elettrone "a riposo", cioè  $\nabla\Psi = 0$ .

L' equazione di Dirac si riduce, quindi, a:

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = m\beta\Psi \Rightarrow i\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

Per ciascuna componente si trova, quindi:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\psi_1}{\partial t} &= m\psi_1, & i\frac{\partial\psi_2}{\partial t} &= m\psi_2, \\ i\frac{\partial\psi_3}{\partial t} &= -m\psi_3, & i\frac{\partial\psi_4}{\partial t} &= -m\psi_4. \end{aligned}$$

Le soluzioni sono:

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= Ce^{-imt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \Psi_2 &= Ce^{-imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \Psi_3 &= Ce^{imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \Psi_4 &= Ce^{imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

ed i corrispondenti autovalori dell' Energia sono:  $E_{1,2} = m$  ed  $E_{3,4} = -m$ .

Di conseguenza, l'equazione di Dirac ha anche soluzioni con energia negativa.

Le soluzioni  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$  possono essere interpretate come "funzioni d' onda" delle particelle, mentre  $\Psi_3$  e  $\Psi_4$  a priori non possono esserlo.

L' interpretazione delle soluzioni dell' energia negativa viene pertanto momentaneamente rinviata.

Consideriamo ora un elettrone lento, che può essere trattato non relativisticamente.

Quindi, possiamo espandere l' energia:

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \simeq m + \frac{\vec{p}^2}{2m}.$$

Inserendo:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \begin{bmatrix} \tilde{\phi} \\ \tilde{\chi} \end{bmatrix},$$

dove  $\tilde{\phi}$  e  $\tilde{\chi}$  sono due spinori, nell' equazione di Dirac, si trova:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \tilde{\phi} \\ \tilde{\chi} \end{bmatrix} = \frac{1}{i} \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \begin{bmatrix} \tilde{\chi} \\ \tilde{\phi} \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} \tilde{\phi} \\ -\tilde{\chi} \end{bmatrix}.$$

Nel limite non relativistico, ci concentriamo alla definizione dei nuovi campi  $\phi$  e  $\chi$ :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\phi} \\ \tilde{\chi} \end{bmatrix} = e^{-imt} \begin{bmatrix} \phi \\ \chi \end{bmatrix},$$

dove ora  $\phi$  e  $\chi$  sono variabili relativamente lente, in funzione del tempo e sono le soluzioni delle equazioni accoppiate:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \phi \\ \chi \end{bmatrix} = \frac{1}{i} \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \begin{bmatrix} \chi \\ \phi \end{bmatrix} + 2m \begin{bmatrix} 0 \\ -\chi \end{bmatrix}.$$

Le equazioni accoppiate sono, in forma esplicita:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{1}{i} \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \chi, \\ i \frac{\partial \chi}{\partial t} &= \frac{1}{i} \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \phi - 2m \chi. \end{aligned}$$

In quest' ultima equazione si può trascurare la derivata temporale rispetto al termine di massa, poiché la dipendenza dal tempo dei due spinori è lenta.

Così:

$$\chi = \frac{1}{2im} \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \phi,$$

che possiamo inserire nella prima equazione:

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{1}{2m} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \phi.$$

Si noti che le componenti inferiori sono piccole  $\approx (p/m)\phi$  se paragonate alle componenti superiori.

Quindi, le componenti superiori sono dominanti.

Ora, utilizziamo l'identità:

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i \epsilon^{ijk} \sigma^k,$$

dove  $\epsilon^{ijk}$  è il tensore completamente antisimmetrico di rango 3 ( $\epsilon^{ijk} = 1$  per le permutazioni pari di 123, -1 per quelle dispari e 0 altrimenti).

L'equazione di Schrödinger per la parte superiore delle componenti si riconduce a:

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla}^2 \phi}{2m}$$

Così, nel limite non relativistico, le componenti superiori possono essere identificate con la funzione d'onda di Schrödinger di una particella con spin  $\frac{1}{2}$ .

### **Matrici e forma covariante dell'equazione di Dirac:**

L'equazione di Dirac è incisa sulla targa commemorativa che si trova nell'Abbazia di Westminster, come sappiamo.

La forma in cui è scritta, corrisponde alla cosiddetta *formulazione covariante*: con ciò, si intende che la forma dell'equazione è la stessa in qualsiasi sistema di riferimento inerziale, un risultato fondamentale nella teoria della

relatività. Per semplificare il modo di scrivere le equazioni, nella teoria quantistica relativistica si è soliti considerare sia la costante ridotta di Planck,  $\hbar$ , sia la velocità della luce,  $c$ , uguale all' unità.

Questo è detto *sistema naturale delle unità*.

L' equazione di Dirac si esprime, quindi, nella forma:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i \sum_{k=x,y,z} \alpha_k \frac{\partial \Psi}{\partial r_k} + M \beta \Psi = (-i \alpha \cdot \nabla + M \beta) \Psi,$$

dove, al solito, è introdotto il cosiddetto *operatore nabla*,  $\nabla$ , e si è fatto uso dell' espressione:

$$\alpha \cdot \nabla = \alpha_x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Le matrici di Dirac possono essere espresse direttamente in funzione delle matrici di Pauli,  $\sigma_k$ , nel modo seguente:

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Introducendo la notazione  $\gamma^0 \equiv \beta$ ;  $\gamma^k \equiv \beta \alpha_k$  e moltiplicando la precedente equazione di Dirac a sinistra per la matrice  $\beta$ , si può, infine, esprimere:

$$\left[ i \left( \gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + \gamma^0 \alpha \cdot \nabla \right) - M \right] \Psi = 0 \Rightarrow (i \gamma \cdot \partial - M) \Psi = 0,$$

L'equazione nel riquadro coincide con l'espressione incisa a Westminster. Nonostante la sua apparente semplicità, si noti che, in realtà, si tratta di quattro equazioni differenziali accoppiate.

E' nota come *forma covariante dell'equazione di Dirac per elettroni liberi* ed include l'operatore:

$$\gamma \cdot \partial = \gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + \gamma^x \frac{\partial}{\partial x} + \gamma^y \frac{\partial}{\partial y} + \gamma^z \frac{\partial}{\partial z}.$$

### 3.4.3 L'equazione di Dirac in forma covariante nel dettaglio

L'equazione di Dirac può essere scritta in una forma che è esplicitamente Lorentz-covariante.

Dal momento che tutti i prodotti  $A_\mu B^\mu$  (4-vettori) sono invarianti per trasformazioni di Lorentz, vogliamo portare l'equazione di Dirac:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left( \frac{1}{i} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m \right) \Psi,$$

in una tale forma, che mostri in modo esplicito la simmetria tra il tempo e lo spazio.

A tal fine si definiscono le matrici  $\gamma$ :

$$\gamma^0 = \beta \quad \gamma^i = \beta \alpha^i$$

Moltiplicando l' equazione di Dirac per  $\beta$ , troviamo poi:

$$\left[ i \left( \gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) - m \right] \Psi = \left[ i \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m \right] \Psi = 0$$

o, in forma compatta:

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi = 0.$$

Una forma ancora più compatta, può essere ottenuto introducendo la notazione "a barra" di Feynman:

$$\not{d} = \gamma^\mu a_\mu$$

ottenendo, quindi:

$$(i \not{d} - m) \Psi = 0.$$

Le nuove matrici soddisfano la relazione di anticommutazione:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu},$$

in cui:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il fatto che l'equazione di Dirac è Lorentz-covariante significa che in un diverso sistema di riferimento di Lorentz, l'equazione di Dirac ha la stessa forma che nel sistema di riferimento  $x^\mu$ :

$$\left[ i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m \right] \Psi(x) = 0$$

e in  $(x')^\mu$  (collegato alla struttura originale di una trasformazione di Lorentz) è:

$$\left[ i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial (x')^\mu} - m \right] \Psi(x') = 0$$

Per la prova matematica che l'equazione di Dirac è Lorentz-covariante, si rinvia a "Bjorken e Drell, vol.1" ([1]).

Per ottenere l'equazione di Dirac per il campo coniugato, consideriamo le coniugate delle matrici  $\gamma$ :

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i \quad \Rightarrow \quad \gamma^0 (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 = \gamma^\mu.$$

L'equazione d'onda coniugata è:

$$\Psi^\dagger \left[ -i(\gamma^\mu)^\dagger \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^\mu} - m \right] = 0.$$

Moltiplichiamo questa equazione da sinistra con  $\gamma^0$ .

