

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Simmetrie e principi di relatività

Relatore:
Prof. Alexandre
Kamenchtchik

Presentata da:
Pierfrancesco Dionigi

Anno Accademico 2015/2016

“Je n’ai pas le tems...”
◇ *Évariste Galois* ◇

Sommario

Vengono analizzate le principali nozioni e conseguenze simmetrie in fisica, in particolare di quelle introdotte dai principi di relatività. Partendo dal principio di relatività Galileiano (capitolo 1) si introducono i gruppi in riferimento alle trasformazioni tra sistemi equivalenti. Vengono quindi sviluppate le principali conseguenze matematiche e fisiche della teoria dei gruppi e delle rappresentazioni (capitolo 2.1). Si procede, quindi, con l'enunciazione del principio di relatività ristretta, delle sue conseguenze fisiche, e delle principali nozioni di meccanica quantistica; si pone l'attenzione in particolare su cosa si debba richiedere a livello formale affinché le due teorie siano coerenti tra loro (capitolo 3). Infine si è sviluppata la teoria delle rappresentazioni per il gruppo Euclideo (capitolo 4) e i gruppi di Poincaré e Lorentz, concludendo con un'analisi sugli usi e principali differenze degli ultimi due in relazione alla fisica particellare (capitolo 5).

Indice

Sommario	IV
1 Principi generali della fisica galileiana e importanza dei gruppi	1
2 Elementi di teoria dei gruppi	10
2.1 Definizione di gruppo e prime proprietà	10
2.2 Rappresentazione dei gruppi	14
2.3 Gruppi compatti e gruppi di ricoprimento	18
2.4 Gruppi di Lie e Algebre di Lie	21
2.5 Operatore di Casimir	26
2.6 Teorema di Noether	27
3 Meccanica quantistica e relatività	32
3.1 Principio di relatività ristretta.	32
3.1.1 Trasformazioni di Lorentz e di Poincaré	33
3.1.2 Concezione dello spaziotempo	34
3.2 Meccanica quantistica e simmetrie.	36
3.2.1 L'impianto formale della meccanica quantistica.	36
3.2.2 Meccanica quantistica e trasformazioni di Poincaré	37
3.2.3 Simmetrie e quantità conservate	40
4 Gruppo Euclideo	41
4.1 Rotazioni nello spazio tridimensionale	42
4.1.1 Prodotto diretto	46
4.1.2 $SU(2)$	47
4.2 Traslazioni	48
4.2.1 Traslazioni a una dimensione	48
4.2.2 Traslazioni in tre dimensioni	48
4.3 Gruppo Euclideo	49

5	Gruppi di Lorentz e gruppo di Poincaré	51
5.1	Gruppo di Lorentz	51
5.1.1	$SL(2, \mathbb{C})$	53
5.1.2	Generatori e algebra di Lie del gruppo di Lorentz	54
5.1.3	Rappresentazioni del gruppo di Lorentz	56
5.2	Gruppo di Poincaré	57
5.2.1	Generatori e algebra di Lie e del gruppo di Poincaré	57
5.3	Rappresentazioni unitarie ed irriducibili del gruppo di Poincaré	58
5.3.1	Misura invariante	62
5.4	Equazioni d'onda relativistiche: differenze e collegamenti tra i gruppi di Lorentz e Poincaré	63
5.4.1	Comportamento delle funzioni d'onda sotto trasformazioni di Poincaré	64
5.4.2	Equazioni d'onda relativistiche.	65
	Bibliografia	69

Introduzione

I principi di relatività prendono le loro mosse da alcune osservazioni tanto naturali quanto fondamentali. La richiesta dell'esistenza di una fisica che sia indipendente dal luogo o dal tempo in cui si descrivano i risultati di un esperimento (opportunamente isolato), è prima di tutto un fatto empirico, già notato da Galileo Galilei quattrocento anni fa. La formalizzazione di questa invarianza delle leggi fisiche rispetto a certe trasformazioni che legano i sistemi di riferimento equivalenti ha immediatamente forti implicazioni sulla concezione matematica e geometrica dello spazio in cui gli eventi fisici avvengono. Ad esempio le richieste che esso debba essere isotropo ed omogeneo, o che le leggi che governano un evento siano sempre le medesime, a qualsiasi tempo le si consideri, discendono proprio da questo approccio. Al concetto di invarianza relativistica si collega quello analogo di simmetria, ovvero una invarianza generalizzata del fenomeno rispetto a certe trasformazioni, anche non relativistiche. Le simmetrie hanno assunto nel tempo un'importanza fondamentale nell'approccio fisico generale. La ricerca di trasformazioni sotto le quali il sistema non cambia porta infatti a una più semplice risoluzione dei problemi. Oltre al lato puramente calcolistico, nel tempo, le simmetrie, hanno acquisito un punto di vista geometrico fortemente collegata alla natura fisica intrinseca del fenomeno. L'invarianza di Lorentz e la fisica che ne consegue ne sono uno degli esempi più sorprendenti. La nostra necessità di legarci a un principio geometrico, quale è la simmetria, è quindi fortemente giustificato dal risultato che ne otteniamo. La conciliazione della meccanica quantistica con la relatività, nonostante sia stato un percorso arduo e prolungato nel tempo, rimane ad oggi uno dei più grandi successi fisici sia dal punto di vista sperimentale che da quello puramente teorico. La teoria dei gruppi, fortemente collegata come vedremo alle idee di simmetria ed invarianza giocherà a partire dagli anni trenta del secolo scorso un ruolo sempre più fondamentale all'interno di questo contesto teorico, fino ad arrivare ai fondamentali lavori di Wigner sulle rappresentazioni dei gruppi di Poincaré e a tutta l'elegante teoria sottostante. La potenza di questo metodo è tutt'oggi in costante evoluzione, dove non solo le simmetrie sono importanti, ma anche le loro violazioni. Con questo testo si cerca di dare una visione plenaria dell'argomento, partendo dal punto di vista classico fino ad arrivare alla moderna teoria delle rappresentazioni dei gruppi di Lorentz e Poincaré con le seguenti forti implicazioni nella teoria dei campi, cercando di mantenere vivo il forte

interesse teorico verso la vasta e non banale struttura matematica sottostante.

Capitolo 1

Principi generali della fisica galileiana e importanza dei gruppi

La modellizzazione matematica che attuiamo nello studio della fisica dello spazio e dei fenomeni fisici che vi accadono non può che derivare dal dato empirico che estrapoliamo attraverso osservazioni ed esperimenti. La possibilità di estrapolare leggi di validità generale nello studio di un fenomeno fisico è un problema strettamente collegato alla determinazione ed isolamento delle quantità e delle condizioni che descrivono in modo completo un dato evento e la sua evoluzione. Si vorrebbe quindi che, una volta individuate tutte le cause fisiche di un evento, si possa, dopo aver ricreato (se possibile) le medesime condizioni, ricreare un esperimento che dia i *medesimi* esiti di quello iniziale. La domanda che sorge immediatamente spontanea è se esistano delle condizioni che siano irrilevanti per la riuscita dell'esperimento. È ovvio che ciascun esperimento per sua natura possa essere insensibile a determinate condizioni, almeno entro la precisione sperimentale richiesta dagli scopi proposti. Ad esempio un esperimento in cui si studia il moto di caduta di un grave si può trascurare l'azione del campo magnetico terrestre su di esso. La domanda a cui si cerca di rispondere con un *principio di relatività* è se esistano condizioni tali da essere irrilevanti per *tutti* gli esperimenti. La fisica classica, quella di Newton e Galilei, si fonda appunto su questi elementi: un metodo scientifico di indagine sperimentale, una teoria che cerchi di prevedere gli esiti degli esperimenti e un principio di relatività. Galileo cerca di spiegare come la richiesta di questa *costanza della fisica* rispetto a certe condizioni sia una cosa del tutto naturale in un famoso esperimento mentale che egli descrive nel *Dialogo sopra i due massimi sistemi tolemaico e copernicano* e che, data la sua importanza storica per gli argomenti che ci apprestiamo a trattare, riportiamo:

«Rinserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun gran naviglio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili

animaletti volanti: siavi anco un gran vaso d'acqua, e dentrovi de' pescetti; sospendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vada versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca che sia posto a basso; e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animaletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza. I pesci si vedranno andar notando indifferentemente per tutti i versi, le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto; e voi gettando all'amico alcuna cosa non più gagliardamente la dovrete gettare verso quella parte che verso questa, quando le lontananze sieno uguali; e saltando voi, come si dice, a piè giunti, eguali spazii passerete verso tutte le parti. Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niun dubbio ci sia mentre il vascello sta fermo non debbano succedere così: fate muovere la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur di moto uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti; né da alcuno di quelli potrete comprendere se la nave cammina, o pure sta ferma.»

L'assiomatizzazione di questo concetto avviene per mezzo della seguente proposizione.

Proposizione 1.0.1. *Principio di relatività galileiano*

Esistono dei sistemi di coordinate, detti inerziali, che hanno le due seguenti proprietà:

1. *Tutti le leggi della natura sono covarianti¹ nei sistemi inerziali.*
2. *Tutti i sistemi di coordinate che si muovono di moto rettilineo uniforme rispetto ad un altro sistema inerziale sono inerziali.*

La prima affermazione si traduce spesso dicendo che i sistemi inerziali sono *sistemi equivalenti*, intendendo con ciò che ci debba essere un modo per passare da un sistema di riferimento all'altro senza alterare la descrizione fisica dell'evento fisico sotto studio. I principi di relatività, come quello galileiano appena visto o quello di Einstein che vedremo successivamente, sono solitamente formulati come principi di

¹Con *covarianza* si intende il comportamento delle grandezze fisiche e dei corrispondenti oggetti matematici (scalari, vettori, tensori etc.) all'atto di cambio del sistema di riferimento. Spesso il principio di relatività è espresso in termini di *invarianza*; è ovvio che, poichè le quantità fisiche all'interno di una legge potrebbero cambiare da un sistema di riferimento all'altro, ci si riferisca al fatto che la loro forma *funzionale* rimanga la medesima nei vari sistemi di riferimento, ovvero *l'invarianza in forma*. Per mantenere più generalità possibile, diremo appunto che esse devono essere covarianti.

invarianza. Un principio di invarianza per essere tale deve soddisfare i seguenti tre requisiti², indipendentemente dalla teoria fisica nella quale esso verrà implementato:

Proposizione 1.0.2. *Principio di invarianza*

1. *Data una descrizione completa di un sistema fisico³, deve essere possibile trasferirla mediante una qualche trasformazione in qualsiasi sistema di coordinate equivalente. Spetta al principio di invarianza definire quali siano i sistemi di coordinate equivalenti.*
2. *La descrizione completa di uno stato ammissibile per la teoria deve essere ancora ammissibile una volta trasportata nel nuovo sistema di riferimento equivalente.*
3. *I criteri fisici e matematici all'interno della teoria che definiscono se uno stato sia ammissibile o meno devono essere i medesimi per tutti i sistemi di coordinate equivalenti.*

Un principio di invarianza individua quindi una classe di *osservatori*⁴ equivalenti le cui descrizioni del sistema fisico devono coincidere attraverso un insieme opportuno di trasformazioni individuate dal principio medesimo. Ovviamente potrebbero esserci, come abbiamo già accennato, delle trasformazioni per le quali il sistema fisico è invariante, ma che non sono quelle descritte dal principio di relatività. Queste si chiamano, in generale, *simmetrie* del sistema. Il principio di relatività individua tutte quelle simmetrie che sono comuni a tutti i sistemi fisici, indipendentemente dalle loro caratteristiche particolari. Potremmo dire che esso è una proprietà dello spazio e della fisica che vi avviene, ed è per questo che ci appresteremo a descrivere la visione di spazio che ogni principio introduce.

Una volta formulato il principio di invarianza, che per la meccanica classica è quello della proposizione 1.0.1, occorre definire formalmente la teoria fisica entro la quale tale principio agisce. La teoria con la quale si studia un fenomeno fisico deve quindi fornire i seguenti elementi

²Si veda [9] a pagina 15.

³Per *descrizione completa* intendiamo tutti quegli elementi all'interno della teoria che permettono di individuare il sistema e il suo comportamento in modo univoco. Una volta individuati questi elementi deve essere possibile, in linea di principio, creare un sistema che, possedendo i medesimi elementi, si comporti alla stregua del sistema iniziale all'interno della teoria.

⁴Per *osservatore* intendiamo un *sistema di riferimento* fornito di un apparato di misura adeguato al fenomeno in esame. È chiaro che il concetto di sistema di riferimento senza quello di osservatore rimane astratto e di scarsa utilità pratica, in quanto il principale elemento di indagine della fisica è la misurazione delle quantità caratteristiche di un fenomeno fisico.

- Una serie di leggi che descrivano il comportamento del fenomeno fisico in esame.
- I modi in cui possiamo individuare tutti gli elementi che permettono di fare una *descrizione completa* del sistema in esame. Ciò equivale a richiedere che siano ben specificate ed individuabili, ovvero in qualche maniera (diretta o indiretta) misurabili, tutte le quantità che entreranno nelle equazioni della teoria⁵.

Per rendere le cose più chiare esamineremo come ciò avvenga in meccanica classica. Vedremo che in questa teoria un sistema sarà completamente descritto una volta associategli delle coordinate in uno spazio euclideo la cui dimensione dipenderà dalla "complessità del sistema" e la legge che agirà su questi *stati* ne determinerà l'evoluzione dinamica temporale⁶. È importante sottolineare come nell'enunciato della proposizione 1.0.1 vi sia il termine *sistemi di coordinate* e non solo sistemi di riferimento. Con ciò si intende che non può esistere una scelta preferenziale della parametrizzazione dello spazio che dia una descrizione fisica che non sia equivalente alle altre⁷. In altri termini il fatto di descrivere un evento fisico tramite coordinate cartesiane o curvilinee, è un fatto di convenienza matematica. Dunque nel corso del testo, dopo aver fatto queste osservazioni e in virtù del principio di relatività, ci riferiremo senza fare distinzioni a *sistemi di coordinate*, *sistemi di riferimento* e *osservatori*, salvo diversamente indicato. La formalizzazione matematica del principio galileiano prevede l'introduzione di uno spazio affine quadridimensionale \mathcal{A}^4 sul quale agiscono delle trasformazioni coerenti con il principio di relatività e che collegano tutti i sistemi *inerziali*. Il "fissare l'origine" dello spazio e dei tempi equivale matematicamente a definire lo spazio \mathbb{R}^4 come l'insieme delle traslazioni su \mathcal{A}^4 :

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} \quad \{\mathbf{x} \in \mathcal{A}^4, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^4, \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{A}^4\} \quad (1.1)$$

In questo modo è ben definita una "distanza", intesa come vettore differenza tra due punti, la quale è un elemento di \mathbb{R}^4 . Le proprietà dello spazio sono descritte da quella che è detta una *struttura galileiana*:

Definizione 1.1. *Struttura galileiana*

Una struttura galileiana è dotata dei seguenti tre elementi:

⁵L'equazione (3.3) che determina in meccanica quantistica come si evolva un sistema sembrerebbe a prima vista contenere quantità non direttamente misurabili, ovvero i vettori dello spazio di Hilbert $|\psi\rangle$ che individuano la funzione d'onda caratteristica dello stato del sistema fisico in esame. Come spiegheremo le quantità sperimentalmente misurabili in fisica quantistica sono le probabilità di transizione e l'equazione (3.3) deve essere interpretata sotto quest'ottica.

⁶Ci stiamo riferendo alle condizioni iniziali del problema differenziale che descrive la dinamica Newtoniana, che, come vedremo potranno essere espresse come un vettore in un opportuno spazio.

⁷Questo è vero ovviamente a meno di singolarità delle coordinate.

1. Un universo, ovvero uno spazio affine quadridimensionale \mathcal{A}^4 i cui punti si dicono eventi e su cui gli elementi di \mathbb{R}^4 agiscono come traslazioni spaziotemporali.
2. Una proiezione sullo spazio delle traslazioni $\tau : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ detta tempo. Si definisce intervallo di tempo tra i due eventi \mathbf{x} e \mathbf{x}' la quantità $\tau(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, che definisce una classe di equivalenza; qualora questa quantità sia zero i due eventi si dicono contemporanei, e la classe di equivalenza che definisce è un sottospazio affine detto degli eventi contemporanei $\mathcal{A}_c^3 \subset \mathcal{A}^4$.
3. Una distanza tra eventi contemporanei

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|, \quad \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{A}_c^3$$

definita tramite la norma euclidea in \mathbb{R}^3 (in quanto per la relazione (1.1) $(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \in \mathbb{R}^3$).

Quando uno spazio \mathcal{A}^4 è dotato di questa struttura viene detto *spazio galileiano*. Il prodotto diretto $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ è dotato in modo naturale di questa struttura e viene detto *spazio galileiano delle coordinate*. Esso corrisponde in modo ovvio al punto di vista di un osservatore per il quale è stata definita un'origine dei tempi, ovvero a quello che sopra abbiamo chiamato un *sistema di riferimento*. In particolare si determina la posizione \mathbf{P} di un sistema fisico puntiforme specificando un vettore di \mathbb{R}^3 . Qualora il sistema in esame fosse composto da n sottosistemi puntiformi, l'osservatore dovrà associare n vettori per determinare lo stato \mathbf{P} di posizione di tutti i sottosistemi. Ciò equivale ad associare un vettore in uno spazio $(\mathbb{R}_{(1)}^3 \times \mathbb{R}_{(2)}^3 \times \dots \times \mathbb{R}_{(n)}^3)$ dove il tempo $t \in \mathbb{R}$ è comune a tutti gli $\mathbb{R}_{(i)}^3$ e i singoli $(\mathbb{R}_{(i)}^3 \times \mathbb{R})$ sono sistemi galileiani⁸. Il prodotto $(\mathbb{R}_{(1)}^3 \times \mathbb{R}_{(2)}^3 \times \dots \times \mathbb{R}_{(n)}^3)$ viene detto in questa accezione *spazio delle configurazioni*. L'applicazione di una delle trasformazioni $\mathbf{g} \in \mathcal{G}$, dove \mathcal{G} è l'insieme delle trasformazioni galileiane (che connettono i vari sistemi inerziali ed i relativi sistemi di coordinate), ad un evento $\mathbf{x} \in \mathcal{A}^4$ deve ancora essere un evento di uno spazio galileiano \mathcal{A}^4 , cioè ne deve conservare la struttura per come è stata precedentemente definita:

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \ni \mathbf{g} : \mathcal{A}^4 &\rightarrow \mathcal{A}^4 \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}', \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{A} \end{aligned} \tag{1.2}$$

In particolare queste trasformazioni conservano la distanza tra i punti. Questo fatto ritornerà quando formuleremo il principio di relatività ristretta, e discende, in generale, dalla proposizione (1.0.2). Esso ha che fare anche con gli strumenti

⁸È importante notare come questa sia una costruzione matematica utile come vedremo alla trattazione delle equazioni del moto. Lo Spazio inteso come entità fisica rimane unico anche per lo studio di più oggetti.

di misura: una volta fissato un modo per misurare la distanza tra eventi fisici, che corrisponde matematicamente a fissare una metrica nello spazio degli eventi spaziotemporali, vogliamo che questa nozione di distanza sia mantenuta inalterata tra tutti i sistemi di riferimento equivalenti, in modo da garantire che l'efficacia degli strumenti di misura non dipenda dal luogo in cui vengono usati. Inoltre a fine capitolo dimostreremo che le trasformazioni di Galileo sono degli operatori lineari, ovvero che \mathcal{A}^4 e \mathcal{A}^4 sono il medesimo spazio. Una volta enunciato il principio di invarianza e la nozione di spazio che ne deriva, dobbiamo descrivere una teoria fisica che sia coerente con questi. In meccanica classica questa teoria è formata dalle leggi della dinamica di Newton e dalle loro generalizzazioni; inoltre l'applicazione delle trasformazioni di Galileo alle leggi della dinamica farà capire meglio cosa intendiamo per covarianza nel primo dei due postulati del principio di relatività galileiana. Le leggi della dinamica di Newton discendono dal seguente:

Proposizione 1.0.3. Principio di determinismo di Newton

Le condizioni iniziali di un sistema determinano in modo unico il suo moto

Questo vuol dire che la determinazione delle equazioni del moto equivale alla risoluzione di un problema differenziale di Cauchy; il fatto che l'ordine di questo problema differenziale sia il secondo, e cioè che le condizioni iniziali necessarie siano posizione e velocità iniziale del sistema, discende dall'esperienza. In sostanza possiamo dire che, fissato lo spazio delle coordinate $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ e vedendo la posizione come un'applicazione $\mathbf{x}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ il cui grafico $Gr(\mathbf{x}(t)) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, esiste una funzione $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ che definisce il sistema di equazioni:

$$\ddot{\mathbf{x}} \equiv \frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2} = \mathbf{F}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t)^9 \quad (1.3)$$

Il fatto che questa equazione soddisfi il principio di relatività impone il fatto che sia *covariante*, ovvero che, applicando in un qualche modo la trasformazione che ci fa passare da $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}'$ ad entrambi i membri della (1.3), l'equazione esprima lo stesso tipo di relazione iniziale. Nel particolare, poichè come vedremo le trasformazioni galileiane lasciano invariate le accelerazioni, il primo membro dell'equazione (1.3) rimane invariato dopo l'applicazione di \mathbf{g} trasformazione di Galileo, imponendo così delle restrizioni a ciò che può cambiare nel membro di destra. Dovremo infatti avere il medesimo problema differenziale, al più con differenti condizioni iniziali nel sistema trasformato (indicato con ') da \mathbf{g} ($\mathbf{g} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$):

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}}' = \mathbf{F}(\dot{\mathbf{x}}', \mathbf{x}', t')$$

in cui \mathbf{F} è la medesima relazione funzionale tra $(\dot{\mathbf{x}}', \mathbf{x}', t')$ che si aveva nel sistema non trasformato. Come abbiamo già detto, un sistema fisico che viene completamente descritto da una equazione la quale rimane invariante sotto l'effetto di una

⁹L'equazione è facilmente generalizzabile a un sistema di n particelle.

trasformazione (come quelle di Galileo per l'equazione 1.3) viene detto *simmetrico* rispetto a tale trasformazione, e la trasformazione viene detta una *simmetria* per il sistema. Il fatto che l'invarianza descritta in particolare da un principio di relatività sia comune a tutti i sistemi, rende la simmetria relativista lo strumento principale permette di costruire la nostra teoria. È evidente che se all'interno della teoria vi siano particolari sistemi che ammettano ulteriori simmetrie, queste porranno ulteriori vincoli sul sistema in esame e permetteranno di studiarne in modo più facilitato l'evoluzione dinamica¹⁰.

Rimangono ora da definire quali siano le trasformazioni galileiane. Sperimentalmente si può verificare che l'esito di un esperimento, opportunamente isolato dalle condizioni esterne che potrebbero introdurre fattori estranei al fenomeno in esame, non viene determinato entro la precisione strumentale oggi disponibile dalle seguenti condizioni:

- *dall'istante di tempo in cui esso viene svolto*: questo equivale a dire che le leggi della fisica siano costanti nel tempo, ovvero che il tempo è omogeneo. Questo comporta che lo studio di un fenomeno fisico non dipenda dall'origine dei tempi scelta.
- *dal luogo in cui viene svolto l'esperimento*: questo equivale a dire che lo spazio è omogeneo, ovvero che le leggi della fisica non dipendono da nessuna proprietà dello spazio (inteso come l'ambiente nel quale avvengono tutti gli eventi, \mathbb{R}^3) che vari con la scelta dell'origine.
- *dall'orientazione dell'apparato*: questo comporta che lo spazio sia isotropo, ovvero che le leggi della fisica siano indipendenti dalla scelta dell'orientazione degli assi coordinati.
- *dalla velocità alla quale si svolge l'esperimento*: questo vincolo, oltre ad essere di natura sperimentale, discende direttamente anche dalla 2 della proposizione (1.0.1). Se un esperimento avviene in un sistema inerziale la legge che lo caratterizza deve essere la medesima (nel senso già specificato) se studiata da un altro sistema inerziale, il quale si può muovere, idealmente¹¹, a una velocità arbitraria rispetto al primo.

¹⁰Siveda la sezione 2.6 sul teorema di Noether.

¹¹Il fatto che concretamente le velocità non potranno essere arbitrarie, ma avranno un limite superiore, sarà una delle cause che ci porteranno a formulare un nuovo principio di relatività nel capitolo 3.

Una qualsiasi composizione di queste trasformazioni definisce un elemento di \mathcal{G} ¹²; si può anche dimostrare che ogni elemento $\mathfrak{g} \in \mathcal{G}$ può essere scomposto in modo *unico* in un prodotto di queste tre¹³ operazioni. Ricapitolando, possiamo affermare che lo spaziotempo è invariante per traslazioni dell'origine spaziotemporale, rotazioni dello spazio e quelli che in gergo vengono definiti *boost*, ovvero trasformazioni che connettono i vari sistemi inerziali che si muovono lungo la stessa direzione a una velocità relativa non nulla e hanno le origini coincidenti per un dato valore di t , solitamente per $t = 0$. I boost hanno la seguente forma, che esprimiamo per due sistemi \mathcal{S} e \mathcal{S}' equiorientati e con \mathcal{S}' che si muove di velocità v rispetto a \mathcal{S} lungo l'asse x :

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad (1.4)$$

Da queste equazioni vediamo che le accelerazioni non vengono toccate da trasformazioni di Galileo in quanto aggiungono un termine costante all'equazione $\ddot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d(\dot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{v}_0)}{dt}$, fatto a cui avevamo già accennato per dimostrare l'invarianza di $\mathbf{F}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t)$. In particolare possiamo vedere ora come agiscono le trasformazioni galileiane sullo *spazio delle fasi* ($\mathcal{S}f$) del sistema in esame, ovvero lo spazio definito dal prodotto cartesiano $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ delle coppie ordinate

$$\{(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \text{ con } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ spazio delle configurazioni, e } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \text{ spazio delle velocità}\}$$

dove n sono i gradi di libertà del sistema in esame¹⁴. In questo spazio l'equazione (1.3) assume la forma

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, t) \\ \mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) \end{cases} \quad \text{con } (\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0) \in \mathcal{S}f \quad (1.5)$$

Per quanto detto l'azione di una trasformazione di Galileo definisce nuove condizioni iniziali $(\tilde{\mathbf{x}}_0, \tilde{\mathbf{v}}_0)$, ma mantiene inalterato il problema differenziale. Questo equivale a dire che la curva descritta da $(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t))$ sullo spazio delle fasi mantenga la "stessa forma" e possa essere solo ruotata o traslata a meno di trasformazioni di scala. Possiamo immaginare inoltre i seguenti casi con facilità, i quali ci aiuteranno a definire la struttura formale matematica che dovremo associare alle trasformazioni di

¹²Le leggi della dinamica sono invarianti anche per inversioni temporali, ma il principio ergodico assunto in fisica per una corretta formulazione della meccanica statistica proibisce questo genere di trasformazioni, ovvero la macro-reversibilità dei fenomeni.

