

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI  
BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Matematica

**EQUAZIONI CARDINALI DELLA  
DINAMICA  
E MOTO DEL CORPO RIGIDO**

Tesi di Laurea in Fisica Matematica

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
Emanuela Caliceti

Presentata da:  
Ludovica Di Nicolantonio

Sessione III  
Anno Accademico 2015-2016



*A Al, Ros e Fede.*



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>iii</b>
<b>1 Cinematica del corpo rigido e principi fondamentali della meccanica</b>	<b>1</b>
1.1 Cinematica del corpo rigido . . . . .	3
1.1.1 Formule di Poisson e formula fondamentale della cinematica . . . . .	4
1.1.2 Moto di traslazione, rotazione e moto elicoidale . . . . .	5
1.2 Forze, sistemi di forze, leggi della dinamica . . . . .	6
<b>2 Equazioni cardinali della dinamica</b>	<b>11</b>
2.1 Assi solidali e angoli di Eulero . . . . .	11
2.2 Teoremi della quantità di moto e del momento della quantità di moto . . . . .	14
2.2.1 Prima equazione cardinale della dinamica . . . . .	15
2.2.2 Seconda equazione cardinale della dinamica . . . . .	16
2.2.3 Ellissoide di inerzia . . . . .	18
2.2.4 Moto di un corpo rigido con punto fisso . . . . .	23
<b>3 Applicazioni</b>	<b>27</b>
3.1 Esempio di corpo rigido con asse fisso . . . . .	27
3.2 Esempi di corpo rigido con punto fisso . . . . .	30
3.2.1 Moto alla Poincot . . . . .	35
3.2.2 Fenomeno giroscopico . . . . .	36

Bibliografia

43

# Introduzione

Il presente lavoro ha come oggetto le equazioni cardinali della dinamica e la loro applicazione nel moto del corpo rigido.

Si tratta di equazioni differenziali che descrivono il moto di un sistema fisico, permettendo di studiarne il comportamento globale; il caso del corpo rigido proporrà degli interessanti esempi riguardo il moto di oggetti di uso anche quotidiano, come la trottola (corpo rigido con punto fisso) e il pendolo dell'orologio a pendolo (corpo rigido con asse fisso).

Dal punto di vista matematico, le equazioni cardinali della dinamica costituiscono un sistema di sei equazioni differenziali del secondo ordine le cui incognite sono rappresentate dai parametri lagrangiani, che definiscono la configurazione del sistema meccanico in oggetto. Risultano quindi particolarmente utili nel caso del corpo rigido poichè il grado di libertà, cioè il numero di parametri lagrangiani indipendenti, è esattamente sei in assenza di vincoli. Se il corpo è vincolato si riduce il grado di libertà e come incognite si aggiungono le reazioni vincolari.

La tesi si articola in tre capitoli.

Nel primo verranno introdotte le nozioni e i principi fondamentali della meccanica. Si daranno anche brevi cenni sulla cinematica di un corpo rigido, in particolare verranno illustrate le formule di Poisson e la formula fondamentale della cinematica rigida, con alcuni brevi richiami sugli stati cinetici fondamentali: di traslazione, di rotazione ed elicoidale.

Nel secondo capitolo ci si concentrerà sulle equazioni cardinali della dinamica. Si introdurrà il modello dell'ellissoide di inerzia, che consentirà una

più chiara comprensione dello studio del moto rigido, nonché il calcolo delle grandezze dinamiche centrali, quali il momento angolare e l'energia cinetica. Si darà, così, un primo esempio (teorico) di moto di corpo rigido con punto fisso. Sarà essenziale il teorema di König che, introducendo la nozione di sistema di riferimento baricentrico, consente di ricondurre il calcolo dell'energia cinetica di un corpo rigido generico al caso di corpo rigido con punto fisso.

Il terzo capitolo sarà dedicato interamente alle applicazioni delle equazioni cardinali. Si presenterà il pendolo fisico e la sua utilità nella misurazione dell'accelerazione di gravità. In seguito si daranno due esempi di moto di un corpo rigido con punto fisso: il moto alla Poincaré e il fenomeno giroscopico (moto di una trottola).

Nell'intera tesi si è fatto riferimento al trattato [2] (soprattutto per il secondo capitolo) e [1], per quanto concerne primo e terzo capitolo. Il lettore è pertanto rinviato alla consultazione di questi testi per ulteriori chiarimenti ed approfondimenti che, per esigenza di sintesi, non è stato possibile svolgere in questa tesi.

# Capitolo 1

## Cinematica del corpo rigido e principi fondamentali della meccanica

In questo capitolo vengono riportate le prime nozioni e i risultati fondamentali nell'ambito della dinamica dei sistemi meccanici e in particolare dei corpi rigidi. Viene inoltre illustrata la cinematica del corpo rigido.

Iniziamo introducendo alcune notazioni. Un vettore dello spazio euclideo reale  $\mathbb{R}^3$  verrà indicato con una lettera minuscola sormontata da una freccia, ad esempio  $\vec{a}$ . Esso verrà identificato con la classe di equivalenza di segmenti orientati aventi la stessa lunghezza (modulo di  $\vec{a}$ , indicato con  $|\vec{a}|$ ), stessa direzione e stesso verso. Se  $AB$  è uno di tali segmenti orientati, con origine in  $A$  e freccia in  $B$ , scriveremo  $\vec{a} = \vec{AB} = B - A$ .

Fissato un sistema di riferimento cartesiano  $(O, x, y, z)$ , un vettore  $\vec{a}$  può essere rappresentato da un segmento orientato con origine in  $O$  e secondo estremo in un punto  $P$ , col quale potrà essere identificato:

$$\vec{a} = P - O \equiv P.$$

Così  $\vec{a}$  potrà essere identificato con la terna di numeri reali  $(a_x, a_y, a_z) \in \mathbb{R}^3$  delle coordinate cartesiane di  $P$  rispetto agli assi di riferimento  $x, y, z$ .

## 1. Cinematica del corpo rigido e principi fondamentali della meccanica

---

Scriveremo pertanto

$$\vec{a} = P - O = (a_x, a_y, a_z) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

dove  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  è la base canonica di  $\mathbb{R}^3$ , ortonormale, destra. Un vettore di modulo unitario verrà detto versore: tali sono  $\vec{i}, \vec{j}$  e  $\vec{k}$ , a due a due ortogonali.

**Definizione 1.1.** Dati due vettori  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  e  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , il loro prodotto scalare (commutativo) è il numero reale definito da

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (1.1)$$

o, equivalentemente, da

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha \quad (1.2)$$

se  $\alpha$  è l'angolo compreso fra i due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ .

**Osservazione 1.2.** Ricordando che alcuni vettori si dicono ortogonali se il loro prodotto scalare è nullo, ciò equivale a richiedere che  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

**Definizione 1.3.** Il prodotto vettoriale (anticommutativo) di  $\vec{a}$  per  $\vec{b}$  è il vettore  $\vec{c}$  definito dal seguente determinante

$$\vec{c} := \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

**Osservazione 1.4.** E' facile verificare che il modulo di  $\vec{c}$  è dato da

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha;$$

la direzione di  $\vec{a} \times \vec{b}$  è quella ortogonale al piano individuato da  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ ; il verso è tale per cui  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$  costituiscono una terna destra.

Ricordiamo ora le prime nozioni riguardanti la cinematica dei punti.

Sia  $P$  un punto mobile in  $\mathbb{R}^3$ ; la sua posizione nello spazio al generico istante  $t \in \mathbb{R}$  sarà determinata dalla seguente equazione vettoriale del moto:

$$P = P(t)$$

equivalentemente alle tre equazioni scalari:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

se  $(x, y, z)$  rappresentano le coordinate di  $P$  rispetto al sistema  $(O, x, y, z)$ .

**Definizione 1.5.** Si chiama velocità di  $P$  il vettore

$$\vec{v} = \vec{v}(t) = \frac{dP}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k},$$

dove  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  e analogamente per  $\dot{y}$  e  $\dot{z}$ .

L'accelerazione di  $P$  è il vettore

$$\vec{a} = \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2P}{dt^2} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k},$$

dove  $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$  e analogamente per  $\ddot{y}$  e  $\ddot{z}$ .

Analizziamo ora in dettaglio la cinematica di un particolare sistema meccanico, detto corpo rigido.

## 1.1 Cinematica del corpo rigido

**Definizione 1.6.** Un corpo rigido  $\mathcal{C}$  è un sistema meccanico con infiniti punti tale che la distanza tra due suoi punti qualunque rimane costante nel tempo:

$$|P - Q| = \text{cost} \quad \forall P, Q \in \mathcal{C} \quad (1.3)$$

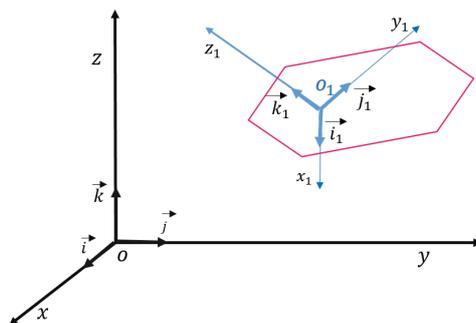
**Osservazione 1.7.** Per lo studio del moto di un corpo rigido non è necessario conoscere la posizione di ogni singolo punto del quale il corpo è composto, piuttosto sarà sufficiente conoscere la configurazione di 3 punti non allineati, diciamo  $R, S, T$ , oltre alla configurazione iniziale. Dunque il corpo rigido è un sistema a 6 gradi di libertà, infatti i 9 parametri dati dalle coordinate dei 3 punti  $R(t), S(t), T(t)$  sono ridotti dai 3 vincoli di rigidità:

$$\begin{cases} |R(t) - S(t)| = \text{cost} \\ |R(t) - T(t)| = \text{cost} \\ |T(t) - S(t)| = \text{cost}. \end{cases} \quad (1.4)$$

## 1. Cinematica del corpo rigido e principi fondamentali della meccanica

---

A questo punto possiamo passare allo studio del movimento del corpo rigido. E' conveniente considerare, oltre al sistema di assi  $(O, x, y, z)$  a cui viene riferito il moto (sistema fisso), un sistema di riferimento solidale con il corpo  $(O_1, x_1, y_1, z_1)$ : si tratta di un *sistema mobile* con l'origine  $O_1$  in un punto del corpo e orientamento degli assi fatti con altri punti del corpo stesso (si veda figura 1.1).  $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$  sono tre vettori unitari paralleli e nello stesso verso degli assi  $O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1$ . Ovviamente, ogni punto  $P$  del corpo sarà immobile rispetto a questo nuovo sistema di riferimento introdotto.