Utilizzando le proprietà delle matrici  $\gamma$  e definendo:

$$\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0$$

troviamo:

$$\bar{\Psi}(i \not{\partial} + m) = 0.$$

Si può anche scrivere la corrente in modo esplicito sottoforma di 4-vettore:

$$\begin{aligned} j^\mu &= \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi = (\Psi^\dagger \Psi, \Psi^\dagger \vec{\alpha} \Psi) \\ \partial_\mu j^\mu &= 0. \end{aligned}$$

Si può provare che tale corrente si conserva.

La corrente  $j^\mu$  si trasforma in un 4-vettore. ([1])

### **Il valore dell' equazione:**

Non solo Dirac introdusse questa forma della sua equazione nel suo lavoro originale del 1928, ma dimostrò, inoltre, che soddisfaceva la proprietà di invarianza rispetto alle trasformazioni di Lorentz.

In tal modo, l' equazione di Dirac costituiva, senza dubbio, una descrizione soddisfacente del comportamento quantistico delle particelle subatomiche: rispettava la relazione relativistica tra quantità di moto ed energia, dando origine ad una densità di probabilità definita positiva con valori reali dell' energia e, infine, era coerente con il principio di relatività di Einstein.

Molti anni più tardi, Dirac ricordava: ” *Guardando indietro, mi risulta strano che mi ci sia voluto tanto tempo per risolvere un aspetto tanto elementare*”.

Dirac portò la matematica alle sue più estreme conseguenze: la necessità di introdurre dimensioni aggiuntive, lo obbligò ad accettare funzioni d' onda descritte da quattro componenti il cui significato fisico, al di là dei due possibili stati di *spin*, avrebbe fatto impazzire i fisici negli anni seguenti.

La teoria di Dirac sull' elettrone, è un esempio di quello che Wigner denominò "l' irrazionale efficacia della matematica nelle scienze naturali".

### 3.4.4 Soluzioni dell' equazione di Dirac per una particella libera

Si consideri una particella libera descritta dall'equazione di Dirac:

$$\left[ i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m \right] \Psi(x) = 0.$$

Dal momento che la quantità di moto è una costante del moto per una particella libera, la soluzione deve essere un'onda piana:

$$\Psi_p(x) = \begin{pmatrix} \phi(p) \\ \chi(p) \end{pmatrix} e^{-ipx},$$

dove  $px$  è una forma compatta per scrivere il prodotto (4-vettore)  $p^\mu x_\mu = p^0 x^0 - px = Et - px$ .

La notazione è scelta in modo che  $E = \sqrt{p^2 + m^2}$  (assumendo che  $c = 1$ ).

Calcolando le derivate, si trova:

$$(\not{p} - m) \begin{pmatrix} \phi(p) \\ \chi(p) \end{pmatrix} = 0,$$

che è un' equazione matriciale per le quattro componenti.

Si trovano due soluzioni (positive) dell' energia, della forma:

$$\Psi_i(x) = u_i(p)e^{-ipx},$$

in cui

$$u_1(p) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \varphi_\uparrow \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \varphi_\uparrow \end{pmatrix}$$

e

$$u_2(p) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \varphi_\downarrow \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \varphi_\downarrow \end{pmatrix}$$

sono i quattro *spinori di Dirac*.

Inoltre

$$\varphi_\uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \varphi_\downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono due spinori (quando non vi è alcun rischio di confusione, spesso si riferisce agli *spinori di Dirac* usando solo il termine *spinori*, per semplicità).

Ci sono anche due soluzioni ad energia negativa della forma:

$$\Psi_i(x) = v_{5-i}(p)e^{ipx} \quad i \in 3, 4,$$

dove  $p$  (4-vettore) è definito come sopra e

$$v_1(p) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \varphi_{\downarrow} \\ \varphi_{\downarrow} \end{pmatrix}$$

$$v_2(p) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \varphi_{\uparrow} \\ \varphi_{\uparrow} \end{pmatrix}$$

sono i corrispondenti spinori.

Si noti che nelle soluzioni ad energia negativa, le componenti minori sono molto grandi. (Nella sezione successiva, descriverò un'interpretazione per queste soluzioni.)

Per una particella a riposo, queste soluzioni sono d' accordo con quelle ottenute nella sezione precedente.

Gli spinori vengono normalizzati in modo tale che:

$$\begin{aligned} u_i^\dagger(p)u_j(p) &= \frac{E}{m}\delta_{ij} & v_i^\dagger(p)v_j(p) &= \frac{E}{m}\delta_{ij} \\ u_i^\dagger(p)v_j(\tilde{p}) &= v_i^\dagger(p)u_j(\tilde{p}) = 0, \end{aligned}$$

dove  $\tilde{p} = (E, -p)$ .

Il fattore  $E/m$  è dovuto alla contrazione di Lorentz dell' elemento "volume" lungo la direzione del moto.

Inoltre, si ha:

$$\begin{aligned}\bar{u}_i(\mathbf{p})u_j(\mathbf{p}) &= \delta_{ij} & \bar{v}_i(\mathbf{p})v_j(\mathbf{p}) &= -\delta_{ij} \\ \bar{u}_i(\mathbf{p})v_j(\mathbf{p}) &= \bar{v}_i(\mathbf{p})u_j(\mathbf{p}) = 0.\end{aligned}$$

Così,  $\bar{u}u$  è una quantità Lorentz-invariante. ([1])

### 3.4.5 La soluzione di Dirac in un caso speciale

In precedenza abbiamo ricavato l'equazione di Dirac generalizzando al caso relativistico l'equazione di Schrödinger. Ricordando le regole della meccanica quantistica, possiamo scrivere l'equazione

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = (c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + mc^2\beta)\psi.$$

Ricaviamo le soluzioni di quest'equazione nel caso relativamente semplice in cui la funzione sia indipendente dalla posizione. Questa richiesta che facciamo sulla funzione d'onda si traduce in:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial z} = 0,$$

che vuol dire assenza di tri-impulso per la particella.

L'equazione di partenza

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i}\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla\psi + \beta mc^2\psi,$$

si semplificherà in:

$$\frac{i\hbar}{c}\beta\frac{\partial\psi}{\partial t} - mc\psi = 0.$$

Esplicitandola in componenti, otteniamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial\psi_A/\partial t \\ \partial\psi_B/\partial t \end{pmatrix} = -\frac{imc^2}{\hbar} \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix},$$

dove abbiamo introdotto al posto dello spinore  $\psi$  una coppia di bi-spinori definiti come:

$$\psi_A = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \psi_B = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}.$$

Otteniamo, quindi, due equazioni differenziali:

$$\frac{\partial\psi_A}{\partial t} = -i\frac{mc^2}{\hbar}\psi_A, \quad -\frac{\partial\psi_B}{\partial t} = -i\frac{mc^2}{\hbar}\psi_B,$$

le cui soluzioni sono funzioni dipendenti dalla sola variabile temporale e sono date da:

$$\begin{aligned} \psi_A(t) &= \psi_A(0)e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}, \\ \psi_B(t) &= \psi_B(0)e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t}. \end{aligned}$$

Per una particella in quiete l'energia è pari a  $E = mc^2$ .

La funzione d'onda ha la forma:

$$\psi_A(t) \propto e^{-iEt/\hbar}$$

che esprime la corretta dipendenza funzionale dello stato quantico rispetto all'energia.

Risulta più complicata l'interpretazione degli stati  $\psi_B(t)$ : infatti, se volessimo interpretare l'equazione di Dirac come equazione di evoluzione temporale della funzione d'onda come in meccanica quantistica non relativistica, questi stati sarebbero caratterizzati da autovalori negativi dell'hamiltoniano.

Per tentare di spiegare come mai una particella *libera* possa essere dotata di energia negativa, furono fatte parecchie ipotesi e vennero proposti vari modelli (molto spesso lontani dall'essere delle vere teorie), pensando all'equazione di Dirac non più come ad un'equazione d'onda ma come ad un campo classico quantizzabile. La moderna teoria dei campi, che ha rivisitato la teoria di Dirac, supera i problemi precedentemente esposti: secondo questa interpretazione, infatti, sia le particelle che le antiparticelle sono dotate di energia positiva. ([1])

### 3.4.6 L' elettrone libero in moto

I risultati ottenuti nei paragrafi precedenti ci consentono di scrivere le soluzioni dell'equazione di Dirac per un elettrone libero dotato di una velocità arbitraria. Per ottenerle, utilizzeremo le soluzioni ottenute per un elettrone a riposo nel sistema di riferimento  $O$  e poi ci sposteremo in un nuovo sistema

di riferimento  $O'$  in moto rispetto ad  $O$  con velocità  $-v$ ; in questo modo, le soluzioni relative ad  $O'$  descriveranno un elettrone che si muove con velocità  $v$ .

