Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Principi di indeterminazione e Micro buchi neri

Relatore:
Prof./Dott. Roberto Casadio

Presentata da:
Elias Lonidetti

Anno Accademico 2015/2016

Abstract

Lo scopo di questa tesi è di analizzare da un punto di vista fisico l'approccio a uno dei problemi irrisolti della fisica contemporanea, la gravità quantistica. Per fare ciò esporremo brevemente la relatività generale (teoria della gravitazione), e la meccanica quantistica, in particolar modo il suo principio fondativo, il principio di indeterminazione di Heisenberg, il quale deve essere modificato in regime di gravità quantistica. Queste due teorie ci servono per esporre il sistema fisico principale della gravità quantistica, i Micro-Buchi neri che saranno discussi nel capitolo 5. Infine ricaveremo il principio di indeterminazione generalizzato, ovvero come si modifica il principio di indeterminazione nella gravità quantistica.

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Lo scopo di questo scritto è quello di esporre il primo approccio a uno dei problemi irrisolti della fisica contemporanea: la gravità quantistica. Per iniziare esponiamo tre dei problemi ancora insoluti della fisica contemporanea, che possono essere risolti nell'ambito di una teoria della gravità quantistica.

Problma della gravità quantistica Questo problema è il principale che i fisici teorici si trovano ad affrontare in questo periodo storico, e consiste nel tentativo (a tutt'oggi irrisolto) di conciliare la teoria della gravitazione (la relatività generale) con la meccanica quantistica. Le due teorie devono essere conciliate poichè esse hanno un diverso dominio di definizione: la relatività si occupa dell'infinitamente grande, la meccanica quantistica dell'infinitamente piccolo. Tuttavia esiste un caso, ovvero un dominio di eventi fisici, in cui sono entrambe valide: i micro buchi neri,ovvero buchi neri molto piccoli, con raggio comparabile alla lunghezza di Planck (meccanica quantistica) ma molto massivi (relatività generale)

Teoria della grande unificazione Strettamente collegato al primo (la soluzione di uno comporterebbe la soluzione dell'altro) consiste nel tentativo di unificare in una sola teoria tutte le forze fondamentali dell natura. Nel contesto delle teorie di campo quantizzato, o teorie di campo di gauge, abbiamo l'unione qualitativa ma anche quantitativa di tre delle quattro interazioni fondamentali: elettromagnetica, debole e forte. Per la teoria della gravitazione invece non possiamo avere teorie di campo rinormalizzabili, e dunque, fondamentalmente, non abbiamo teorie fruibili per compiere previsioni sperimentali. Teorie di gauge per l'interazione gravitazionale sono state date, tutte non rinormalizzabili, ma che proponevano una nuova particella, la cui osservazione confermerebbe la possibilità di avere una teoria unificata: il gravitione, ovvero il bosone mediatore del campo gravitazionale.

Spiegare la materia oscura e l'energia oscura Solamente il 4 % del nostro universo è fatto di materia (quella che conosciamo). Il restante 96 % di cosa è fatto? È previsto che il 70% sia composto di energia oscura, e il 26% di materia oscura. La prima possibile conferma della presenza dell'energia oscura (prevista teoricamente sulla base di considerazioni cosmologiche) venne fornita nel 1967 dalla rilevazione dell'effetto di Sachs-Wolfe, ovvero un Blue-shift della radiazione cosmica di fondo. L'ipotesi dell'energia oscura servirebbe per giustificare la presenza di un campo anti-gravitazionale, che giustificherebbe l'espansione (confermata sperimentalmente) dell'universo. La materia oscura invece è una forma di materia vera e propria, la quale però non sente nessun tipo di interazione al di fuori di quella gravitazionale. Abbiamo dunque una materia impossibile da osservare poichè non risente di campi elettrici o magnetici e non emette radiazione. Perchè la materia oscura? In un contesto cosmologico come l'attuale non riusciremmmo a giustificare perchè i grandi ammassi di stelle o galassie intere, dovrebbero stare insieme, visto che la materia visibile (composta principalmente da barioni) non riesce a sviluppare un'interazione gravitazionale abbstanza forte.

Questi problemi ancora irrisolti, vengono studiati da molti fisici, e visto il grado di complessità il lavoro da fare sembra ancora molto lungo. Il problema principale da risolvere, oltre all'incompletezza e alle volte, inconsistenza delle teorie, è il grande ostacolo delle conferme sperimentali, anelate da molti fisici ma che per ora tardano ad arrivare a causa dell'inadeguatezze delle nostre tecnologie. Un enorme passo teorico tuttavia è stato fatto nella seconda metà del secolo scorso, con l'invenzione della teoria delle stringhe. Il percorso dunque da seguire è questo: a partire dalla teoria delle stringhe e dalla relatività generale possiamo compiere delle considerazioni consistenti sui sistemi fisici che ad oggi possono essere il problema più grosso ma anche il contesto in cui cercarne una soluzione. Il tentativo è dunque quello di spiegare a grandi linee la fisica dei buchi neri basandosi sulla relatività generale, esposta a sommi capi nel capitolo 4, sucessivamente parlare di micro buchi neri, nel capitolo 5, focalizzandoci in particolar modo su considerazioni termodinamiche, e infine, basandosi sul capitolo 3 riguardante la teoria delle stringhe (considerata esclusivamente da un punto di vista qualitativo), derivare in più modi il principio di indeterminazione generalizzato (GUP), il primo passo per tentare di creare una teoria della gravità quantistica che possa unificare le quattro forze fondamentali. Nel capitolo 2 inoltre diamo una breve illustrazione dei principi fondanti della meccanica quantistica, focalizzandoci sul *Principio di indeterminazione di Heisenberg* in modo da poterne utilizzare una forma nell'ultima sezione.

Capitolo 2

Principio di indeterminazione di Heisenberg

2.1 Principio di sovrapposizione

La meccanica quantistica è stata una delle più grandi rivoluzioni della fisica contemporana. Il merito principale di questa teoria è quello di aver modificato radicalmente il sistema di lavoro. La concezione fondante di questa teoria è l'indeterminazione, ovvero l'impossibilità di compiere misure certe, condizione che viene sostituita dal calcolo della probabilità di un evento. Alla base di questa concezione vi è il *principio di sovrapposizione*, dal quale verrà poi derivato il *principio di indeterminazione*. Per addentrarci nei meandri della meccanica quantistica dobbiamo iniziare dando qualche definizione.

i) Lo stato fisico di un sistema è l'insieme delle diverse condizioni fisiche o diverse modalità in cui possiamo trovare il sistema.

ii) Un osservabile di un sistema è una quantità numerica (distinta dalle altre) che posso misurare e che è legata a una precisa proprietà del sistema.

iii) Una misurazione è una data procedura sperimentale che serve per dare un valore a una data osservabile del sistema.

iv) Se pensiamo una data procedura di misurazione come un operatore in un determinato spazio funzionale, possiamo calcolare gli autovettori (autoket) e gli autovalori associati a questo operatore. Questi autovettori sono detti autostati.

Per analizzare le implicazioni del precedente elenco facciamo qualche altra considerazione qualitativa. Cominciamo col dire che le evidenze sperimentali ci mostrano che gli stati fisici in Meccanica Quantistica non possono determinare una misurazione precisa ma daranno semmai, una probabilità. Dunque ci troviamo di fronte a uno dei primi contrasti tra classico e quantistico: in fisica classica lo stato di ogni sistema determina il valore di un osservabile. In Meccanica Quantistica lo stato del sistema determina solo la probabilità dei possibili valori di un osservabile. Inoltre sappiamo che in Meccanica Quantistica il valore di un osservabile non è una quantità intrinseca del sistema ma che dipende da come viene eseguita la sua misurazione. Definiamo ora lo spettro di un osservabile X come il set $\sigma(\mathrm{X})$ di tutti i possibili risultati x di un processo di misurazione $P(s, X)$ per ogni possibile stato s. Le proprietà dello spettro $\sigma(\mathrm{X})$ sono due: in primo luogo lo spettro di un osservabile X consiste interamente di tutti i valori x tali che $x = x(s, X)$ per qualche autostato s di X. Questa proprietà è detta *saturazione spettrale* Come seconda proprietà abbiamo che, per ogni valore di x nello spettro $\sigma(\mathrm{X})$ l'autostato s di X tale che $x = x(s, X)$ non è unico in generale. Quando ciò accade, x è detto degenere.

In generale lo spettro di una variabile X può essere anche una composizione dei due tipi diversi di spettri.

Siamo dunque arrivati al punto fondante di questo paragrafo e possiamo esporre il *principio di sovrapposizione* nei seguenti punti:

a) Uno stato arbitrario s_i può essere combinato con un certo peso in una sovrapposizione volta a formare un nuovo stato s.

b) Lo stato s è intermedio tra gli stati che lo compongono s_i, tuttavia è più vicino a quegli stati s_i con peso maggiore.

c) Lo stato s può essere sovrapposizione di infinite combinazioni di s_i.

d) Se s è sovrapposizione degli stati s_i, ma quest'ultimi sono sovrapposizione degli stati s'_j, allora s è sovrapposizione degli s'_j Dunque gli stati di un sistema quantistico non sono mutualmente esclusivi come quelli di un sistema classico, ma possono essere sovrapposti per formare un nuovo stato, e così coesistere in quest'ultimo.

2.2 Principio di indeterminazione: formalismo operatoriale

2.2.1 Premessa: la meccanica quantistica e gli operatori.

La meccanica quantistica, formalizzata in un primo momento con integrali e operatori verrà poi rimodernata nella sua simbologia da P. Dirac, il quale propose di sostituire il simbolo di integrale con i simboli, più compatti, $\langle\cdot\rangle$ dette parentesi angolari o più semplicemente bra-ket. Detto ciò stiliamo un elenco dei principali oggetti che entrano in gioco in meccanica quantistica.

Funzione d'onda Funzione complessa delle variabili $\mathbf{r}$ e t, $\psi(\mathbf{r}, t)$ che descrive il moto di una particella. Si dice funzione d'onda a causa di uno dei postulati della Meccanica Quantistica: il dualismo onda-corpuscolo. Viene anche chiamata *vettore di stato* e si indica con $|\psi\rangle$. Le funzioni d'onda devono rispettare le equazioni di Schroedinger o, nel caso relativistico, di Dirac.

Operatore Una qualsiasi grandezza osservabile ha associato, in un determinato spazio di funzioni, un operatore Hermitiano che chiamiamo $\hat{F}$ che definisce l'azione di questa grandezza su una data funzione dello spazio degli stati appunto. Lo spazio delle funzioni su cui agisce un operatore è uno spazio di Hilbert, la cui base è composta dagli autostati dell'operatore. La media temporale $\langle F \rangle = \int \psi^* \hat{F} \psi d\tau$ definisce il valore di aspettazione per lo stato arbitrario ψ.

Autostato L'autostato di un dato operatore è l'autovettore associato all'autovalore dell'operatore e fisicamente rappresenta una base per tutti i possibili stati che il sistema può avere. Solitamente si indicano con $|\psi_i\rangle$.

Introduciamo un'altra definizione solo accennata in quelle precedenti: *Degenerazione degli operatori*. Un operatore si dice degenere quando ha almeno un autovalore degenere, ovvero un autovalore a cui corrispondono più autostati.

2.2.2 Il calcolo del Principio

Per eseguire un calcolo accurato del principio dobbiamo porre adeguate condizioni. Calcoleremo dapprima il principio su operatori arbitrari, e successivamente lo applicheremo agli operatori posizione e quantità di moto $\hat{x}$ e $\hat{p}$. Diamo ora una definizione di *Compatibilità* di due operatori.

Operatori compatibili Due operatori si dicono compatibili se il loro commutatore è nullo. In questo caso si dice che i due operatori commutano. Perchè operatori con questa proprietà si dicono compatibili? Qual'è il significato fisico ci compatibilità?

Operatori incompatibili Due operatori si dicono incompatibili se il loro commutatore è non nullo. Rimanogono da sciogliere gli stessi dubbi del caso precedente.

Cominciamo analizzando gli: **Operatori Compatibili**.
Per rispondere alle domande sollevate nella definizione scriviamo un teorema che lega il concetto di compatibilità al concetto di degenerazione, e relaziona gli operatori ai loro autostati (autoket).

Teorema 2.1. *Supponiamo che $\hat{A}$ e $\hat{B}$ siano due operatori legati a osservabili compatibili. Inoltre $\hat{A}$ ha autovalori non degeneri con $|a'\rangle$ base di autostati. Allora gli elementi di matrice $\langle a''|B|a'\rangle$ sono tutti diagonali.*
(Ricordiamo che gli elementi di matrice di $\hat{A}$ sono diagonali per definizoni e precisamente sono gli autovalori associati agli autoket $|a'\rangle$).

Dimostrazione. Uso la definizione di osservabili compatibili: $[\hat{A},\hat{B}]=0$ notiamo che:

$$\langle a''|[\hat{A},\hat{B}]|a'\rangle = (a''-a')(\langle a''|\hat{B}|a'\rangle) = 0$$

Dunque $\langle a''|\hat{B}|a'\rangle$ deve annullarsi a meno che $a''=a'$ e ciò dimostra la nostra tesi. $\square$

Gli elementi di $\hat{B}$ possono essere scritti come $\langle a''|\hat{B}|a'\rangle = \delta_{a'a''}\langle a'|\hat{B}|a'\rangle$ $\hat{A}$ e $\hat{B}$ possono essere rappresentati da matrici diagonali con lo stesso insieme di ket di base. Ora possiamo scrivere $\hat{B}$ come:

$$\hat{B} = \sum_{a''} |a''\rangle\langle a''|\hat{B}|a''\rangle\langle a''| \tag{2.1}$$

E supponiamo che quest'ultimo agisca su un autoket di $\hat{A}$:

$$\hat{B}|a'\rangle = \sum_{a''} |a''\rangle\langle a''|\hat{B}|a''\rangle\langle a''|a'\rangle. \tag{2.2}$$

Ma questa non è altro che l'equazione agli autovalori per l'operatore $\hat{B}$ di autovalore:

$$b' \equiv \langle a'|\hat{B}|a'\rangle. \tag{2.3}$$

Dunque il ket $|a'\rangle$ risulta essere un *ket simultaneo* per entrambi gli operatori. Questo è il profondo significato fisico della compatibilità di due operatori. Passiamo ora al caso di operatori incompatibili, che ci consentirà di arrivare alla formulazione finale del principio.