**Figura 1.1:** Sistema Solidale

### 1.1.1 Formule di Poisson e formula fondamentale della cinematica

Se è nota la posizione del sistema solidale, è possibile trovare facilmente le coordinate di un punto generico  $P$  del corpo  $x_1, y_1, z_1$ :

$$P - O = P - O_1 + O_1 - O = x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1 + z_1 \vec{k}_1 + O_1 - O \quad (1.5)$$

Derivando rispetto al tempo la (1.5) si ha:

$$\vec{v}(P) = \frac{d(P - O)}{dt} = \dot{x}_1 \vec{i}_1 + \dot{y}_1 \vec{j}_1 + \dot{z}_1 \vec{k}_1 + x_1 \frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1 \frac{d\vec{j}_1}{dt} + z_1 \frac{d\vec{k}_1}{dt} + \frac{d(O_1 - O)}{dt}.$$

Ma le componenti  $x_1, y_1, z_1$  sono costanti, quindi hanno derivate nulle, dunque

$$\vec{v}(P) = x_1 \frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1 \frac{d\vec{j}_1}{dt} + z_1 \frac{d\vec{k}_1}{dt} + \vec{v}(O_1). \quad (1.6)$$

Poichè  $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$  sono costanti in modulo, le loro derivate saranno perpendicolari rispettivamente a  $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ , quindi è possibile scegliere tre vettori  $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3$  tali che:

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt} = \vec{\omega}_1 \times \vec{i}_1, \quad \frac{d\vec{j}_1}{dt} = \vec{\omega}_2 \times \vec{j}_1, \quad \frac{d\vec{k}_1}{dt} = \vec{\omega}_3 \times \vec{k}_1.$$

Si dimostra che,  $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$  e  $\vec{\omega}_3$  possono essere scelti tra loro coincidenti. Più precisamente esiste uno e un solo vettore  $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$  tale che

$$\begin{cases} \frac{d\vec{i}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}_1 \\ \frac{d\vec{j}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}_1 \\ \frac{d\vec{k}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}_1. \end{cases} \quad (1.7)$$

Queste sono le celebri *formule di Poisson* che esprimono le derivate dei tre vettori fondamentali di un sistema di assi collegato al corpo rigido.

**Definizione 1.8.**  $\vec{\omega}$  si definisce vettore di Poisson o velocità angolare del sistema  $(O_1) := (O_1, x_1, y_1, z_1)$  rispetto al sistema  $(O) := (O, x, y, z)$ .

Combinando ora la (1.6) e la (1.7) si ottiene la *formula fondamentale della cinematica rigida*:

$$\vec{v}(P) = \vec{v}(O_1) + \vec{\omega} \times (P - O_1), \quad \forall P, O_1 \in \mathbb{C} \quad (1.8)$$

che esprime la velocità del punto  $P$  di un corpo rigido all'istante  $t$  in termini della velocità di  $O_1$  e del vettore  $\vec{\omega}$ .

### 1.1.2 Moto di traslazione, rotazione e moto elicoidale

A partire dalla (1.8) si possono descrivere alcuni particolari moti rigidi.

## 1. Cinematica del corpo rigido e principi fondamentali della meccanica

---

**Definizione 1.9.** *Se in un intervallo di tempo  $[t_1, t_2]$  tutti i punti del corpo  $\mathcal{C}$  hanno la stessa velocità, si dice che il corpo si muove di moto di traslazione:*  
$$\vec{v}(P) = \vec{v}(O_1) \quad \forall P \in \mathcal{C}$$

**Osservazione 1.10.** E' facile verificare che il moto è di traslazione se e solo se  $\vec{\omega} = 0$

**Definizione 1.11.**  *$\mathcal{C}$  si muove di moto di rotazione attorno all'asse  $r$  se in un intervallo di tempo  $[t_1, t_2]$  esistono due punti  $A$  e  $B \in r$  che sono fissi (cioè con velocità nulla). Saranno così fissi tutti i punti sulla retta  $r$  e risulterà, dalla (1.8):*

$$\vec{v}(P) = \vec{\omega} \times (P - O_1) \quad \forall P \in \mathcal{C},$$

se si prende  $O_1 \in r$ .

**Osservazione 1.12.** In questo caso  $\vec{\omega}$  è parallelo all'asse  $r$  (che viene detto *asse di rotazione*).

Nel caso più generale rappresentato dalla (1.8) si parla di *moto di rototraslazione*, essendo presenti entrambe le componenti traslatoria,  $\vec{v}(O_1)$  e rotatoria,  $\vec{\omega} \times (P - O_1)$ . Si può dimostrare che è sempre possibile scegliere  $O_1 \in \mathcal{C}$  tale che  $\vec{v}(O_1) \parallel \vec{\omega}$ . In questo caso si parla di *moto elicoidale*.

## 1.2 Forze, sistemi di forze, leggi della dinamica

Passiamo ora a definire la nozione basilare nell'ambito della dinamica, ovvero quella di forza. Dal punto di vista fisico una forza è un ente in grado di alterare lo stato di quiete o di moto di un punto, variandone la velocità, ovvero di produrre un'accelerazione. Dal punto di vista matematico si ha la seguente:

**Definizione 1.13.** *Una forza è un vettore applicato  $(\vec{F}, P)$ , dove  $\vec{F}$  è detto vettore della forza e  $P$  è il punto di applicazione della forza.*

**Definizione 1.14.** *Il vincolo è qualsiasi condizione che vieta determinati spostamenti di un corpo che sarebbero geometricamente possibili. I vincoli si dividono in :*

- *vincoli interni ad un sistema (di corpi o punti materiali): quei vincoli che limitano gli spostamenti di un generico dei suoi punti rispetto agli altri e che sono dovuti ai punti del sistema stesso.*
- *vincoli esterni: quelli dovuti a corpi esterni al sistema.*

**Postulato 1.15** (Postulato delle reazioni vincolari). *E' possibile rendere libero un qualunque sistema vincolato a patto di introdurre un opportuno sistema di forze, dette reazioni vincolari.*

E' possibile così dividere le forze in:

- reazioni vincolari: che esprimono l'azione dei vincoli, denotate solitamente con  $(\vec{\Phi}, P)$ .
- forze attive: non dovute all'azione dei vincoli, espresse con  $(\vec{F}, P)$ .

Un'ulteriore divisione può essere fatta distinguendo tra:

- forze interne: dovute ai punti interni al corpo.
- forze esterne: dovute ai punti esterni.

**Definizione 1.16.** *Data la forza  $(\vec{F}, P)$  si definisce linea di azione della forza la retta passante per  $P$  e parallela a  $\vec{F}$ .*

**Definizione 1.17.** *Data una forza  $(\vec{F}, P)$  ed un punto dello spazio  $O \in \mathbb{R}^3$ , si definisce momento della forza rispetto al polo  $O$  il vettore*

$$\vec{\Omega}(O) = \vec{F} \times (O - P).$$

**Osservazione 1.18.** Per la definizione di momento, si ha che  $\vec{\Omega}(O) = 0$  se  $O$  è sulla stessa linea di azione di  $(\vec{F}, P)$ .

## 1. Cinematica del corpo rigido e principi fondamentali della meccanica

---

Ora presenteremo le principali definizioni e i risultati notevoli della dinamica dei sistemi di forze.

**Definizione 1.19.** *Dato un sistema di forze*

$$(S) : (\vec{F}_1, P_1), (\vec{F}_2, P_2), \dots, (\vec{F}_N, P_N)$$

*si definisce vettore risultante del sistema di forze il vettore*

$$\vec{R} = \sum_{s=1}^N \vec{F}_s;$$

*fissato un polo  $O \in \mathbb{R}^3$  si definisce momento risultante del sistema di forze rispetto al polo, il vettore*

$$\vec{\Omega}(O) = \sum_{s=1}^N \vec{F}_s \times (O - P_s)$$

Dalla definizione di momento risultante e vettore risultante delle forze si ha il seguente risultato:

**Proposizione 1.20.** *Il momento risultante di un sistema di forze non dipende dalla scelta del polo se e solo se  $\vec{R} = 0$ . In questo caso, è possibile indicare il momento semplicemente come  $\vec{\Omega}$ .*

Un caso particolare di sistema con momento risultante delle forze indipendente dal polo è dato dalle forze interne di un dato sistema, in virtù del terzo principio della dinamica.

**Principio 1.21** (Principio di azione e reazione). *Se su un punto  $A$  agisce una forza di vettore  $\vec{F}$  da parte di un punto  $B$ , allora sul punto  $B$  agisce da parte di  $A$  una forza di vettore  $-\vec{F}$  avente la stessa linea di azione, la retta  $AB$ .*

Questo postulato implica che, per quanto riguarda l'insieme delle forze interne ad un sistema, si ha che:

$$\begin{cases} \vec{R}^{(i)} = 0 \\ \vec{\Omega}^{(i)} = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

Ovvero il sistema delle forze interne del sistema ha risultante delle forze e momento nulli.

Ricordiamo ora la legge fondamentale della dinamica dovuta a Newton.

**Principio 1.22** (Legge fondamentale della dinamica). *Se rispetto ad un osservatore posto in  $O \in \mathbb{R}^3$  su un punto  $P$  di massa  $m$  agisce una forza  $\vec{F}$ , allora l'accelerazione  $\vec{a}$  di  $P$  rispetto a  $O$  è*

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (1.10)$$

Più in generale se su  $P$  agisce un sistema di forze di vettore risultante  $\vec{R}$ , allora l'accelerazione  $\vec{a}$  di  $P$  è data dalla legge

$$\vec{R} = m\vec{a}. \quad (1.11)$$

Introduciamo ora alcune grandezze dinamiche, fondamentali per la rappresentazione del moto dei sistemi meccanici e in particolare del corpo rigido.

**Definizione 1.23.** *Per un punto  $P$  di massa  $m$  e velocità  $\vec{v}$  la quantità di moto è definita come il vettore*

$$\vec{Q} = m\vec{v}.$$

**Osservazione 1.24.** Dalla definizione di quantità di moto e dalla legge fondamentale della dinamica (1.11) nel caso di massa del punto  $P$  costante nel tempo, si ha che:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R} \quad (1.12)$$

Consideriamo ora un sistema di  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  di masse  $m_1, \dots, m_N$  e velocità  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N$ , rispettivamente.