L'equazione

$$\begin{aligned}\psi_A(t) &= \psi_A(0)e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}, \\ \psi_B(t) &= \psi_B(0)e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t}.\end{aligned}$$

si può riscrivere in forma compatta come:

$$\psi_A(t) \propto e^{-iEt/\hbar}$$

dove:

$$\begin{aligned}\epsilon_r &= +1 & r = 1, 2, \\ \epsilon_r &= -1 & r = 3, 4,\end{aligned}$$

e

$$\omega^1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \omega^2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \omega^3(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \omega^4(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'esponenziale contenuto nella soluzione  $\psi^r$  può essere riscritto in forma covariante come segue:

$$e^{-i\epsilon_r mc^2 t/\hbar} = e^{-i\epsilon_r p_\mu x^\mu/\hbar} = e^{-i\epsilon_r p'_\mu x'^\mu/\hbar}.$$

In questo modo si vede che le soluzioni ad energia positiva e quelle ad energia negativa non si mescolano durante il cambio di sistema di riferimento: il passaggio da un sistema di riferimento ad un altro non modifica il valore di  $\epsilon_r$ , e dunque il futuro assoluto ed il passato assoluto dell' elettrone non dipendono dal sistema di riferimento.

Scegliamo per comodità la velocità relativa tra  $O$  ed  $O'$  parallela all' asse  $x$ ; per questa particolare trasformazione di Lorentz, l' operatore  $S$  sarà:

$$S = e^{-i\omega\sigma_{01}/2}$$

e possiamo, quindi, esplicitare  $\sigma_{01}$ :

$$\sigma_{01} = -i\alpha_1.$$

Quindi:

$$\begin{aligned} S = e^{-\omega\alpha_1/2} &= \mathbf{1} \left( 1 + (-\omega/2)\alpha_1 + \frac{(-\omega/2)^2(\alpha_1)^2}{2} + \frac{(-\omega/2)^3(\alpha_1)^3}{3!} + \dots \right) = \\ &= \mathbf{1} \left( 1 + \frac{(\omega/2)^2}{2} + \frac{(\omega/2)^4}{4!} + \dots \right) - \alpha_1 \left( (\omega/2) + \frac{(\omega/2)^3}{3!} + \frac{(\omega/2)^5}{5!} + \dots \right) = \\ &= \mathbf{1} \cosh(\omega/2) - \alpha_1 \sinh(\omega/2) \end{aligned}$$

Applichiamo l' operatore  $S$  ad  $\omega^r(0)$  ed otteniamo per  $\omega^r(p_x)$  l' equazione:

$$\omega^r(p_x) = (\cosh(\omega/2) - \alpha_1 \sinh(\omega/2)) \omega^r(0) =$$

$$\cosh(\omega/2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\tanh\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ 0 & 1 & -\tanh\left(\frac{\omega}{2}\right) & 0 \\ 0 & -\tanh\left(\frac{\omega}{2}\right) & 1 & 0 \\ -\tanh\left(\frac{\omega}{2}\right) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \omega^r(0)$$

Grazie alla forma semplice di  $\omega^r(0)$ , otteniamo che la colonna  $r$ -esima della matrice di trasformazione coincide con lo spinore  $\omega^r(p_x)$ .

Possiamo sostituire l'angolo di rotazione  $\omega$  in termini di quantità fisiche con l'aiuto di alcune formule trigonometriche:

$$\tanh x = \frac{\tanh 2x}{1 + \sqrt{1 - \tanh^2 2x}},$$

$$\cosh x = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}}.$$

Per la trasformazione di Lorentz considerata, si evince che

$$\tanh \omega = -\frac{v}{c}$$

ed utilizzando le formule trigonometriche scritte precedentemente, si ha:

$$-\tanh\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{-\tanh \omega}{1 + \sqrt{1 - \tanh^2 \omega}} = \frac{p_x c}{E + mc^2},$$

$$\cosh\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left[\tanh^2 \omega / (1 + \sqrt{1 - \tanh^2 \omega})^2\right]}} = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}}.$$

Infine, possiamo riscrivere (tramite le ultime due relazioni) gli spinori nel sistema di riferimento  $O'$ :

$$\omega^r(p_x) = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{p_x c}{E + mc^2} \\ 0 & 1 & \frac{p_x c}{E + mc^2} & 0 \\ 0 & \frac{p_x c}{E + mc^2} & 1 & 0 \\ \frac{p_x c}{E + mc^2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \omega^r(0).$$

La conoscenza della forma generale dell'operatore  $S$ , che consente di trasformare le soluzioni dell'equazione di Dirac valide in un sistema di riferimento  $O$  in quelle valide in un altro sistema di riferimento  $O'$ , ha permesso di ricavare dalla semplice forma delle soluzioni relative al sistema di riferimento in cui l'elettrone è in quiete, la soluzione valida nel caso in cui l'elettrone si muove con velocità  $v$ , che, per semplicità, abbiamo scelto diretta lungo l'asse  $x$ .

### 3.5 Incredibili successi, problemi inaspettati

L'equazione di Dirac riempì di stupore tutti i suoi colleghi: alcuni di loro avevano passato mesi a lavorare duramente per costruire un'equazione quantistica relativistica. Jordan commentò: "Non posso perdonarmi il fatto di non essere riuscito a vedere che la chiave era un'espressione lineare". Nonostante ciò, così come ricordato da Juan Antonio Caballero Carretero, Jordan riconobbe la grandezza del lavoro di Dirac: "Avrei preferito trovare io l'equazione, ma la formulazione di Dirac è così meravigliosa e l'equazione è così concisa, che dobbiamo essere felici di averla".

Quest' opinione era condivisa da tutti i fisici; Heisenberg disse: "Tengo nella massima considerazione il suo ultimo lavoro sullo spin", ed Ehrenfest: "Trovo l' ultimo lavoro di Dirac sullo spin dell' elettrone semplicemente splendido".

L' entusiasmo generato dall' *equazione di Dirac* non fu dovuto solo al modo in cui essa scaturì dalla mente di Dirac, ma anche alle soluzioni che fornì. La proprietà dello *spin* emergeva come conseguenza naturale della struttura stessa dell' equazione che, a sua volta, era il risultato inevitabile dei principi fondamentali delle due grandi teorie della fisica: la teoria della relatività e la teoria quantistica. L' equazione forniva il momento magnetico dell' elettrone ed era capace di riprodurre l' espressione esatta della costante della struttura fine.

L' *equazione di Dirac*, inoltre, si riduceva a quella di Schrödinger o a quella di Pauli nel limite delle energie cinetiche piccole rispetto all' energia propria dell' elettrone.

Le difficoltà associate a tale equazione erano implicite nella sua stessa struttura: se per descrivere lo *spin* erano necessarie solo due componenti, che senso avevano le due dimensioni aggiuntive che comparivano nell' *equazione di Dirac*?

Dottevettero trascorrere diversi anni affinché si comprendesse chiaramente il significato fisico delle soluzioni dell' *equazione di Dirac*. La struttura matematica, invece, non lasciava alcun dubbio: le soluzioni corrispondevano non solo ad elettroni ordinari con energia positiva, ma anche ad elettroni con energia negativa.

Dirac, consapevole di questa difficoltà, segnalò che la presenza dei due tipi

di soluzioni (energia positiva e negativa) risultava inevitabile in qualsiasi teoria quantistica relativistica. ([2])

Nel suo lavoro sull' elettrone, Dirac menzionava le due grandi difficoltà della precedente teoria di Klein-Gordon:

1. Non linearità per quanto riguarda l' energia  $o$ , analogamente, per quanto riguarda la derivata temporale;
2. validità dell' equazione sia per gli elettroni con carica  $+e$ , come per gli elettroni con carica  $-e$ .

### 3.6 La teoria dei buchi: elettroni e positroni

Le componenti ad energia negativa erano una conseguenza della stessa equazione relativistica che non poteva essere ignorata; Dirac segnalò che tali stati non potevano essere direttamente identificati con delle particelle fisiche, come aveva proposto Weyl, senza cadere in paradossi e situazioni assurde.

La nuova interpretazione di Dirac degli stati di energia negativa, fu presentata in un lavoro intitolato *Una teoria di elettroni e positroni*, mandato in stampa agli inizi di dicembre del 1929.