Operatori incompatibili

Per prima cosa dimostriamo che gli operatori incompatibili non hanno un insieme di completo di autoket simultanei. Procediamo per assurdo: supponiamo che esista un insieme di autoket simultanei tali che: |a',b'$\rangle = a'|a',b'\rangle$
$\hat{B}|a',b'\rangle = b'|a',b'\rangle$Allora:

$$\hat{A}\hat{B}|a',b'\rangle = \hat{A}b'|a',b'\rangle = a'b'|a',b'\rangle. \tag{2.4}$$

E analogamente:

$$\hat{B}\hat{A}|a',b'\rangle = \hat{B}a'|a',b'\rangle = b'a'|a',b'\rangle. \tag{2.5}$$

Dunque:

$$\hat{A}\hat{B}|a',b'\rangle = \hat{B}\hat{A}|a',b'\rangle \longrightarrow [\hat{A},\hat{B}]=0 \tag{2.6}$$

Ma ciò crea l'assurdo, contrasta l'ipotesi di incompatibilità per cui $[\hat{A},\hat{B}]\neq 0$

La relazione di indeterminazione

Dato l'operatore $\hat{A}$ definiamo l'operatore legato alla sua incertezza nel seguente modo:

$$\Delta\hat{A} = \hat{A} - \langle\hat{A}\rangle \tag{2.7}$$

Il valore di aspettazione di $\langle\Delta\hat{A}^2\rangle = \langle\hat{A}^2\rangle - \langle\hat{A}\rangle^2$ ci da' una definizione di dispersione o praticamente di varianza.

Teorema 2.2. *La relazione di indeterminazione, per due operatori $\hat{A}$ e $\hat{B}$ e le relative disperisoni $\Delta\hat{a}$ e $\hat{\Delta}$ che siano tra loro incompatibili è data da:*

$$\langle\Delta\hat{A}^2\rangle\langle\Delta\hat{B}^2\rangle \geq \frac{1}{4}\ |\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle|^2 \tag{2.8}$$

Per la dimostrazione abbiamo bisogno di alcuni lemmi.

Lemma 2.1. *La disuguaglianza di Schwarz*

$$\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle \geq |\langle\alpha|\beta\rangle|^2 \tag{2.9}$$

che è analoga a:

$$|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 \geq |\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2$$

nello spazio euclideo reale.

Dimostrazione. Notiamo che:

$$(\langle\alpha| + \lambda^*\langle\beta|)\cdot(|\alpha\rangle + \lambda|\beta\rangle) \geq 0$$

dove λ è un numero complesso. La disuguaglianza deve valere anche se λ è posto uguale a $-\frac{\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle}$:

$$\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle - |\langle\alpha|\beta\rangle|^2$$

che equivale alla disuguaglianza di Schwarz. □

Lemma 2.2. *Il valore di aspettazione di un operatore Hermitiano è puramente reale.*

Si dimostra banalmente considerando che:

$$\langle a''|\hat{B}|a'\rangle = \langle a'|\hat{B}|a''\rangle^*$$

per ogni dato $\hat{B}$ di autovalori a' e a''.

Lemma 2.3. *Il valore di aspettazione di un operatore anti-hermitiano definito da $\hat{C} = -\hat{C}^\dagger$ è un immaginario puro.*

Dimostrazione. La dimostrazione è ovvia anche in questo caso e la omettiamo (sempre basata sulle relazioni di hermiticità degli operatori. □

Dimostrazione del Teorema 2.2. Utilizziamo il Lemma 1 ponendo:

$$|\alpha\rangle = \Delta\hat{A}|\ \rangle, \quad |\beta\rangle = \Delta\hat{B}|\ \rangle \tag{2.10}$$

dove il ket vuoto $|\ \rangle$ evidenzia il fatto che le nostre considerazioni si applicano a qualsiasi ket, allora otteniamo:

$$\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle \geq |\langle\Delta\hat{A}\Delta\hat{B}\rangle|^2 \tag{2.11}$$

avendo usato l'hermiticità di $\Delta\hat{A}$ e $\Delta\hat{B}$. Ora vogliamo valutare il lato destro delle (2.10) (che saranno poi inserite nella disuguaglianza di Schwarz del Lemma 1) e dunque notiamo che:

$$\Delta\hat{A}\Delta\hat{B} = \frac{1}{2}[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}] + \frac{1}{2}\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\} \tag{2.12}$$

dove il commutatore $[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}]$ è chiaramente anti-hermitiano $(([\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}])^\dagger = \hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B} = -[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}])$
Invece l'anticommutatore $\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\}$ è chiaramente hermitiano, per cui:

$$\langle\Delta\hat{A}\Delta\hat{B}\rangle = \frac{1}{2}\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle + \frac{1}{2}\langle\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\rangle. \tag{2.13}$$

Con il primo termine a secondo membro che è un immaginario puro, e il secondo termine che è reale puro, usando i lemmi 2 e 3. Dunque il lato destro della Disuguaglianza di Schwarz è dato da:

$$|\langle\Delta\hat{A}\Delta\hat{B}\rangle|^2 = \frac{1}{4}|\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle|^2 + \frac{1}{4}|\langle\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\}\rangle|^2. \tag{2.14}$$

La dimostrazione della (2.8) può dirsi completata poichè la relazione (2.14) è una condizione più restrittiva di quello che dobbiamo dimostrare, per cui omettendo il termine legato all'anti-commutatore rendiamo più forte la relazione di disuguaglianza. □

Coordinate e momenti, il principio di indeterminazione
Per arrivare a un caso pratico della realtà, basta applicare le relazioni di indeterminazione calcolate per due generici operatori nei precedenti paragrafi, a operatori concreti e fruibili per il calcolo di osservabili quantistici. Dato dunque l'operatore posizione $\hat{x}$ definiamo l'operatore momento $\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}$. x e $\frac{d}{dx}$ hanno la seguente relazione di commutazione:

$$[\hat{x}, \frac{d}{dx}]\psi(x) = (x\frac{d}{dx} - \frac{d}{dx}x)\psi(x) = x\psi'(x) - (\psi(x) + x\psi'(x)) = -\psi(x) \tag{2.15}$$

Dunque $\hat{x}$ e $\hat{p}$ hanno commutatore uguale a:

$$[\hat{x}, \hat{p}]\psi(x) = -i\hbar[x, \frac{d}{dx}] = -i\hbar(-\psi(x)) = i\hbar\psi(x). \to [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar. \tag{2.16}$$

Dunque sono operatori incompatibili, per cui possiamo applicare i conti della sezione precedente. Ora inseriamo le relazioni tra i due operatori varianza ($\Delta\hat{x} = \hat{x} - \langle\hat{x}\rangle$ e $\Delta\hat{p} = \hat{p} - \langle\hat{p}\rangle$) nei calcoli precedenti e otteniamo:

$$\langle\Delta\hat{x}^2\rangle\langle\Delta\hat{p}^2\rangle \geq \frac{1}{4}\,|\langle[\hat{x},\hat{p}]\rangle|^2 \tag{2.17}$$

Essendoci già calcolati la relazione di commutazione tra i due operatori possiamo scrivere una delle forme del *Principio di indeterminazione di Heisenberg*

$$\langle\Delta\hat{x}^2\rangle\langle\Delta\hat{p}^2\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4} \tag{2.18}$$

che implica (estraendone la radice e omettendo i valori medi, intendendo con Δx e Δp il valore d'aspettazione):

$$\Delta x\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{2.19}$$

Abbiamo dimostrato, partendo solo ed esclusivamente dall'algebra degli operatori il principio di sovrapposizione e conseguentemente il principio di indeterminazione.

Capitolo 3

Teoria delle stringhe

3.1 Gravità quantistica

Come discusso nell'introduzione uno dei problemi ancora insoluti della fisica contemporanea è quello della gravità quantistica. Meccanica quantistica e relatività generale sono due teorie buone, poichè fanno predizioni stupefacentemente corrette della reltà fisica. Tuttavia sono inconsistenti tra di loro. Finchè restiamo nel dominio di definizione dell'una o dell'altra non si pone alcun tipo di problema. Ma se ci mettiamo nel caso in cui oggetti molto massivi sono confinati in volumi molto piccoli (e dunque soggetti a fluttuazioni quantistiche) allora incappiamo nel problema di definizione di queste due teorie. D'altro canto è auspicabile che esista un'unica radice che accomuni tutti i tipi di forze, quelle elettrodeboli, quelle forti e quelle gravitazionali. Siamo quindi nel caso che verrà analizzato lungamente in seguito: I micro-buchi neri. Per il problema della gravità quantistica sono state date diverse soluzioni. Le due più famose sono: la gravità quantistica a loop e la teoria delle stringhe. In questa sede analizzermo solo la seconda di queste, senza dimenticare il fatto che la comunità dei fisici è al momento divisa in due.

3.2 Perchè le stringhe? Un breve racconto.

Che cos'è una stringa? L'idea fondamentale della teoria è quella di pensare alla materia, e a tutto ciò di cui è composto l'universo come a un ammasso di cordicelle, fatte tutte nello stesso modo, che nel macroscopico si differenziano come comportamento e non come tipologia. Il contrasto con la meccanica quantistica deriva appunto da questa universalità che caratterizza le stringhe. Se nel modello standard avevamo differenti tipologie di particelle:

Fermioni divisi in quark e leptoni a loro volta divisi in sei diverse tipologie per ogni categoria. Queste sono le particelle materiali, tutte la materia è composta da queste 12 particelle

Bosoni divisi in 4 tipologie e associate ciascuna a una tipologia di interazione fondamentale (esclusa l'interazione gravitazionale il cui bosone, il gravitone, è stato previsto sperimentalmente ma mai osservato). Grazie a questi bosoni possiamo creare tutti i tipi di campo, e tutte le forze associate a quest'ultimi.

Ora abbiamo solamente la stringa, la quale in base alle sue vibrazione ci dice come questa si manifesterà nel mondo macroscopico. Fin qui nulla di strano. I fisci inventano sempre modelli e quest'ultimi possono essere più o meno buoni. Nel caso della teoria delle stringhe ancora non è chiaro se il modello sia o meno un buon interfaccia per la realtà fisica o sia solo una splendida teoria matematica. Per entrare nello specifico dobbiamo partire illustrando da dove nasce la teoria. Il primo a pensare ad un oggetto a una dimensione, come ente fondamentale e primitivo per le interazioni fu G. Veneziano il quale cercò, alla fine degli anni sessanta del secolo scorso, di applicare questa idea di stringa all'interazione forte degli adroni. I risultati furono fallimentari, nel senso che la teoria non riuscì mai a ottenere i risultati previsti in maniera sperimentale. Nel 1974 J. Schwarz et al. riuscirono a prevedere, grazie a questo modello a stringhe vibranti, il comportamento della particella mediatrice del campo gravitazionale: il gravitone. Viene così stipulata sull'onda di questi successi (*unicamente teorici*) la prima vera teoria delle stringhe: **La teoria della stringa bosonica**. Successivamente vennero stipulate altre 4 teorie che comprendevano tutti i casi possibili osservabili, ovvero tutte le interazioni e tutte le particelle sono tuttora comprese in questo insieme di modelli detto ***M-teoria***
Ora la risposta alla domanda iniziale, *Perchè le stringhe?*, è la seguente, sulla base delle considerazioni precedenti:

1. Gravità. Ogni teoria delle stringhe consistente deve prevedere teoricamente uno stato a spin 2 senza massa, dunque un bosone, il quale è chiamato *gravitone*, ovvero il bosone associato all'interazione gravitazionale.

2. Una consistente teoria della Gravità quantistica, perlomeno una teoria perturbativa. I tentativi fatti fino alla teoria delle stringhe (ma anche dei loop) di creare una teoria di campo quantistica gravitazionale, con i paradigmi delle canoniche teorie di campo era stata fallimentare poichè portava a un problema di rinormalizzazione.

3. Grande unificazione. La teoria delle stringhe produce gruppi di simmetria abbastanza grandi per comprendere e ottenere tutto il Modello Standard.

4. Dimensioni Extra. La teoria delle stringhe richiede un numero finito di dimensioni.

5. Supersimmetria. Una teoria delle stringhe consistente richiede la supersimmetria dello spaziotempo.

6. Non ha parametri liberi. La teoria delle stringhe non contiene costanti da aggiustare.

7. Unicità. Una teoria delle stringhe consistente, è unica per ogni evento della realtà.

Rispondendo a tutte queste domande otteniamo una teoria che descriva ogni tipo di interazione e particella dell'universo, e, se dimostrata sperimentalmente, potremmo ottenere un modo, un modello, per fare qualsiasi tipo di previsione.

3.3 *M-teoria*: Un insieme di teorie

La *M-teoria* è costituita dalle seguenti sotto teorie valide ciscuna per un determinato tipo di dominio fisico di definizione.

Teoria di stringa Bosonica Teoria a 26 dimensioni che riguarda solamente i bosoni e non comprende i fermioni. Riguarda quindi solo le forze e non la materia. L'incongruenza maggiore è la previsione di una particella a massa negativa: il *Tachione*.

Teoria di stringa di tipo I Teoria a 10 dimensioni, ci da' la supersimmetria tra forze e materia, prevede sia stringhe aperte sia chiuse, non sono previsti i tachioni, e ha come gruppo simmetrico $SO(32)$.

Teoria di stringa di tipo II**A** Teoria a 10 dimensioni, ci da' la supersimmetria tra forza e materia, prevede solo stringhe chiuse, nessun tachione, e prevede fermioni privi di massa con spin in entrambe le direzioni (non-chirali)

Teoria di stringa di tipo II**B** Teoria a 10 dimensioni, ci da' la supersimmetria tra forza e materia, prevede solo stringhe chiuse, nessun tachione, e prevede fermioni privi di massa con spin in un'unica direzione (chirali)

Teoria di stringa di tipo HO Teoria a 10 dimensioni, ci da' la supersimmetria tra forza e materia, prevede solo stringhe chiuse, eterotiche, ovvero le stringhe che si muovono verso destra sono diverse da quelle che si muovono verso sinistra, nessun tachione, e ha come gruppo simmetrico $SO(32)$

Teoria di stringa di tipo HE Teoria a 10 dimensioni, ci da' la supersimmetria tra forza e materia, prevede solo stringhe chiuse, eterotiche, nessun tachione, ha come gruppo simmetrico $E_8 x E_8$.