**Definizione 1.25.** *Si chiama quantità di moto del sistema il vettore*

$$\vec{Q} = \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s. \quad (1.13)$$

## 1. Cinematica del corpo rigido e principi fondamentali della meccanica

---

Fissato un polo  $O \in \mathbb{R}^3$  si chiama momento delle quantità di moto, o momento angolare, del sistema rispetto ad  $O$  il vettore

$$\vec{K}(O) = \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \times (O - P_s). \quad (1.14)$$

Si definisce energia cinetica del sistema la grandezza scalare

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s v_s^2. \quad (1.15)$$

Se tutti i punti del sistema hanno, in un certo istante, la stessa velocità  $\vec{v}$  (come nel caso di un corpo rigido in stato cinetico di traslazione), indicando con  $M$  la massa del sistema, si ha:

$$\vec{Q} = \vec{v} \sum_{s=1}^N m_s = M\vec{v}. \quad (1.16)$$

Analogamente, ricordando la formula per il baricentro  $G$  del corpo

$$G - O = \frac{\sum_{s=1}^N m_s (O - P_s)}{M}, \quad (1.17)$$

per il momento  $\vec{K}(O)$  si ottiene

$$\vec{K}(O) = \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \times (O - P_s) = M\vec{v} \times (O - G), \quad (1.18)$$

e per l'energia cinetica

$$T = \frac{\vec{v}^2}{2} \sum_{s=1}^N m_s = \frac{M\vec{v}^2}{2}. \quad (1.19)$$

Abbiamo così ottenuto la seguente

**Proposizione 1.26.** *Se un corpo rigido passa, in un certo istante, per uno stato cinetico di traslazione, la sua quantità di moto è uguale alla massa del corpo per la sua velocità, il momento delle quantità di moto vale lo stesso momento di un punto materiale di massa uguale a quella del corpo nel suo baricentro e, infine, l'energia cinetica è uguale al semiprodotto della massa del corpo per il quadrato della sua velocità.*

## Capitolo 2

# Equazioni cardinali della dinamica

In questo capitolo verranno presentate le equazioni cardinali della dinamica. L'importanza di queste equazioni differenziali è quella di semplificare la descrizione del moto di un sistema di punti materiali, attraverso la riduzione dei suoi gradi di libertà. Applicheremo questi risultati al modello del corpo rigido, già introdotto nel capitolo precedente.

Saranno molto utili dei risultati generali circa il moto rigido di un corpo.

### 2.1 Assi solidali e angoli di Eulero

**Definizione 2.1.** *Diremo che un sistema ha  $n$  gradi di libertà quando si può rappresentare la sua configurazione mediante  $n$  parametri indipendenti.*

Ad esempio un punto materiale libero nello spazio ha tre gradi di libertà, perché occorrono e bastano tre parametri (come le sue coordinate cartesiane, oppure le sue coordinate polari) per determinarne la posizione in ogni istante. Se invece il punto è vincolato su una curva  $\gamma$  il suo grado di libertà è uno, dal momento che per conoscere la sua posizione sulla curva basta conoscere la coordinata curvilinea rispetto ad un sistema di riferimento intrinseco su  $\gamma$ .

## 2. Equazioni cardinali della dinamica

---

**Definizione 2.2.** *I parametri scelti per rappresentare la configurazione del sistema (supposto a  $n$  gradi di libertà) si chiamano parametri lagrangiani, o coordinate lagrangiane, del sistema e vengono indicati solitamente con  $q_1, q_2, \dots, q_n$ .*

La generica configurazione del sistema viene identificata con una  $n$ -pla di parametri lagrangiani:  $q = (q_1, \dots, q_n)$ .

Nella sezione 1.1 abbiamo accennato brevemente al fatto che per un corpo rigido libero il grado di libertà è  $n = 6$ . Vediamo ora di precisare meglio questo aspetto, andando a determinare anche una possibile scelta di parametri lagrangiani. Il punto di partenza è il seguente

**Teorema 2.3.** *Dati la posizione iniziale di un corpo rigido e il moto di tre suoi punti non allineati è completamente determinata la posizione di ogni suo altro punto (che indicheremo genericamente con  $P$ ).*

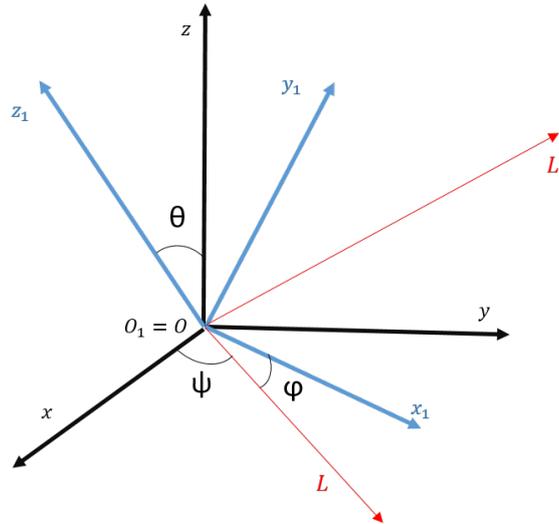
Procedendo come in sezione 1.1 la posizione di tre punti non allineati del corpo rigido  $\mathcal{C}$  è completamente determinata se si conosce la configurazione di un sistema di riferimento  $(O_1, x_1, y_1, z_1)$  solidale con  $\mathcal{C}$  (si veda Figura 1.1). A tal proposito basta conoscere le tre coordinate dell'origine  $O_1$  e l'orientamento dei tre assi  $O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1$ , ovvero i tre versori  $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$  che li rappresentano. Le componenti di  $\vec{i}_1, \vec{j}_1$  e  $\vec{k}_1$  rispetto alla base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  non sono tuttavia indipendenti fra loro, poichè si tratta di versori a due a due ortogonali. Pertanto le nove componenti complessive sono legate dalle sei relazioni:

$$\begin{cases} \vec{i}_1 \cdot \vec{i}_1 = \vec{j}_1 \cdot \vec{j}_1 = \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_1 = 1 \\ \vec{i}_1 \cdot \vec{j}_1 = \vec{j}_1 \cdot \vec{k}_1 = \vec{i}_1 \cdot \vec{k}_1 = 0 \end{cases}$$

che individuano  $9 - 6 = 3$  parametri indipendenti. Quindi, nuovamente, il numero di parametri complessivi per avere la configurazione del corpo rigido  $\mathcal{C}$  è pari a 6.

Nello scegliere, ora, i sei parametri lagrangiani possiamo innanzitutto confermare per i primi tre le coordinate dell'origine  $O_1$  del sistema solidale. Gli altri tre dovranno consentire di determinare l'orientamento dei tre assi

$O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1$ . A tale scopo si introducono gli *angoli di Eulero*: essi sono gli angoli che determinano la configurazione di una terna cartesiana rispetto ad un'altra con la stessa origine (se veda Figura 2.1).



**Figura 2.1:** Angoli di Eulero

Sia  $OL$  la retta d'intersezione fra il piano  $(O, x, y)$  e  $(O, x_1, y_1)$ , così  $OL$  è normale sia a  $Oz$  che a  $Oz_1$ :  $OL$  (detta *linea dei nodi*) deve essere posta in modo che un osservatore diretto secondo  $OL$  e che guardi  $Oz$  veda  $Oz_1$  alla sua sinistra. Sia  $\psi$  l'angolo formato fra  $Ox$  e  $OL$ ,  $\varphi$  l'angolo tra  $OL$  e  $Ox_1$  e  $\theta$  quello tra  $Oz$  e  $Oz_1$ . Noti questi tre angoli, detti *angoli di Eulero*, resta determinata la posizione della terna  $(O, x_1, y_1, z_1)$  rispetto alla terna  $(O, x, y, z)$ .

L'angolo  $\psi$  è detto *azimut*,  $\varphi$  è detto *longitudine* e  $\theta$  *nutazione*. La loro variabilità è data da :

$$0 \leq \varphi, \psi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Supponiamo ora che il corpo si muova di moto di rotazione con velocità angolare  $\vec{\omega}$  rispetto al sistema fisso. Scomponiamo  $\vec{\omega}$  secondo le rette  $OL$ ,  $Oz$ ,  $Oz_1$ .

Consideriamo la rotazione attorno all'asse  $OL$ : l'angolo di Eulero che la

## 2. Equazioni cardinali della dinamica

---

definisce è  $\theta$ . Detto  $\vec{l}$  un versore parallelo ad  $OL$  e di verso uguale a quello di  $L - O$ , la velocità angolare del moto risulta essere  $\frac{d\theta}{dt}\vec{l}$ . Analogamente si dimostra che le rotazioni attorno a  $Oz$  e  $Oz_1$  hanno velocità angolare rispettivamente  $\frac{d\psi}{dt}\vec{k}$  e  $\frac{d\varphi}{dt}\vec{k}_1$ . Risulta quindi

$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\vec{l} + \frac{d\psi}{dt}\vec{k} + \frac{d\varphi}{dt}\vec{k}_1. \quad (2.1)$$

Se scomponiamo  $\frac{d\theta}{dt}\vec{l}$  lungo gli assi  $O, x_1, y_1, z_1$  troviamo

$$\frac{d\theta}{dt}\vec{l} = \frac{d\theta}{dt} \cos \varphi \vec{i}_1 - \frac{d\theta}{dt} \sin \varphi \vec{j}_1.$$

La scomposizione di  $\frac{d\psi}{dt}\vec{k}$  sarà:

$$\frac{d\psi}{dt}\vec{k} = \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \sin \varphi \vec{i}_1 + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \cos \varphi \vec{j}_1 + \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \vec{k}_1.$$

Il termine  $\frac{d\varphi}{dt}\vec{k}_1$  ha componente solo sull'asse  $Oz_1$ .

Quindi indicando con  $p, q, r$  le componenti del vettore  $\vec{\omega}$  rispetto alla terna solidale  $(O, x_1, y_1, z_1)$  dalla (2.1) risulta:

$$\begin{cases} p = \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \sin \varphi + \frac{d\theta}{dt} \cos \varphi \\ q = \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \cos \varphi - \frac{d\theta}{dt} \sin \varphi \\ r = \frac{d\psi}{dt} \cos \theta + \frac{d\varphi}{dt}. \end{cases} \quad (2.2)$$

L'importanza di queste equazioni apparirà più chiara al termine del prossimo paragrafo, laddove verranno illustrate le *equazioni di Eulero*.

## 2.2 Teoremi della quantità di moto e del momento della quantità di moto

In questa sezione vedremo come ottenere le equazioni cardinali della dinamica.