*In che cosa consisteva la nuova teoria e perchè non si poteva accettare la proposta originale di Weyl?*

Dirac evidenziò che l' identificazione diretta delle soluzioni dell' energia negativa con i protoni, implicava che la transizione di un elettrone da uno stato

di energia positiva ad un altro di energia negativa, sarebbe stata interpretata come un passaggio da elettrone e positrone.

Ciò sarebbe stato in contraddizione con la conservazione della carica elettrica; l'ipotesi di Dirac fu la seguente: "Tutti gli stati di energia negativa sono occupati da elettroni".

Con questa supposizione, nessun elettrone con energia positiva può decadere in uno stato di energia negativa, posto che questo stato è già occupato, ed il principio di esclusione di Pauli impedisce che due elettroni possano occupare lo stesso stato quantico.

Seguendo quanto scritto nel libro di Juan Antonio Caballero Carretero ([2]), Dirac risolse in questo modo il problema delle transizioni, introducendo un numero infinito di elettroni in stato di energia negativa: la distribuzione sarebbe stata completamente uniforme e, di conseguenza, non avrebbe avuto alcun effetto osservabile. Solo piccole alterazioni di questa situazione di omogeneità, ad esempio attraverso un numero ridotto di stati di energia negativa non occupati, avrebbero prodotto effetti rilevabili.

Dirac introdusse, per la prima volta in fisica, un'immagine dello stato di vuoto quantistico: esso era costituito da un'infinità di elettroni che occupavano stati di energia negativa.

Questa situazione corrisponderebbe allo stato di massima stabilità ed è oggi conosciuto come *mare di Dirac*.

Dirac sottolineò che solo gli stati di energia negativa che non fossero occupati da elettroni avrebbero prodotto effetti fisici: uno stato vacante o "buco"

nel mare di Dirac, cioè l' assenza di un elettrone, si sarebbe comportato a tutti gli effetti come uno stato di energia positiva con carica positiva.

Da quanto si può leggere nel testo di Juan Antonio Caballero Carretero ([2]), Dirac concluse:

*Di conseguenza, arriviamo alla conclusione che i buchi nella distribuzione di stati corrispondenti ad elettroni con energia negativa sono i positroni.*

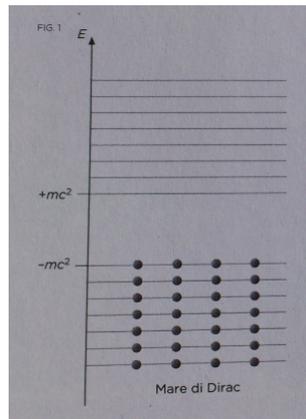
La nuova teoria di Dirac (l' identificazione diretta dei buchi con i positroni) forniva, dunque, una spiegazione unitaria delle due particelle, elettrone e positrone, che potevano essere considerate come due manifestazioni di un unico stato fondamentale.

La *teoria dei buchi di Dirac*, con l' identificazione dei buchi con i positroni, portava con sé una difficoltà: la presenza di un buco (o l' esistenza di un positrone) implicava che un elettrone con energia positiva potesse cadere nel buco in questione (e ciò equivale al processo di annichilazione di un elettrone e di un positrone). Analogamente, un elettrone nel mare di Dirac, avrebbe potuto assorbire radiazioni, essendo eccitato ad uno stato di energia positiva: in altre parole, si sarebbero creati un elettrone ed un positrone.

Entrambi i tipi di processi, creazione ed annichilazione di particelle, erano coerenti con il principio di equivalenza massa-energia della teoria della relatività, ma nessuno dei due processi era mai stato osservato. ([2])

### Creazione ed annichilazione di coppie nella teoria di Dirac:

Lo spettro energetico risultante dall' equazione di Dirac è mostrato nella figura successiva:

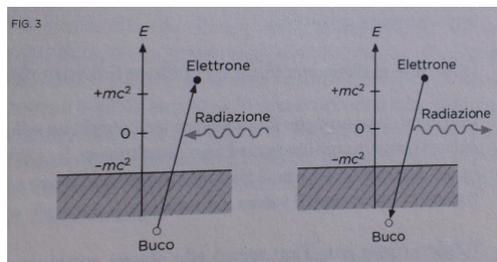


Il concetto di "vuoto quantistico" corrisponde a tutti questi stati occupati da elettroni. In tal modo, Dirac spiega la stabilità della materia facendo uso del principio di esclusione di Pauli: non è possibile alcuna transizione da uno stato fisico ad energia positiva ad un altro ad energia negativa che sia già occupato.

*Come vengono interpretati questi processi nel contesto della "teoria dei buchi di Dirac" ?*

La presenza di uno stato non occupato all' interno del *mare di Dirac*, permetterà che un elettrone con energia positiva cada nel buco.

Identificando il buco nel *mare di Dirac* con una particella, il processo si potrebbe interpretare come l' annichilazione dell' elettrone e di una particella positiva, che dà luogo all' emissione di radiazioni (parte destra dell' immagine successiva).



Quando Dirac identificò i buchi con gli antielettroni, il processo descritto avrebbe corrisposto all'annichilazione di una coppia elettrone-antielettrone. In questo modo, la presenza di radiazioni elettromagnetiche potrebbe agganciare un elettrone del *mare di Dirac* e portarlo ad uno stato all'interno del *continuum* ad energie positive (parte sinistra dell'immagine precedente).

Perché ciò sia possibile, l'energia fornita deve essere uguale o superiore a  $2mc^2$ , l'ampiezza minima della zona proibita che l'elettrone deve superare.

In questa situazione, il processo causerebbe, nello stato finale, la creazione di un buco nel *mare di Dirac*, vale a dire una particella positiva: l'antielettrone di Dirac ed un elettrone.

Questo processo è detto *creazione di coppie particella-antiparticella*.

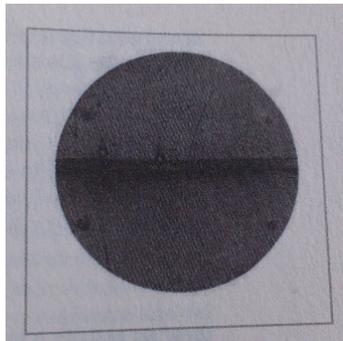
### 3.7 La scoperta del positrone

I raggi cosmici (particelle cariche) provenienti dallo spazio esterno, erano diventati un interessante campo di studio: rappresentavano uno dei principali progetti di ricerca di Robert A. Millikan e dei suoi collaboratori all'Istituto Tecnologico della California (Caltech). Nel novembre del 1931, Millikan ten-

ne diversi seminari nel Laboratorio Cavendish (Cambridge) e mostrò diverse fotografie scattate da Carl D. Anderson (1905-1991), un suo vecchio studente di dottorato, in cui si potevano vedere le traiettorie lasciate in una camera a nebbia da elettroni e da alcune particelle positive.

Nei mesi successivi, il vero protagonista di Cambridge divenne James Chadwick (1891-1974) con la sua scoperta del *neutrone*: finalmente, dopo 12 anni da quando Rutherford ne aveva postulato l' esistenza, il neutrone fu "osservato" nel febbraio del 1932.

Nell' estate di quello stesso anno, Anderson riuscì a fotografare la traiettoria delle particelle che sembravano corrispondere per certi versi ad elettroni, per alcuni, invece, ad altre particelle con carica positiva che subivano una deflessione simile a quella degli elettroni.



L' immagine precedente è la fotografia del *positrone* realizzata da Carl D. Anderson con la "camera a nebbia", un dispositivo pieno di gas, sottoposto ad un campo magnetico, nel quale le particelle cariche (ionizzando gli atomi del gas) lasciano una traccia visibile della loro traiettoria.

Anderson pubblicò i suoi risultati sulla rivista *Science*: l' articolo si concludeva con la sua affermazione " *Sembra necessario considerare una particella carica positivamente con una massa paragonabile a quella dell' elettrone*".

A Cambridge, il fisico Patrick M. S. Blackett (1897-1974) e Giuseppe Occhialini (1907-1933), ottennero risultati che avvaloravano quelli di Anderson e che, inoltre, identificarono direttamente con gli antielettroni di Dirac; nel lavoro che pubblicarono, conclusero:

*Sembra non esistere alcuna evidenza contro la validità della teoria di Dirac; al contrario, questa teoria prevede un tempo di vita per l' elettrone positivo sufficientemente lungo da poter essere osservato in una camera a nebbia, ed allo stesso modo sufficientemente breve da poter spiegare come mai non sia stato rilevato con altri mezzi.*

Il nome *positrone* venne introdotto, per la prima volta, in un secondo lavoro di Anderson pubblicato nel 1933: la scoperta sperimentale del positrone fu considerata un grande trionfo per la teoria di Dirac. Nonostante ciò, numerosi fisici mantennero una posizione molto critica rispetto all' immagine del *mare di Dirac* ed all' interpretazione di una particella come di un buco in questo *mare* per un po' di tempo.

