

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

**GRUPPI TRIANGOLARI
E
TASSELLAZIONI**

Tesi di Laurea in Matematica

Relatore:
Dott.ssa
ALESSIA CATTABRIGA

Presentata da:
ELISA TIZZONI

V Sessione
Anno Accademico 2015/2016

Introduzione

È interessante notare come molti oggetti in natura siano caratterizzati da una struttura di base che si ripete sempre più o meno uguale: basti pensare alla regolarità dei cristalli. Anche nel mondo animale esistono casi simili, si può pensare ad esempio alle decorazioni dei rettili oppure alle cellette esagonali di un'arnia. È quindi possibile dire che sono presenti in natura modi diversi per ricoprire superfici utilizzando figure regolari, come fossero tasselli di un mosaico.

Osservando queste forme, fin dai tempi più antichi l'uomo ha cercato di imitarle. Nel corso dei secoli tali costruzioni geometriche sono state riprese più volte in campo artistico. Le tassellazioni nell'arte figurativa, astratta e nell'architettura sono da sempre un modo di unire estetica, eleganza e semplicità, e sono state utilizzate in miriadi di contesti: non è un caso che le tassellazioni vengano chiamate anche pavimentazioni.

Tuttavia il loro campo di applicazione non si limita all'estetica. Per esempio nella computer grafica, che sfrutta questa tecnica nel rendering di ambienti 3D, essa permette di definire superfici ed immagini sempre più dettagliate attraverso suddivisioni successive dei poligoni utilizzati, mostrando quanto ancora siano utili queste nozioni.

In questa tesi verranno prese in considerazione tassellazioni aventi tasselli triangolari, senza limitarsi alla sola geometria euclidea ma prendendo in considerazione spazi differenti come la superficie sferica ed il piano iperbolico.

La teoria dei gruppi sarà di grande aiuto nello sviluppo di questa trattazione: si parlerà soprattutto di gruppi di isometrie che portano una tassellazione in sé, cioè di gruppi di simmetrie della tassellazione. Verrà preso come riferimento il lavoro contenuto in [7], sviluppato dal noto matematico tedesco W. Magnus; i suoi studi hanno fornito importanti contributi, fra gli altri, anche allo studio delle tassellazioni.

Nel primo capitolo si partirà dagli elementi costitutivi della geometria euclidea piana così come sono definiti a partire dagli assiomi di Hilbert. Sulla base di tali assiomi verrà fornita una descrizione della geometria euclidea classica, che verrà in seguito comparata ad altri tipi di geometria nel secondo

capitolo. In particolare la trattazione si concentrerà sui modelli di sfera e piano iperbolico. Infine verranno introdotte le trasformazioni omografiche, o di Möbius, e verrà mostrato che sia il gruppo di isometrie della sfera che quelle del piano iperbolico possono essere visti come sottogruppi di tale gruppo.

Nel terzo capitolo verranno prima date le definizioni di tassellazione e di regione fondamentale, quindi si introdurranno i gruppi triangolari. Questi verranno definiti come gruppi generati dalle riflessioni rispetto ai lati di un triangolo (detto triangolo base) realizzabile nel piano euclideo, iperbolico o sulla sfera. A partire da tale definizione si fornirà una presentazione per il gruppo e si dimostrerà che tale gruppo coincide con il gruppo di simmetrie di una tassellazione per cui il triangolo base è un dominio fondamentale.

Indice

1	Assiomi di Hilbert della geometria euclidea piana	1
2	Geometrie non euclidee	4
2.1	Geometria Iperbolica	4
2.2	Geometria Sferica	6
2.3	Trasformazioni Omografiche o di Möbius	9
3	Gruppi triangolari	12
3.1	Tassellazioni	12
3.2	Gruppi Triangolari	13
3.3	Caso Euclideo	15
3.4	Caso Sferico	18
3.5	Caso Iperbolico	25
	Bibliografia	30

Capitolo 1

Assiomi di Hilbert della geometria euclidea piana

In questo capitolo sarà fornita una presentazione della geometria euclidea classica sulla base degli assiomi di Hilbert, descritti in [5]. In particolare, oltre ai punti e alle rette di tale geometria, si ricorderanno le isometrie che la caratterizzano.

Per cominciare con un po' di storia, ricordiamo che lo studio della geometria su basi logiche, svincolato dall'intuizione, fu iniziato nella Grecia antica. Negli *Elementi* di Euclide, infatti, la geometria veniva studiata per mezzo di assiomi formulati in modo esplicito. L'assiomatica degli *Elementi* è stata sostituita in tempi recenti da quella proposta da D. Hilbert alla fine del XIX secolo, si veda [4]. In essa si distinguono, per la geometria piana, cinque diversi tipi di assiomi, precisamente quelli di *incidenza*, *ordine*, *congruenza*, *parallele* e *continuità*, e si assumono come oggetti primitivi i *punti* e le *rette* tra i quali sussistono delle relazioni primitive che sono:

l'*appartenenza* di un punto ad una retta,

il *giacere* di un punto tra altri due,

la *congruenza* di segmenti e la congruenza di angoli.

Nel dettaglio, gli oggetti e le relazioni soddisfano ai seguenti assiomi:

1. Assiomi dell'incidenza

- Per due punti passa una e una sola retta.
- Ogni retta contiene almeno due punti.
- Esistono almeno tre punti che non giacciono sulla stessa retta.

2. Assiomi dell'ordine

- Di tre punti qualsiasi di una retta, uno e uno solo sta fra gli altri due.
- Se A e B sono due punti di una retta, esiste almeno un punto C tale che B stia fra A e C.
- Se una retta interseca un lato di un triangolo (cioè contiene un punto che sta fra due vertici), essa o passa per il vertice opposto o interseca un altro lato. (Assioma di Pasch)

3. Assiomi della congruenza

- Un segmento può esser sempre trasportato su una retta a partire da un punto della stessa e da ambo le parti di questo punto; il segmento ottenuto si chiama congruente a quello dato.
- Se due segmenti sono congruenti a un terzo, sono congruenti fra loro.
- Se su ciascuno di due segmenti congruenti sta un punto in modo tale, che una delle due parti in cui è diviso il primo segmento sia congruente a una delle due parti in cui è diviso il secondo segmento, anche la seconda parte del primo segmento è congruente alla seconda parte del secondo segmento.
- Un angolo può essere trasportato in uno e un solo modo da ciascuna delle due parti di una semiretta nel piano; l'angolo risultante si chiama congruente al primo.
- Se due lati e l'angolo da essi compreso di un triangolo sono eguali a due lati e all'angolo da essi compreso d'un secondo triangolo, i due triangoli sono congruenti. (Prima legge di congruenza)

4. Assioma delle parallele

- Per ogni punto che non sta su una retta data passa una e una sola retta che non tagli la retta data.

5. Assiomi della continuità

- Ogni segmento può esser misurato da ogni altro. (Assioma di Archimede)
- In ogni successione infinita di segmenti contenuti l'uno nell'altro (cioè tali che ognuno contenga il seguente) esiste sempre un punto comune a tutti questi segmenti. (Assioma di Cantor)

Hilbert dimostrò la non-contraddittorietà di questo sistema di assiomi costruendone un modello per mezzo di coordinate, essenzialmente riconducendosi alla non-contraddittorietà dei numeri reali.

La geometria che si ottiene è un modello di geometria euclidea piana in cui i punti sono gli elementi di \mathbb{R}^2 e in cui le rette sono definite come

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0; a, b, c \in \mathbb{R}; a \vee b \neq 0\}.$$

Infine, il trasporto di angoli e segmenti viene realizzato mediante il gruppo $Iso(\mathbb{R}^2)$, detto delle *congruenze* o *isometrie* di \mathbb{R}^2 , e costituito dalle biezioni

$$T_{\mathbf{a},L} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

definite da

$$T_{\mathbf{a},L}(x, y) = L(x, y) + \mathbf{a},$$

dove L è un elemento del gruppo ortogonale¹ $O_2(\mathbb{R})$ e $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$.

Un'isometria è detta *diretta* o *inversa* a seconda che L appartenga o meno a SO_2 , il sottogruppo di O_2 costituito dalle matrici con determinante 1.

In ultimo sono chiamate:

- *traslazioni* le isometrie per cui $L = Id$,
- *rotazioni* quelle per cui $L \in SO_2$ e $\mathbf{a} = \mathbf{0}$,
- *riflessioni* quelle per cui $L \notin SO_2$ e $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

¹Ricordiamo che il gruppo ortogonale di ordine n è un sottogruppo del gruppo generale lineare $GL_n(\mathbb{R})$ di tutte le matrici invertibili, è definito come segue:

$$O_n(\mathbb{R}) = \{Q \in GL_n(\mathbb{R}) \mid Q^T Q = Q Q^T = I\}.$$

Capitolo 2

Geometrie non euclidee

L'indipendenza degli assiomi della geometria euclidea è stata a lungo messa in dubbio, specialmente quella dell'assioma delle parallele rispetto agli altri. La questione fu risolta nella prima metà del secolo XIX con la scoperta da parte di N.I. Lobačevskij e J. Bolyai di un modello della cosiddetta *geometria non euclidea iperbolica*. Successivamente Riemann costruì un modello di *geometria non euclidea ellittica*, che differisce sia dalla geometria euclidea che dalla geometria iperbolica. In entrambe queste “nuove” geometrie l'assioma delle parallele è sostituito da un altro e ciò che ci si propone di fare, nelle sezioni successive, è dare una presentazione chiara e definita di punti, rette e isometrie in spazi differenti da quello euclideo. I principali testi di riferimento sono [9] nel caso della geometria iperbolica e [5] nel caso della sferica. In ultimo luogo verranno introdotte le trasformazioni omografiche, la cui importanza risulterà evidente nel capitolo successivo.

