

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Fisica

Meccanica quantistica  
e  
topologia

Relatore:  
Prof.ssa Elisa Ercolessi

Presentata da:  
Omar Essebei

Anno Accademico 2015/2016

## Sommario

La tesi si compone di quattro capitoli dove si cerca di spiegare in un discorso coerente il perché le caratteristiche topologiche degli spazi influenzino le proprietà fisiche di sistemi quantistici che in essi sono vincolati. Inoltre si vuole offrire un metodo per affrontare questo problema utilizzando la struttura matematica più opportuna.

Nel primo capitolo si fa un riepilogo del formalismo quantistico e si studiano da un punto vista analitico le condizioni al contorno da imporre all'equazione agli autovalori di Schroedinger, andando ad analizzare il dominio degli operatori sullo spazio di Hilbert degli stati quantici.

La seconda parte è esclusivamente matematica e rielabora alcune nozioni di teoria dei gruppi e topologia, in particolare i concetti di omotopia e rivestimento, fondamentali per comprendere l'obiettivo ultimo della tesi.

Il terzo capitolo riassume il metodo generale che serve ad affrontare questo tipo di problema. Si fanno inoltre esempi ideali ed esempi con un riscontro fisico interessante (particelle identiche).

L'ultimo capitolo spiega l'effetto Aharonov-Bohm e descrive limitatamente la statistica degli anioni.

# Indice

<b>1</b>	<b>Richiami di meccanica quantistica</b>	<b>4</b>
1.1	Formalismo quantistico . . . . .	4
1.2	Particella libera in tre dimensioni . . . . .	6
1.3	Particella libera in una porzione di spazio limitata . . . . .	6
1.3.1	Particella su $S^1$ . . . . .	8
1.4	Sistemi di particelle identiche in tre dimensioni . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Nozioni matematiche</b>	<b>12</b>
2.1	Spazi topologici e quozienti . . . . .	12
2.2	Cenni di teoria dei gruppi . . . . .	15
2.3	Gruppo di omotopia . . . . .	17
2.3.1	Un esempio: la circonferenza $S^1$ . . . . .	21
2.3.2	Piano con buchi . . . . .	22
2.4	Rivestimento universale e fibra . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Quantizzazione in spazi non semplicemente connessi</b>	<b>28</b>
3.1	Metodo generale . . . . .	28
3.1.1	Superselezione . . . . .	32
3.2	Esempi di vincoli . . . . .	33
3.2.1	$S^1$ . . . . .	33
3.2.2	Toro . . . . .	34
3.2.3	Nastro di Moebius . . . . .	35
3.2.4	Piano proiettivo . . . . .	36
3.2.5	Figura dell'otto . . . . .	37
3.3	Sistemi di particelle identiche . . . . .	39
3.3.1	Particelle identiche su $S^1$ . . . . .	42
3.3.2	Anioni . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Fenomenologia</b>	<b>46</b>
4.1	Effetto Aharonov-Bohm . . . . .	46
4.2	Statistica frazionaria . . . . .	48
	<b>Bibliografia</b>	<b>53</b>

# Introduzione

L'obiettivo della tesi é di analizzare e descrivere situazioni fisiche nelle quali lo spazio delle posizioni in cui puó essere trovato un sistema fisico preso in esame, assume un ruolo cruciale. Dal nostro canto affronteremo queste situazioni nella prospettiva della meccanica quantistica e munendoci di conoscenze matematiche che risiedono nell'ambito della topologia. Quest'ultima costituisce una branca della matematica che formalizza concetti intuitivi che chiunque pensa ed immagina fin da quando é bambino. Ad esempio, le idee di luogo e vicinanza tra elementi astratti sono state concretizzate in questo scenario matematico al fine di essere generali e profonde e in modo tale da concatenarsi coerentemente con il resto della matematica. Per riconoscere il ruolo della topologia nello studio di problemi quanto-meccanici basterebbe confrontare due particelle libere poste in spazi con "forme" differenti. L'equazione cardine di Schroedinger che descrive i possibili autostati dell'energia non distingue due situazioni per le quali gli spazi delle posizioni sono differenti. Per rendere le due situazioni distinguibili bisogna decodificare la differenza che sussiste nella natura topologica dei due spazi e a posteriori imporre sulle soluzioni dell'equazione, condizioni al contorno che rappresentano in modo consistente questa differenza. Gli spazi che considereremo sono caratterizzati dal fatto che i percorsi chiusi e regolari di punto iniziale e finale un elemento arbitrario dell'insieme, si organizzano in classi separate che contengono loop deformabili gli uni negli altri. Uno spazio che é caratterizzato da almeno due classi distinte di loop é detto non semplicemente connesso. Tutte le considerazioni fisiche e matematiche che faremo sono conseguenza di questa proprietá dello spazio. Inoltre, per descrivere le differenze tra spazi non semplicemente connessi assoceremo ad ognuno di questi un insieme con certe proprietá algebriche che prende il nome di gruppo fondamentale di omotopia e che rispecchia le proprietá dei loop "distinti" che si possono costruire su tali spazi. Per quale motivo uno spazio non semplicemente connesso necessita di una trattazione quantistica non consueta? Per dare una risposta esauriente vedremo che bisognerà introdurre alcuni concetti della teoria dei fibrati che ci permetteranno di formalizzare il significato di funzione d'onda in un contesto matematico piú generale. La conseguenza inevitabile che ne deriva é che le funzioni d'onda in uno spazio non semplicemente connesso sono polidrome. Cerchiamo di capirne intuitivamente la ragione. Consideriamo tutti i loop matematicamente distinti che posso costruire in un punto dello spazio. Ora, sebbene il punto finale sará sempre lo

stesso, sembrerebbe ragionevole tener conto del tipo di percorso chiuso che si é compiuto e in qualche modo lasciarne una traccia nel valore della funzione d'onda in quel punto. Potremmo quindi associare un valore differente per ogni possibile loop nel gruppo fondamentale di omotopia. Se i valori in quel punto differiscono per un fattore moltiplicativo complesso con norma unitaria (che in qualche modo rappresenta il tipo di loop) siamo sicuri che la funzione d'onda rimane interpretabile fisicamente. Ricordiamo infatti che il contenuto informativo di un sistema fisico quantistico é descritto dalle ampiezze di probabilitá che, per principio, sono codificate nella norma della funzione d'onda.

Per evitare di maneggiare funzioni d'onda a piú valori costruiremo uno spazio detto rivestimento universale (che é semplicemente connesso) che ci permetterà di descrivere lo spazio delle configurazioni originario e gli stati fisici realizzabili su tale spazio utilizzando funzioni ad un sol valore. Il metodo che adotteremo sará quello di trovare le soluzioni dell'equazione di Schroedinger come funzioni nel rivestimento universale ed imporre opportune condizioni che riproducano le caratteristiche topologiche dello spazio di partenza. Per trasportare le informazioni che vengono perdute "salendo" nel rivestimento dovremo capire come far agire il gruppo fondamentale di omotopia nello spazio delle funzioni d'onda e nei punti stessi dello spazio.

Tutto ció sará chiarito da esempi in cui si immagina di vincolare una particella quantistica in sottospazi di  $\mathbb{R}^3$ , con caratteristiche topologiche particolari. Inoltre, per comprendere il significato fisico e le conseguenze fenomenologiche del lavorare in spazi non semplicemente connessi analizzeremo l'effetto di Ahronov-Bohm. In particolare vorremo comprendere cosa succede ad un flusso di particelle che si separa e si ricongiunge circondando un buco infinito (solenoidale) nello spazio. Questo fatto metterà in chiara luce l'aspetto quanto-meccanico dell'interazione elettromagnetica e il ruolo che assume il potenziale vettore.

Nella seconda metà dell'ultimo secolo ci si é accorti del ruolo fondamentale che la topologia occupa nello studio di sistemi fisici quantistici e in particolare nell'ambito della meccanica statistica. Nella tesi faremo uno studio introduttivo di sistemi composti da un numero arbitrario di particelle identiche, senza soffermarci sulle caratteristiche termodinamiche. Si noti che per rappresentare fisicamente questi sistemi bisognerà comprendere come il principio di indeterminazione di Heisenberg e conseguentemente l'indistinguibilità delle particelle, entri in gioco nella costruzione dello spazio globale delle posizioni. Capiremo cosí, da un punto di vista topologico, perché il mondo fisico statistico si divide nelle famiglie di particelle fermioniche e bosoniche. Non solo, analizzando a fondo questa costruzione e il significato di gruppo fondamentale di omotopia ci renderemo conto che in dimensioni inferiori a tre, puó esistere un'ulteriore famiglia di particelle detta anionica. La fenomenologia di queste particelle é interessante da un punto di vista teorico, ma soprattutto sperimentale. Noi cercheremo di descriverle nel contesto piú semplificato possibile. In particolare, concluderemo che un sistema di particelle anioniche é equivalente ad un sistema di particelle consuete (fermioni o bosoni) dove ad ognuna di esse é associato un flusso di campo magnetico.

# Capitolo 1

## Richiami di meccanica quantistica

### 1.1 Formalismo quantistico

Per rendere chiaro il discorso che verrà in seguito, enunciamo innanzitutto i principi fondamentali della meccanica quantistica.

- Gli stati fisicamente distinti che caratterizzano un sistema fisico sono identificati dal dispositivo che li prepara. Esiste inoltre una corrispondenza biunivoca tra gli stati di un sistema e i raggi di uno spazio di Hilbert  $\mathbb{H}$  con campo complesso, finito o infinito dimensionale e sono indicati così:  $|\psi(s)\rangle$ . Tra gli infiniti vettori del raggio uno-dimensionale se ne sceglie per convenzione quello per cui:  $\langle \psi(s) | \psi(s) \rangle = 1$ , che rappresenta il prodotto scalare in  $\mathbb{H}$ . Si noti comunque che  $|\psi(s)\rangle$  è definito a meno di un fattore di fase arbitrario  $e^{i\theta}$  che non muta la fisica del sistema.
- Gli osservabili di un sistema sono quantità numeriche reali identificate dall'apparato sperimentale che le misura. Esiste inoltre una corrispondenza biunivoca tra gli osservabili di un sistema  $q$  e gli operatori lineari autoaggiunti che agiscono su un qualche dominio dello spazio di Hilbert, indicati con  $\hat{X}(q)$ .
- Il processo di misura è un protocollo sperimentale  $P(s, q)$  che consiste nel preparare il sistema nello stato  $s$  con un opportuno dispositivo, e nel misurare l'osservabile  $q$ . Se  $|\psi\rangle$  identifica lo stato  $s$  e  $\hat{X}$  la grandezza osservabile  $q$ , allora la probabilità che l'esecuzione  $P(s, q)$  dia un valore numerico contenuto nell'intervallo  $\chi$  vale:

$$p_{s,q}(\chi) = \sum_r \int_{x_r(\rho) \in \chi} d\rho |\langle r, \rho | \psi \rangle|^2$$

dove i vettori  $|r, \rho\rangle$  costituiscono una base ortonormale generalizzata, ossia continua e/o discreta, di autostati di  $\hat{X}$ , mentre  $x_r(\rho)$  sono gli autovalori di  $\hat{X}$  corrispondenti a  $|r, \rho\rangle$ . In meccanica quantistica infatti, il valore di un osservabile non

costituisce una proprietà intrinseca del sistema. Si noti che la proprietà di autoaggiunzione di  $\hat{X}$  garantisce che lo spettro di autostati sia una base completa, quindi un qualunque  $|\psi\rangle$  nello spazio di Hilbert risulta una sovrapposizione lineare, con opportuni coefficienti, di tale base.

- Lo spettro di un osservabile  $q$  è l'insieme  $\sigma(q)$  di tutti i possibili risultati di un protocollo di misura  $P(s, q)$ , per tutti i possibili stati  $s$ . Tale spettro, se discreto, coincide esattamente con l'insieme degli autovalori dell'operatore  $\hat{X}(q)$ .
- Si consideri un sistema fisico nello stato  $s$ . L'esecuzione del protocollo di misura  $P(s, q)$  comporta immediatamente una transizione di stato  $s \mapsto s'$  dove  $s'$  è un autostato di  $\hat{X}(q)$ , che non si può generalmente conoscere a priori. Si può invece determinare la probabilità della transizione  $s \mapsto s'$  valutando la proiezione di  $s$  su  $s'$ , in simboli:  $\langle \phi(s') | \psi(s) \rangle$ . Alla luce di quanto appena detto si interpreta il termine dell'equazione soprastante:  $|\langle r, \rho | \psi \rangle|$ , come ampiezza di probabilità al variare di  $r$  e  $\rho$ .
- Quando si esegue un'osservazione su un sistema fisico il suo stato viene mutato in maniera non deterministica. Nonostante ciò, tra una osservazione ed un'altra vige il principio di causalità espresso matematicamente da un'equazione del moto che associa ad uno stato iniziale un unico stato finale. Questa è propriamente detta equazione di Schroedinger e assume la forma:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle$$

dove  $\hat{H}$  è l'osservabile energia. Si può verificare che tutti e solamente gli autostati dell'operatore  $\hat{H}$  non evolvono nel tempo, a meno di un fattore  $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ . Questo fatto comporta che le ampiezze di probabilità degli osservabili del sistema non si modificano nel tempo. È infatti di fondamentale importanza ricercare le coppie di autovalori e autostati dell'operatore hamiltoniano, risolvendo l'equazione:

$$\hat{H} |\psi\rangle = E |\psi\rangle$$

Si osservi che tutto il contenuto informativo di un sistema fisico privo di spin nello stato  $s$  può essere espresso valutandone l'insieme delle ampiezze di probabilità rispetto agli autostati di un qualche osservabile. Questo insieme è detto rappresentativo. In genere si è soliti utilizzare gli autostati della posizione, il cui spettro di autovalori è per ragioni fisiche continuo. Il rappresentativo  $\langle \vec{x} | \psi \rangle$  costituisce a tutti gli effetti una funzione complessa in un opportuno dominio nello spazio delle configurazioni:  $\psi(x) : D \subseteq E^3 \rightarrow \mathbb{C}$ . Per la trattazione successiva si userà sempre questa rappresentazione. In particolare, l'equazione agli autovalori dell'energia e la condizione di normalizzazione assumono la forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x) + U\psi(x) = E\psi(x); \quad \int_D dx \psi^* \psi = 1$$

## 1.2 Particella libera in tre dimensioni

Si immagini una particella puntiforme e libera di poter essere trovata nell'intero spazio fisico, che si andrà descrivere nel sistema di coordinate piú opportuno. In assenza di qualunque entitá fisica la particella non puó interagire in alcun modo, quindi l'energia potenziale del sistema è identicamente nulla in tutto lo spazio. L'equazione di Schroedinger indipendente dal tempo, ossia l'equazione agli autovalori dell'operatore hamiltoniano è del tipo:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi \quad (1.1)$$

Essendo il potenziale di tipo centrale si puó pensare di sfruttare le coordinate polari e risolvere solo l'equazione radiale, mentre la parte angolare della soluzione é espressa dalle note armoniche sferiche. In alternativa si puó ragionare cosí: l'operatore hamiltoniano del sistema è esprimibile dalla sola componente cinetica:  $\frac{\hat{p}^2}{2m}$ . É quindi vero che  $[\hat{H}, \hat{p}] = 0$ . Questa relazione algebrica garantisce l'esistenza di autostati comuni di  $\hat{H}$  e  $\hat{p}$  ed è quindi possibile etichettare le soluzioni dell'equazione tramite gli autovalori della quantità di moto, ossia una qualunque 3-upla a componenti reali. Si ricordi a questo punto che la teoria quantistica impone la condizione  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar\hat{I}$ , che esprime la non compatibilitá delle grandezze fisiche posizione e quantità di moto. Una indeterminazione nulla su  $p$  comporta una completa delocalizzazione del sistema nello spazio. In conclusione le soluzioni dell'equazione costituiscono uno spettro continuo di onde piane etichettate da  $p$ , che assumono la forma:

$$\psi_p(x) = \frac{e^{i\langle p, x \rangle}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$$

dove  $\langle p, x \rangle$  indica il prodotto scalare ordinario nello spazio euclideo. Si noti che la trasformata di Fourier delle soluzioni rappresenta le ampiezze di probabilitá degli autostati dell'energia rispetto a quelli della quantità di moto. Esse sono delte di Dirac nello spazio dei momenti.