Non era facile accettare l' idea di un vuoto formato da un numero infinito di elettroni con energia negativa; ma, allo stesso tempo, alcune conseguenze di questa teoria (come l' esistenza dell' antielettrone e la sua identificazione con l' elettrone positivo osservato da Anderson) divennero fatti indiscutibili:

dovette trascorrere ancora del tempo affinché l' esistenza delle antiparticelle e dei processi di creazione ed annichilazione delle coppie particella-antiparticella potessero essere spiegate senza la necessità di introdurre il *mare di Dirac*.

La pubblicazione della teoria relativistica dell' elettrone, trasformò Dirac in uno dei fisici più rinomati del mondo: nel febbraio del 1930 fu eletto *fellow of the Royal Society*, uno dei titoli scientifici di maggior prestigio in Gran Bretagna.

L'elezione dei membri della *Royal Society* richiedeva, generalmente, diverse nomine prima di diventare effettiva; l' elezione di Dirac fu straordinaria: era la prima volta che lo scienziato riceveva una nomina alla candidatura e, inoltre, fu eletto a soli 27 anni (un' età decisamente inferiore all' età media di elezione della maggior parte dei membri della società).

Il maggior riconoscimento scientifico, il Premio Nobel, venne assegnato a Dirac nel 1933: ricordo, inoltre, Heisenberg (che ricevette da solo il Premio Nobel per l' anno 1932) e Schrödinger, che condivise il Premio del 1933 con lo stesso Dirac.

Dirac, ottenuto il Premio Nobel a 31 anni appena compiuti, diventò il fisico teorico più giovane nella storia ad aver ottenuto questa ricompensa: tale premio, gli fu concesso per "la sua scoperta di forme nuove e fertili della teoria atomica e per le loro applicazioni".

Il discorso di Dirac alla cerimonia dei premi Nobel fu sulla teoria degli elettroni e dei positroni; parlò dei suoi antielettroni e degli antiprotoni e concluse con le seguenti parole:

*Dobbiamo considerare accidentale il fatto che la Terra (e presumibilmente*

*tutto il sistema solare) sia formata fondamentalmente da elettroni negativi e protoni positivi. Di fatto, dovrebbe esistere la metà di stelle per ciascun tipo. Le due classi di stelle hanno esattamente lo stesso spettro e non c'è modo di distinguerle attraverso i metodi astronomici attuali.*

Dirac mise davanti ai nostri occhi un Universo in cui materia ed antimateria erano parti essenziali dello stesso. ([2])

### **3.7.1 Soluzioni con energia negativa nel dettaglio: interpretazione di Stuckelberg e Feynman**

Abbiamo detto che, se vogliamo usare la meccanica quantistica associandole le equazioni di Dirac e di Klein-Gordon, ci imbattiamo in guai seri (a causa dell'esistenza dell'energia negativa delle soluzioni).

Poichè lo spettro non è limitato dal basso, ciò porta ad un' instabilità di qualsiasi stato con uno o più elettroni.

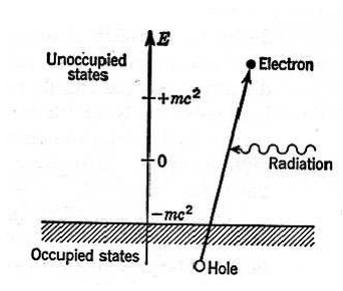
Nulla impedisce ad un elettrone in un stato di energia positiva di passare ad uno degli infiniti stati di energia negativa e, di conseguenza, ci sarà un' emissione di fotoni.

Dirac, nel 1927, suppose che tutti gli stati aventi energia negativa fossero costituiti da elettroni (un elettrone per ciascun stato).

Poichè il principio di Pauli consente un solo elettrone per stato, gli stati aventi energia positiva sono ora stabili.

Questo è in analogia con la stabilità dell' ultimo stato energetico presente nell' atomo, grazie al decadimento.

In analogia con il "mare di Fermi", gli stati ad energia negativa vengono chiamati "*mare di Dirac*".



La figura precedente, è presa dal J.D. Bjorken S.D. Drell, "Relativistic Quantum Mechanics" (sez. sull' "hole theory", [3]).

Al fine di non avere energie e cariche infinite, queste quantità vengono rinormalizzate nel vuoto: in altre parole, l' energia e la carica vengono misurate rispetto al *mare di Dirac*.

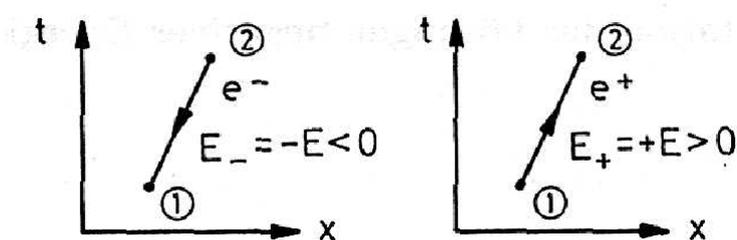
Giungiamo, quindi, a molte "body theory" dell' elettrone: il vuoto viene riempito con gli elettroni nel *mare di Dirac*, che diventa visibile solo se eccitiamo l' elettrone portandolo da uno stato ad energia negativa in uno ad energia positiva. Questo processo determina un vuoto nel mare di Dirac, detto "hole".

Lo *hole (buco)*, privato dell' elettrone iniziale (avente energia negativa), assume, quindi, energia positiva (e viene di conseguenza interpretato come "antiparticella"). Sulla base di queste considerazioni, Dirac postulò l' esistenza delle antiparticelle ed in particolare, nel 1930-31, dei positroni.

I positroni furono trovati nei raggi cosmici da Anderson nel 1932 (una trattazione più approfondita è presente nel primo volume del testo di J.D. Bjorken S.D. Drell, [1]).

L'interpretazione di Dirac fu rivoluzionaria: ricordiamo che fece la sua previsione senza risultati sperimentali che richiedessero l'esistenza delle antiparticelle.

Tuttavia, non è soddisfacente perché funziona solo per fermioni ma non per bosoni e richiede che il vuoto venga riempito indefinitamente con un "mare" di elettroni.



La figura è l'interpretazione di un elettrone con energia negativa, libero di muoversi all'indietro nel tempo, come un positrone con energia positiva. (Figura presa da P. Schmuser, Feynman Graphen und Eichtheorien fur Experimentalphysiker, [3])

L'interpretazione attualmente accettata degli stati di energia negativa, è dovuta a Stuckelberg e Feynman: nella loro interpretazione, gli stati di energia negativa hanno senso quando si lascia che si propagano a ritroso nel tempo.

Una soluzione di energia negativa che si propagano indietro nel tempo,

descrive un' antiparticella che si propaga avanti nel tempo, come illustrato nella figura precedente.

Così, un elettrone con energia negativa che si propaga a ritroso nel tempo dal punto (2) al punto (1) è equivalente a un positrone che si propaga avanti nel tempo dal punto (1) al punto (2).

All' interno di questo quadro, che funziona anche per i bosoni, si possono descrivere tutti i processi di dispersione di particelle e antiparticelle (scattering), nonché l'annientamento (annihilation) e la produzione di coppie particella-antiparticella.

L' interpretazione di Stuckelberg-Feynman porta alle seguenti affermazioni:

1. L' emissione di un' antiparticella con quadri-momenti  $p^\mu$ , è equivalente all' assorbimento di una particella con quadri-momenti  $-p^\mu$ ;
2. l' assorbimento di un' antiparticella con quadri-momenti  $p^\mu$ , è equivalente all' emissione di una particella con quadri-momenti  $-p^\mu$ .

Si consideri la dispersione di pioni carichi in un potenziale elettromagnetico: noi chiamiamo  $\pi^+$  le particelle e  $\pi^-$  le antiparticelle.

La dipendenza dal tempo del potenziale si presume essere della forma  $V(t) = V_0 \exp(-i\omega t)$ .