2.1 Geometria Iperbolica

Nella geometria iperbolica l'assioma delle parallele è sostituito dal seguente:

- 4.' Data una retta a e un punto $A \notin a$, esistono almeno due rette passanti per A che non intersecano a .

Un modello di geometria iperbolica è costituito dal semipiano di Poincaré

$$\mathcal{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$$

nel quale le rette sono le semirette verticali e le semicirconferenze aventi centro in un punto dell'asse x ; chiameremo queste curve *rette iperboliche*. L'assioma delle parallele, come detto prima, è sostituito dall'assioma (4'), infatti si verifica in modo elementare che, data una retta iperbolica l e un punto $z \notin l$, esistono infinite rette iperboliche contenenti z e disgiunte da l .

Dati due punti distinti $P, Q \in \mathcal{H}$, esiste un'unica retta iperbolica contenente P e Q : se i due punti hanno la stessa ascissa allora sono contenuti in una stessa semiretta verticale; se invece hanno ascisse diverse allora sono contenuti in una semicirconferenza avente come centro il punto dell'asse reale ottenuto intersecando l'asse reale stesso con l'asse del segmento PQ (si veda Figura 2.1).

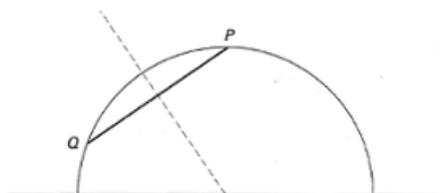


Figura 2.1: Retta iperbolica del tipo semi-circonferenza.

È evidente l'unicità della retta iperbolica contenente P e Q , quindi gli assiomi di incidenza sono soddisfatti. La relazione di ordine è definibile in questa geometria e anche gli assiomi dell'ordine sono soddisfatti, come è facilmente verificabile. Gli angoli iperbolici, i segmenti iperbolici, le semirette e i semipiani si definiscono in modo ovvio.

Per definire le relazioni di congruenza tra segmenti e angoli si procede in modo analogo al caso euclideo. Le relazioni di congruenza nel piano \mathbb{R}^2 sono definite per mezzo delle *congruenze*, che come si è già visto costituiscono un gruppo di trasformazioni del piano. Anche per il piano iperbolico verrà descritto un gruppo, da qui in poi indicato con Γ^* , che permetterà il trasporto di angoli e segmenti.

Per costruire Γ^* si può iniziare descrivendo Γ , il sottogruppo delle isometrie dirette. Tale gruppo è costituito dalle trasformazioni $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ della forma seguente (in notazione complessa):

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc > 0. \quad (2.1)$$

Il gruppo Γ^* è generato dagli elementi di Γ e dalla riflessione

$$R(z) = -\bar{z}, \quad (2.2)$$

che lascia fissa la retta immaginaria e scambia tra loro i due semipiani $x > 0$ e $x < 0$.

Quindi componendo R con gli elementi di Γ si ottengono elementi di Γ^* della forma

$$T(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc < 0.$$

In particolare viene chiamata *riflessione iperbolica* un'isometria (di ordine due) che fissa una retta iperbolica e scambia tra loro le due parti del semipiano individuate dalla retta. Nel caso in cui la retta iperbolica sia una retta euclidea la riflessione iperbolica coincide con la riflessione euclidea. Se invece la retta iperbolica è una semicirconferenza centrata nel punto x_0 dell'asse reale e avente raggio r , la riflessione, chiamata anche *inversione rispetto alla circonferenza*, ha equazione

$$z' = r^2 \frac{1}{\bar{z} - x_0} + x_0.$$

Un modello equivalente di piano iperbolico è costituito dal disco unitario

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| < 1\},$$

in tale modello le rette sono archi di circonferenze ortogonali al bordo oppure diametri e il gruppo delle isometrie è generato dalle funzioni del tipo

$$\Omega(z) = \frac{\omega z + \Phi}{\bar{\Phi} z + \bar{\omega}}, \quad \omega \bar{\omega} - \Phi \bar{\Phi} = 1, \quad (2.3)$$

e da

$$R(z) = -\bar{z}.$$

Tale modello è detto disco di Poincaré.

Un'isometria tra \mathcal{H} e \mathcal{D} è realizzata dalla funzione $\tau : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{D}$, che è data, in notazioni complesse, da:

$$\tau(z) = \frac{z - i}{z + i};$$

come vedremo nella prossima sezione essa è una particolare trasformazione di Möbius.

D'ora in avanti denoteremo con \mathbb{H}^2 , indifferentemente, il semipiano o il disco di Poincaré, riferendoci a loro come al *piano iperbolico*.

2.2 Geometria Sferica

Nella geometria sferica, invece, l'assioma delle parallele è sostituito dal seguente:

- 4° Data una retta a e un punto $A \notin a$, ogni retta passante per A interseca a .

Un modello di geometria sferica è costituito dalla sfera

$$\mathbb{S}^2 = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \mid X^2 + Y^2 + Z^2 = 1\}$$

in cui si prendono come rette le circonferenze massime. Tali circonferenze verranno chiamate *rette sferiche*.

Poiché due circonferenze massime qualsiasi si intersecano, è banale verificare che in questo modello l'assioma delle parallele non vale e che viene invece sostituito dall'assioma (4"). In questa geometria inoltre valgono gli assiomi di incidenza ma non quelli dell'ordine, poiché le rette della geometria sferica sono curve chiuse e quindi "non è possibile decidere di tre punti allineati quale stia tra altri due".

Per definire il trasporto e quindi la congruenza si usa il gruppo O_3 . Gli elementi in esso contenuti sono di due tipi:

- Rotazioni attorno ad un asse che passi per il centro della sfera. Sono queste le isometrie dirette, cioè quelle che corrispondono ad un movimento rigido fisicamente realizzabile rimanendo sulla superficie della sfera. Esse hanno determinante 1 e costituiscono il gruppo ortogonale speciale $SO(3)$.
- Simmetrie rispetto ad un piano passante per il centro della sfera oppure composizioni di una simmetria di questo tipo e di una rotazione del tipo precedente. Sono queste le isometrie inverse, cioè quelle che non corrispondono ad un movimento rigido fisicamente realizzabile sulla superficie della sfera (e, in realtà, nemmeno nello spazio).

Si noti che, per due punti diametralmente opposti della sfera, passano infinite circonferenze massime, mentre per due punti del piano passa una sola retta. Inoltre, mentre nel piano due rette hanno al massimo un punto in comune, due circonferenze massime della sfera si tagliano sempre in due punti (diametralmente opposti).

Con un semplice artificio è però possibile eliminare questa proprietà perturbatrice della sfera: basta infatti limitarsi alla superficie di un emisfero e considerare ogni coppia di punti diametralmente opposti come un punto unico.

Se inoltre una figura sferica oltrepassa i confini imposti, si conviene di sostituire i punti che si trovano all'esterno dell'emisfero coi punti a esso diametralmente opposti; questi vengono a trovarsi allora sull'emisfero considerato (Figura 2.2).

In questo modo si ottiene un sistema di punti avente tutte le proprietà desiderate. In primo luogo, ogni regione abbastanza piccola può essere riferita isometricamente a una regione della superficie sferica. In secondo luogo, il

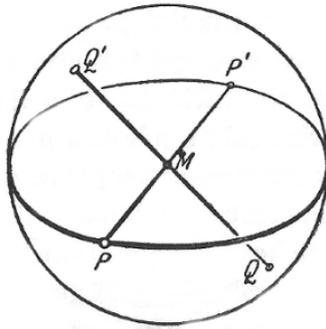


Figura 2.2: I punti diametralmente opposti vengono considerati come uno solo.

trasporto di segmenti e la congiunzione di due punti mediante rette sferiche non sono impediti da orli. In terzo luogo, due punti differenti sono sempre congiunti da un'unica retta sferica e due segmenti sferici non hanno mai più di un punto d'intersezione; queste ultime due proprietà derivano proprio dal fatto che le coppie di punti diametralmente opposti, contenute nel nostro sistema, sono sempre considerate come un punto solo.

La geometria che regola questo modello di superficie, analoga a quella svolta sul piano, è chiamata *geometria ellittica*, e la superficie stessa è designata come un modello del *piano ellittico*.

Un modello particolare della geometria ellittica si ottiene ovviamente partendo dalla superficie sferica completa e considerando ogni coppia di punti diametralmente opposti come un punto solo. In altre parole si può considerare il piano proiettivo reale direttamente come un modello di piano ellittico, purché l'eguaglianza di lunghezze e di angoli sia determinata, in questo modello, non nella maniera euclidea ma facendo uso della trigonometria sferica su una sfera ausiliaria.