$$\tilde{\psi}(p) = \int_{\mathbb{R}^3} dx e^{-i\langle p, x \rangle} e^{i\langle p, x \rangle} \sim \delta(p)$$

## 1.3 Particella libera in una porzione di spazio limitata

Si é visto nella sezione precedente come sono fatte tutte le soluzioni dell'equazione di Schroedinger in assenza di qualsiasi interazione. Si considerino ora tutte le possibili forme che le soluzioni assumono in una regione di spazio limitata. Si puó affermare che questa infinitá non numerabile di restrizioni rappresenta, a meno di una costante di

normalizzazione, un insieme di stati fisici veramente vincolati nella regione considerata? Per rappresentare stati fisici realizzabili tali restrizioni possono essere prese solo da una certa classe di soluzioni  $\psi(x) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ . Inoltre bisogna fare attenzione ogniqualvolta la restrizione costituisce un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$  di dimensione inferiore. Notiamo subito che uno stato fisico é realizzabile quando la sua energia é un osservabile, ossia finita e reale. Poiché lo spettro dell'operatore associato rappresenta proprio le energie possibili del sistema, la condizione matematica deriva dalla richiesta di autoaggiunzione dell'operatore Hamiltoniano. É infatti noto dalla teoria che lo spettro di un operatore lineare autoaggiunto su uno spazio di Hilbert é reale. Ora, poiché le soluzioni devono possedere un dominio ben definito, l'autoaggiunzione non è vera a priori. Infatti, non solo l'azione di  $\hat{H}$  deve eguagliare quella dell'operatore aggiunto  $\hat{H}^+$ , ma si vuole che i domini coincidano. Si considerino restrizioni che si annullano al bordo della regione, ossia per le quali:  $\psi(x) = 0 \quad \forall x \in \partial D$ . Si verifica di seguito che questa condizione garantisce la realtà del valor medio di energia per un qualunque potenziale  $U \neq 0$  ( $= 0$ ). Risulta infatti:

$$\begin{aligned}
\text{Im}\langle \hat{H} \rangle &= \langle \hat{H} \rangle - \langle \hat{H} \rangle^* \\
&= \int_D d^3x \psi^* \left( \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U\psi \right) - \left[ \int_D d^3x \psi^* \left( \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U\psi \right) \right]^* \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \int_D d^3x (\psi^* \nabla^2 \psi - \nabla^2 \psi^* \psi) = -\frac{\hbar^2}{2m} \int_D d^3x \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \nabla \psi^* \psi) \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \oint_{\partial D} d^2x (\psi^* \nabla \psi - \nabla \psi^* \psi) = 0
\end{aligned}$$

Si noti che la condizione al contorno é perfettamente consistente con il significato fisico di sistema vincolato. Ha senso dire che un sistema é vincolato in una regione limitata solo quando si è in presenza di una barriera di potenziale al limite infinita sulla superficie della regione e quindi un'ampiezza di probabilità rispetto ad  $|x\rangle$  nulla. Si immagini a questo punto di ridurre il dominio accessibile alla particella fino a renderlo un segmento descritto dal singolo parametro  $x \in [-1/2, 1/2]$ . L'equazione di Schroedinger della particella libera diviene una equazione differenziale del secondo ordine, con condizioni agli estremi del segmento della forma:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0; \quad \psi(-1/2) = \psi(1/2) = 0$$

Lo spettro delle soluzioni é discreto ed eventualmente con parità definita rispetto al centro del segmento. Le autofunzioni e lo spettro energetico assumono la forma:

$$\begin{aligned}
\phi(x)_n^{pari} &= \cos((n-1/2)\pi x); & E_n &= \frac{(\hbar\pi)^2}{2m^2}(n-1/2)^2 \\
\phi(x)_n^{dispari} &= \sin(n\pi x); & E_n &= \frac{(\hbar\pi)^2}{2m^2}(n)^2
\end{aligned}$$

Si noti che l'operatore  $\hat{H}$  è autoaggiunto sul segmento mentre l'operatore momento  $\hat{p}$  risulta solo simmetrico, ossia  $D_{\hat{p}} \neq D_{\hat{p}}^+$ . Siano infatti  $f \in D_{\hat{p}}$  e  $g \in D_{\hat{p}}^+$  risulta:

$$\begin{aligned} \langle \hat{p}^+ g | f \rangle &= \langle g | \hat{p} f \rangle = \int_{-1/2}^{1/2} dx \bar{g}(-if') = -i(\bar{g}f) \Big|_{-1/2}^{1/2} + i \int_{-1/2}^{1/2} dx \bar{g}' f \\ &= \langle \hat{p} g | f \rangle - i(\bar{g}(1)f(1) - \bar{g}(-1/2)f(1/2)) = \langle \hat{p} g | f \rangle \end{aligned}$$

in quanto  $f(1/2) = f(-1/2) = 0$ . Ne segue che:

$$D_p^+ = g \in L^2\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) : g' \in L^2\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$$

il quale è più grande di  $D$ , quindi l'operatore è solo simmetrico. D'altronde una misura della quantità di moto lungo la direzione del segmento sarebbe possibile solo se il vincolo agli estremi si perdesse nell'istante stesso della misura, cosa che non vogliamo che accada. Quanto appena detto è chiarito dal principio di indeterminazione:  $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$  dove  $\Delta x$  è proprio la lunghezza del segmento che è fissa per ipotesi.

### 1.3.1 Particella su $S^1$

Immaginiamo a questo punto che lo spazio accessibile alla particella sia una circonferenza descritta dal parametro  $\phi \in [0, 2\pi]$ . Ipotizziamo inoltre che la particella non interagisca in alcun modo su  $S^1$ . Ci si chiede quali sono le funzioni quadrato sommabili  $\psi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  autofunzioni dell'energia. L'equazione di Schroedinger è la stessa della particella sul segmento, ma quali condizioni bisogna adesso imporre al valore della funzione nei punti 0 e  $2\pi$ ? La condizione:  $\psi(0) = \psi(2\pi) = 0$ , risulterebbe totalmente arbitraria vista la completa equivalenza dei punti su  $S^1$ . Un criterio per risolvere il problema potrebbe venir fuori sfruttando il principio di corrispondenza. Si ricordi infatti che una particella vincolata su di una circonferenza è descrivibile classicamente nello spazio delle fasi dalla coppia  $(\phi, p_\phi)$  dove  $p_\phi$  rappresenta la componente del momento angolare lungo l'asse normale alla circonferenza. In meccanica quantistica  $\phi$  e  $p_\phi$  divengono operatori lineari su un opportuno dominio dello spazio di Hilbert. Inoltre la relazione classica  $\{\phi, p_\phi\} = 1$  suggerisce una relazione algebrica quantistica della forma:  $[\hat{\phi}, \hat{p}_\phi] = i\hbar\hat{I}$ . Essendo la particella libera completamente delocalizzata sulla circonferenza, la legge di commutazione (o condizione quantica) si traduce fisicamente nella osservabilità della grandezza associata all'operatore  $\hat{p}_\phi$ . Per quanto appena esposto si comprende che la condizione al contorno sulle autofunzioni deve essere tale che  $\hat{p}_\phi$  sia autoaggiunto. Si è già visto che dalla condizione  $\psi(0) = \psi(2\pi) = 0$  risulta solo simmetrico. È invece facile verificare l'autoaggiunzione quando si impone la seguente:  $\psi(2\pi) = \psi(0)e^{i\theta}$  con  $\theta$  arbitrario. Lo spettro delle soluzioni e dei relativi livelli energetici risulta allora:

$$\psi(\phi)_n = e^{i\left(\frac{\theta}{2\pi} + n\right)\phi}; \quad E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\theta}{2\pi} + n\right)^2 \quad (1.2)$$

Una via alternativa per giungere alla condizione  $\psi(2\pi) = \psi(0)e^{i\theta}$  potrebbe essere la seguente: si consideri la costruzione topologica di  $S^1 = \{\phi \in [0, 2\pi] \mid 0 \sim 2\pi\}$ . Il simbolo  $\sim$  indica una relazione di equivalenza tra gli estremi del segmento. Essendo questi punti identificati topologicamente, bisogna essere attenti nello scegliere la condizione su  $\psi$  poichè l'identificazione comporta una condizione aggiuntiva di continuità della funzione nei punti "incollati", ma apparentemente separati sul segmento. Poiché la fisica del problema é contenuta nel prodotto scalare  $\langle \chi \mid \psi \rangle$  in  $L^2([0, 2\pi])$ , non é necessaria la continuità delle autofunzioni  $\psi_n$ , ma dei loro modulo quadri, ossia:  $\|\psi_n(0^+)\|^2 = \|\psi_n(2\pi^-)\|^2$ . La condizione piú generale possibile é quindi ottenibile imponendo l'uguaglianza  $\psi(0) = \psi(2\pi)$ , a meno di un fattore di fase  $e^{i\theta}$ . Si noti che il parametro  $\theta$  e quindi la forma dello spettro  $\psi(\phi)_n$  non puó essere conosciuta a priori. Essa é determinata in modo univoco dalla presenza di entitá fisiche esterne che interagiscono con la particella. Inoltre per due generiche autofunzioni  $\psi(\phi)_n^{\theta_1}$ ,  $\psi(\phi)_m^{\theta_2}$  non vale il principio di sovrapposizione. Si consideri infatti la seguente combinazione lineare:

$$\Gamma(\phi) = C_1\psi(\phi)_n^{\theta_1} + C_2\psi(\phi)_m^{\theta_2}$$

per le condizioni al contorno segue che:

$$\Gamma(2\pi) = C_1\psi(2\pi)_n^{\theta_1} + C_2\psi(2\pi)_m^{\theta_2} = C_1e^{i\theta_1}\psi(0)_n^{\theta_1} + C_2e^{i\theta_2}\psi(0)_m^{\theta_2}$$

Per l'ultimo membro é in generale impossibile estrarre un unico fattore di fase  $e^{i\theta_3}$  |  $\Gamma(2\pi) = \Gamma(0)e^{i\theta_3}$ , e quindi tale sovrapposizione non puó rappresentare uno stato realizzabile su  $S^1$ .

Consideriamo a questo punto una particella carica, libera e vincolato su di una circonferenza, questa volta immersa in un campo elettrico  $E(x)$  e magnetico  $H(x)$ . L'equazione del moto classica é esprimibile come:

$$m\frac{d^2\phi}{dt^2} = eE(\phi) + \frac{e}{c}\frac{d\phi}{dt} \times H(x)$$

Per scrivere l'equazione quantistica di Schroedinger é necessario costruire l'operatore hamiltoniano del sistema e quindi esprimere i campi elettrico e magnetico utilizzando rispettivamente il potenziale scalare  $\Phi$  ed il potenziale vettore  $A$ , definiti dalle relazioni:

$$E = -\nabla\Phi; \quad \nabla \times A = H$$

L'operatore hamiltoniano assume la forma dovuta all'accoppiamento minimale:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(p - \frac{e}{c}A(\phi)\right)^2 + e\Phi(\phi)$$

Si noti comunque che una qualunque trasformazioni su  $\Phi$  ed  $A$  che lascia invariati  $E$  e  $H$  non altera la fisica del sistema. Queste trasformazioni sono dette di Gauge e sono del tipo:

$$\Phi \rightarrow \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Omega}{\partial t}; \quad A \rightarrow A + \nabla \Omega \quad (1.3)$$

Ipotizziamo a questo punto che campi  $E$  ed  $H$  siano nulli in tutto lo spazio. Possiamo così scegliere  $A=0$  ed ottenere nuovamente lo spettro di autofunzioni visto in precedenza per la particella libera su  $S^1$ . Ma, per quanto appena detto, nulla ci vieta di ridefinire il potenziale vettore  $A \rightarrow \nabla \Omega$  con  $\Omega$  funzione scalare definita come:  $\Omega = (\frac{2\pi e}{hc})\alpha\phi$ , che soddisfa alla condizione  $\nabla \times A = H = 0$ . Ripetiamo che questa trasformazione lascia inalterata la fisica del problema, di conseguenza l'equazione di Schroedinger deve assumere la stessa forma affinché non risenta della trasformazione. É possibile verificare che l'invarianza in forma dell'equazione é assicurata se la funzione d'onda si modifica nel modo seguente:

$$\psi(\phi) \rightarrow e^{i(\frac{e}{hc})\Omega(\phi)}\psi(\phi)$$

Lo spettro delle autofunzioni assumerá cosí la forma:  $\psi_n(\phi) = e^{in\phi}$ . Si noti come la natura geometrica delle trasformazioni di Gauge ci abbia permesso di eliminare il parametro  $\alpha$ . Questo fatto mette in chiara luce che il significato fisico della fattore di fase  $e^{i(\frac{\alpha}{2\pi})\phi}$  non é intrinseco alle autofunzioni stesse, ma spunta fuori ogniqualvolta la particella compie almeno un giro su  $S^1$ . Si noti infine che lo spettro energetico rimane inalterato dalla trasformazione su  $A$  e quindi é sempre funzione di  $\alpha$ .

## 1.4 Sistemi di particelle identiche in tre dimensioni

Consideriamo la seguente situazione fisica: un numero arbitrario di particelle elementari identiche, ossia con eguali caratteristiche intrinseche, libere di essere "misurate" in un qualunque punto dello spazio fisico. Immaginiamo solo per un momento di poter etichettare le particelle rendendole tra di loro distinguibili. Allora si puó certamente affermare che ognuna di esse é descritta da un raggio vettore  $|\psi(s_i)\rangle$  dello spazio di Hilbert che nella rappresentazione di Schroedinger consisterá di una funzione definita nell'intero spazio euclideo di 3-uple ordinate. Il sistema totale sará invece descritto dal prodotto degli stati di singola particella:  $\prod_i |\psi(s_i)\rangle$  e sará rappresentato da una funzione del tipo:  $\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \dots \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ . La costruzione siffatta non impone alcuna richiesta sullo stato globale del sistema e quindi il relativo spazio di Hilbert di funzioni quadrato sommabili definite nel prodotto cartesiano di spazi 3-dimensionali é dato da tutti i possibili prodotti di stati di singola particella. Quanto appena detto presuppone la distinguibilitá delle particelle prese in considerazione. Ma é veramente possibile fisicamente distinguere per un tempo arbitrariamente lungo le particelle del sistema? Ipotizziamo di misurare

simultaneamente le posizioni delle particelle. Essendo queste ultime identiche, l'unico modo ragionevole per continuare a distinguerle é quello di seguirne il percorso nello spazio, cosa che violerebbe il principio di indeterminazione. Quindi esiste sempre un tempo finito dopo il quale misure di osservabili del sistema non possono essere associate alle particelle di cui si sono conosciute le posizioni all'istante iniziale. Questo ci dice che lo spazio di Hilbert dei possibili stati globali che descrivono un sistema di  $N$  particelle identiche può contenere solo particolari combinazioni di prodotti di stati di singola particella, in modo tale che lo stato finale non risenta delle etichette incollate alle particelle. Inoltre gli osservabili del sistema devono essere in corrispondenza biunivoca solo con particolari operatori autoaggiunti, costruiti in modo tale che misure in tempi diversi di proprietà di singola particella non permettano di riconoscerle. Per tener conto di questi fatti, le funzioni d'onda nello spazio di Hilbert nella rappresentazione di Schrodinger  $\mathbb{H} = L^2[\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \dots \mathbb{R}^3]$  devono soddisfare particolari condizioni nello spazio delle configurazioni globale. Queste condizioni discendono dal fatto che lo spazio fisico reale del sistema non é dato dal dominio che noi sfruttiamo per descrivere queste funzioni. Possiamo infatti dire che l'indistinguibilità delle particelle si traduce nella identificazione dei punti  $(x_1, x_2, x_3)_i$  contenuti in  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \dots \mathbb{R}^3$  uguali a meno di scambi dei 3-vettori che li compongono. Lo spazio fisico del sistema non deve tener conto dell'ordine delle 3-uple reali che descrivono le posizioni delle particelle quindi diviene in realtà un prodotto cartesiano  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \dots \mathbb{R}^3$  non ordinato. Come già visto per la particella su  $S^1$ , l'identificazione topologica dei punti su questo spazio comporta delle condizioni di continuità di  $\|\psi\|_{Sistema}^2$  su  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \dots \mathbb{R}^3$ . Avremo in generale:

$$\psi(x') = e^{i\theta} \psi(x); \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \dots \mathbb{R}^3 \quad (1.4)$$

dove  $x'$  sono le permutazioni di  $x$ . Vedremo più in là che il valore di  $\theta$  é determinato dalla dimensione dello spazio. In particolare, se lo spazio disponibile é l'intero  $\mathbb{R}^3$  allora  $\theta = 0, \pi$  e si ottengono le ben note statistiche di Bose e Fermi.