### 2.2.1 Prima equazione cardinale della dinamica

Considerando un sistema di  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  che formano un corpo, possiamo suddividere le forze attive agenti sul sistema in interne ed esterne, da indicarsi rispettivamente con  $F^{\vec{i}}$  e  $F^{\vec{e}}$ . In modo analogo suddividiamo le reazioni vincolari in interne  $\phi^{\vec{i}}$  ed esterne  $\phi^{\vec{e}}$ . Si può così scomporre il vettore risultante  $\vec{R}$ :

$$\vec{R} = \vec{F}^{\vec{i}} + \vec{F}^{\vec{e}} + \vec{\Phi}^{\vec{i}} + \vec{\Phi}^{\vec{e}} \quad (2.3)$$

Tuttavia per il principio 1.21, la risultante delle forze interne è nulla

$$\vec{R}^{\vec{i}} = \vec{F}^{\vec{i}} + \vec{\Phi}^{\vec{i}} = 0. \quad (2.4)$$

Prendiamo ora in esame il vettore della quantità di moto totale del sistema

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^N m_s \vec{v}_s.$$

Derivandolo rispetto al tempo si ha:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{s=1}^N m_s \vec{a}_s = \sum_{s=1}^N m_s \vec{R}_s = \vec{R},$$

avendo indicato con  $\vec{R}_s$  il vettore risultante delle forze agenti su  $P_s$ ,  $s = 1, \dots, N$ .

Utilizzando le (2.3) e (2.4) si ottiene

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^{\vec{e}} + \phi^{\vec{e}} \quad (2.5)$$

detta *prima equazione cardinale della dinamica*.

Uno degli aspetti importanti sta nel fatto che l'equazione (2.5) è detta anche *equazione del baricentro*, in relazione alle seguenti considerazioni.

Dalla (1.17) si ha, infatti

$$M(G - O) = \sum_{s=1}^N m_s (P_s - O)$$

## 2. Equazioni cardinali della dinamica

---

che derivata rispetto al tempo dà:

$$M\vec{v}_G = \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s = \vec{Q}. \quad (2.6)$$

Derivando la (2.6) si ottiene

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = M\vec{a}_G \quad (2.7)$$

avendo indicato con  $\vec{a}_G$  l'accelerazione del baricentro  $G$ .

Combinando la (1.9) con la (2.5) si ottiene

$$M\vec{a}_G = F^{\vec{e}} + \phi^{\vec{e}}, \quad (2.8)$$

detta appunto *equazione del moto del baricentro*.

La (2.8) può essere così riformulata:

**Teorema 2.4.** *Il baricentro di un sistema si muove come se in esso fosse concentrata la massa del sistema e ad esso fossero applicate tutte le forze e le reazioni vincolari esterne. Inoltre il moto del baricentro non è affetto dalle forze interne.*

### 2.2.2 Seconda equazione cardinale della dinamica

Per la seconda equazione cardinale della dinamica, si procede come nella dimostrazione della prima, a partire dalla definizione di momento delle quantità di moto del sistema che qui ricordiamo (si veda (1.14)):

$$\vec{K}(O) = \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \times (O - P_s).$$

Derivando questa quantità rispetto al tempo si ha

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{K}(O)}{dt} &= \sum_{s=1}^N m_s \vec{a}_s \times (O - P_s) + \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \times \frac{d(O - P_s)}{dt} = \\ &= \sum_{s=1}^N m_s \vec{a}_s \times (O - P_s) + \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \times \frac{dO}{dt} + \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \times \frac{dP_s}{dt} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Quindi, considerando che

$$m_s \vec{a}_s = \vec{R}_s \quad (2.10)$$

e

$$\sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \times \frac{dP_s}{dt} = \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \times \vec{v}_s = 0, \quad (2.11)$$

si ottiene

$$\sum_{s=1}^N m_s \vec{a}_s \times (O - P_s) = \sum_{s=1}^N \vec{R}_s \times (O - P_s). \quad (2.12)$$

Il membro di destra della (2.12) rappresenta il momento risultante di tutte le forze agenti sul corpo. Esso può essere scomposto nel momento risultante delle forze attive,  $\vec{\Omega}(O)$ , e in quello delle reazioni vincolari,  $\vec{\Psi}(O)$ .

Ma sempre in ragione della (1.9) il momento delle forze interne è nullo. Si ha dunque

$$\sum_{s=1}^N m_s \vec{a}_s \times (O - P_s) = \vec{\Omega}^{(e)}(O) + \vec{\Psi}^{(e)}(O), \quad (2.13)$$

dove  $\vec{\Omega}^{(e)}(O)$  rappresenta il momento risultante delle forze attive esterne e analogamente per  $\vec{\Psi}^{(e)}(O)$ .

Per il secondo addendo nel membro di destra della (2.9) si ha

$$\sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \times \frac{dO}{dt} = \vec{Q} \times \vec{v}_O = M \vec{v}_G \times \vec{v}_O \quad (2.14)$$

dove  $\vec{v}_O$  indica la velocità di  $O$ .

Sostituendo le (2.13) e (2.14) nella (2.9) e ricordando la (2.11) si ottiene

$$\frac{d\vec{K}(O)}{dt} = \vec{\Omega}^{(e)}(O) + \vec{\Psi}^{(e)}(O) + M \vec{v}_G \times \vec{v}_O \quad (2.15)$$

Ora se  $O$  è fisso, o coincide con il baricentro del sistema, o la velocità di  $G$  è parallela a quella di  $O$  la (2.15) diventa

$$\frac{d\vec{K}(O)}{dt} = \vec{\Omega}^{(e)}(O) + \vec{\Psi}^{(e)}(O) \quad (2.16)$$

## 2. Equazioni cardinali della dinamica

---

detta *equazione del momento angolare* o *seconda equazione cardinale della dinamica*.

Questa equazione esprime il seguente

**Teorema 2.5.** *La derivata del momento delle quantità di moto di un sistema di punti (calcolato rispetto ad un punto fisso o coincidente col baricentro del sistema o con velocità parallela a quella del baricentro) è uguale al momento delle forze attive esterne e delle reazioni vincolari esterne rispetto a quel punto.*

Le equazioni cardinali della dinamica

$$\begin{cases} \frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^{(e)} + \vec{\Phi}^{(e)} \\ \frac{d\vec{K}(O)}{dt} = \vec{\Omega}^{(e)}(O) + \vec{\Psi}^{(e)}(O) \end{cases} \quad (2.17)$$

costituiscono un sistema di sei equazioni differenziali. Le incognite sono i parametri lagrangiani che forniscono la configurazione del corpo al generico istante  $t$  e le eventuali reazioni vincolari. Nel caso del corpo rigido, in assenza di vincoli, le incognite sono esattamente sei parametri lagrangiani (ad esempio le coordinate del baricentro e angoli di Eulero), pertanto il sistema risulta determinato.

Nel caso di corpo rigido vincolato, fra le incognite compaiono anche delle reazioni vincolari, ma si riduce il grado di libertà. Pertanto, di volta in volta, sarà necessario introdurre un sistema di reazioni vincolari che traduca l'azione di vincoli senza ridondanze, in modo da evitare che il sistema (2.17) risulti indeterminato.

Vedremo nel seguito (capitolo 3) alcuni casi specifici.

### 2.2.3 Ellissoide di inerzia

In questo paragrafo si dà un'ulteriore espressione per l'energia cinetica e il momento delle quantità di moto di un corpo rigido. I risultati che verranno illustrati serviranno per la comprensione del moto del corpo rigido con punto fisso.

**Definizione 2.6.** Diremo momento di inerzia  $I$  di un corpo rispetto ad un asse la somma dei prodotti delle singole masse dei punti del corpo per i quadrati della loro distanza dall'asse stesso. In formule, indicando con  $m_s$  la massa di un generico  $P_s$  e con  $r_s$  la sua distanza dall'asse si ha:

$$I = \sum_{s=1}^N m_s r_s^2$$

Considerando un corpo rigido in stato cinetico di pura rotazione, come nel caso di un corpo rigido con *punto fisso*, vale allora il seguente risultato:

**Proposizione 2.7.** L'energia cinetica di un corpo rigido in stato di rotazione con velocità angolare  $\vec{\omega}$  vale

$$T = \frac{I\omega^2}{2}, \quad (2.18)$$

essendo  $I$  il momento di inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione.

Per il calcolo dell'energia cinetica nel caso più generale, sia di un qualunque sistema meccanico, sia nel caso di un corpo rigido in stato cinetico di rototraslazione, risulta molto utile il seguente *teorema di König*.

**Teorema 2.8.** L'energia cinetica di un corpo è uguale all'energia cinetica che esso avrebbe se fosse tutto concentrato nel baricentro, sommata con l'energia cinetica del corpo rispetto al baricentro, in formula:

$$T = \frac{M}{2} v_G^2 + \sum_{s=1}^N \frac{m_s v_{1s}^2}{2}, \quad (2.19)$$

dove

$$\vec{v}_s = \vec{v}_G + \vec{v}_{1s}$$

è la velocità del punto  $P_s$  scomposta in velocità del baricentro  $\vec{v}_G$  e quella relativa al baricentro  $\vec{v}_{1s}$ .

Nel caso del corpo rigido, in cui

$$\vec{v}_s = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times (P_s - G),$$

## 2. Equazioni cardinali della dinamica

---

la  $v_{1s}^{\vec{}}$  è rappresentata da  $\vec{\omega} \times (P_s - G)$ , cioè dallo stato cinetico di rotazione intorno ad un asse passante per il baricentro. Quindi applicando la (2.18) si ha che l'ultimo termine della (2.19) è  $\frac{I_G \omega^2}{2}$  dove  $I_G$  è il momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione passante per il baricentro. La (2.19) per un corpo rigido diventa:

$$T = \frac{Mv_G^2}{2} + \frac{I_G \omega^2}{2}, \quad (2.20)$$

cioè l'energia cinetica di un corpo rigido è uguale all'energia cinetica che esso avrebbe se fosse tutto concentrato nel suo baricentro, sommata all'energia cinetica di rotazione intorno al baricentro stesso.

In virtù del teorema di König, ed in particolare della (2.20) il calcolo dell'energia cinetica di un corpo rigido si riduce al calcolo del secondo addendo della (2.20), cioè senza perdere di generalità ci si può ridurre al caso del corpo rigido in stato cinetico di rotazione, o, più in generale, al caso di un corpo rigido con punto fisso. Dunque, dato un corpo rigido con punto fisso  $O$ , in stato di rotazione di velocità angolare  $\vec{\omega}$ , valgono i seguenti risultati (per la dimostrazione si veda [1])

**Proposizione 2.9.** *L'energia cinetica del corpo rigido con punto fisso  $O$  e velocità angolare  $\vec{\omega}$  può essere espressa nella forma*

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2A'pq - 2B'pr - 2C'qr) \quad (2.21)$$

dove

- $p, q, r$  sono le coordinate di  $\vec{\omega}$
- $A, B, C, A', B', C'$  dipendono dalla forma e composizione del corpo, ma non dipendono dal moto.

in particolare le quantità  $A, B, C, A', B', C'$  valgono

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^N m_i(y_i^2 + z_i^2), & B &= \sum_{i=1}^N m_i(x_i^2 + z_i^2), & C &= \sum_{i=1}^N m_i(x_i^2 + y_i^2), \\ A' &= \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i, & B' &= \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i, & C' &= \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i. \end{aligned}$$

$A, B, C$  rappresentano i momenti di inerzia di  $\mathcal{C}$  rispetto agli assi cartesiani solidali  $x, y, z$  rispettivamente.  $A', B', C'$  si chiamano momenti di deviazione o momenti centrifughi.