Ognuna di queste teorie è stata a lungo candidata per essere la teoria del tutto. Ogni teoria però lavora bene nel suo dominio, dunque il problema è rimasto insoluto per lungo tempo; fino a quando non ci si è resi conto che in realtà tutte queste precedenti teoria di stringa concorrevano allo stesso obiettivo, e che dunque erano diverse sfaccettature della stessa teoria: *La M-teoria* appunto. *Ma come interagiscono queste 6 diverse teorie?* Grazie all'introduzione di un nuovo concetto, quello di Dualità. Le varie teorie di stringa e in particolar modo di superstringa si trasformano le une nelle altre grazie delle trasformazioni dette di *Dualità*, appunto.

3.4 Dimensioni attorcigliate

Come sono fatte le stringhe? O meglio, qual'è la loro formulazione matematica? In che spazio si trovano quest'ultime? La necessità delle già citate dimensioni in più nasce appunto a causa del tentativo di preservare delle simmetrie. In fisica, grazie al teorema di Noether troviamo una correlazione tra simmetrie e integrali primi del moto. Ovvero se una quantità viene conservata rispetto a trasformazioni di simmetria, allora questa quantità avrà associata un integrale primo del moto, ovvero una grandezza conservata dal sistema. Le dimensioni necessarie per ottenere ciò, nella fisica delle stringhe sono molte di più delle consuete 4 in cui siamo abituati a vivere. Per la teoria di stringa bosonica sono necessarie 26 dimensioni di cui 25 spaziali e 1 temporale. La struttura di questo spazio prevede appunto che le 22 dimensioni spaziali extra si arrotolino a formare uno spazio a forma toroidale. Il concetto di dimensioni extra è proprio questo. Le dimensioni si arrotolano l'una nell'altra fino a ridursi alle tre percepite dai sensi umani. Spieghiamo ciò con un banale esempio. Prendiamo uno spazio a una sola dimensione e immaginiamocelo come un filo da pesca. Il filo visto da lontano può essere pensato come una retta (poniamo, per approssimazione, infinita) senza dimensioni oltre alla profondità X. Tuttavia prendendone una sezione possiamo osservare che insite in questo filo unidimensionale ci sono ulteriori due dimensioni, quelle definite dalla superficie del cerchio che forma la sezione del filo. Dunque il filo unidimensionale visto da lontano in realtà è, come ci si aspetta di tutte le cose nel nostro universo, tridimensionale, e questa dimensionalità è data appunto dal prodotto di $\mathrm{R} \times \mathrm{R}^2$ in cui R è la coordinata X, la profondità del filo, R^2 è la superficie del cerchio. Questo appunto è il concetto di dimensione extra. Lo spazio in cui vivono le superstringhe (le successive teorie nell'elenco precedente, I,IIA,IIB,HO,HE) è formato da 6 dimensioni spaziali extra. Questo spazio, che potrebbe essere lo spazio in cui viviamo, è ottunuto dal prodotto $\mathbf{M}\times V$, dove, $\mathbf{M}$ è una varietà quadridimensionale, il nostro consueto spaziotempo, mentre V è detta varietà di Kalabi-Yau, dal nome dei loro scopritori. La varietà differenziale V è a 6 dimensioni (quelle mancanti), ed è una varietà compatta. Le sei dimensioni nascoste dunque stanno in questa varietà V.

3.5 Realtà o speculazione?

« L'inconfutabilità di una teoria non è (come spesso si crede) un pregio, bensì un difetto. Ogni controllo genuino di una teoria è un tentativo di falsificarla, o di confutarla. La controllabilità coincide con la falsificabilità; alcune teorie sono controllabili, o esposte alla confutazione, più di altre; esse per così dire, corrono rischi maggiori.» K. Popper.
Le prime critiche mosse alla teoria delle stringhe sono di uno stampo epistemologico. Si pone il problema, come per tutte le teorie scientifiche della verificabilità. In secondo luogo si pone il problema, strettamente collegato, della falsificabilità della teoria. La

verificabilità della teoria ha come fronte di lavoro quello della radiazione cosmica di fondo, in particolar modo nel tentativo di misurarne le anisotropie previste dalla teoria delle stringhe. Un altro fronte di ricerca (o meglio, un'area di lavoro sperimentale) è il tentativo di misurare e isolare un gravitone, (la cui presenza non dimostrerebbe direttamente la teoria, ma le darebbe basi più solide). Per questa misurazione servono energie molto alte, ma la speranza è che negli anni LHC possa dare questi risultati. Uno dei caratteri fondamentali di una teoria scientifica è invece il requisito popperiano della falsificabilità cioè della capacità di produrre almeno un enunciato da cui dipenda l'intera teoria e questo potrebbe essere problematico se si considera la teoria delle stringhe solo come teoria di grande unificazione. A oggi uno dei problemi principali della fisica è quello di invetigare sul problema della gravità quantistica. La speranza è che si tenti di ricercare sempre di più per ottenere qualche risultato.

Capitolo 4

Buchi Neri e raggio di Schwarzshild

4.1 Relatività Generale

Prima di iniziare a parlare dei buchi neri e delle loro caratteristiche descriviamo in poche pagine i principi più importanti della relatività generale.

4.1.1 Principi della Relatività generale.

La relatività generale nasce come naturale estensione della relatività ristretta, e ha come approccio principale quello di stipulare una teoria della gravitazione, coerente con la meccanica della relatività ristretta. L'assunto di base è che la gravitazione sia fondamentalmente una manifestazione del comportamento intrinseco della geometria dello spazio-tempo. Per dimostrare questa concezione abbiamo bisogno di alcuni principi.

Principio di generale relatività *Tutte le leggi della fisica sono le stesse per tutti i sistemi di riferimento (per tutti gli osservatori).*
Questo principio stipula l'equivalenza assoluta di ogni osservatore, e si pone in discordanza con la relatività galieiana e la relatività ristretta, per i quali esistono degli osservatori privilegiati, ovvero quelli inerziali.

Principio di equivalenza *Per ogni oggetto fisico, abbiamo una equivalenza di massa inerziale e massa gravitazionale.*
Questo principio ci mostra un risultato molto importante nell'ottica delle teorie delle interzioni fondamentali: non solo la gravitazione fa parte di quelle forze puramente legate al movimento, ma oltretutto la carica dell'interzione gravitazionale (la quarta interazione fondamentale) è proprio la massa. Un altro importante risultato è dato dal fatto che se le masse sono identiche un corpo accelerato non riesce a distinguere se quell'accelerazione sia data o meno dall'attrazione gravitazionale. La differenza è visibile solo a un osservatore non solidale con il corpo. Per illustrare

questo principio A. Einstein utilizzò il famoso esperimento mentale dell'ascensore. Poniamo di essere degli osservatori posti all'interno di un ascensore inizialmente in quiete. A un certo punto ci sentiremo spinti verso il pavimento di questo ascensore, ma noi non riusciremo a stabilire se a produrre questa spinta sia stata l'attrazione di un corpo esterno posto sotto di noi o se sia stata la nostra inerzia che risponde a una forza che traina l'ascensore verso l'alto. Questo dubbio ci permette di dire che la gravità dipende da una trasformazione della metrica. Da questo esperimento mentale deduciamo che il corpo in caduta libera non può essere un sistema di riferimento assoluto, ma seguirà le linee di forza di gravità e dunque sarà un sistema locale nello spazio-tempo. Questa proprietà ci consente di dire, utilizzando le nozioni della geometria differenziale, che la metrica associata a un sistema in caduta libera tenderà localmente alla metrica di Minkowski (la metrica dei sistemi inerziali), e dunque devono esistere i corrispondenti vettori di Killing tangenti al punto P. Grazie a questi vettori di Killing posso quindi costruirmi un sistema localmente inerziale. Questi sistemi di riferimento locali nell'intorno U_P del punto, sono detti Gaussiani e in essi sono date le solite simmetrie della relatività ristretta. Per riassumere queste considerazioni da un punto di vista matematico, diciamo che i corpi in caduta libera sono veri osservatori inerziali per i quali valgono

$$\pounds_{e_\mu} \simeq \partial_\mu \simeq \nabla_\mu \equiv \nabla_{\partial_\mu} \tag{4.1}$$

Principio di covarianza generale *Le leggi fisiche per un sistema di riferimento generale sono ottenute dalle leggi della relatività speciale sostituendo le quantità tensoriali del gruppo di Lorentz quantità tensoriali della varietà Spazio-tempo.*

In pratica questo principio consiste nel reinterpretare le quatità tensoriali del gruppo di Lorentz come nuove quantitṗiù generali, e dunque di operare le seguenti sostituzioni:

$$\eta_{\mu\nu} \longrightarrow \mathrm{g}_{\mu\nu} \tag{4.2}$$

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial^\mu} \longrightarrow \nabla_\mu \tag{4.3}$$

4.1.2 Equazioni di campo

Per calcolare le equazioni di campo abbiamo bisogno di definire qualche nuovo oggetto sia matematico, sia fisico, per poi mescolarli insieme per ottenere le suddette. Cominciamo quindi con un semplice calcolo basato esclusivamente sul principio di equivalenza. Poniamo di avere un corpo in caduta libera. Per il principio di equivalenza dev'essere sempre possibile avere un sistema di riferimento per il quale:

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0$$

dove ξ^α descrive il quadrivettore posizione, e τ il tempo proprio. Allora $d\tau^2$ è dato da:

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$$

dove $\eta_{\alpha\beta}$ è la metrica di Minkowski. Supponiamo ora di voler ricavare le equazioni del moto per un sistema di coordinate generico x^μ. Avremo dunque delle equazioni di trasformazione per passare dall'uno all'altro sistema:

$$\frac{d^{2\mu}}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \tag{4.4}$$

dove $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ sono detti simboli di Christoffel o connessione affine e sono appunto definiti:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \tag{4.5}$$

Γ, per quanto ne usi la stessa notazione, non segue l'algebra dei tensori. Identicamente possiamo esprimere il tempo proprio in funzione delle nuove coordinate spaziali:

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{4.6}$$

con la quantità $g_{\mu\nu}$ che definisce la metrica nelle nuove coordinate

$$g^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \tag{4.7}$$

Dunque confrontando le ultime equazioni scritte otteniamo un'espressione valida per Γ nella forma:

$$\Gamma^\sigma_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \{ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\mu} \} \tag{4.8}$$

Fondamentalmente, per capire come gli oggetti si muovono in un sistema di riferimento qualsiasi ci basta conoscere la connessione affine, dunque serve calcolarci la metrica. Lo scopo delle equazioni di campo della relatività generale è appunto quello di calcolare la metrica $g_{\mu\nu}$ partendo da quantità tensoriali che ci esprimano la quantità di materia presente in un dato sistema. Per scrivere le equazioni, e in seguito darne una soluzione, abbiamo bisogno in sostanza di definire quali siano le quantità tensoriali che entrano in gioco nelle equazioni di campo.

Tensore metrico e tensore energia-impulso

Dall'invarianza di ds^2 ($ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$) segue che il tensore $g_{\mu\nu}$ è un tensore simmetrico covariante. Vale inoltre la seguente relazione:

$$g_{\alpha\mu} g^{\mu\beta} = \delta^\alpha_\beta \tag{4.9}$$

Data questa metrica definiamo ora il suo determinante:

$$g \equiv det g_{\mu\nu} \tag{4.10}$$

La legge di trasformazione dell'elemento di volume ci dà la relazione:

$$d\tau' = \int dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 \tag{4.11}$$

e in base al teorema di Jacobi:

$$d\tau' = \left\| \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} \right\| d\tau \tag{4.12}$$

Componendo tra loro le ultime due equazioni otteniamo:

$$\sqrt{g'} d\tau' = \sqrt{g} d\tau \tag{4.13}$$

Con la definizione di questo tensore metrico abbiamo un doppio risultato; il tensore $g_{\mu\nu}$ descrive sia il continuo spazio-temporale (la varietà differenziabile di cui è la metrica) sia l'interazione gravitazionale. La trasformazione dal sistema di coordinate localmente inerziale, a questo sistema più generale ci esprime quindi la modificazione data dall'effetto della materia-energia sullo spazio-tempo. Esistono inoltre dei vettori di campo che su uno spazio di Riemann generano le isometrie, e questi vettori sono detti vettori di Killing. Questi diffeomorfismi conservano la metrica e soddisfano:

$$K_{a;b} + K_{b;a} = 0 \tag{4.14}$$

Facendo una piccola anticipazione diciamo che la metrica di Schwarschild avrà sicuramente un vettore di Killing di tipo tempo, poichè questa è indipendente dalla coordinata temporale. Definiamo ora il *Tensore energia-impulso* $T_{\mu\nu}$ che racchiude in sé l'energia e la quantità di moto. Visto che energia e quantità di moto devono conservarsi sappiamo che la divergenza di questo tensore dev'essere nulla. La divergenza definita per i tensori è data da:

$$V^{\mu}_{;\mu} = \frac{V^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} V^{\lambda}$$

Dunque $T_{\mu\nu}$ deve soddisfare:

$$0 = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} T^{\lambda}. \tag{4.15}$$

L'ultmo elemento che ci serve per definire le equazioni di campo è il concetto di curvatura, strettamente legato al concetto di geodetica.