Chiaramente anche per la geometria ellittica, come per la sferica, gli assiomi dell'ordine non sono soddisfatti. E' possibile però sostituire la relazione fra tre punti espressa da "fra" con una relazione di *separazione* tra quattro punti, per la quale valgono degli assiomi del tutto analoghi ai precedenti assiomi dell'ordine. Il primo di essi cita: *quattro punti d'una retta si possono scindere sempre, in uno e un solo modo, in due coppie che si separano a vicenda*. (Per esempio, nella Figura 2.3 i punti A, B, C, D si possono scindere nelle coppie AC e BD che si separano vicendevolmente.)

Come i corrispondenti assiomi dell'ordine nella geometria euclidea, anche gli assiomi della separazione nella geometria ellittica conducono alla definizione di segmento e agli altri concetti che s'impiegano negli assiomi della

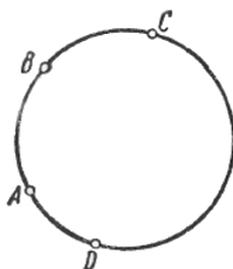


Figura 2.3: Esempio di “separazione” fra quattro punti.

congruenza. Bisogna però tener presente che due punti A e B determinano sempre due segmenti anziché uno solo, così come ogni circonferenza è divisa in due archi da due dei suoi punti. Soltanto con l’aiuto d’un terzo punto C della retta AB si possono distinguere i due segmenti AB l’uno dall’altro: uno dei segmenti è formato da tutti i punti che sono separati da C per mezzo di AB, l’altro dai punti rimanenti della retta AB. Inoltre bisogna escludere il caso che qualcuno degli angoli interni di un triangolo sia ottuso, perché altrimenti due lati e l’angolo da essi compreso non determinerebbero un unico triangolo, ma due triangoli incongruenti (Figura 2.4), e ciò sarebbe in contraddizione con la prima legge della congruenza.

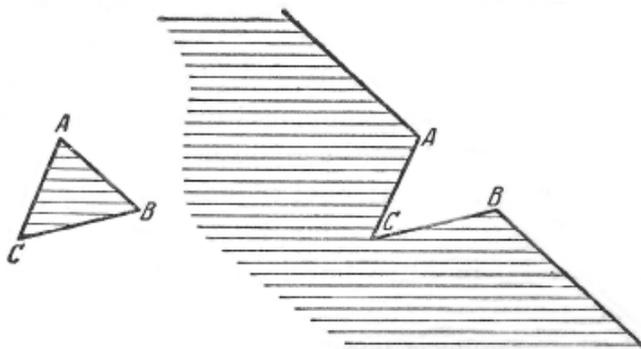


Figura 2.4: Esempio, nella *geometria ellittica*, di triangoli differenti derivati da un unico angolo, delimitato dai medesimi segmenti.

2.3 Trasformazioni Omografiche o di Möbius

In questa sezione verrà definito il gruppo G^* , gruppo delle trasformazioni omografiche che contiene le isometrie della sfera e del piano iperbolico. Tutti i riferimenti possono essere trovati in [7].

Sia dato il gruppo lineare speciale $SL_2(\mathbb{C})$, esso è definito come il gruppo di tutte le matrici complesse di ordine 2 con determinante 1, cioè

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}; \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}. \quad (2.4)$$

Il centro¹ del gruppo $SL_2(\mathbb{C})$ è costituito dalle matrici $\pm I$, dove I denota la matrice 2×2 unitaria. Il gruppo quoziente di $SL_2(\mathbb{C})$ fatto rispetto al suo centro è il gruppo proiettivo lineare speciale $PSL_2(\mathbb{C})$, che verrà denotato più brevemente con G . Si può definire un elemento g di G con una matrice della forma (2.4), con la consapevolezza che questa matrice e la sua opposta definiscono la stessa g .

Ora è possibile costruire il gruppo G^* come estensione di G nel modo seguente:

si aggiunga a G un elemento A^* di ordine 2 cosicché G diventi un sottogruppo di indice 2 in G^* . È possibile farlo richiedendo che A^* soddisfi le relazioni

$$(A^*)^2 = 1, \quad A^*g(A^*)^{-1} = \bar{g}, \quad (2.5)$$

dove

$$g = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}, \quad \bar{g} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ \bar{\gamma} & \bar{\delta} \end{bmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad (2.6)$$

e dove \bar{z} indica il complesso coniugato di $z \in \mathbb{C}$.

Ovviamente, A^* funge da automorfismo di G , inoltre (2.5) e (2.6) definiscono il gruppo G^* completamente.

D'ora in avanti verrà indicata con $\widehat{\mathbb{C}}$ la compattificazione uno-punto $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ di \mathbb{C} . È possibile far agire il gruppo G^* su $\widehat{\mathbb{C}}$ mandando

$$g \longrightarrow T_g \quad \text{e} \quad A^* \longrightarrow R_{A^*},$$

dove T_g e R_{A^*} sono trasformazioni del piano $\widehat{\mathbb{C}}$ in sé definite nel modo seguente:

$$T_g(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad (2.7)$$

dove $T_g(\infty) = \frac{\alpha}{\gamma}$ e $T_g(-\frac{\delta}{\gamma}) = \infty$;

¹Si dice *centro* di un gruppo G l'insieme $Z(G) = \{x \in G \mid ax = xa \ \forall a \in G\}$.

$$R_{A^*}(z) = \bar{z}. \quad (2.8)$$

Chiaramente il gruppo Γ^* delle isometrie nel semipiano di Poincaré, definito nella Sezione 2.1, è un sottogruppo di G^* .

Anche le isometrie della sfera sono un sottogruppo di G^* , è possibile infatti mandare i punti di \mathbb{S}^2 in $\widehat{\mathbb{C}}$ (che viene identificato con il piano $Z = 0$ nello spazio euclideo tridimensionale) tramite la *proiezione stereografica*

$$z = x + iy = \frac{X + iY}{1 - Z}, \quad (2.9)$$

dove (X, Y, Z) denotano le coordinate di un punto appartenente alla sfera \mathbb{S}^2 . Questa applicazione è un omeomorfismo che mantiene gli angoli; il polo nord $(0, 0, 1) \in \mathbb{S}^2$ corrisponde a $z = \infty$.

Attraverso la proiezione stereografica ogni mappa di Möbius induce un omeomorfismo di \mathbb{S}^2 .

È importante per lo sviluppo dei capitoli futuri sottolineare il seguente risultato.

Proposizione 2.1. *Le isometrie dirette, cioè le rotazioni, di \mathbb{S}^2 , corrispondono tramite proiezione stereografica alle trasformazioni di Möbius per cui $\delta = \bar{\alpha}$ e $\gamma = -\bar{\beta}$.*

Capitolo 3

Gruppi Triangolari

Si andrà ora a spiegare in maniera rigorosa cosa sia un gruppo triangolare e come tali gruppi agiscono sugli spazi introdotti precedentemente, in accordo con quanto spiegato in [7]. Si cercherà di dare una classificazione precisa dei gruppi in base alla natura dei tasselli che li compongono e verranno presi in esame, caso per caso, esempi e modelli di gruppi triangolari.

Per farlo è necessario introdurre alcune ulteriori definizioni che verranno presentate nella prima sezione. In particolar modo per la definizione di tassellazione ci si è rifatti a [8], con il quale abbiamo integrato il nostro testo di riferimento principale ossia [7].

3.1 Tassellazioni

Si definisce *tassellazione del piano euclideo* un ricoprimento del piano euclideo, senza vuoti o sovrapposizioni, per mezzo di poligoni che abbiano tutti la stessa dimensione e forma o, in altre parole, che siano congruenti tra loro. Ogni singolo poligono sarà chiamato *tassello*.

Il concetto di tasselli congruenti implica l'esistenza di un gruppo di mappe dal piano euclideo in sé stesso (nominalmente il gruppo dei movimenti rigidi), il quale permette di definire poligoni della stessa forma e dimensione in parti differenti del piano. Ovviamente, il concetto di tassellazione può essere generalizzato ad un qualsiasi spazio per il quale può essere definito un gruppo di auto-mappe con le proprietà dei moti rigidi, ovvero ad ogni spazio su cui è definito un gruppo di isometrie, come ad esempio il piano iperbolico o quello sferico. D'ora in avanti X indicherà o il piano iperbolico o quello sferico o quello euclideo.

In maniera più rigorosa e generale si può allora dare la seguente definizione.

Definizione 3.1. Una tassellazione di X è una collezione di poligoni $\{D_i\}_{i \in I}$, detti tasselli, tale che

$$X = \bigcup_{i \in I} D_i \quad \text{e} \quad \text{int}(D_i) \cap \text{int}(D_j) = \emptyset \quad \forall i \neq j.$$

Sia ora H un gruppo di isometrie su X . Sia P un punto in X e sia $H(P)$ l'orbita di P sotto H , cioè l'insieme di tutte le immagini di P sotto l'azione di H . Un punto Q viene detto *punto limite* di P se in ogni insieme aperto contenente Q ci sono infiniti punti che appartengono all'orbita $H(P)$.

Qui le immagini di un punto P sotto l'azione di diversi elementi del gruppo ($h_1, h_2 \in H, h_1 \neq h_2$) vengono considerate come differenti punti di $H(P)$. Questo implica che un punto fisso P di ogni mappa $h \in H$ sia automaticamente un punto limite di P se h è di ordine infinito.