# Capitolo 2

## Nozioni matematiche

Come anticipato nel capitolo precedente le condizioni al contorno da imporre a sistemi fisici su spazi di un certo tipo é conseguenza della particolare natura matematica di tali spazi. Ad esempio la radice della diversità di  $S^1$  dal segmento risiede nella differente struttura topologica che li caratterizza. Descrivendo un sistema vincolato su  $S^1$  parametrizzando la coordinata spaziale sul segmento si perdono informazioni fondamentali sulle particolari caratteristiche della circonferenza. Con queste parole si intende l'insieme dei possibili "giri" che su di essa possono essere compiuti. L'insieme degli elementi che descrive i modi in qualche senso distinti di compiere giri su uno spazio topologico prende il nome di gruppo fondamentale di omotopia. Uno spazio é detto semplicemente connesso quando é banale il suo gruppo fondamentale di omotopia. Quest'ultimo puó essere interpretato come una rappresentazione algebrica di uno dei tanti segni distintivi topologici dello spazio preso in esame. Piú in generale, le applicazioni che rappresentano le caratteristiche topologiche di uno spazio sfruttando oggetti piú propriamente algebrici (gruppi,moduli,algebre..) sono esempi di funtori. La vasta branca della matematica che effettua questi "passaggi" prende il nome di topologia algebrica. Si vogliono ora introdurre alcuni concetti e proprietà matematiche inerenti alla topologia degli spazi.

### 2.1 Spazi topologici e quozienti

Per descrivere un sistema fisico generico si necessita di spazi di elementi matematici che rappresentano e rielaborano in modo coerente le relazioni fisiche che sussistono nella realtà. Tra questi vi sono ad esempio lo spazio di Hilbert degli stati quantistici, lo spazio delle fasi di un sistema classico o ancora lo spazio-tempo con metrica relativistica. La costruzione che si fa di questi insiemi comincia dalla pretesa di una caratterizzazione topologica piú o meno complessa. Una struttura topologica permette infatti di formalizzare concetti intuitivi quali ad esempio la vicinanza tra due o piú elementi, o ancora di limite e continuità di applicazioni definiti su un tale spazio. Per quanto riguarda i

nostri scopi, ci limiteremo a considerare insiemi anche astratti, ma che in qualche modo rappresentano lo spazio reale disponibile ad un sistema fisico. Consideriamo la seguente definizione:

**Definizione 2.1.** Un insieme  $X$  si dice topologico se esiste una famiglia  $U$  di sottoinsiemi detti aperti che soddisfano le seguenti:

- $\emptyset \in U, X \in U$
- l'intersezione finita di aperti é un aperto
- l'unione finita o infinita di aperti é un aperto.

La definizione di spazio topologico ci permette di comprendere quando due insiemi sono indistinguibili da un punto di vista di forma. Consideriamo una funzione  $f : X \rightarrow Y$  tra spazi topologici.  $f$  si dice continua se per ogni aperto contenuto in  $Y$  la controimmagine  $f^{-1}(U)$  é aperta in  $X$ .  $X$  e  $Y$  si dicono omeomorfi se esiste una biezione continua con inversa continua. Si noti che la nozione di omeomorfismo costituisce una relazione di equivalenza dato che vale la transitività: se  $f : X \rightarrow Y$  continua e  $g : Y \rightarrow Z$  continua, allora  $g \circ f : X \rightarrow Z$  continua.

Diremo che uno spazio topologico é di Hausdorff se per qualunque coppia di punti esistono almeno due aperti che li contengono e sono disgiunti. A questo punto vogliamo costruire una struttura topologica per un generico sottoinsieme di  $P \subseteq Q$ .  $P$  può essere caratterizzato da una topologia indotta in modo naturale da  $Q$ .

**Definizione 2.2.** La topologia di  $P \subseteq Q$  indotta da  $Q$  é data dalla famiglia di sottoinsiemi di  $P$  della forma  $U \cap P$ , dove  $U$  é un aperto di  $Q$ .

Prendiamo in esame uno spazio topologico  $X$  ed una certa relazione di equivalenza  $\sim$  su  $X$ . Notiamo innanzitutto che  $\sim$  permette di definire un nuovo spazio  $Q$  tramite la suriezione  $\pi : X \rightarrow X/\sim$  che associa agli elementi di  $X$  la relativa classe di equivalenza.  $\pi$  viene detta proiezione naturale. Questo processo é detto identificazione ed é garantito dal fatto che le classi di equivalenza hanno tra di loro intersezione nulla.  $Q$  é detto spazio quoziente di  $X$  tramite  $\sim$  ed é indicato come:  $X/\sim$ . Notiamo che uno spazio quoziente  $Q$  può essere dotato della seguente topologia:  $U \subseteq Q$  é aperto se e solo se la controimmagine  $\pi^{-1}(U) \subseteq X$  é aperto in  $X$ . In generale:

**Definizione 2.3.** Sia  $f : X \rightarrow Y$  un'applicazione suriettiva da uno spazio topologico  $X$  in  $Y$ ; la topologia quoziente su  $Y$  relativa a  $f$  é data dalla famiglia:

$$U_f = \{U \subseteq Y \mid f^{-1}(U) \text{ é aperto in } X\}$$

Si noti che in generale lo spazio quoziente di uno spazio di Hausdorff non eredita questa proprietà.

Enunciamo adesso il teorema noto come "proprietá universale del quoziente, che servirá in seguito a costruire una struttura di rivestimento per insiemi topologici [1].

**Teorema 2.1.1.** *Sia  $Q$  lo spazio quoziente di uno spazio  $X$  rispetto ad una suriezione  $\pi : X \rightarrow Q$ . Un'applicazione  $g : Q \rightarrow Z$  con  $Z$  spazio topologico risulta continua se e solo se  $g \circ \pi$  é continua.*

Si noti che nello studio di sistemi fisici con piú particelle identiche si é già incontrato il processo di identificazione sopra spiegato. Lo spazio fisico delle configurazioni si é ottenuto proprio introducendo una relazione di equivalenza tra i punti di  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \dots \mathbb{R}^3$  differenti a meno di permutazione di triplette reali. Anche la circonferenza  $S^1$  si é ottenuta identificando gli estremi di un segmento. Analogamente la sfera  $S^2$  puó essere ottenuta identificando il bordo di un disco pieno. Consideriamo un altro esempio, sia:  $RP^n = \{\{x, -x\} \mid x \in S^n\}$ . Questo spazio é ottenibile andando ad identificare i punti sulle rette passanti per l'origine di  $\mathbb{R}^n$ , quindi non é altro che una sfera  $n$ -dimensionale con punti antipodali identificati. La funzione suriettiva:  $\pi : S^n \rightarrow RP^n$  definita come:  $\pi(x) = \{x, -x\}$ , definisce la topologia quoziente di  $RP^n$ , che prenderá il nome di iper-piano proiettivo  $n$ -dimensionale.

**Definizione 2.4.** Una varietá topologica di dimensione  $n$  é uno spazio topologico di Hausdorff  $X$  per cui ogni punto é contenuto da almeno un aperto omeomorfo ad un aperto di  $\mathbb{R}^n$ .

Un omeomorfismo da un aperto di  $X$  in  $\mathbb{R}^n$  é detto carta. Quindi uno spazio é una varietá topologica se esiste un insieme di carte  $(U_i, \phi_i)$  che ricopre lo spazio. Il valore della funzione  $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  in un punto é detto coordinata. Si noti che regioni descritte da piú carte sono tra loro collegate da omeomorfismi, detti funzioni di transizione. Gli spazi topologici che prenderemo in considerazione saranno tutti almeno varietá topologiche. In alcuni casi si tratterá di varietá differenziabili, cioé varietá topologiche per le quali le funzioni di transizione sono differenziabili. Un esempio frequente di varietá topologica é la sfera  $n$ -dimensionale:

$$S^n = \{(x_1 \dots x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} (x_i)^2 = 1\}$$

Per ricoprire la  $n$ -sfera si possono considerare le due carte  $(U_1, \alpha^i), (U_2, \beta^i)$

$$\begin{aligned} U_1 &= S^n - \{\text{polo sud}\}; & \alpha^i &= \frac{x^i}{1+x^{n+1}} \\ U_2 &= S^n - \{\text{polo nord}\}; & \beta^i &= \frac{x^i}{1-x^{n+1}} \end{aligned}$$

Le trasformazioni  $\alpha^i, \beta^i$  sono dette stereografiche. Queste proiezioni permettono di visualizzare tutta la sfera meno un punto su di un piano. Si noti che le funzioni di transizioni sono  $C^\infty$ , quindi la varietá é anche differenziabile.

## 2.2 Cenni di teoria dei gruppi

**Definizione 2.5.** Sia  $G$  un insieme di elementi  $g$  non vuoto.  $G$  costituisce un gruppo se  $\exists$  una legge di composizione "  $\cdot$  " |  $g_1 \cdot g_2 \in G$  che rispetta le seguenti condizioni:

- $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 \quad \forall g_1, g_2, g_3 \in G$
- $\forall g \exists g^{-1} \mid g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$  dove  $e$  é detto elemento neutro del gruppo.
- $g \cdot e = e \cdot g = e \quad \forall g \in G$

Si noti che nella definizione di gruppo non é richiesta la commutativitá rispetto al prodotto. Un gruppo é detto abeliano se é commutativo. Come sempre nell'algebra, una volta definito un insieme con una certa struttura si vanno a costruire tutti i possibili sottoinsiemi con la stessa struttura. Si definisce allora sottogruppo, un sottoinsieme  $H \subseteq G$  che contiene l'elemento neutro ed é chiuso rispetto alla legge di composizione di  $G$  ed é chiuso rispetto all'inversione.

Consideriamo adesso un generico sottoinsieme  $K \subseteq G$ . Il piú piccolo sottogruppo  $\langle K \rangle$  contenente  $K$  é dato dall'intersezione di tutti i sottogruppi contenenti  $K$ . Se  $K$  é non vuoto avremo:

$$\langle K \rangle = \{k_1^{h_1} k_2^{h_2} \dots k_n^{h_n} \mid n \in \mathbb{N}, k_1 \dots k_n \in K, h_1 \dots h_n \in \mathbb{Z}\}$$

Diremo che  $K$  é un sistema di generatori di  $G$  se  $\langle K \rangle = G$  ossia :

$$g = k_1^{h_1} k_2^{h_2} \dots k_n^{h_n} \quad \forall g \in G$$

Un gruppo é detto finito se i generatori sono finiti. Si consideri ad esempio  $\mathbb{Z}$  che costituisce un gruppo rispetto alla somma usuale.  $\mathbb{Z}$  é generato dall'unico elemento  $\{1\}$ . Essendovi un unico generatore  $\mathbb{Z}$  é detto piú precisamente ciclico. Si noti che i generatori di un gruppo sono la generalizzazione della base di uno spazio vettoriale, dove la combinazione lineare é sostituita dal ripetersi dell'operazione di prodotto del gruppo. Per studiare un gruppo di elementi astratti a volte puó essere di aiuto trovarne un altro simile nella struttura che ne riproduca le proprietá algebriche con elementi a noi piú familiari. Questo passaggio é reso possibile da una trasformazione tra gruppi detta omomorfismo, che conserva la legge di composizione del gruppo.

**Definizione 2.6.** Una funzione  $\phi : G \rightarrow G'$  é un omomorfismo se:

- $\phi(g_1 \cdot g_2) = \phi(g_1) \times \phi(g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G$
- $\phi(g)^{-1} = \phi(g^{-1}) \quad \forall g \in G$
- $\phi(e) = e'$

Si noti che si può sempre costruire la funzione  $\phi(g) = e' \quad \forall g \in G$  che soddisfa le proprietà sopra indicate, ma che non risulta di particolare interesse. L'omomorfismo garantisce una riproduzione del gruppo solamente in "avanti". In generale si è veramente molto interessati ad una somiglianza in tutti e due i versi che viene detta isomorfismo. Questo non è altro che un omomorfismo biiettivo. Due gruppi isomorfi sono praticamente indistinguibili algebricamente. Un isomorfismo di un gruppo in se stesso è detto automorfismo. Si consideri un insieme generico  $X$ . La totalità di trasformazioni continue di  $X$  in se stesso costituisce un gruppo, con legge di composizione data dalla composizione delle mappe:

$$(fg)(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

La teoria dei gruppi per la fisica risulta di fondamentale importanza poiché costruisce nel modo più generale il concetto di simmetria. È infatti ragionevole definire una simmetria come un gruppo di trasformazioni che lasciano inalterate alcune proprietà di un insieme. Ad esempio il gruppo  $U(1)$  rappresenta una simmetria fisica dello spazio di Hilbert degli stati quantici poiché ne lascia invariate le norme. In generale l'azione di un gruppo su di uno spazio può risultare ambigua se non la si rappresenti con oggetti adatti ad operare su tale spazio. Vogliamo quindi formalizzare il concetto di azione di un gruppo su di un insieme  $X$  nel modo più generale possibile.

**Definizione 2.7.** Un'azione di gruppo è un omomorfismo da  $G$  nel gruppo di trasformazioni di  $X$  in se stesso. O ancora, un'azione (sinistra) di  $G$  su un insieme  $X$  è una corrispondenza che associa a  $g \in G$  una trasformazione  $\phi_g : X \rightarrow E$  in modo tale che:

$$\phi_{g_1 g_2} = \phi_{g_1} \phi_{g_2}$$

Avremo così soddisfatte le seguenti proprietà:

- $\phi_1(x) = x$  per ogni  $x \in X$  dove 1 è l'elemento neutro di  $G$
- $\phi_g(\phi_h(x)) = (\phi_g \phi_h)(x)$  per ogni  $x \in X$  e  $g, h$  appartenenti a  $G$ .

Se  $G$  e  $X$  sono spazi topologici, allora vogliamo che le  $\phi_g$  siano trasformazioni continue. È importante notare che se  $G$  agisce su  $X$  si può sempre definire una relazione di equivalenza su  $X$  mediante:  $x \sim y \iff$  esiste un  $g$  appartenente a  $G$  tale che  $\phi_g(x) = y$ . La classe di equivalenza  $N_x$  di un punto  $x \in X$  è dunque l'insieme dei punti che possono essere ottenuti da  $x$  tramite l'azione di  $G$ .  $N_x$  è detta orbita di  $x$ . L'insieme di tutte le orbite costituisce una partizione dell'insieme denotata con  $X/G$ . Si noti che l'insieme delle orbite può essere dotato della topologia quoziente.

Si definisce lo stabilizzatore  $H_x$  come l'insieme di elementi di  $G$  che lasciano inalterato  $x$  tramite  $\phi_g$ . Un'azione è detta libera se  $H_x$  è nullo per  $\forall x \in X$ . Infine diremo che l'azione di  $G$  su  $X$  è propriamente discontinua se  $\forall x \in X$  esiste un intorno  $V$  di  $x$  tale che, per ogni coppia  $g, g'$  di elementi distinti di  $G$ ,  $\phi_g(V) \cap \phi_{g'}(V)$  è uguale a zero. Si noti che un'azione propriamente discontinua è anche libera.