Curvatura e geodetiche

Il concetto di geodetica nasce, come per la meccanica classica, da un principio variazionale. Il principio variazionale in questione che serve a stabilire quali siano le traiettorie privilegiate di un moto (che segue la metrica precedente), è dato dalla seguente equazione

$$\delta\{\int_{P_1}^{P_2} ds\} = \delta\{\int_{P_1}^{P_2} \sqrt{g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}}\} \tag{4.16}$$

Introducendo un parametro λ che identifica le curve passante per i due punti e integrando per parti otteniamo la seguente equazione per la geodetica:

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{ds^2} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds} \tag{4.17}$$

Dato il concetto di geodetica definiamo ora il tensore di curvatura, senza esplicitarne il suo calcolo (si deve derivare in maniera covariante la metrica e poi sostituire la connessione affine). Il tensore ottenuto è detto, dal nome degli scopritori, ***Tensore di Riemann-Christoffel*** ed ha la forma:

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa} \equiv \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{dx^{\kappa}} - \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}}{dx^{\mu}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\kappa}\Gamma^{\lambda}_{\nu\eta}. \tag{4.18}$$

Il tensore di curvatura è in relazione con la metrica, più in specifico sappiamo che l'annullarsi del tensore di Riemann è condizione necessaria affinchè in un appropriato sistema di riferimento le componenti del tensore metrico possano essere costanti, ovvero si possa avere la relatività ristretta come approssimazione di quella generale, per una regione finita dello spazio-tempo. Usando una proprietà dei tensori posso scrivere in maniera covariante il tensore di curvatura:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g_{\lambda\sigma}R^{\sigma}_{\mu\nu\kappa} \tag{4.19}$$

Ora calcoliamo la contrazione del second'ordine del tensore di curvatura, chiamata anche **Tensore di Ricci**:

$$R_{\mu\kappa} = g^{\nu\lambda}R_{\lambda\mu\nu\kappa} \tag{4.20}$$

Infine costruiamone lo scalare, detto appunto **Scalare di Curvatura**:

$$R \equiv -g^{\lambda\nu}g^{\mu\kappa}R_{\mu\lambda\nu\kappa} = g^{\lambda\nu}g^{\mu\kappa}R_{\lambda\mu\nu\kappa} \tag{4.21}$$

Ora esplicitiamo le principali proprietà del tensore di curvatura:

Simmetria

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu} \tag{4.22}$$

Antisimmetria

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa} = R_{\lambda\mu\kappa\nu} = +R_{\mu\lambda\kappa\nu} \tag{4.23}$$

Ciclicità

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0 \tag{4.24}$$

Identità di Bianchi

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} + R_{\lambda\mu\eta\nu;\kappa} + R_{\lambda\mu\kappa\eta;\nu} = 0 \tag{4.25}$$

Equazioni di campo

A questo punto siamo in grado di ricavare le equazioni di campo grazie alle quali potremo ricavarci il tensore metrico. Il nostro scopo è quello di risolvere le equazioni di campo per una metrica a simmetria sferica, soluzione che ci descrive la metrica in prossimità di un buco nero, ovvero la metrica di Schwarschild. Per prima cosa cerchiamo il tensore metrico in funzione del potenziale newtoniano, dunque uguagliamo la (4.4) (in approssimazione di campo debole, $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ con $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$, e stazionario, in cui tutte le derivate di $g_{\mu\nu}$ si annullano) con la seconda legge della dinamica, e tenendo conto della (4.8) otteniamo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2}\nabla h_{00} = -\nabla\phi \Longrightarrow h_{00} = -2\phi + cost \tag{4.26}$$

e imponendo che h_{00} e il potenziale siano nulli all'infinito si ottiene

$$h_{00} = -2\phi \Longrightarrow g_{00} = -(1 + 2\phi) \tag{4.27}$$

A questo punto utilizziamo come modello l'equazione di Poisson per il potenziale newtoniano

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \tag{4.28}$$

dove G è la costante di gravitazione universale e ρ è la densità di massa. Passiamo ora questa equazione al caso relativistico sapendo che la densità di massa è la 00-componente del tensore energia-impulso $T_{00} = \rho$, e sostituendo la (4.26) nella (4.27) otteniamo

$$\nabla^2 g_{00} = -8\pi G T_{00}. \tag{4.29}$$

Dato che questa equazione non è Lorentz-invariante è lecito supporre che esista un tensore $G_{\mu\nu}$ (che sia combinazione lineare delle componenti del tensore metrico e delle sue derivate) tale che:

$$G_{\mu\nu} = -8\pi T_{\mu\nu} \tag{4.30}$$

Questa equazione valida per i campi deboli in realtà è del tutto generale grazie al principio di equivalenza. Per capire come si comporti questo nuovo tensore G ne definiamo le proprietà:

1. $G_{\mu\nu}$ è per definizione un tensore.
2. $G_{\mu\nu}$ contiene termini solo fino al secondo ordine di derivazione del tensore metrico, ed è lineare nei termini di secondo grado di derivazione e quadratico in quelli di primo
3. Visto che $T_{\mu\nu}$ è simmetrico, lo è anche $G_{\mu\nu}$.
4. Visto che $T_{\mu\nu}$ si conserva per derivazione covariante, per $G_{\mu\nu}$ vale:
$$G^{\mu}_{\nu;\mu} = 0 \tag{4.31}$$
5. Per i campi deboli e stazionari, la componente 00 si riduce a, in limite non relativistico:
$$G_{00} \cong \nabla^2 g_{00} \tag{4.32}$$

Dalle prime due condizioni $G_{\mu\nu}$ sarà nella forma:
$$G_{\mu\nu} = AR_{\mu\nu} + Bg_{\mu\nu}R. \tag{4.33}$$
Ora in base al 4. e applicando l'identità di Bianchi si avrà:
$$G^{\mu}_{\nu;\mu} = \left(\frac{A}{2} + B\right)R_{;\nu} = 0 \Longrightarrow R_{;\nu} = 0 \cup \left(\frac{A}{2} + B\right) = 0 \tag{4.34}$$
La soluzione $R_{;\nu} = 0$ presuppone una distribuzione non omogenea di materia, e dunque va scartata. Rimane solo da considerare la soluzione $B = -\frac{A}{2}$:
$$G_{\mu\nu} = A\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) \tag{4.35}$$
Posso determinare la costante A imponendo la 5. condizione ricordando che nella (4.19) le derivate temporali sono tutte nulle e dunque risulta $A = 1$.
Siamo ora in grado di scrivere *l'equazione di campo di Einstein*
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi GT_{\mu\nu}. \tag{4.36}$$
Ricordando la (4.21) possiamo ottenere una forma contratta di questa equazione:
$$R = 8\pi GT^{\mu}_{\mu} \tag{4.37}$$
La (4.36) è un'equazione tensoriale, dunque sarebbero 16 equazioni, però a causa di simmetrie se ne ottengono di fatto solo 10 indipendenti. Le equazioni alle derivate parziali che risolvono la (4.36) contengono delle funzioni che si possono semplificare imponendo una scelta del sistema di coordinate adeguata. Una di queste scelte, detta delle coordinate armoniche, è:
$$\Gamma^{\lambda} \equiv g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0.$$
Posso separare il tensore energia-impulso in due componenti, una legata al campo gravitazionale, una legata alla materia stessa.

4.1.3 Test classici della Relatività Generale

Abbiamo tre test classici per confermare sperimentalmente la Relatività generale, che riassumiamo di seguito brevemente.

Precessione del Perielio di Mercurio A partire dalla fisica newtoniana sappiamo che i pianeti ruotano attorno al sole seguendo un'orbita ellittica, e il sole è un fuoco dell'ellisse. Il punto di massimo avvicinamento al sole è detto Perielio. Ci sono un certo numero di fattori del nostro sistema solare che causano uno spostamento di questo punto, altrimenti fisso. Tale spostamento è detto di precessione ed è dovuto principalmente all'attrazione gravitazionale degli altri pianeti. Già dal 1859 si osservò un tasso anomalo di precessione del perielio di Mercurio, tasso in disaccordo con le previsioni della meccanica celeste di Newton. Il disaccordo inizialmente osservato di 38" (arcosecondi) viene poi ristabilito a 43". Vennero stipulate diverse teorie per ottenere questa discrepanza osservata. Tuttavia la soluzione venne data solo grazie alla teoria della relatività generale, che spiega questo discrepanza correlando gravitazione e curvatura dello spaziotempo.

Deflessione della luce solare Einstein nella teoria della relatività fu il primo a stimare correttamente la deflessione della luce da parte di oggetti massivi; un tentativo era già stato fatto in precedenza da J. G. von Soldner nel 1804. I tentativi teorici prima della relatività tuttavia erano completi a metà. I calcoli fatti da Einstein si rivelarono giusti quando, nel 1919, A. Eddington osservò precisamente la deflessione della luce grazie a una eclissi di sole.

Red-shift gravitazionale Fotoni emessi da un corpo massivo (o in prossimità di esso), dunque in un campo gravitazionale, perdono energia. Questa perdita porta la loro frequenza verso il rosso, ovvero a frequenze minori. Questo effetto detto appunto di *Red-shift* venne previsto da Einstein grazie al principio di equivalenza. L'osservazione sperimentale corretta e definitiva di questo fenomeno fu fatta nel 1959 da Pound e Rebka i quali usarono dei Raggi γ emessi lungo il palazzo di Harward alto 72 m. I raggi emessi a una certa frequenza alla base della torre venivano osservati in cima alla torre con una frequenza minore. L'emittente alla base era fatto da un certo tipo di atomi. Il ricevente fatto dallo stesso tipo di atomi non riusciva dunque ad assorbire i raggi poichè poteva assorbirli solo alla frequenza di emissione. Tuttavia per osservare il fenomeno e darne una misura quantitativa Pound e Rebka ricorsero a un espediente: Se gli atomi riceventi sono in movimento, sentono la frequenza dei raggi diversa, a causa dell'effetto Doppler. Misurando la variazione di frequenza tramite l'effetto Doppler fu possibile osservare quantitativamente il Red-shift gravitazionale.

4.2 Buchi Neri e metrica di Schwarzschild

Dopo la teorizzazione delle equazioni di campo di Einstein, K. Schwarzschild ne diede una soluzione a simmetria sferica che prende il suo nome e che consiste di fatto in una modellizzazione dell'oggetto fisico Buco Nero.

4.2.1 Metrica di Schwarzschild

Per il calcolo della metrica di Schwarzschild consideriamo una sorgente gravitazionale a simmetria sferica. Ovviamente non è semplice capire come sia una sorgente massiva, per esempio come un pianeta sia fatto al suo interno. Tuttavia se ci limitiamo a considerare ciò che succede all'esterno di esso riusciamo a capire qualcosa in più. All'esterno della sorgente lo spazio è vuoto, e dunque le equazioni di campo (4.36) si semplificano imponendo $T_{\mu\nu} = 0$. Prendendo solo la traccia del tensore di Einstein possiamo ottenere il tensore di curvatura:

$$R - \frac{1}{2}Rg^{\mu}{}_{\mu} = -2R = 0 \Longrightarrow R_{\mu\nu} = 0. \tag{4.38}$$

Ora possiamo risolvere il risultato ottenuto da (4.38), aspettandoci una dipendenza da parametri liberi che fisseremo in seguito, grazie alle informazioni derivanti dalla regione in cui $T_{\mu\nu} \neq 0$, ovvero nella regione interna alla fonte del campo gravitazionale. Se le simmetrie dello spazio-tempo sono abbastanza forti, in approssimazione di campo debole, possiamo ridurre i parametri liberi a uno soltanto. La famiglia di soluzioni a simmetria sferica dipendenti da un solo parametro delle equazioni di campo, nel limite di campo debole, è detta Varietà metrica di Schwarzschild. Per ricercare le soluzioni iniziamo considerando che abbiamo alcune simmetrie da cui possiamo ottenere dei vettori di Killing. La prima cosa che imponiamo, come anticipato nel discorso sul tensore metrico, è la presenza di un vettore di Killing di tipo tempo, che la metrica di Schwarzschild avrà sicuramente, a causa della staticità della soluzione che stiamo cercando.

$$\overrightarrow{\xi} = \frac{\partial}{\partial t} \tag{4.39}$$

Avremo inoltre, proprio per l'impostazione della soluzione, una simmetria sferica, dunque tre vettori di Killing corrispondenti alle rotazioni attorno ai tre assi:

$$\overrightarrow{K}_i = \frac{d}{d\theta_i} \text{ con } i = 1, 2, 3 \tag{4.40}$$

Questi tre vettori si conservano nel tempo, dunque commutano con il vettore di Killing di tipo tempo, ovvero:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{d}{d\theta_i}\right] = 0 \tag{4.41}$$

Assumiamo che la metrica sia tale per cui i vettori di rotazione siano perpendicolari a $\overrightarrow{\xi}$ e che si possano usare, dunque, l'analogo delle coordinate polari per superfici a t costante. Possiamo quindi scrivere la metrica in una generica forma diagonale:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2). \tag{4.42}$$

Avendo scelto così la metrica possiamo calcolarci i simboli di Christoffel e successivamente il tensore di Ricci. Risolviamo l'equazione e otteniamo

$$A = 1 - \frac{2k}{r} \qquad B = A^{-1} \tag{4.43}$$

con k costante che determiniamo ponendoci, come anticipato, nei limiti di campo debole e non relativistico. Usando la riduzione dell'equazione delle geodetiche all'equazione di Newton (4.26), otteniamo:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{1}{2}\eta^{ii}h_{00,i}, \qquad \phi = -\frac{1}{2}h_{00} = -\frac{k}{r}, \tag{4.44}$$

da cui segue che $k = G_N m$, con m massa della sorgente. Dunque la metrica di Schwarzschild ha la seguente forma:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2G_N m}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2G_N m}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2). \tag{4.45}$$

Il valore $r = 2G_N m \equiv r_H$ è detto ***Raggio di Schwarzschild*** ed è indicato con r_H. Posso definire la coordinata temporale t misurato da un osservatore statico posto a $r \longrightarrow \infty$ sapendo che questa è in relazione con il tempo misurato da un osservatore statico posto in $r = r_0$, $d\tau^2$, nel seguente modo:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_H}{r_0}\right)dt^2 \tag{4.46}$$

e quindi $d\tau < dt$. La coordinata t è di tipo tempo, mentre la coordinata r è di tipo spazio quando $r > 2G_N m$, invece θ e ϕ sono sempre di tipo spazio. Notiamo che per $r >> r_H$ la metrica di Schwarzschild tende alla metrica di Minkowski. Questa proprietà è detta *Piattezza asintotica.* Osservatori lontani dal raggio di Schwarzschild sono, a tutti gli effetti, osservatori inerziali.