È possibile dire che il gruppo H è *discontinuo* in una parte \bar{X} di X se \bar{X} è un insieme aperto che è mappato ogni volta in sé stesso da tutti gli elementi di H e se, per ogni punto $P \in \bar{X}$, nessun punto limite di P sta in \bar{X} .

Due punti P e P' in X verranno detti *equivalenti sotto H* se esiste un $h \in H$ tale che P' sia l'immagine di P sotto l'azione di h . Si può scrivere $P \underset{H}{\sim} P'$ o semplicemente $P \sim P'$ se H può essere sottinteso.

Definizione 3.2. Assumendo che H sia discontinuo in \bar{X} , si chiamerà dominio $D(H)$ una *regione fondamentale*, o *dominio fondamentale*, di H che possiede le seguenti proprietà:

1. $D(H)$ è l'unione di un insieme aperto D' , contenuto in \bar{X} , e dei punti del bordo di D' stesso tali che non sono punti limite di H .
2. Ogni punto in \bar{X} è equivalente ad un punto in $D(H)$, e nessun punto dell'insieme aperto D' è equivalente ad un differente punto in D' o ad un punto sul bordo di D' .

3.2 Gruppi Triangolari

In questa sezione verrà fornita la definizione di gruppo triangolare. Si enuncerà un teorema che ne descrive una presentazione e che interpreta i gruppi triangolari come i gruppi di isometrie associate ad una tassellazione, la quale avrà come regione fondamentale un triangolo realizzato, a seconda dei casi, nel piano euclideo, sferico o iperbolico. Tutti i risultati possono essere ritrovati in [7].

Definizione 3.3. Siano $l, m, n \in \mathbb{N}$ e ≥ 2 , sia

$$\delta = \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1, \quad (3.1)$$

e sia Δ un triangolo con angoli di ampiezza $\pi/l, \pi/m, \pi/n$. Se $\delta > 0$, allora Δ è un triangolo sferico. Se $\delta = 0$, allora Δ è euclideo e, se $\delta < 0$, allora Δ è un triangolo iperbolico. Siano L_0, M_0, N_0 , rispettivamente, i lati di Δ opposti agli angoli di ampiezza $\pi/l, \pi/m, \pi/n$, e siano L, M, N , rispettivamente, le riflessioni del particolare piano X (sferico, euclideo, iperbolico) rispetto alle geodetiche in cui i lati L_0, M_0, N_0 giacciono.

Il sottogruppo del gruppo delle isometrie di X generato da L, M, N sarà detto *gruppo triangolare di tipo* (l, m, n) e indicato con $T^*(l, m, n)$.

Il sottogruppo di $T^*(l, m, n)$ costituito dalle parole aventi lunghezza pari nei generatori L, M, N sarà denotato con $T(l, m, n)$. Il gruppo $T(l, m, n)$ è costituito dalle isometrie (o movimenti rigidi) di $T^*(l, m, n)$ che preservano l'orientazione ed è pertanto di indice 2 in $T^*(l, m, n)$. Δ verrà chiamato *triangolo di base* del gruppo $T^*(l, m, n)$.

Verrà utilizzata la convenzione di leggere il prodotto dei movimenti (euclidei o non euclidei) da destra a sinistra se rappresentati da matrici, e verrà usato frequentemente il fatto che i gruppi $T^*(l, m, n)$ e $T(l, m, n)$ non dipendono dall'ordine in cui l, m, n sono scritti.

Con un semplice conto si può dimostrare il seguente risultato.

Lemma 3.4. *Le uniche (a meno dell'ordine) terne l, m, n di interi positivi ≥ 2 per le quali la quantità δ di (3.1) soddisfa le condizioni $\delta = 0$ (caso euclideo) o $\delta > 0$ (caso sferico) sono rispettivamente quelle elencate nella tabella seguente*

$\delta = 0$			$\delta > 0$		
l	m	n	l	m	n
2	3	6	2	2	$n \geq 2$
2	4	4	2	3	3
3	3	3	2	3	4
			2	3	5

In tutti gli altri casi si ricade nel caso iperbolico in cui $\delta < 0$.

Alla luce di questo lemma si dimostrerà il seguente teorema, che fornisce una presentazione dei gruppi triangolari.

Teorema 3.5. *Il gruppo $T^*(l, m, n)$ è un gruppo discreto di isometrie di $\mathbb{H}^2, \mathbb{R}^2$ o \mathbb{S}^2 , ed il triangolo Δ è un dominio fondamentale per $T^*(l, m, n)$. Inoltre il gruppo è definito dalle relazioni*

$$L^2 = M^2 = N^2 = 1, \quad (3.2)$$

$$(LM)^n = (MN)^l = (NL)^m = 1. \quad (3.3)$$

La dimostrazione di tale teorema verrà divisa nei casi euclideo, sferico ed iperbolico che verranno trattati nelle successive sezioni.

3.3 Caso Euclideo

In questa sezione verrà provato il Teorema 3.5 nel caso euclideo, cioè per $\delta = 0$. Inoltre verrà dimostrato che il sottogruppo $T(l, m, n)$ di indice 2, costituito dai moti euclidei che preservano l'orientazione, ha come generatori due elementi u, v che sono rotazioni aventi come centro due dei vertici di Δ e come relazioni

$$u^n = v^m = (uv)^l = 1, \quad (3.4)$$

dove $u = LM$ e $v = NL$.

Grazie al Lemma 3.4 bisogna studiare soltanto tre casi, cioè $T(2, 3, 6)$, $T(3, 3, 3)$ e $T(2, 4, 4)$: il primo verrà analizzato in tutti i dettagli, mentre verrà data solo qualche indicazione per gli altri due.

Caso 1: il gruppo $T(2, 3, 6)$

Ricordando che $T(2, 3, 6) = T(6, 3, 2)$, si dimostrerà che quest'ultimo è generato dagli elementi u e v che, interpretati come moti euclidei, sono definiti da

$$z' = \epsilon z \quad e \quad z' - 1 = \epsilon^2(z - 1) \quad (\epsilon = e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}). \quad (3.5)$$

Verrà dimostrato che le relazioni

$$u^6 = v^3 = (vu)^2 = 1 \quad (3.6)$$

definiscono il gruppo $T(2, 3, 6)$. Inoltre verrà mostrato che gli elementi v_0, v_2 dati da

$$v_0 = vu^4, \quad v_2 = u^2vu^2 \quad (3.7)$$

e rappresentati, come isometrie, dalle traslazioni

$$z' = z + 1 - \epsilon^2 \quad \text{e} \quad z' = z + \epsilon^2 - \epsilon^4 \quad (3.8)$$

generano A , un sottogruppo normale abeliano libero di $T(6, 2, 3)$ che è di indice 6 ed ammette gli elementi u^ν ($\nu = 0, 1, \dots, 5$) come rappresentanti delle classi laterali.

Infine sarà fatto vedere che una regione fondamentale canonica per $T(6, 2, 3)$ è data dal quadrilatero Q con vertici

$$0, \quad \frac{1}{2}\sqrt{3}\epsilon, \quad 1, \quad \frac{1}{2}\sqrt{3}\epsilon^5.$$

I primi tre di questi punti sono i vertici di un triangolo Δ con angoli $\pi/6$, $\pi/2$, $\pi/3$ che, come verrà mostrato, è una regione fondamentale canonica per $T^*(6, 2, 3)$. La Figura 3.1 mostra Δ (ombreggiato) e parte della tassellazione che deriva da Δ sotto l'azione di $T^*(6, 2, 3)$.

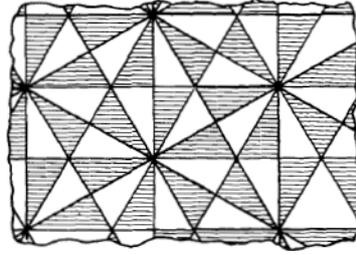


Figura 3.1: Tassellazione generata da $T^*(2, 3, 6)$ su \mathbb{R}^2 .

Il quadrilatero Q è l'unione di Δ e Δ' , che è l'immagine di Δ attraverso la riflessione rispetto all'asse reale.

Si può iniziare analizzando il gruppo astratto presentato dai due generatori u e v e definito dalle relazioni in (3.6). Aggiungendo la relazione $vu^{-2} = 1$ è possibile mandare con un omomorfismo questo gruppo nel gruppo ciclico di ordine 6 generato da u . Mediante il metodo Reidemeister-Schreier si ottiene che il nucleo dell'omomorfismo è generato dai seguenti elementi

$$v_\mu = u^\mu v u^{4-\mu} \quad (\mu = 0, \dots, 5).$$

Le relazioni $v^2 = 1$ e $(vu)^2 = 1$ assieme alle loro coniugate producono le relazioni

$$v_0 v_2 v_4 = v_1 v_3 v_5 = 1 \quad \text{e} \quad v_0 v_3 = v_1 v_4 = v_2 v_5 = 1,$$

che permettono di esprimere tutte le v_μ in termini di v_0 e v_2 . Inoltre è possibile dedurre da esse la relazione $v_0 v_2 = v_2 v_0$.