Consideriamo adesso uno spazio vettoriale  $X$  e un gruppo  $G$  per il quale esiste un'azione su  $X$ . Se le trasformazioni  $T_g$  sono lineari, diremo che  $T_g : X \rightarrow X$  sono rappresentazioni di  $g \in G$ . In altre parole, una rappresentazione é un omomorfismo da  $G$  nel gruppo di trasformazioni lineari  $GL(X)$ .  $X$  é detto spazio delle rappresentazioni di  $G$ . Un sottospazio  $X' \subset X$  é detto invariante se  $T_g$  mappa  $X'$  in se stesso. Inoltre, se  $X$  non contiene sottospazi invarianti non banali diremo che  $T$  é una rappresentazione irriducibile. É possibile dimostrare che per gruppi  $G$  compatti su  $X$  si puó sempre trovare un prodotto scalare su  $X$  che sia invariante sotto l'azione di  $T_g$ . Mostriamo infine il lemma di Schur per rappresentazioni riducibili [2]:

**Lemma 2.2.1.** *Sia  $\hat{\alpha}$  un operatore lineare che commuta con tutte le rappresentazioni di  $G$ , ossia:  $[\hat{\alpha}, T_g] \forall g \in G$ . Se tali rappresentazioni sono riducibili avremo:*

$$\hat{\alpha} = c\hat{I}$$

con  $c$  costante e  $\hat{I}$  operatore identità.

## 2.3 Gruppo di omotopia

Si consideri uno spazio topologico  $X$ . Consideriamo le seguenti definizioni.

**Definizione 2.8.** Uno spazio topologico  $X$  si dice connesso se i soli sottoinsiemi di  $X$  simultaneamente aperti e chiusi sono  $\emptyset$  e  $X$ . Questa definizione é equivalente alla richiesta che  $X$  non sia una unione di due aperti disgiunti non vuoti.

Si noti che la connessione di uno spazio rappresenta un invariante topologico, ossia una proprietá che si conserva sotto trasformazioni omeomorfe in altri spazi.

**Definizione 2.9.** Un'applicazione continua  $f : [0, 1] \rightarrow X$  é detta arco (o curva) di punto iniziale  $f(0)$  e finale  $f(1)$ . Se  $f(0) = f(1)$  si dice piú propriamente loop. Si noti che la definizione di loop é equivalente ad una funzione continua:  $S^1 \rightarrow X$ .

La definizione di loop concretizza il concetto intuitivo di ciclo "dolce". In generale si puó pensare ad una qualunque forma 1-dimensionale che dopo essersi arrotolata nei modi piú bizzarri possibili si va a chiudere.

**Definizione 2.10.** Uno spazio  $X$  é connesso per archi se, dati comunque due punti in  $X$ , esiste un arco che li congiunge.

Si puó dire di  $\mathbb{R}^n$  che ogni suo sottoinsieme convesso é connesso per archi. Si ricordi che la convessitá si ha quando una qualunque coppia di punti puó essere congiunta da un segmento di retta. Consideriamo un punto  $x$  in  $X$  e tutti i possibili archi chiusi con

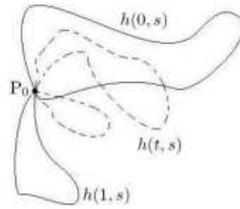


Figura 2.1: Omotopia tra loop

punto iniziale finale in  $x$ . Come possiamo formalizzare il processo di deformazione di un loop in un altro senza incorrere in strappi? Mediante la seguente definizione si riesce a concretizzare proprio questa idea intuitiva in modo da costruire un gran quantità di concetti e una intera teoria matematica.

**Definizione 2.11.** Due loop  $f$  e  $g$  si dicono omotopi quando esiste una mappa continua  $h(t, s) : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  tale che  $h(t, 0) = h(t, 1)$  per ogni  $t$  e:  $h(0, s) = f(s)$ ,  $h(1, s) = g(s)$

Si noti che al variare del parametro  $t$  si va a descrivere una deformazione continua dal loop  $f$  al loop  $g$  (Fig. 2.1). La definizione di omotopia si preferisce restringerla(per ora) a loop con un punto in comune, ossia tale che:  $f(0) = f(1) = P_0$ . È naturale dare la seguente nozione di composizione di loop(basati e non):

**Definizione 2.12.** Il prodotto di due loop  $f$  e  $g$  è dato da:  $(f \circ g)(z) = f(2z)$  se  $z$  è compreso tra 0 e 1/2. Oppure  $g(2z - 1)$  se è tra 1/2 e 1.

Si comprende subito che tale prodotto costituisce un nuovo loop che gira prima come  $f$  e poi come  $g$ . Inoltre si definiscono l'inverso  $f^{-1}(z) = f(1 - z)$  e il loop banale  $e(z) = x$  per ogni  $z$ . Da questa costruzione ne segue che l'insieme dei loop basati in un punto, dotato di questa struttura algebrica, non costituisce un gruppo. In effetti non sempre valgono le relazioni:  $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1}$  e  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ . La motivazione principale è che questo insieme distingue curve con stessa immagine, ma differente parametrizzazione. Si può facilmente superare questo problema notando che la relazione di omotopia gode delle proprietà di riflessività, simmetria e transitività e quindi costituisce una relazione di equivalenza. Possiamo quindi caratterizzare uno spazio topologico con un insieme di classi di equivalenza di loop. Da notare che loop con diversa parametrizzazione appartengono alla stessa classe, mentre loop con stessa immagine, ma diversa orientazione non necessariamente. Dati  $[f]$  e  $[g]$ , il prodotto  $[f \circ g]$  è univocamente determinato poiché qualunque sia  $f$  in  $[f]$  e  $g$  in  $[g]$  il prodotto come sopra definito  $f \circ g$  è in  $[f \circ g]$ . Inoltre sono soddisfatte le seguenti:

- $[f]([g][h]) = ([f][g])[h] \forall [f][g][h]$

- Sia  $[e]$  la classe di omotopia che possiede il loop banale.  
Allora  $[e][f] = [f][e] = [f] \vee [f]$
- $[f]^{-1}[f] = [f][f]^{-1} = [e]$

In conclusione, l'insieme delle classi di omotopia di loop basati in un generico punto di uno spazio topologico può essere dotato di una struttura di gruppo definita da:

$$[f][g]^{-1} = [fg^{-1}]; \quad [g]^{-1} = [g^{-1}]$$

Il gruppo così definito è chiamato gruppo fondamentale in  $x$  ed è espresso come:  $(X, x)$ . Si può inoltre dimostrare che in uno spazio topologico connesso per archi per ogni coppia di punti  $x$  ed  $y$ ,  $\pi_1(X, x)$  è isomorfo a  $\pi_1(X, y)$ . L'isomorfismo è dato dalla trasformazione:  $c[f] = [c \circ f \circ c^{-1}]$  dove  $c$  è una funzione continua che congiunge i punti  $x$  e  $y$ . Questo isomorfismo è detto canonico ed esiste ogniqualvolta il gruppo  $\pi_1(X)$  è abeliano. Quindi è possibile definire per uno spazio  $X$ , con gruppo di omotopia abeliano in ogni punto, un unico gruppo astratto di omotopia [3].

**Definizione 2.13.**  $\pi_1(X)$  è chiamato gruppo fondamentale di omotopia. Inoltre  $X$  è detto semplicemente connesso ogni qual volta  $\pi_1(X) = 0$ .

Il gruppo fondamentale di omotopia di  $\mathbb{R}^n$  è banale infatti, date due curve generiche  $f, g$  passanti per punto iniziale e finale rispettivamente  $x_0, x_1$ , si può sempre costruire la seguente trasformazione:

$$h(t, s) = (1 - t)f(s) + tg(s)$$

Questa omotopia di percorso è detta lineare poiché  $h(t, s)$  è un'applicazione lineare. Notiamo dalla definizione che il gruppo fondamentale di omotopia è etichettato dal numero 1. Questo sta ad indicare che il gruppo è definito in termini di funzioni su un intervallo reale. In generale possiamo definire l' $n$ -esimo gruppo di omotopia denotato con  $\pi_n(X, x_0)$  in termini di funzioni continue sul poli-intervallo  $I^n \subset \mathbb{R}^n$  in  $X$ , o equivalentemente come funzioni continue del tipo:  $S^n \rightarrow X$ . D'ora in avanti tratteremo solo il primo gruppo di omotopia.

A questo punto può essere utile e soprattutto interessante generalizzare il concetto di deformazione applicato precedentemente ai loop a funzioni generiche continue  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ . Diremo che  $f_0, f_1$  sono omotope se esiste un'applicazione continua  $F : X \times I \rightarrow Y$  |  $F(x, 0) = f_0(x)$  e  $F(x, 1) = f_1(x) \forall x \in X$ . La relazione di omotopia tra funzioni continue induce una relazione di equivalenza tra spazi topologici, diamo allora la seguente:

**Definizione 2.14.** Due spazi sono detti omotopicamente equivalenti se esistono due funzioni continue  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow X$  tali che:

$$g \circ f \simeq I : X \rightarrow X; \quad f \circ g \simeq I : Y \rightarrow Y$$

Notiamo che due spazi omeomorfi sono omotopicamente equivalenti, ma in generale non vale l'inverso. Se uno spazio  $X$  é omotopicamente equivalente al punto diremo che é contraibile. La contraibilitá puó essere immaginata come una deformazione che "schiaccia" l'insieme su un singolo punto. Facciamo alcuni esempi:

- Il disco  $n$ -dimensionale  $D^n$  e ogni sottospazio convesso contenuto in  $\mathbb{R}^n$  sono contraibili.
- La circonferenza non é contraibile.
- Il cilindro  $C$  non é contraibile, ma é omotopicamente equivalente alla circonferenza  $S^1$ . Infatti, date le seguenti definizioni analitiche :

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq 1\};$$

$$S^1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$$

tramite l'omotopia  $F((x, y, z), t) = (x, y, tz)$ , se  $i : S^1 \rightarrow C$  é l'inclusione e  $r : C \rightarrow S^1$  é definita da  $r(x, y, z) = (x, y, 0)$  avremo che:

$$r \circ i \simeq I : S^1 \rightarrow S^1; \quad i \circ r \simeq I : C \rightarrow C$$

Diamo adesso le seguenti definizioni.

**Definizione 2.15.** Un sottoinsieme  $A \subseteq X$  é detto retratto di  $X$  se esiste una funzione continua  $r : X \rightarrow A \mid r \circ i = I : A \rightarrow A$  dove  $i : A \rightarrow X$  é l'inclusione. La funzione  $r$  é detta retrazione.

**Definizione 2.16.**  $A \subseteq X$  é chiamato retratto di deformazione di  $X$  se esiste una retrazione  $r : X \rightarrow A \mid i \circ r \simeq I : X \rightarrow X$ , dove  $i : A \rightarrow X$  é l'inclusione.

L'omotopia tra cilindro e circonferenza costituisce un esempio di retratto di deformazione, ma con la caratteristica che la funzione  $r : C \rightarrow S^1$  é omotopa all'identitá  $I : S^1 \rightarrow S^1$ . Per questo motivo, in questo esempio, si parla di retrazione forte. Analogamente possiamo dire che un insieme  $A \subseteq X$  é un retratto forte di deformazione di  $X$  se esiste un'omotopia  $F : X \times I \rightarrow X \mid F(x, 0) = x \forall x \in X, F(x, 1) \in A \forall x \in X$  e  $F(a, t) = a \forall a \in A$ . Intuitivamente  $A \subseteq X$  é un retratto forte di deformazione di  $X$  se  $X$  puó essere deformato con continuitá fino a farlo coincidere con  $A$ , mantenendo  $A$  fisso durante il processo di deformazione. Si noti che quando ció accade, la retrazione forte dell'insieme di partenza possiede caratteristiche molto simili al retratto ed in particolare questi possiedono lo stesso gruppo fondamentale di omotopia [1].

Concludiamo a questo punto lo studio del concetto di omotopia andando a vedere che

relazioni sussistono tra i gruppi di omotopia di due spazi topologici generici. Se  $\phi$  é una funzione continua da  $X$  in  $Y$  si puó dimostrare che l'applicazione

$$\phi^* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \phi(x))$$

che associa a  $[f] \in \pi_1(X, x)$  la composizione  $[\phi] \circ [f]$  costituisce un omomorfismo tra gruppi indotta da  $\phi$  [1]. Questa trasformazione risulta ben definita poiché valgono le seguenti:

- se  $f$  e  $g$  sono archi in  $X$ ,  $\phi \circ f$  e  $\phi \circ g$  sono archi in  $Y$ ;
- se  $f \sim g$  allora  $\phi \circ f \sim \phi \circ g$ ;
- se  $f$  é un loop in  $X$  basato in  $x \in X$ , allora  $\phi \circ f$  é un loop in  $Y$  di base  $\phi(x) \in Y$

In aggiunta, se  $\phi$  risulta biunivoca e quindi un omeomorfismo, anche l'omomorfismo diviene biiettivo e quindi un isomorfismo tra gruppi. Il risultato appena enunciato permette di studiare oggetti topologicamente equivalenti tramite oggetti algebricamente equivalenti. Questo passaggio prende il nome di funtore.

Si enuncia adesso un risultato importante, utile per il calcolo del gruppo di omotopia di uno spazio topologico visto come prodotto di spazi di cui si conoscono le proprietà topologiche [4].

**Teorema 2.3.1.** *Siano  $X$  e  $Y$  spazi topologici e  $x_0 \in X$  e  $y_0 \in Y$ . Si ha un isomorfismo:*

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

Diamo adesso qualche esempio di spazio topologico e del relativo gruppo fondamentale di omotopia.

### 2.3.1 Un esempio: la circonferenza $S^1$

Una dimostrazione rigorosa per il calcolo del gruppo fondamentale di  $S^1$  presuppone la costruzione di un isomorfismo:  $\phi : \pi(S^1, P_0) \longleftrightarrow X$  [1].  $X$  indica lo spazio incognita che ci interessa conoscere mentre con  $P_0$  si sta fissando un punto sulla circonferenza e quindi il gruppo di loop basati in esso. Si puó dimostrare che la funzione che associa alle classi di equivalenza di loop il relativo grado é un isomorfismo e quindi:

$$\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$$

Vogliamo evitare di inoltrarci nei dettagli mentre é particolarmente interessante soffermarsi sul significato di grado di un loop, per comprendere intuitivamente il risultato di sopra. Consideriamo innanzitutto l'applicazione:

$$e : \mathbb{R} \rightarrow S^1 \quad | \quad t \rightarrow e^{i2\pi t} \tag{2.1}$$

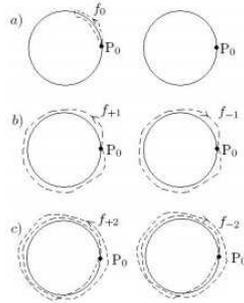


Figura 2.2: Loop non omotopi su  $S^1$  con punto base  $P_0$

che rappresenta una suriezione continua con  $e^{-1}(P_0) = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ . Si può immaginarla come la proiezione di un'elica (omeomorfa a  $\mathbb{R}$ ) sulla circonferenza. Si consideri adesso una funzione  $f : I \rightarrow S^1$  con  $I$  intervallo reale. Inoltre, sia  $f$  un arco chiuso in  $S^1$  di base 1 e sia  $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione sollevamento di  $f : I \rightarrow S^1$ , ossia una funzione continua  $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R} \mid e \circ \tilde{f} = f$ . È possibile dimostrare che esiste un unico sollevamento  $\tilde{f} \mid \tilde{f}(0) = 0$ . Poiché  $e^{-1}(f(1)) = e^{-1} = \mathbb{Z}$  allora  $\tilde{f}$  sarà un intero, che chiameremo grado di  $f$ . Intuitivamente si può pensare che il grado di un loop conti il numero di giri che esso compie sulla circonferenza. La figura (2.2) mostra chiaramente quanto detto. L'immagine a) chiarisce che il loop banale è quello che si chiude non percorrendo tutta la circonferenza, ma solo parte di essa. Le immagini b) e c) mostrano invece i loop corrispondenti agli interi +1 e -1. Questi percorrono tutta la circonferenza in versi opposti e quindi non sono tra di loro omotopi.

Essendo il toro esprimibile come:  $S^1 \times S^1$  risulta come conseguenza del teorema (2.3.1) che il suo gruppo fondamentale è  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Sul toro è infatti possibili effettuare due tipi di loop distinti e tutti le loro possibili combinazioni. In generale:  $\pi(S^1)^n \simeq \mathbb{Z}^n$ .