4.2.2 Geodetiche radiali

Una particella che compie un moto su di una traiettoria radiale avrà equazioni:

$$\left(1 - \frac{r_H}{r}\right)\dot{t} = k. \tag{4.47}$$

$$\left(1-\frac{r_H}{r}\right)\dot{t}^2-\left(1-\frac{r_H}{r}\right)\dot{r}^2=1 \tag{4.48}$$

sapendo che il punto posto al di sopra della grandezza denota la sua derviata prima rispetto al tempo proprio $d\tau$. La scelta di k cambia soltanto le condizioni iniziali di caduta: $k=1$, per esempio, equivale a una particella che cade con velocità iniziale nulla, dall'infinito. Mettendo a sistema le due precedenti equazioni, si ottiene:

$$\left(\frac{d\tau}{dr}\right)^2=\frac{r}{r_H}, \tag{4.49}$$

da cui deduciamo che posso attraversare la superficie $r=r_H$ in un intervallo di tempo *proprio* finito. Proviamo invece a descrivere la stessa situazione nella coordinata t:

$$\frac{dt}{dr}=\frac{\dot{t}}{\dot{r}}=-\left(\frac{r}{r_H}\right)\left(1-\frac{r_H}{r}\right)^{-1}. \tag{4.50}$$

Questa equazione diventa singolare in $r=r_H$. In particolare si nota che occorre un tempo $t\longrightarrow\infty$ per raggiungere il raggio di Schwarzschild. Per capire meglio quale sia il comportamento degli oggetti in un intorno del raggio di Schwarzschild, analizziamo da un punto di vista quantitativo il fenomeno del *red-shift* di cui abbiamo già parlato. Consideriamo una particella che cade verso una sorgente gravitazionale in una regione in cui vige la metrica di Schwarschild. La particella emette fotoni utilizzando geodetiche radiali nulle. Notiamo per prima cosa che se esiste un vettore di Killing di tipo tempo posso subito definire l'energia di Killing come la quantità che si conserva lungo le geodetiche:

$$E=-\xi^\alpha u_\alpha. \tag{4.51}$$

u^α è la quadrivelocità. Osserviamo inoltre che la quadrivelocità di un osservatore statico dev'esssere proporzionale al vettore di Killing:

$$U^\alpha=\frac{\xi^\alpha}{|\xi|} \tag{4.52}$$

visto che $U^a U_a=-1$. L'energia misurata dall'osservatore sarà data quindi da:

$$\omega=-U^a u_a=\frac{E}{|\vec{\xi}|} \tag{4.53}$$

Ora consideriamo un fotone che attraversa due osservatori statici nei punti r_1 e r_2 allora il rapporto delle loro misure sarà dato da:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{|\vec{\xi}(r_2)|}{|\vec{\xi}(r_1)|}=\sqrt{\frac{1-r_2/r_H}{1-r_1/r_H}}. \tag{4.54}$$

Se $r_2 = r_s$ è la posizione della sorgente e $r_1 = r_o >> r_H$ la posizione dell'osservatore si ha che:

$$\omega_o \simeq \omega_s \sqrt{1 - \frac{r_H}{r_s}}. \tag{4.55}$$

4.2.3 Orizzonte degli eventi e Buchi neri

Gli osservatori statici vedono quindi il fotone perdere energia mentre risale il potenziale gravitazionale. Notiamo in particolare che se la sorgente di fotoni si trova sul raggio di Schwarzschild, il fotone non riesce a scappare. Se un fotone, la cui velocità è la massima possibile, non riesce a raggiungere l'osservatore statico, allora nessun oggetto fisico ci riuscirà, a causa del secondo postulato della relatività speciale per il quale la velocità della luce è la massima possibile. Per questo motivo il raggio di Schwarzschild è detto *orizzonte degli eventi*.
Per meglio comprendere cosa significa focalizziamoci sull'analisi del cono di luce di un sistema posto in prossimità della sfera di raggio r_H. Per $r > r_H$ abbiamo entrambe le parti del cono di luce, quella entrante che si contrae, e quella uscente che si espande; per $r = r_H$ il cono di luce uscente si ferma a $r = r_H$ (formando una superficie nulla); per $r < r_H$ oltre ad avere il cono uscente che si blocca sull'orizzonte degli eventi, abbiamo anche il cono di luce entrante. La regione interna all'orizzonte degli eventi è detta ***Buco Nero***, nome dato da J . Wheeler nel 1968. Esistono vari tipi di buchi neri previsti dalla teoria, che hanno dunque diverse metriche associate, soluzioni delle equazioni di campo. Per esempio abbiamo: la metrica a simmetria sferica ma carica elettricamente di Reissner-Nordstroem, la metrica rotante a simmetria assiale di Kerr e la metrica rotante carica elettricamente di Kerr-Newman. Tutte queste metriche possiedono almeno un orizzonte, o addirittura più di uno, dal quale i fotoni, a qualsiasi frequenza, non possono scappare. Le metriche di corpi massivi rotanti prevedono anche al contrario di quelle statiche, un effetto di trascinamento del riferimento, così da far apparire lo spaziotempo come trascinato da un momento angolare dato. Parlando di buchi neri l'ultima cosa che serve citare sono le scoperte di S. Hawking sulla termodinamica dei buchi neri e sul trasporto di informazione. Rimarchiamo che alla base dello studio dei micro buchi neri, e degli effetti quantistici presenti in quest'ultimo e quindi prima della formulazione di un principio di indeterminazione generalizzato, è presente in larga parte, il lavoro di Hawking sull'evaporazione dei buchi neri.

Capitolo 5

Micro-Buchi Neri

Per iniziare il vero cuore di questo scritto abbiamo bisogno di molti concetti preliminari. Dopo aver dato un'idea di cosa significhi ricavare un principio di indeterminazione e di cosa dicano le teorie delle stringhe e della relatività generale, bisogna analizzare la termodinamica dei buchi neri, senza addentrarcisi troppo, a causa della sua vasta estensione.

5.1 Generalità

Nel 1974 Stephen Hawking teorizzò l'evaporazione dei buchi neri come conseguenza di processi quantistici che avvengono al suo interno o in prossimità di esso. Questo processo detto anche radiazione di Hawking prevede che vengano emesse dal buco nero particelle microscopiche come fotoni, quark, gluoni, ecc. I suoi calcoli ci mostrano che quanto più un buco nero è piccolo, tanto più l'emissione di particelle è rapida, e con questo aumento del tasso di evaporazione avviene un'improvvisa emissione di particelle quando il buco nero esplode. Questo tipo di buchi neri, con dimensioni molto piccole e con un'evaporazione di Hawking molto rapida, sono detti buchi neri primordiali (ma anche Micro-buchi neri), i quali, secondo alcuni modelli teorici sarebbero i primi generatori delle particelle, poichè l'alta densità dell'universo appena formato favorirebbe questi processi.

Perchè i micro-buchi neri?

Lo studio sui micro-buchi neri ha due obiettivi principali. Il primo obiettivo è quello di capire meglio la cosmologia, vista la presenza (prevista teoricamente) di micro-buchi neri, detti buchi neri primordiali, nelle prime fasi di sviluppo dell'universo. Il secondo, ugualmente importante, è quello di comprendere cosa succede a certe scale energetiche. Se ci mettiamo nel limite della scala di Planck, cosa che faremo per tutto il capitolo, ci rendiamo conto che gli effetti gravitazionali, e gli effetti quantistici sono entrambi influenti sul sistema a questa scala, motivo per cui si parla di regime di *Gravità quantistica*. Grazie allo studio di questi oggetti fisici cerchiamo di calcolare la costante di accoppiamento dell'interazione gravitazionale nel regime in cui entrambe le teorie siano valide. Per calcolare la costante di accoppiamento tuttavia, dobbiamo utilizzare un concetto nuovo, quello delle dimensioni aggiuntive, poichè, nell'approssimazione in cui valgano entrambe le relazioni, la costante di accoppiamento gravitazionale risulta essere troppo bassa e quindi i suoi effetti potrebbero essere visibili solo a energie elevatissime. Ecco perchè cercheremo di trovare un'espressione di G_N in D-dimensioni. La scala di energia a cui compiremo questi calcoli è detta scala **GUT** acronimo che sta per teoria della grande unificazione.

5.1.1 Radiazione di Hawking

Guardiamo ora in dettaglio il processo di radiazione di Hawking partendo dalla definizione di entropia per un buco nero.

Entropia di Bekenstein-Hawking

Si può dimostrare, e lo diamo come fatto assodato, che l'area di un buco nero, in analogia con l'entropia dell'universo, non può mai diminuire in un processo fisico. Come per la meccanica solita, questo principio sull'area dei buchi neri, determina una direzione privilegiata del tempo nella vita di un buco nero. In termodinamica, un aumento di entropia implica che una certa quantità di energia non può più essere trasformata in lavoro. Per un buco nero abbiamo che la sua massa,

$$M = \left(\frac{A}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{5.1}$$

rappresenta l'energia minima che non può essere estratta, ovvero possiamo vederla come energia che non può essere trasformata in lavoro. Dunque sia un aumento dell'area A che dell'entropia S di un buco nero equivalgono a una degradazione di energia. Possiamo inoltre relazionare l'entropia di un sistema con l'informazione del suddetto. Supponiamo di conoscere la probabilità p_n di trovare un dato sistema nello stato n. L'entropia associata al sistema è data da:

$$S = -\sum_n p_n \ln p_n. \tag{5.2}$$

Quest'ultima espressione è detta *Entropia di Shannon*. Da questa formula deduciamo che se l'entropia dell'universo aumenta allora l'informazione del sistema andrà persa. Cerchiamo ora un'espressione per l'entropia del buco nero nella forma:

$$S = f(A) \tag{5.3}$$

dove f è monotona crescente. La scelta più logica è quella di scegliere:

$$f(A) = \gamma A. \tag{5.4}$$

La costante γ avrà le dimensioni dell'inverso di una lunghezza al quadrato. Nell'ambito della relatività generale tuttavia non esiste questo tipo di costante, e così rivolgiamo la nostra ricerca all'ambito della meccanica quantistica. Per trovare questa costante seguiamo un argomento portato avanti da Beknestein. Immaginiamo di avere un buco nero statico a simmetria sferica, dunque un buco nero di Schwarzschild. Una particella viene inghiottita dal buco nero, e dato che questa particella sparisce abbiamo di fatto una perdita di informazione, che causerà un aumento dell'entropia. Immaginiamo dunque di mandare un fotone contro un buco nero e che questo fotone abbia lunghezza d'onda dell'ordine del raggio di Schwarschild, in modo che l'unica informazione che porta sia dunque la presenza o l'assenza di esso, così da poter trascurare tutte le altre incognite da cui dipende l'informazione. Abbiamo dunque:

$$\lambda \simeq r_H$$

e dunque,

$$\delta E = \frac{\hbar c}{\lambda} \simeq \frac{\hbar c}{r_H}. \tag{5.5}$$

δE è l'energia portata dal fotone. Considerando inoltre la relazione $E = mc^2$ abbiamo subito la variazione della massa del buco nero,

$$\delta M = \frac{\hbar}{c r_H} \tag{5.6}$$

e conseguentemente la variazione dell'orizzonte degli eventi sarà data da:

$$\delta r_H = \frac{2G}{c^2}\delta M = \frac{2G\hbar}{c^3 r_H} \tag{5.7}$$

e dunque:

$$r_H \delta r_H = \frac{2G\hbar}{c^3} \simeq \delta A. \tag{5.8}$$

Notiamo quindi che se aumentiamo di un bit (un fotone definito prima può avere solo due stati: 1 o 0, c'è o non c'è, e ciò rende lo stato fisico del fotone misurabile in bit) l'informazione ovvero l'area del buco nero aumenta di una quantità costante.

Possiamo di fatto misurare l'area in bit e completare l'analogia con l'entropia del buco nero:

$$S \propto \frac{Ac^3}{\hbar G} = \frac{A}{l_p^2} \tag{5.9}$$

dove l_p è la lunghezza di Planck.
Hawking in seguito trovò l'espressione esatta, la quale aggiungeva solamente $\frac{1}{4}$ come costante moltiplicativa:

$$S_{BH} = \frac{1}{4}\frac{A}{l_p^2}. \tag{5.10}$$

Questa espressione è detta entropia di Bekenstein-Hawking. Possiamo derivare la radiazione di Hawking in diversi modi, in questo caso scegliamo un calcolo basato sull'effetto *tunnel*, effetto di origine puramente quantistica. La radiazione nasce, da questo processo, con le stesse modalità del fenomeno di creazione e annichilazione di una coppia elettrone-positrone. Una coppia viene creata nei pressi dell'orizzonte di un buco nero, dopodichè una delle due particelle riesce a sfuggire all'orizzonte degli eventi grazie all'effetto tunnel. Con questo schema generiamo, in maniera semi-classica la radiazione di un buco nero. Consideriamo un buco nero di Schwarzschild con geometria dinamica che consenta la conseravzione dell'energia. Si dimostra che un equilibrio stabile è possibile, e di conseguenza il buco nero deve emettere radiazione. Ora, visto che vogliamo descrivere questo fenomeno, dobbiamo scegliere delle coordinate che non siano singolari in $r = r_H$. Facciamo dunque la scelta:

$$t = t_s + 2\sqrt{2Mr} + 2M \ln \frac{\sqrt{r} - \sqrt{2M}}{\sqrt{r} + \sqrt{2M}} \tag{5.11}$$

dove t_s è il tempo di Schwarzschild. Avendo fatto questa scelta del parametro temporale, possiamo scegliere l'elemento spaziale come:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + 2\sqrt{\frac{2M}{r}}dtdr + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{5.12}$$

Con queste coordinate abbiamo eliminato il problema della singolarità del raggio di Schwarzschild. Possiamo quindi definire uno stato di vuoto effettivo di un campo quantistico, richiedendo che annulli i modi di vibrazione a frequenza negativa rispetto a t. Uno stato del genere viene visto vuoto da un osservatore in caduta libera e che attraversa l'orizzonte. Le geodetiche radiali nulle sono date da:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm 1 - \sqrt{\frac{2M}{r}} \tag{5.13}$$

con il segno $+$ che corrisponde alle geodetiche uscenti e il - a quelle entranti. Queste equazioni si modificano quando ho che la particella entrante ha una sua massa e

quindi una sua gravità. Inoltre se tengo fissata la massa del buco nero, e potendo variare la massa totale, un guscio di energia ω si muove nello spaziotempo seguendo le geodetiche date da un buco nero di massa $M + \omega$. Se invece considero fissa la massa totale e vario la massa del buco nero, ho che la particella di energia ω segue geodetiche date da un buco nero di massa $M - \omega$.
Ora per calcolare come avviene il processo di annichilazione, e successivamente la separazione e la fuga di una delle due particelle, consideriamo l'Azione di una particella quantistica, definita dai *principi di Hamilton-Jacobi*:

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - H dt, \tag{5.14}$$

dove H è l'Hamiltoniana del sistema. L'equazione precedente soddisfa il *principio variazionale di Hamilton-Jacobi* $\delta S = 0$ appunto, da cui ricaviamo le equazioni del moto. Nel nostro caso l'Hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo per cui considero l'azione ridotta:

$$\hat{S} = \int_{t_i}^{t_f} \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i. \tag{5.15}$$

Dalla meccanica quantistica, risolvendo le equazioni d'onda otteniamo che la funzione d'onda di un sistema Hamiltoniano è data da:

$$\psi = \sqrt{\rho} e^{iS}, \tag{5.16}$$

dove ρ è la densità di probabilità spaziale. Se è presente una barriera di potenziale con ampiezza superiore all'energia del sistema (nel nostro caso è così: l'energia di attrazione del buco nero è molto elevata), l'azione assume solo valori immaginari, per cui la densità di probabilità di attraversamento della barriera (attraversamento che può essere causato esclusivamente dall'effetto tunnel) è proporzionale a:

$$\Gamma \sim e^{-2\Im S}. \tag{5.17}$$

Consideriamo dunque una particella uscente che passi dalla posizione r_{in} alla posizione r_{out} seguendo una geodetica radiale. Calcoliamo la parte immaginaria della sua azione ridotta:

$$\Im S = \Im \int_{r_{in}}^{r_{out}} p_r dr = \Im \int_{r_{in}}^{r_{out}} \int_0^{p_r} dp'_r dr. \tag{5.18}$$

Moltiplichiamo e dividiamo per le due parti dell'equazione di Hamilton:

$$\dot{r} = \frac{dH}{dp_r}, \tag{5.19}$$

effetuiamo un cambio di variabile, passando dal momento all'energia e cambiamo l'ordine dell'integrazione.

$$\Im\hat{S} = \Im\int_{M}^{M-\omega}\int_{r_{in}}^{r_{out}}\frac{dr}{\dot{r}}dH = \Im\int_{0}^{\omega}\int_{r_{in}}^{r_{out}}\frac{dr}{1-\sqrt{\frac{2(M-\omega')}{r}}}(-d\omega') \tag{5.20}$$

dove il segno meno compare a causa del fatto che $H = M - \omega'$. Risolvendo l'integrale ottengo:

$$\Im\hat{S} = 4\pi\omega\left(M - \frac{\omega}{2}\right) \tag{5.21}$$

se $r_{in} > r_{out}$. Guardando come è strutturato l'integrale, notiamo che la particella parte da una posizione $r = r_H - \epsilon$ dentro l'orizzonte per poi materializzarsi in $r = 2(M - \omega) + \epsilon$, poco al di fuori del raggio di Schwarzschild. Questo fenomeno da' origine alla radiazione di Hawking. Viceversa per avere radiazione può avvenire il processo contrario, ovvero il sistema delle due particelle create è posto al di fuori del raggio di Schwarzschild, e compie un effetto tunnel verso l'interno del buco nero. Questa particella si propaga all'indietro nel tempo, per cui invertiamo questo asse nelle equazioni del moto:

$$\sqrt{\frac{2M}{r}} \longrightarrow -\sqrt{\frac{2M}{r}} \tag{5.22}$$

Inoltre l'antiparticella vede un il buco nero di massa fissata e quindi sostituisco $M \longrightarrow M + \omega$. Per una particella entrante con energia negativa abbiamo quindi:

$$\Im\hat{S} = \Im\int_{0}^{-\omega}\int_{r_{in}}^{r_{out}}\frac{dr}{-1+\sqrt{\frac{2(M+\omega')}{r}}}d\omega' = 4\pi\omega\left(M - \frac{\omega}{2}\right) \tag{5.23}$$

In entrambi i casi la parte esponenziale del tasso di emissione semi-classico è data da:

$$\Gamma \sim e^{-2\Im S} = e^{-8\pi\omega\left(M-\frac{\omega}{2}\right)} = e^{\Delta S_{BH}} \tag{5.24}$$

Ignorando i termini quadratici, l'equazione si riduce a un fattore di Boltzmann per la particella di energia ω alla temperatura $1/8\pi M$. Vi è una correzione di un fattore ω^2 che emerge a causa della conservazione dell'energia, che alza la temperatura del buco nero durante l'irradiazione. La temperatura del Buco nero è data quindi da:

$$T = \frac{1}{8\pi M} = \frac{\kappa}{2\pi}. \tag{5.25}$$

Inoltre seguendo dimostrazioni e argomenti che qui non riporteremo si ottiene la forma dello *spettro di Planck*:

$$\rho(\omega) = \frac{1}{2\pi}\frac{|Tr(\omega)|^2}{e^{8\pi M\omega} - 1} \tag{5.26}$$

dove $Tr(\omega)$ è un coefficente di trasmissione dipendente dalla frequenza. Un buco nero quindi non è nero del tutto: esso è un corpo caldo, che emette radiazione con un certo spettro calcolato nell'ultima formula, e ha una temperatura fissata. Questa temperatura tuttavia risulta essere relativamente bassa, tale che le speranze di misurare la radiazione di Hawking siano ancora molto basse.

5.1.2 Struttura del Processo di evaporazione di Hawking in D-dimensioni

Dopo aver dato una visione qualitativa e un minimo quantitativa di come avvenisse il processo di radiazione per i buchi neri di Schwarzschild in 4-dimensioni, è utile dare una visione unicamente qualitativa di come avvenga questo processo di radiazione per un buco nero in D-dimensioni. Possiamo quindi dividere il processo di emissione in quattro step:

1. Balding phase: il buco nero diffonde la sua carica elettrica e i "capelli"
2. Spindown phase: il buco nero perde il suo momento angolare
3. Schwarzschild phase: la massa rimasta si perde per radiazione termica
4. Planck phase: ciò che resta, delle dimensioni di Planck, è soggetto agli effetti della gravità quantistica.

Questo riassunto serve per dare un'idea di come si sviluppa la vita di un buco nero.

5.2 Micro-buchi neri in D-dimensioni

Lo scopo di questa sezione è quello di esporre brevemente alcune equazioni relative ai buchi neri visti in D dimensioni, che ci serviranno per dare un'idea, nella sezione successiva, degli ordini di grandezza dei micro buchi neri. Per prima cosa ipotizziamo di poter definire una funzione di ripartizione canonica per un buco nero:

$$P \sim e^{-S_H} \tag{5.27}$$

che equivale alla probabilità di transizione dal vuoto semiclassico del buco nero, al vuoto reale, senza buchi neri. Definiamo la degenerazione quantistica degli stati, come proporzionale a P^{-1} data dalla seguente equazione:

$$\sigma \simeq ce^{A/4} \tag{5.28}$$

dove c è una costante determinata da correzioni teoriche di campo quantistiche e può contenere effetti non locali. Le espressioni esplicite delle quantità appena scritte possono essere derivate solo per alcune geometrie. Consideriamo un buco nero di Schwarzschild D-dimensionale. La sua metrica è data da:

$$ds^2 = -e^{2\lambda}d\tau^2 + e^{-2\lambda}dr^2 + r^2 d\Omega^2_{D-2} \tag{5.29}$$

dove, $d\Omega^2_{D-2}$ è fondamentalmente l'elemento di volume relativo alle dimensioni restanti oltre alla parte radiale e temporale. Inoltre abbiamo che:

$$e^{2\lambda} = 1 - \left(\frac{r_H}{r}\right)^{D-3} \tag{5.30}$$

L'area dell'orizzonte in D-dimensioni è:

$$\frac{A}{4} = \frac{A_{D-2}}{16\pi}\beta_H r_H^{D-2} \tag{5.31}$$

con la seguente equazione per la massa:

$$M = \frac{D-2}{16\pi}A_{D-2}r_H^{D-3} \tag{5.32}$$

dove in entrambe le equazioni A_{D-2} è l'area della (D-2)-sfera. Eliminiamo il raggio dell'orizzonte per esplicitare la dipendenza dell'area unicamente dalla massa:

$$\frac{A}{4} = C(D)M^{\frac{D-2}{D-3}} \longrightarrow A \propto M^{\frac{D-2}{D-3}} \tag{5.33}$$

dove:

$$C(D) = \frac{4^{\frac{D-1}{D-3}}\pi^{\frac{D-2}{D-3}}}{(D-3)(D-2)^{\frac{D-2}{D-3}}A_{D-2}^{\frac{1}{D-3}}} \tag{5.34}$$

Dalle precedenti equazioni otteniamo la seguente degenerazione degli stati:

$$\sigma(M) \simeq \Omega^{-1}(M) \simeq c\exp[C(D)M^{\frac{D-2}{D-3}}] \tag{5.35}$$

Se compariamo questa espressione con quella conosciuta per le teorie di campo non locali, troviamo che corrisponde alla degenerazione degli stati per un oggetto quantistico esteso (una *p-brane*) di dimensione $p = \frac{D-2}{D-4}$. Come già stato dimostrato da molti autori una crescita esponenziale della densità degli stati è un chiaro segnale per una teoria di campo non locale; la teoria delle *P-brane* è l'unica teoria di campo non locale conosciuta che può dare una crescita esponenziale della degenerazione degli stati. Grazie a questi conti potremo fare, come già detto, delle considerazioni sugli ordini di grandezza dei buchi neri.

5.3 Dimensioni minime di un Micro-Buco nero

Per ottenere le dimensioni minime di un buco nero in 4 dimensioni (il buco nero di Schwarzschild canonico) devo uguagliare la lunghezza d'onda Compton con il raggio di Schwarzschild. (in questa sezione faremo un discorso qualitativo, dunque trascureremo le costanti e useremo solo delle approssimazioni). Poniamo $c = 1$. Otteniamo dunque, ponendo $\lambda \sim \frac{h}{M_0}$ (la lunghezza d'onda di Compton) uguale a r_H:

$$\frac{h}{M_0} \sim G_N M_0 \Longrightarrow M_0^2 \sim \frac{h}{G_N} \tag{5.36}$$

Dove G_N è la costante di gravitazione universale di Newton. Dunque sostituendo alle costanti i valori (in eV) otteniamo l'ordine di grandezza minimo, in massa, per un buco nero della dimensione della lunghezza Compton:

$$M_0 \simeq 10^{16}\text{TeV}. \tag{5.37}$$

Una quantità di energia enorme, per un micro-buco nero. Abbiamo quindi individuato lo scopo del vedere un buco nero in D dimensioni e non nelle canoniche 4 dimensioni: abbiamo necessità di ottenere un limite (aggiungendo delle dimensioni) per cui l'energia minima per formare un buco nero sia minore. Non potendo modificare la costante h, per non modificare, in questo modo, tutto il comparto teorico della meccanica quantistica, ci sarà utile calcolarci una nuova costante di gravitazione G_D tale che:

$$M_0^2 \sim \frac{h}{G_N} > \frac{h}{G_D} \sim M_D^2 \tag{5.38}$$

Dunque dev'essere:

$$G_N \sim \frac{h}{M_0^2} < \frac{h}{M_D^2} \sim G_D. \tag{5.39}$$

In virtù dell'ultima equazione sappiamo che stiamo cercando una forma di G_D che sia maggiore rispetto a G_N in modo da rendere più accessibile l'energia di soglia del buco nero. Ora, sostituendo la (5.32) nell'equazione precedente otteniamo una espressione qualitativa della costante di gravitazione in D-dimensioni (abbiamo omesso le costanti moltiplicative);

$$G_D \sim \frac{h}{r_H^{2(D-3)}} \tag{5.40}$$

Notiamo che l'espressione (5.40) è del tutto generale, poniamo, per esempio, il caso in cui $D = 4$ otteniamo le solite equazioni per la massa M_0:

$$G_4 \sim \frac{h}{r_H^2}$$

Con questi argomenti abbiamo mostrato che le dimensioni minime di un buco nero possono variare in base alla struttura dello spaziotempo, e quindi in base alla costante di gravitazione, motivo per cui, per conciliare la teoria della relatività con la meccanica quantistica si è giunti alla conclusione che dev'essere lo spaziotempo l'oggetto che muta. Nascono così le dimensioni in più che vanno a influire sull'equazione (5.40), in modo da avere energie accessibili.

5.3.1 Tempo di vita di un buco nero

Prendiamo ora l'equazione (5.25) nella quale esprimiamo le costanti (ci eravamo posti in unità naturali):

$$T = \frac{\hbar}{8\pi k_B G M}. \tag{5.41}$$

Abbiamo così una espressione completa della temperatura di un buco nero. Possiamo scrivere il tasso di energia irradiata in funzione del tempo grazie alla legge di Stefan-Boltzmann:

$$\frac{dE}{dt} = A\sigma T^4 \tag{5.42}$$

dove σ è la costante di Stefan-Boltzmann. Per un buco nero l'energia (ponendo $c = 1$) è uguale alla massa, dunque:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{dM}{dt} \tag{5.43}$$

e visto che il buco nero è assimilabile a una sfera di raggio r_H sappiamo che l'area vale:

$$A = 4\pi r_H^2 = 16\pi (GM)^2. \tag{5.44}$$

Mettendo a sistema le precedenti equazioni otteniamo:

$$\frac{dM}{dt} = -16\pi (GM)^2 \sigma \left(\frac{\hbar}{8\pi k_B G M} \right)^4 = -\frac{\sigma \hbar^4}{256\pi^3 k_B^4 G^2} \frac{1}{M} \tag{5.45}$$

dunque:

$$M^2 dM = -\frac{\sigma \hbar^4}{256\pi^3 k_B^4 G^2} dt. \tag{5.46}$$

Integrando, abbiamo:

$$\frac{1}{3} M^3 = \frac{\sigma \hbar^4}{256\pi^3 k_B^4 G^2} \Delta t \tag{5.47}$$

per ottenere:

$$\Delta t = \frac{256\pi^3 k_B^4}{3\sigma \hbar^4 G} (GM)^3 \tag{5.48}$$

Che definisce il tempo di vita di un buco nero in funzione della sua massa. Per ottenere poi il tempo di vita per un buco nero D-dimensionale basta sostituire le espressioni di M_D e G_D nell'equazione precedente.