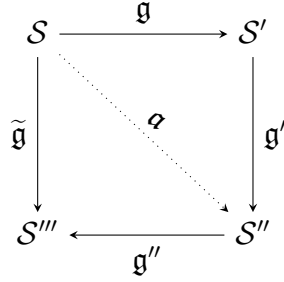
¹³Considereremo la traslazione spaziotemporale come un'unica operazione.

¹⁴Per il caso in cui il sistema in esame sia una particella puntiforme lo spazio delle fasi è isomorfo a $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

Galileo e più in generale alle trasformazioni di simmetria. Dati due sistemi inerziali di riferimento¹⁵ \mathcal{S} e \mathcal{S}' vi deve essere per ipotesi una trasformazione¹⁶ $\mathfrak{g} \in \mathcal{G}$ tale per cui $\mathfrak{g}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}'$. Simmetricamente possiamo dire che esisterà una applicazione che chiamiamo \mathfrak{g}^{-1} tale per cui $\mathfrak{g}^{-1}(\mathcal{S}') = \mathcal{S}$. Ciò vuol dire che la composizione delle due trasformazioni è l'elemento che corrisponde all'identità nell'insieme \mathcal{G} ovvero che

$$\begin{cases} (\mathfrak{g}^{-1} \circ \mathfrak{g})(\mathcal{S}) = \mathcal{S} \\ (\mathfrak{g} \circ \mathfrak{g}^{-1})(\mathcal{S}') = \mathcal{S}' \end{cases} \implies \begin{cases} \mathfrak{g} \circ (\mathfrak{g}^{-1} \circ \mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}^{-1} \circ (\mathfrak{g} \circ \mathfrak{g}^{-1}) = \mathfrak{g}^{-1} \end{cases}$$

Inoltre possiamo immaginare quattro sistemi \mathcal{S} , \mathcal{S}' , \mathcal{S}'' e \mathcal{S}''' e le trasformazioni che li collegano a due a due:



Poichè come abbiamo detto ogni trasformazione può essere decomposta negli elementi di roto-traslazione spaziale, traslazione temporale e boost in modo *unico*, e dato che le rotazioni e le traslazioni non commutano dobbiamo avere la seguente uguaglianza a livello insiemistico in \mathcal{G} (e non solo di risultato finale, cioè $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'''$)

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \circ \mathfrak{g}' \circ \mathfrak{g}''$$

Possiamo ragionare in modo analogo per quanto riguarda la trasformazione \mathfrak{a} , ovvero $\mathfrak{g} \circ \mathfrak{g}' = \mathfrak{a}$. Infine se definissimo una trasformazione $\mathfrak{b} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}''$ si dovrebbe avere $\mathfrak{g}' \circ \mathfrak{g}'' = \mathfrak{b}$. Abbiamo in sostanza dimostrato la seguente equazione che definisce la *proprietà associativa* delle trasformazioni di Galileo:

$$\tilde{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{g} \circ \mathfrak{g}') \circ \mathfrak{g}'' = \mathfrak{a} \circ \mathfrak{g}'' = \mathfrak{g} \circ (\mathfrak{g}' \circ \mathfrak{g}'') = \mathfrak{g} \circ \mathfrak{b} \quad (1.6)$$

Inoltre se \mathfrak{g} è una trasformazione che collega \mathcal{S} a \mathcal{S}' dato un terzo sistema \mathcal{F} esisterà sempre uno spazio \mathcal{F}' che sarà il trasformato di \mathcal{F} attraverso \mathfrak{g} . Il fatto che quindi ad ogni elemento di \mathcal{A}^4 ne corrisponda uno di \mathcal{A}'^4 , e viceversa, comporta la sostanziale identificazione dei due, ovvero $\mathcal{A}^4 = \mathcal{A}'^4$. Le proprietà che abbiamo ricavato delle trasformazioni di Galileo sono formalizzate dal concetto matematico di gruppo che quindi ci apprestiamo ad analizzare.

¹⁵Poichè come abbiamo già detto tutti gli spazi galileiani affini \mathcal{A}^4 sono isomorfi a $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, possiamo limitare senza perdite di generalità lo studio ai sistemi di riferimento identificati con $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$.

¹⁶Per quanto detto, in genere, una trasformazione affine quando ci si riferisce a \mathcal{A}^4 .

Capitolo 2

Elementi di teoria dei gruppi

2.1 Definizione di gruppo e prime proprietà

Definizione 2.1. Gruppo

Un insieme non vuoto \mathcal{G} , dotato di un'operazione di composizione binaria $\circ : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ che associa a ciascuna coppia **ordinata** (\mathbf{a}, \mathbf{b}) un terzo elemento \mathbf{c} , si dice gruppo (\mathcal{G}, \circ) ¹ se soddisfa le seguenti tre condizioni:

1. l'operazione “ \circ ” gode della **proprietà associativa**:

$$(\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) \circ \mathbf{c} = \mathbf{a} \circ (\mathbf{b} \circ \mathbf{c}), \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{G}$$

2. esiste l'**elemento neutro** per l'operazione “ \circ ”:

$$\exists \mathbf{e} : \mathbf{g} \circ \mathbf{e} = \mathbf{g}, \quad \forall \mathbf{g} \in \mathcal{G}$$

3. esiste l'**elemento inverso** per ogni elemento dell'insieme \mathcal{G} :

$$\forall \mathbf{g}, \exists \mathbf{g}^{-1} : \mathbf{g} \circ \mathbf{g}^{-1} = \mathbf{e}$$

È importante notare come il fatto che la coppia (\mathbf{a}, \mathbf{b}) debba essere ordinata ci dice in generale che $\mathbf{g} \circ \mathbf{g}' \neq \mathbf{g}' \circ \mathbf{g}$. Qualora ciò fosse invece verificato per tutti gli elementi del gruppo, ovvero

$$\forall \mathbf{g}, \mathbf{g}' \in \mathcal{G}, \quad \mathbf{g} \circ \mathbf{g}' = \mathbf{g}' \circ \mathbf{g}$$

¹Spesso nel prosieguo in assenza di ambiguità faremo un abuso di notazione molto comune riferendoci a \mathcal{G} come gruppo senza specificare la coppia (\mathcal{G}, \circ)

diremo che il gruppo è *commutativo* o *abeliano*. Si può però ricavare dalle proprietà di gruppo che le seguenti relazioni sono sempre valide e non necessitano della proprietà commutativa:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} \circ \mathbf{e} &= \mathbf{e} \circ \mathbf{g} = \mathbf{g}, \\ \mathbf{g} \circ \mathbf{g}^{-1} &= \mathbf{g}^{-1} \circ \mathbf{g} = \mathbf{e}, \\ \mathbf{e}^{-1} &= \mathbf{e} \end{aligned}$$

Il numero di elementi di \mathcal{G} , se finito, è detto *ordine* del gruppo e parleremo di *gruppo finito*. Qualora esistesse un sottoinsieme proprio $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ dotato delle proprietà di gruppo rispetto all'operazione di composizione ereditata da \mathcal{G} , diremo che \mathcal{H} è un *sottogruppo* di \mathcal{G} .

Esempio 2.1.1. *Gruppo finito*

Un insieme formato da due elementi distinti $\{e, a\}$ dotato di una legge di composizione binaria “ \circ ” tale per cui se e è l'elemento neutro si ha $a \circ e = a$ è gruppo. Infatti, omettendo per comodità “ \circ ”, a è l'inverso di sè stesso poichè se $aa = a$, si ha:

$$a^{-1}aa = a^{-1}a \leftrightarrow a = e$$

giungendo all' assurdo che $a = e$. Dunque si deve avere:

$$ae = a \leftrightarrow aa = e$$

Esempio 2.1.2. *Numeri interi*

L'insieme dei numeri interi \mathbb{Z} con l'usuale addizione è un gruppo abeliano $(\mathbb{Z}, +)$. Questo è un esempio di un gruppo con infiniti elementi.

Esempio 2.1.3. *Rotazioni*

Il gruppo delle rotazioni descrive astrattamente come si possano ruotare gli elementi di uno spazio vettoriale \mathcal{V} , ovvero una trasformazione che a un vettore $x \in \mathcal{V}$ ne associa un secondo x' mantenendone inalterata la lunghezza euclidea². Questo tipo di trasformazioni su \mathbb{R}^n sono dette *ortogonali* e si indicano con il simbolo $O(n)$. La classica matrice associata a una rotazione positiva (antioraria) di angolo θ in \mathbb{R}^2 è:

$$\mathbf{g}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Si vede come l'implementazione del gruppo dipenda da un parametro. Esistono infiniti elementi di questo gruppo e possiamo variare θ in modo "continuo" (in un

²Notiamo come vi siano due interpretazioni delle trasformazioni lineari. Una *passiva* secondo la quale il vettore dello spazio rimane inalterato e l'azione del gruppo è un semplice cambio di base, cioè cambia il riferimento rispetto al quale si definisce il medesimo vettore. L'altra interpretazione è quella *attiva* secondo la quale la base rimane la medesima e ciò che cambia è il vettore, cioè, nel nostro caso, il gruppo agisce come una trasformazione lineare che associa a un vettore un altro.

senso che specificheremo in un capito successivo) in un intervallo $[0, 2\pi)$. Inoltre tutte queste matrici hanno $\det = 1$, e ogni rotazione pura (senza deformazione del vettore) può essere espressa da un valore particolare di θ . Il gruppo delle trasformazioni ortogonali su \mathbb{R}^2 viene indicato con $O(2)$, il cui sottogruppo con la proprietà di avere $\det = 1$ viene indicato con $SO(2)$ e viene chiamato *gruppo ortogonale speciale*. Il discorso è facilmente generalizzabile a n dimensioni. Fissata una direzione nello spazio \mathbb{R}^n basta un parametro θ del tutto analogo a quello di $SO(2)$ per determinare una rotazione attorno all'asse. Poichè su \mathbb{R}^n per individuare una direzione servono altri $(n - 1)$ parametri, il gruppo dipenderà n parametri, e viene indicato con $SO(n)$.

È inoltre utile il seguente:

Definizione 2.2. Elemento coniugato

Dati $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{G}$, si dice che essi sono **coniugati** ($\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$) se³ $\exists \mathbf{p} : \mathbf{b} = \mathbf{p}\mathbf{a}\mathbf{p}^{-1}$. Tutti gli elementi in relazione tra loro tramite “ \sim ” sono detti formare una **classe di coniugio**.

È facile vedere come la relazione \sim sia una relazione di equivalenza. Dato $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ sottogruppo e $\mathbf{p} \in \mathcal{G}$, si ha che l'insieme $\mathcal{H}' = \{\mathbf{g} : \mathbf{g} = \mathbf{p}\mathbf{h}\mathbf{p}^{-1}\}$ è un sottogruppo che chiameremo *sottogruppo coniugato* a \mathcal{H} . Se si ha inoltre che insiemisticamente $\forall \mathbf{p}, \mathcal{H} = \mathcal{H}'$ diremo che \mathcal{H} è un *sottogruppo invariante* o *normale* di \mathcal{G} e si indica con $\mathcal{H} \triangleleft \mathcal{G}$. Si dimostra infine che ogni sottogruppo di un gruppo abeliano è un sottogruppo invariante. Sono spesso utili le seguenti nozioni:

Definizione 2.3. Gruppo semplice e semisemplice

Un gruppo non contenente sottogruppi invarianti non banali si dice **semplice**. Un gruppo che non possiede alcun sottogruppo invariante abeliano si dice **semisemplice**.

Si possono inoltre definire applicazioni tra gruppi. Sono particolarmente utili quelle che conservano la struttura algebrica di gruppo:

Definizione 2.4. Omomorfismo

Dati due gruppi con le rispettive operazioni binarie (\mathcal{G}, \circ) e (\mathcal{G}', \cdot) , si dice **omomorfismo** un'applicazione $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ che preserva la moltiplicazione tra elementi:

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{G} \quad f(\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) \cdot f(\mathbf{b})$$

Se inoltre f è biettiva diremo che essa è un *isomorfismo*. Nella teoria che seguirà sarà importante il *gruppo generale lineare*, $GL(n, \mathbb{K})$, ovvero

³Ometteremo “ \circ ” da qui in poi qualora non sorgano dubbi.

il gruppo formato dalle matrici invertibili di ordine $n \times n$ a valori in un campo \mathbb{K} , dove il prodotto “ \circ ” è dato dall’usuale prodotto di matrici. È facile rendersi conto di come il teorema di Binet⁴ garantisca la chiusura del sottoinsieme dello spazio vettoriale delle matrici $\mathcal{M}_{n \times n}$ a determinante non nullo, ovvero $\mathcal{M}_{n \times n}|_{\det \neq 0}$ rispetto a “ \circ ”. Questo gruppo agisce su elementi di \mathbb{K}^n , e una volta fissata la base è isomorfo come gruppo al sottoinsieme di $\mathcal{H}om(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ ⁵ formato dagli *isomorfismi* da \mathbb{K}^n a \mathbb{K}^n . Sotto questa accezione (gruppo degli applicazione lineari invertibili da uno spazio lineare \mathcal{V} su sé stesso) esso viene indicato come $GL(\mathcal{V})$ dove la dimensione n e il campo \mathbb{K} del gruppo dipendono da \mathcal{V} ⁶.

Ora introduciamo le nozioni di *classe laterale* e di *gruppo quoziente*:

Definizione 2.5. Classe laterale

Sia \mathcal{G}^* sottogruppo di \mathcal{G} , e $\mathbf{a} \in \mathcal{G}$ ma $\mathbf{a} \notin \mathcal{G}^*$, l’insieme di elementi formato da $\mathbf{a}\mathcal{G}^* = \{\mathbf{a}h_1, \mathbf{a}h_2, \dots\}$ si chiama **classe laterale sinistra**. Analogamente $\mathcal{G}^*\mathbf{a}$ si chiama **classe laterale destra**.

Una proprietà importante delle classe laterali è che esse o coincidono completamente, o non hanno alcun elemento in comune. È anche importante notare come le classi laterali, non potendo contenere l’identità, non siano dei sottogruppi.

Teorema 2.1.1. Gruppo quoziente

Considerando l’insieme di tutte le classi laterali sinistre⁷ di un sottogruppo invariante \mathcal{G}^* di \mathcal{G} , queste formano un gruppo chiamato **gruppo quoziente** di \mathcal{G} se dotate della legge di composizione binaria definita da $\mathbf{a}\mathcal{G}^* \cdot \mathbf{b}\mathcal{G}^* = (\mathbf{ab})\mathcal{G}^*$.

Spesso avremo che fare con gruppi la cui azione globale è rappresentata dalla composizione di operazioni diverse che a loro volta hanno le proprietà di gruppo.

Definizione 2.6. Prodotto semidiretto

Dati due gruppi (\mathcal{G}^*, \circ) e (\mathcal{G}, \star) , e un omomorfismo $\omega : (\mathcal{G}, \star) \rightarrow \mathcal{A}ut((\mathcal{G}^*, \circ))$. $\mathcal{G}^* \times \mathcal{G}$ dotato dell’operazione di composizione definita da

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) * (\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \circ \psi_{\mathbf{b}}(\mathbf{c}), \mathbf{b} \star \mathbf{d}) \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{c} \in (\mathcal{G}^*, \circ), \mathbf{b}, \mathbf{d} \in (\mathcal{G}, \star)$$

⁴Il teorema di Binet afferma che il determinante di una matrice prodotto, è uguale al prodotto dei determinanti $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

⁵Con $\mathcal{H}om(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ si intende l’insieme delle applicazioni lineari $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ che forma un spazio vettoriale. È facile vedere come il sottoinsieme di $\mathcal{H}om(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ delle applicazioni invertibili (qualora esistano), e analogamente $\mathcal{M}_{n \times n}|_{\det \neq 0}$, non siano sottospazi vettoriali in quanto non contengono l’elemento nullo $\mathbf{0}$. Quindi l’isomorfismo che li collega non conserva la struttura di spazio vettoriale, ma quella di gruppo introdotta con l’usuale moltiplicazione tra matrici in $\mathcal{M}_{n \times n}$ e la composizione di funzioni su $\mathcal{H}om(\mathcal{V}, \mathcal{W})$.

⁶I morfismi da una struttura algebrica \mathcal{S} su se stessa vengono detti *endomorfismi* e si indicano con $\mathcal{E}nd(\mathcal{S})$. Qualora siano biettivi al posto di chiamarsi isomorfismi vengono detti *automorfismi* e si indicano con $\mathcal{A}ut(\mathcal{S})$.

⁷O in maniera del tutto analoga destre.

con $\psi_b \equiv \omega(b) \in \text{Aut}((\mathcal{G}^*, \circ))$ **prodotto semidiretto** di (\mathcal{G}^*, \circ) e (\mathcal{G}, \star) , e si indica con $(\mathcal{G}^*, \circ) \rtimes_{\psi} (\mathcal{G}, \star)$. In particolare se $\psi_b = \text{Id}_{\mathcal{G}^*}$ si ha il prodotto diretto $(\mathcal{G}^*, \circ) \times (\mathcal{G}, \star)$.

Si dimostra inoltre il seguente, utile per individuare gli eventuali sottogruppi che generano il gruppo come prodotto diretto:

Teorema 2.1.2.

Sia (\mathcal{G}, \circ) gruppo ed \mathcal{S} e \mathcal{Q} due suoi sottogruppi. Se

- $\mathcal{S} \triangleleft \mathcal{G}$
- $\mathcal{G} = \mathcal{S}\mathcal{Q} = \{\mathbf{a} * \mathbf{b} \mid \mathbf{a} \in \mathcal{S}, \mathbf{b} \in \mathcal{Q}\}$
- $\mathcal{S} \cap \mathcal{Q} = \{e\}$

con $\{e\}$ elemento neutro di (\mathcal{G}, \circ) , allora (\mathcal{G}, \circ) è isomorfo a $\mathcal{S} \rtimes_{\psi} \mathcal{Q}$, con $\psi_b(\mathbf{a}) = \mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{b}^{-1}$

2.2 Rappresentazione dei gruppi

È importante a questo punto distinguere tra la struttura di un gruppo astratto e le trasformazioni che gli si fanno corrispondere nel momento dell'implementazione del gruppo e del suo uso concreto. Abbiamo già visto come ciò avvenga naturalmente per le rotazioni nell'esempio (2.1.3), la cui idea naturale di "rotazione" è indipendente da come la si realizzi in modo pratico per farla agire su uno spazio. Infatti la struttura del gruppo e dei suoi elementi sono indipendenti dalla *realizzazione* che ne facciamo, ovvero il modo in cui li associamo a trasformazioni che agiscono sugli elementi di uno spazio. Infatti è opportuno notare che mentre il modo di rappresentare il gruppo cambia con lo spazio sul quale lo si vuol far agire (una rotazione che agisce su elementi di \mathbb{R}^3 sarà un'opportuna rappresentazione matriciale 3×3 di un elemento di $GL(3, \mathbb{R})$, in particolare, come abbiamo visto, del sottogruppo $SO(3)$, mentre dovremmo avere matrici 4×4 su \mathbb{R}^4 , ovvero $SO(4)$), la sua struttura formale definita nella definizione (2.1) rimane del tutto invariata. Per la fisica che dovremo affrontare, in particolare per la struttura formale della meccanica quantistica in cui gli stati di un sistema sono rappresentati da raggi in uno spazio di Hilbert, siamo in particolare interessati a rappresentazioni che agiscono come operatori lineari su spazi lineari.

Definizione 2.7. Rappresentazione di un gruppo

Una **rappresentazione** di un gruppo (\mathcal{G}, \circ) su uno spazio lineare \mathcal{V} è un omomorfismo \mathcal{U} tra \mathcal{G} e $GL(\mathcal{V})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} : \mathcal{G} &\rightarrow GL(\mathcal{V}) \\ \mathcal{U}(\mathbf{a}\mathbf{b}) &= \mathcal{U}(\mathbf{a})\mathcal{U}(\mathbf{b}), \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{G} \end{aligned}$$

La dimensione della rappresentazione è la dimensione di \mathcal{V} . Una rappresentazione si dice **fedele** se \mathcal{U} è iniettiva, **degenere** altrimenti.

Spesso, quando non ci sarà possibilità di ambiguità commetteremo un'abuso di notazione indicando elemento del gruppo e sua rappresentazione con lo stesso simbolo. Per quanto detto sul gruppo lineare nella sezione precedente, possiamo dire che una rappresentazione finito dimensionale con dimensione n è attuata in generale da un elemento di $\mathcal{M}_{n \times n} |_{\det \neq 0}$, la quale viene detta *rappresentazione matriciale* di \mathcal{G} . È ovvio che dati \mathcal{G} gruppo con rappresentazione \mathcal{U} su \mathcal{V} spazio vettoriale, e il generico operatore $\mathcal{W} \in GL(\mathcal{V})$ si ha che la classe di elementi $\mathcal{W}\mathcal{U}(\mathcal{G})\mathcal{W}^{-1}$, con $\mathcal{U}(\mathcal{G}) = \{\mathcal{U}(\mathfrak{g}) : \mathfrak{g} \in \mathcal{G}\}$, sia ancora una rappresentazione di \mathcal{G} che chiameremo \mathcal{U}' . Ci riferiamo a questo procedimento come a una *trasformazione di similarità*. Questo fatto non incide in alcuno modo su come la rappresentazione agisce sullo spazio. Possiamo dire che sono in sostanza la *medesima* rappresentazione nel senso seguente:

Definizione 2.8. Rappresentazioni equivalenti

Dati \mathcal{G} gruppo, \mathcal{V} e \mathcal{W} spazi vettoriali, due rappresentazioni $\mathcal{U} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{V}$ e $\mathcal{T} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{W}$ si dicono **equivalenti** o **isomorfe** se esiste un isomorfismo $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ tale che $\forall \mathfrak{g} \in \mathcal{G}$ si ha:

$$\phi \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \phi^{-1} = \mathcal{T}(\mathfrak{g})$$

Il caso precedentemente descritto rientra in questa definizione. Poichè le rappresentazioni equivalenti formano una classe di equivalenza basterà studiare un rappresentante per classe. Dato che la traccia di un operatore non cambia per trasformazioni di similarità può essere presa come indice dell'equivalenza di due rappresentazioni diverse:

Definizione 2.9. Carattere di una rappresentazione

Dato un gruppo \mathcal{G} e una sua rappresentazione \mathcal{U} su \mathcal{V} spazio vettoriale, si dice **carattere della rappresentazione** $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g} \in \mathcal{G}$ il numero $\chi(\mathfrak{g}) = \text{Tr}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ ⁸.

Esaminiamo ora il caso in cui dati \mathcal{V} e \mathcal{G} , con \mathcal{V} di dimensione finita la rappresentazione matriciale \mathcal{U} di \mathcal{G} si presenti in questo modo:

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_1(\mathfrak{g}) & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{U}_2(\mathfrak{g}) \end{pmatrix}$$

⁸Su uno spazio di Hilbert è definibile la medesima operazione su particolari operatori chiamati *nucleari* per i quali è possibile definire la quantità $\text{Tr}(\mathcal{A}) = \sum_n^\infty \langle \mathcal{A}\psi_n, \psi_n \rangle$ con \mathcal{A} operatore e $\{\psi_n\}$ base ortonormale dello spazio, ovvero qualora sia assolutamente convergente e non dipenda dalla base scelta.

Dove $\mathcal{U}_1(\mathfrak{g})$ e $\mathcal{U}_2(\mathfrak{g})$ sono due matrici rispettivamente $m \times m$ e $(n - m) \times (n - m)$, mentre \mathcal{O} sono matrici nulle di ordine $m \times (n - m)$ e $(n - m) \times m$. Allora possiamo spezzare l'azione di $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ in due operatori che agiscono su sottospazi che non si mischiano mai sotto l'azione del gruppo \mathcal{G} . Per formalizzare questi concetti definiamo

Definizione 2.10. Sottospazio invariante

Dato un gruppo \mathcal{G} e una sua rappresentazione \mathcal{U} su \mathcal{V} spazio vettoriale e detto \mathcal{V}^1 sottospazio vettoriale di \mathcal{V} , \mathcal{V}^1 si dice **sottospazio invariante** rispetto alla rappresentazione \mathcal{U} se

$$\forall x \in \mathcal{V}^1, \forall \mathfrak{g} \in \mathcal{G}, \mathcal{U}(\mathfrak{g})x \in \mathcal{V}^1$$

Se \mathcal{V}^1 non contiene nessun altro sottospazio invariante esso viene detto **minimale** o **proprio**.

Specificato cosa sia uno spazio invariante possiamo finalmente dire quando una rappresentazione non si può scomporre nel senso appena visto.

Definizione 2.11. Rappresentazione irriducibile

Dato un gruppo \mathcal{G} e una sua rappresentazione \mathcal{U} su \mathcal{V} spazio vettoriale, \mathcal{U} viene detta **irriducibile** se non esiste alcun sottospazio invariante di \mathcal{V} rispetto alla sua azione. In caso contrario viene detta **riducibile**, e qualora anche il complemento ortogonale al sottospazio invariante sia invariante la rappresentazione viene detta **decomponibile**.

Come abbiamo visto nel primo capitolo i gruppi di simmetria che interessano la fisica sono spesso definiti su spazi euclidei in cui è definito l'usuale prodotto scalare da cui deriva la nozione di distanza. Nello studio delle simmetrie si è particolarmente interessati a quando l'azione delle rappresentazioni lascia invariata la distanza tra due punti. Un operatore che abbia questa proprietà su uno spazio complesso è detto unitario:

Definizione 2.12. Operatore unitario

Un operatore \mathcal{U} su uno spazio di Hilbert \mathcal{H} ⁹ si dice **unitario** se è suriettivo e conserva il prodotto scalare, ovvero

$$\langle \mathcal{U}\phi, \mathcal{U}\psi \rangle = \langle \phi, \psi \rangle, \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}$$

Oltre per la loro proprietà di conservare distanze e angoli, le rappresentazioni unitarie sono molto utili per il seguente teorema che non dimostreremo¹⁰:

⁹Intenderemo come spazio di Hilbert un qualsiasi spazio di Banach sul quale sia stato definito un prodotto scalare, indipendentemente dalla sua dimensione.

¹⁰Tutte le dimostrazioni non riportate sono reperibili in [1] e [2].

Teorema 2.2.1.

Se una rappresentazione unitaria è riducibile allora è anche decomponibile.