Pertanto confrontando (2.18) e (2.21) si ha:

$$I\omega^2 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2A'pq - 2B'pr - 2C'qr \quad (2.22)$$

Indicando con  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  i coseni direttori della direzione di  $\vec{\omega}$ , in modo che sia

$$\begin{cases} p = \omega\alpha \\ q = \omega\beta \\ r = \omega\gamma \end{cases}$$

si ottiene

$$I = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2A'\alpha\beta - 2B'\alpha\gamma - 2C'\beta\gamma \quad (2.23)$$

Questa equazione esprime, mediante solo sei costanti  $A, B, C, A', B', C'$  il momento di inerzia del corpo rispetto a qualunque asse passante per un punto  $O$  determinato dai coseni direttori  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ .

La formula (2.23) Può venire illustrata dalla seguente rappresentazione geometrica: consideriamo la quadrica di centro  $O$  ed equazione

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2A'xy - 2B'xz - 2C'yz = 1, \quad (2.24)$$

intersechiamo questa quadrica con la retta  $x = \alpha u, y = \beta u, z = \gamma u$  dove  $u$  è un parametro.

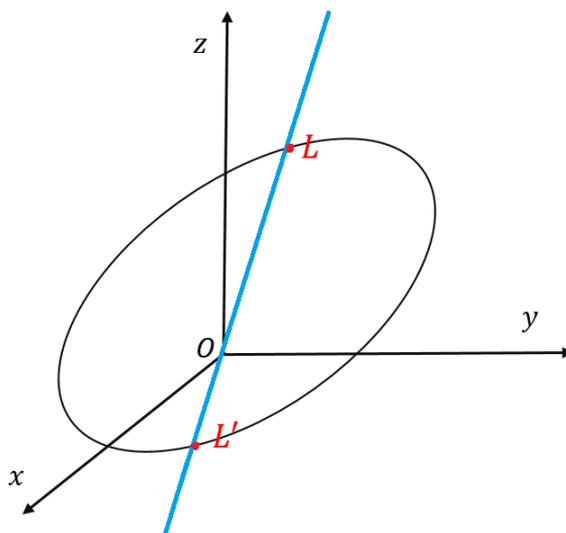
Si ottiene così il valore di  $u$  per il quale la retta interseca la superficie dell'ellissoide:

$$Iu^2 = 1, \quad \text{ovvero} \quad u = \frac{1}{\pm\sqrt{I}}.$$

La retta incontra la quadrica in due punti opposti di equazioni:

$$L = \left( \frac{\alpha}{\sqrt{I}}, \frac{\beta}{\sqrt{I}}, \frac{\gamma}{\sqrt{I}} \right) \quad \text{e} \quad L' = \left( -\frac{\alpha}{\sqrt{I}}, -\frac{\beta}{\sqrt{I}}, -\frac{\gamma}{\sqrt{I}} \right).$$

## 2. Equazioni cardinali della dinamica



**Figura 2.2:** Quadrica di centro  $O$  intersecata con retta passante per  $O$  e coseni direttori  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$

Risulta quindi che

$$OL^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{I} = \frac{1}{I}, \quad \text{ovvero} \quad OL = \frac{1}{\sqrt{I}}.$$

Essendo  $I$  e  $OL$  sempre positivi si ha che la quadrica non ha punti all'infinito, ed è perciò un ellissoide detto *ellissoide di inerzia*. Esso gode della seguente proprietà: il momento di inerzia rispetto ad un asse vale l'inverso del quadrato del semidiametro dell'ellissoide rispetto a quell'asse. Perciò noto l'ellissoide di inerzia rispetto ad un punto, è noto il momento di inerzia rispetto a tutti gli assi passanti per quel punto.

**Osservazione 2.10.** Se riferiamo l'ellissoide di inerzia relativo al punto  $O$  ai suoi assi (che chiameremo *assi principali di inerzia*) scompaiono i termini in  $xy$ ,  $yz$  e  $zx$  e l'ellissoide assume l'equazione:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1, \quad (2.25)$$

dove  $A, B, C$  sono i momenti di inerzia rispetto ai suoi assi (detti *momenti principali di inerzia*).

Per la (2.21) se  $p, q, r$  sono le componenti della velocità angolare  $\vec{\omega}$ , l'energia cinetica assume la forma:

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2). \quad (2.26)$$

In certi casi le condizioni di simmetria permettono di conoscere la posizione degli assi principali d'inerzia rispetto al corpo, a cui sono solidali.

Ad esempio se il corpo ha come piano di simmetria il piano  $(O, x, y)$  si ha che nell'equazione (2.24) dell'ellissoide di inerzia non compaiono i termini  $xz$  e  $yz$ , cioè l'asse  $z$  è un'asse principale di inerzia.

**Osservazione 2.11.** Un asse è principale di inerzia se è normale ad un piano di simmetria del corpo. Allora se un corpo ha un'asse di simmetria passante per  $O$ , tutte le rette per  $O$  ad esso normali sono assi principali di inerzia e i momenti di inerzia rispetto a queste rette sono uguali; l'ellissoide di inerzia risulta di rotazione attorno all'asse di simmetria.

**Definizione 2.12.** *Quando in un corpo l'ellissoide di inerzia rispetto ad un punto  $O$  è di rotazione intorno ad un asse che passa per il baricentro, il corpo si dice a struttura giroscopica.*

Ciò accade, ad esempio, se il corpo ha un'asse di simmetria che contiene il baricentro.

### 2.2.4 Moto di un corpo rigido con punto fisso

Con le formule appena ottenute è possibile esprimere il momento delle quantità di moto di un corpo rigido con un punto fisso  $O$ .

**Definizione 2.13.** *Il momento della quantità di moto  $K_z$  di un sistema di punti rispetto ad un asse, che si può sempre far coincidere con quello delle  $z$ , è la proiezione del momento rispetto ad un punto sull'asse stesso, cioè*

$$K_z = \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \times (O - P_s) \cdot \vec{k}. \quad (2.27)$$

## 2. Equazioni cardinali della dinamica

---

E' semplice verificare che la definizione è ben posta, cioè è indipendente dalla scelta del polo  $O$  sull'asse.

Calcoliamo ora le derivate dell'energia cinetica  $T$  rispetto alle componenti  $p, q, r$  di  $\vec{\omega}$ . Derivando la (1.15) rispetto ad  $r$  si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial r} &= \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \cdot \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial r} = \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\vec{\omega} \times (P_s - O)) \\ &= \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \cdot \frac{\partial}{\partial r} [(p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}) \times (P_s - O)] \\ &= \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \cdot \vec{k} \times (P_s - O) = \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \times (O - P_s) \cdot \vec{k} = K_z, \end{aligned}$$

Analogamente, derivando  $T$  rispetto a  $p$  e a  $q$  si ottengono le componenti del momento angolare rispetto agli assi  $x$  e  $y$ . In sintesi si ha:

$$\begin{cases} K_x = \frac{\partial T}{\partial p} \\ K_y = \frac{\partial T}{\partial q} \\ K_z = \frac{\partial T}{\partial r}. \end{cases} \quad (2.28)$$

Utilizzando ora la (2.21) si ottiene immediatamente la seguente

**Proposizione 2.14.** *Le componenti del momento delle quantità di moto di un corpo rigido lungo gli assi, sono le derivate dell'energia cinetica rispetto alle componenti della velocità angolare lungo gli assi stessi. In formule, ricordando la (2.21), si ha:*

$$\begin{cases} K_x = Ap - A'q - B'r \\ K_y = -A'p + Bq - C'r \\ K_z = -B'p - C'q + Cr. \end{cases} \quad (2.29)$$

Consideriamo, a questo punto, il sistema mobile  $(O, x, y, z)$  di origine  $O$  e con assi diretti secondo gli assi principali di inerzia del corpo (passanti quindi per  $O$ ). Come già visto nella sezione relativa agli assi solidali e gli angoli di Eulero, sappiamo che il moto del corpo sarà conosciuto, in ogni istante,

quando saranno noti i tre angoli di Eulero  $\varphi$ ,  $\psi$  e  $\theta$  fra i due sistemi (infatti un corpo rigido con un punto fisso ha tre gradi di libertà).

Sia come sempre  $\vec{\omega}$  il vettore velocità angolare che definisce la rotazione del corpo e  $p, q$  ed  $r$  le sue componenti sugli assi mobili. In questo modo, poichè  $x, y, z$  coincidono con gli assi principale, la (2.29) diventa

$$\begin{cases} K_x = Ap \\ K_y = Bq \\ K_z = Cr. \end{cases} \quad (2.30)$$

In particolare se  $\vec{\omega}$  è parallelo ad un asse principale (ad esempio l'asse  $z$ ) avremo  $p = q = 0$  e quindi  $K_x = K_y = 0$ ,  $K_z = Cr$ .

Cerchiamo di esprimere la derivata di  $\vec{K}$  (che indicheremo  $(\frac{d\vec{K}}{dt})_1$ ) rispetto ad un osservatore nel sistema mobile. Questa risulta essere:

$$\left(\frac{d\vec{K}}{dt}\right)_1 = A\dot{p}\vec{i}_1 + B\dot{q}\vec{j}_1 + C\dot{r}\vec{k}_1. \quad (2.31)$$

Per il teorema del momento delle quantità di moto applicato ad un corpo rigido con punto fisso, risulta:

$$\left(\frac{d\vec{K}}{dt}\right)_1 + \vec{\omega} \times \vec{K} = \vec{\Omega}^{(e)}, \quad (2.32)$$

dove  $\vec{\Omega}^{(e)}$  è il momento delle forze attive esterne calcolato rispetto ad  $O$ . Proiettiamo le componenti della (2.32) sugli assi  $(O, x, y, z)$  e ricordando la (2.31) si hanno:

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = \Omega_x \\ B\dot{q} + (A - C)pr = \Omega_y \\ C\dot{r} + (B - A)pq = \Omega_z, \end{cases} \quad (2.33)$$

dove  $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$  sono le componenti sugli assi  $(Ox, y, z)$  del momento delle forze e dipenderanno dal tempo  $t$  e dalle velocità dei punti del corpo, cioè dagli angoli di Eulero e dalle loro derivate.