5.4 Micro-buchi neri in laboratorio e evidenze sperimentali

5.4.1 Buchi neri in laboratorio

Grazie ai calcoli teorici sulle dimensioni extra possiamo prevedere che l'energia alla quale l'accoppiamento gravitazionale possa essere comparabile all'accoppiamento elettrodebole è di circa $1TeV$, cosicchè i micro buchi neri possano essere prodotti nei nostri laboratori. Tuttavia il tempo di vita medio per un micro buco nero creato con questa scala energetica è di $\sim 10^{-26}s$, tempo che rende impossibile qualsivoglia misurazione, per lo stato attuale dei nostri dispositivi. Sarebbe impossibile separare gli effetti della creazione del buco nero dagli effetti del decadimento. In sostanza non si riuscirebbe a osservare il tipico comportamento dei buchi neri. Un'altra possibilità però, volta a creare un buco nero più pesante e stabile in laboratorio, è quella di creare il buco nero all'interno di un plasma di quark-gluoni. Se questo plasma fosse più caldo del buco nero, allora il buco nero inizierebbe ad assorbire il plasma. Gran parte del plasma sarebbe assorbito prima che il sistema si possa raffreddare. Se continuiamo a fornire nuclei al plasma otterremo un buco nero sempre più massivo. Si può confinare il buco nero fornendogli una carica elettrica e controllarlo quindi con un campo magnetico. Grazie a questo sistema possiamo ottenere un buco nero abbastanza massivo da non decadere immediatamente per radiazione di Hawking.

5.4.2 Evidenze sperimentali

A causa della proprietà intrinseca dei buchi neri di non far sfuggire nulla, non si ha alcuna possibilità di osservarli direttamente attraverso onde di alcun tipo. Una prima rilevazione che possiamo fare tuttavia è sugli effetti che un buco nero ha a causa della sua forte attrazione gravitazionale. Per esempio nell'osservazione di un sistema stellare binario, di cui un corpo è una stella (visibile dai nostri osservatori), e l'altro corpo è un buco nero, possiamo vedere gli effetti del buco nero osservando semplicemente il moto della stella attorno al centro di massa dei due corpi, anche se non vediamo direttamente il buco nero. Come abbiamo detto, il campo gravitazionale del buco nero è così forte da incurvare lo spazio-tempo circostante; una delle conseguenze principali è che un raggio di luce che passa nelle vicinanze del buco nero, come quando passa vicino a un oggetto di massa elevata, si incurva e cambia direzione; questo effetto sta alla base del fenomeno delle lenti gravitazionali. Se il raggio di luce passa alla distanza r_H, viene incurvato così tanto da cominciare a girare in tondo attorno al buco nero. La presenza di un buco nero molto massiccio, interposto tra noi ed una sorgente di luce come una galassia distante, potrebbe quindi essere rivelata anche dall'effetto di lente gravitazionale sulla radiazione proveniente dalla sorgente. Finora i micro buchi neri che si sarebbero dovuti creare ad LHC, non sono stati rilevati, per cui ci si aspetta che siano sbagliati i calcoli teorici, oppure che le energie a cui sono stati fatti gli esperimenti siano ancora troppo basse (sono stati condotti esperimenti su scale energetiche che vanno da $3,5TeV$ a $4,5TeV$).

Capitolo 6

Principio di indeterminazione generalizzato

Finora abbiamo fatto delle considerazioni sulle scale a cui la meccanica quantistica e la relatività generale possano avere entrambe una certa influenza su un sistema. Le previsioni teoriche ci dicono che in un micro-buco nero, considerando anche il fatto che grazie alle dimensioni extra possiamo aumentare la costante di accoppiamento dell'interazione gravitazionale, abbiamo la possibilità di osservare fenomeni sia quantistici che gravitazionali. La teoria delle stringhe serve appunto per conciliare questo dualismo intrinseco, analizzando i fenomeni di questa scala energetica in tutta un'altra ottica. Il primo passo di questa unione, forse, è la deduzione, sulla base di considerazioni teoriche, del primo principio con cui si ha a che fare nei fenomeni quantisitci, il *principio di indeterminazione.* Questo principio stipula le dimensioni minime osservabili per posizione e quantità di moto, ponendo sia un limite di misurazione sperimentale, ma anche un nuovo vincolo del tutto quantistico, ovvero il concetto di fluttuazione energetica e di indeterminazione. Il concetto di lunghezza minima è previsto sia in gravità quantistica, sia nella fisica dei buchi neri e anche nella teoria delle stringhe. L'idea fondamentale è semplice: le stringhe non possono interagire a distanze minori della loro lunghezza che è data dalla loro tensione. L'esitenza di una minima lunghezza ci conduce al principio di indeterminazione generalizzato. Per la ricerca di una lunghezza minima abbiamo alcuni punti fissi da considerare:

A. Le singolarità delle teorie fondamentali (come quelle trovate nel decadimento β di Fermi da parte di Heisenberg) ci portano a un cut-off, una scala minima per la lunghezza.

B. Una procedura di cut-off comporta una modificazione nelle relazioni di commutazione sia dell'operatore momento che dell'operatore posizione.

C. La gravità a breve distanza ed esperimenti mentali ci conducono ad aspettarci vari scenari per il calcolo di una lunghezza di scala minima che sarà inevitabilmente connessa con qualche effetto gravitazionale.

D. Il problema delle energie di scala, superiori alla energia di Planck, nella termodinamica di un buco nero, comporta una modificazione della relazione di dispersione.

E. La meccanica quantistica (teorie di campo quantizzato) con una scala di lunghezza minima comporta una modificazione delle relazioni di commutazione canoniche.

F. La teoria delle stringhe ci conduce a un *principio di indeterminazione generalizzato* basato sulla diffusione delle stringhe in regime *super-Planckiano*

6.1 GUP e teoria delle stringhe

Il principio di indeterminazione generalizzato (GUP) venne descritto in maniera coerente, a partire dalla teoria delle stringhe, già nei lavori di Veneziano verso la fine degli anni '80. Per far ciò si studiò lo scattering di stringhe ultra energetiche, per vedere come la teoria diventasse inconsistente alla scala di Planck. Gli autori trovarono nuovi interessanti effetti dovuti al comportamento a breve distanza della teoria delle stringhe. Studiando in particolar modo lo scattering ad angolo di diffusione fissato, scoprirono che era impossibile vedere distanze al di sotto della lunghezza caratteristica della stringa $\lambda_s = (\hbar\alpha)^{1/2}$, dove α è la tensione della stringa. Un'altra scala, generata dalla dinamica, è data dal raggio di Schwarzschild $r_H \sim (G_N E)^{1/(D-3)}$ e il suo approccio a λ_s dipende dal fatto che valga o meno $r_H > \lambda_s$. Se r_H è maggiore della lunghezza della stringa apparirà un nuovo contributo dell'ordine di r_H, il che indica la classica instabilità che si attribuisce alla formazione di un buco nero. Se vale invece $r_H < \lambda_s$ questi contributi sono irrilevanti: non esistono buchi neri con raggio minore della lunghezza della stringa. Possiamo proseguire considerando i momenti. È stato dimostrato che un grande momento trasferito non sempre corrisponde con una corta distanza. L'analisi dello scattering, ci suggerisce l'esistenza di un certo angolo θ_M di scattering. Quando avviene lo scattering per $\theta < \theta_M$ la relazione tra la distanza e il momento trasferito diventa quella classica di Heisenberg con $q \sim \hbar/b$ dove b è il parametro di impatto.
Tuttavia se $\theta \gg \theta_M$ il principio classico perde validità. Si genera un nuovo regime per la coordinata q la quale segue una relazione del tipo $\langle q \rangle \sim b$. Questo ci suggerisce una modificazione nel principio di indetereminazione in regimi energetici appartenenti alla scala di Planck:

$$\Delta x \sim \frac{\hbar}{\Delta p} + Y\alpha\Delta P \tag{6.1}$$

dove Y è una costante adatta. Da questa relazione segue l'esistenza di una lunghezza minima dell'ordine di λ_s. Un risultato analogo fu ottenuto da Konishi e altri sull'analisi basata sul gruppo di normalizzazione. La costante di proporzionalità Y dipende dal particolare tipo di stringa scelta. La nozione di lunghezza osservabile minima è stata descritta anche nel linguaggio più moderno della T-dualità. Prendiamo come spazio oggetto per esempio una varietà 5-dimensionale della forma: $M_4 \times S^1$. Si può dimostrare che la soluzione classica delle equazioni del moto per la stringa bosonica chiusa compattificata sul cerchio S^1 e di raggio R è data da:

$$X^\mu(\tau,\sigma) = x_0^\mu + \alpha\frac{\tau+\sigma}{2}\left(\frac{n}{2R} + mR\right) + \alpha\frac{\tau-\sigma}{2}\left(\frac{n}{2R} - mR\right)$$
$$+i\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\sum_{n\neq 0}\left(\frac{a_n}{n}e^{in(\tau+\sigma)} + \frac{\overline{a}_n}{n}e^{-in(\tau-\sigma)}\right) \tag{6.2}$$

Con l'identificazione:

$$p_L = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{n}{2R} - mR\right); \qquad p_R = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{n}{2R} + mR\right). \tag{6.3}$$

Questa soluzione è derivata dall'Hamiltoniana:

$$H = \alpha^2\left(\frac{n^2}{4R^2} + m^2R^2\right) + oscill = 2(p_R^2 + p_L^2) + oscill. \tag{6.4}$$

È da notare che sotto T-dualità $R \leftrightarrow \frac{1}{2R}$, $n \leftrightarrow m$ e quindi:

$$p_R \to p_R; \qquad p_L \to -p_L$$

Possiamo interpretare la T-dualità nel seguente modo. Una particella non massiva su un cerchio di raggio R ha momento quantizzato $p = n/2R$. Una stringa può anche avvolgersi m volte attorno a un cerchio con momento $p = mR$. La simmetria di dualità scambia i due spettri, scambiando quindi anche R con α/R. In pratica non è possibile comprimere un cerchio più di una certa scala di lunghezza. Le previsioni fisiche della teoria sono invarianti per lo scambio di R con $\alpha/2R$. In questo modo non possiamo stabilire se le dimensioni extra abbiano una scala dimensionale grande oppure piccola. Comunque sia questa invarianza suggerisce l'esistenza di una lunghezza minima data da $R_{min} \sim (\alpha)^{1/2}$ e può essere generalizzata a più di una dimensione extra assumendo topologie più complesse di quella presa in esame.

6.2 Derivazione del GUP da esperimenti mentali

Il principio di indeterminazione generalizzato (Generalized Uncertainty Principle, GUP) può essere derivato a partire da alcuni esperimenti mentali. Di seguito ne verranno illustrati due, uno sui Buchi neri, uno sui Micro-Buchi neri.

6.2.1 Esperimento mentale sui buchi neri

Questo esperimento si basa sui lavori di M. Maggiore il quale ottenne un'espressione del GUP analizzando un esperimento mentale volto a calcolare l'area dell'orizzonte di un Buco nero in regime di Gravità quantistica. Questo approccio indipendente dal modello giunge a una forma del principio di indeterminazione in accordo con la forma di quest'ultimo ottenuta dalle considerazioni nell'ambito della teoria delle stringhe. L'esperimento consiste nell'osservare i fotoni diffusi nello studio di un buco nero. L'ipotesi principale dell'esperimento è dunque quella che un buco nero emetta radiazione di Hawking. Osservando molti fotoni, siamo in grado di ottenere un'immagine del Buco nero. Inoltre, misurando la direzione di propagazione dei fotoni emessi a diversi angoli, e tracciandone il ritorno, possiamo (in linea di principio) determinare il centro del buco nero. Con questo scopo cerchiamo di misurare il raggio di Schwarzschild r_H, dell'orizzonte del buco nero. Questa misurazione risente di due errori. Il primo è dato dal potere risolutivo del rilevatore, secondo l'approccio di Heisenberg classico:

$$\Delta x^{(1)} \sim \frac{\lambda}{sin\theta} \tag{6.5}$$

dove θ è l'angolo di scattering. Inoltre durante il processo di emissione la massa del buco nero varia da $M + \Delta M$ a M (con $\Delta M = hc/\lambda$) e il raggio dell'orizzonte cambia in accordo con questa variazione. Il corrispondente errore è intrinseco alla misurazione e vale:

$$\Delta x^{(2)} \sim \frac{2G}{c^2}\Delta M. \tag{6.6}$$

Considerando che vale $\lambda < \lambda/sin\theta$ gli errori $\Delta x^{(1)}$ e $\Delta x^{(2)}$ sono combinati linearmente per ottenere:

$$\Delta x \geq \lambda + k\frac{2G}{c^3}\frac{h}{\lambda} \sim \frac{h}{\Delta p} + k\frac{2G}{c^3}\Delta p. \tag{6.7}$$

dove la costante numerica k non può essere prevista in modo indipendente dal modello.

Vogliamo ora calcolare il principio solo sulla base di considerazioni algebriche e del concetto di raggio gravitazionale, e senza considerare la radiazione di Hawking. La struttura matematica che codifica il principio di indeterminazione generalizzato, è in maniera molto naturale, l'algebra di Heisenberg deformata:

$$\Big[X_i, X_j\Big] = -\frac{\hbar^2}{4\kappa^2} i\epsilon_{ijk} J_k. \tag{6.8}$$

e:

$$\Big[X_i, P_j\Big] = i\hbar\delta_{ij}\left(1 + \frac{p^2 + m^2}{4\kappa^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{6.9}$$

Questa è un'espressione del GUP unicamente cinematica, del tutto indipendente da considerazioni specifiche a livello dinamico. Dall'equazione precedente segue immediatamente una forma del GUP:

$$\Delta x_i \Delta p_j \geq \frac{\hbar}{2}\delta_{ij}\left\langle\left(1 + \frac{p^2 + m^2}{4\kappa^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\rangle \sim \frac{\hbar}{2}\delta_{ij}\left(1 + \frac{(\Delta p)^2}{8\kappa^2} + \frac{p^2 + m^2}{8\kappa^2}\right) \tag{6.10}$$

dove abbiamo usato $\langle P^2 \rangle = p^2 + (\Delta p)^2$ e abbiamo supposto di essere nel regime tale per cui: $p^2 + m^2 \ll \kappa^2$ e $\Delta p \leq \kappa$.