In generale possiamo decomporre una rappresentazione unitaria riducibile \mathcal{U} nella seguente forma:

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_n \mathcal{U}_n(\mathfrak{g}) \quad (2.1)$$

allo stesso modo in cui possiamo decomporre lo spazio \mathcal{V} su cui agiscono le rappresentazioni \mathcal{U} nella somma diretta dei suoi sottospazi complementari $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_n$. Notiamo inoltre che potrebbe accadere che k delle $\mathcal{U}_n(\mathfrak{g})$ siano il medesimo operatore. In questo caso nella (2.1) potremmo raccogliere gli a_k termini corrispondenti $\mathcal{U}_1(\mathfrak{g}) \dots \oplus a_k \mathcal{U}_j(\mathfrak{g}) \oplus \mathcal{U}_{j+k}(\mathfrak{g}) \dots$

Spesso una volta individuate le rappresentazioni irriducibili di due spazi \mathcal{V} e \mathcal{U} , si ha a che fare con una composizione dei due spazi. Sorge il problema di definire la rappresentazione sullo spazio prodotto.

Definizione 2.13. Prodotto diretto di spazi di Hilbert

Dati \mathcal{V} e \mathcal{U} spazi di Hilbert di dimensione rispettiva n e m e sui quali siano state fissate le basi $\{\hat{e}_i^{\mathcal{V}}\}$ e $\{\hat{e}_j^{\mathcal{U}}\}$. Il prodotto diretto dei due spazi $\mathcal{W} = \mathcal{V} \times \mathcal{U}$ è dato da $\{\hat{e}_k^{\mathcal{W}} \equiv |\hat{w}_k\rangle, k = (i, j), i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$ definito da

1. $\langle \hat{w}^{k'} | \hat{w}_k \rangle = \delta^{k'}_k = \delta^{i'}_i \delta^{j'}_j$, dove $k' = (i', j')$ e $k = (i, j)$;
2. $\mathcal{W} = \{\mathbf{x}, \mathbf{x} = |\hat{w}_k\rangle x^k\}$ con x^k componenti di \mathbf{x} ;
3. $\langle x | y \rangle = x_k^\dagger y^k$

Detto ciò possiamo definire la rappresentazione indotta dal prodotto diretto

Definizione 2.14. Rappresentazione indotta dal prodotto diretto

Dati \mathcal{V} e \mathcal{U} spazi di Hilbert e $\mathcal{W} = \mathcal{V} \times \mathcal{U}$ nel senso della definizione precedente, e un gruppo \mathcal{G} con rappresentazione $\mathcal{U}_{\mathcal{V}}$ su \mathcal{V} e $\mathcal{U}_{\mathcal{U}}$ su \mathcal{U} , definiamo $\mathcal{U}_{\mathcal{V} \times \mathcal{U}}$ la rappresentazione del prodotto diretto, la cui forma è determinata dall'azione sui vettori di base:

$$\mathcal{U}_{\mathcal{V} \times \mathcal{U}} |\hat{w}_k\rangle = |\hat{w}'_k\rangle \mathcal{U}^{k'}_k, \quad \mathcal{U}^{k'}_k \equiv \mathcal{U}_{\mathcal{V}}^{i'} \mathcal{U}_{\mathcal{U}}^{j'} \quad (2.2)$$

Un'altra proprietà importante, che ci servirà per trattare i gruppi di traslazione spaziale, riguarda le rappresentazioni irriducibili dei gruppi commutativi:

Teorema 2.2.2. Rappresentazioni irriducibili per gruppi abeliani

Le rappresentazioni irriducibili dei gruppi abeliani devono avere dimensione unitaria.

Possiamo ora finalmente enunciare il teorema fondamentale della teoria delle rappresentazioni:

Teorema 2.2.3. Lemma di Schur

Siano \mathcal{U} e \mathcal{U}' due rappresentazioni del gruppo \mathcal{G} rispettivamente sugli spazi vettoriali \mathcal{V} e \mathcal{V}' , e sia \mathfrak{F} una trasformazione lineare da \mathcal{V} a \mathcal{V}' per cui valga $\forall \mathbf{g} \in \mathcal{G}$:

$$\mathfrak{F}\mathcal{U} = \mathcal{U}'\mathfrak{F}$$

Allora si hanno due evenienze mutuamente escludentesi:

- (i) \mathfrak{F} è la trasformazione nulla $\mathcal{O} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$;
- (ii) \mathfrak{F} è un isomorfismo tra \mathcal{V} e \mathcal{V}' e di conseguenza \mathcal{U} è equivalente a \mathcal{U}' . In particolare se $\mathcal{V} = \mathcal{V}'$, \mathfrak{F} è un multiplo della trasformazione identica $\text{Id}_{\mathcal{V}}$.

2.3 Gruppi compatti e gruppi di ricoprimento

Possiamo arricchire la struttura di gruppo considerando le proprietà dell'insieme sottostante alla struttura di gruppo¹¹. Prendendo spunto dall'esempio (2.1.3) vediamo che un gruppo dipendente da un parametro può avere una struttura di continuità, cioè posso trovare trasformazioni infinitamente vicine. Il concetto di vicinanza è ben formalizzato all'interno di una struttura topologica.

Definizione 2.15. Gruppo topologico

Uno spazio topologico \mathcal{G} dotato di una operazione tra gli elementi “ \circ ” è un **gruppo topologico** se la sua topologia è compatibile con la struttura di gruppo nel seguente senso: la funzione

$$\begin{aligned} f : \mathcal{G} \times \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{G} \\ f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \mathbf{a}\mathbf{b}^{-1} \end{aligned}$$

è continua, dove su $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ è definita la topologia prodotto.

Per un gruppo topologico \mathcal{G} è dunque possibile definire una vicinanza tra i suoi elementi. In questo senso dato un gruppo topologico che agisce tramite la sua rappresentazione \mathcal{U} ¹² sugli elementi x di uno spazio Euclideo \mathcal{V} possiamo dire che: $\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \exists \mathcal{B}$ intorno di $\mathbf{f} \in \mathcal{G}$ tale che $\| \mathcal{U}_{\mathbf{f}}(x) - \mathcal{U}_{\mathbf{g}}(x) \| < \epsilon, \forall \mathbf{g} \in \mathcal{B}, \forall x \in \mathcal{V}$ dove $\| \cdot \|$ è la norma definita sullo spazio \mathcal{V} . Un'importante classe di gruppi topologici sono i seguenti:

¹¹In questa sezione verranno enunciati ma non dimostrati teoremi che ci permetteranno di introdurre concetti fondamentali per il proseguimento dei nostri scopi. Il testo di riferimento usato è [3].

¹²Useremo per comodità la notazione $\mathcal{U}_{\mathbf{g}}$ per $\mathcal{U}(\mathbf{g})$ quando questa sarà meno ingombrante dal punto di vista della notazione e non sorgeranno ambiguità.

Definizione 2.16. Gruppo compatto

Un gruppo topologico \mathcal{G} si dice **gruppo compatto** se \mathcal{G} inteso come spazio topologico è uno **spazio compatto**¹³.

L'importanza dei gruppi compatti è che possono essere considerati un'estensione dei gruppi finiti. La dimostrazione delle maggiori proprietà dei gruppi finiti si dimostra con somme mediate su tutti gli elementi. Per i gruppi compatti è sempre possibile definire una misura, detta misura di Haar, con la quale si possono sostituire le somme con integrali. Si può quindi dimostrare il seguente

Teorema 2.3.1. di Peter-Weyl

Sia \mathcal{U} una rappresentazione unitaria di un gruppo compatto \mathcal{G} su uno spazio di Hilbert complesso \mathcal{H} . Allora \mathcal{U} si decompone insieme ad \mathcal{H} tramite la (2.1) in una somma diretta di rappresentazioni finito dimensionali ed unitarie.

Spesso si ha a che fare con gruppi che sono *localmente isomorfi*. Ciò vuol dire che dati due gruppi topologici \mathcal{F} e \mathcal{G} si possono trovare due intorni $\mathcal{B}_{\text{id}(\mathcal{F})}$ e $\mathcal{B}_{\text{id}(\mathcal{G})}$ delle identità gruppali rispettivamente di \mathcal{F} e \mathcal{G} che possono essere collegati da un isomorfismo che conservi la struttura di gruppo. Dunque in un certo senso lo studio di come si comporti \mathcal{F} come gruppo dà informazioni di come a sua volta si comporti \mathcal{G} . Per sviluppare quest'idea abbiamo bisogno dei seguenti concetti.

Definizione 2.17. Ricoprimento

Uno spazio topologico \mathcal{V}^* viene detto **ricoprimento** di uno spazio topologico \mathcal{V} se esiste un'applicazione continua $\omega^* : \mathcal{V}^* \rightarrow \mathcal{V}$, detta **mappa di ricoprimento** o **proiezione**, tale per cui, $\forall x \in \mathcal{V}$ esiste \mathcal{B}_x intorno di x la cui retroimmagine attraverso ω^* , $\omega^{*-1}(\mathcal{B}_x)$, risulta in \mathcal{V}^* unione di insiemi aperti \mathcal{U}_ι (in \mathcal{V}^*) disgiunti a due a due, $\iota \in \mathcal{A}$, con \mathcal{A} insieme arbitrario di indici, :

$$\omega^{*-1}(\mathcal{B}_x) = \bigcup_{\iota} \mathcal{U}_\iota, \quad \iota \in \mathcal{A}, \quad \mathcal{U}_\iota \text{ aperto}$$

$$\mathcal{U}_\iota \cap \mathcal{U}_{\iota^*} = \emptyset, \quad \forall \iota^*, \iota \in \mathcal{A}$$

Osservazione 1.

Notiamo come la mappa di ricoprimento debba essere solo continua, ma diventi in modo naturale un omeomorfismo su ogni \mathcal{U}_ι . Inoltre è facile intuire che due ricoprimenti \mathcal{V}' e \mathcal{V}^* di uno spazio topologico \mathcal{V} sono equivalenti se esiste un omeomorfismo $\phi : \mathcal{V}' \rightarrow \mathcal{V}^*$ tale per cui $\omega^* \circ \phi = \omega'$. Si può inoltre dimostrare che se esistono due

¹³Uno spazio topologico \mathcal{X} si dice compatto se data un suo ricoprimento aperto \mathcal{A} è possibile estrarre una famiglia finita di aperti che sia ancora ricoprimento. Poichè avremo a che fare principalmente con spazi di *Banach*, vale il teorema di *Heine-Borel* che dice che un insieme è compatto se e solo se è chiuso e *totalmente limitato*

ricoprimenti \mathcal{V}' e \mathcal{V}^* connessi per archi¹⁴ di uno spazio topologico \mathcal{V} connesso per archi globalmente e localmente¹⁵ allora questi devono essere equivalenti. Inoltre se \mathcal{V} è anche semplicemente connesso¹⁶ e spazio di Hausdorff allora è dimostrabile che esiste sempre un ricoprimento \mathcal{V}^* connesso per archi.

Definizione 2.18. Ricoprimento universale

Uno spazio topologico \mathcal{V}^* connesso per archi viene detto **ricoprimento universale** di uno spazio topologico \mathcal{V} anch'esso connesso per archi se esiste un'applicazione continua $\omega : \mathcal{V}^* \rightarrow \mathcal{V}$, detta **mappa di ricoprimento universale** e se \mathcal{V}^* risulta anche semplicemente connesso.

Possiamo quindi chiederci se un ricoprimento di un gruppo topologico (\mathcal{G}, \circ) sia a sua volta gruppo con un'opportuna legge di composizione binaria “ \star ” in qualche modo collegata a “ \circ ”. A questa domanda risponde il seguente teorema, che definisce anche cosa si intenda per **gruppo di ricoprimento** e **gruppo di ricoprimento universale**

Teorema 2.3.2. Gruppo di ricoprimento

Sia \mathcal{V}^* uno spazio topologico connesso per archi ricoprimento tramite ω^* di un gruppo topologico (\mathcal{V}, \circ) anch'esso connesso per archi globalmente e localmente. Allora è possibile definire un'operazione “ \star ” in \mathcal{V}^* tale per cui (\mathcal{V}^*, \star) è un gruppo topologico e ω^* è un omomorfismo tra gruppi:

$$\begin{aligned} \omega^* : \mathcal{V}^* &\rightarrow \mathcal{V} \\ \omega^*(\mathfrak{g}_1^* \star \mathfrak{g}_2^*) &= \omega^*(\mathfrak{g}_1^*) \circ \omega^*(\mathfrak{g}_2^*) \end{aligned}$$

In particolare (\mathcal{V}^*, \star) e (\mathcal{V}, \circ) sono localmente isomorfi.

Ovviamente se \mathcal{V}^* del teorema precedente è un ricoprimento universale, si dirà che la struttura (\mathcal{V}^*, \star) è il **gruppo di ricoprimento universale** di (\mathcal{V}, \circ) .

¹⁴Uno spazio topologico \mathcal{X} è connesso per archi se per ogni due punti esiste un arco (ovvero una funzione $f : [0,1] \rightarrow \mathcal{X}$) che li collega. Alcuni autori fanno differenza tra insiemi connessi per archi e per cammini (*arcwise* e *pathwise*) rispettivamente se f è un omeomorfismo o una funzione solo continua. Noi non faremo questa distinzione.

¹⁵Uno spazio topologico \mathcal{X} è localmente connesso per archi in x se per ogni insieme aperto \mathcal{V} contenente x esiste un insieme aperto connesso \mathcal{U} con $x \in \mathcal{U} \subset \mathcal{V}$. Uno spazio topologico \mathcal{X} è localmente connesso per archi se è localmente connesso per archi in $x, \forall x \in \mathcal{X}$.

¹⁶Uno spazio topologico \mathcal{X} è semplicemente connesso se è connesso per archi, ed ogni arco chiuso (con $f(0) = f(1)$) è deformabile tramite omotopia ϕ ($\phi : \mathcal{X} \times [0,1] \rightarrow \mathcal{X}$, continua) nell'arco costante $f(t) = x, t \in [0,1], x \in \mathcal{X}$.

2.4 Gruppi di Lie e Algebre di Lie

La struttura di $GL(n)$ e $SO(n)$ è però molto più ricca di quella topologica:¹⁷ il fatto che lo possiamo parametrizzare ed identificare completamente con n parametri ci dice che in un certo senso è identificabile con un opportuno intorno di \mathbb{R}^n .

Definizione 2.19. Gruppo di Lie

Un gruppo topologico \mathcal{G} si dice **gruppo di Lie** se \mathcal{G} inteso come spazio topologico è una **varietà differenziabile**. Diremo che la dimensione n della varietà sottostante al gruppo è il numero dei **parametri**, da cui esso dipende in modo continuo.

Poichè un intorno di una varietà è omeomorfo a \mathbb{R}^n , possiamo parametrizzare un gruppo di Lie con n parametri in modo continuo; diremo che n è la dimensione del gruppo di Lie. Il fatto che la varietà sia anche differenziabile implica una certa regolarità del gruppo rispetto alla differenziazione, la qual regolarità deve essere presente anche in tutte le operazioni che agiscono su questi gruppi affinché rimangano gruppi di Lie, come si capisce dalle seguenti definizioni:

Definizione 2.20. Omomorfismo tra gruppi di Lie

Un **omomorfismo tra gruppi di Lie** è un omomorfismo tra gruppi di classe C^∞ .

Anche la struttura di sottogruppo deve essere opportunamente modificata per rimanere all'interno della categoria dei gruppi di Lie:

Definizione 2.21. Sottogruppo di Lie

Diciamo che \mathcal{H} è un **sottogruppo di Lie** di un gruppo di Lie \mathcal{G} se esso è

- (i) sottogruppo di \mathcal{G} ;
- (ii) immerso¹⁸ in \mathcal{G} ;
- (iii) le operazioni di gruppo su \mathcal{H} sono di classe C^∞ .

Inoltre se \mathcal{H} è allo stesso tempo sottogruppo e sottovarietà¹⁹ di \mathcal{G} , esso è automaticamente sottogruppo di Lie di \mathcal{G} .

Possiamo ora descrivere formalmente le trasformazioni di Galileo:

¹⁷In questa sezione verranno dati per conosciuti alcuni elementi fondamentali di geometria differenziale, come il concetto di carta, atlante e varietà differenziabile. Il libro di riferimento usato è [4] e si sono usate anche le *lecture notes* [5] in cui si possono trovare anche le dimostrazioni dei teoremi citati.

¹⁸Si veda pagina 121 in [4].

¹⁹Una sottoinsieme \mathcal{P} di una varietà \mathcal{M} di dimensione n è una sottovarietà di dimensione k se $\forall p \in \mathcal{P}$ esiste una carta \mathcal{C} contenente p con coordinate $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e tale per cui $\{\emptyset\} \neq \mathcal{C} \cap \mathcal{P} \subseteq \mathcal{M}$ e $\forall p \in \mathcal{P}$ si può avere una scelta delle coordinate tale per cui $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-k} = 0$.

Esempio 2.4.1. *Gruppo di Galileo*

Il gruppo delle trasformazioni di Galileo $\mathcal{G}al$ descritto nel capitolo 1 è un gruppo di Lie a 10 parametri. Infatti abbiamo detto che ogni trasformazione di Galileo (ovvero le rappresentazioni del gruppo di Galileo che agisce sugli elementi (t, \mathbf{x}) dello spazio galileiano \mathbb{R}^4) può essere decomposta nei tre sottogruppi di Lie che stiamo per descrivere. Ognuno è infatti allo stesso tempo sottogruppo e sottovarietà di $\mathcal{G}al$ ottenuta banalmente ponendo uguali a zero i parametri corrispondenti agli altri sottogruppi, ed è dunque sottogruppo di Lie per quanto appena visto. Gli elementi sono i seguenti:

1. *traslazione dell'origine spaziotemporale*: questo forma un sottogruppo $\mathcal{G}al_{tr}$ dipendente da un parametro $\mathbf{s} = (s_t, \mathbf{s}_{spaz}) \in \mathbb{R}^4$ tale che

$$\mathcal{G}al_{tr} \ni \mathfrak{g}_{\mathbf{s}}(t, \mathbf{x}) = (t + s_0, \mathbf{x} + \mathbf{s}_{spaz})$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

2. *boost*: questi formano un sottogruppo $\mathcal{G}al_{boost}$ dipendenti da un parametro $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tale che

$$\mathcal{G}al_{boost} \ni \mathfrak{g}_{\mathbf{v}}(t, \mathbf{x}) = (t, \mathbf{x} + \mathbf{v}t)$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

3. *rotazioni spaziali*: Poichè come abbiamo già accennato escludiamo dalla nostra trattazione le trasformazioni di Galileo contenenti elementi che invertano il tempo, la componente t di (t, \mathbf{x}) deve rimanere invariata sotto l'azione degli elementi del gruppo $\mathcal{G}al_{rot}$ ovvero è un sottospazio invariante rispetto all'azione del medesimo. In sostanza, la rappresentazione $\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}} \in \mathcal{G}al_{rot})$ appare nella seguente forma:

$$\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}}) = \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \tilde{\mathcal{U}}(\hat{\mathfrak{g}}) \end{pmatrix}$$

ed è quindi riducibile all'azione di rappresentazioni di ordine minore nella forma descritta dall'espressione (2.1), dove $\tilde{\mathcal{U}}(\hat{\mathfrak{g}})$ è una rappresentazione di un elemento $\mathfrak{g}_{(\hat{\mathbf{n}}, \theta)}$ gruppo delle matrici ortogonali tridimensionali $O(3)$ dipendente da una direzione $\hat{\mathbf{n}}$ e un angolo θ . Se da questo gruppo escludiamo le inversioni spaziali otteniamo matrici con $\det = 1$, ovvero $SO(3)$. Dunque possiamo dire che un elemento $\hat{\mathfrak{g}} \in \mathcal{G}al_{rot}$ agisce come segue:

$$\mathcal{G}al_{rot} \ni \hat{\mathfrak{g}}(t, \mathbf{x}) = (t, \mathfrak{g}_{(\hat{\mathbf{n}}, \theta)}(\mathbf{x}))$$

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ e } \mathfrak{g}_{(\hat{\mathbf{n}}, \theta)} \in SO(3)$$

La struttura di varietà ci permette di poter parametrizzare una curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}$ sul gruppo di Lie. Definiremo un tipo di curva attraverso una mappa esponenziale.

Poichè siamo in generale interessati nella nostra trattazione fisica a sottogruppi di $GL(n, \mathbb{R})$ dobbiamo determinare cosa sia lo spazio tangente di questi speciali gruppi di Lie. In generale lo spazio tangente in un punto \mathbf{X} di $GL(n, \mathbb{R})$ è lo spazio delle matrici reali di ordine $n \times n$ $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ (il quale è sua volta isomorfo a \mathbb{R}^{n^2})²⁰. La curva quindi, per giacere completamente in $GL(n, \mathbb{R})$, deve essere composta esclusivamente da matrici non singolari. La mappa esponenziale si definisce attraverso l'esponenziale di matrice. Se $X \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ l'esponenziale di X è una matrice che si ottiene attraverso la seguente espansione:

$$e^X = I + X + X^2 + X^3 + \dots^{21} \quad (2.3)$$

Inoltre per una proprietà delle matrici si ha che $\det(e^X) = e^{\text{Tr}(X)}$ non è mai nullo. Quindi la curva in $GL(n, \mathbb{R})$ definita da $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$, $\gamma(t) = e^{tX}$ è una curva passante per la matrice identità $\mathcal{I}_{n \times n}$ a $t = 0$ e che è interamente contenuta in $GL(n, \mathbb{R})$, poichè contenente solo matrici non singolari. Inoltre differenziando la curva otteniamo $\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}e^{tX} = X e^{tX}$, $\dot{\gamma}(0) = X$. Ora ci appresteremo a fare un collegamento fondamentale per il prosieguito dei nostri scopi.

Definizione 2.22. Algebra di Lie

Si definisce **algebra di Lie** sul campo \mathbb{K} , uno spazio vettoriale \mathcal{V} su \mathbb{K} dotato di un'applicazione $[\cdot, \cdot] : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ chiamata **parentesi di Lie**, che soddisfa le seguenti proprietà $\forall a, b \in \mathbb{K}, \forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathcal{V}$:

- (i) è bilineare $[a\bar{x} + b\bar{y}, \bar{z}] = a[\bar{x}, \bar{z}] + b[\bar{y}, \bar{z}]$, $[\bar{z}, a\bar{x} + b\bar{y}] = a[\bar{z}, \bar{x}] + b[\bar{z}, \bar{y}]$;
- (ii) è anticommutativa $[\bar{x}, \bar{y}] = -[\bar{y}, \bar{x}]$;
- (iii) soddisfa l'identità di Jacobi $[[\bar{x}, \bar{y}], \bar{z}] + [[\bar{y}, \bar{z}], \bar{x}] + [[\bar{z}, \bar{x}], \bar{y}] = 0$.

Per chiarire facciamo il seguente esempio:

Esempio 2.4.2. Algebra di Lie di matrici e trasformazioni lineari

Lo spazio vettoriale $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ con il prodotto $[A, B] = AB - BA$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ è un'algebra di Lie e si indica con $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Più in generale indichiamo con $\mathfrak{gl}(\mathcal{V})$ l'algebra di Lie definita sugli endomorfismi lineari di uno spazio vettoriale \mathcal{V} , dotato di parentesi di Lie definita da $[f, g] = f \circ g - g \circ f$ dove “ \circ ” è l'usuale composizione tra funzioni. Fissata una base su \mathcal{V} , $\mathfrak{gl}(\mathcal{V})$ e $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ sono isomorfi.

Il collegamento tra un gruppo di Lie e la sua algebra è dato da seguente teorema:

Teorema 2.4.1.

Sia \mathcal{G} gruppo di Lie, la sua algebra di Lie \mathfrak{G} considerata come spazio vettoriale è isomorfa a $\mathcal{T}_e\mathcal{G}$, lo spazio tangente all'elemento neutro e del gruppo \mathcal{G} .

²⁰Si veda pagina 166 in [4].

²¹Si può dimostrare che questa serie è convergente una volta definita la norma di $X \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ come $\|X\| = (\sum x_{ij}^2)^{\frac{1}{2}}$. Si veda [4] pag. 170.

Una prima conseguenza è che anche l'algebra di Lie di un gruppo di Lie ha dimensione n .

Esempio 2.4.3. $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ e $GL(n, \mathbb{R})$

L'algebra $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ è isomorfa a $\mathcal{T}_I GL(n, \mathbb{R})$, lo spazio tangente nell'identità. Infatti, come abbiamo visto, lo spazio tangente a $GL(n, \mathbb{R})$ è isomorfo a \mathbb{R}^{n^2} .

Possiamo quindi enunciare i due seguenti teoremi, fondamentali nell'uso delle algebre di Lie relative a gruppi di Lie:

Teorema 2.4.2. Primo e secondo teorema di Lie

(i) Se due gruppi di Lie \mathcal{G} e \mathcal{G}' sono localmente isomorfi le loro algebre \mathfrak{G} e \mathfrak{G}' sono isomorfe.

(ii) Se le algebre di Lie \mathfrak{G} e \mathfrak{G}' associate a due gruppi di Lie \mathcal{G} e \mathcal{G}' sono isomorfe allora i gruppi di Lie sono localmente isomorfi.

Inoltre data l'algebra \mathfrak{G} esiste ed è unico il gruppo di Lie semplicemente connesso che le corrisponde.

Poichè l'algebra di Lie \mathfrak{G} di un gruppo di Lie \mathcal{G} è isomorfa allo spazio tangente del medesimo nell'identità, possiamo rendere l'isomorfismo canonico scegliendo una base conformemente a quella scelta su $\mathcal{T}_I GL(n, \mathbb{R})$. Questa base a sua volta può essere scelta per mezzo della mappa esponenziale, derivandola rispetto al parametro t . Sia dunque $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ base di \mathfrak{G} . Un elemento \mathfrak{g} del gruppo è allora dato per quanto visto da

$$\mathfrak{g} = \exp \left\{ \left(\sum_{i=1}^n t_i \mathbf{e}_i \right) \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sum_{i=1}^n t_i \mathbf{e}_i)^n}{n!} \quad (2.4)$$

ovvero attraverso la mappa esponenziale di una combinazione lineare della base dell'algebra per mezzo di opportuni coefficienti moltiplicativi t_i . Gli elementi della base dell'algebra vengono detti *generatori* del gruppo. I generatori soddisfano la seguente relazione:

$$[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k \mathbf{e}_k, \quad c_{ij}^k \in \mathbb{R} \quad (2.5)$$

dove le c_{ij}^k sono dette **costanti di struttura** dell'algebra di Lie \mathfrak{G} e verificano le seguenti proprietà:

$$(i) \quad c_{ij}^k = -c_{ji}^k$$

$$(ii) \quad \sum_{m=1}^n (c_{ij}^m c_{mh}^k + c_{jh}^m c_{mi}^k + c_{hi}^m c_{mj}^k) = 0 \quad (\text{Identità di Jacobi}) \quad (2.6)$$

Si ha che le costanti di struttura individuano in modo univoco l'algebra a cui si riferiscono. Infatti assegnate $n \times n \times n = n^3$ costanti c_{ij}^k che rispettano le condizioni (2.6) esiste un'unica algebra di Lie le cui costanti siano quelle fornite (questo risultato

va sotto il nome di *terzo teorema di Lie*). Nella sezione 2.3 abbiamo descritto un utile risultato nella teoria delle rappresentazioni dei gruppi compatti fornito dal teorema di Peter-Weyl 2.3.1. Possiamo dire qualcosa anche sulla sua algebra, che risulterà molto utile quando avremo a che fare con la ricerca delle rappresentazioni unitarie e irriducibili in meccanica quantistica.