## 2. Equazioni cardinali della dinamica

---

**Osservazione 2.15.** Le (2.33), che sono le *Equazioni di Eulero*, associate con le (2.2) formano un sistema di primo ordine di sei equazioni nelle sei incognite  $\varphi, \psi, \theta, p, q, r$ . Esso, mediante le condizioni iniziali  $\varphi_0, \psi_0, \theta_0, p_0, q_0, r_0$  (che determinano la posizione e la velocità iniziale dei punti del corpo), permettono di conoscere il moto del corpo, cioè la sua configurazione in ogni istante.

# Capitolo 3

## Applicazioni

In questa sezione daremo alcune applicazioni del teorema della quantità di moto e del teorema del momento angolare. In particolare analizzeremo il moto di un corpo rigido con un asse fisso (pendolo fisico) e daremo due esempi di moto di un corpo rigido con punto fisso (moto alla Poincaré e fenomeno giroscopico).

### 3.1 Esempio di corpo rigido con asse fisso

Saranno molto utili nella comprensione del moto di un corpo con un asse fisso i seguenti risultati:

**Proposizione 3.1.** *Il momento delle quantità di moto di un corpo rigido ruotante intorno ad un asse  $r$ , rispetto all'asse stesso, è uguale al momento di inerzia del corpo per la sua velocità angolare (ovvero per la derivata dell'angolo di rotazione del corpo). In formule*

$$K_r = \sum_{s=1}^N m_s r_s^2 \dot{\theta} = \dot{\theta} \sum_{s=1}^N m_s r_s^2 = I \dot{\theta}, \quad (3.1)$$

dove  $\theta$  è l'angolo di rotazione del corpo.

### 3. Applicazioni

*Dimostrazione.* Possiamo introdurre un sistema di riferimento cartesiano in modo da far coincidere l'asse  $z$  con la retta  $r$ . Ricordando la (2.27) si ha

$$K_r = K_z = \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \times (O - P_s) \cdot \vec{k}.$$

Poiché le componenti di  $\vec{v}_s$  e di  $(O - P_s)$  lungo la direzione di  $\vec{k}$  non danno contributo a  $K_r$ , per la componente nel piano  $(O, x, y)$  possiamo utilizzare la rappresentazione in coordinate polari. Più precisamente la velocità  $\vec{v}$  di un punto  $P$  in coordinate polari  $(\rho, \theta)$  è data da

$$\vec{v} = \dot{\rho} \vec{r} + \rho \dot{\theta} \vec{h}, \quad (3.2)$$

dove  $\rho = |P - O|$ ,  $\vec{r}$  è il versore diretto da  $O$  verso  $P$  e  $\vec{h}$  quello ad esso ortogonale, ottenuto ruotando  $\vec{r}$  di  $\frac{\pi}{2}$  nel verso di  $\theta$  crescente. Per il punto  $P_s$ ,  $s = 1, \dots, N$ , si ha che  $\rho = r_s$  (distanza di  $P_s$  da  $r$ ) è costante; dunque dalla (3.2) si ha

$$(\vec{v})_{xy} = r_s \dot{\theta} \vec{h}. \quad (3.3)$$

Per quanto riguarda la componente  $O - P_s$  nel piano  $(O, x, y)$ , in coordinate polari si ha

$$(O - P_s)_{xy} = -r_s \vec{r}. \quad (3.4)$$

Da (3.3) e (3.4) si ottiene dunque, essendo  $\vec{r} \times \vec{h} = \vec{k}$ ,

$$K_r = \sum_{s=1}^N r_s \vec{r} \times (m_s r_s \dot{\theta} \vec{h}) \cdot \vec{k} = \sum_{s=1}^N m_s r_s^2 \dot{\theta} = I \dot{\theta}.$$

□

**Osservazione 3.2.** Se un sistema di punti ha come solo vincolo esterno un punto fisso  $O$ , l'unica reazione vincolare esterna è applicata in  $O$  e d ha momento nullo. Quindi la (2.16) diventa

$$\frac{d\vec{K}(O)}{dt} = \vec{\Omega}^{(e)}(O). \quad (3.5)$$

Con ragionamento analogo, se supponiamo che il sistema abbia come vincolo un asse fisso, che si può far coincidere con l'asse  $z$ , la (3.5) diventa

$$\frac{dK_z}{dt} = \Omega_z. \quad (3.6)$$

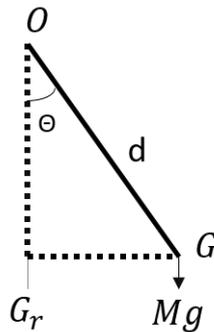
Combinando ora la (3.5) e la (3.6) si ha

$$I\ddot{\theta} = \Omega_z. \quad (3.7)$$

Quest'ultima è un'equazione differenziale del secondo ordine in  $\theta$  che trova un'applicazione molto interessante nel *pendolo fisico*.

**Definizione 3.3.** *Il pendolo fisico, o composto, è un corpo rigido pesante con asse fisso (detto asse di sospensione). Se l'asse di sospensione è orizzontale, il pendolo si dice verticale, se l'asse è quasi verticale il pendolo si dice orizzontale.*

Si consideri un pendolo fisico verticale in cui  $\theta$  è l'angolo  $\widehat{GOG_r}$  come in Figura 3.1.  $G$  denota il baricentro del corpo,  $G_r$  la sua proiezione sulla verticale passante per  $O$  e l'asse di rotazione orizzontale è ortogonale al piano della figura e passa per  $O$ .



**Figura 3.1:** Pendolo verticale.

Poichè il peso  $M\vec{g}$  ( $\vec{g}$  è l'accelerazione di gravità) giace su un piano normale all'asse, dalla Definizione 1.17 il momento della forza peso è dato da

$$\vec{\Omega}(O) = M\vec{g} \times (O - G), \quad \text{da cui si ha} \quad \Omega_z = -Mgd \sin \theta,$$

essendo  $d = |G - O|$ .

Se il pendolo non è verticale, indichiamo con  $\alpha$  l'angolo acuto tra la verticale e l'asse. Il momento del peso rispetto all' asse sarà:

$$\Omega_z = -Mgd \sin \alpha \sin \theta; \quad (3.8)$$

nel caso in cui  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  questa formula si riduce al caso precedente.

Ricordando la (3.7) e ponendo

$$l = \frac{I}{Md \sin \alpha}, \quad (3.9)$$

si ha

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta. \quad (3.10)$$

Confrontando questa equazione con quella di un pendolo semplice si ha che *un pendolo fisico si muove come un pendolo semplice di lunghezza  $l$  come in (3.9)*. In particolare le piccole oscillazioni sono armoniche con periodo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd \sin \alpha}}. \quad (3.11)$$

Il periodo delle piccole oscillazioni è tanto più grande quanto più piccolo è l'angolo  $\alpha$ : le piccole variazioni di  $g$  provocate ad esempio dall'azione della luna, possono dare luogo a variazioni del lunghissimo periodo di oscillazione del pendolo fisico orizzontale, che proprio per questo motivo può essere usato in ricerche sulla variazione di gravità.

## 3.2 Esempi di corpo rigido con punto fisso

Ricordiamo alcune proposizioni, definizioni e teoremi che ci agevoleranno lo studio del moto alla Poincaré e del fenomeno giroscopico.

**Definizione 3.4.** *Data una forza  $(\vec{F}, P)$  si chiama lavoro elementare (reale) della forza corrispondente allo spostamento (reale)  $dP$  del punto  $P$  il seguente prodotto scalare*

$$dL = \vec{F} \cdot dP = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (3.12)$$

Se la forza è posizionale, cioè  $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$  dipende solo dalla posizione di  $P$  e non dalla sua velocità né dal tempo, essa si dice *conservativa* se esiste una funzione  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(x, y, z)$ , detta *potenziale* della forza, tale che

$$dL = d\mathcal{U}, \quad (3.13)$$

ovvero la (3.12) è un differenziale esatto.

**Osservazione 3.5.** Se su un punto  $P$  agiscono più forze, si può definire il lavoro elementare del sistema di forze come la somma dei lavori delle singole forze. Indicando con  $\vec{R}$  il vettore risultante del sistema si ottiene

$$dL = \vec{R} \cdot dP \quad (3.14)$$

Passiamo ora a dimostrare il seguente

**Teorema 3.6** (Teorema delle forze vive). *Il lavoro  $dL$  fatto dalla forza per lo spostamento  $dP$  del punto, avvenuto nel tempo  $dt$  è uguale al differenziale dell'energia cinetica nello stesso istante, in formule*

$$dL = dT, \quad (3.15)$$

*Dimostrazione.* Si ha

$$dT = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) dt = m \vec{a} \cdot \vec{v} dt = \vec{R} \cdot dP = dL.$$

□

Nel caso in cui le forze agenti su  $P$  siano conservative, indicato con  $\mathcal{U}$  il potenziale totale (ovvero la somma dei potenziali delle singole forze) e posto  $V = -\mathcal{U}$  (*energia potenziale*), si ottiene il *teorema di conservazione dell'energia*, cioè:

$$T + V = \text{costante}. \quad (3.16)$$

Infatti dalla (3.15) e dalla (3.13) si ottiene

$$dT = d\mathcal{U},$$

da cui  $d(T - \mathcal{U}) = 0$ , ovvero  $T - \mathcal{U} = T + V = \text{costante}$ .

**Osservazione 3.7.** Nel caso di un corpo rigido possiamo rappresentare lo spostamento  $dP$  di un suo punto a partire dalla formula fondamentale della cinematica rigida (1.8); si ottiene così

$$dP = \vec{v}dt = dO + d\vec{\theta} \times (P - O),$$

essendo  $\vec{\omega} = \dot{\vec{\theta}}$  la velocità angolare del corpo e  $O$  un punto del corpo. Indicando con  $\vec{R}$  e  $\vec{\Omega}(O)$  rispettivamente il vettore risultante e il momento risultante delle forze agenti sul corpo, per il lavoro elementare dell'intero sistema di forze si ottiene

$$dL = dT = \sum_{s=1}^N \vec{R}_s \cdot dP_s = \vec{R} \cdot dO + \vec{\Omega}(O) \cdot \vec{\omega}dt \quad (3.17)$$

**Osservazione 3.8.** Dalle formule (2.26) e (2.30) è possibile ricavare un'altra utile espressione dell'energia cinetica di un corpo rigido:

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \frac{1}{2}(K_x p + K_y q + K_z r) = \frac{1}{2}\vec{K} \cdot \vec{\omega}. \quad (3.18)$$

**Osservazione 3.9.** Per un corpo rigido con punto fisso, notiamo che, dove le forze ammettono un potenziale  $-V$ , il quale dipende dalla posizione del corpo (quindi dagli angoli di Eulero), vale la (3.16).