Con una elementare osservazione geometrica si nota che il gruppo $T(6, 2, 3)$ è generato dagli elementi corrispondenti alle isometrie aventi le equazioni (3.5), è possibile inoltre verificare che tali elementi soddisfano le relazioni (3.6) per u e v . Comunque, bisogna mostrare che questi elementi non soddisfano altre relazioni che non derivino da (3.6). Questo segue dal fatto che il gruppo astratto definito dai generatori u, v e dalle relazioni (3.6) ammette la seguente soluzione del *word problem*: ogni elemento del gruppo ha un'unica espressione del tipo

$$u^\nu v_0^k v_2^l \quad (\nu = 0, 1, \dots, 5; k, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (3.9)$$

Utilizzando le espressioni di u, v_0, v_2 in termini di isometrie, richiamate in (3.5) e (3.8), si ottiene la seguente espressione di $u^\nu v_0^k v_2^l$ come isometria

$$z' = \epsilon^\nu z + \epsilon^\nu [k(1 - \epsilon^2) + l(\epsilon^2 - \epsilon^4)]. \quad (3.10)$$

Questa coincide con l'identità se e solo se (3.9) è l'elemento unitario, e cioè se $\nu = k = l = 0$.

Rimane da mostrare che il quadrilatero Q definito prima produce una tassellazione del piano sotto l'azione delle isometrie definite dalle equazioni (3.10): per farlo basta osservare che, facendo agire u^ν ($\nu = 0, \dots, 5$) su Q , si ottiene un esagono regolare (vedi Figura 3.1), e dimostrare in seguito che, per $\nu = 0$, le traslazioni (3.10) applicate all'esagono determinano una tassellazione del piano.

Caso 2: il gruppo $T(3, 3, 3)$

Questo è un sottogruppo di indice 2 in $T(2, 3, 6)$. La sua regione fondamentale canonica è un rombo con vertici

$$o, 1, \epsilon, \epsilon^2.$$

I generatori u e v possono essere rappresentati rispettivamente dalle isometrie (rotazioni)

$$z' = \epsilon^2 z \quad e \quad z' - \epsilon = \epsilon^2(z - \epsilon).$$

Gli elementi $v_0 = vu^{-1}$ e $v_1 = uvu^{-2}$ generano un sottogruppo libero abeliano A con gruppo quoziente ciclico ed avente $1, u, u^2$ come rappresentanti delle classi laterali in $T(3, 3, 3)$. Gli elementi v_0 e v_1 sono rappresentati rispettivamente dalle traslazioni

$$z' = z + \epsilon + 1 \quad e \quad z' = z + \epsilon^2 - 1.$$

Come regione fondamentale di A è possibile usare lo stesso esagono del caso $T(6, 3, 2)$. La situazione è illustrata nella Figura 3.2

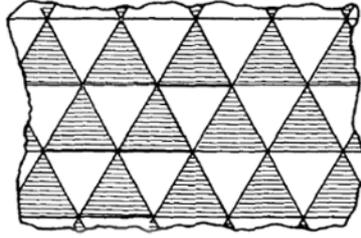


Figura 3.2: Tassellazione generata da $T(3, 3, 3)$ su \mathbb{R}^2 .

Caso 3: il gruppo $T(2, 4, 4)$

La situazione è illustrata dalla Figura 3.3. E' così simile alla tassellazione della scacchiera che non scenderemo nei dettagli.

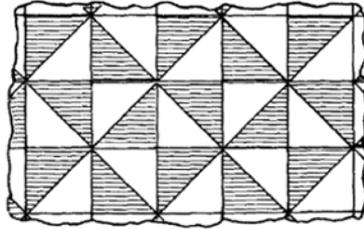


Figura 3.3: Tassellazione generata da $T(2, 4, 4)$ su \mathbb{R}^2 .

3.4 Caso Sferico

Verranno ora presi in esame i casi aventi $\delta > 0$ della tabella contenuta nel Lemma 3.4. Come riepilogo ricordiamo il nostro scopo, ossia giungere a dimostrare che le riflessioni L, M, N nei lati di un triangolo sferico Δ generano un gruppo $T^*(l, m, n)$ per il quale Δ è una regione fondamentale canonica. Le relazioni (3.2), (3.3) definiscono il gruppo. Verrà esaminato nel dettaglio il caso $T^*(2, 2, n)$, mentre negli altri casi verranno descritti i principali passaggi. In particolare verrà mostrato che $T^*(2, 3, 3)$, $T^*(2, 3, 4)$, $T^*(2, 3, 5)$ corrispondono alle simmetrie dei solidi platonici.

Caso 4: Il gruppo diedrale $T(2, 2, n)$.

Sia $\epsilon = e^{\pi i/n}$. Si scelga come triangolo Δ sulla sfera il triangolo con un vertice nel polo sud, cioè in $(0, 0, -1)$, e con vertici $z = 1$ e $z = \epsilon$ sull'equatore, che è contenuto nel piano complesso identificato con il piano di equazione $Z = 0$. La proiezione stereografica manda il polo sud in $z = 0^1$. Le riflessioni di Δ

¹Si veda l'equazione (2.9).

attraverso l'asse reale producono il triangolo Δ' , che, assieme a Δ , forma una regione fondamentale di $T(2, 2, n)$. I moti associati ad u e v possono essere definiti rispettivamente dalle matrici seguenti

$$U = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \bar{\epsilon} \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \quad (3.11)$$

per cui vale

$$U^n = V^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

La matrice U definisce una rotazione con $z = 0$ come punto fisso e con $2\pi/n$ come angolo di rotazione. Tale rotazione sarà il generatore u di $T(2, 2, n)$. Il generatore v di $T(2, 2, n)$, definito da V , è di ordine 2 e rappresenta una rotazione della sfera con $z = 1$ come punto fisso. Si ottiene

$$u^n = v^2 = (uv)^2 = 1, \quad (3.13)$$

dove uv ha i punti $\pm\epsilon$ come punti fissi. Il gruppo generato da u e v e avente come relazioni le (3.13) è di ordine $2n$, e ognuno dei suoi elementi può essere espresso unicamente nella forma

$$u^\nu v^\delta \quad (\nu = 0, \dots, n-1; \delta = 0, 1).$$

I corrispondenti movimenti della sfera spostano $\Delta \cup \Delta'$ in $2n$ posizioni differenti che danno vita ad una tassellazione della sfera. Le matrici U, V stesse generano un gruppo di ordine $4n$ che è un'estensione centrale non-splitting di $T(2, 2, n)$ e che può essere definito dalle relazioni

$$U^n = V^2 = (UV)^2, \quad (3.14)$$

dove $U^n = V^2$ appartiene al centro ed è di ordine 2.²

Questo evento è tipico per la rappresentazione dei gruppi di rotazioni sferiche in termini di matrici unitarie, si veda la Proposizione 2.1. Questo gruppo *non* è isomorfo a $T^*(2, 2, n)$, il quale è anch'esso di ordine $4n$ e che possiede, nel caso in cui $n = 2m$, un elemento centrale che è di ordine 2. Ma nel caso di $T^*(2, 2, 2m)$ questo elemento centrale genera un fattore diretto di $T^*(2, 2, 2m)$. Esso è rappresentato dalla mappa antipodale della sfera³, che può essere espressa come Nu^m , dove $u = LM$, $v = MN$. È possibile verificare che in $T^*(2, 2, 2m)$, dato da

²Per provare quest'osservazione, si noti che $V^2 = (UV)^2$ può essere scritta come

$$U^{-1} = VUV^{-1}, \quad \text{che implica} \quad U^{-n}VU^nV^{-1} = U^n.$$

Perciò $U^{2n} = V^4 = 1$ e il gruppo quoziente del gruppo generato da V^2 è $T(2, 2, n)$.

³La mappa antipodale della sfera è quella mappa che manda (X, Y, Z) in $(-X, -Y, -Z)$.

$$\begin{aligned} L^2 = M^2 = N^2 = 1, \quad LM = u, \quad MN = v, \\ u^{2m} = v^2 = (uv)^2 = 1, \end{aligned} \quad (3.15)$$

l'elemento Nu^m appartiene al centro. È ovvio che non si tratta di un elemento del sottogruppo $T(2, 2, 2m)$ poiché non ha lunghezza pari se espresso nelle lettere L, M, N . Inoltre Nu^m è di ordine 2, dato che

$$Nu^mNu^m = (NuN^{-1})^m u^m = v^{-1}u^{-m}vu^m = (v^{-1}uv)^{-m}u^m$$

e $v^{-1}uvu = v^{-2}(vu)^2 = 1$, che implica $v^{-1}uv = u^{-1}$. Si può aggiungere che, in (3.15), L, M, N sono, rispettivamente, le riflessioni di $\widehat{\mathbb{C}}$ nell'asse reale, nella retta $z = \epsilon t$ ($-\infty < t < \infty$), e nella circonferenza unitaria.

Caso 5: Il gruppo tetraedrico $T(3, 3, 2)$.

Una tassellazione della sfera con triangoli congruenti a Δ (che ha angoli $\pi/3, \pi/3, \pi/2$) può essere costruita inscrivendo un tetraedro regolare in una sfera e prendendo come vertici sia i vertici del tetraedro che i punti ottenuti proiettando sulla sfera, a partire dal centro della sfera, i punti medi degli spigoli del tetraedro e i centri delle facce del tetraedro (si veda la Figura 3.4).