Il segno dell' esponente significa che il potenziale dà energia al pione, vale a dire che il pione assorbe quanti gamma; consideriamo tre casi:

1) Lo scattering  $\pi^+$  (Fig. precedente, a). L' elemento della matrice di transizione è dato da:

$$M \propto \int \phi_{\text{out}}^* V(t) \phi_{\text{in}} dt,$$

dove

$$\phi_{\text{in}} \propto \exp(-iE_{\text{in}}t) \quad \phi_{\text{out}}^* \propto \exp(iE_{\text{out}}t)$$

da cui si ottiene che:

$$M \propto \delta(E_{\text{out}} - E_{\text{in}} - \omega) \Rightarrow E_{\text{out}} = E_{\text{in}} + \omega$$

Così il  $\pi^+$  -mesone ha assorbito un fotone di energia  $\omega$ . ([3])

2) Lo scattering  $\pi^-$  (Fig. precedente, b). L' ingresso di  $\pi^-$  con energia  $E_1 > 0$ , corrisponde ad un' uscita di  $\pi^+$  con energia negativa  $E_{\text{OUT}} = -E_1 < 0$ , mentre l' uscita  $\pi^-$  con energia  $E_2 > 0$  corrisponde ad un ingresso  $\pi^+$  con energia  $E_{\text{IN}} = -E_2 < 0$ .

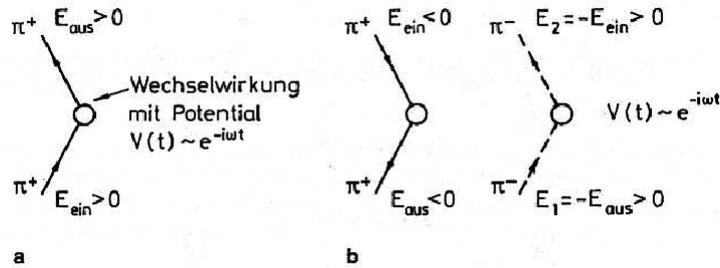
L' elemento della matrice di transizione, viene calcolato per la particella che "corre" all' indietro con energia negativa:

$$M \propto \int \phi_{\text{out}}^* V(t) \phi_{\text{in}} dt \propto \int \exp(i(E_{\text{out}} - E_{\text{in}} - \omega)t) dt$$

Espresso in termini di energie  $\pi^-$ :

$$M \propto \int \exp(i(E_2 - E_1 - \omega)t) dt = 2\pi\delta(E_2 - E_1 - \omega)$$

Così, l'energia del mesone  $\pi^-$ , è anche incrementata dal valore  $\omega$ .



(La figura precedente è stata presa da P. Schmuser, Feynman Graphen und Eichtheorien für Experimentalphysiker, [3])

3) Creazione di una coppia  $\pi^+ \pi^-$  (Fig. precedente, a).

Nell'interpretazione Stueckelberg-Feynman, ciò corrisponde ad un'energia negativa  $\pi^-$  che si propaga indietro nel tempo che, attraverso l'interazione con il potenziale, viene convertita in energia positiva  $\pi^+$  che si propaga in avanti nel tempo.

$$M \propto \int \exp(i(E_{\text{out}} - E_{\text{in}} - \omega)t) dt = 2\pi\delta(E_2 + E_1 - \omega),$$

che implica  $E_1 + E_2 = \omega$ .

Così, l'energia del fotone assorbito è uguale all'energia totale della coppia creata.

Per l'assorbimento di una coppia pione (Fig. precedente, b), si deve scegliere un potenziale della forma  $V(t) = V_0 \exp(i\omega t)$ , in modo che l'energia può essere assorbita dal potenziale.

Si trova che l'energia assorbita dal potenziale è uguale all'energia totale della coppia assorbita.

Queste considerazioni non sono solo qualitative, ma illustrano l'utilità dell'approccio Stuckelberg-Feynman, dove quattro diversi processi possono essere gestiti con lo stesso formalismo.

Abbiamo scoperto, quindi, che una teoria quantistica relativistica comporta necessariamente la nascita delle antiparticelle (questi nuovi processi non sono presenti nella meccanica quantistica non relativistica). ([1])



## Capitolo 4

# L' elettrodinamica quantistica

Fin dalla nascita della meccanica quantistica, numerosi scienziati, tra cui Dirac, cercarono di descrivere il campo elettromagnetico e l' interazione tra particelle alla luce della nuova teoria.

Con il passare degli anni, l' elettrodinamica quantistica divenne la teoria fisica più precisa: Dirac è considerato il suo "fondatore".

Esiste una famosa fotografia (immagine successiva) in cui appaiono Dirac ed il fisico statunitense Richard Feynman (1918-1988) impegnati in una discussione.

Secondo quanto si può leggere nel volume *Dirac, l'antimateria*, scritto dal Prof. Juan Antonio Caballero Carretero ([2]), la fotografia mostra Feynman che gesticola di fronte a Dirac: non sappiamo cosa gli stia dicendo; forse sta cercando di convincerlo di qualcuna delle ultime scoperte del mondo subatomico.



Possiamo immaginare la storia della fotografia nel seguente modo: Feynman sta usando le sue conoscenze e la sua capacità di persuasione per convincere Dirac della coerenza dell' elettrodinamica quantistica, la gioia della fisica - per usare le parole dello stesso Feynman.

Nel 1933, Dirac applicò il formalismo "lagrangiano", ampiamente utilizzato nella meccanica classica, al mondo quantistico: le equazioni del moto si ottenevano direttamente a partire dal principio di minima azione.

Il lavoro di Dirac, intitolato *The Lagrangian in Quantum Mechanics* (la lagrangiana in meccanica quantistica), fu pubblicato su una rivista sovietica e venne completamente ignorato fino a quando Richard Feynman, lavorando nella sua tesi di dottorato, lo riscoprì a metà del 1941: partendo da esso, Feynman sviluppò una nuova formula della meccanica quantistica, la cosiddetta *teoria degli integrali sui cammini*.

Feynman considerava Dirac come uno dei fisici più brillanti e provò sempre un' ammirazione speciale per lui.

## 4.1 Le cosiddette "correzioni radiative"

Negli anni precedenti al 1925, numerosi fisici erano già consapevoli della necessità di sviluppare una descrizione quantistica della radiazione elettromagnetica e di spiegare come tale radiazione interagisse con la materia.

Si sapeva che gli atomi emettevano ed assorbivano radiazioni (vale a dire, i fotoni continuavano ad essere prodotti ed a sparire): come descrivere questi processi?

Nel 1917, Einstein aveva introdotto i coefficienti di probabilità associati ai processi di emissione e di assorbimento delle radiazioni ed aveva, inoltre, trovato una relazione semplice tra essi, ma non era riuscito a calcolarli a partire dalla teoria quantistica allora esistente.

Con parole sue: "C'era bisogno di una teoria esatta dell'elettrodinamica e della meccanica", teoria non ancora sviluppata.

L'irruzione della meccanica quantistica attraverso il lavoro di Heisenberg, segna il punto di partenza di tutti i tentativi di risolvere il problema posto da Einstein. Il primo che lavorò intensamente alla ricerca di una teoria quantistica del campo elettromagnetico, fu Pascual Jordan: egli riuscì a spiegare alcuni risultati precedentemente ottenuti da Einstein, ma non fu capace di descrivere i coefficienti di assorbimento e di emissione; perciò bisognava assolutamente disporre di una teoria dell'interazione tra radiazione e materia.

Tale teoria, fu sviluppata da Dirac nel febbraio del 1927 e fu da allora considerata il lavoro fondamentale nel campo dell'elettrodinamica quantisti-

ca (conosciuta anche come *QED* dal suo acronimo inglese, *Quantum Electrodynamics*).

L' elettrodinamica quantistica è la teoria quantistica che descrive il comportamento e l' interazione degli elettroni e/o dei positroni tra loro (e, di questi, con i fotoni).

Il lavoro del 1927 di Dirac si intitolava *The Quantum Theory of the Emission and Absorption of Radiation* (ossia, *La teoria quantistica dell' emissione e assorbimento di radiazione*).

#### **Lo stato zero:**

Nella formulazione originale del suo lavoro, *La teoria quantistica dell' emissione ed assorbimento di radiazione*, Dirac introdusse uno stato vuoto, chiamato "stato zero", costituito da un' infinità di fotoni con energia e momento nulli (senza alcun effetto osservabile).

In tal modo, gli operatori di creazione e distruzione avrebbero prodotto la creazione o l' annichilazione di fotoni reali che potevano essere rilevati in un caso, o sparire nello stato zero nell' altro.