Corollario 2.4.3. *del teorema 2.3.1 di Peter-Weyl*

I generatori di un gruppo di Lie compatto sono rappresentati su uno spazio di Hilbert complesso da operatori autoaggiunti.

Osservazione 2. Ricoprimenti di gruppi di Lie

Per riconnetterci alla sezione precedente possiamo notare come un ricoprimento di una varietà sia ancora una varietà, richiedendo inoltre che la funzione di ricoprimento ω^* sia sufficientemente regolare (se la varietà è $\mathcal{C}^k \Rightarrow \omega^* \in \mathcal{C}^k$). Poichè come abbiamo visto nel teorema (2.4.2) due gruppi di Lie sono localmente isomorfi se e solo se le algebre associate lo sono, allora l'applicazione di ricoprimento ω^* di una varietà \mathcal{M}^* su un gruppo di Lie \mathcal{G} è un omomorfismo tra due gruppi nel senso del teorema (2.3.2) se e solo se induce un isomorfismo tra le rispettive algebre. Inoltre dalla conclusione del teorema (2.4.2) segue che il gruppo di ricoprimento universale di un gruppo di Lie \mathcal{G} con algebra associata \mathfrak{G} è l'unico gruppo di Lie connesso associato a \mathfrak{G} .

Possiamo introdurre anche il concetto di *rappresentazione* di un'algebra collegata a un gruppo.

Definizione 2.23. Rappresentazione di algebre

Una **rappresentazione** di un'algebra $(\mathfrak{G}, [\cdot, \cdot])$ su uno spazio vettoriale \mathcal{V} è un omomorfismo \mathcal{U} tra \mathfrak{G} e $GL(\mathcal{V})$ che preservi la struttura di algebra:

$$\mathcal{U} : \mathfrak{G} \rightarrow GL(\mathcal{V}) \rightarrow \begin{cases} \mathcal{U}(ca + db) = c\mathcal{U}(a) + d\mathcal{U}(b) \\ \mathcal{U}([a, b]) = [\mathcal{U}(a), \mathcal{U}(b)] \end{cases}$$

$\forall a, b \in \mathfrak{G}$.

La *dimensione della rappresentazione* è la *dimensione di \mathcal{V}* . Una rappresentazione si dice **fedele** se \mathcal{U} è iniettiva, **degenere** altrimenti.

L'utilità delle algebre risiede che le sue rappresentazioni e quelle del corrispondente gruppo vanno a coincidere.

Teorema 2.4.4. Relazione tra rappresentazioni di algebre e gruppi

Una rappresentazione per l'algebra \mathfrak{G} associata a \mathcal{G} è una rappresentazione pure per \mathcal{G} , e viceversa. In particolare una rappresentazione se è irriducibile per \mathfrak{G} lo sarà pure per \mathcal{G} , e viceversa.

Definiamo ora per comodità cosa si intenda per isometria su varietà, concetto fondamentale a cui ci siamo già riferiti implicitamente, quando abbiamo richiesto che le trasformazioni di Galileo mantenessero inalterata la distanza tra due punti dello spaziotempo e che ci sarà da guida anche nella ricerca di nuove trasformazioni una volta definito un nuovo principio di relatività.

Definizione 2.24. Varietà pseudo-riemanniana e riemanniana

Una **varietà pseudo-riemanniana** è una varietà differenziabile sulla quale è stato definito un tensore metrico $g_{\mu\nu}$ ²² non degenera. Se $g_{\mu\nu}$ è definito positivo la varietà si dice **riemanniana**.

Ricordiamo che il tensore metrico introduce un prodotto scalare sullo spazio tangente a un punto e che un prodotto scalare è univocamente determinato dalla sua segnatura (n, m) ²³ per il *teorema di Sylvester*. Per segnatura del tensore metrico ci riferiamo quindi alla segnatura del prodotto scalare che questo introduce sullo spazio tangente. Se la segnatura del tensore metrico definito su una varietà di dimensione n è di tipo $(n - 1, 1)$ o, equivalentemente, $(1, n - 1)$ la varietà si dirà *Lorentziana*.

Definizione 2.25. Isometria

Date due varietà differenziabili riemanniane (o in modo analogo pseudo-riemanniane) \mathcal{N} e \mathcal{M} , con i corrispettivi tensori metrici $g_{\mu\nu}^{(\mathcal{M})}$ e $g_{\mu\nu}^{(\mathcal{N})}$, un diffeomorfismo $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ si dice che è un **isometria** se, $\forall x \in \mathcal{M}$, detto $df_x : \mathcal{T}_x\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{T}_{f(x)}\mathcal{N}$ il differenziale che induce in modo naturale sugli spazi tangenti²⁴, se $\forall x \in \mathcal{M}, \forall v^\mu, w^\nu \in \mathcal{T}_x\mathcal{M}$

$$g_{\mu\nu}^{(\mathcal{M})}v^\mu w^\nu = g_{\mu\nu}^{(\mathcal{N})}(df_x(v))^\mu (df_x(w))^\nu$$
²⁵

2.5 Operatore di Casimir

Nell'implementazione dei gruppi di Lie il problema principale sarà trovare e classificare tutte le rappresentazioni irriducibili di un gruppo, in base alla loro dimensione e altre proprietà, come unitarietà ed hermiticità. Come fare dunque ad individuare

²²Un tensore metrico è un tensore la cui contrazione con due vettori $x^\mu y^\nu$ produce uno scalare.

²³La segnatura di un prodotto scalare è intuitivamente il numero di segni "+" e "-" che appaiono in un prodotto scalare. Formalmente, la *segnatura* di un prodotto scalare è una terna di numeri (n_+, n_-, n_0) , con $n_+, n_-, n_0 \in \mathbb{N}$, corrispondenti rispettivamente al numero di autovalori positivi, negativi e nulli della matrice simmetrica associata al prodotto scalare. Un prodotto scalare *non degenera* a $n_0 = 0$.

²⁴Si può dimostrare che questa applicazione è un *isomorfismo*.

²⁵Quando sarà comodo useremo, come in questo caso, la notazione tensoriale. Questo procedimento diverrà sistematico dal capitolo 3 in poi.

i sottospazi invarianti e tutte le rispettive rappresentazioni inequivalenti ed irriducibili? Abbiamo visto attraverso il Lemma di Schur (teor. 2.2.3) che data una rappresentazione irriducibile \mathcal{U}_g sullo spazio \mathcal{V} di un gruppo \mathcal{G} e un operatore \mathfrak{F} che commuta con tutti gli elementi del gruppo, allora \mathfrak{F} deve essere un multiplo dell'identità, ovvero l'operatore associato alla moltiplicazione per un certo scalare λ . In sostanza, se $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_i$ spazio invariante associato alla rappresentazione irriducibile \mathcal{U}_i della decomposizione (2.1) e \mathfrak{F} ha le caratteristiche citate si deve avere la seguente relazione

$$\mathfrak{F}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad (2.7)$$

Possiamo riconoscere in questa equazione un problema agli autovalori. Ciò significa che il problema della ricerca delle rappresentazioni irriducibili di un gruppo, una volta trovata la rappresentazione dei suoi generatori $\{\mathbf{e}_i\}$ sullo spazio \mathcal{V} , è legata a un problema agli autovalori di un operatore che commuti con tutti gli elementi della rappresentazione del gruppo.

Definizione 2.26. Operatore di Casimir

Un operatore di uno spazio \mathcal{V} che commuta con tutti gli elementi di una rappresentazione di un gruppo di Lie \mathcal{G} sul medesimo spazio è detto **operatore di Casimir** per il gruppo \mathcal{G} .

2.6 Teorema di Noether

La formulazione della meccanica classica descritta nel primo capitolo è fortemente dipendente dal sistema di riferimento scelto. L'evoluzione della meccanica classica è necessita delle varietà differenziabili. Infatti come abbiamo visto nel primo capitolo un sistema composto da n particelle ha uno spazio di configurazioni isomorfo a \mathbb{R}^{3n} . L'ambiente naturale per studiare l'equazione (1.3) è lo spazio delle fasi del sistema che a sua volta possiamo rappresentare come $\mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n}$ e in cui l'equazione di Newton si scompone nel sistema (1.5). In generale si parla di *gradi di libertà* del sistema. Infatti l'esistenza di vincoli²⁶ per un sistema come quello appena descritto il cui spazio delle configurazioni è \mathbb{R}^{3n} potrebbe ridurre la dimensionalità del problema. In generale il principio che permette di trattare in modo opportuno i vincoli nell'equazione (1.3) è il *principio di D'Alembert*. Questo afferma che per ogni spostamento virtuale $\delta\mathbf{r}$ ²⁷ il prodotto scalare $\langle \delta\mathbf{r}, \mathbf{R} \rangle = 0$, dove \mathbf{R} è detta *reazione vincolare*, e per un sistema dotato di energia potenziale $U(\mathbf{x})$ ha la forma $\mathbf{R} = \ddot{\mathbf{x}} + \nabla U(\mathbf{x})$. Il *principio di D'Alembert* ci permette in sostanza di affermare che

²⁶Ci riferiremo qui e nel seguito a vincoli *olonomi*.

²⁷Per spostamento virtuale si intende uno spostamento infinitesimo $\delta\mathbf{r}$ effettuato a tempo costante, ovvero con le forze e i vincoli fissati a un preciso attimo di tempo.

il lavoro delle reazioni vincolari è nullo per ogni spostamento virtuale. Ciò è facilmente estentibile a un sistema su cui agiscono n vincoli e le corrispondenti n reazioni vincolari \mathbf{R}_i . La presenza di vincoli sul sistema può però essere affrontata da un punto di vista geometrico. Infatti, se immaginassimo le nostre n particelle vincolate a stare su un piano, l'osservatore che cercherebbe di descriverle avrebbe bisogno, una volta individuato il piano, di solo due coordinate per descrivere la posizione di una singola particella. Infatti una funzione generica dello spazio n -dimensionale nella forma $f(x, y, z) = 0$ descrive un insieme di livello, che possiamo immaginare come un'ipersuperficie $(n - 1)$ -dimensionale immerso nello spazio \mathbb{R}^3 . Dunque lo spazio delle configurazioni di un tale sistema composto da n particelle vincolate sarà isomorfo a \mathbb{R}^{2n} . Ad esempio, per un punto vincolato a muoversi su una sfera di raggio costante, basteranno due coordinate angolari $\phi \in [0, 2\pi)$ e $\theta \in (0, \pi)$ per individuare un punto su una sfera²⁸. Possiamo quindi introdurre per un sistema a n gradi di libertà n coordinate generalizzate $\mathbf{q} = \{q_i\}$ (le quali come abbiamo visto non coincidono sempre con i vettori dello spazio \mathbb{R}^3 in cui avvengono gli eventi), per mezzo delle quali possiamo descrivere completamente il nostro sistema con n gradi di libertà come una varietà differenziabile \mathcal{M} ²⁹, e definire le velocità generalizzate $\dot{\mathbf{q}} = \{\dot{q}_i\}$ come elementi dello spazio tangente a ogni punto della varietà. Lo spazio delle fasi del sistema è isomorfo al fibrato tangente \mathcal{TM} ³⁰. Stiamo quindi identificando lo spazio formato dai gradi di libertà con una varietà differenziabile un numero opportuno di volte. Si dimostra che su una varietà il principio di D'Alembert equivale alla formulazione di un principio variazionale³¹. Questo principio geometrico, che va sotto il nome di *principio variazionale di Hamilton* afferma che esista sulla varietà una funzione differenziabile su \mathcal{M} ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathcal{TM} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) &= \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \end{aligned}$$

tale per cui, data una curva sulla varietà $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ la quantità che chiamiamo *funzionale d'azione*

$$\mathcal{S}[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt \quad (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \gamma \quad (2.8)$$

valutato tra due istanti di tempo t_1 e t_2 in cui il sistema si trova rispettivamente in due punti fissati \mathbf{q}_1 e \mathbf{q}_2 assume un valore estrema quando $\gamma(t)$ è la

²⁸Ad esclusione dei poli $\theta = 0$, $\theta = \pi$ che sono punti singolari per questo sistema di coordinate.

²⁹Indicheremo con $x \in \mathcal{M}$ un punto di una varietà e con $\mathbf{q} = \{q_i\}$ le coordinate di quel punto una volta scelta un'adeguata parametrizzazione attraverso delle carte

³⁰Il fibrato tangente di una varietà \mathcal{M} è l'unione di tutti gli spazi tangenti ad ogni punto $x \in \mathcal{M}$, ovvero $\mathcal{TM} = \cup_{x \in \mathcal{M}} \mathcal{T}_x \mathcal{M}$. Un elemento $\xi \in \mathcal{TM}$ specifica un punto $x \in \mathcal{M}$ e un vettore appartenente allo spazio tangente $\mathcal{T}_x \mathcal{M}$. Dunque definito un sistema di coordinate su \mathcal{M} si ha $\mathcal{TM} \ni \xi = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$.

³¹Si veda [6] a pagina 95 per una dimostrazione di questo fatto.

traiettorie reali del sistema, in formule

$$\delta\mathcal{S}[\gamma] = 0$$

Da questo principio, chiamato anche *principio di minima azione*, segue facilmente che, affinché $\gamma(t)$ renda estrema l'equazione (2.8), è necessario e sufficiente che si abbia lungo la curva $\gamma(t) = \mathbf{q}(t)$ ³²:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = 0 \quad (2.9)$$

che è un sistema di n equazioni del secondo ordine (dette *equazioni di Eulero-Lagrange*) che necessita di $2n$ costanti iniziali. È anche importante notare come la proprietà della curva $\gamma(t)$ di essere estrema non dipenda dal sistema di coordinate $\mathbf{q} = \{q_i\}$ scelto. Definiamo inoltre la quantità $p_i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ che chiameremo *momento generalizzato*. Il vantaggio dunque del sistema di equazioni (2.9) è di esprimere le equazioni del moto in modo del tutto indipendente, senza bisogno di immersioni in spazi euclidei come per il sistema di equazioni (1.3). Particolare importanza rivestono nella teoria dei sistemi dinamici i sistemi autonomi per cui $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, cioè il sistema non dipende esplicitamente dal tempo. Diremo che la coppia $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ definisce un *sistema lagrangiano* che diremo *non autonomo* o *autonomo* rispettivamente se la sua lagrangiana dipende o meno dal tempo. Lo studio del moto di un sistema necessita in genere di ulteriori elementi che possano ridurre la dimensionalità del problema. Un esempio sono i così detti *integrali primi del moto*.

Definizione 2.27. Integrali primi del moto

Si definisce *integrale primo del moto* per il sistema lagrangiano $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ una qualsiasi funzione $\mathcal{H} : \mathcal{TM} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che se $\gamma(t) = \mathbf{q}(t)$ è una curva su \mathcal{M} soluzione delle (2.9) per qualche $t \in I \subset \mathbb{R}$ allora si ha

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) = c, \quad c \in \mathbb{R},$$

In particolare se il sistema è autonomo si ha $\mathcal{H}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) = \mathcal{H}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$.

L'integrale primo in sostanza esprime una relazione funzionale che si mantiene costante lungo le traiettorie del moto, e che dunque pone dei vincoli alle $\mathbf{q}(t)$ e $\dot{\mathbf{q}}(t)$ riducendo ulteriormente la dimensionalità del problema. Nella prima sezione abbiamo accennato a come una simmetria definita su un sistema possa aiutare nella risoluzione di un problema dinamico. Questo a livello lagrangiano è facilmente intuibile in situazioni come la seguente:

³²Nel seguito con $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, si intenderà il sistema di equazioni formato da $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial q_n} \end{array} \right.$.

Discorso analogo per $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$.

Esempio 2.6.1. *coordinata ciclica*

Se una lagrangiana \mathcal{L} non dipende da una da una coordinata q_k , ovvero si ha

$$\mathcal{L}(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_n, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

, si dice che q_k è una *coordinata ciclica*. Inoltre il rispettivo momento generalizzato è un integrale primo. Infatti sulle traiettorie reali che verificano la (2.9) si ha

$$\dot{p}_k \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}$$

Ma poichè \mathcal{L} non dipende da q_k si ha che

$$\dot{p}_k = 0$$

ovvero p_k è un integrale primo.

L'esempio appena fatta è molto importante per capire come un sistema sia *invariante* sotto l'azione di un gruppo di trasformazioni \mathcal{G} . In particolare immaginando che nella lagrangiana dell'esempio precedente la coordinata q_k ciclica coincida con uno degli assi coordinati $\hat{\mathbf{e}}_i$ dello spazio \mathbb{R}^n (ovvero $q_k = x_i$), supponiamo che agisca su \mathcal{L} una rappresentazione gruppo di traslazioni $\mathcal{G}_{T(\hat{\mathbf{e}}_i)}$ lungo la direzione $\hat{\mathbf{e}}_i$ abbiamo che la lagrangiana è invariante sotto l'azione di questo gruppo. Infatti

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{T(\hat{\mathbf{e}}_i)} \ni \mathfrak{g} : q_k &\rightarrow q'_k = q_k + \delta x_i \\ &\downarrow \\ \mathcal{L}(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_n, \dot{\mathbf{q}}, t) &= \mathcal{L}'(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_n, \dot{\mathbf{q}}, t) \end{aligned}$$

prima di formalizzare il comportamento di una lagrangiana sotto l'azione di un gruppo, e determinare sotto quali condizioni e per quali gruppi si hanno situazioni simili alla precedente, abbiamo bisogno di alcune definizioni.

Definizione 2.28. *Derivata di una applicazione*

Siano \mathcal{M} e \mathcal{N} due varietà differenziabili e sia $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ differenziabile³³. La *derivata* di f nel punto $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$, $f_{*\mathbf{x}}$, è un'applicazione tra i due spazi tangenti in \mathbf{x}

$$f_{*\mathbf{x}} : \mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{T}_{f(\mathbf{x})}\mathcal{N}$$

definita come segue. Data la curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$, passante in \mathbf{x} per il valore nullo del parametro ($\gamma(0) = \mathbf{x}$), e dato un vettore $\mathbf{v} \in \mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$ tale che si abbia $\mathbf{v} = \left. \frac{d\gamma(t)}{dt} \right|_{t=0}$,

³³Un'applicazione tra due varietà si dice differenziabile se prese due carte sulle varietà in modo tale coprano interamente o in parte dominio e codominio dell'applicazione si ha che l'applicazione è differenziabile come funzione delle coordinate locali.

allora $f_{*x}\mathbf{v}$ è l'elemento dello spazio tangente $\mathcal{T}_{f(x)}\mathcal{N}$ tangente alla curva $f \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{N}$ per il valore nullo del parametro della curva t , ovvero

$$f_{*x}\mathbf{v} = \left. \frac{d}{dt}(f(\gamma(t))) \right|_{t=0}$$

Possiamo ora enunciare il teorema di Noether generale per sistemi non autonomi.

Teorema 2.6.1. teorema di Noether

Sia $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ un sistema lagrangiano e sia $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M} \times \mathbb{R}$ (ovvero la varietà prodotto della varietà delle configurazioni \mathcal{M} e del tempi \mathbb{R}) e \mathcal{G}_λ un gruppo di Lie dipendente da un parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ di diffeomorfismi $\mathcal{G}_\lambda \ni \mathfrak{g}_\lambda : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_1$ ³⁴ con $\mathfrak{g}_\lambda|_{\lambda=0} = \mathcal{I}d_{\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_1}$. Allora, definendo un parametro τ su \mathcal{M}_1 ed estendendo il sistema lagrangiano $(\mathcal{M}_1, \mathcal{L}_1)$ con

$$\mathcal{L}_1 \left(\mathbf{q}, t, \frac{d\mathbf{q}}{d\tau}, \frac{dt}{d\tau} \right) = \mathcal{L} \left(\mathbf{q}, \frac{d\mathbf{q}}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt}, t \right) \cdot \frac{dt}{d\tau}$$

se $\forall \xi \in \mathcal{T}\mathcal{M}_1$ si ha

$$\mathcal{L}_1(\mathfrak{g}_{\lambda*}\xi) = \mathcal{L}(\xi)$$

con $\mathfrak{g}_{\lambda*}$ come definita nella definizione 2.28, allora il sistema ha un integrale primo

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 : \mathcal{T}\mathcal{M}_1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathcal{H}_1 \left(\mathbf{q}, t, \frac{d\mathbf{q}}{d\tau}, \frac{dt}{d\tau} \right) &= c \end{aligned}$$

In particolare in coordinate locali \mathbf{q} e ponendo $\dot{\mathbf{q}} = \frac{d\mathbf{q}}{d\tau}$ si ha

$$\mathcal{H}_1 = \left. \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \frac{d\mathfrak{g}_\lambda(\mathbf{q})}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}$$

e

$$\mathcal{H}_1 \left(\mathbf{q}, t, \frac{d\mathbf{q}}{d\tau}, 1 \right) = \mathcal{H}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)$$

con $\mathcal{H}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)$ integrale primo di $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$.

Corollario 2.6.2. Teorema di Noether per sistemi autonomi

Qualora la lagrangiana del sistema lagrangiano $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ del teorema 2.6.1 non dipendesse da t , ovvero $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, allora è il sistema $(\mathcal{M}_1, \mathcal{L}_1)$ del teorema 2.6.1 è invariante per traslazioni temporali \mathcal{T}_σ , e il corrispettivo integrale primo è l'energia del sistema. Se inoltre il sistema lagrangiano $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ autonomo è invariante per trasformazioni di un gruppo di Lie \mathcal{F}_α dipendente da un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ di diffeomorfismi $\mathcal{F}_\alpha \ni \mathfrak{f}_\alpha : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ con $\mathfrak{f}_\alpha|_{\alpha=0} = \mathcal{I}d_{\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}}$, possiamo ricorrere al teorema 2.6.1 con $\mathcal{G}_\lambda = \mathcal{F}_\alpha \oplus \mathcal{T}_\sigma$ nel senso dell'equazione 2.1.

³⁴Un diffeomorfismo tra due varietà differenziabili $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ è un omeomorfismo in cui sia f che f^{-1} sono differenziabili un adeguato numero di volte (dipendente dalla regolarità delle varietà \mathcal{M} ed \mathcal{N}).

Capitolo 3

Meccanica quantistica e relatività

L'inizio del XX secolo è accompagnato da grandi rivoluzioni della fisica. I due principali problemi che rimanevano irrisolti all'interno dell'impalcatura della meccanica classica, ovvero la radiazione di corpo nero e il problema di individuare rispetto a quale sistema di riferimento privilegiato per la propagazione della luce si riferissero le equazioni di Maxwell contestualmente alla costante c_0 , portarono a una nuova fisica. Avremo quindi bisogno di formulare un nuovo principio di invarianza relativistico che abbia le caratteristiche descritte nella proposizione (1.0.2), e con esso una nuova descrizione dello spazio e delle trasformazioni che collegano sistemi equivalenti. Inoltre dovremo opportunamente modificare la teoria dinamica Newtoniana con una teoria quantistica che sia allo stesso tempo invariante per l'insieme di trasformazioni introdotte e coerente con i risultati fondamentali.

3.1 Principio di relatività ristretta.

Il bisogno di un nuovo principio di invarianza nella descrizione dei sistemi fisici nasce storicamente proprio dal problema di conciliare la teoria dell'elettromagnetismo di Maxwell, che aveva per l'epoca ottimi riscontri sperimentali, con il principio galileiano. Quest'ultimo inserisce tra tutti i sistemi equivalenti, quelli che si muovono l'uno rispetto all'altro di moto rettilineo uniforme. Si ottiene teoricamente che le equazioni di Maxwell non si comportano in modo covariante come richiesto sotto trasformazioni di Galileo. In particolare sorgeva la necessità di individuare il sistema di riferimento rispetto al quale esse fossero descritte, ovvero dove la velocità della luce avesse valore c_0 . La verifica sperimentale confermò che non fosse possibile formulare una teoria che prevedesse un sistema di riferimento privilegiato chiamato *etere* rispetto al quale fosse formulata la teoria di Maxwell, e, più in generale con lo sviluppo degli apparati sperimentali, che il principio di relatività di Galileo non si applica in modo adeguato ad osservatori che si muovono con velocità relative elevate. Einstein nel 1905 formula in un suo scritto quello che diverrà il *principio di*

relatività ristretta, che si rivelerà essere (e lo è fino ad oggi) la risoluzione a parte dei problemi sorti all'interno della fisica classica:

Proposizione 3.1.1. Principio di relatività ristretta

Esistono dei sistemi di coordinate, detti inerziali, che hanno le due seguenti proprietà:

1. *Tutte le leggi della natura sono covarianti nei sistemi inerziali. Un sistema di riferimento che si muova di moto rettilineo e uniforme rispetto a un dato sistema inerziale è anch'esso inerziale.*
2. *Per tutti i sistemi di riferimento inerziali la velocità della luce nel vuoto è c_0 e vale $2.997\,924\,58 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.*

Non ci soffermeremo su tutte le conseguenze fisiche che questo nuovo principio introduce, come la ridefinizione del concetto di contemporaneità o alle famose dilatazioni dei tempi e contrazione delle lunghezze. Ci soffermeremo sugli aspetti che ci interessano ai fini della formulazione del principio di invarianza, già descritti nella prima sezione.