La quantità costante  $T+V$  viene detta *energia totale* e il suo valore, calcolato a partire dal dato iniziale, viene denotato con  $E$ :

$$T + V = E \quad (3.19)$$

Si ha dunque

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + v(\theta, \varphi, \psi) = E. \quad (3.20)$$

**Definizione 3.10.** *Il moto di precessione consiste nel moto di rotazione uniforme intorno ad un asse del corpo, il quale a sua volta ruota di moto uniforme intorno ad un asse fisso.*

In formule, per la velocità  $\vec{v}$  di un punto  $P$  del corpo si ha:

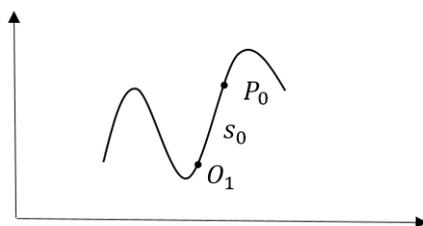
$$\vec{v} = \vec{\omega}_1 \times (P - O_1) + \vec{\omega}_2 \times (P - O_1) = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times (P - O_1), \quad (3.21)$$

dove  $O_1$  è il punto fisso del corpo rigido il cui stato cinetico è dato dalla somma di due stati cinetici di rotazione, uno a velocità angolare  $\vec{\omega}_1$  costante in modulo e diretto verso una retta del corpo passante per  $O_1$  (chiamata asse di figura), e l'altro a velocità angolare  $\vec{\omega}_2$  costante in modulo, direzione e verso.

Ricordiamo ora due ultimi risultati che saranno molto utili per capire meglio il fenomeno giroscopico.

**Osservazione 3.11.** Sia  $P$  un punto materiale di massa  $m$  che si muove su un piano verticale e su un terreno ondulato senza attrito. Sia  $s$  l'ascissa curvilinea misurata a partire da un punto  $O_1$  fissato lungo il percorso, e sia  $h(s)$  l'altezza del generico punto di ascissa  $s$ . L'energia potenziale in  $P$  è  $mgh(s)$  e per la (3.19) si ha

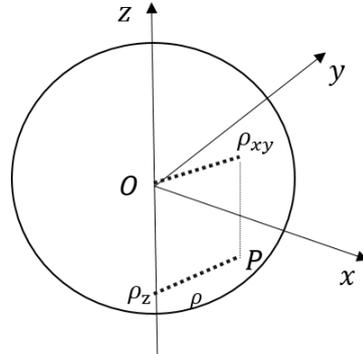
$$\frac{m}{2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 + mgh(s) = E. \quad (3.22)$$



**Figura 3.2:** Moto di punto materiale di massa  $m$  su un terreno ondulato.

Quindi se  $P$  sta in una posizione iniziale  $P_0$  tra due massimi di  $h(s)$ , si ha che se  $E$  è abbastanza grande il punto riesce a superare uno dei due massimi e a muoversi sempre nello stesso verso, altrimenti (se  $E$  non è sufficiente) il punto sale fino ad una certa altezza dove si annulla la velocità e riscende, per risalire da parte opposta fino alla stessa altezza, dalla quale riscende ancora (moto periodico).

**Osservazione 3.12.** Consideriamo il moto di una pallina pesante su di una sfera (*pendolo conico*) che supporremo di centro  $O$  e raggio  $l$ .



**Figura 3.3:** Moto di pallina pesante su di una sfera.

Per lo studio di questo moto utilizzeremo un sistema di coordinate cilindriche  $\rho, \theta, z$  con origine in  $O$  e l'asse  $z$  diretto verso l'alto.

La (3.22) equivale a

$$\frac{1}{2}m[\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2] + mgz = E. \quad (3.23)$$

Ora poichè il peso è parallelo all'asse  $z$ , il momento  $\Omega_z$  è nullo e quindi il momento della quantità di moto rispetto all'asse è costante, risulterà

$$\rho^2\dot{\theta} = C, \quad (3.24)$$

dove  $C$  è una costante che si determina con le condizioni iniziali.

Mettendo insieme queste due ultime equazioni, il teorema di conservazione dell'energia si esprime

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{2E}{m} - 2gz\right)\left(\frac{l^2 - z^2}{l^2}\right) - \frac{C^2}{l^2}. \quad (3.25)$$

Esprimiamo tutto nella sola  $z$ :

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = f(z). \quad (3.26)$$

Questa equazione può ridursi alle quadrature col metodo della separazione delle variabili.

### 3.2.1 Moto alla Poinsot

Applichiamo le considerazioni precedenti al cosiddetto *moto alla Poinsot*, cioè al moto di un corpo rigido con punto fisso  $O$  tale che le forze attive abbiano momento nullo rispetto ad  $O$  (cioè che le forze attive siano inefficienti e il moto avvenga per inerzia). Ciò accade, ad esempio, se l'unica forza agente sul corpo è il suo peso e il suo punto fisso è il baricentro.

Se il momento delle forze rispetto a  $O$  è nullo, per il teorema del momento delle quantità di moto si ha che  $\vec{K}$  è una costante, inoltre per la (3.17) essendo  $O$  fisso l'energia cinetica è costante, e quindi

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = E. \quad (3.27)$$

Per la (3.18) si avrà

$$\vec{K} \cdot \vec{\omega} = 2E, \quad (3.28)$$

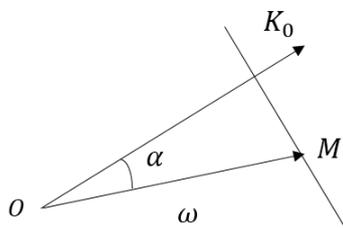
e se  $\alpha$  è l'angolo fra  $\vec{\omega}$  e il vettore costante  $\vec{K}$ , che chiameremo  $\vec{K}_0$  si avrà

$$\omega \cos \alpha = \frac{2E}{K_0}. \quad (3.29)$$

Come mostrato in Figura 3.4  $\omega \cos \alpha$  è la proiezione del vettore  $\vec{\omega}$  sul vettore costante  $\vec{K}_0$  (supposti entrambi con origine in  $O$ ). L'estremo  $M$  di  $\vec{\omega}$ , durante il moto del corpo, rimane sempre sul piano normale a  $\vec{K}$ . Le componenti  $p, q, r$  di  $\vec{\omega}$  (quindi le coordinate di  $M$  rispetto a  $(Ox_1, y_1, z_1)$ ) si trovano sull'ellissoide omotetico (con stessa direzione per gli assi e stesso rapporto per la grandezza dei semiassi) all'ellissoide di inerzia: il primo ellissoide rimane così sempre a contatto, in  $M$ , con un piano fisso normale a  $\vec{K}$  e sempre tangente a questo piano.

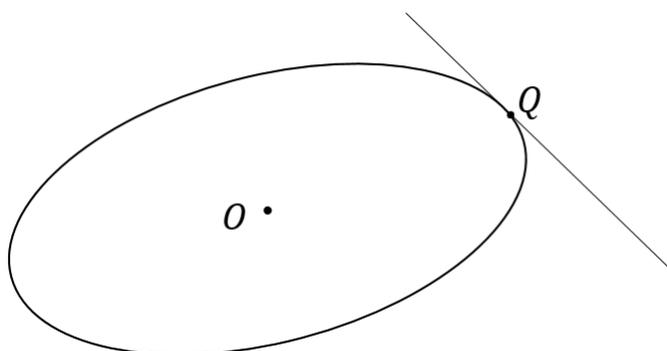
Si conclude che il moto alla Poinsot di un corpo rigido con punto fisso si può sempre riprodurre mediante il moto di un ellissoide collegato con il corpo con velocità angolare proporzionale alla distanza del punto fisso dal punto di contatto fra ellissoide e piano fisso.

**Osservazione 3.13.** Gli assi principali di inerzia di un corpo rigido sono assi permanenti di rotazione, ovvero se il corpo è in rotazione intorno ad uno di questi assi, permane in rotazione intorno all'asse stesso senza spostarlo.



**Figura 3.4:**  $M$  rimane sempre sul piano normale a  $\vec{K}_0$ .

Questo perchè se ad esempio il corpo viene posto in moto intorno all'asse maggiore dell'ellissoide di inerzia, allora  $\vec{K}$  è diretto secondo quell'asse e il piano fisso sarà tangente all'ellissoide in uno dei suoi vertici, ad es.  $Q$  (vedi Figura 3.5)



**Figura 3.5:** Piano fisso tangente all'ellissoide in  $Q$ .

Si capisce che durante il moto il punto di tangenza rimane ancora  $Q$ , altrimenti l'ellissoide si staccerebbe dal piano. Così  $\vec{\omega}$  rimane costante e quindi il corpo (che stava ruotando attorno al suddetto asse) continua a ruotargli intorno come se fosse un asse fisso.

Analogamente se il corpo viene messo a ruotare intorno al minimo asse dell'ellissoide di inerzia, esso continua a ruotare intorno a quell'asse.

#### 3.2.2 Fenomeno giroscopico

In questo paragrafo tratteremo la rotazione di un ellissoide di inerzia rispetto al punto  $O$ : ciò accade, ad esempio, quando il corpo è a struttura giroscopica

(si veda Definizione 2.12).

**Osservazione 3.14.** Un corpo a struttura giroscopica passa, ad ogni istante, per uno stato cinetico di rotazione che si ottiene componendo due stati cinetici di rotazione: il primo con velocità angolare costante in modulo e con direzione una retta del corpo, l'altro con velocità angolare costante. Il corpo così compie un moto di precessione (Definizione 3.10).

A questo punto si considerino le equazioni di Eulero (2.33) in cui  $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$  sono nulle (perchè sono nulli i momenti rispetto ad  $O$ ); se  $z_1$  è l'asse di rotazione dell'ellissoide di inerzia si ha che  $B - A = 0$  e quindi  $\dot{r} = 0$  (in particolare si ha anche che  $A = B$ ). Siano  $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$  i vettori unitari paralleli agli assi principali di inerzia, allora risulta:

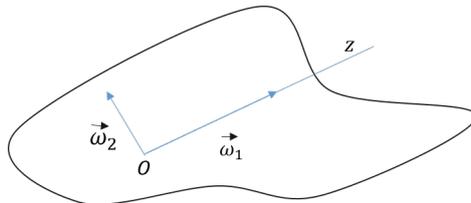
$$\vec{K} = Ap\vec{i}_1 + Aq\vec{j}_1 + Cr\vec{k}_1 = A\vec{\omega} + (C - A)r\vec{k}_1, \quad (3.30)$$

da cui

$$\vec{\omega} = -\frac{C - A}{A}r\vec{k}_1 + \frac{\vec{K}}{A}. \quad (3.31)$$

Il vettore  $\vec{\omega}$  risulta scomposto in un vettore costante in modulo e diretto sempre verso  $\vec{k}_1$  (asse del corpo) e in un vettore costante ( $\frac{\vec{K}}{A}$ ).