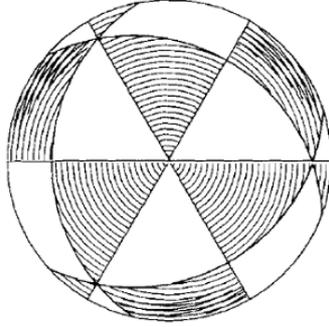


Figura 3.4: Tassellazione del gruppo tetraedrico su \mathbb{S}^2 .

Ripetute riflessioni della sfera nei lati del triangolo Δ producono il gruppo $T^*(3, 3, 2)$ dotato di generatori L, M, N e avente le relazioni

$$L^2 = M^2 = N^2 = 1, \quad (LM)^3 = (MN)^3 = (NL)^2 = 1. \quad (3.16)$$

Questo gruppo è isomorfo a Σ_4 , il gruppo simmetrico delle permutazioni su quattro lettere, posto che L, M, N vengono identificati, rispettivamente, con le permutazioni (12), (23) e (34).

Il gruppo $T(3, 3, 2)$ è il sottogruppo di $T^*(3, 3, 2)$ composto da parole di lunghezza pari in L, M, N . Esso è generato da $u = LM$ e $v = MN$ e definito dalle relazioni

$$u^3 = v^3 = (uv)^2 = 1. \quad (3.17)$$

Questo è il *gruppo tetraedrico*, isomorfo ad A_4 , ossia il gruppo alternante delle permutazioni su quattro parole. Esso corrisponde al gruppo dei movimenti propri (cioè rotazioni) della sfera che portano il tetraedro originale in sé stesso, cioè alle simmetrie dirette del tetraedro. Come sua regione fondamentale è possibile fissare Q dato dall'unione di Δ e di una delle sue immagini riflesse Δ' ; i vertici di Q sono ora due vertici del tetraedro e il centro di una faccia sulla quale entrambi questi vertici giacciono. I punti medi degli spigoli del tetraedro sono ora usciti di scena; inoltre Q appare come un triangolo con angoli $2\pi/3, \pi/3, \pi/3$: come illustrato in Figura 3.4 il triangolo Q si ottiene combinando ogni triangolo ombreggiato Δ^* con uno dei particolari triangoli adiacenti non ombreggiati che incontrano Δ^* nel vertice con angolo $\pi/2$. Il poligono risultante Q è effettivamente un quadrilatero con angolo π in uno dei suoi vertici; esso sembra, quindi, un triangolo con angoli $\pi/3, \pi/3, 2\pi/3$.

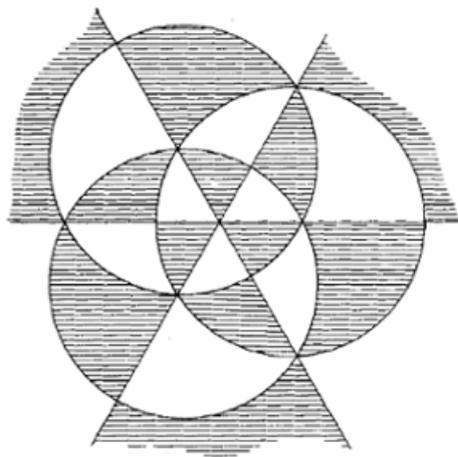


Figura 3.5: Tassellazione del gruppo tetraedrico su $\widehat{\mathbb{C}}$.

Tuttavia, i punti fissi della rotazione di ordine 2 sono ancora i punti medi degli spigoli, proiettati sulla sfera. Le rotazioni u, v che generano $T(2, 3, 3)$ possono essere rappresentate come matrici unitarie U, V definite da

$$\begin{aligned}
U &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-i) & \frac{1}{2}(1-i) \\ \frac{1}{2}(-1-i) & \frac{1}{2}(1+i) \end{bmatrix}, & V &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-i) & \frac{1}{2}(-1-i) \\ \frac{1}{2}(1-i) & \frac{1}{2}(1+i) \end{bmatrix}, \\
UV &= \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

La tassellazione della sfera associata a $T^*(3, 3, 2)$ e rappresentata in Figura 3.4 può essere trasferita a $\widehat{\mathbb{C}}$ tramite proiezione stereografica; il risultato è mostrato nella Figura 3.5.

Caso 6: Il gruppo ottaedrico $T(2, 3, 4)$.

Verranno mostrati solo i passi salienti della dimostrazione, tutti i dettagli si trovano in [3]. Per cominciare si noti che il triangolo sferico Δ con angoli $\pi/4, \pi/3, \pi/2$ produce, tramite ripetute riflessioni nei propri lati, una tassellazione della sfera formata da 48 copie congruenti a Δ . Le riflessioni L, M, N nei lati di Δ generano un gruppo $T^*(2, 3, 4)$ avente le relazioni

$$L^2 = M^2 = N^2 = 1, \tag{3.19}$$

$$(LM)^4 = (MN)^3 = (NL)^2 = 1. \tag{3.20}$$

Esso possiede un sottogruppo $T(2, 3, 4)$ generato dagli elementi $u = LM$ e $v = MN$ soddisfacenti le relazioni

$$u^4 = v^3 = (uv)^2 = 1,$$

dove u e v sono rotazioni della sfera che corrispondono, rispettivamente, alle trasformazioni di Möbius con matrici U, V definite da

$$U = \begin{bmatrix} (1-i)/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & (i+1)/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-i) & \frac{1}{2}(1-i) \\ \frac{1}{2}(-1-i) & \frac{1}{2}(1+i) \end{bmatrix}. \tag{3.21}$$

Le matrici U, V stesse generano un'estensione centrale non-splitting di ordine 48 del gruppo $T(4, 3, 2)$, che può essere definita dalle relazioni

$$U^4 = V^3 = (UV)^2. \tag{3.22}$$

Il gruppo $T(4, 3, 2)$ è isomorfo a Σ_4 ; esso è chiamato gruppo ottaedrico perché le rotazioni u, v generano il gruppo di tutte le rotazioni che mandano un ottaedro regolare, inscritto nella sfera unitaria, in sé stesso. Il gruppo $T^*(4, 3, 2)$ è il prodotto diretto di $T(4, 3, 2)$ con un gruppo di ordine 2 generato da $(LMN)^3$, che rappresenta la mappa antipodale (si veda [2]).

Dal fatto che $(LMN)^3$ è costituito da un numero di fattori dispari L, M, N , esso non può essere contenuto in $T(4, 3, 2)$. Anche se esso appartiene al centro ed è di ordine 2, deve comunque generare un fattore diretto di $T^*(4, 3, 2)$.

La Figura 3.6 mostra la tassellazione della sfera tramite triangoli con angoli $\pi/4, \pi/3, \pi/2$ e la Figura 3.7 mostra la tassellazione di $\hat{\mathbb{C}}$ che si ottiene mediante proiezione stereografica delle tassellazioni sferiche.

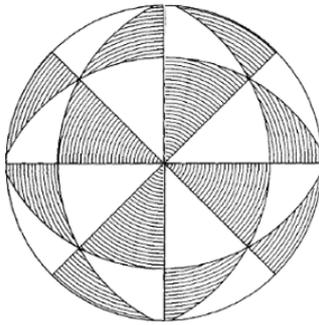


Figura 3.6: Tassellazione del gruppo ottaedrico su \mathbb{S}^2 .

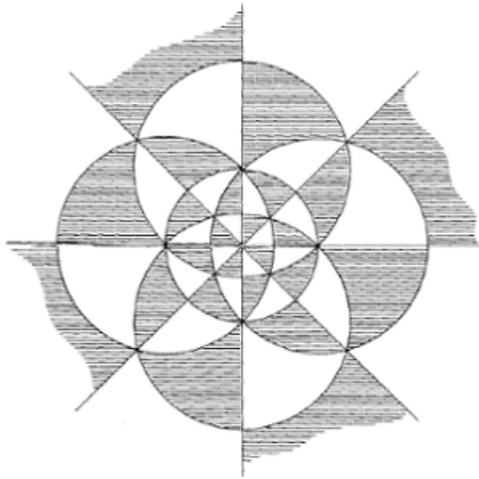


Figura 3.7: Tassellazione del gruppo ottaedrico su $\hat{\mathbb{C}}$.

Caso 7: Il gruppo icosaedrico $T(2, 3, 5)$.

Il gruppo $T^*(2, 3, 5)$ è generato dalle riflessioni L, M, N nei lati di un triangolo sferico con angoli $\pi/5, \pi/2, \pi/3$. In Figura 3.8 è illustrata la tassellazione della sfera ottenuta in tal modo, mentre in Figura 3.9 è illustrata la corrispondente tassellazione di $\hat{\mathbb{C}}$.

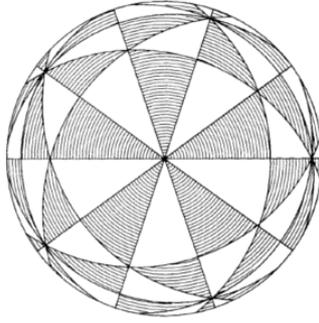


Figura 3.8: Tassellazione del gruppo icosaedrico su \mathbb{S}^2 .