3.1.1 Trasformazioni di Lorentz e di Poincaré

Il set delle trasformazioni di Galileo descritte nella sezione deve essere opportunamente modificato; in dobbiamo trovare un insieme di trasformazioni coerente con il secondo principio espresso nella proposizione (3.1.1). Notiamo che in particolare alcune delle trasformazioni di Galileo devono rimangono coerenti con questi nuovi principi. Infatti, si può ben immaginare che l'introduzione della costanza della luce sarà un problema solo per sistemi in moto relativo, in quanto per sistemi comoventi essa avrebbe il medesimo valore in modo naturale. Dunque ricaviamo che le traslazioni spaziotemporali e le rotazioni debbono ancora essere trasformazioni relativistiche. Per quanto riguarda le relazioni tra sistemi in moto reciproco, quelle che abbiamo precedentemente chiamato *boost*, possiamo ricavare la loro nuova forma grazie ad argomenti di omogeneità ed isotropia dello spazio (utili in particolare per determinare la linearità delle trasformazioni) e, ovviamente, alla costanza della velocità della luce. L'insieme dei boost e delle rotazioni formano quelle che vengono dette *trasformazioni di Lorentz*, la cui analisi dettagliata nell'ambito della teoria dei gruppi occuperà buona parte del prossimo capitolo. Il gruppo associato a queste trasformazioni è un gruppo di Lie a 6 parametri. Se all'interno del gruppo comprendiamo anche le traslazioni spaziotemporali otteniamo le *trasformazioni di Poincaré* che è quindi un gruppo di Lie a 10 parametri. Riportiamo per due sistemi \mathcal{S} e \mathcal{S}' equiorientati, con \mathcal{S}' in moto lungo la direzione positiva $\hat{x} = \hat{x}'$ con velocità v e le

origini coincidenti a $t = 0$, i relativi boost di Lorentz, affiancate dai corrispettivi boost di Galileo:

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \implies \begin{cases} t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (3.1)$$

Notiamo come una delle conseguenze principali delle relatività è che il tempo non sia più definito come assoluto, ovvero comune a tutti i sistemi di riferimento ma sia anch'esso trasformato attraverso un boost. Questo discende direttamente dal nuovo concetto di *contemporaneità* che segue automaticamente dal nuovo principio di relatività. La struttura delle trasformazioni può essere resa simmetrica facendo un cambio di variabile e definendo, al posto del tempo, una nuova variabile che abbia le dimensioni di una lunghezza

$$t \mapsto c_0 t \equiv w$$

Con questo cambio le trasformazioni di Lorentz assumono la forma

$$\begin{pmatrix} w' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

dove abbiamo posto $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}}$ e $\beta = \frac{v}{c_0}$. Questa forte simmetria tra spazio e tempo rende ancora più necessario e utile di quanto lo fosse in relatività galileiana definire la concezione dello spaziotempo introdotta dal principio invariante e che studieremo nel paragrafo successivo. Un elemento del gruppo di Lorentz è genericamente indicato con $\Lambda^\nu{}_\mu$, mentre un elemento del gruppo di Poincaré è indicato con $P^\nu{}_\mu$ che è in generale composto da una trasformazione di Lorentz e una traslazione $P^\nu{}_\mu x^\mu = \Lambda^\nu{}_\mu x^\mu + a^\nu$.

3.1.2 Concezione dello spaziotempo

Lo spaziotempo della relatività ristretta è chiamato *spaziotempo di Minkowski*. Ripercorriamo, per analogia, nel dare la definizione di questo spazio tutti i passi della definizione (1.1). Lo spaziotempo di Minkowski è definito come uno spazio affine quadridimensionale \mathcal{M}_a^4 i cui punti sono chiamati *eventi* e che indicheremo per comodità con il formalismo tensoriale x^μ . Come abbiamo precedentemente fatto, possiamo sempre trovare un isomorfismo che lo metta in corrispondenza con \mathbb{R}^4 . Notiamo subito che non è possibile definire in un modo che abbia senso in relatività ristretta una proiezione "tempo" come quella nel punto 2 della proposizione 1.0.1,

in quanto quella costruzione partiva dal presupposto che la coordinata tempo fosse assoluta tra i sistemi. Non possiamo quindi neppure definire una distanza tra eventi contemporanei come nel punto 3, poiché abbiamo perso, o per meglio dire, pesantemente modificato, il concetto di contemporaneità. Ricordando che i diffeomorfismi definiti da un principio di relatività debbono essere isometrie per la classe degli spazi geometrici equivalenti secondo il principio come abbiamo già notato nella trattazione della relatività galileiana, possiamo sfruttare le trasformazioni (3.2) per capire in che modo definire opportunamente il concetto di distanza sul nostro spazio \mathcal{M}_a^4 . Si trova facilmente che la distanza definita come:

$$ds^2 = -dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

è una quantità invariante sotto trasformazioni di Lorentz. Questa corrisponde a un prodotto scalare definito da un tensore metrico $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1,1,1,1)$.

Proposizione 3.1.2. Spaziotempo di Minkowski *Definiamo spaziotempo di Minkowski uno spazio affine quadridimensionale \mathcal{M}_a^4 dotato di un prodotto scalare non degenere corrispondente al tensore metrico $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1,1,1,1)$ ¹.*

Poiché come abbiamo detto tutti gli \mathcal{M}_a^4 sono isomorfi a \mathbb{R}^4 possiamo studiare direttamente \mathbb{R}^4 equipaggiato con $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1,1,1,-1)$, che chiameremo \mathcal{M}^4 . Gli elementi di \mathcal{M}^4 si chiamano *quadrivettori*. Il tensore metrico introduce una *struttura causale* su \mathcal{M}^4 . Infatti possiamo in base al valore di $\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$ distinguere i vari tipi di distanza tra gli eventi. Detti d^μ e b^μ eventi in \mathcal{M}^4 si ha

- $\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = 0 \rightarrow$ Questa equazione individua un'ipersuperficie detta *cono luce*. Se $x^\mu = (d^\mu - b^\mu)$ che tra i due eventi c'è una *distanza di tipo luce*. Ciò vuol dire che l'unico segnale che può percorrere $(d^\mu - b^\mu)$ è un segnale che si muova a c e tra gli eventi ci può essere causalità.
- $\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu > 0 \rightarrow$ La distanza è detta di *tipo spazio*, nessun segnale fisico può viaggiare tra d^μ e b^μ . Si può sempre trovare tramite un'opportuna trasformazione di Lorentz un sistema dove i due eventi avvengano alla stessa coordinata temporale x_0 .
- $\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu < 0 \rightarrow$ La distanza è detta di *tipo tempo*, tra i due eventi può esserci causalità. Si può sempre trovare tramite un'opportuna trasformazione di Lorentz un sistema dove i due eventi avvengano alla stessa coordinata spaziale \mathbf{x} .

¹Molti autori utilizzano $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1,-1,-1,-1)$. Questa differenza non cambia i risultati fisici.

3.2 Meccanica quantistica e simmetrie.

3.2.1 L'impianto formale della meccanica quantistica.

La teoria fisica che vogliamo rendere invariante ora che abbiamo formulato il principio di relatività ristretta è la meccanica quantistica. La formulazione Hamiltoniana della meccanica quantistica si basa su quattro postulati fondamentali, che definiscono l'impianto formale della medesima, ovvero la struttura matematica della teoria che permetta la descrizione completa di un sistema e i suoi possibili stati. L'impianto formale permetterà poi di capire come dovremo far agire le simmetrie, e in particolare un principio relativistico di invarianza, sulla descrizione dei sistemi. Ora che abbiamo visto che una simmetria è formalizzata dal concetto di gruppo, è evidente, per quanto visto nella sezione 2.2, che una volta formulato l'impianto formale della teoria, e, in particolare, specificato con quali oggetti matematici siano individuabili i sistemi, che il problema si ridurrà al cercare un'opportuna rappresentazione per il gruppo che agisca in modo adeguato sui sistemi. Introduciamo quindi il formalismo della meccanica quantistica attraverso i seguenti postulati:

Proposizione 3.2.1. *Postulati della meccanica quantistica*

1. *Stati:* Ad ogni sistema fisico si associa uno spazio di Hilbert complesso e separabile \mathcal{H} . Uno stato del sistema ad un tempo fissato \tilde{t} è un raggio² dello spazio di Hilbert e si indica attraverso la notazione di Dirac con $|\psi(\tilde{t})\rangle \equiv |\psi\rangle$.
2. *Osservabili:* ad ogni grandezza osservabile \aleph è associato un operatore lineare autoaggiunto,

$$\begin{aligned}\hat{A} : \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H} \\ \hat{A} &= \hat{A}^\dagger\end{aligned}$$

con un set ortonormale completo di autostati $\{|\psi_\alpha\rangle\}$ corrispondenti agli autovalori reali $\{\alpha\}$. L'unico risultato di una misura perpetrata da \hat{A} è uno dei suoi autovalori $\{\alpha\}$

$$\hat{A}|\psi\rangle = \alpha|\psi_\alpha\rangle$$

3. *Probabilità di una misura:* Se un sistema fisico si trova nello stato $|\psi\rangle$ la probabilità che il risultato della misurazione della grandezza \aleph associata ad \hat{A} sia α è data da

$$|\langle\psi_\alpha|\psi\rangle|^2$$

²Per raggio intendiamo il sottospazio vettoriale di dimensione uno associato ad un vettore. Poiché ogni vettore dello stesso raggio descrive il medesimo stato, sarà sufficiente scegliere un vettore normalizzato a meno di un fattore di fase, spesso, riferendoci a *vettore*, intenderemo un elemento del raggio normalizzato, di cui sarà "rappresentante" nella descrizione del sistema e delle sue interazioni. In pratica quando non darà luogo a confusione o non sarà opportunamente esplicitato li considereremo sinonimi.

4. Collasso funzione d'onda: La procedura di misura della grandezza \aleph operata dall'azione dell'operatore \hat{A} sullo stato $|\psi\rangle$ con risultato α , proietta lo stato sul sotto spazio vettoriale di $|\psi_\alpha\rangle$. Ogni altra misura di \aleph darà quindi come risultato α .
5. Evoluzione dinamica di un sistema quantistico: L'evoluzione temporale di un sistema quantistico il cui stato è completamente descritto da $|\psi(t)\rangle$ è governata dall'**equazione di Schrödinger**:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle \quad (3.3)$$

dove \hat{H} è l'operatore Hamiltoniano.

Sperimentalmente quello che si misura in fisica sono le probabilità di transizione tra due stati $|\psi_A\rangle$ e $|\psi_B\rangle$ ovvero $|\langle\psi_A|\psi_B\rangle|^2$. Questo avviene perchè gli strumenti principali di indagine a livello microscopico dal quale possiamo ricavare le informazioni necessari allo studio di particelle e sistemi fisici sono i processi di scattering, nei quali un numero considerevole di sistemi uguali viene *preparato* nello stato $|\psi_A\rangle$ e si misura la probabilità di transizione $|\langle\psi_A|\psi_B\rangle|^2$ contando quante evenienze dello stato $|\psi_B\rangle$ si rilevano dopo l'interazione con il centro diffusore. Le caratteristiche dei vari $|\psi_B\rangle$ e le proporzioni con le quali vengono prodotti danno informazioni esaustive sul tipo di interazioni che avvengono nel centro di scattering.

3.2.2 Meccanica quantistica e trasformazioni di Poincaré

L'applicazione di un principio di relatività alla meccanica quantistica, implica che, dati due osservatori \mathcal{S} e \mathcal{Q} i cui sistemi di riferimento associati sono equivalenti per trasformazioni di Poincaré e che descrivono lo stato del medesimo sistema fisico attraverso due raggi $|\psi_{\mathcal{S}}\rangle$ e $|\phi_{\mathcal{Q}}\rangle$ appartenenti rispettivamente a due spazi di Hilbert $\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$ e $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$, ci debba essere una certa trasformazione lineare \mathcal{U} rappresentazione di un qualche elemento $\mathfrak{g} \in \mathcal{G}_{poi}$ appartenente al gruppo di trasformazioni di Poincaré che metta in relazione i due raggi. Ci si può chiedere se \mathcal{U} sia propriamente un operatore $\mathcal{U} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ o una semplice applicazione lineare, ovvero se gli spazi di Hilbert associati al sistema dai due osservatori siano il medesimo spazio di Hilbert o due spazi differenti. Per dimostrare che sono il medesimo dobbiamo costruire un isomorfismo, cioè mettere in corrispondenza a ciascun raggio di $\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$ uno ed un solo raggio di $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ e viceversa. Questo può essere fatto semplicemente, invocando i punti 2 e 3 della proposizione (1.0.2): dato che $|\phi_{\mathcal{Q}}\rangle$ è la descrizione completa di uno stato nel sistema \mathcal{Q} , non solo questa deve essere trasportabile attraverso una trasformazione in un altro sistema \mathcal{S} prendendo la forma $|\psi_{\mathcal{S}}\rangle$, ma poichè quello che era uno stato ammissibile lo deve essere ancora, dovrà esistere in $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ un raggio $|\psi_{\mathcal{Q}}\rangle$ che descriva il medesimo stato del sistema di $|\phi_{\mathcal{Q}}\rangle$. Fisicamente questo è ottenibile agendo sul

sistema in esame ad esempio cambiandone la velocità di una quantità finita, di modo che l'osservatore \mathcal{S} lo veda nel medesimo stato in cui lo vedeva \mathcal{Q} prima della trasformazione. Dunque possiamo concludere che per il medesimo sistema si deve avere che $\mathcal{H}_{\mathcal{Q}} = \mathcal{H}_{\mathcal{S}}$. Possiamo dire che inoltre la corrispondenza introdotta da \mathcal{U} è propria dell'elemento del gruppo che rappresenta \mathfrak{g} . Con questo intendiamo che per ogni coppia di osservatori che sono collegati dal medesimo elemento del gruppo di Poincaré \mathfrak{g} si avrà sempre lo stesso $\mathcal{U}_{\mathfrak{g}}$. Inoltre poichè come abbiamo osservato le quantità misurabili in fisica sono le probabilità di transizione $|\langle\psi_A|\psi_B\rangle|^2$ tra due stati $|\psi_A\rangle$, $|\psi_B\rangle$, se \mathcal{S} misura la probabilità di transizione tra due stati $|\psi_{\mathcal{S}_A}\rangle$ e $|\psi_{\mathcal{S}_B}\rangle^2$, se i due stati corrispondenti in \mathcal{Q} attraverso una trasformazione di Poincaré sono $|\phi_{\mathcal{Q}_A}\rangle$ e $|\phi_{\mathcal{Q}_B}\rangle^2$ si deve avere:

$$|\langle\psi_{\mathcal{S}_A}|\psi_{\mathcal{S}_B}\rangle|^2 = |\langle\phi_{\mathcal{Q}_A}|\phi_{\mathcal{Q}_B}\rangle|^2 \quad (3.4)$$

Da questa equazione si ricava che, poichè ci deve essere una corrispondenza tra i raggi di \mathcal{S} e quelli di \mathcal{Q} del tipo $|\psi_{\mathcal{S}}\rangle = \mathcal{U}_{\mathfrak{g}}|\phi_{\mathcal{Q}}\rangle$ con \mathfrak{g} elemento del gruppo di Poincaré che collega \mathcal{Q} a \mathcal{S} , deve avere che

$$|\langle\psi_{\mathcal{S}_A}|\psi_{\mathcal{S}_B}\rangle|^2 = |\langle\mathcal{U}_{\mathfrak{g}}\psi_{\mathcal{S}_A}|\mathcal{U}_{\mathfrak{g}}\psi_{\mathcal{S}_B}\rangle|^2 = |\langle\psi_{\mathcal{S}_A}|\mathcal{U}_{\mathfrak{g}}^\dagger\mathcal{U}_{\mathfrak{g}}|\psi_{\mathcal{S}_B}\rangle|^2 \quad (3.5)$$

Teorema 3.2.2. di Wigner

Un operatore $\mathcal{U}_{\mathfrak{g}}$ che rispetti questa condizione deve essere **unitario** o **antiunitario**³.

Inoltre per la proprietà di gruppo delle trasformazioni di Poincaré dobbiamo avere che dati due elementi \mathfrak{g} e \mathfrak{h} del gruppo e date $\mathcal{U}_{\mathfrak{g}}$, $\mathcal{U}_{\mathfrak{h}}$ le rispettive rappresentazioni si dovrebbe avere

$$\mathcal{U}_{\mathfrak{g}}\mathcal{U}_{\mathfrak{h}} = \mathcal{U}_{\mathfrak{g}\circ\mathfrak{h}}$$

Questa relazione non è del tutto corretta. Infatti immaginiamo di avere due operatori unitari od antiunitari \mathcal{U} e \mathcal{V} che, dato il raggio rappresentato dal vettore normalizzato $|\psi\rangle$, lo mappano nel medesimo sottospazio di dimensione 1 (ovvero attuano la medesima corrispondenza tra raggi dello spazio). Allora considerando il vettore $|\psi\rangle$ come vettore e non come raggio si ha

$$\mathcal{U}|\psi\rangle = e^{i\theta(\psi)}\mathcal{V}|\psi\rangle$$

dove $\theta(\psi)$ dovrebbe essere funzione di $|\psi\rangle$ ma non lo è. Infatti se $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ sono due stati

$$\begin{aligned} \mathcal{U}|\psi\rangle + \mathcal{U}|\phi\rangle &= e^{i\theta(\psi)}\mathcal{V}|\psi\rangle + e^{i\theta(\phi)}\mathcal{V}|\phi\rangle = \mathcal{U}(|\psi\rangle + |\phi\rangle) = \\ &= e^{i\theta(\phi+\psi)}\mathcal{V}(|\psi\rangle + |\phi\rangle) = e^{i\theta(\phi+\psi)}\mathcal{V}|\psi\rangle + e^{i\theta(\phi+\psi)}\mathcal{V}|\phi\rangle \end{aligned}$$

³Un operatore \hat{A} è antiunitario se $\langle\psi|\hat{A}^\dagger\hat{A}|\phi\rangle = \overline{\langle\psi|\phi\rangle}$ e $\hat{A}(\alpha|\psi\rangle + \beta|\phi\rangle) = \bar{\alpha}\hat{A}|\psi\rangle + \bar{\beta}\hat{A}|\phi\rangle$, dove \bar{a} è il complesso coniugato di a .

Dunque θ non è funzione degli stati e dunque si ha in generale che $\mathcal{U} = e^{i\theta}\mathcal{V}$ ovvero, se $\mathcal{U}_{\mathfrak{g}}$ è un operatore che descrive l'azione di un elemento \mathfrak{g} del gruppo di Poincaré allora anche $\mathcal{U}'_{\mathfrak{g}} = e^{i\theta}\mathcal{U}_{\mathfrak{g}}$ lo è. Data l'arbitrarietà della fase, si ha in generale che

$$\mathcal{U}_{\mathfrak{g}}\mathcal{U}_{\mathfrak{h}} = e^{i\theta}\mathcal{U}_{\mathfrak{g}\circ\mathfrak{h}} \quad (3.6)$$

dove θ dalla scelta dei rappresentanti di \mathfrak{g} e \mathfrak{h} a meno di una fase. Quando ciò avviene si dice che gli operatori \mathcal{U} sono una *rappresentazione proiettiva* del gruppo in esame. Si può però dimostrare il seguente⁴:

Teorema 3.2.3. Fase delle rappresentazioni unitarie del gruppo di Poincaré

È sempre possibile scegliere gli operatori $\mathcal{U}_{\mathfrak{g}}$ e $\mathcal{U}_{\mathfrak{h}}$ tra i rappresentanti equivalenti a meno di un fattore di fase degli elementi \mathfrak{g} e \mathfrak{h} del gruppo di Poincaré in modo da avere:

$$\mathcal{U}_{\mathfrak{g}}\mathcal{U}_{\mathfrak{h}} = \pm\mathcal{U}_{\mathfrak{g}\circ\mathfrak{h}} \quad (3.7)$$

Possiamo estendere questo risultato alle rappresentazioni unitarie di ogni gruppo. Il problema del capire come agisca il gruppo di Poincaré in meccanica quantistica è stato quindi ridotto alla ricerca delle rappresentazioni unitarie irriducibili di tale gruppo. La conoscenza delle medesime è importante anche sotto un altro punto di vista. È infatti noto che l'evoluzione dinamica descritta dall'equazione di Schrödinger nell'equazione 3.3 possa essere sostituita da una rappresentazione nella quale gli stati sono stazionari e l'evoluzione e la dipendenza dal tempo è insita negli operatori stessi. Questa è quella che viene definita *rappresentazione di Heisenberg* in cui l'equazione di evoluzione è data da

$$i\hbar\frac{d}{dt}A_H(t) = [A_H(t), \hat{H}_H(t)] + i\hbar\left(\frac{d}{dt}A_S(t)\right)_H \quad (3.8)$$

dove A_S è un operatore associato ad una osservabile nella rappresentazione di Schrödinger (il pedice S indica appunto tali quantità) e le quantità con pedice X_H sono quelle trasformate attraverso l'operatore di evoluzione temporale $U(t, t_0)$ nella seguente maniera $X_H = U^\dagger(t, t_0)X_S U(t, t_0)$. Poichè $|\psi\rangle_H = |\psi(t)\rangle|_{t=0}$ per avere l'evoluzione relativistica del sistema a un tempo t_0 sarà sufficiente trovare un operatore unitario che sia rappresentazione di un elemento \mathfrak{g} del gruppo di Poincaré rappresentante una traslazione temporale $t' = t - t_0$ e che lasci invariate tutte le restanti coordinate. L'evoluzione del sistema è data quindi da

$$|\psi(t_0)\rangle_S = \mathcal{U}_{\mathfrak{g}}|\psi(0)\rangle_S$$

⁴Si veda il capitolo 3 in [10]

3.2.3 Simmetrie e quantità conservate

Alla fine della sezione 2.6 abbiamo visto come le simmetrie giochino un ruolo importante nel determinare le quantità conservate, e abbiamo individuato le condizioni affinché una simmetria implicasse la conservazione di una quantità. Nell'ambito della meccanica quantistica in generale un gruppo \mathcal{G} è una simmetria per un sistema che abbia l'hamiltoniana \hat{H} indipendente dal tempo se la sua rappresentazione $\mathcal{U}_{\mathcal{G}}$ commuta con l'hamiltoniana, ovvero se

$$[\mathcal{U}_{\mathcal{G}}, \hat{H}] = 0$$

Infatti tale trasformazione deve comportare una corrispondenza tra vettori nello spazio di Hilbert interpretabile anche in modo passivo come un cambio di base. In questo caso anche l'hamiltoniana deve cambiare secondo la ben nota legge

$$\mathcal{U}_{\mathcal{G}} \hat{H}' = \hat{H} \mathcal{U}_{\mathcal{G}}^{-1}$$

In particolare se il sistema è simmetrico rispetto al gruppo di trasformazioni \mathcal{G} si deve avere

$$\mathcal{U}_{\mathcal{G}} \hat{H} = \hat{H} \mathcal{U}_{\mathcal{G}}^{-1}$$

Moltiplicando a destra tale relazione per $\mathcal{U}_{\mathcal{G}}$ si ottiene $[\mathcal{U}_{\mathcal{G}}, \hat{H}] = 0$. L'individuazione degli integrali primi deriva direttamente dal teorema di Liouville, dove la variazione durante l'evoluzione dinamica del sistema di una sua quantità f è data da

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} - \{\hat{H}, f\}$$

dove $\{\cdot, \cdot\}$ sono le parentesi di Poisson. L'applicazione della regola di quantizzazione di Dirac porta al seguente

Teorema 3.2.4. Teorema di Ehrenfest

L'evoluzione temporale di un'osservabile \mathcal{A} con operatore $\hat{\mathcal{A}}$ correlato è data da:

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{\mathcal{A}} \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{\mathcal{A}}, \hat{H}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}}{\partial t} \right\rangle \quad (3.9)$$

dove $\langle \cdot \rangle$ è il valore d'aspettazione.

se $\hat{\mathcal{A}}$ è indipendente dal tempo, e commuta con \hat{H} allora vediamo nell'equazione 3.2.4 che $\frac{d}{dt} \langle \hat{\mathcal{A}} \rangle = 0$ ovvero che il valore d'aspettazione dell'osservabile si mantiene nel tempo. Se abbiamo un gruppo di trasformazioni \mathcal{G} che commuta con l'hamiltoniana, basterà trovarne la rappresentazione autoaggiunta per trovare la corrispondente quantità conservata. Ovviamente notiamo subito che in presenza di un gruppo formato da infiniti elementi, in particolare di un gruppo continuo, non si avranno infinite quantità conservate. Si dimostra che ci sono tante quantità conservate quanti sono i generatori del gruppo di simmetria.

Capitolo 4

Gruppo Euclideo

Dopo aver descritto la loro importanza ed aver introdotto gli elementi che ci servono per la loro descrizione ci apprestiamo a descrivere i principali gruppi della fisica e le loro rappresentazioni in meccanica quantistica partendo dal gruppo euclideo, ovvero il sottogruppo del gruppo di Galileo delle traslazioni e delle trasformazioni ortogonali. Si ha che il gruppo euclideo tridimensionale \mathcal{E}^3 è il prodotto semidiretto del gruppo ortogonale

$$\mathcal{E}^3$$

e del gruppo delle traslazioni \mathfrak{T}^3 : $\mathcal{E}^3 = \mathcal{E}^3 \rtimes \mathfrak{T}^3$. Prima di addentrarci nell'analisi, però, poichè come abbiamo visto andremo ad operare in uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , dobbiamo specificare cosa voglia dire "trasformare una funzione" attraverso gli elementi di un gruppo \mathcal{G} , intendendo con questo il comportamento di una $f \in \mathcal{H}$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, quando si ha che gli elementi di \mathcal{G} agiscono sullo spazio da cui essa dipende, ovvero \mathbb{R}^n

Definizione 4.1. Trasformata di una funzione Data $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, e il gruppo \mathcal{G} , definiamo la **funzione trasformata** $f^*(\mathbf{x})$ dalla rappresentazione $\mathcal{U}_{\mathfrak{g}}$ di un elemento $\mathfrak{g} \in \mathcal{G}$ come

$$f^*(\mathbf{x}) = \mathcal{U}_{\mathfrak{g}} f(\mathbf{x}) = f(\mathcal{U}_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathbf{x}))$$

Avremo a che fare più avanti con dei set di funzioni indicizzati da un certo j che fisicamente rappresenterà, ad esempio, lo spin della particella. La nozione appena introdotta si generalizza, con l'ulteriore richiesta che le funzioni per ogni j agiscano su spazi corrispondenti agli spazi di arrivo delle rappresentazioni irriducibili, così:

Definizione 4.2. Trasformata di una funzione Data $\{\phi^k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, k = -j, \dots, +j\}$, e il gruppo \mathcal{G} , definiamo la **funzione trasformata secondo** $\mathfrak{g} \in \mathcal{G}$ $\mathfrak{g} : \phi \mapsto \phi^*$:

$$\phi^{*k}(\mathbf{x}) = \left[\mathcal{U}_{\mathfrak{g}}^{(j)} \right]_i^k \phi^i(\mathcal{U}_{\mathfrak{g}}^{-1} \mathbf{x})$$

dove $[\mathcal{U}_{\mathfrak{g}}^{(j)}]_i^k$ è la rappresentazione matriciale irriducibile individuata dall'indice j del gruppo \mathcal{G} .