### 2.3.2 Piano con buchi

Consideriamo un piano con un buco:  $M = \mathbb{R}^2 / \{P\}$ . Si tratta di uno spazio topologico non semplicemente connesso. Si immagini innanzitutto di costruire dei loop che non circondano la singolarità. Questi sono sicuramente contraibili al loop banale, quindi non li consideriamo. Se però giriamo attorno a  $P$ , si ottengono loop non contraibili e quindi generalmente diversi tra loro. Questi si distinguono solamente per il numero di giri che compiono e analogamente ad  $S^1$ , sono etichettabili da numeri interi. In formule:  $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$ .

Consideriamo un piano con 2 buchi:  $M = \mathbb{R}^2 / \{P, Q\}$ . Come prima, possiamo certamente distinguere due insiemi di interi che descrivono distintamente i loop attorno a

$P$   $[f_n]$  e quelli attorno a  $Q$   $[g_n]$ . Inoltre é possibile dimostrare che ogni loop in  $M$  é omotopo al prodotto di un numero opportuno di  $[f_{+1}]$  e  $[g_1]$ . Si dice che  $\pi_1(M)$  é generato da  $[f_{+1}]$  e  $[g_1]$ . Diversamente dal toro però  $\pi_1(M)$  non é isomorfo a  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Vediamo perché: ad ogni coppia  $(n, m)$  corrisponde un certo loop che circonda  $n$  volte  $P$  e  $m$  volte  $Q$ . Bisogna però fare attenzione visto che l'ordine con cui si gira attorno ai punti identifica loop non omotopi. In realtà ad una coppia  $(n, m)$  corrispondono un certo numero di loop distinti. La ragione di quanto asserito consiste nel fatto che i generatori del gruppo fondamentale di un piano con 2 buchi non commutano tra di loro. La non commutatività comporta così un maggior numero di loop omotopicamente distinti. In generale, un piano con  $N$  buchi possiede  $n$  generatori che identificano i loop di singolo giro attorno a un singolo punto. L'ordine con cui si fanno agire influenza il loop che si sta costruendo, quindi  $\pi_1(M)$  é piú grande del prodotto cartesiano di  $n$  insiemi interi. Ad ogni combinazione di  $n$  numeri interi corrispondono generalmente piú loop distinti.

## 2.4 Rivestimento universale e fibra

Sia  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  un'applicazione continua. Diremo che un aperto  $U$  contenuto in  $X$  è uniformemente rivestito da  $p$  se la controimmagine  $p^{-1}(U)$  è un'unione disgiunta di sottoinsiemi aperti di  $\tilde{X}$  ognuno dei quali è omeomorfo ad  $U$  tramite l'applicazione  $p$ .

**Definizione 2.17.** Si dice che  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  è un rivestimento se ogni punto  $x \in X$  ammette un intorno aperto uniformemente rivestito da  $p$ . L'applicazione  $p$  viene detta proiezione,  $X$  viene detto spazio base e  $\tilde{X}$  spazio totale.

In particolare valgono le seguenti:

- $p$  é suriettiva
- per ogni  $x \in X$  esiste un intorno aperto  $U$  di  $x$  e una famiglia  $U_j$  di aperti di  $\tilde{X}$  tali che:

- $p^{-1}(U) = \cup_{j \in J} U_j$ ;
- $U_j \cap U_k = \emptyset$  se  $j \neq k \in J$ ;
- $p|_{U_j} : U_j \rightarrow U$  é un omeomorfismo per ogni  $j \in J$ ;

Si noti che per definizione lo spazio di ricoprimento é sicuramente connesso. Il numero di punti  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  che hanno stesso valore tramite  $p$  non dipende dall'immagine in  $X$ . Tale numero é detto molteplicitá del ricoprimento. Una classe importante di spazi di rivestimento sorge dal seguente teorema [1].

**Teorema 2.4.1.** *Sia  $X$  un  $G$ -spazio, se l'azione di  $G$  su  $X$  é propriamente discontinua allora  $p : X \rightarrow X/G$  é un rivestimento dove  $p$  é una proiezione naturale.*

$X$  viene detto ricoprimento principale rispetto al gruppo  $G$ . Si può dimostrare che la molteplicità di un rivestimento principale è uguale all'ordine del gruppo che genera lo spazio quoziente.

Un esempio importante di rivestimento principale è dato dall'azione del gruppo  $\mathbb{Z}$  sulla retta reale. Possiamo infatti rappresentare ogni elemento del gruppo  $n \in \mathbb{Z}$  utilizzando la trasformazione  $\phi_n(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita come:  $\phi_n(x) = x + 2\pi n$  (Fig. 2.3). Si può verificare che questa associazione è un'azione di gruppo, ossia un omomorfismo da  $\mathbb{Z}$  alle trasformazioni su  $\mathbb{R}$ . Inoltre si tratta di un'azione libera e propriamente discontinua per la quale le orbite dei punti in  $\mathbb{R}$  sono omeomorfe a  $\mathbb{Z}$ . Per il teorema sopra enunciato possiamo affermare che  $\mathbb{R}$  è un rivestimento di  $S^1$  tramite la proiezione naturale (2.1). Inoltre  $\mathbb{R}$  è semplicemente connesso.

**Definizione 2.18.** Un rivestimento di  $X$  si dice universale se è semplicemente connesso.

Si parla di universalità del rivestimento poiché due ricoprimenti semplicemente connessi sono omeomorfi [3]. L'esistenza del rivestimento universale  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  è garantita dalle ipotesi di connessione, connessione per archi e locale semplice connessione di  $X$ . Enunciamo inoltre il seguente risultato fondamentale [1]:

**Teorema 2.4.2.** Se  $\tilde{X}$  è un rivestimento principale tramite  $G$  ed è universale, allora  $G$  è isomorfo al gruppo fondamentale di omotopia di  $X$ .

$$\pi_1(\tilde{X}/G = X) \simeq G$$

Questo risultato permette un conto immediato del gruppo di omotopia di  $S^1$  essendo quest'ultimo generato dall'azione  $\mathbb{Z}$  su  $\mathbb{R}$ . Consideriamo adesso un rivestimento  $p : \tilde{X} \rightarrow X$ .

**Definizione 2.19.** Sia  $Y$  uno spazio topologico e  $f : Y \rightarrow X$  una funzione continua, il sollevamento di  $f$  è una funzione continua  $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X} \mid \tilde{f} \circ p = f$ .

Analogamente, un arco  $f \in \tilde{X}$  di punto iniziale  $\tilde{x}_1$  e finale  $\tilde{x}_2$  determina una immagine  $h \circ f \subset X$  che è proprio il sollevamento di  $h \circ f$ . Inoltre, se le immagini in  $X$  di  $\tilde{x}_1$  e  $\tilde{x}_2$

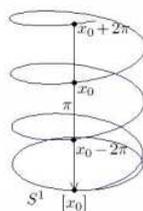


Figura 2.3: Orbita di  $x_0$  su  $\mathbb{R}$  sotto l'azione di  $\mathbb{Z}$

coincidono, allora il loop  $h \circ f$  é omotopicamente non banale. Si puó dimostrare che il sollevamento di una funzione esiste ed é unico. Enunciamo inoltre il teorema noto come proprietá del sollevamento omotopico per ricoprimenti:

**Teorema 2.4.3.** *Sia  $F : I \times I \rightarrow X$  una applicazione continua con  $F(0,0) = x_0$ . Sia inoltre  $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$  tale che  $p(\tilde{x}_0) = x_0$ . Allora esiste un'unica  $\tilde{F} : I \times I \rightarrow \tilde{X}$  tale che  $p \circ \tilde{F} = F$ . Inoltre se  $F$  é un'omotopia tra curve allora  $\tilde{F}$  é a sua volta un'omotopia tra curve.*

A questo punto vogliamo introdurre qualche nozione della teoria della fibrazione [5]. Questa costituisce una teoria molto generale della topologia che ci permetterà di reinterpretare formalmente gli stati di un sistema quantistico. Inoltre ci accorgeremo del forte legame che sussiste tra la struttura di fibrato e rivestimento universale. Sia  $p$  una mappa da  $E$  in  $B$  e siano  $F_b = p^{-1}(b)$  domini disgiunti per  $b \in B$ . Diremo che  $p$  definisce una fibrazione se tutti gli insiemi  $F_b$  sono omeomorfi tra di loro. In tal caso  $B$  costituisce lo spazio base,  $E$  lo spazio totale,  $p$  la proiezione e gli insiemi  $F_b$  le fibre. Se le fibre sono omeomorfe ad un certo spazio  $F$  diremo che  $F$  é la fibra caratteristica. Si é soliti indicare questa struttura con la notazione  $(E, B, p, F)$ . Si noti come lo spazio totale costituisca una generalizzazione del concetto di rivestimento universale, in un contesto allargato e piú astratto.

Un esempio importante di fibrato ce lo suggerisce la geometria differenziale. Sia  $M$  una varietá  $k$ -dimensionale contenuta in  $\mathbb{R}^n$ . Essendo ogni punto di  $M$  caratterizzato dal relativo spazio tangente  $TM$  possiamo costruire lo spazio delle coppie  $(x, \xi)$ , dove  $x \in M$  e  $\xi \in TM_x$ . La funzione  $p : TM \rightarrow M$  che associa alle coppie  $(x, \xi)$  il punto  $x$  risulta continua e suriettiva. Gli insiemi  $p^{-1}(x)$  sono gli spazi tangenti nei punti  $x$  e quindi omeomorfi a  $\mathbb{R}^k$ . Diremo quindi che  $p$  é una fibrazione con base  $M$  e fibra  $\mathbb{R}^k$ . Questa struttura é detta fibrato tangente.

Consideriamo adesso un cilindro e proviamo a costruirne una fibrazione. Il cilindro si puó ottenere identificando topologicamente i lati opposti di una striscia piena di lato  $2\pi$  (Fig. 2.4):

$$C = \{(\theta, x) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \mid (0, x) \sim (2\pi, x)\}$$

In alternativa possiamo esprimerlo come prodotto cartesiano:  $C = S^1 \times \mathbb{R}$ . Scegliamo  $p_1 : C \rightarrow S^1$ , funzione continua e suriettiva che proietta i punti del cilindro su  $S^1$  in modo naturale. Gli insiemi  $\{p_1^{-1}(\theta), \theta \in S^1\}$  sono omeomorfi tra loro e ad  $\mathbb{R}$ . La proiezione  $p_1$  permette di definire una struttura di fibrato sul cilindro del tipo  $(C, S^1, \mathbb{R}, p_1)$ . Si puó dimostrare che quanto detto per il cilindro é vero per una qualunque varietá prodotto  $B \times F$ . La proiezione  $p_1 : B \times F \rightarrow B$  che associa alla coppia  $(b, f)$  semplicemente il valore  $b$ , definisce una fibrazione detta di tipo prodotto. Diremo che una fibrazione é banale se é equivalente a una fibrazione prodotto, ossia se esiste un omeomorfismo  $\lambda : E \rightarrow B \times F$  che mappa le fibre in  $b \in B$  su  $E$  nelle fibre in  $b$  su  $B \times F$ , in simboli:

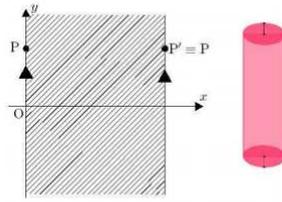


Figura 2.4: Cilindro

$p_1 \circ \lambda = p$ . Una fibrazione é localmente banale se per ogni punto dello spazio base esiste un intorno  $U$  per il quale la fibrazione é banale, ossia esiste:

$$\lambda_U : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F \mid p_1 \circ \lambda_U = p$$

L'assunzione di banalit  locale é la minima che si richiede per fibrazioni utilizzate in contesti fisici.

Un caso interessante di fibrato localmente banale é il nastro di Moebius, definito come:

$$M = \{(x, y) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \mid (0, y) \sim (2\pi, -y)\} \quad (2.2)$$

La proiezione:  $p : M \rightarrow S^1 \mid p(x, y) = x$  associa ad un punto del nastro la proiezione su curve chiuse che percorrono il nastro e tornano al punto di partenza, cosa che accade dopo due giri. Si noti che queste traiettorie (Fig. 2.5), sono localmente indistinguibili da normali archi di circonferenza. La funzione  $p$  risulta continua e suriettiva e definisce una fibrazione con fibra tipica  $\mathbb{R}$ . Sia  $U_s$  un intorno di  $s \in S^1$  la controimmagine  $p^{-1}(U_s)$  é omeomorfa al prodotto  $U_s \times \mathbb{R}$  quindi localmente su  $M$  la fibrazione é di tipo prodotto:  $(U_s \times \mathbb{R}, S^1, \mathbb{R}, p_1)$ . La rappresentazione locale del nastro di Moebius é esattamente la stessa del cilindro, infatti localmente posso scegliere  $p = p_1$ . La struttura globale é invece del tipo:  $(M, S^1, \mathbb{R}, p)$ . Consideriamo nuovamente uno spazio base  $B$  e scegliamo per ogni  $b \in B$  un punto  $s(b) \in F_b$  in modo che  $s(b)$  vari con continuit  insieme a  $b$ , diremo allora che  $s$  é una

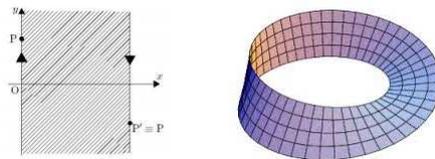


Figura 2.5: Nastro di Moebius

sezione della fibrazione. Una sezione é quindi una funzione continua  $s : B \rightarrow E$  la cui composizione con la proiezione é l'identitá:  $p \circ s = I_B$ . Una sezione globale riproduce lo spazio base nello spazio totale. Si noti che su un qualunque fibrato vettoriale é sempre possibile costruire sezioni globali. Ad esempio si possono sempre costruire sezioni globali  $s : M \rightarrow (M, TM)$  sul fibrato della varietá differenziale  $M$ .

Anche sul nastro di Moebius, con fibra  $\mathbb{R}$ , possiamo considerare sezioni che associano in modo continuo la circonferenza  $S^1$  al segmento sulla striscia che congiunge i punti identificati sui bordi (Fig. 2.5). Si noti comunque che sul nastro di Moebius non si possono avere sezioni che non si annullino almeno in un punto, ossia:  $\exists x_0 \in M \mid s(x_0) = (x_0, 0)$ . Si può dimostrare che fibrati che sono caratterizzati solo da questo tipo di sezioni sono non banali (é vero anche il viceversa). Per fibrati con fibra tipica isomorfa a un gruppo non possiamo dire nulla a priori sull'esistenza di sezioni globali.

Analogamente a quanto visto per i rivestimenti é possibile indurre una struttura di fibrato a partire da una azione di gruppo. Sia  $G$  un gruppo topologico la cui azione su uno spazio  $E$  é definita dalle trasformazioni  $\phi_g$  con  $g \in G$ . Sia  $e \in E$ , possiamo costruire una mappa continua  $\alpha$  da  $G$  nelle orbite di  $e$ , come:  $\alpha(g) = \phi_g(e)$ . Questa mappa é biettiva se e solo se  $H_e$  é banale. Inoltre se  $G$  é un gruppo compatto  $\alpha$  é un omeomorfismo. Quindi, quando un gruppo compatto  $G$  agisce in modo libero su  $E$ , tutte le orbite sono omeomorfe a  $G$ . Questa costituisce una partizione di  $E$  che dá luogo ad una fibrazione, detta principale. Enunciamo infine il teorema noto come proprietá del sollevamento omotopico.