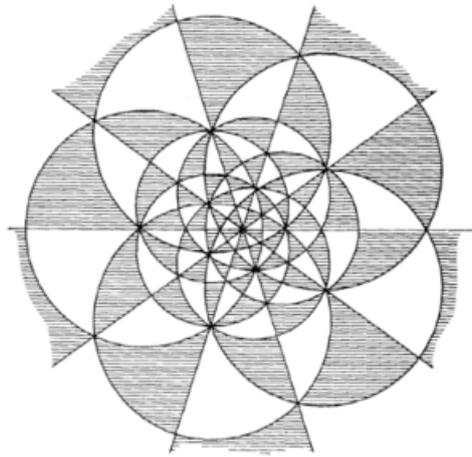


Figura 3.9: Tassellazione del gruppo icosaedrico su $\widehat{\mathbb{C}}$.

Il sottogruppo $T(2, 3, 5)$ di indice 2 consiste nelle rotazioni della sfera che mandano un icosaedro regolare inscritto nella sfera in sé stesso. Segue anche da ragionamenti di geometria elementare che $T(2, 3, 5)$ è di ordine 60, isomorfo ad A_5 (il gruppo alterno di cinque simboli), ed è generato dalle rotazioni u, v tali che

$$u^5 = v^3 = (uv)^2 = 1, \quad (3.23)$$

dove

$$u = LM, \quad v = MN, \quad uv = LN. \quad (3.24)$$

Per i dettagli si veda [6].

Le rotazioni u e v corrispondono a trasformazioni di Möbius rappresentate dalle matrici

$$U = \begin{bmatrix} \epsilon^3 - & 0 \\ 0 & -\epsilon^2 \end{bmatrix}, \quad \frac{-1}{\sqrt{5}}V = \begin{bmatrix} \epsilon^3 - \epsilon & 1 - \epsilon^4 \\ \epsilon - 1 & \epsilon^2 - \epsilon^4 \end{bmatrix} \quad (\epsilon = e^{2\pi i/5}). \quad (3.25)$$

3.5 Caso Iperbolico

In questa sezione verrà provato il Teorema 3.5 nel caso iperbolico, cioè per tutte quelle terne l, m, n tali per cui $\delta < 0$. In particolare verrà mostrato che, indicate con L, M, N le riflessioni nei lati di un triangolo iperbolico Δ_0 con angoli di ampiezza $\pi/l, \pi/m, \pi/n$, le immagini di Δ_0 sotto l'azione degli elementi del gruppo $T^*(l, m, n)$ generato da L, M, N tassellano il piano iperbolico.

La difficoltà maggiore nel dimostrare ciò consiste nel provare l'affermazione secondo cui le immagini di Δ_0 tassellano il piano iperbolico. Una dimostrazione elementare è stata data da Carathéodory, vedi [1], ed essa include anche i casi dove uno o più degli angoli $\pi/l, \pi/m, \pi/n$ sono zero. In questa tesi non verrà provata questa parte, si dimostrerà invece che le relazioni (3.2) e (3.3) sono sufficienti, anche nel caso iperbolico, a presentare il gruppo $T^*(l, m, n)$. D'ora in avanti si assumerà, quindi, che le immagini di Δ_0 sotto l'azione di $T^*(l, m, n)$ tassellino il piano iperbolico.

Si consideri per primo il caso in cui gli interi l, m, n siano differenti l'uno dall'altro. In questo caso, è vero ciò che segue: sia $\Theta = W(L, M, N)$ una parola nei generatori L, M, N di $T^*(l, m, n)$ che definisca una particolare isometria del piano iperbolico. Sia $\Delta = \Theta(\Delta_0)$ l'immagine di Δ_0 sotto l'azione di Θ . Dato che le immagini di Δ_0 sotto l'azione degli elementi di T^* tassellano il piano, Δ e Δ_0 possono avere un punto interno in comune solo se Δ coincide con Δ_0 . Ma in questo caso Θ deve essere l'applicazione identità dato che i vertici di Δ_0 devono essere mandati in sé stessi (altrimenti angoli di diverse dimensioni dovrebbero essere congruenti tra loro), e un'isometria iperbolica che mantiene fissi tre punti, se questi tre punti non sono allineati, è l'identità.

La Figura 3.10 mostra la tassellazione del piano iperbolico corrispondente al caso $T^*(2, 3, 7)$. A tale figura è possibile fare riferimento per quanto seguirà.

Vale il seguente lemma, che pur avendo valenza generale sarà qui enunciato solo nel caso di interesse.

Lemma 3.6. *L'immagine Δ_ν di Δ_0 ottenuta sotto l'azione di*

$$\gamma_\nu = g_1 g_2 \dots g_\nu$$

in $T^*(l, m, n)$ è adiacente all'immagine $\Delta_{\nu+1}$ ottenuta sotto l'azione di

$$\gamma_{\nu+1} = g_1 g_2 \cdots g_\nu g_{\nu+1},$$

inoltre il lato in comune fra Δ_ν e $\Delta_{\nu+1}$ è il lato di Δ_ν associato a $g_{\nu+1}$. Questo è vero anche per $\nu = 0$, se denotiamo l'elemento unitario con g_0 .

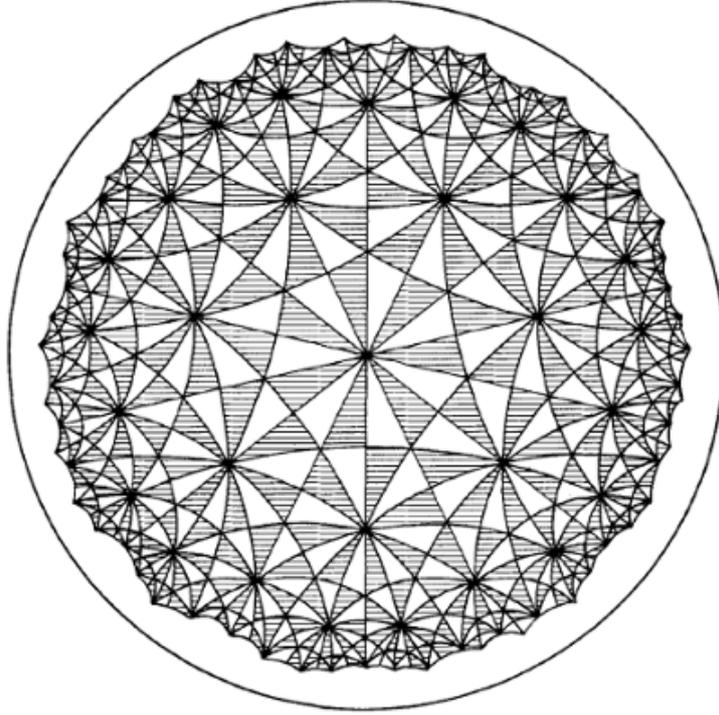


Figura 3.10: Tassellazione del disco di Poincaré corrispondente al gruppo triangolare $T^*(2, 3, 7)$.

Grazie a tale lemma è possibile assegnare una catena C di triangoli Δ_ν ($\nu = 0, \dots, n$) a $\Theta = W(L, M, N)$. Dato che L, M, N sono di ordine due, si può assumere che W sia scritta nella forma

$$W = g_1 g_2 \cdots g_n, \tag{3.26}$$

dove ogni g_ν ($\nu = 1, \dots, n$) denota uno fra L, M o N e dove g_ν e $g_{\nu+1}$ non denotano mai lo stesso generatore. La catena C consiste quindi di una sequenza di triangoli congruenti Δ_ν ($\nu = 0, \dots, n$), ognuno dei quali deriva dal precedente tramite riflessione in uno dei suoi lati. Dato che $g_\nu \neq g_{\nu+1}$, non succede mai che $\Delta_{\nu+1}$ si rifletta nuovamente in Δ_ν . In altre parole, $\Delta_\nu \neq \Delta_{\nu+2}$. Sia ora $W(L, M, N)$ un relatore di $T^*(l, m, n)$: chiaramente vale $\Delta_0 = \Delta_n$. Alla catena C si associ un poligono chiuso Π costruito come segue: scelto un punto P_0 nella parte interna di Δ_0 , si denoti con P_ν la

sua immagine in Δ_ν . Vengano segnati anche i punti medi $Q_\lambda^{(0)}$ ($\lambda = 1, 2, 3$) dei lati di Δ_0 e si denotino i corrispondenti punti medi dei lati di Δ_ν con $Q_\lambda^{(\nu)}$. Si uniscano quindi P_ν e $P_{\nu+1}$ con il particolare punto medio $Q_\lambda^{(\nu)}$ del lato che Δ_ν e $\Delta_{\nu+1}$ hanno in comune, tramite segmenti di retta i quali saranno, rispettivamente, contenuti in Δ_ν e in $\Delta_{\nu+1}$ grazie alla convessità dei triangoli. Allora Π è il poligono orientato che ha come bordo la spezzata che comincia in P_0 , è costituita dai segmenti costruiti sopra e termina in P_0 .