4.1 Rotazioni nello spazio tridimensionale

Come abbiamo detto nell'esempio (2.4.1) le rotazioni \mathcal{R} fanno parte del gruppo di Galileo. Devono quindi rispettare la condizione di essere *un'isometria* dello spazio tridimensionale \mathbb{R}^3 , ovvero

$$\|\mathbf{x}'\| = \|\mathcal{R}_\theta(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$$

In particolare in uno spazio reale come \mathbb{R}^3 ciò richiede che le matrici \mathcal{R} siano *ortogonali*, ovvero

$$\mathcal{R}\mathcal{R}^T = \mathcal{R}^T\mathcal{R} = \mathcal{I}d_{\mathbb{R}^3} \quad (4.1)$$

Diremo che le rotazioni appartengono al gruppo ortogonale tridimensionale, $\mathcal{R} \in O(3)$. Le matrici che soddisfano questa condizione possono avere $\det = \pm 1$. Infatti attraverso il teorema di Binet si ha che

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{R}\mathcal{R}^T) &= \det(\mathcal{R})\det(\mathcal{R}^T) = \det(\mathcal{R})^2 = \det(\mathcal{I}d) = 1 \\ \det(\mathcal{R}) &= \pm 1 \end{aligned}$$

Le trasformazioni caratterizzate dalla condizione $\det = 1$ possono essere raggiunte in modo continuo attraverso una mappa esponenziale come quella descritta nella (2.4) dall'identità; il sotto gruppo che si forma viene detto *gruppo ortogonale speciale* e si indica con $SO(3)$. Tutti gli altri elementi con $\det = -1$ sono raggiungibili come un prodotto di una rotazione \mathcal{R} e di una *riflessione spaziale* T_- il cui prototipo è la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

È evidente che tutte le trasformazioni con $\det = -1$ siano raggiungibili tramite una curva che non abbandoni $O(3)$ da T_- . Il gruppo ortogonale $O(3)$ non è connesso per archi ma è composto da due parti connesse; ciò implica che non si possa arrivare in modo continuo dall'una all'altra. È evidente come $O(3)|_{\det=-1}$ non sia un sottogruppo di $O(3)$ in quanto non contiene l'identità. Viceversa, poichè il prodotto di due rotazioni $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in SO(3)$ è ancora un elemento di $SO(3)$ in quanto per le proprietà della trasposizione

$$(\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2)^T(\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2) = \mathcal{R}_2^T(\mathcal{R}_1^T\mathcal{R}_1)\mathcal{R}_2 = \mathcal{I}d$$

$SO(3)$ è un sottogruppo di $O(3)$. Come abbiamo visto, un elemento di $SO(3)$ può dipendere da tre parametri distinti. Infatti fissato un asse, una rotazione richiede per essere determinata solo l'angolo θ . Queste rotazioni sono un sottogruppo isomorfo al

sottogruppo a un parametro $SO(2)$. Per determinare una direzione serve un punto su una sfera \mathcal{S}^2 che richiede due coordinate per essere specificato, ad esempio, con due altri angoli ψ e ϕ . Poichè la sfera è una varietà compatta, possiamo aggiungere a quanto detto che le due parti sconnesse di $O(3)$, una con $\det = -1$ e una con $\det = +1$, sono entrambe compatte. In particolare, $SO(3)$ è un gruppo di Lie compatto e connesso. Possiamo però dire qualcosa in più sul tipo di connessione di $SO(3)$. Infatti si ha che fissato l'asse di rotazione \hat{n} , una rotazione positiva o negativa di π individua il medesimo punto ovvero

$$\mathcal{R}_{\hat{n}}(\pi) = \mathcal{R}_{-\hat{n}}(\pi)$$

Dunque sulla sfera i punti antipodali saranno individuati come il medesimo punto della varietà sottostante a $SO(3)$ e una qualsiasi curva che li collegherà sarà una curva chiusa, *pur non facendo il giro della sfera*. Questa curva non è deformabile tramite omotopia in un punto, mentre una qualsiasi altra curva sulla superficie della sfera è invece deformabile. Si dice che $SO(3)$ è **doppiamente connesso**.

Data una rotazione $\mathcal{R}_{\hat{n}}(\theta)$ possiamo ottenere immediatamente altre di angolo θ attorno ad un asse \hat{n}' . Infatti se $\hat{n}' = \tilde{\mathcal{R}}\hat{n}$ si avrà che

$$\mathcal{R}_{\hat{n}'}(\theta) = \tilde{\mathcal{R}}\mathcal{R}_{\hat{n}}\tilde{\mathcal{R}}^{-1}$$

Poichè l'equazione appena descritta è la definizione di una classe di coniugio possiamo concludere che, fissato θ , le rotazioni di θ appartengono tutte alla medesima classe. Un'altra parametrizzazione di $SO(3)$ avviene per mezzo degli angoli di Eulero¹. In questa parametrizzazione le rotazioni vengono individuate per mezzo di tre angoli θ, ϕ, ψ con $0 \geq \theta, \phi < 2\pi$ e $0 \geq \psi \leq \pi$. L'utilità di questa parametrizzazione è che ogni rotazione $\mathcal{R}(\theta, \phi, \psi)$ si decompone nel prodotto di tre rotazioni

$$\mathcal{R}(\theta, \phi, \psi) = \mathcal{R}_{\hat{e}_3}(\theta)\mathcal{R}_{\hat{e}_2}(\phi)\mathcal{R}_{\hat{e}_3}(\psi)$$

Le rotazioni attorno agli assi cartesiani sono date in \mathbb{R}^3 dalle seguenti matrici di rotazione

$$\mathcal{R}_{\hat{e}_3}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

$$\mathcal{R}_{\hat{e}_2}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \mathcal{R}_{\hat{e}_1}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

¹Si veda capitolo 7.1.2 in [1].

Sviluppando le (5.2) attorno all'identità si ottengono i generatori delle rotazioni infinitesime lungo gli assi \hat{e}_i A_i

$$A_i = \frac{d}{d\theta} \mathcal{R}_{\hat{e}_i}(\theta)$$

ovvero

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_1(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Qualsiasi altro generatore delle rotazioni lungo un asse \hat{n} si ottiene tramite una combinazione lineare degli A_i . In particolare se $\hat{n} = \hat{e}_i n^i$ si ha che $A_{\hat{n}} = A_i n^i$. Attraverso la mappa esponenziale descritta in (2.4) si ha che una generica $\mathcal{R}_{\hat{n}}(\theta)$ si può esprimere come segue

$$\mathcal{R}_{\hat{n}}(\theta) = \exp(\theta A_i n^i)$$

Si può facilmente verificare i generatori della (4.3) seguono la seguente regola di commutazione

$$[A_i, A_j] = -\epsilon_{ijk} A^k$$

dove ϵ_{ijk} è il simbolo di Levi-Civita². Ritroviamo in questa equazione la formula (2.5). Le costanti di struttura di $SO(3)$ sono quindi rappresentate dal simbolo di Levi-Civita ϵ_{ijk} . Si vede anche facilmente che le matrici A_i sono tutte antisimmetriche. Definendo $J_i = -iA_i$ otteniamo multipli dei generatori. L'aggiunta di un fattore moltiplicativo $-i$ rende le matrici hermitiane, ovvero autoaggiunte, cioè collegabili a qualche osservabile del sistema. Questo ci era già garantito dal corollario 2.4.3. Moltiplicando per $-i$ abbiamo in un certo senso imposto che lo spazio di rappresentazione delle A_i fosse sul campo complesso. Possiamo vedere che le matrici J_i seguono la regola di commutazione

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J^k$$

Possiamo riconoscere in questa la regola di commutazione dei momenti angolari in meccanica quantistica. Dunque un sistema che possiede come simmetria le rotazioni, per quanto detto in 3.2.3, hanno l'hamiltoniana \hat{H} che commuta con i J_i , ovvero $\forall \hat{n}, \theta$

$$[\hat{H}, \mathcal{R}_{\hat{n}}(\theta)] = 0 \Leftrightarrow [\hat{H}, J_i] = 0$$

²Definito $\epsilon_{123} = 1$, abbiamo che $\epsilon_{ijk} = 1$ se $\{ijk\}$ è una permutazione pari di $\{123\}$, -1 se dispari, 0 se almeno due dei $\{ijk\}$ sono uguali

I J_i sono gli operatori associati ai momenti angolari misurati in unità di \hbar . In particolare la rappresentazione di questi sullo spazio di Hilbert \mathcal{H} delle funzioni d'onda è data dagli operatori differenziali (espressi nella rappresentazione delle posizioni)³

$$J_1 = -i(x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}), \quad J_2 = -i(x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}), \quad J_3 = -i(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1})$$

Una volta trovata l'algebra di $SO(3)$, per quanto abbiamo detto nel teorema 2.4.4 il problema della ricerca delle rappresentazioni irriducibili di $SO(3)$ si riduce alla ricerca di rappresentazioni irriducibili per la sua algebra. Per quanto visto nella sezione 2.5, questo problema equivale alla ricerca di un operatore di Casimir per il gruppo e della risoluzione del relativo problema agli autovalori. Per il gruppo delle rotazioni, dalla meccanica quantistica, sappiamo che $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ commuta con tutti gli elementi dell'algebra J_i . Possiamo quindi associare ad ogni autospazio di J^2 uno spazio invariante per trasformazioni del gruppo, che diverranno i sottospazi sui quali agiranno le rappresentazioni $\mathcal{U}^{(j)}(\mathfrak{g})$ con $\mathfrak{g} \in SO(3)$ e dove (j) indica individua in qualche modo il sottospazio su cui la rappresentazione è irriducibile. Inoltre data la compattezza del gruppo, questa rappresentazione è pure unitaria. Dalla meccanica quantistica sappiamo che gli autovalori di J^2 sono $j(j+1)$ con $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$ e la dimensione dello spazio associata è $2j+1$. Dunque il (j) a cui ci riferivamo in $\mathcal{U}^{(j)}(\mathfrak{g})$ è proprio quello che entra nella descrizione degli autovalori di J^2 . Indicheremo gli $\mathcal{U}^{(j)}(\mathfrak{g})$ con $\mathcal{R}_{\hat{e}_i}^{(j)}(\theta)$. All'interno del medesimo autospazio individuato dall'indice (j) si scelgono gli autovettori come autovalori di J_3 per convenzione. Dunque la coppia (J^2, J_3) individua i sottospazi invarianti con le relative rappresentazioni irriducibili e gli $(2j+1)$ vettori di base, che indicheremo con $|j; m\rangle$, $m = -j, \dots, +j$. Detti inoltre $J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2$ l'azione sui $|j; m\rangle$ è data da

$$\begin{aligned} J^2 |j; m\rangle &= |j; m\rangle j(j+1) \\ J_3 |j; m\rangle &= |j; m\rangle m \\ J_{\pm} |j; m\rangle &= |j; m \pm 1\rangle [j(j+1) - m(m \pm 1)]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Per $j = 0$ abbiamo la rappresentazione *scalare*, ovvero quella associata a spazi di dimensione 1. Per $j = \frac{1}{2}$ abbiamo la rappresentazione *spinoriale*. I generatori possono essere scelti proporzionali alle matrici di Pauli $J_k = \frac{\sigma_k}{2}$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Una rotazione di un angolo θ intorno all'asse \hat{e}_3 è data da:

$$\mathcal{R}_{\hat{e}_3}^{(\frac{1}{2})}(\theta) = \exp\left(\frac{1}{2}i\theta\sigma_3\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2}i\theta\right)^n \sigma_3^n = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sigma_3 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \begin{pmatrix} e^{(i\frac{\theta}{2})} & 0 \\ 0 & e^{(-i\frac{\theta}{2})} \end{pmatrix}$$

³Anche qui consideriamo gli operatori misurati in unità di \hbar o, equivalentemente, lavoriamo in unità naturali, ponendo $\hbar = 1$

Otteniamo una matrice unitaria, ovvero $\mathcal{R}_{\hat{e}_3}^{(\frac{1}{2})}(\theta)^\dagger \mathcal{R}_{\hat{e}_3}^{(\frac{1}{2})}(\theta) = \mathcal{I}d$. Questo è un fatto in generale vero per le rappresentazioni ($j = \frac{1}{2}$). Notiamo subito come questa rappresentazione sia a due valori. Infatti $\mathcal{R}_{\hat{e}_i}^{(\frac{1}{2})}(\theta + 2\pi) = -\mathcal{R}_{\hat{e}_i}^{(\frac{1}{2})}(\theta)$. Questa evenienza è indice del fatto che il gruppo sia doppiamente connesso. Poichè in meccanica quantistica, come abbiamo visto nel teorema 3.2.3, le rappresentazione sono determinate a meno di un fattore di fase, entrambe sono accettabili. Per $j = 1$ abbiamo la rappresentazione tridimensionale che, benchè si possa prendere la forma delle J_k , viene di solito, in modo equivalente, preferita la seguente forma:

$$J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

$$J_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad J_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

In generale un vettore \mathbf{v} del sottospazio associato a una rappresentazione unitaria irriducibile di dimensione $2j + 1$ di un elemento \mathfrak{g} di $SO(3)$ si trasforma come

$$\mathbf{v}' = \mathcal{R}^{(j)}(\mathfrak{g})\mathbf{v}$$

la cui rotazione infinitesima è data da

$$\mathbf{v}' = (\mathcal{I}d^{(j)} + \epsilon J^{(j)}(\mathfrak{g}))\mathbf{v}$$

dove $\mathcal{I}d^{(j)}$ è l'applicazione identica nel sottospazio di dimensione $(2j + 1)$ e $J^{(j)}(\mathfrak{g})$ è la rappresentazione del generatore infinitesimo di dimensione $(2j + 1)$ associato alla rotazione espressa da \mathfrak{g} . La rappresentazione spinoriale agisce su vettori complessi bidimensionali detti *spinori*; essa è particolarmente importante nello studio dello spin.

4.1.1 Prodotto diretto

Date due rappresentazioni irriducibili di $SO(3)$ $\mathcal{U}^{(j)}$ su \mathcal{V} e $\mathcal{U}^{(j')}$ su \mathcal{V}' , come abbiamo in (2.14) visto la rappresentazione prodotto diretto è definita su $\mathcal{V} \times \mathcal{V}'$ e vi agisce tramite la (2.2). Gli autovettori del nuovo spazio saranno $|m, m'\rangle = |jm\rangle |j'm'\rangle$, sui quali agiranno i generatori delle rotazioni dello spazio prodotto diretto.

Teorema 4.1.1. Generatori prodotto diretto *La rappresentazione dei generatori delle trasformazioni infinitesime che agisce sullo spazio prodotto diretto $\mathcal{V} \times \mathcal{V}'$ agisce sugli autovettori $|m, m'\rangle$ come somma dei generatori infinitesimi della medesima trasformazioni su \mathcal{V} e \mathcal{V}' .*

Ad esempio si ha che dato J_3 la cui rappresentazione agisce su $\mathcal{V} \times \mathcal{V}'$ e dati J_3^* e J_3' che agiscono rispettivamente su \mathcal{V} e \mathcal{V}' si ha che

$$J_3 |m, m'\rangle = (J_3^* + J_3') |m, m'\rangle = (m + m') |m, m'\rangle$$

Dunque il problema si riduce alla ben nota formula in meccanica quantistica per l'addizione dei momenti angolari.

4.1.2 SU(2)

Abbiamo visto come la rappresentazione con $(j = \frac{1}{2})$ di $SO(3)$ sia una matrice complessa 2×2 unitaria. In generale una matrice unitaria 2×2 è esprimibile nella forma

$$\mathfrak{U} = e^{i\lambda} \begin{pmatrix} \cos(\theta)e^{i\phi} & -\sin(\theta)e^{i\psi} \\ \sin(\theta)e^{-i\psi} & \cos(\theta)e^{-i\phi} \end{pmatrix}$$

dove $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \lambda < \pi$, $0 \leq \psi, \phi < 2\pi$. Se imponiamo la condizione $\det \mathfrak{U} = 1$ si ha che $\lambda = 0$. Abbiamo quindi che il *gruppo speciale* delle matrici unitarie 2×2 $SU(2)$, individuano un sottospazio a 3 parametri di $U(2)$. Possiamo fare una corrispondenza tra gli elementi di $SO(3)$ e $SU(2)$. Si può dimostrare che la varietà di $SU(2)$ è diffeomorfa a una sfera quadridimensionale \mathcal{S}^3 . In particolare essendo la sfera una varietà compatta e semplicemente connessa possiamo dire che $SU(2)$ è il gruppo di ricoprimento universale di $SO(3)$. In particolare essi hanno la medesima algebra di Lie. Possiamo quindi, per quanto visto, prendere come generatori di $SU(2)$ le matrici di Pauli 4.5. La relazione di commutazione diventa quindi

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i\epsilon^{jkl}\sigma_l \quad (4.7)$$

Vediamo come un elemento di $SU(2)$ generi una rotazione tridimensionale. Prendiamo un vettore tridimensionale x^i , $i = \{1, 2, 3\}$; definiamo $\mathbf{X} = \sigma_i x^i$. Si verifica che

$$-\det \mathbf{X} = |x_i x^i|^2$$

e che \mathbf{X} è a traccia nulla e hermitiana. Ora prendendo un qualsiasi elemento $U \in SU(2)$ e ponendo $\mathbf{X}^* = U\mathbf{X}U^{-1}$ si ha che \mathbf{X}^* è ancora a traccia nulla, e, per il teorema di Binet, si ha che, detto x^{*i} l'elemento tridimensionale associato a \mathbf{X}^*

$$|x'_{*i} x^{*i}|^2 = |x_i x^i|^2$$

ovvero U ha individuato un elemento di $SO(3)$. Inoltre poichè se al posto di U avessimo utilizzato $-U$ saremmo sopraggiunti al medesimo risultato, possiamo dire che la corrispondenza è $2 : 1$. Il problema di trovare le rappresentazioni di $SU(2)$ si riduce a riconoscere, per quanto detto nei capitoli di teoria, che avendo la medesima algebra di $SO(3)$ e poichè la rappresentazione dell'algebra induce naturalmente una rappresentazione del gruppo possiamo utilizzare i medesimi risultati ottenuti per $SO(3)$

4.2 Traslazioni

4.2.1 Traslazioni a una dimensione

Le traslazioni a una dimensione \mathfrak{T} , ad esempio lungo un asse x , sono definite tramite

$$T_\xi x = x + \xi, \quad x, \xi \in \mathbb{R}$$

La composizione di due traslazioni è una traslazione. Inoltre il gruppo è abeliano:

$$T_\xi T_\eta = T_\eta T_\xi = T_{(\xi\eta)} \quad (4.8)$$

Per trovare le rappresentazioni irriducibili deriviamo la (4.8) rispetto a η e valutiamo la derivata in $\eta = 0$:

$$T_\xi T'_\eta \Big|_{\eta=0} = T'_{(\xi\eta)} \Big|_{\eta=0} \leftrightarrow T'_\xi = T_\xi T'_0$$

integrando e ricordando che $T_0 = Id$ si ha

$$T_\xi = \exp(\xi T'_0) = \exp(-ik\xi) \equiv T_\xi^{(k)}$$

dove si è arbitrariamente posto $T'_0 = -ik$. Se vogliamo che le rappresentazioni siano unitarie allora dobbiamo imporre che $k \in \mathbb{R}$. Per trovare la trasformazione infinitesima associata ad una traslazione operiamo come segue. Data una funzione $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si ha

$$f^*(x) = T_\xi f(x) = f(x - \xi)$$

e sviluppando in serie di Taylor per ξ piccoli

$$T_\xi f(x) = f(x) - \xi \frac{\partial}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2} \xi^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) + \dots$$

Trattenendo i termini al primo ordine in ξ l'operatore infinitesimo prende la forma $-\frac{\partial}{\partial x}$. Vediamo che moltiplicando per un fattore $i\hbar$ otteniamo quello che in meccanica quantistica è l'operatore corrispondente al momento lineare del sistema. Questo non deve sorprendere. Infatti la richiesta di invarianza per traslazioni spaziali, ovvero richiedere che lo spazio sia omogeneo per una particella libera, anche in meccanica classica portava alla conservazione del momento della quantità di moto del sistema. La realizzazione del gruppo delle traslazioni sono dunque gli operatori momento.

4.2.2 Traslazioni in tre dimensioni

La generalizzazione a tre dimensioni $T_{\mathbf{r}} \in \mathfrak{T}^3$ segue immediatamente prendendo il prodotto diretto delle tre rappresentazioni. I generatori infinitesimi saranno dunque

$$P_1 = -\frac{\partial}{\partial x}, \quad P_2 = -\frac{\partial}{\partial y}, \quad P_3 = -\frac{\partial}{\partial z}$$

mentre la rappresentazione irriducibile prenderà la forma

$$T_{\mathbf{r}}^{(\mathbf{k})} = \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad \text{con} \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$$

Poichè gli operatori infinitesimi, come nel caso delle rotazioni, si possono moltiplicare per i e rendere autoaggiunti. Gli operatori definiti da $p_i = i\hbar P_i$ sono gli operatori momento angolare i cui autovalori sono $\hbar k_i$. Possiamo esprimere un elemento del gruppo anche attraverso la (2.4) come:

$$T_{\mathbf{r}} = \exp(-ir^i P_i)$$

Possiamo anche raccogliere i tre generatori in un unico vettore, che moltiplicato per $i\hbar$ dà come risultato l'operatore momento in meccanica quantistica $-i\hbar\nabla$.

4.3 Gruppo Euclideo

Un elemento del gruppo euclideo \mathcal{E}^3 in tre dimensioni è dato dal prodotto di una rotazione $\mathcal{R}_{\hat{n}}(\theta)$ per una traslazione $T_{\mathbf{r}}$ definita da

$$T_{\mathbf{r}}\mathcal{R}_{\hat{n}}(\theta)\mathbf{x} = \mathcal{R}_{\hat{n}}(\theta)\mathbf{x} + \mathbf{r}$$

Poichè le rotazioni non commutano con le traslazioni non possiamo rappresentare \mathcal{E}^3 come prodotto diretto. Utilizzeremo per trovare le rappresentazioni irriducibili di \mathcal{E}^3 il metodo delle rappresentazioni indotte. Questo consiste nel trovare un sottogruppo abeliano che sia invariante all'interno del gruppo. Quindi si costruisce una base di autovettori degli elementi del gruppo invariante, insieme ad altri operatori, in genere operatori di Casimir. Infine attraverso gli elementi generatori che non commutano con gli elementi del sottogruppo invariante, ovvero quelli dello spazio quoziente, si generano altri nuovi autovettori per il gruppo di operatori scelto. L'algebra di \mathcal{E}^3 è data dalle seguenti relazioni

$$\begin{aligned} [P_k, P_l] &= 0 \\ [J_k, J_l] &= i\epsilon_{klm}J^m \\ [P_k, J_l] &= i\epsilon_{klm}P^m \end{aligned} \tag{4.9}$$

Dove P_i sono i generatori delle traslazioni e i J_i generatori delle rotazioni.

Inoltre si ha che \mathfrak{T}^3 è sottogruppo invariante di \mathcal{E}^3 . Gli operatori di Casimir di \mathcal{E}^3 sono $P^2 = P_i P^i$ e $J_i J^i$. Considerando il gruppo quoziente $\mathcal{E}^3/\mathfrak{T}^3$ che è isomorfo ad $SO(3)$, troveremo rappresentazioni degeneri formate dalle rappresentazioni numerate da (j) di $SO(3)$ che abbiamo visto nel capitolo dedicato alle rotazioni. Poichè in questa rappresentazione i generatori delle traslazioni corrispondono ad operatori

nulli, e dunque $P^2 = P_i P^i$ e $J_i P^i$ hanno autovalore zero. Cercheremo, per valori di $P^2 \neq 0$, soluzioni per il problema agli autovalori del gruppo di operatori formato da $\{P^2, J_i P^i; P\}$ che avranno come autovettori $|p, \lambda; \hat{\mathbf{p}}\rangle$ corrispondenti agli autovalori $\{p^2, \lambda p; \mathbf{p}\}$, dove λ si chiama *elicità*, \mathbf{p} *momento vettore* e $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/p$. Si ha quindi la basi di autovettori

$$\begin{aligned} P^2 |p, \lambda; \hat{\mathbf{p}}\rangle &= |p, \lambda; \hat{\mathbf{p}}\rangle p^2 \\ J_i P^i |p, \lambda; \hat{\mathbf{p}}\rangle &= |p, \lambda; \hat{\mathbf{p}}\rangle \lambda p \\ P |p, \lambda; \hat{\mathbf{p}}\rangle &= |p, \lambda; \hat{\mathbf{p}}\rangle \mathbf{p} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Per generare una soluzione di questo problema agli autovalori ci aiutiamo con la seguente nozione:

Definizione 4.3. Gruppo piccolo Sia \mathcal{G} gruppo e H sottogruppo normale, con \mathcal{G}/H gruppo quoziente. Tutti gli elementi nel gruppo quoziente che lasciano invariato un sottospazio generato da un autovettore $|z\rangle$ per le rappresentazioni di H formano un sottogruppo chiamato **gruppo piccolo** di $|z\rangle$.

Prendiamo come $|z\rangle$ della definizione $\hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{p}}_0 = \hat{e}_z$. Le rotazioni $\mathcal{R}_{\hat{e}_z}(\theta) = e^{-i\theta J_3}$ lasciano invariato $\hat{\mathbf{p}}_0$ e sono quindi il suo gruppo piccolo. Queste sono isomorfe a $SO(2)$ con generatore J_3 e autovalori $\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Possiamo quindi indicizzare questi stati con $(\hat{\mathbf{p}}_0, \lambda)$, che sono autovettori di P con autovalore \mathbf{p}_0 e di $J_i P^i$ con autovalore λp . Lo stato definito si comporta sotto rotazioni e traslazioni

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\hat{e}_z}(\theta) |p, \lambda; \hat{\mathbf{p}}_0\rangle &= |p, \lambda; \hat{\mathbf{p}}_0\rangle e^{-i\lambda\theta} \\ T_{\mathbf{r}} |p, \lambda; \hat{\mathbf{p}}_0\rangle &= |p, \lambda; \hat{\mathbf{p}}_0\rangle e^{-ib_i p_0^i} \end{aligned}$$

Ora attraverso altre rotazioni definiamo

$$|p, \lambda; \hat{\mathbf{p}}\rangle \equiv \mathcal{R}_{\hat{\mathbf{p}}_0 \rightarrow \hat{\mathbf{p}}} |p, \lambda; \hat{\mathbf{p}}_0\rangle$$

Questi autovettori, che abbreviamo $|\hat{\mathbf{p}}\rangle$ indicizzano correttamente gli autospazi corrispondenti alle rappresentazioni irriducibili del gruppo euclideo. In particolare

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{r}} |\hat{\mathbf{p}}\rangle &= |\hat{\mathbf{p}}\rangle e^{-ir_j p^j} \\ \mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma) |\hat{\mathbf{p}}\rangle &= |\hat{\mathbf{p}}'\rangle e^{-i\lambda\psi} \end{aligned}$$

dove \mathcal{R} è stata espressa mediante angoli di Eulero e ψ è definito come l'angolo per cui $\mathcal{R}(0, 0, \psi) = \mathcal{R}(\phi', \theta', 0)^{-1} \mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma) \mathcal{R}(\phi, \theta, 0)$, avendo posto (ϕ, θ) come la direzione individuata da $\hat{\mathbf{p}}$ e (ϕ', θ') quella individuata da $\hat{\mathbf{p}}'$.

Capitolo 5

Gruppi di Lorentz e gruppo di Poincaré

Riprendiamo ora la gli argomenti che abbiamo iniziato a trattare nel capitolo 3. Analizzeremo i gruppi di Lorentz e Poincaré cercandone le rappresentazioni irriducibili e analizzando le differenze. Prima però chiariamo qualche convenzione che useremo nel seguito. Indicheremo in genere quando usiamo come indici le lettere greche un quadrivettore. Ad esempio x^μ intenderemo che μ potrà assumere i valori $\{0,1,2,3\}$. Quando indicizzeremo con caratteri romani, ovvero x_i indicheremo gli indici spaziali, ovvero $i = \{1,2,3\}$.