Consideriamo un corpo rigido con punto fisso  $O$  (Figura 3.6) tale che il suo ellissoide di inerzia rispetto ad  $O$  sia di rotazione. Supponiamo che il corpo ruoti di velocità angolare  $\vec{\omega}_1$  intorno all'asse di rotazione che faremo coincidere con  $z$ . Lasciando invariato il modulo di  $\vec{\omega}_1$  imprimiamo al corpo un altro stato cinetico definito dal vettore  $\vec{\omega}_2$  perpendicolare a  $\vec{\omega}_1$ .



**Figura 3.6:** Rappresentazione dei due stati cinetici di un giroscopio.

**Osservazione 3.15.** Il vettore  $\vec{K}$  cambia perchè essendo tanto  $\vec{\omega}_1$  quanto  $\vec{\omega}_2$  diretti secondo assi principali di inerzia, si ha che

$$\vec{K} = A\vec{\omega}_2 + C\vec{\omega}_1, \quad (3.32)$$

con  $A$  e  $C$  momenti intorno a  $\vec{\omega}_1$  e  $\vec{\omega}_2$ .

Il calcolo della derivata di  $\vec{K}$  conduce al seguente risultato (per i dettagli si veda [1])

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = A\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} + C\omega_1\omega_2\vec{a}, \quad (3.33)$$

dove  $\vec{a}$  è versore diretto come  $\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}$ . Il teorema del momento della quantità di moto, in questo caso, ci spiega che quando si vuole spostare un corpo ruotante intorno ad un asse bisogna applicare una coppia di forze

$$\vec{\Omega}_2 = A\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}, \quad \vec{\Omega}_1 = C\omega_1\omega_2\vec{a}$$

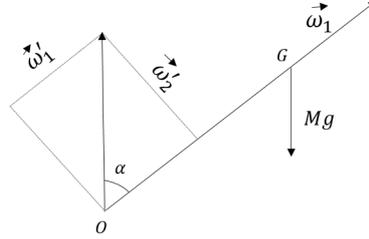
che sono tanto intense quanto più è rapida la rotazione.

Analizziamo ora due esempi di moto di corpo rigido pesante: il primo avverrà tramite moto di precessione e sarà con un punto fisso  $O$ , l'altro sarà con struttura giroscopica .

**Esempio 3.16** (Moto di una trottola). Il moto di una trottola è prossimo ad un moto di precessione. Infatti durante il moto di rotazione il suo peso è in grado di produrre il momento  $\vec{\Omega}$  necessario per spostare l'asse di rotazione. Consideriamo un corpo rigido con punto fisso  $O$ , a struttura giroscopica e soggetto solo al suo peso. Supponiamo che il corpo inizialmente sia dotato del moto di precessione (quindi  $\vec{\omega}_1$  e  $\vec{\omega}_2$  sono diretti secondo gli assi di figura e formano tra loro un angolo  $\alpha$ ). Decomponiamo  $\vec{\omega}_2$  in due componenti, una parallela a  $\vec{\omega}_1$  e una ortogonale a  $\vec{\omega}_1$  :

$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}'_1 + \vec{\omega}'_2.$$

Le componenti scalari di  $\vec{\omega}'_1$  e  $\vec{\omega}'_2$  sono date da  $\omega_2 \cos \alpha$  e  $\omega_2 \sin \alpha$  rispettivamente.



**Figura 3.7:** Moto di precessione generato da  $\vec{\omega}_1$  e  $\vec{\omega}_2$  (quest'ultimo decomposto).

La (3.33) risulta

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = A \frac{d\vec{\omega}'_2}{dt} + C \frac{d\vec{\omega}'_1}{dt}. \quad (3.34)$$

Ricorrendo a regole geometriche nel calcolo delle derivate di  $\vec{\omega}'_2$  e  $\vec{\omega}'_1$  si ottiene

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = [C\omega_1\omega_2 \sin \alpha + (C - A)\omega_2^2 \sin \alpha \cos \alpha] \vec{a}. \quad (3.35)$$

Ora il momento  $\vec{\Omega}$  del peso  $M\vec{g}$  del corpo rispetto ad  $O$  ha direzione e verso opposto ad  $\vec{a}$  e il modulo vale  $Mgd$ , con  $d$  distanza del baricentro dal punto fisso. Quindi risulta

$$C\omega_1\omega_2 + (C - A)\omega_2^2 \cos \alpha = -Mgd, \quad (3.36)$$

pertanto la velocità di precessione di un corpo soggetto al suo peso si calcola in base alla rotazione (bisogna avere come dato iniziale  $\omega_1$ ) e all'inclinazione dell'asse di figura rispetto alla verticale (l'altro dato iniziale deve essere  $\alpha$ ). Avendo questi due dati, la (3.36) ha come soluzioni:

$$\omega_2 = \frac{-C\omega_1 \pm \sqrt{C^2\omega_1^2 - 4(C - A)Mgd \cos \alpha}}{2(C - A) \cos \alpha}. \quad (3.37)$$

Se  $\omega_1$  è molto grande risultano

$$\omega_2 = -\frac{Mgd}{C\omega_1}, \quad \omega_2 = -\frac{C\omega_1}{(C - A) \cos \alpha} + \frac{Mgd}{C\omega_1}. \quad (3.38)$$

Nel primo caso ( $\omega_2$  molto piccola) si hanno precessioni lente, e ad esse si riconduce il moto della trottola, nel secondo caso si hanno precessioni rapide.

**Esempio 3.17** (Generalità sul moto di un corpo rigido pesante a struttura giroscopica). Consideriamo un sistema di assi coincidenti con gli assi principali di inerzia ( $z_1$  diretto secondo l'asse di figura e  $x_1$  e  $y_1$  in un piano normale) e indichiamo con  $\alpha, \beta, \gamma$  i coseni degli angoli che questi assi formano con un vettore unitario  $\vec{k}$ , verticale e diretto verso l'alto. Per la (3.20) si ha che

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Aq^2 + Cr^2) + Mg\gamma d = E, \quad (3.39)$$

dove  $d$  è la distanza del baricentro da  $O$ .

Inoltre, poichè il momento delle quantità di moto rispetto alla verticale risulta costante, abbiamo

$$\vec{K} \cdot \vec{k} = Ap\alpha + Aq\beta + Cr\gamma = h, \quad (3.40)$$

dove  $h$  è una costante. Dalla terza equazione di Eulero si ha che  $\Omega_z = 0$  e quindi che  $r = r_0$ , con  $r_0$  costante.

Si ottengono così tre integrali dell'equazione del moto. Noi ci occuperemo solo di vedere come varia  $\gamma$ . Utilizzando le formule di Poisson e moltiplicando scalarmente per  $\vec{k}$ , risulta

$$\frac{d(\vec{K} \cdot \vec{k}_1)}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}_1 \cdot \vec{k}, \quad (3.41)$$

da cui

$$\frac{d\gamma}{dt} = q\alpha - p\beta. \quad (3.42)$$

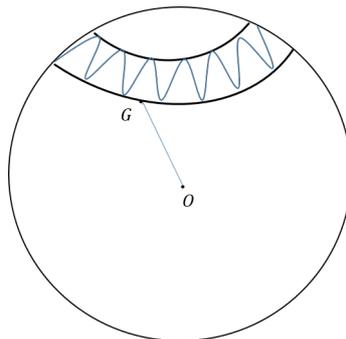
Elevando al quadrato e per le proprietà dei coseni quest'ultima equazione si esprime così:

$$\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 = \left(\frac{2E - 2Mg\gamma d - Cr_0^2}{A}\right)(1 - \gamma^2) - \left(\frac{h - Cr_0\gamma}{A}\right)^2. \quad (3.43)$$

Se indichiamo con  $f(\gamma)$  il secondo membro di (3.43),  $\gamma$  soddisfa la stessa equazione differenziale di un punto che si muove sotto l'azione di una forza posizionale (si veda l'equazione (3.26) del pendolo conico).

Consideriamo una sfera di centro  $O$  e raggio  $OG$  (come in Figura 3.8) e su essa tracciamo i paralleli ottenuti intersecando la sfera con i coni di centro

$O$  e apertura  $2\theta_1$  per uno e  $2\theta_2$  per l'altro (dove  $\cos \theta = \gamma$ ). La retta  $OG$  incontrerà la sfera in un punto che oscillerà percorrendo una curva sinuosa fra i due paralleli, toccando alternativamente l'uno e l'altro. Se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  coincidono, allora coincidono i due paralleli e si avrà un moto di precessione.



**Figura 3.8:** Il baricentro ha moto alternativamente ascendente e discendente.



# Bibliografia

- [1] D. Graffi, *Elementi di meccanica razionale*, Pàtron, Bologna, 1973
- [2] A. Strumia, *Meccanica razionale*, Nautilus, Bologna, 1996

## BIBLIOGRAFIA

---

# Ringraziamenti.

Desidero ricordare tutti coloro che mi hanno aiutato nella stesura della tesi con suggerimenti, critiche ed osservazioni: a loro va la mia gratitudine e riconoscenza.

Ringrazio anzitutto la professoressa Emanuela Caliceti, relatore. Avere una professoressa come lei è stata una fortuna: mi ha supportato ed aiutato a raggiungere questo traguardo. Grazie infinite!

Inoltre ringrazio Matteo, il mio grande amore, senza il quale non avrei potuto concludere serenamente questi ultimi anni universitari: anche se siamo lontani centinaia di Km, sei riuscito a tranquillizzarmi e a farmi tornare il sorriso nei momenti più difficili, e per questo non ti ringrazierò mai abbastanza.

Proseguo nel ringraziare Suor Lorenzana, Suor Paola, Suor Dorina, tutte le ragazze e il personale dell'Istituto Zoni che per me sono state come una seconda famiglia. In particolare vorrei ringraziare Simona e Marta con cui ho condiviso momenti bellissimi e hanno contribuito a rendere meno pesante la lontananza da casa.

Vorrei infine ringraziare le persone a me più care: i miei amici dell'università, gli zii, i cugini, nonna Diana (sei forte nonna!) e la mia famiglia, a cui questa tesi è dedicata. Grazie mamma, papà, Fede e Kris! Senza di voi tutto questo non sarebbe stato possibile! Mi avete sostenuto nei momenti più belli e soprattutto in quelli più bui, mi avete insegnato a non mollare mai e ad affrontare coraggiosamente qualsiasi situazione. Grazie di tutto!