Con quest' immagine, Dirac costruì l' hamiltoniano che descriveva l' interazione tra un fotone e l' atomo e poté calcolare la probabilità di emissione ed assorbimento: " Quando un quanto di luce viene assorbito, si può dire che abbia realizzato un salto verso lo stato zero, mentre quando viene emesso si può interpretare come una transizione dallo stato zero ad uno stato fisico, cioè come se fosse stato creato.

Non esiste il limite al numero di quanti che possono essere creati o distrutti, poichè si può supporre l' esistenza di un numero infinito di fotoni allo stato zero".

Il procedimento seguito da Dirac per costruire questa teoria, fu quello di "quantizzare" il campo elettromagnetico e di studiare l' interazione dei fotoni con gli elettroni. Dirac presentò il problema da una doppia prospettiva: corpuscolare ed ondulatoria.

Nel primo caso, la radiazione veniva descritta come un insieme di particelle che si muovevano alla velocità della luce, senza interagire tra loro, e che soddisfacevano la statistica di Bose-Einstein.

Il secondo approccio, consisteva nel descrivere la radiazione elettromagnetica facendo uso di un potenziale di tipo vettore e sviluppando la funzione d' onda nelle sue componenti di Fourier.

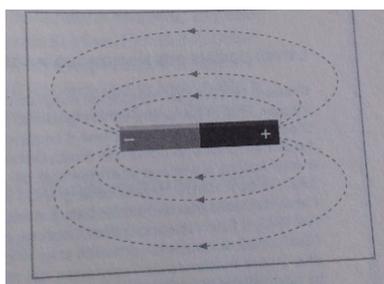
Entrambi gli approcci portavano agli stessi risultati: per la prima volta, veniva proposta una descrizione coerente dei "quanti" di luce, a partire dai principi fondamentali della recente teoria della meccanica quantistica.

Il lavoro di Dirac costituì la prima teoria quantistica del campo elettromagnetico e spiegava, inoltre, i processi di emissione ed assorbimento di luce da parte della materia. Dirac sviluppò un formalismo matematico preciso per descrivere i processi menzionati, introducendo concetti come *seconda quantizzazione* ed *operatori di creazione e distruzione*.

Oggi, questi concetti, risultano imprescindibili per la costruzione della teoria quantistica della radiazione. ([2])

## 4.2 Il monopollo magnetico e le costanti cosmologiche

A scuola ci insegnano che una calamita ha sempre due poli: se una calamita viene divisa in due o più frammenti, ciascuno di essi continuerà ad avere due poli; quindi, sembra che si possa concludere che non esistono calamite con un solo polo magnetico.



(L'immagine precedente è una rappresentazione di una calamita con i suoi due poli magnetici e le linee di flusso che illustrano il campo magnetico esistente.)

Ma si tratta veramente di un'affermazione irrefutabile? Come esiste l'elettrone, particella portatrice di carica elettrica elementare, si potrebbe introdurre il *monopolo magnetico* come particella portatrice di una carica magnetica isolata; si potrà, quindi, considerare come una calamita ad un solo polo.

Dirac sviluppò la sua teoria del monopollo magnetico nel lavoro del maggio 1931, lo stesso in cui introdusse l'idea dell'antielettrone. ([2])

L'idea del monopollo magnetico, non è originale di Dirac: molti anni prima, nel XIX secolo, alcuni fisici ne avevano già ipotizzato l'esistenza, consapevoli

che avrebbe rappresentato una chiara contraddizione con le equazioni fondamentali dell' elettromagnetismo classico. Le equazioni di Maxwell, mostrano una chiara simmetria tra il campo elettrico (legato ad una determinata densità di carica e di corrente elettrica) ed il campo magnetico (per il quale queste grandezze non sono definite). Questo fatto, inoltre, è coerente con l' introduzione di un potenziale vettore per descrivere il campo magnetico, procedimento che si estese alla teoria quantistica attraverso i lavori di Jordan, Heisenberg e Pauli.

Ciò spiega come mai le cariche magnetiche non fossero mai state considerate nel contesto della teoria quantistica, prima del lavoro sviluppato da Dirac nel 1931.

L' obiettivo di Dirac non fu provare l' esistenza del monopolio, ma trovare una spiegazione della "quantizzazione" della carica elettrica e giustificare il valore della costante di struttura fine; come disse lui stesso: "Questo lavoro tratta fundamentalmente dell' esistenza di una carica elettrica minima".

Dirac introdusse una densità di carica magnetica ed una densità di corrente magnetica, per similitudine con le corrispondenti grandezze elettriche e, inoltre, mostrò che la teoria quantistica "non escludeva l' esistenza di poli magnetici isolati". Inoltre, Dirac stabilì una relazione molto semplice tra il valore della carica elettrica e quella magnetica: tale relazione incorporava la costante di Planck e metteva in evidenza come l' esistenza del monopolio magnetico implicasse la condizione di quantizzazione della carica elettrica.

Sicuramente Dirac conosceva i lavori realizzati in precedenza nell' ambito

della cosmologia, ma non dimostrò alcun interesse speciale in questo campo fino al 1937, anno in cui pubblicò un piccolo lavoro sulla rivista *Nature* con il titolo "Le costanti cosmologiche". Il lavoro di Dirac prese come punto di partenza l'ipotesi di Lemaitre: "L' Universo ha avuto origine in un passato remoto e si trova in fase di espansione".

L'idea fondamentale di Dirac, fu quella di esplorare la possibilità che le costanti fondamentali della natura non fossero realmente costanti, ma che dipendessero dal tempo su scala cosmologica. Per farlo, introdusse alcune "quantità" enormi corrispondenti a diverse grandezze legate alla descrizione dell' Universo su grande scala e, inoltre, ipotizzò che tra esse esistesse una relazione semplice.

I "numeri" con cui lavorò Dirac furono i seguenti:

1. L'età dell' Universo in relazione all' unità atomica di tempo (cioè al tempo impiegato dalla luce a percorrere il diametro dell' elettrone classico):  
 $\approx 2 \times 10^{39}$ ;
2. la relazione tra forza elettrica e gravitazionale esistenti tra un elettrone ed un protone:  $\approx 10^{39}$ ;
3. il numero totale di protoni più quello dei neutroni nell' Universo:  $\approx 10^{78}$ .

Dirac era convinto che la relazione tra questi numeri enormi non fosse fortuita; ipotizzò, inoltre, che tali quantità dipendessero dalla storia dell' Universo (così come riportato nel testo di Juan Antonio Caballero Carretero, [2]) :

*I grandi numeri menzionati non devono essere considerati come costanti, ma come semplici funzioni della nostra epoca presente. E' un principio generale che questi grandi numeri, che descrivono la teoria fisica, debbano essere uguali a potenze successive del tempo (espresso in unità atomiche).*

Dirac chiamò questo principio *ipotesi dei grandi numeri*: l'idea di fondo contenuta in esso era che due numeri qualsiasi in natura fossero sempre legati da una relazione matematica semplice e, inoltre, che i loro coefficienti fossero nell'ordine dell'unità. Dirac sviluppò la sua ipotesi fino alle conseguenze più estreme e terminò il suo lavoro dichiarando che la costante di gravitazione universale dipendeva dall'inverso del tempo.

Affermò, inoltre, che il numero totale di nucleoni (protoni e neutroni) nell'Universo aumentava con il quadrato del tempo e, infine, che l'età dell'Universo e la costante di Hubble soddisfacevano la seguente relazione:

$$t = \frac{1}{3H}.$$

### **I pionieri della cosmologia fisica:**

Nel decennio del 1930, la cosmologia era in piena rivoluzione: nel 1929, il fisico statunitense Edwin Hubble (1889-1953), dopo aver analizzato attentamente un'ingente quantità di dati osservazionali, concluse che l'Universo è in espansione. Le galassie si allontanavano le une dalle altre a velocità tanto maggiori quanto più lontane si trovavano tra loro; Hubble introdusse una relazione lineare tra la velocità e la distanza:  $v = H \cdot d$ . Oggi, il coefficiente di proporzionalità è detto *costante di Hubble*.

Le evidenze sperimentali di Hubble erano coerenti con gli studi realizzati alcuni anni prima da Alexander Friedmann (1888-1925) e Georges Lemaitre (1894-1966), che verificarono che la teoria generale della relatività conteneva soluzioni corrispondenti ad un Universo in espansione.

E' interessante sottolineare che Lemaitre si trovò insieme e Dirac a Cambridge a metà del decennio del 1920, quando, entrambi, erano studenti. ([2])

Dirac scrisse un secondo lavoro più esteso nel 1938, per poi abbandonare il tema nel 1972: a partire da quell' anno, cominciò a pubblicare periodicamente lavori sullo stesso argomento fino a poco prima di morire.