5.1 Gruppo di Lorentz

Il gruppo di Lorentz, come abbiamo già visto nella sezione 3.1, comprende i boost, come descritti dalla trasformazione 3.2 lungo l'asse x, e le rotazioni. In particolare esso è un gruppo di Lie a 6 parametri. In generale possiamo caratterizzare le trasformazioni di Lorentz come isometria per il tensore metrico $\eta_{\mu\nu}$. La relazione definente per una trasformazione di Lorentz Λ^ν_μ è

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\lambda\Lambda^\nu_\sigma = \eta_{\lambda\sigma} \quad (5.1)$$

che può anche essere scritta come

$$\Lambda^T\eta\Lambda = \eta$$

Sfruttando il teorema di Binet, si può vedere come si debba avere

$$\begin{aligned} (\det\Lambda)^2 &= 1 \\ \det\Lambda &= \pm 1 \end{aligned}$$

Il gruppo delle trasformazioni che rispettano la condizione (5.1) vengono dette $O(3,1)$. Poichè siamo interessati alle trasformazioni raggiungibili con una curva

sulla varietà dall'identità concentreremo la nostra attenzione, come abbiamo già fatto per $O(3)$, sul gruppo $SO(3)$. Il fatto di prendere $\det\Lambda = 1$ non garantisce di essere nel sottogruppo connesso per archi all'identità. Infatti ponendo nella (5.1) $\lambda = \sigma = 0$ si ha

$$(\Lambda_0^0)^2 - \sum_i (\Lambda_0^i)^2 = 1$$

Questo vuol dire che $(\Lambda_0^0)^2 \geq 1$, ovvero possiamo avere che o $\Lambda_0^0 \geq 1$ oppure $\Lambda_0^0 \leq -1$. Poichè vogliamo rimanere nel gruppo connesso con l'identità sceglieremo

$$\Lambda_0^0 \geq 1$$

Il sottogruppo che abbiamo selezionato, connesso all'elemento neutro, si chiama *gruppo di Lorentz* proprio od *ortocrono* e si indica con $SO^+(3,1)$. In base alle condizioni $\det = \pm 1$ e $\Lambda_0^0 \geq 1$ oppure $\Lambda_0^0 \leq -1$, possiamo trovare 4 sottinsiemi connessi del gruppo di Lorentz, dei quali solo quello contenente l'identità è sottogruppo. Le altre tre componenti connesse possono essere raggiunte tramite le operazioni \mathcal{P} , \mathcal{T} e \mathcal{PT} definite come segue

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{PT} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dunque un qualsiasi elemento Λ del gruppo definito dalla 5.1 è dato da

$$\Lambda = \begin{cases} \Lambda^+ & (\det = +1, \Lambda_0^0 \geq 1) \\ \mathcal{P}\Lambda^+ & (\det = -1, \Lambda_0^0 \geq 1) \\ \mathcal{T}\Lambda^+ & (\det = +1, \Lambda_0^0 \leq 1) \\ \mathcal{PT}\Lambda^+ & (\det = -1, \Lambda_0^0 \leq 1) \end{cases}$$

Ovviamente \mathcal{P} rappresenta una riflessione spaziale, \mathcal{T} un'inversione temporale e \mathcal{PT} una combinazione delle due. D'ora in poi quando ci riferiremo a una trasformazione di Lorentz intenderemo $\Lambda \in SO^+(3,1)$. Le rotazioni spaziali sono un sottogruppo di $SO^+(3,1)$ e si possono rappresentare con

$$\mathcal{R}(\vec{\theta})^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{\hat{n}}(\theta) \end{pmatrix}$$

con $\vec{\theta} = \theta \hat{n}$ e dove $\mathcal{R}_{\hat{n}}(\theta) \in SO(3)$ e gli “0” come matrici nulle (1×3). Le altre trasformazioni di Lorentz sono i boost. Nella (3.2) facendo la sostituzione $\tanh \xi = \beta$, si ha che $\gamma\beta = \sinh \xi$ e $\gamma = \cosh \xi$ si ottiene

$$L_1^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh \xi & -\sinh \xi & 0 & 0 \\ -\sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_2^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh \xi & 0 & -\sinh \xi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sinh \xi & 0 & \cosh \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh \xi & 0 & 0 & -\sinh \xi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \xi & 0 & 0 & \cosh \xi \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

dove abbiamo riportato per completezza i boost lungo gli altri due assi. ξ viene detta *rapidità*. Poichè vediamo che $\xi \in \mathbb{R}$ il gruppo di Lorentz non può essere compatto. Questo avrà delle ripercussioni nella ricerca delle rappresentazioni irriducibili unitarie. Un elemento generico $\Lambda(\vec{\xi}, \vec{\theta}) \in SO^+(3,1)$, dove $\vec{\xi} = \hat{n}\xi$ sta ad indicare un generico boost in una direzione \hat{n} con rapidità (ξ), può essere scomposto come prodotto di due rotazioni e un boost lungo \hat{e}_3

$$\Lambda(\vec{\xi}, \vec{\theta}) = \mathcal{R}(\alpha, \beta, 0)L_3(\xi)\mathcal{R}(\eta, \psi, \phi) \quad (5.4)$$

dove le \mathcal{R} sono espresse attraverso gli angoli di Eulero. Questa scomposizione è utile poichè il minimo numero dei parametri ξ che non sono limitati, ovvero uno solo. Alternativamente è anche vero che una trasformazione di Lorentz può essere scomposta in modo unico come un una rotazione e un boost generici (ovvero in direzioni non specifiche) $\Lambda = \mathcal{R}(\vec{\theta})L(\vec{\xi})$.

5.1.1 $SL(2, \mathbb{C})$

Come con $SO(3)$ e $SU(2)$ possiamo costruire un gruppo di ricoprimento universale per $SO^+(3,1)$. Vedremo che questo coincide con $SL(2, \mathbb{C})$, il gruppo delle matrici 2×2 a coefficienti complessi con $\det = +1$. Ponendo $X = \sigma_\mu x^\mu \equiv \langle \sigma^\mu | x^\mu \rangle$ dove $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e le σ_i sono le matrici di Pauli, si ha che

$$-\det X = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

In particolare si ha che questa è una corrispondenza 1 – 1 tra punti di \mathcal{M}^4 e matrici 2×2 hermitiane. Infatti posto $\langle A|B \rangle = \frac{1}{2} \text{Tr}(A^*B)$ con A, B matrici hermitiane, si può ottenere un vettore di \mathcal{M}^4 in modo naturale tramite

$$x_\mu = \langle \sigma_\mu | X \rangle = \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma_\mu^* X) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma_\mu X)$$

Si ha che ogni trasformazione di Lorentz $\Lambda^\nu{}_\mu x^\mu$ ha un corrispettivo $A \in SL(2, \mathbb{C})$ tale per cui

$$\langle \sigma^\mu | \Lambda^\nu{}_\mu x^\mu \rangle = A^\nu{}_\mu X^\mu (A^\nu{}_\mu)^\dagger = A^\mu X^\mu (A^*{}_\nu{}^\mu)$$

dove $A^{*\mu}$ sono gli elementi complessi coniugati di matrice. Si ha inoltre che $\Lambda(A) = \Lambda(-A)$. Questo fatto come per $SU(2)$ è direttamente collegabile al fatto che $SO^+(3,1)$ contenendo le rotazioni pure $SO(3)$ è doppiamente connesso. Si dice che $SO^+(3,1)$ è isomorfo al *gruppo proiettivo lineare speciale* $PSL(2, \mathbb{C})$. Gli elementi di matrice di Λ sono dati da

$$\Lambda(A)_{\mu\nu} = \langle \sigma_\mu | A \sigma_\nu A^\dagger \rangle = \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma_\mu A \sigma_\nu A^\dagger)$$

In particolare prendendo $A \in SU(2) \subset SL(2, \mathbb{C})$ si avrà che $\Lambda(A)$ è una rotazione pura,

$$\Lambda(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} \end{pmatrix}$$

Mentre se A è hermitiana $\Lambda(A)$ è un boost puro. Diamo due casi particolari

$$\begin{aligned} \Lambda(e^{-i\frac{\theta}{2}\hat{n}_i\sigma^i}) &= \mathcal{R}_{\hat{n}}(\theta) \\ \Lambda(e^{-i\frac{\xi}{2}\hat{n}_i\sigma^i}) &= L_{\hat{n}}(\xi) = L(\vec{\xi}) \end{aligned}$$

5.1.2 Generatori e algebra di Lie del gruppo di Lorentz

Abbiamo visto che per ciascuno dei sei parametri possiamo identificare la matrice Λ corrispondente come una rotazione, iperbolica o trigonometrica, sul piano definito dagli assi (μ, ν) . In particolare avremo rotazioni trigonometriche per $(\mu, \nu) = (1,2), (2,3), (3,1)$ e rotazioni iperboliche, ovvero dei boost, $(\mu, \nu) = (0,1), (0,2), (0,3)$. I generatori sono sempre ottenuti derivando i parametri vicino all'identità. In particolare i generatori per i parametri delle rotazioni sono del tipo

$$J_i = \frac{d}{d\theta} \Lambda(\theta \hat{e}_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_i \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

dove gli A_i sono i generatori delle rotazioni (4.3). Per i boost si ha invece

$$K_1 = \frac{d}{d\xi} \Lambda(\xi \hat{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_2 = \frac{d}{d\xi} \Lambda(\xi \hat{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K_3 = \frac{d}{d\xi} \Lambda(\xi \hat{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Definiamo ora $\mathfrak{J}_{\mu\nu}$ con $\mathfrak{J}_{\mu\nu} = -\mathfrak{J}_{\nu\mu}$ come

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_{i0} &= K_i, \\ \mathfrak{J}_{12} &= J_3, \quad \mathfrak{J}_{31} = J_2, \quad \mathfrak{J}^{23} = J_1 \end{aligned} \quad (5.7)$$

$\mathfrak{J}_{\mu\nu}$ è il tensore che definisce le rotazioni infinitesime sul piano (μ, ν) in \mathcal{M}^4 . In particolare una trasformazione infinitesima $\Lambda(\varepsilon^{\mu\nu})$, dove ε è un opportuno tensore che indica i parametri infinitesimi della rotazione tra gli assi (μ, ν) , è data da

$$\Lambda \varepsilon^{\mu\nu} = (\mathcal{I}d + \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu} \mathfrak{J}_{\mu\nu})$$

e un elemento generico del gruppo, ovvero una rotazione sul piano $(\mu, \nu) \rightarrow \Lambda_{(\mu, \nu)}(\omega)$ è ottenuto mediante esponenziazione:

$$\Lambda_{(\mu, \nu)}(\omega) = \exp(\omega \mathfrak{J}_{\mu\nu})$$

Possiamo ora quindi ricavare le algebre. L'algebra del tensore $\mathfrak{J}_{\mu\nu}$ è data da

$$[\mathfrak{J}_{\mu\nu}, \mathfrak{J}_{\rho\sigma}] = \eta_{\mu\rho} \mathfrak{J}_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma} \mathfrak{J}_{\mu\rho} - \eta_{\mu\sigma} \mathfrak{J}_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho} \mathfrak{J}_{\mu\sigma} \quad (5.8)$$

In particolare si ricavano dalla precedenti le seguenti regole di commutazione per J_i, K_j :

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= \epsilon_{ij}^k J_k \\ [K_i, K_j] &= -\epsilon_{ij}^k J_k \\ [J_i, K_j] &= \epsilon_{ij}^k K_k \end{aligned} \quad (5.9)$$

Vediamo che le algebre dei J_i e dei K_i si mischiano. Possiamo quindi definire $M_l = \frac{1}{2}i(J_l + iK_l)$ e $N_l = \frac{1}{2}i(J_l - iK_l)$ per i quali le relazioni di commutazione sono

$$\begin{aligned} [M_i, M_l] &= \epsilon_{il}^m M_m \\ [N_i, N_l] &= -\epsilon_{il}^m N_m \\ [M_i, N_l] &= 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

5.1.3 Rappresentazioni del gruppo di Lorentz

Poichè il gruppo di Lorentz non è compatto non ci possiamo aspettare rappresentazioni finito dimensionali che siano unitarie. In generale potremo cercare rappresentazioni infinito dimensionali unitarie.

- *Rappresentazioni finito dimensionali*

Notiamo che le relazioni (5.10) descrivono due algebre sconnesse e isomorfe a quelle di $SU(2)$. Una rappresentazione finito dimensionale di $SO^+(3)$ ha quindi come operatori di Casimir M^2 e N^2 ed è rappresentabile come prodotto diretto di $SU(2)_M, SU(2)_N$. I vettori di base sono quindi rappresentati dal prodotto diretto di due coppi di vettori numerati $|m; s\rangle \times |n; l\rangle = |s, l\rangle$, $s = -j, \dots, j$, $l = -k, \dots, k$ sui quali agiscono gli operatori M^2, N^2, J_3 e K_3 come descritto in 4.1.1. J_3 e K_3 agiscono

$$\begin{aligned} J_3 |s, l\rangle &= (M_3 + N_3) |s, l\rangle = |s, l\rangle (s + l) \\ K_3 |s, l\rangle &= i(N_3 - M_3) |s, l\rangle = |s, l\rangle i(l - k) \end{aligned}$$

Queste rappresentazioni non sono unitarie, e non possono essere realizzate come stati fisici. Le variabili fisiche da cui dipendono gli stati si trasformano mediante queste trasformazioni. Ad esempio le trasformazioni che agiscono sui quadrivettori sono rappresentabili come $(\frac{1}{2}, 0) \times (0, \frac{1}{2})$. La $(0, \frac{1}{2})$ in particolare è la rappresentazione *complessa coniugata*. La rappresentazione complessa coniugata è una *rappresentazione fondamentale*¹. Le trasformazioni che agiscono su un tensore di rango 2 possono essere rappresentate mediante questa rappresentazione può essere ulteriormente ridotta $(\frac{1}{2}, 0) \times (\frac{1}{2}, 0) = (0, 0) \oplus (1, 0)$ che rappresentano traccia e parte anti simmetrica del medesimo. Il fatto che $SU(2)$ abbia rappresentazioni unitarie finito mentre $SO^+(3)$ pur avendo le medesime algebre, è dovuto alla compattezza di $SU(2)$. L'uguaglianza delle algebre infatti garantisce che proprietà quali l'irriducibilità delle rappresentazioni sia mantenuta, mentre altre caratteristiche globali, come l'unitarietà non è detto che lo siano.

- *Rappresentazioni unitarie infinito dimensionali*

Le rappresentazioni irriducibili infinito dimensionali possono essere essere scelte sempre unitarie. Esse sono individuate da due numeri (ν, j_0) dove $\nu = u + v$ e $j_0 = |u - v|$ con $u(u + 1)$ e $v(v + 1)$ autovalori di J^2 e K^2 . Per $(\nu = -i\gamma, \gamma \in \mathbb{R}, j_0$ semintero positivo) si ottiene quella che è detta *serie principale*. Per $(-1 \geq \nu \leq 1, j_0 = 0)$ si ha quella che si chiama *serie complementare*. Gli

¹Il gruppo lineare generale di ordine m su campo complesso, $GL(m, \mathbb{C})$ ha sempre quattro rappresentazioni matriciali inequivalenti dette $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*, (\mathfrak{g}^{-1})^T, e(\mathfrak{g}^{-1})^\dagger$, rispettivamente dette *definite, coniugata, inversa trasposta, inversa aggiunta*. Queste sono dette *rappresentazioni fondamentali*

operatori J_i ed K_i agiscono sui vettori così enumerati in maniera distinta; gli elementi di matrice della parte angolare J_i seguono le relazioni 4.4 mentre quelli relativi ai boost hanno una forma più complicata e richiedono l'uso del teorema di *Wigner-Eckart*².

5.2 Gruppo di Poincaré

Il gruppo di Poincaré \mathfrak{P} aggiunge le traslazioni \mathfrak{T}^4 alle operazioni del gruppo di Lorentz. Infatti si ha che $\mathfrak{P} = O(3,1) \times \mathfrak{T}^4$. Come abbiamo appena visto noi ci concentreremo su sottogruppo connesso all'identità con $\Lambda^0_0 \geq 1$, ovvero considereremo $SO^+(3,1) \subset O(3,1)$. Un elemento del gruppo di Poincaré agisce su un quadrivettore x^μ nella seguente maniera

$$x'^\nu = \Lambda^\nu_\mu x^\mu + \rho^\nu$$

L'elemento generico del gruppo di Poincaré $g \in \mathfrak{P}$ è quindi individuato da una traslazione quadridimensionale T_α e da una trasformazione di Lorentz $\Lambda(\vec{\theta}, \vec{\alpha})$. Lo indicheremo con $g(\rho, \Lambda)$. Va da sè che ogni elemento $g \in \mathfrak{P}$ può quindi essere scomposto come prodotto di una trasformazione di Lorentz e di una traslazione $g = T_\rho \Lambda$. Una trasformazione di Poincaré può essere rappresentata come segue

$$g(\rho, \Lambda) = \begin{pmatrix} & & & \rho^0 \\ & \Lambda^\nu_\mu & & \rho^1 \\ & & & \rho^2 \\ & & & \rho^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Poichè andremo ad attuare il metodo delle rappresentazioni indotte per trovare le rappresentazioni del gruppo di Poincaré, sarà importante notare che \mathfrak{T}^4 è un sottogruppo invariante del gruppo. Infatti si ha

$$\Lambda T_\rho \Lambda^{-1} = T_{(\Lambda\rho)}$$

5.2.1 Generatori e algebra di Lie e del gruppo di Poincaré

Come abbiamo già visto per \mathfrak{T}^3 , i generatori delle traslazioni sono gli operatori associati all'operatore quadrimomento $\hat{P} = \{P^\mu\}$. In particolare P^0 il generatore delle traslazioni temporali è collegato all'hamiltoniana \hat{H} del sistema. Ogni elemento di \mathfrak{T}^4 , generalizzando ciò che abbiamo detto per \mathfrak{T}^3 è rappresentabile come

$$T_\rho = \exp(-i\rho^j P_j)$$

²Si veda [1] o [10] per una descrizione completa.

. Il generatore delle trasformazioni di Lorentz è invece come abbiamo visto il tensore $\mathfrak{J}_{\mu\nu}$. L'algebra del gruppo è data da

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0 \\ [P_\mu, \mathfrak{J}_{\lambda\sigma}] &= i(P_\lambda\eta_{\mu\sigma} - P_\sigma\eta_{\mu\lambda}) \\ [\mathfrak{J}_{\mu\nu}, \mathfrak{J}_{\lambda\sigma}] &= i(\mathfrak{J}_{\lambda\nu}\eta_{\mu\sigma} - \mathfrak{J}_{\sigma\nu}\eta_{\mu\lambda} + \mathfrak{J}_{\mu\lambda}\eta_{\nu\sigma} - \mathfrak{J}_{\mu\sigma}\eta_{\nu\lambda}) \end{aligned} \quad (5.11)$$

le quali riscritte in termini degli operatori P^0, P_i, K_i, J_i , dove K_i e J_i sono quelli definiti nel paragrafo 5.1.2 si ha

$$\begin{aligned} [P^0, J_j] &= 0 \\ [P^0, K_j] &= iP_j \\ [P_j, J_k] &= i\epsilon_{jkl}P_l \\ [P_j, K_k] &= i\delta_{jk}P^0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

Da queste relazioni ricaviamo che P^0 non varia per rotazioni, e J_i sono invarianti per traslazioni temporali; inoltre traslazioni e boost commutano solo se sono verso direzioni differenti.

5.3 Rappresentazioni unitarie ed irriducibili del gruppo di Poincaré

Come abbiamo fatto per il gruppo euclideo, useremo il metodo delle rappresentazioni indotte. Abbiamo già sottolineato come \mathfrak{T}^4 sia gruppo invariante in \mathfrak{P} . Quindi sceglieremo come base da cui partire gli autovettori di P^μ e, tramite altri operatori, riusciremo a trovare un set di autovettori opportunamente indicizzati che saranno per ogni autovalore base di uno spazio invariante associato ad una rappresentazione irriducibile. Prendiamo come operatore di Casimir il seguente

Teorema 5.3.1. primo operatore di Casimir \mathcal{C}_1

La quantità

$$\mathcal{C}_1 \equiv -P_\mu P^\mu = P_0^2 - \mathbf{P}^2$$

*commuta con tutti i generatori del gruppo di Poincaré ed è detta **Primo operatore di Casimir** per il gruppo di Poincaré.*

Che \mathcal{C}_1 sia invariante per trasformazioni di Lorentz è immediato. Infatti esso è proporzionale alla norma di P^μ ; inoltre esso è anche invariante per traslazioni, essendo costruito tramite i generatori delle medesime. Il gruppo di Poincaré ha un altro operatore di Casimir che ci apprestiamo a costruire:

Definizione 5.1. Vettore di Pauli-Lubanski Definiamo il vettore di Pauli-Lubanski la seguente quantità

$$W^\lambda \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{\lambda\mu\nu\sigma} J_{\mu\nu} P_\sigma \quad (5.13)$$

Esso ha per costruzione le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} W^\lambda P_\lambda &= 0 \\ [W^\lambda, P^\mu] &= 0 \\ [W^\lambda, \mathfrak{J}^{\mu\nu}] &= i(W^\mu \eta^{\lambda\nu} - W^\nu \eta^{\mu\lambda}) \\ [W^\lambda, W^\sigma] &= i\epsilon^{\lambda\mu\nu\sigma} W_\mu P_\nu \end{aligned} \quad (5.14)$$

Possiamo così definire il secondo operatore di Casimir.

Teorema 5.3.2. Secondo operatore di Casimir \mathcal{C}_2

La quantità

$$\mathcal{C}_2 \equiv W^\lambda W_\lambda$$

dove W^λ è il vettore di Pauli-Lubanski commuta con tutti i generatori del gruppo di Poincaré ed è detta **Secondo operatore di Casimir** per il gruppo di Poincaré.

Notiamo che fissato il sottospazio con autovalore p^μ il vettore di Pauli-Lubanski assume la forma

$$W^\lambda = \frac{1}{2} \epsilon^{\lambda\mu\nu\sigma} \mathfrak{J}_{\mu\nu} p_\sigma$$

In particolare per un sistema a riposo di massa M definito da $p^\mu = (M, \mathbf{0})$ si ha che

$$W^0 = 0; \quad W^i = \frac{M}{2} \epsilon^{ejk} \mathfrak{J}_{jk} = M J^i$$

cioè, le componenti spaziali di W^μ sono multipli dei generatori di $SO(3)$. In generale, le relazioni di commutazione di W^μ definiscono una algebra di Lie, che si può dimostrare essere coincidente con il *gruppo piccolo* rappresentato, una volta fissato, da p^μ . Si può dunque, attraverso la rappresentazione dell'algebra, indurre una rappresentazione degli elementi del gruppo piccolo di p^μ , estendibile all'intero gruppo di Poincaré attraverso applicazioni di trasformazioni di Lorentz proprie. Tutte le rappresentazioni irriducibili unitarie del gruppo di Poincaré sono dunque caratterizzate dagli autovalori degli operatori di Casimir \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 . Se \mathbf{c}_1 è l'autovalore di \mathcal{C}_1 e detto p^μ un autovalore fissato di P^μ la relazione che definisce \mathcal{C}_1 impone che sia $-p_\mu p^\mu = \mathbf{c}_1$. Questa equazione impone dei vincoli in base alla scelta del valore di \mathbf{c}_1 e ci aiuta ad indicizzare i vari casi. Abbiamo i seguenti possibili casi:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \ p^\mu \text{ vettore nullo : } \mathbf{c}_1 = 0, \ p^0 = \mathbf{p} = 0; \\ (2) \ p^\mu \text{ vettore di tipo tempo : } \mathbf{c}_1 > 0 \\ (3) \ p^\mu \text{ vettore di tipo luce : } \mathbf{c}_1 = 0, \ \mathbf{p} \neq 0; \\ (4) \ p^\mu \text{ vettore di tipo spazio : } \mathbf{c}_1 < 0; \end{array} \right. \quad (5.15)$$

Esamineremo tutti i casi uno per uno.

1. *Vettore nullo* $P^\mu = 0$:

Poichè la condizione $p^\mu = 0$ è invariante per trasformazioni di Lorentz, si ha che il gruppo piccolo della rappresentazione fissata dalla condizione (1) è il gruppo di Lorentz proprio $SO^+(3)$ le cui rappresentazioni sono state discusse in 5.1.3 e sono caratterizzate dagli indici (j_0, ν) . Le basi sono autovettori degli operatori (P^μ, J^2, J_3) con autovalori $(0, j, m)$ che chiamiamo $|0jm\rangle$. La rappresentazione \mathcal{U} di T_ρ e Λ agiscono come

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{T_\rho} |0jm\rangle &= |0jm\rangle \\ \mathcal{U}_\Lambda |0jm\rangle &= |0j'm'\rangle \left[\mathcal{U}_\Lambda^{(j_0, \nu)} \right]_{jm}^{j'm'} \end{aligned}$$

Dove $\left[\mathcal{U}_\Lambda^{(j_0, \nu)} \right]_{jm}^{j'm'}$ sono le rappresentazioni unitarie del gruppo di Lorentz.

2. *Vettore di tipo tempo* $\mathbf{c}_1 > 0$:

Associamo al valore di $\mathbf{c}_1 = M^2$ un vettore $p^\mu = (M, \mathbf{0})$. Come abbiamo visto l'algebra generata dal vettore di Pauli-Lubanski è analoga a quella di $SO(3)$, che dunque è il gruppo piccolo per p^μ fissato in questo modo. Gli autovettori associati, che chiameremo $|M, \mathbf{0}; s, \lambda\rangle \equiv |\mathbf{0}\lambda\rangle^3$, numerati dal parametro s di $SO(3)$ e con $\lambda = -s, \dots, +s$, sui quali agiscono (P^μ, J^2, J_3) in modo ovvio, posso generare tutti i vettori necessari $|\mathbf{p}\lambda\rangle$ trasformando $|\mathbf{0}\lambda\rangle$ con una trasformazione di Lorentz Λ . Ricordando la 5.4 e ricordando che $|\mathbf{0}\lambda\rangle$ è invariante per il primo termine della medesima $\mathcal{R}(\eta, \psi, \phi)$ in quanto elemento di $SO(3)$ si ha:

$$|\mathbf{p}\lambda\rangle = H(p) |\mathbf{0}\lambda\rangle = \mathcal{R}(\alpha, \beta, 0) L_3(\xi) |\mathbf{0}\lambda\rangle$$

Dunque l'azione degli elementi di Poincaré è come segue:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{T_\rho} |\mathbf{p}\lambda\rangle &= |\mathbf{p}\lambda\rangle e^{-i\rho^\mu p_\mu} \\ \mathcal{U}_\Lambda |\mathbf{p}\lambda\rangle &= |\mathbf{p}'\lambda'\rangle \left[\mathcal{U}_{[H^{-1}(p')\Lambda H(p)]}^{(s)} \right]_{\lambda}^{\lambda'} \end{aligned}$$

dove l'ultimo termine $\left[\mathcal{U}_{[H^{-1}(p')\Lambda H(p)]}^{(s)} \right]_{\lambda}^{\lambda'}$ è l'elemento di indice s della rappresentazione di $SO(3)$. Abbiamo visto quindi che i sottospazi irriducibili sono stati caratterizzati da uno specifico valore della massa M e un valore s che si interpreta come grado di libertà rotazionale intrinseco della particella, auto-stato di J^2 , ovvero lo spin. Il valore di λ viene detto *elicità*, ed è autovalore dell'operatore $\frac{J_i P^i}{\|\mathbf{p}\|}$ e corrisponde, come si vede, alla proiezione del valore del momento angolare lungo la direzione del moto.