**Teorema 2.4.4.** *Sia  $(E, B, F, p)$  una fibrazione localmente banale e  $f$  una funzione continua da uno spazio metrico  $K$  sulla base  $B$ . Allora, per ogni sollevamento  $\tilde{f} : K \rightarrow E$  di  $f$  e per ogni funzione continua  $\Phi : K \times [0, 1] \rightarrow B$  la cui restrizione su  $K \times \{0\}$  coincide con  $f$ , esiste un sollevamento  $\tilde{\Phi}$  di  $\Phi$  la cui restrizione coincide con  $\tilde{f}$ .*

# Capitolo 3

## Quantizzazione in spazi non semplicemente connessi

### 3.1 Metodo generale

Si consideri un sistema fisico vincolato in una regione spaziale arbitraria. Limitiamoci per il momento a un sistema di singola particella priva di spin, per il quale lo stato quantistico é descrivibile da una funzione  $\psi : X \subseteq E^3 \rightarrow \mathbb{C} : \|\psi(x)\|^2$  é continuo in  $D$ . La richiesta di continuitá di  $\|\psi(x)\|^2$  é necessaria per un'interpretazione fisica consistente. Sia  $X$  uno spazio topologico connesso e localmente semplicemente connesso. Queste sono le uniche richieste che imponiamo allo spazio delle configurazioni della particella. Vogliamo infatti evitare di trattare situazioni fisiche nelle quali la particella puó trovarsi in regioni fisiche non connesse. Sia  $X$  non semplicemente connesso:  $\pi_1(X) \neq \{e\}$ . Per comprendere per quale ragione uno spazio non semplicemente connesso necessita di una trattazione particolare mostriamo innanzitutto una formulazione matematica della funzione d'onda che, nel caso di uno spazio semplicemente connesso, si riconduce alla trattazione consueta. Questa formalizzazione fa uso dei concetti di fibrato e sezione. Consideriamo lo spazio  $B$  ottenuto associando ad ogni punto di  $X$  lo spazio dei numeri complessi. Vogliamo costruire un fibrato a partire dalla proiezione:  $p : B \rightarrow X \mid p(x, z) = x$ . Questa struttura é un fibrato con spazio base lo spazio delle configurazioni, fibra tipica  $F = \mathbb{C}$ . Inoltre vogliamo che questo fibrato sia localmente banale, ossia:

$$\forall x \in X \exists \text{ un intorno } U_x \mid \forall x \in X \ p^{-1}(x) \text{ é omeomorfo alla fibra del prodotto } X \times \mathbb{C} \text{ con proiezione canonica } p_1.$$

Se  $X$  fosse semplicemente connesso questo fibrato sarebbe banale, cioé esisterebbe un omeomorfismo tra le fibre in  $B$  e le fibre in  $X \times F$ , inoltre le sezioni  $s : X \rightarrow X \times F$  risulterebbero omeomorfe alle funzioni continue  $\psi : X \rightarrow F$ . Infatti se  $\psi : X \rightarrow F$  é continua, la mappa  $s : X \rightarrow X \times F$  data da  $s(x) = (x, \psi(x))$  é una sezione di

$(B \times F, B, F, p_1)$  [5]. Quindi, se  $X$  é semplicemente connesso le funzioni d'onda su  $X$  sono isomorfe alle sezioni sul fibrato cosí costruito. Questo fatto suggerisce una reinterpretazione dello spazio delle funzioni d'onda come l'insieme delle sezioni globali di  $B$ , ossia come le applicazioni  $s : X \rightarrow B \mid p \circ s = I_X$ . Ora, se  $X$  non é semplicemente connesso non é possibile costruire sezioni globali, ma solo sezioni locali della forma  $s : U \subset X \rightarrow U \times \mathbb{C}$  le cui funzioni associate  $\psi : U \rightarrow \mathbb{C}$  permetterebbero di risolvere il problema nel caso in cui la particella puó essere trovata solo in un sottospazio  $U \subset \tilde{X}$  semplicemente connesso.

Ricapitolando, gli stati quantistici nella rappresentazione di Schroedinger sono descritti dalle sezioni  $s : X \rightarrow B \mid p \circ s = I_X$ . Queste hanno interpretazione fisica ogniqualvolta sono globali e quindi quando lo spazio di queste sezioni é isomorfo allo spazio delle funzioni continue  $\psi : X \rightarrow \mathbb{C}$ . Notiamo inoltre che trattare solo le sezioni locali non ci permetterebbe di risolvere il problema che ci si sta ponendo. Per affrontare questa problematica possiamo procedere nel seguente modo. Consideriamo il ricoprimento universale  $\tilde{X}$  di  $X$  che sempre esiste a meno di isomorfismi, per uno spazio topologico connesso e localmente semplicemente connesso. Si ricordi che, dato un aperto  $U \subseteq X$  la controimmagine della funzione di proiezione:  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  é sempre un'unione di aperti disgiunti. Si pensi ad esempio ad un arco di circonferenza la cui controimmagine é data da una unione numerabile di segmenti disgiunti sulla retta reale. Essendo  $\tilde{X}$  semplicemente connesso possiamo associare ai punti di  $\tilde{X}$  lo spazio dei numeri complessi e cosí ottenere il fibrato banale  $\tilde{B} = \tilde{X} \times \mathbb{C}$  le cui sezioni  $s : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X} \times \mathbb{C}$  sono globali e isomorfe alle funzioni continue:  $\psi : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{C}$ . Si puó allora pensare di studiare un problema quantistico trovandone le soluzioni nello spazio di ricoprimento poiché in questo spazio le sezioni globali esistono. É però di fondamentale importanza comprendere quali condizioni devono soddisfare le funzioni definite in  $\tilde{X}$  affinché la proiezione delle ampiezze di probabilità sia univocamente definita nei punti in  $X$ . Equivalentemente ci si sta chiedendo quando  $\|\tilde{\psi}(\tilde{x})\|^2$  dipende solo dalla funzione di proiezione  $\pi$ . Enunciamo innanzitutto un corollario del teorema 2.4.3:

**Corollario 3.1.1.** *Sia  $\gamma_x$  un loop passante per  $x$  e  $[\gamma_x]$  la relativa classe di omotopia. Si consideri una arbitraria controimmagine in  $\tilde{x}$ , allora si avrá che la curva in  $\tilde{x}$  possiederá punto finale  $\tilde{x}'$  funzione solamente della classe di omotopia*

$$\tilde{x}' = [\gamma_x]\tilde{x}$$

Notiamo che se considerassimo l'azione di gruppo di  $\pi_1(X)$  su un generico  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  otterremmo l'orbita di  $\tilde{x}$ , che nel nostro caso sono tutti i punti che hanno stessa immagine sotto la proiezione in  $X$ . Possiamo certamente dire che l'azione di  $\pi_1(X)$  riproduce in modo algebrico le proprietá topologiche dello spazio reale. Con questo risultato si comincia ad intuire che per trattare oggetti matematici e fisici in  $\tilde{X}$ , ma che vivono in uno spazio non semplicemente connesso, bisogna trasportare le proprietá topologiche dello

spazio nel rivestimento affinché non si mutino il significato intrinseco degli oggetti e le relazioni che tra di loro intrattengono. Si noti comunque che l'oggetto matematico che più ci interessa, ossia la funzione d'onda, definito nel rivestimento é a singoli valori, mentre scendendo nello spazio vero e proprio sará inevitabilmente una funzione polidroma. Si ricordi adesso che il formalismo quantistico dello spazio di Hilbert comporta un principio di simmetria insito nella matematica stessa che esso sfrutta. Il contenuto fisico che bisogna estrarre da un elemento del raggio individuato da uno stato qualunque  $s$  resta inalterato sotto l'azione degli elementi del gruppo delle fasi  $U(1) = \{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi]\}$ . In generale possiamo dire che la trasformazione:  $\psi(x) \rightarrow e^{i\theta}\psi(x)$  é una simmetria ogniqualvolta lo spazio delle configurazioni é semplicemente connesso. Questa costituisce una ridefinizione globale della funzione d'onda perché il valore che essa assume in ogni punto dello spazio é moltiplicato per lo stesso numero complesso con norma unitaria. Per spazi non semplicemente connessi la simmetria delle fasi deve essere trattata in altro modo poiché, per quanto sopra discusso, in ogni punto dello spazio delle configurazioni  $X$  la funzione d'onda é in generale a piú valori. Nel formalismo dei fibrati diremo che la simmetria di  $U(1)$  caratterizza la struttura  $X \times \mathbb{C}$  come fibrato con fibra tipica  $\mathbb{C}$ , che a sua volta é un fibrato principale sotto l'azione del gruppo  $U(1)$ .

Si consideri nuovamente lo spazio di ricoprimento universale  $\tilde{X}$  e i punti  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{x}'$  il cui significato si rimanda al corollario precedente. Il valore del modulo quadro della funzione d'onda in  $\tilde{x}$  potrà differire al piú di una fase dal valore in  $\tilde{x}$  e tale differenza dovrá dipendere esclusivamente da  $[\gamma_x]$ . Possiamo dire in generale che stato ed osservabili di un sistema fisico mantengono lo stesso significato fisico passando da  $\tilde{X}$  a  $X$  solo quando la funzione d'onda in  $\tilde{X}$  soddisfa la seguente condizione [3]:

$$\tilde{\psi}([\gamma]\tilde{x}) = a([\gamma])\psi(\tilde{x}) \quad (3.1)$$

per ogni  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  dove  $a([\gamma]) \in U(1)$ . Questo deve valere per ogni classe di omotopia  $[\gamma]$  del gruppo fondamentale dello spazio  $X$ . Si noti che  $a([\gamma])$  rappresenta il modo di operare degli elementi del gruppo fondamentale sullo spazio delle funzioni d'onda in  $\tilde{X}$ . Inoltre le relazioni algebriche che sussistono tra gli elementi di  $\pi_1(X)$  sono le stesse per gli elementi di  $U(1)$ ; risulta infatti il seguente [3]:

**Teorema 3.1.2.** *La mappa:  $\pi_1(X) \rightarrow U(1)$  da  $[\gamma] \rightarrow a([\gamma])$  é una rappresentazione unitaria uno-dimensionale di  $\pi_1(X)$ .*

Si considerino infatti tre punti in  $\tilde{X}$ ; per quanto detto nel corollario precedente e per le proprietá di  $\pi_1(X)$  possiamo dire che:

$$\begin{aligned} \tilde{x}' &= [\gamma]\tilde{x}; \quad \tilde{x}'' = [\gamma']\tilde{x}' \\ \implies \tilde{x}'' &= [\gamma][\gamma']\tilde{x} = [\gamma \circ \tilde{\gamma}]\tilde{x} \end{aligned}$$

Essendo la funzione d'onda in  $\tilde{X}$  a valori singoli, si ha che:

$$a([\gamma])a([\tilde{\gamma}']) = a([\gamma \circ \tilde{\gamma}']) = a([\gamma][\tilde{\gamma}'])$$

Quindi anche l'algebra dei gruppi rimane la stessa. La costruzione siffatta ci permette di studiare un problema quanto-meccanico su uno spazio non semplicemente connesso nello spazio di ricoprimento, dove abbiamo visto che le sezioni sono globali ed isomorfe alle funzioni monodrome. Poiché queste rappresentano gli stati del sistema, basterá risolvere l'equazione di Schroedinger indipendente dal tempo e imporre la condizione fondamentale (3.1) che riproduce le proprietà topologiche che si perdono passando nel rivestimento  $\tilde{X}$ , ossia :

$$\tilde{\psi}([\gamma]\tilde{x}) = e^{i\theta([\gamma])}\psi(\tilde{x}) \quad (3.2)$$

che deve valere per qualunque loop nello spazio base. Operando in questo modo avremo che la proiezione nello spazio  $X$  é in ogni punto a piú valori, relazionati dall'azione del gruppo fondamentale su  $\tilde{X}$  tramite la rappresentazione del gruppo  $U(1)$ .

Una volta ottenuta la funzione d'onda in  $\tilde{X}$  che soddisfa alla condizione soprastante, sorge il problema di definire un prodotto scalare adatto. Purtroppo, date  $\psi_1(\tilde{x})$ ,  $\psi_2(\tilde{x})$  si ha che l'integrale  $\int_{\tilde{X}} d^3\tilde{x} \psi_1^*(\tilde{x})\psi_2(\tilde{x})$  somma in modo continuo ampiezze di probabilità che si ripetono almeno una infinitá numerabile di volte e quindi é molto probabile che risulti divergente, sebbene  $\psi_1(\tilde{x})$ ,  $\psi_2(\tilde{x})$  rappresentino stati realizzabili su  $X$ . Per superare questa inconvenienza ricordiamo che esistono infiniti sottoinsiemi del rivestimento universale che parametrizzano lo spazio originario e che quindi possono descrivere la funzione d'onda in  $X$ . Questi insiemi sono detti domini fondamentali e ognuno di essi é isomorfo a  $X$  [3]. Ogni dominio fondamentale contiene una e una sola controimmagine di ogni punto  $x$  contenuto in  $X$ . Inoltre tali domini sono connessi dall'azione del gruppo fondamentale su  $\tilde{X}$ . Dalla teoria é infatti noto che, scelta una controimmagine  $\tilde{x}$  di  $x \in X$ , l'azione di  $\pi_1(X)$  scambia  $\tilde{x}$  con un'altra controimmagine  $\tilde{x}'$ . La funzione d'onda in un dominio fondamentale determina una ben definita funzione su  $X$  con modulo quadro finito. Bisogna però essere cauti nel descrivere lo stato di una particella soffermandosi su di un unico dominio fondamentale. Immaginiamo infatti di vedere una particella percorrere un loop basato in  $x$ . Alla fine del processo lo stato della particella verrá descritto da una funzione d'onda il cui dominio é il dominio fondamentale che contiene il punto  $\tilde{x}' = [\gamma]x$ . Sebbene scegliere un dominio fondamentale o un altro per la descrizione di un sistema fisico é del tutto equivalente, é anche vero che se facessi interagire due particelle che compiono loop differenti con base nello stesso punto, lo stato finale risentirá delle classi di omotopia dei loop rispettivi. Quindi possiamo concludere che la fisica di un sistema su uno spazio non semplicemente connesso risulta differente da quella su uno spazio semplicemente connesso ogniqualvolta la funzione d'onda compie dei giri e quindi cambia dominio fondamentale. Essa acquisterá un fattore di fase che dipenderá dal loop compiuto e che si rivelerá fisicamente andando a far interagire la funzione con qualcos'altro. Si ricordi ad esempio la particella libera su  $S^1$ . A partire dalle trasformazioni di Gauge si é visto che lo spettro delle autofunzioni é indistinguibile da quello della particella su un segmento, cosa apparentemente assurda vista la completa differenza topologica tra i due insiemi. In effetti la differenza spunterebbe fuori se

andassimo ad analizzare vari comportamenti della funzione d'onda, su diversi possibili loop, in relazione con un'entità fisica esterna. In tal caso vedremo risultati sperimentali differenti. Un caso interessante che mette in luce quanto detto é l'effetto di Ahronov-Bohm, che verrà trattato nel prossimo capitolo, nel quale l'agente esterno é un campo magnetico uniforme e costante in un regione limitata.