Questo poligono Π potrebbe intersecare sé stesso. Se questo fosse il caso, allora dovrebbe accadere che un triangolo Δ_ν coincida con un triangolo $\Delta_{\nu+\mu}$, dove

$$0 \leq \nu < \nu + \mu \leq n,$$

e vale almeno una fra $0 < \nu$ oppure $\nu + \mu < n$ (o entrambe). In questo caso, una sottoparola di g_p formata da μ simboli all'interno di W rappresenta l'elemento unitario di $T^*(l, m, n)$, e scegliendo la più breve sottoparola non banale di questo tipo è possibile associarle ad un poligono Π semplice (cioè, che non si auto-interseca). Quindi si può assumere che il poligono Π associato al nostro W originale abbia già questa proprietà.

Dato che Π racchiude un'area finita, solo un numero finito di triangoli appartenenti alla tassellazione del piano iperbolico può avere punti nella parte interna di Π ; questo deriva dal fatto che ogni triangolo ha un'area positiva e dal fatto che, in ogni vertice di un triangolo dentro Π , solo un numero finito di triangoli della tassellazione si incontrano (dato che Π stesso passa solo attraverso n triangoli Δ_ν). Ogni Δ_ν ha almeno uno e al massimo due vertici nella parte interna I^* di Π . Questo segue dall'assioma di Pasch (si veda Capitolo 1) dato che Π interseca esattamente due lati di ogni Δ_ν e dato che ognuno di questi due lati deve avere un estremo all'interno e l'altro all'esterno di Π .

Sia P un particolare vertice dentro Π appartenente ad uno dei triangoli di C , e siano $\Delta_\nu, \dots, \Delta_{\nu+k}$ i triangoli consecutivi della catena che forma Π e che si incontrano in P . (Se $\nu + \mu \geq n$, basta ridurre $\nu + \mu$ modulo n ad un numero tra 0 e $n - 1$.) Allora $k > 0$ dato che almeno due triangoli consecutivi della catena C si incontrano in P , precisamente quelli che hanno un lato in comune di cui P e un punto fuori da Π sono gli estremi. Siano $\Delta_\nu, \Delta_{\nu+1}, \dots, \Delta_{\nu+k}; \Delta'_1, \dots, \Delta'_s$ gli insiemi di triangoli distinti della nostra tassellazione che si incontrano in P ; è possibile assumere che essi si susseguano nell'ordine in cui sono scritti in modo che ciascuno abbia un lato in comune con il precedente e che Δ'_s abbia un lato in comune con Δ_ν (ovviamente, possiamo avere $s = 0$).

Ora è possibile sostituire in C i triangoli $\Delta_\nu, \Delta_{\nu+1}, \dots, \Delta_{\nu+k}$ con la sequenza $\Delta_\nu, \Delta'_s, \dots, \Delta'_1, \Delta_{\nu+k}$ e modificare Π di conseguenza, ottenendo in tal modo un nuovo poligono Π' . Allora P è fuori da Π' , ma Π' stesso non contiene alcun punto esterno a Π . Non è più detto che Π' sia un poligono semplice, ma è ancora l'unione di poligoni semplici connessi o tramite punti o tramite

poligoni senza alcuna parte interna. Questi allora consistono di sequenze di segmenti attraverso i quali il bordo orientato di Π' è percorso in entrambe le direzioni. Dato che il numero totale di vertici dei triangoli che tassellano l'interno di Π' è minore del corrispondente numero per Π , il nostro processo, se portato avanti, dovrà terminare dopo un numero finito di passaggi con un poligono Π^* "monodimensionale", che non ha cioè alcuna parte interna. Ora bisogna interpretare queste considerazioni geometriche in termini algebrici. La sostituzione dei triangoli $\Delta_\nu, \Delta_{\nu+1}, \dots, \Delta_{\nu+k}$ con i triangoli $\Delta_\nu, \Delta'_s, \dots, \Delta'_1, \Delta_{\nu+k}$ significa che da qualche parte nella parola $W(L, M, N)$ che definisce Π abbiamo sostituito k simboli di una delle parole

$$(LM)^n, \quad (MN)^l, \quad (NL)^m,$$

con l'inverso del prodotto dei rimanenti simboli: cioè abbiamo utilizzato le relazioni (3.3) (si noti che non i triangoli ma le transizioni da un triangolo al successivo sono definite dai generatori L, M, N).

Facendo questo passaggio ripetutamente prima o poi la nostra parola W si trasformerà in una parola W^* che definirà un poligono Π^* senza alcun punto interno. Ma allora lungo il bordo di Π , ad un certo punto, si succederanno un segmento e lo stesso segmento con orientazione opposta. Questo significa che uno dei generatori L, M, N in W^* è seguito dallo stesso generatore. Utilizzando le relazioni $L^2 = M^2 = N^2 = 1$, questi due simboli in W^* possono essere omessi. Ripetendo tale processo si ottiene la parola vuota.

Risulta quindi provata la nostra tesi nel caso in cui l, m, n siano interi distinti.

Si supponga ora $m = n$.

Allora è possibile bisecare Δ_0 disegnando una delle sue altezze, ottenendo un triangolo Δ'_0 con angoli $\pi/2l, \pi/m, \pi/2$. Questi angoli sono distinti salvo nel caso $m = 2l$, dato che $m > 2$ se $m = n$. Nel caso in cui $m = 2l$ basta ripetere lo stesso processo, ottenendo questa volta un triangolo Δ''_0 con angoli

$$\pi/2l, \quad \pi/2m, \quad \pi/4,$$

i quali sono necessariamente distinti poiché $m > 2$ e $m = 2l$; il caso $2l = 4$ non può verificarsi se $m = 2l$, dato che $m > 2$.

Si supponga ora che Δ'_0 abbia tre angoli distinti. Allora per quanto detto finora Δ'_0 è la regione fondamentale di un gruppo T' generato dalle tre riflessioni L, N, P e definito dalle relazioni

$$L^2 = N^2 = P^2 = 1, \quad (LN)^m = (NP)^{2l} = (PL)^2 = 1,$$

dove P è la riflessione nell'altezza di Δ_0 che è anche un lato di Δ'_0 . Il Δ_0 originale consiste in Δ_0 e nella sua immagine Δ'_1 sotto l'azione di P . Si verifica geometricamente che

$$PNP = M.$$

Ora tutto ciò che bisogna dimostrare è che gli elementi L, N, PNP di T' generano un sottogruppo T^* di indice due con rappresentanti laterali $1, P$ e definito dalle relazioni per T^* dove ora $M = PNP$.

Il metodo Reidemeister-Schreier mostra che T^* è davvero generato da L, N, PLP e $PNP = M$. A causa del fatto che $(PL)^2 = 1$, la relazione $PLP = L$ risulta ridondante. Le relazioni sono quindi

$$L^2 = N^2 = 1 = (PLP^{-1})^2 = (PNP^{-1})^2 = M^2 = 1$$

e

$$(LN)^m = 1, \quad (PLNP^{-1})^m = (PLP^{-1}PNP^{-1})^n = (LM)^m = (LM)^n = 1,$$

$$(NP)^{2l} = (NPNP)^l = (NM)^l = 1, \quad (PN)^{2l} = (PNPN)^l = (MN)^l = 1.$$

Queste relazioni coincidono con quelle di T^* oppure sono derivabili da esse. Questo risolve il caso in cui Δ' ha tre angoli di ampiezza differente. Infine, nel caso in cui solo Δ'' abbia tre angoli di ampiezza differente, bisogna costruire Δ_0 tramite quattro repliche di Δ''_0 e ottenere così T^* come sottogruppo di indice quattro del gruppo di riflessioni nei lati di Δ''_0 . Questo completa la dimostrazione del Teorema 3.5 nel caso iperbolico.

La trattazione del caso iperbolico si conclude con il seguente risultato.

Teorema 3.7. *Sia $T(l, m, n)$ il sottogruppo di indice 2 nel gruppo triangolare $T^*(l, m, n)$, costituito dalle isometrie dirette; allora $T(l, m, n)$ è generato da $A = LM$ e $B = MN$ e definito dalle relazioni*

$$A^n = B^l = (AB)^m = 1. \quad (3.27)$$

Inoltre gli elementi $\neq 1$ di ordine finito in $T(l, m, n)$ sono coniugati delle potenze di A, B o AB .

Bibliografia

- [1] Carathéodory C. *Theory of Functions of a Complex Variable*, 1954, Chelsea, New York.
- [2] Coxeter H. S. M. *Regular Polytopes*, 1963, Mac Millan, New York.
- [3] Fricke R. *Lehrbuch der Algebra, Vol. 2.*, 1926, Vieweg and Son, Braunschweig.
- [4] Hilbert D. *Fondamenti della geometria*, 1970, Feltrinelli, Milano.
- [5] Hilbert D., Cohn-Vossen S. *Geometria Intuitiva*, 1972, Bollati Boringhieri, Torino.
- [6] Klein F. *Vorlesungen ueber die Theorie des Ikosaeders*, 1888, Teubner, Leipzig.
- [7] Magnus W. *Noneuclidean Tessellations and Their Groups*, 1974, Academic Press, New York.
- [8] Martelli B. *Lezioni di geometria iperbolica* (dispense), <http://www.dm.unipi.it/~martelli/didattica/matematica/2012/Geometria%20iperbolica.pdf>
- [9] Sernesi E. *Geometria 2*, 1994, Bollati Boringhieri, Torino.