Continuò a sviluppare la sua teoria sui *grandi numeri*, cercando di conciliare le proprie previsioni con le nuove evidenze sperimentali che emergevano (ad esempio, la misurazione della radiazione di fondo dell' Universo, una traccia inequivocabile del Big Bang).

Nel libro di Juan Antonio Caballero Carretero ([2]), vengono riportate le parole dello stesso Dirac:

*"La matematica mi ha condotto per cammini inaspettati, che offrono nuovi punti di vista e portano ad un nuovo territorio, dove si può stabilire una base di operazioni da cui studiare i dintorni e gli sviluppi futuri."* (Cit. Paul Dirac)

## 4.3 Il principio della " bellezza matematica " e l' eredità di Dirac

Nel 1956, durante una visita all' Università di Mosca, fu chiesto a Dirac, così come si faceva con gli altri visitatori illustri, di scrivere alla lavagna una frase rappresentativa del suo lavoro, frase che sarebbe stata lasciata ai posteri; Dirac scrisse: " Una legge fisica deve possedere bellezza matematica " .

Quest' iscrizione, riassume la principale linea di pensiero di Dirac a partire dalla metà del decennio del 1930: questo motto, al quale Dirac fece riferimento per tutta la sua vita, si trasformò in ciò che oggi si conosce come il *principio della bellezza matematica* in fisica. E' il principio che spinse Dirac a rifiutare per tutta la vita i progressi dell' elettrodinamica quantistica, nonostante fossero capaci di descrivere le evidenze sperimentali con una precisione mai raggiunta prima: è anche il principio che gli fece portare avanti la sua teoria delle costanti cosmologiche, anche quando questa si trovava in chiara contraddizione con i dati sperimentali.

Il principio della bellezza matematica arrivò a trasformarsi, per Dirac, nel motto, nel credo essenziale di tutto il suo pensiero scientifico: di fatto, la sua ossessione per questo principio, gli impedì di sviluppare teorie di maggiore originalità. Il problema principale del suo nuovo " credo", come con un qualsiasi altro principio di tipo estetico, è il suo carattere soggettivo e, di conseguenza, l' impossibilità di venire utilizzato come guida fondamentale nello sviluppo della scienza.

Secondo quanto riportato da Juan Antonio Caballero Carretero, quando fu chiesto a Dirac se bellezza e semplicità potessero considerarsi equivalenti, egli disse che la relazione tra la matematica e la fisica era qualcosa di più profondo del principio di semplicità e portò, come esempio, le teorie di Newton e di Einstein:

*La teoria di Newton è molto più semplice della teoria di gravitazione di Einstein; ma la teoria di Einstein è migliore, più profonda e più generale. La bellezza matematica, non la semplicità, è la caratteristica principale della teoria della relatività, e questo è il concetto fondamentale nella relazione esistente tra la fisica e la matematica.*

E' fuor di questione il fatto che per Dirac il modo di fare fisica passasse attraverso l' uso della matematica; questo era il linguaggio della fisica e, pertanto, il cammino che un ricercatore doveva seguire per scoprire i segreti della natura: giocare con le equazioni, è il modo in cui Dirac affrontò i problemi, un metodo che riempì di perplessità molti dei suoi colleghi non abituati ad un tale modo di procedere (Dirac criticò, infatti, sempre il modo di fare fisica di Bohr, tra gli altri, perchè non si basava sufficientemente sulla matematica).

Tutti i suoi lavori seguivano lo stesso schema: chiarezza e precisione concettuale, termini concisi ed una potente e solida base matematica:

*"La bellezza matematica è una qualità che non può essere definita, così come succede con l' arte, ma che la gente che studia matematica sa apprezzare senza nessuna difficoltà." (Cit. Paul Dirac)*

Le prime allusioni al concetto di bellezza matematica, emersero a partire dal 1934: si trattava di una chiara risposta alla profonda disillusione che Dirac provava nei confronti dell' elettrodinamica quantistica.

Negli anni successivi, questo principio divenne un' ossessione e l' idea di bellezza matematica arrivò a dominare tutti i suoi pensieri, al punto tale da modificare il suo modo di analizzare i problemi fisici.

Il metodo aveva senso solo se si confaceva alla sua idea di "bellezza" ed i risultati erano validi solo se erano stati ottenuti seguendo tale principio "religioso": un atteggiamento poco aperto, che tende ad allontanarsi dal famoso metodo scientifico.

Tra tutti i grandi fisici, Dirac fu probabilmente il meno filosofo; non scrisse mai alcun testo in cui esponesse le sue idee sulla filosofia della scienza o sul metodo scientifico o sulle relazioni tra scienza e società. Questo spiega come mai la sua figura sia così poco nota ed il suo nome continua ad essere sconosciuto per la stragrande maggioranza delle persone. Sicuramente, è quello che lo stesso Dirac avrebbe sempre voluto (visto la sua inclinazione ad una privacy estrema).

Anche se la sua figura non è conosciuta a livello della società, la sua opera ha modificato completamente il panorama della fisica e le teorie più attuali hanno origine nei suoi lavori. Egli contribuì, insieme a molti altri colleghi, alla costruzione della meccanica quantistica, ma fu il primo a gettare le fondamenta della teoria quantistica che descrive l' interazione tra radiazione e materia.

Dirac fu noto come "il teorico dei teorici": con il passare del tempo, la sua opera avrebbe ottenuto una fama tale che, addirittura, lo stesso nome dell'

autore sarebbe rimasto in ombra di fronte alla sua creazione.

Ciò fu quello che accadde con la scoperta dell' antimateria, risultato che Heisenberg considerò come "forse il passo più grande di tutti grandi passi della fisica del nostro secolo".

"Antimateria", concetto che produsse un' esplosione nella letteratura fantascientifica, le cui applicazioni erano difficili da prevedere: si iniziò a parlare di universi ed anti-universi, di particelle e di antiparticelle che si annullano producendo un' enorme quantità di energia; iniziarono, inoltre, ad apparire navi interstellari, come l' *Enterprise* della serie *Star Trek*, che si muove alla velocità della luce grazie ai suoi propulsori ad antimateria; infine, cominciarono ad essere create nuove tecnologie mediche come la PET (tomografia ad emissione di positroni)...

Che sia realtà o finzione, lo "sconosciuto" Paul Dirac fu colui che diede inizio a tutto questo. ([2])

## Capitolo 5

### Conclusione

Paul A. Dirac fu, insieme a Richard Feynman, uno tra i più importanti della "seconda generazione" di scienziati che si avvicinarono allo studio della meccanica quantistica, dopo il lavoro pionieristico di Planck ed Einstein. La celebre equazione che porta il suo nome e che descrive con notevole dettaglio il comportamento delle particelle, tra cui l'elettrone, fu la prima ad armonizzare la teoria quantistica con la relatività.

Da lì si apriva una possibilità incredibile: l'esistenza di particelle che sono come un "riflesso" in negativo dei già conosciuti elettrone, protone, ecc., e che, insieme, fanno parte di ciò che viene battezzato con il nome di "antimateria".

Distintosi per il suo carattere timido e taciturno, oltre che per la sua modestia e dedizione al lavoro, questo ingegnere elettronico britannico si convertì in fisico ed enunciò una delle teorie più d'avanguardia della fisica moderna.



# Capitolo 6

## Bibliografia

1. *Relativistic Quantum Mechanics*, Vol. 1, James D. Bjorken, Sidney D. Drell, Mc Graw, 1964;
2. *Dirac, l' antimateria: il lato oscuro della materia*, Juan Antonio Caballero Carretero, RBA, 2016;
3. *Feynman-Graphen und Eichtheorien für Experimentalphysiker*, Peter Schmöser, Springer, 1995;
4. *Fisica: Equazione di Dirac*, Alessio Mangoni, Mondadori, 2015;
5. *I principi fisici della teoria dei quanti*, Werner Heisenberg, Bollati Boringhieri, 2016;
6. *Alla ricerca delle leggi ultime della fisica*, Steven Weinberg, il melangolo, 1987;

7. *QED. La strana teoria della luce e della materia*, R. P. Feynman, Adelphi, 1989;
8. *A First Book of Quantum Field Theory, Second Edition*, Amitabha Lahiri, Palash B. Pal, Alpha Science, 2005;
9. *Ultraviolet and Soft X-Ray Free-Electron Lasers*, Peter Schmüser, Martin Dohlus, Jorg Rossbach, Springer, 2008.