### 3.1.1 Superselezione

Consideriamo un sistema di singola particella in uno spazio non semplicemente connesso. Siano  $\psi_1, \psi_2$  due autofunzioni dell'energia definite nel rivestimento universale  $\tilde{X}$ . Abbiamo visto che le controimmagini di un punto contenuto nello spazio  $X$  sono tra loro legate dall'azione di un fattore di fase  $e^{i\theta}$  e dal tipo di loop che si compie attorno al punto. Si noti che in assenza di un campo esterno che determina il valore di  $\theta$  si può effettivamente misurare che lo spettro energetico é funzione di un qualunque valore di  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Consideriamo la sovrapposizione  $\psi = \psi_1 + \psi_2$ . É possibile mostrare che se  $\theta_1 \neq \theta_2$  il valore della funzione  $\psi$  in punti collegati dall'azione del gruppo fondamentale su  $\tilde{X}$  differisce per numeri complessi con norma diversa da 1. Quindi  $\psi$  non é interpretabile fisicamente e pertanto non é proiettabile in  $X$ . Notiamo quindi che il principio di sovrapposizione deve essere limitato solo alle autofunzioni per le quali  $\theta$  é lo stesso. Quanto detto é vero anche se ci si restringe al dominio fondamentale dove le condizioni su  $\psi_1, \psi_2$  sono imposte solo al bordo. Vediamo adesso come bisogna trattare lo spazio di Hilbert delle funzioni d'onda ragionando in termini di operatori che su di esso agiscono [6]. Sia  $[\gamma] \in \pi_1(X)$ . Si é visto in precedenza che l'azione di  $[\gamma]$  é ben definita su una funzione  $\psi : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{C}$  in un punto  $\tilde{x}$  e restituisce il valore della funzione in  $\tilde{x}' = [x]\tilde{x}$ . O meglio:  $[\hat{\gamma}]\psi(\tilde{x}) = \psi(\tilde{x}[\hat{\gamma}])$ . Consideriamo un operatore  $\hat{\alpha}$  che agisce sulle funzioni  $\psi : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{C} \in \mathbb{H}$ , la cui grandezza classica corrispondente  $\alpha(\tilde{x})$  é funzione delle sole coordinate nello spazio  $\tilde{X}$ . L'azione di  $\hat{\alpha}$  su  $\psi$  é definita come :

$$\hat{\alpha}\psi(\tilde{x}) = \alpha[\pi(\tilde{x})]\psi(\tilde{x})$$

É possibile mostrare che il commutatore:  $[\hat{\alpha}, [\hat{\gamma}]] = 0$ . Essendo gli operatori  $[\hat{\gamma}]$  non tutti multipli dell'operatore identità, per il lemma di Schur (2.2.1) si può allora dire che gli osservabili  $\hat{\alpha}$  sono riducibili. Le rappresentazioni irriducibili  $[\hat{\gamma}]_i$  in cui vengono decomposti gli elementi di  $\pi_1(X)$  operano su sottospazi di  $\mathbb{H}_i \subseteq \mathbb{H} \mid \mathbb{H} = \oplus_i \mathbb{H}_i$ . Visto che vale la regola di commutazione soprastante,  $\hat{\alpha}$  e  $[\hat{\gamma}]$  posseggono autovettori in comune. Allora:

$$\hat{\alpha}\mathbb{H}_i \subset \mathbb{H}_i$$

dato che

$$[\hat{\gamma}]_i\mathbb{H}_i \subset \mathbb{H}_i$$

Gli osservabili del sistema sono quindi realizzabili in modo consistente nei sottospazi  $\mathbb{H}_i$  così individuati.  $\mathbb{H}_i$  e  $\mathbb{H}_j$  con  $j \neq i$  sono detti inequivalenti. Possiamo quindi concludere

che: se  $X$  non é semplicemente connesso, lo spazio degli stati  $\mathbb{H} = \{\psi : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{C}\}$  si decompone in una somma diretta di sottospazi vettoriali ognuno dei quali é caratterizzato da un ben determinato fattore di fase  $e^{i\theta}$ . La decomposizione dello spazio di Hilbert comporta quindi dei limiti di applicazione del principio di sovrapposizione. Nel contesto sopra discusso si parla di regole di superselezione. Si noti comunque che quanto detto non é piú vero se ci si limita a considerare funzioni d'onda definite in un sottospazio strettamente contenuto nello spazio di partenza non semplicemente connesso. In tal caso si sta implicitamente evitando le possibilitá che la particella si sposti da un dominio fondamentale ad un altro. Si pensi ad esempio di preparare una particella libera su  $S^1$  in certo stato e immaginiamo di osservare il sistema rimanere limitato su un arco di circonferenza. Non vi sarebbero differenze fisiche se mettessi a confronto, in presenza di un qualunque entitá fisica esterna al sistema, il comportamento della particella con quello della stessa particella preparata nel medesimo modo e ossia limitata in un arco di circonferenza.

## 3.2 Esempi di vincoli

Si mostrano di seguito esempi di spazi non semplicemente connessi per i quali vogliamo esprimere la condizione fondamentale (3.1). In alcuni casi otterremo le autofunzioni dello spettro energetico, nell'ipotesi che la particella quantistica sia libera.

### 3.2.1 $S^1$

Consideriamo nuovamente una particella libera su una circonferenza. Vogliamo studiare lo spettro energetico andando ad applicare il formalismo costruito in questo capitolo e quindi ritrovare le stesse soluzioni incontrate nel primo capitolo, dove si é fatto uso invece del concetto di autoaggiunzione. Abbiamo giá visto che la circonferenza é uno spazio non semplicemente connesso con:  $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ . Associando ad ogni punto di  $S^1$  lo spazio dei numeri complessi otteniamo uno spazio totale  $B$ . Tramite la proiezione  $p : B \rightarrow S^1$  che associa alla coppia  $(x, z \in \mathbb{C}) = x$  si ottiene un fibrato con fibra tipica  $F = p^{-1}(x)$  omeomorfa a  $\mathbb{C} \forall x \in S^1$ . Inoltre,  $\forall x \in S^1 \exists$  un intorno  $U_x \mid p^{-1}(x)$  é omeomorfo alla fibra associata allo spazio prodotto  $X \times \mathbb{C}$  con fibrazione banale. Abbiamo cosí costruito un fibrato localmente banale, per cui non esistono sezioni globali, ma solo sezioni locali della forma:  $s : U \subset S^1 \rightarrow U \times \mathbb{C}$ . Ricordiamo che per le sezioni locali vale la relazione locale:  $p \circ s = I_U$ . Abbiamo però visto che il fibrato associato al ricoprimento universale di uno spazio ammette un insieme di sezioni globali isomorfo alle funzioni continue dallo spazio nella fibra. Quindi, andiamo adesso a ricercare le funzioni d'onda nel rivestimento universale di  $S^1$  che sappiamo essere l'insieme dei numeri reali tramite la funzione di proiezione  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1 \mid \tilde{x} \rightarrow e^{i\tilde{x}}$ . Affinché le funzioni  $\tilde{\psi}(\tilde{x}) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  corrispondano veramente agli stati fisici sulla circonferenza bisogna imporre la condizione generale:

$$\tilde{\psi}([\gamma]\tilde{x}) = e^{i\theta(l[\gamma])}\psi(\tilde{x}) \quad \rightarrow \quad \tilde{\psi}(\tilde{x} + 2\pi n) = e^{in\theta}\tilde{\psi}(\tilde{x})$$

dove si noti che l'azione del gruppo fondamentale su  $\mathbb{R}$  non é altro che:  $[\gamma]\tilde{x} = \tilde{x} + 2\pi n$ . Il valore della funzione d'onda nelle orbite in  $\tilde{X}$  ottenute dall'azione del gruppo fondamentale, differisce solamente per il valore dell'esponente nel fattore di fase. Si ricordi che l'azione del gruppo su  $\tilde{X}$  definisce lo spazio quoziente  $S^1$  e quindi le orbite corrispondono allo stesso punto sulla circonferenza. Quindi, la funzione d'onda vista su  $S^1$  ha una infinitá numerabile di valori per ogni punto. Naturalmente, possiamo descrivere le funzioni d'onda restringendoci ad un unico dominio fondamentale che scegliamo essere:  $D = \{\tilde{x} \in [0, 2\pi]\}$ . Allora, la condizione verrà imposta unicamente agli estremi dell'intervallo e assumerá la forma già incontrata:

$$\psi(0) = \psi(2\pi)e^{i\theta}$$

mentre le autofunzioni si riconducono alle soluzioni (1.2).

### 3.2.2 Toro

Il toro costituisce una varietà topologica e differenziale 2-dimensionale, ottenibile dal prodotto  $S^1 \times S^1$ . Una definizione alternativa può essere data sfruttando il processo di identificazione dei lati di un quadrato pieno, nel modo seguente:

$$T = \{(x, y) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \mid (0, y) \sim (2\pi, y); (x, 0) \sim (x, 2\pi)\}$$

Analogamente al caso della circonferenza dobbiamo costruire una meccanica quantistica nel ricoprimento universale del toro in modo che sia coerente con gli stati veramente realizzabili sul toro. Sappiamo che il rivestimento universale di  $T$  é il piano reale  $\mathbb{R}^2$  e la proiezione  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T$  associa  $(\tilde{x}, \tilde{y}) \rightarrow (e^{i\tilde{x}}, e^{i\tilde{y}})$ . Ricordiamo inoltre che  $\pi_1(T) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Gli elementi del gruppo fondamentale del toro possono quindi essere etichettati da una coppia di numeri interi  $(n, m)$ , che sintetizza il fatto che due loop sono equivalenti

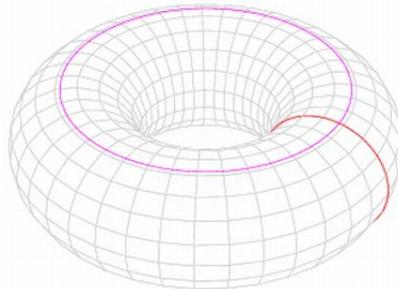


Figura 3.1: La coppia di loop in figura é un esempio di generatori del gruppo  $\pi_1(T)$

solo quando compiono lo stesso numero di giri negli unici due modi possibili sul toro (Fig. 3.1). L'azione del gruppo fondamentale sui punti del rivestimento universale é una generalizzazione di quella vista per il rivestimento di  $S^1$ . Questa assume la forma:

$$[\gamma]_{(n,m)}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\tilde{x} + 2\pi n, \tilde{y} + 2\pi m)$$

La condizione generale sulle funzioni d'onda in  $\mathbb{R}^2$  é:

$$\tilde{\psi}(\tilde{x} + 2\pi n, \tilde{y} + 2\pi m) = e^{i(n\theta_1 + m\theta_2)} \tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{y})$$

Se ci si limita al dominio fondamentale  $D \subset \mathbb{R}^2 = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]\}$  otteniamo delle condizioni semplificate:  $\{\psi(0, \tilde{y})e^{i\theta_1} = \psi(2\pi, \tilde{y}); \psi(\tilde{x}, 0)e^{i\theta_2} = \psi(\tilde{x}, 2\pi)\}$ . Inoltre, le autofunzioni dello spettro energetico per un particella libera sul toro sará del tipo:

$$\psi_{n,m} = e^{i[(\frac{\theta_1}{2\pi} + n)\tilde{x} + (\frac{\theta_2}{2\pi} + m)\tilde{y}]}$$

É interessante notare che la coppia di numeri interi  $(n, m)$  identifica le classe di omotopia delle curve che si avvolgono  $n$  volte verso l'interno del buco ed  $m$  volte sulla circonferenza esterna del toro. In analogia con la meccanica classica, si può dimostrare che per il moto di un pendolo doppio, il cui spazio delle configurazioni é proprio il toro, e per energie elevate rispetto al massimo dell'energia potenziale esisterá sempre una soluzione che si chiuderá dopo  $n$  ed  $m$  giri rispettivamente nei due sensi indicati.

### 3.2.3 Nastro di Moebius

Immaginiamo di vincolare una particella su di un nastro di Moebius, definito dalla (2.2). Per studiare come sono fatte le autofunzioni nel caso di un potenziale identicamente nullo dobbiamo riprodurre le proprietá topologiche del nastro nel rivestimento universale e quindi calcolare innanzitutto il gruppo fondamentale di omotopia  $\pi_1(M)$ . Notiamo innanzitutto che per costruire il nastro di Moebius si procede in modo simile al cilindro. Si incollano i bordi opposti di una striscia in modo simmetrico rispetto a un punto contenuto nell'asse centrale della striscia. Intuitivamente possiamo deformare il nastro con una operazione continua fino a renderlo la circonferenza  $S^1$ . Durante questo processo il gruppo di omotopia rimane inalterato e quindi  $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$ . Questo processo é una retraction forte analoga a quella vista per il cilindro. Possiamo quindi aggiungere che il nastro di Moebius e il cilindro sono omotopicamente equivalenti. Il rivestimento universale é dato da  $\mathbb{R}^2$  tramite la proiezione  $(\tilde{x}, \tilde{y}) \rightarrow (e^{i\tilde{x}}, -\tilde{y})$ . Ora, l'azione del gruppo di omotopia agisce sul piano reale traslando punti solamente lungo una direzione, differentemente dall'azione del gruppo fondamentale del toro.

$$[\gamma]_n(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\tilde{x} + 2\pi n, \tilde{y})$$

La condizione generale e nel dominio fondamentale sulle funzioni d'onda assumeranno la forma:

$$\tilde{\psi}(\tilde{x} + 2\pi n, \tilde{y}) = e^{in\theta} \tilde{\psi}(\tilde{x}, -\tilde{y}); \text{ in } D \subset \mathbb{R}^2 = [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \quad \psi(0, y)e^{i\theta} = \psi(2\pi, -y)$$

Le autofunzioni dell'hamiltoniana sono del tipo:

$$\psi_n(\tilde{x}, \tilde{y}) = e^{i[(\frac{\theta}{2\pi} + n)\tilde{x} + k|\tilde{y}|]} \quad (3.3)$$

Si noti che il momento della particella é caratterizzato da uno spettro in parte continuo ed in parte discreto. La componente  $p_{\tilde{y}} = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$  é etichettata dal vettore d'onda  $k \in \mathbb{R}$ , mentre la componente  $p_{\tilde{y}}$  é analoga alla componente del momento angolare  $p_\phi$  analizzata nella sezione (1.3.1). Osserviamo inoltre che gli autostati di una particella libera su un cilindro sono come quelli in (3.3), con l'unica differenza che la componente  $\tilde{y}$  non necessita del modulo.

### 3.2.4 Piano proiettivo

Consideriamo il piano proiettivo reale definito come:  $\mathbb{R}P^2 = \{x \in S^2 \mid x \sim -x\}$ . Notiamo innanzitutto che possiamo immaginare il piano proiettivo come un unico emisfero di una sfera 2-dimensionale. Dimostriamo che la proiezione naturale  $p : S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$  che definisce lo spazio proiettivo come spazio topologico quoziente, costituisce un rivestimento universale (Fig. 3.2). Per farlo consideriamo l'azione del gruppo ciclico  $\mathbb{Z}_2$  su  $S^2$  definita come  $\pm 1 \cdot x = \pm x$ . Avremo che :

$$\forall x \in S^2 \text{ il disco aperto } \{y \in S^2 \mid \|y - x\| < 1/2\}$$

é un intorno aperto di  $x$  e verifica la condizione che definisce un'azione propriamente discontinua. Un altro aperto di  $x$  che soddisfa tale condizione é dato da  $V \cap (-W)$ , dove  $V$  e  $W$  sono due intorni aperti disgiunti di  $x$  e  $-x$  rispettivamente. Possiamo allora concludere che  $p : S^2 \rightarrow S^2/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^2$  é un rivestimento universale. Inoltre, per il teorema (2.4.2) possiamo aggiungere che  $\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2$ . Quanto appena detto puó in realtà essere generalizzato [1]:

**Teorema 3.2.1.** *Se  $G$  é un gruppo finito che agisce liberamente su uno spazio di Hausdorff  $X$ , allora l'azione di  $G$  su  $X$  é propriamente discontinua.*

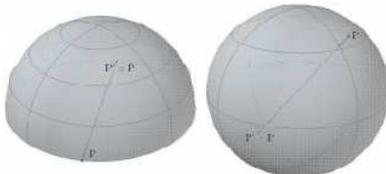


Figura 3.2: I punti  $P$  e  $P'$  sono identificati topologicamente

La condizione (3.1) per una particella libera nel piano proiettivo si traduce come:

$$\psi(\tilde{x} + \pi, \tilde{y}) = \pm\psi(\tilde{x}, \tilde{y})$$

dove la coppia  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  identifica i punti sulla sfera:  $\tilde{x} \in [0, \pi]$  e  $\tilde{y} \in [0, 2\pi]$ . La condizione sopra scritta assomiglia molto a quella vista per un sistema di particelle identiche (1.4).