³Nel seguito ometteremo i parametri (M, s) nella numerazione degli autostati.

3. *Vettore di tipo luce* $\mathbf{c}_1 = 0$:

Questo caso è tipico dei fotoni ed accade quando in p^μ parte spaziale e temporale si uguagliano. Possiamo sempre prendere come rappresentante un vettore del tipo $p^{*\mu} = (\mathbf{a}, 0, 0, \mathbf{a})$. Infatti qualsiasi altro vettore $p^\mu = (\mathbf{b}, \mathbf{b}\hat{n})$ è ottenibile da questo mediante un boost ($\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}$) e una rotazione $\mathcal{R}(\alpha, \beta, 0)$, dove (α, β) individuano la direzione di \hat{n} . Sfruttando il fatto che fissato $p^{*\mu}$ il vettore di Pauli-Lubanski genera l'algebra del gruppo piccolo, abbiamo dalla (5.13) che

$$\begin{aligned} W^0 &= W^3 = \mathbf{a}\mathfrak{J}_{12} = \mathbf{a}J_3 \\ W_1 &= \mathbf{a}(\mathfrak{J}_{23} + \mathfrak{J}_{20}) = \mathbf{a}(J_1 + K_2) \\ W_2 &= \mathbf{a}(\mathfrak{J}_{31} - \mathfrak{J}_{10}) = \mathbf{a}(J_2 - K_1) \end{aligned}$$

si ottiene che $\mathcal{C}_2 = (W_1)^2 + (W_2)^2$ con relativa algebra

$$\begin{aligned} [W^1, W^2] &= 0 \\ [W^2, J_3] &= iW^1 \\ [W^1, J_3] &= -iW^2 \end{aligned}$$

Questa algebra corrisponde a quella di \mathcal{E}^2 , il gruppo euclideo a due dimensioni formato da rotazioni $SO(2)$ e traslazioni \mathfrak{T}^2 . Gli autovettori che caratterizzano la rappresentazione di questa algebra sono indicizzati da due numeri λ e u . Per $u = 0$ si hanno rappresentazioni degeneri e unidimensionali con gli autovettori indicizzati completamente da $\lambda \rightarrow |\lambda\rangle$ dove λ è autovalore di J_3 . Per $u > 0$ gli autovettori assumono la forma $|u\lambda\rangle$ con $\lambda = 0, \pm 1, \dots$ e si hanno solo rappresentazioni infinito dimensionali. Stati corrispondenti a $|u = 0\lambda\rangle$ in natura sono il fotone ($\lambda = \pm 1$) e il neutrino e antineutrino, rispettivamente con $\lambda = -\frac{1}{2}$ e $\lambda = \frac{1}{2}$. Non sono conosciute in natura stati del tipo ($M = 0, u > 0$). (P^μ, W_i, J_3) agiscono in modo banale sull'autovettore individuato da $|\mathbf{p}^*\lambda\rangle$. Ricordando che possiamo ottenere il generico $|\mathbf{p}\lambda\rangle = H(p)|\mathbf{p}^*\lambda\rangle$ con $H(p)$ come nel caso precedente abbiamo che $|\mathbf{p}\lambda\rangle$ generano gli spazi irriducibili unitari e sui quali gli operatori del del gruppo di Poincaré agiscono come:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{T_p} |\mathbf{p}\lambda\rangle &= |\mathbf{p}\lambda\rangle e^{-i\rho^\mu p_\mu} \\ \mathcal{U}_\Lambda |\mathbf{p}\lambda\rangle &= |\Lambda\mathbf{p}\lambda\rangle e^{-i\lambda\theta(\Lambda, \mathbf{p})} \end{aligned}$$

dove si ha che $e^{-i\lambda\theta(\Lambda, \mathbf{p})} = \langle \mathbf{p}^*\lambda | H^{-1}(\Lambda p) \Lambda H(p) | \mathbf{p}^*\lambda \rangle$. Notiamo che nonostante le somiglianze con il caso (2), qui l'elicità, ovvero quello che si chiama anche spin della particella, viene mantenuta, mentre prima si trasformava prendendo valori fra tutti i $(2s + 1)$ disponibili.

4. *Vettore di tipo tempo* $\mathbf{c}_1 < 0$:

Benchè questa non possa essere la rappresentazione fisica di uno stato, potrebbe rappresentare quantità come ad esempio il quadrivettore momento trasferito nei processi di scattering. Il vettore sul quale applicheremo il metodo delle rappresentazioni indotte può essere scelto come $p^{*\mu} = (0,0,0, A)$ con $A^2 = -\mathbf{c}_1 > 0$. Possiamo ottenere un generico p^μ operando successivamente un boost in z $L_3(\zeta)$, uno in x $L_1(\xi)$ e una rotazione su z di ϕ $\mathcal{R}_3(\phi)$, ponendo sempre $H(p) = \mathcal{R}_3(\phi)L_1(\xi)L_3(\zeta)$. Tramite il vettore di Pauli-Lubanski, otteniamo che $\mathcal{C}_2 = A^2[(K_1)^2 + (K_2)^2 - (J_3)^2]$ e l'algebra

$$\begin{aligned} &= iK_1 \\ [J - 3, K_1] &= iK_2 \\ [K_1, K_2] &= -iJ_3 \end{aligned}$$

Quest'algebra pur ricordando molto quella di $SO(3)$ se ne discosta. Infatti il gruppo piccolo è collegato all'algebra di $SO(2,1)$ che, non essendo compatto, induce delle rappresentazioni irriducibili unitarie solo nel caso infinito dimensionale. Gli autovettori di queste rappresentazioni sono indicizzati tramite $|p^*\lambda\rangle_{(\mathbf{c}_2)}$. \mathbf{c}_2 può assumere o valori $0 < \mathbf{c}_2 < \infty$ o $\mathbf{c}_2 = -j(j+1)$, con $j = 0, 1, \dots$ o, se sono ammesse rappresentazioni a due valori $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$. Con $0 < \mathbf{c}_2 < \infty$ si ha che $\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; con \mathbf{c}_2 discreto $\lambda = j+1, j+2, \dots$ o $\lambda = -j-1, -j-2, \dots$. Quindi, posto $|\mathbf{p}\lambda\rangle = H(p)|p^*\lambda\rangle$, le rappresentazioni del gruppo di Poincaré agiscono sugli autovettori come segue:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{T_p} |\mathbf{p}\lambda\rangle &= |\mathbf{p}\lambda\rangle e^{-i\rho^\mu p_\mu} \\ \mathcal{U}_\Lambda |\mathbf{p}\lambda\rangle &= |(\Lambda\mathbf{p})\lambda'\rangle \left[\mathcal{U}_{[H^{-1}(\Lambda p)\Lambda H(p)]}^{(\mathbf{c}_2)} \right]_\lambda^{\lambda'} \end{aligned}$$

dove $\left[\mathcal{U}_{[H^{-1}(\Lambda p)\Lambda H(p)]}^{(\mathbf{c}_2)} \right]_\lambda^{\lambda'}$ è la rappresentazione matriciale di $SO(2,1)$ corrispondente a \mathbf{c}_2 .

5.3.1 Misura invariante

Come sappiamo, nella derivazione degli autovettori $|M, \mathbf{p}; s, \lambda\rangle$ che indicizzano le rappresentazioni unitarie tramite i valori dei parametri (M, s) si richiede che questi siano ortonormali, in quanto soluzione di un problema agli autovalori di operatori autoaggiunti. Poichè $|M, \mathbf{p}; s, \lambda\rangle$ dipende da parametri continui è necessario definire lo spazio di Hilbert \mathcal{H} di cui fa parte in modo che il prodotto scalare abbia la proprietà di essere invariante per trasformazioni di Lorentz. In sostanza stiamo imponendo le due seguenti condizioni

$$\begin{cases} \langle \mathbf{p}\lambda | \mathbf{p}\lambda \rangle = \langle \mathbf{p}'\lambda' | \mathcal{U}_\Lambda^\dagger \mathcal{U}_\Lambda | \mathbf{p}\lambda \rangle \\ \langle \mathbf{p}\lambda | \mathbf{p}\lambda \rangle = N(p)\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\delta^{\lambda'\lambda} \end{cases} \Rightarrow N(p)\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\delta^{\lambda'\lambda} = N(\mathcal{U}_\Lambda p)\delta^3(\mathcal{U}_\Lambda \mathbf{p} - \mathcal{U}_\Lambda \mathbf{p}')\delta^{\lambda'\lambda} \quad (5.16)$$

dove \mathcal{U}_Λ è rappresentazione di $\Lambda \in SO^+(3,1)$ e

$$\langle \mathbf{p}'\lambda' | \mathcal{U}_\Lambda^\dagger \mathcal{U}_\Lambda | \mathbf{p}\lambda \rangle = \left[\mathcal{U}_{[H^{-1}(\mathbf{p}')\Lambda H(\mathbf{p})]}^{(s)\dagger} \right]_{\sigma'}^{\lambda'} \langle \mathcal{U}_\Lambda \mathbf{p}'\lambda' | \mathcal{U}_\Lambda \mathbf{p}\lambda \rangle \left[\mathcal{U}_{[H^{-1}(\mathbf{p}')\Lambda H(\mathbf{p})]}^{(s)} \right]_{\sigma}^{\lambda}$$

per come è stato definito ai punti (2), (3), (4) del precedente paragrafo. Espandendo uno stato $|\psi\rangle$, sulla base $|\mathbf{p}\lambda\rangle$ si ottiene

$$\psi^{\lambda'}(\mathbf{p}') = \langle \mathbf{p}\lambda | \psi \rangle = \int \psi^{\lambda'}(p) N(p) \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \tilde{d}p$$

dove $\tilde{d}p = \frac{1}{N(p)} d^3p$. Applicando 5.16 si ottiene che

$$\tilde{d}p = \tilde{d}(\mathcal{U}_\Lambda p)$$

che è il risultato che volevamo trovare. Abbiamo quindi definito un prodotto scalare relativisticamente invariante sullo spazio di Hilbert delle autofunzioni.

5.4 Equazioni d'onda relativistiche: differenze e collegamenti tra i gruppi di Lorentz e Poincaré

Abbiamo visto come la ricerca delle rappresentazioni irriducibili del gruppo di Poincaré introduca in modo naturale due parametri (M, s) che ci portano alla classificazione di quelle che chiamiamo particelle. Definiamo infatti particella elementare un sistema dotato di massa M e spin s che per tempi abbastanza⁴ lunghi rispetto all'unità di tempo naturale $\frac{\hbar}{mc^2}$. Sotto queste condizioni il nostro sistema si comporta come entità unica, ovvero, come un sistema il cui stato è descritto da una sovrapposizione di raggi $|\psi\rangle$ dello spazio di Hilbert, intendendo con questo che non è possibile, in generale, trovare sottospazi che siano invarianti attraverso trasformazioni di Lorentz. Questo è in accordo con quanto abbiamo richiesto nel capitolo 3 quando ci siamo posti il problema di come dovessero cambiare gli stati da un osservatore ad un altro. Possiamo quindi dire che, in genere, possiamo definire particella elementare se lo spazio generato dai suoi stati è il più piccolo spazio compatibile con il principio di sovrapposizione e invarianza di Lorentz. Storicamente la descrizione degli stati delle particelle elementari non è stata ottenuta tramite il processo matematico appena descritto e dovuto storicamente a Wigner e Bargman, ma attraverso la ricerca di soluzioni di opportune modifiche della 3.3 consistenti con il principio di relatività. Queste equazioni sono dette *equazioni d'onda relativistiche* per opportune funzioni d'onda $\psi(x)$. Alcuni esempi sono l'equazione di Klein-Gordon per particelle a spin 0, quella di Dirac per particelle a spin $\frac{1}{2}$ e quelle di Proca Maxwell per particelle di spin 1. Cerchiamo dunque un collegamento tra questi due approcci.

⁴Con *abbastanza* si intende che questo tempo è dipendente dal fenomeno in esame.

5.4.1 Comportamento delle funzioni d'onda sotto trasformazioni di Poincaré

Come detto abbiamo nel capitolo dedicato alla meccanica quantistica uno stato $|\psi\rangle$ è opportunamente descritto nella rappresentazione delle coordinate $\langle x|\psi\rangle$ da una funzione $\psi(x) \in L^2(\Omega)$ dove Ω è il dominio di integrazione sul quale si valuta la funzione d'onda. Possiamo sempre considerare la funzione d'onda nella rappresentazione dei momenti attraverso una trasformata di Fourier $(\mathcal{F}\psi)(p) = \tilde{\psi}(p)$. Poiché $\psi(x) \in L^2(\Omega)$, possiamo tramite il teorema Plancherel richiedere l'esistenza in senso distribuzionale di $(\bar{\mathcal{F}}(\mathcal{F}\psi))(x)$, che è una corrispondenza 1 – 1. Ricordando che $\tilde{\psi}(p) = \langle \mathbf{p}|\psi\rangle$, l'azione di una trasformazione di Poincaré su un tale stato è dato generalmente dalle relazioni già viste nei precedenti paragrafi del tipo

$$\mathcal{U}_{(\Lambda, T_\rho)} |\mathbf{p}\rangle = e^{-i\rho_\mu p^\mu} |\mathbf{p}'\rangle \mathcal{U}_{(\Lambda)}$$

dove $\mathcal{U}_{(\Lambda)}$ è un'opportuna rappresentazione di Λ (si veda 5.3). Questa è una relazione tra due stati $\mathcal{U}_{(\Lambda, T_\rho)} \tilde{\psi}(p) = \langle \mathbf{p}|\mathcal{U}_{(\Lambda, T_\rho)}|\psi\rangle = c \langle \mathbf{p}'|\mathcal{U}_\Lambda|\psi\rangle = c\tilde{\psi}'(p)$ a meno di un fattore di fase $c = e^{-i\rho_\mu p^\mu}$, ovvero mappa da un raggio all'altro nello spazio di Hilbert degli stati $|\psi\rangle$ nella rappresentazione dei momenti p . Dunque poichè ad ogni $\tilde{\psi}(p)$ possiamo far corrispondere un'unica $(\bar{\mathcal{F}}\tilde{\psi}(p))(x)$ prendendo

$$(\bar{\mathcal{F}}\tilde{\psi}'(p))(x) = (\bar{\mathcal{F}}\langle \mathbf{p}|\mathcal{U}_{(\Lambda, T_\rho)}|\psi\rangle)(x) = (\bar{\mathcal{F}}c \langle \mathbf{p}'|\mathcal{U}_\Lambda|\psi\rangle)(x) = \psi'(x)$$

Considerando i soli raggi, e dunque trascurando la costante c si ha che $\psi(x)$ è mappata in $\psi'(x)$ solo attraverso una trasformazione di Lorentz, ovvero ragionando con gli stati $|\psi\rangle$, che $|\psi'\rangle = \mathcal{U}_\Lambda |\psi\rangle$ tramite una opportuna rappresentazione di Λ , trasformazione di Lorentz propria. Ricordando come abbiamo definito la trasformazione di una funzione in 4.1, possiamo dire quanto segue:

Definizione 5.2. Funzione d'onda relativistica

Una **funzione d'onda relativistica** è un insieme di n funzioni dello spaziotempo $\{\psi^k(x)\}$ che si trasforma sotto trasformazioni di Lorentz come $\psi \mapsto \psi'$:

$$\psi'^k(\mathbf{x}) = [\mathcal{U}_\Lambda^{(n \times n)}]_i^k \psi^i(\mathcal{U}_\Lambda^{-1}\mathbf{x})$$

dove $[\mathcal{U}_\Lambda^{(n \times n)}]_i^k$ è un'opportuna rappresentazione matriciale $(n \times n)$ del gruppo di Lorentz proprio ortocrono.

In sostanza sfruttando la trasformata di Fourier e applicando una trasformazione di Poincaré abbiamo ottenuto una rappresentazione a meno di una costante unitaria, ovvero una rappresentazione proiettiva attraverso le sole trasformazioni di Lorentz⁵.

⁵Si vedano in merito [12] a pagina 53 e [11] a pagina

5.4.2 Equazioni d'onda relativistiche.

In seconda quantizzazione le funzioni d'onda sono sostituite da *operatori di campo relativistici* i quali pure si trasformano in modo adeguato tramite equazioni di Lorentz:

Definizione 5.3. Operatori di campo relativistici

Un **operatore di campo relativistico** è un insieme di n funzioni dello spazio-tempo a valori operatoriali $\{\Psi^k(x)\}$ su uno spazio di Hilbert \mathcal{H} ⁶ $\{\psi^k(x)\}$ che si trasformano sotto trasformazioni di Lorentz come richiesto dalla 4.1 per l'azione di trasformazioni di Poincaré in meccanica quantistica.

$$[\mathcal{U}_\Lambda^{\mathcal{H}}] \Psi^k(x) [\mathcal{U}_{\Lambda^{-1}}^{\mathcal{H}}] = [\mathcal{U}_\Lambda^{(n \times n)}]_i^k \psi^i(\mathcal{U}_{\Lambda^{-1}}^{\mathcal{M}^4} \mathbf{x})$$

dove $[\mathcal{U}_\Lambda^{(n \times n)}]_i^k$ è come in 5.2 e $[\mathcal{U}_\Lambda^{\mathcal{H}}]$ è un'opportuna rappresentazione del gruppo di Lorentz proprio ortocrono sullo spazio \mathcal{H} dove agiscono gli operatori.

Le equazioni d'onda relativistiche sono equazioni del tipo

$$\mathcal{D} \left(m, \frac{1}{i} \partial \right)_\beta^\alpha \Psi^\beta(x) = 0 \quad (5.17)$$

Prendendo la trasformata di Fourier inversa

$$\Psi^\alpha(p) = (\bar{\mathcal{F}} \Phi^\alpha)(p) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \Phi^\alpha(p) e^{ip_\mu x^\mu} \quad (5.18)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \left(m, \frac{1}{i} \partial \right)_\beta^\alpha \Psi^\beta(x) &= 0 \\ \Downarrow \\ \mathcal{D} (m, p)_\beta^\alpha \Phi^\beta(p) &= 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

dove inoltre si deve avere che

$$\begin{cases} [\mathcal{U}_\Lambda] \mathcal{D} (m, p) [\mathcal{U}_\Lambda^{-1}] = \mathcal{D} (m, [\mathcal{U}_\Lambda^{\mathcal{M}^4}] p) \\ \mathcal{D} (m, [\mathcal{U}_\Lambda^{\mathcal{M}^4}] p)_\beta^\alpha \Phi^\beta([\mathcal{U}_\Lambda^{\mathcal{M}^4}] p) = 0 \end{cases} \quad (5.20)$$

Richiedendo che le soluzioni dell'equazione algebrica siano *on-shell*, ovvero che si abbiano soluzioni tali siano sull'ipersuperficie nello spazio dei momenti dettata dalla condizione fisica $p_\mu p^\mu = -m^2$

$$(p^2 + m^2) = 0 \leftrightarrow p^0 = \pm \sqrt{p_\mu p^\mu + m^2} \Rightarrow \Phi_\pm^\alpha(p)$$

⁶ Vuol dire che ho n $\omega_n : \mathcal{M}^4 \rightarrow \mathcal{E}nd(\mathcal{H})$.

dove le $\Phi_{\pm}^{\alpha}(p)$ sono le soluzioni *on shell* di $\Phi(p)$ tali per cui

$$(p_{\mu}p^{\mu} + m^2)\Phi(p) = 0$$

Andando a sostituire in 5.18 le $\Phi_{\pm}^{\alpha}(p)$ abbiamo

$$\Psi(x) = \int \tilde{d}p \left[\Phi_{+}(p)e^{-ip_{\mu}x^{\mu}} + \Phi_{-}(p)e^{ip_{\mu}p^{\mu}} \right] \quad (5.21)$$

dove le soluzioni a energia negativa sono legate al concetto di *antiparticella*. Come abbiamo già fatto nel processo di ricerca delle rappresentazioni irriducibili del gruppo di Poincaré, cerchiamo soluzioni particolari per poi trovare un modo per generalizzarle. Ponendoci nel sistema di riferimento solidale con l'osservatore si ha che $\bar{p}^{\mu} = (p^0 = M, \mathbf{p} = 0)$, avremo $(2s + 1)$ soluzioni, una per ogni stato di spin, e indicizzate, come al solito, da λ . Indichiamo le funzioni d'onda che sono soluzioni della (5.19) per questo particolare sistema come $u^{\alpha}(\mathbf{0}, \lambda)$

$$\mathcal{D}(m, \bar{p})^{\alpha}_{\beta} u^{\beta}(\mathbf{0}, \lambda) = 0$$

Come abbiamo visto, con un'opportuna trasformazione di Lorentz che denoteremo come in precedenza $H(p)$ possiamo ottenere un qualsiasi altro stato $u^{\alpha}(\mathbf{p}, \lambda)$. Questo stato è soluzione in automatico della (5.19). Infatti

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(m, p)^{\alpha}_{\beta} u^{\beta}(\mathbf{p}, \lambda) &= [\mathcal{U}_{H(p)}]_{\mu}^{\alpha} \mathcal{D}(m, \bar{p})^{\mu}_{\nu} [\mathcal{U}_{H^{-1}(p)}]_{\beta}^{\nu} u^{\beta}(\mathbf{p}, \lambda) = \\ &= [\mathcal{U}_{H(p)}]_{\mu}^{\alpha} \mathcal{D}(m, \bar{p})^{\mu}_{\nu} u^{\nu}(\mathbf{0}, \lambda) = 0 \end{aligned}$$

Una soluzione generale della (5.21) si esprime come combinazioni lineari delle $u^{\alpha}(\mathbf{p}, \lambda)$, detta *espansione di onde piane*:

$$\Psi^{\alpha}(x) = \sum_{\lambda} \int \tilde{d}p \left[b_{+}(\mathbf{p}\lambda) u^{\alpha}(\mathbf{p}, \lambda) e^{ip_{\mu}x^{\mu}} + b_{-}(\mathbf{p}\lambda) u^{\alpha}(\mathbf{p}, \lambda) e^{-ip_{\mu}x^{\mu}} \right] \quad (5.22)$$

Dove i $b_{\pm}(\mathbf{p}\lambda)$ sono degli *operatori* coefficienti dell'espansione. La connessione tra i due approcci di trovare gli stati (M, s) delle particelle, quello tramite funzioni d'onda e la ricerca delle rappresentazioni irriducibili del gruppo di Poincaré, si collegano come segue. Gli stati $|\mathbf{p}\lambda\rangle$ possono essere espressi tramite operatori di *creazione* $a^{\dagger}(\mathbf{p}\lambda)$ e *distruzione* $a(\mathbf{p}\lambda)$ dello *stato di vuoto* $|0\rangle$

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}\lambda\rangle &= a^{\dagger}(\mathbf{p}\lambda) |0\rangle \\ \langle \mathbf{p}\lambda| &= \langle 0| a(\mathbf{p}\lambda) \end{aligned}$$

Poichè la relazione tra operatori $\Psi^{\alpha}(x)$ così ottenuti e le funzioni d'onda $\psi^{\alpha}(x)$ è espresibile

$$\psi^{\alpha}(x) = \langle 0| \Psi^{\alpha}(x) |\psi\rangle$$

. Per quanto visto precedentemente, se applichiamo l'ultima relazione agli stati individuati tramite il metodo di Poincaré $|\mathbf{p}\lambda\rangle$ otteniamo

$$u^\alpha(\mathbf{p}, \lambda)e^{ip_\mu x^\mu} = \langle 0|\Psi^\alpha(x)|\mathbf{p}\lambda\rangle$$

Sostituendo l'espansione (5.22) nel membro destro e esprimendo $|\mathbf{p}\lambda\rangle = a^\dagger(\mathbf{p}\lambda)|0\rangle$ si ottiene che i coefficienti $b_\pm(\mathbf{p}\lambda)$ coincidono con gli operatori di creazione e distruzione $a^\dagger(\mathbf{p}\lambda)$, $a(\mathbf{p}\lambda)$.

Conclusioni

L'elegante complessità formale della teoria dei gruppi, esposta nel modo più semplice e lineare possibile per i nostri scopi nel capitolo 2, è giustificata dai potenti risultati ottenuti nel corso del testo, a livello classico ma ancor di più riguardo al moderno approccio della teoria dei campi, di cui è diventata allo stesso tempo una delle fondamenta non trascurabili e allo stesso tempo ispirazione di nuove idee.

Bibliografia

- [1] W. K. Tung, *Group theory in physics*, World Scientific, Philadelphia, 1985.
- [2] H. Weyl, *The theory of groups and quantum mechanics*, trad. ing. di H. P. Robertson dalla 2 ed. Tedesca, Dover Publication Inc, New York, 1950.
- [3] L. S. Pontryagin, *Topological groups*, trad. ing. dal russo di Arlen Brown, 2. ed, Gordon and Breach, New York, 1966.
- [4] L. W. Tu, *An introduction to manifolds*, 2 ed., Springer, New York, 2011.
- [5] E. Abbena, S. Console e S. Garbiero, *Gruppi di Lie*, Università di Torino, Dip. di Matematica, A.A. 2006/07, www.matematica.unito.it/didattica/att/b38e.6252.file.pdf.
- [6] V. I. Arnold, *Metodi matematici della meccanica classica*, Editori Riuniti University Press, Roma, 2010.
- [7] J. P. Elliot, P. G. Dawber, *Symmetry in physics. Volume 1: principles and simple applications*, Macmillan, Londra, 1984.
- [8] J. P. Elliot, P. G. Dawber, *Symmetry in physics. Volume 2: Further applications*, Macmillan, Londra, 1984.
- [9] S. S. Schweber, *An introduction to relativistic quantum field theory*, Row Peterson & company, New York, 1961.
- [10] F. R. Halpern, *Special relativity and quantum mechanics*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, 1968.
- [11] V. Bargman, E. P. Wigner, *Group theoretical discussion of relativistic wave equations*, in Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, Volume 34, Issue 5, 1948, pp.211-223.
- [12] R. Jost, *The general theory of quantized fields*, American Mathematical Society, Providence, 1965