6.2.2 Esperimento mentale sui Micro Buchi neri

In questa sezione vogliamo ricavare il principio di indeterminazione dall'analisi del processo di misura che coinvolge la gravità. L'idea di fondo su cui si basa questo calcolo è che lo spazio-tempo, al livello energetico della scala di Planck, ammetta delle fluttuazioni della metrica e la possibilità di generare molti micro-buchi neri (virtuali). Questo calcolo, sulle fluttuazioni dello spazio-tempo, sta alla base di molte considerazioni della gravità quantistica, come ad esempio, la derivazione dell'entropia di un buco nero a partire da considerazioni microscopiche. Vogliamo applicare il principio di indeterminazione di Heisenberg al processo di misura e vedere come la formazione di micro-buchi neri influenza appunto questo principio. Partiamo dunque dal principio Heisenberg scritto nella forma $\Delta x \Delta P \geq \hbar/2$ e ricordando che siamo nel limite di alte energie abbiamo: $\Delta E \sim c\Delta p$, così otteniamo una nuova forma del principio di indeterminazione data da:

$$\Delta E \Delta x \geq \frac{\hbar c}{2}. \tag{6.11}$$

Se osserviamo una regione spaziale di ampiezza Δx ci aspettiamo che il campo metrico in questa regione risenta di fluttuazioni quantistiche in energia secondo l'equazione precedente:

$$\Delta E \geq \frac{\hbar c}{2\Delta x}. \tag{6.12}$$

Questa energia è confinata nella regione di larghezza Δx. Il raggio di Schwarzschild $r_H = \frac{2G\Delta E}{c^4}$ generalmente è interno alla regione Δx. Tuttavia se rimpiccioliamo la regione le fluttuazioni dell'energia ΔE aumentano, e di conseguenza r_H diventa maggiore, fino a quando non arriva a un valore pari a quello di Δx. È facile dimostrare che questa lunghezza critica è la lunghezza di Planck alla quale è associata l'energia di Planck ϵ_p. Ha così origine un micro-buco nero. Se si volessero osservare dettagli meglio definiti si dovrebbe concentrare nella stessa regione un'energia maggiore dell'energia di Planck, che andrebbe ad allargare il raggio gravitazionale nascondendo più dettagli all'interno dell'orizzonte degli eventi. Emerge chiaramente che la lunghezza minima osservabile è uguale alla lunghezza di Planck l_p. Ogni dettaglio più preciso è nascosto all'interno dell'orizzonte degli eventi, e ogni tentativo di diminuire Δx dà come risultato un aumento delle fluttuazioni dell'energia in modo da ottenere così una regione non osservabile. Abbiamo che:

$$\Delta x \geq \frac{\hbar c}{2\Delta E} \quad per \quad \Delta E \leq \epsilon_p \tag{6.13}$$

oppure

$$\Delta x \geq \frac{2G\Delta E}{c^4} \quad per \quad \Delta E > \epsilon_p \tag{6.14}$$

Il modo più semplice per rispettare queste condizioni è quello di combinare le ultime due relazioni linearmente per ottenere:

$$\Delta x \geq \frac{\hbar c}{2\Delta E} + \frac{2G\Delta E}{c^4} \tag{6.15}$$

che, letta in termini di Δp diventa:

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p} + \frac{2G\hbar}{c^3} = \frac{\hbar}{2\Delta p} + 2l_p\frac{\Delta p}{\hbar} \tag{6.16}$$

Abbiamo così ottenuto una generalizzazione del principio di indeterminazione nelle condizioni in cui la gravità non è trascurabile. Notiamo che abbiamo derivato il GUP servendoci di un micro-buco nero, all'interno del quale (ma anche in prossimità di esso) lo spazio-tempo è continuo. Anche quando il buco nero evapora lo spazio-tempo continua ad avere il comportamento di un continuo. Questa è la grande differenza tra la teoria delle stringhe e la Gravità quantistica a loop: per la teoria delle stringhe lo spazio-tempo risulta essere un continuo ad ogni scala, invece per la gravità quantistica a loop quando ci avviciniamo alla lunghezza di Planck riusciamo a vedere lo spazio-tempo come quantizzato. Questa derivazione del principio è indipendente dal modello scelto poichè si basa esclusivamente sul principio di indeterminazione di Heisenberg e sulla teoria della gravitazione (si usa il concetto di raggio di Schwarzschild).

6.3 Conseguenze del GUP: Paradosso dell'informazione e resti di buchi neri

Nel contesto della fisica dei buchi neri, ci sono ancora molti problemi irrisolti. Uno di questi è il *Paradosso dell'informazione*. Questo paradosso nasce a seguito dei calcoli sulla radiazione di Hawking. La radiazione di Hawking, a causa del principio dell'essenzialità per un buco nero, non dipenderebbe da tutte le cose che entrano in quest'ultimo. Possiamo dunque asserire che tutte le cose che entrano nel buco nero trasportano un'informazione (grandezza correlata all'entropia) che va inevitabilmente persa. Questa assunzione violerebbe il principio di conservazione dell'energia, il secondo prinicipio della termodinamica e dunque il principio di causalità. Sono state date diverse soluzioni di questo paradasso, ciascuna con vantaggi e anche svantaggi. Illustriamo di seguito come si comporta un buco nero, e quale sia il collegamento col GUP, che per non perdere l'informazione acquisita, lasci un resto, alla fine della sua evaporazione. Una prima considerazione da fare è che se qualcosa del buco nero viene conservato alla sua evaporazione allora dovrà esistere una simmetria del sistema associata a questa conservazione. Tuttavia questa simmetria non esiste, dunque l'assunto di base per questo ragionamento sarà che il collasso totale del buco nero deriva non da simmetrie ma dalla dinamica. Per capire questo concetto consideriamo un atomo di idrogeno. L'atomo, se seguisse le leggi della fisica classica, avrebbe vita molto breve poichè il suo elettrone sarebbe destinato a cadere sul nucleo. Tuttavia, grazie al principio di indeterminazione di Heisenberg risuciamo a strutturare nuove equazioni d'onda per l'elettrone in modo da mantenerlo in orbita intorno al nucleo. Allo stesso modo il GUP mantiene i resti di un buco nero anche dopo la fine della sua evaporazione e conserva così l'informazione entrante. Il GUP fornisce un'incertezza sulla posizione pari a:

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p} + l_p^2 \frac{\Delta p}{\hbar} \quad \textit{dove} \quad l_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \tag{6.17}$$

Con i calcoli svolti nel capitolo 5, utilizzando l'espressione della temperatura (5.25), ottenute da considerazioni puramente quantistiche (usando quindi il principio di indeterminazione di Heisenberg, HUP) sappiamo che:

$$T \propto \frac{1}{M} \tag{6.18}$$

Quindi la temperatura esplode se la massa va a zero. Dunque se si completa l'evaporazione del buco ho sostanzialmente, prima che scompaia tutta la massa, una temperatura pari a ∞. Grazie al principio di indeterminazione generalizzato, sappiamo, tuttavia, che la forma della temperatura cambia, poichè cambia la relazione sussistente tra spazio e quantità di moto. Dunque abbiamo una nuova dipendenza della massa dalla temperatura:

$$M \sim \frac{1}{T} + \beta T \tag{6.19}$$

E dunque dopo un certo valore della massa l'evaporazione si arresta lasciando fondamentalmente un *resto*. Otteniamo l'entropia del buco nero integrando la relazione $dS = c^2 T dM$:

$$S_B = 4\pi \frac{M^2}{M_p^2} \tag{6.20}$$

che rappresenta l'entropia ricavata dal HUP;

$$S_{GUP} = 2\pi \left[\frac{M^2}{M_p^2} \left(1 - \frac{M_p^2}{M^2} + \sqrt{1 - \frac{M_p^2}{M^2}} \right) - log \left(\frac{M + \sqrt{M^2 - M_p^2}}{M_p} \right) \right]. \tag{6.21}$$

Grazie a queste equazioni possiamo calcolare, in maniera simile a quello fatto nel capitolo 5, tutte le grandezze relative al buco nero (tempo di vita etc..). Il quadro che esce da queste equazioni porta a dire che, a causa della razionalità di questa impalcatura teorica, l'informazione di un buco nero viene conservata nei resti di quest'ultimo, massa inerte che rimane alla fine del processo di evaporazione.

Conclusioni

Lo scopo, che era quello di calcolare e illustrare il percorso che porta al principio di indeterminazione generalizzato, è stato raggiunto. Nell'introduzione è stato spiegato quali fossero gli scopi della tesi e si è parlato dei macro problemi della fisica teorica attuale. Nel capitolo 2 viene ricavato il principio di indeterminazione di Heisenbeg (HUP) la cui formula è utile nei capitoli successivi. Nel capitolo 3 sono stati esposti per sommi capi i concetti fondanti di una delle teorie di gravità quantistica, la teoria delle stringhe, di cui ci interessa appunto l'oggetto fondativo, la stringa, che dobbiamo considerare come lunghezza minima per il principio di indeterminazione. Nel capitolo 4 è stato esposto, sempre brevemente e dando per scontata la matematica della geometria differenziale e del calcolo tensoriale, il percorso deduttivo della teoria della relatività generale, a partire dai suoi principi,volto al calcolo della metrica di Schwarzschild, la metrica che descrive lo spazio-tempo di un buco nero. Grazie alla deduzione, a partire dalle equazioni di campo, della metrica di Schwarzschild, possiamo calcolarci il raggio dell'orizzonte degli eventi, grandezza che dovremo utilizzare per il calcolo del GUP. Nel capitolo 5 si parla di micro-Buchi neri, nuova frontiera della ricerca teorica (ma anche, si spera, sperimentale), oggetto fisico molto importante nell'ambito di ricerca della gravità quantistica, poichè è il primo esempio di sistema fisico in cui devono coesistere le due grandi teorie del 900, meccanica quantistica e relatività i cui effetti sono equipollenti. Il quinto capitolo inizia con una sezione sulla termodinamica di buchi neri, poichè per calcolare le dimensioni minime e il tempo di vita di un micro-buco nero servono grandezze come la temperatura e l'entropia. Tempo di vita e dimensioni minime sono utili nell'ultima sezione per stabilire quali siano le condizioni sperimentali necessarie per ricreare un micro-buco nero in laboratorio, all'acceleratore LHC in modo da poter avere qualche conferma sperimentale delle teorie di gravità quantistica. Nell'ultimo capito infine calcoliamo in base a considerazioni di carattere puramente fisico la formula del GUP. Le considerazioni utili per il calcolo del GUP sono tre diverse (con tre diversi calcoli relativi): considerazioni sulla teoria delle stringhe, ovvero calcolo il GUP per un sistema in cui la lunghezza minima raggiungibile sia quella della stringa appunto; un esperimeno mentale riguardante i buchi neri; infine un esperimento mentale riguardante i micro-buchi neri.

La presenza, almeno teorica, di un principio di indeterminazione generalizzato è il primo passaggio utile per poter definire una teoria della gravità quantistica. In analogia con la meccanica quantistica classica, la quale parte appunto dal concetto di sovrapposizione e dal principio di indeterminazione di Heisenberg, si inizia la costruzione della teoria della gravità quantistica dal GUP, che può essere calcolato (nel capitolo 6 viene fatto grazie ai due esperimenti mentali) in maniera indipendente dal modello scelto. La teoria dunque è ora in attesa di risvolti pratici. La nuova frontiera delle ricerche sperimentali è quella della creazione dei micro-buchi neri, grazie ai quali potremo dimostrare l'esistenza di un GUP, e quindi una ridefinizione delle due teorie, in un'unica teoria della gravità quantistica. Inoltre, la rilevazione degli effetti del GUP sarebbe la prima pietra per la costruzione di una teoria delle stringhe, candidata a essere teoria del tutto, che potrebbe a quel punto essere confermata sperimentalmente. Le previsioni che si potrebbero fare grazie alla teoria delle stringhe sarebbero di portata inimmaginabile. Inoltre si riuscirebbe a dare un senso alla bellezza del nostro Cosmo.

Bibliografia

[1] Dirac P.A.M., *I principi della meccanica quantistica*, Bollati Boringhieri, 1959

[2] Sakurai J. J., *Meccanica quantistica moderna*, Zanichelli,1990

[3] Zweibach B., *A first course in string theory*, Cambridge University Press, 2^{nd} edition

[4] Polchinski P., *String theory, volume 1*, Cambridge University Press, 2001

[5] Tong D., *String theory*, University of Cambridge Part III Mathematical Tripos, 2009

[6] Yau S.-T., Nadis S., *La forma dello spazio profondo*, Il saggiatore, 2010

[7] Smolin L., *L'universo senza stringhe*, Le scienze, 2010

[8] Casadio R, *Elements of relativity*, Dispense 2015

[9] Alberghi G. L., Casadio R., Tronconi A., *Quantum gravity effects in black holes at the LHC*, Paper, 2008

[10] Ellerbroek L., *Hunting for Micro Black Holes*, Master's thesis, 2009

[11] Casadio R., Harms B., *Microcanonical Description of (Micro)Black Holes*, Article, 2011

[12] Vidotto F., Barrau A., Bolliet B., Shutten M., Weimer C., *Quantum gravity phenomenology with primordial black holes*, Paper, 2015

[13] Scardigli F., *Gravity Coupling from Micro-Black Holes*, Paper

[14] Adler R. J., *The Generalized Uncertainty Principle and Black Hole Remnants*, Saggio

[15] Hossenfelder S., *Minimal Lenght Scale Scenarios for Quantum Gravity*, Paper, 2013

[16] Maggiore M., *A Generalized Uncertainty Principle in Quantum Gravity*, Article

[17] Scardigli F., *Generalized Uncertainty Principle in Quantum Gravity from Micro-Black Hole Gedanken Experiment*, Physics Letter B, 1999

[18] Tawfik A. N., Diab A. M., *A review of generalized uncertainty principle*, Article,2015