### 3.2.5 Figura dell'otto

La figura dell'otto é un esempio di "bouquet" di spazi topologici. Si tratta infatti di un'unione di due circonferenze  $C_1, C_2$ , con intersezione in un unico punto  $x_0$ . Quest'ultimo é detto punto base (Fig. 3.3). Se si é in presenza di piú punti base, questi si vanno ad identificare tramite una relazione di equivalenza. Intuitivamente potremmo pensare che il gruppo fondamentale  $\pi_1(\infty)$  sará in qualche relazione al primo gruppo di omotopia della circonferenza. Per verificarlo vediamo come puó essere deformata la figura dell'otto trasformandola in qualcosa di cui é noto il primo gruppo di omotopia. Partiamo dalla definizione analitica:  $\infty = C_1 \cup C_2 \subset \mathbb{R}^2$  dove:

$$C_1 = \{(x, y) \mid (x - 1)^2 + y^2 = 1\}; \quad C_2 = \{(x, y) \mid (x + 1)^2 + y^2 = 1\}$$

Se eliminassimo i punti  $x_1$  e  $x_2$  potremmo costruire un retratto forte di deformazione che porterebbe:  $\infty/\{x_1, x_2\} \rightarrow x_0$  [1]. In assenza dei punti  $x_1, x_2$  lo spazio che ne risulta é contraibile ad un punto ed é quindi semplicemente connesso. Questo fatto ci suggerisce che le proprietá omotopiche dell'otto si riconducono a quelle di un piano con due buchi. In effetti, potremmo pensare di deformare un piano intero con due singolaritá allargando le singolaritá fino a farle diventare due circonferenze tangenti e restringere il resto del piano eliminando tutto ció che é al di fuori dell'otto. Non diamo una dimostrazione rigorosa di questo fatto e diciamo direttamente che:  $\pi_1(\infty) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ . Ad ogni elemento  $[\gamma]_{(n,m)} \in \pi_1(\infty)$  che é determinato da due numeri interi, corrispondono piú loop non omotopi essendo  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$  un prodotto libero. É infatti ragionevole credere che, se si chiude un loop in un punto generico dell'otto l'ordine con cui si gira prima su una circonferenza

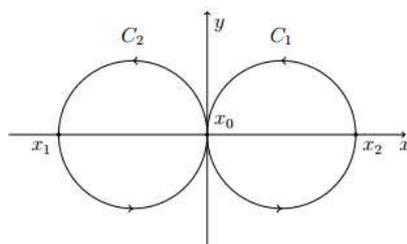


Figura 3.3: Bourquet di due circonferenze

e poi sull'altra modifica inevitabilmente il tipo di loop.

La figura dell'otto può essere ottenuta a partire dalla proiezione  $\pi : [0, 4\pi] \rightarrow \infty$ :

$$\pi(x) = \begin{cases} (\cos(x) - 1, \sin(x)) & x \in [0, 2\pi] \\ (-\cos(x) - 1, \sin(x)) & x \in [2\pi, 4\pi] \end{cases}$$

Notiamo che  $\pi(x)$  è continua e descrive un percorso chiuso di punto iniziale l'origine. Questo percorre in senso antiorario la circonferenza di sinistra quando  $x \in [0, 2\pi]$  e in senso orario la circonferenza di destra, fino a tornare nel punto iniziale per  $x = 4\pi$ . Ricerchiamo adesso la condizione generale per il dominio fondamentale  $[0, 4\pi]$ . Per farlo, ragioniamo in termini di operatori, in modo simile a quanto fatto nel primo capitolo. Cercheremo in seguito di interpretare il risultato che otterremo da un punto di vista topologico.

Studiamo l'operatore hamiltoniano e il dominio per il quale risulta autoaggiunto. Innanzitutto notiamo che possiamo descrivere la funzione d'onda  $\psi(x)$  di una particella libera distinguendo una funzione  $\psi_1(x)$  da un'altra  $\psi_2(x)$  che descrivono la funzione d'onda rispettivamente nella prima e nella seconda circonferenza. Il dominio in cui sono definite è lo stesso ed è  $[0, 2\pi]$ . Sulla stregua di quanto fatto nella sezione (1.3) studiamo le condizioni che rendono autoaggiunto l'operatore hamiltoniano. Questo assume la forma:  $\hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2}$ . Limitiamoci alla prima circonferenza e consideriamo le funzioni  $\psi_1 \in D_{\hat{H}}$  e  $\phi_1 \in D_{\hat{H}^+}$ . Il discorso che segue è analogo anche per  $\psi_2$  e  $\phi_2$ .

$$\begin{aligned} \langle \hat{H}^+ \psi_1 | \phi_1 \rangle &= \langle \psi_1 | \hat{H} \phi_1 \rangle = \int_0^{2\pi} dx \bar{\psi}_1 (-\phi_1'') = -(\bar{\psi}_1 \phi_1') \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} dx \bar{\psi}_1' \phi_1' = \\ &= -(\bar{\psi}_1 \phi_1') \Big|_0^{2\pi} + (\bar{\psi}_1' \phi_1) \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} dx \bar{\psi}_1'' \phi_1 = \langle \hat{H} \psi_1 | \phi_1 \rangle - \\ &= [-\bar{\psi}_1(2\pi) \phi_1'(2\pi) + \bar{\psi}_1(0) \phi_1'(0) + \bar{\psi}_1'(2\pi) \phi_1(2\pi) - \bar{\psi}_1'(0) \phi_1(0)] \end{aligned}$$

La condizione sulle funzioni d'onda che rende nullo il termine tra parentesi quadre e impone l'uguaglianza dei domini di  $D_{\hat{H}}, D_{\hat{H}^+}$  è più d'una. Ad esempio, una condizione potrebbe essere la seguente:

$$\psi_1(2\pi) = e^{i\theta_1} \psi_1(0); \quad \psi_1'(2\pi) = e^{i\theta_1} \psi_1'(0)$$

In generale, esprimendo la funzione d'onda come vettore colonna e imponendo analoghe condizioni su  $\psi_2$  e  $\psi_2'$  avremo:

$$\begin{bmatrix} \psi_1(2\pi) \\ \psi_2(2\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1(0) \\ \psi_2(0) \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \psi_1'(2\pi) \\ \psi_2'(2\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1'(0) \\ \psi_2'(0) \end{bmatrix}$$

Si noti che il risultato che abbiamo ottenuto può essere interpretato come quello associato a due circonferenze indipendenti sulle quali si compiono due loop indipendenti. Si

tratta evidentemente di una condizione restrittiva che rappresenta solo un sottocaso della situazione piú generale che si puó verificare. Si noti infatti che nel trovare la condizione scritta in forma matriciale abbiamo implicitamente considerato le componenti  $\psi_1$  e  $\psi_2$  come indipendenti.

Se prendessimo il termine tra parentesi quadre e lo sommassimo a quello relativo alla seconda componente imponendo il tutto uguale a zero, otteniamo un altro tipo di condizione possibile di autoaggiunzione:

$$\begin{bmatrix} \psi_1(2\pi) \\ \psi_2(2\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & e^{i\theta_1} \\ e^{i\theta_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1(0) \\ \psi_2(0) \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \psi'_1(2\pi) \\ \psi'_2(2\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & e^{i\theta_1} \\ e^{i\theta_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi'_1(0) \\ \psi'_2(0) \end{bmatrix}$$

Questo secondo risultato va associato ad un unico loop che percorre ambedue le circonferenze. Nonostante ciò, l'arco di circonferenza che viene percorso quando si attraversa il punto base é sempre lo stesso. Abbiamo trovato quindi una condizione che rappresenta un ulteriore sottocaso. Per ottenere la condizione generale dobbiamo considerare termini matriciali generici. Cosí facendo ci accorgeremo che tutte le matrici unitarie  $U \in U(2)$  sono possibili candidate per ottenere la condizione di autoaggiunzione di  $\hat{H}$ . Queste rimescolano le componenti di  $\psi_1$  e  $\psi_2$  e rappresentano quindi anche i loop che passando per il punto base possono scegliere un qualunque arco di circonferenza da percorrere. L'azione di un elemento generico del gruppo  $\pi_1(\infty)$  sulle funzioni d'onda puó essere espresso come segue:

$$\begin{bmatrix} \psi_1([\gamma]_{(n,m)}x) \\ \psi_2([\gamma]_{(n,m)}x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}_{[\gamma]_{(n,m)}} \begin{bmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{bmatrix}$$

### 3.3 Sistemi di particelle identiche

Riprendiamo il discorso iniziato nel primo capitolo sfruttando a questo punto gli strumenti matematici che abbiamo costruito. Ricordiamo innanzitutto che lo spazio fisico di un sistema di particelle identiche si ottiene identificando topologicamente i punti  $(x_1, x_2, x_3)_i$  contenuti in  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \dots \mathbb{R}^3$  uguali a meno di scambi dei 3-vettori che li compongono. L'identificazione siffatta dei punti é una relazione di equivalenza indotta dal gruppo delle permutazioni sulle  $N$ -uple di triplette reali che compongono gli elementi dello spazio. Questo gruppo indicato con  $S_N$  contiene  $N!$  elementi, ognuno dei quali effettua un singolo scambio. Si noti innanzitutto che l'azione di questo gruppo possiede punti fissi nello spazio delle configurazioni. Infatti esistono elementi che contengono 2 o piú componenti uguali, contenuti nei rispettivi spazi  $\mathbb{R}^3$ , e che quindi restano inalterate sotto le opportune permutazioni. L'insieme dei punti fissi é del tipo:  $\Delta = \{x_1 \dots x_n \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \text{ almeno una coppia } x_i = x_j \text{ con } i \neq j\}$ . In definitiva, lo spazio reale (eliminato di patologie) adatto a descrivere sistemi con numero arbitrario di particelle é dato dallo spazio delle configurazioni totale opportunamente quozientato [3]:

$$Q = (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \dots \mathbb{R}^3 - \Delta) / S_N \quad (3.4)$$

Si noti che eliminare i punti contenuti in  $\Delta$  é necessario sia per ragioni matematiche, come si é già detto, che fisiche. Infatti, questa operazione significa non considerare gli stati in cui 2 o piú particella occupano la stessa posizione nello spazio, per i quali sarebbe necessaria un'energia infinita.

A questo punto ci chiediamo se  $Q$  é semplicemente connesso e se non lo é quale sia il relativo gruppo di omotopia. Che tipo di loop si possono costruire in  $Q$ ? Esistono loop non deformabili gli uni negli altri? Si consideri un una curva di punto iniziale  $x = (x_1, ..x_i, x_{i+1}..x_n)$  e punto finale  $x = (x_1, ..x_{i+1}, x_i..x_n)$ . Per come si é costruito lo spazio  $Q$  questa curva costituisce un loop. Possiamo certamente dire che questo loop é identificato dall'elemento del gruppo  $\sigma_{i,i+i} \in S_N$  che scambia le componenti  $i \longleftrightarrow i + 1$ . Consideriamo nuovamente una curva basata in  $x = (x_1, ..x_i, ..., x_j, ..., x_n)$  con punto finale  $x = (x_1, ..x_j, ..., x_i, ..., x_n)$  e  $|i - j| \geq 2$ . Questa curva rappresenta nuovamente un loop identificato dall'elemento del gruppo  $\sigma_{i,j}$  che scambia le componenti  $i \longleftrightarrow j$ . I loop cosí costruiti sono omotopi? No, ed il motivo risiede nel fatto che  $\sigma_{i,i+1}$  e  $\sigma_{i,j}$  sono elementi di  $S_N$  indipendenti tra loro. Si noti infatti che  $S_N$  puó essere descritto da  $N$  generatori  $(\sigma_1... \sigma_{n-1}, I)$  che soddisfano le seguenti condizioni:

$$S_N = \{I, \sigma_1... \sigma_n \mid \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}; \sigma_i \sigma_j = \sigma_j, \mid i - j \mid \geq 2; \sigma_i^2 = I\}$$

Gli elementi  $\sigma_i$  possono essere scelti come quelli che scambiano  $i \longleftrightarrow i + 1$ . Alla luce di quanto detto é chiaro che:

$$\sigma_{i,j} = \sigma_{i,i+1} \sigma_{i+1,i+2} \dots \sigma_{j-1,j} \sigma_{j-2,j-1}^{-1} \sigma_{j-3,j-2}^{-1} \dots \sigma_{i,i+1}^{-1}$$

é indipendente da  $\sigma_{i,i+i}$  e conseguentemente lo sono i loop associati. Per completare la corrispondenza tra  $\pi_1(Q)$  e  $S_N$  bisognerebbe verificare che tutte le proprietá dei generatori del gruppo valgano anche per i loop associati. Se queste non fossero vere potremmo solo dire che i loop corrispondenti agli elementi di  $S_N$  sono tra di loro inequivalenti, ma non potremmo capire effettivamente quali sono tutti i possibili loop. Dando per vere le altre proprietá ci si limita a verificare in particolare quella di idempotenza:  $\sigma_i^2 = I$ . Quest'ultima sta significare che i loop corrispondenti devono essere omotopi e quindi soddisfare la seguente:

$$[\gamma]_{\sigma_i} \sim [\gamma]_{\sigma_i^{-1}}$$

In questo caso abbiamo infatti:  $[\gamma]_{\sigma_i}^2 \sim [\gamma]_I$ . Intuitivamente possiamo affermare che  $[\gamma]_{\sigma_i}$  é deformabile alla classe  $[\gamma]_{\sigma_i^{-1}}$  tramite una rotazione continua attorno all'asse che attraversa il punto base. Questo fatto garantisce il risultato importante di isomorfismo:

$$\pi_1(Q) = S_N$$

Le proprietá algebriche dei due gruppi sono le stesse, il che significa che posso studiare il gruppo fondamentale e la sua azione usando gli elementi del gruppo delle permutazioni. Si noti che la giustificazione data per dimostrare l'omotopia tra  $[\gamma]_{\sigma_i}$  e  $[\gamma]_{\sigma_i^{-1}}$  é vera se

lo spazio di singola particella é 3-dimensionale(o piú), per il quale ha senso parlare di rotazione.

A questo punto vogliamo comprendere come agisce  $\pi_1(Q) = S_N$  sulle funzioni definite nello spazio di ricoprimento  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \dots \mathbb{R}^3$  e quindi il tipo di condizioni che bisognerà imporre. Si ricordi che:

$$\tilde{\psi}([\gamma]\tilde{x}) = a([\gamma])\tilde{\psi}(\tilde{x})$$

dove  $a([\gamma])$  é un fattore di fase con  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Sfruttando l'isomorfismo del gruppo fondamentale con  $S_N$  ci si accorge che bisogna limitare i possibili valori di  $\theta$ . Si noti che gli elementi del gruppo delle permutazioni sono esprimibile in forma esponenziale:  $e^{i\sum_j \theta_j \sigma_j}$ . Questo é vero perché l'azione dei generatori sullo spazio delle funzioni é esprimibile con un fattore di fase arbitrario dipendente da  $\theta_j$ . Per le proprietá dei generatori viste sopra ed in particolare per il fatto che  $\sigma_j^2 = I$ , é possibile mostrare che  $\theta_j$  non dipende da  $j$ , ma soprattutto che  $\theta = 0$  oppure  $\theta = \pi \pmod{2\pi}$ . Quindi avremo:

$$a(\sigma_j) = 1 \quad \forall j \quad \text{o} \quad a(\sigma_j) = -1 \quad \forall j$$

Mentre per gli elementi del gruppo:

$$a(g) = 1 \quad \forall g \quad \text{o} \quad a(g) = (-1)^g$$

dove  $a(g) = (-1)^g$  é 1 per permutazioni pari, e -1 per permutazioni dispari. Possiamo allora concludere che la funzione d'onda di un sistema di particelle identiche definita nel rivestimento universale puó costituire uno stato fisico se é vincolata dalla condizione:

$$\psi(\tilde{x}) = \pm \psi(\tilde{x}) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \dots \mathbb{R}^3, \forall [\gamma] \in \pi_1(Q) \mid \tilde{x} = [\gamma]x$$

Il + e il - codificano rispettivamente la statistica di Bose e la statistica di Fermi. Si noti che per qualunque loop (o permutazione), lo stato finale della funzione d'onda non risentirá della classe di omotopia del loop, quindi rimarrá la stessa o cambierá segno. Questo fatto evidenzia la differenza sostanziale con i casi visti in precedenza dove la storia del percorso e quindi la classe di omotopia dei loop influenza in maniera diretta lo stato finale della funzione, con un fattore di fase dipendente esplicitamente dal tipo di loop.

### 3.3.1 Particelle identiche su $S^1$

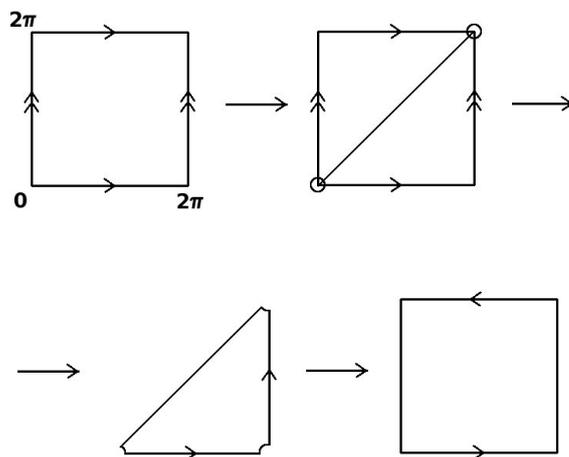


Figura 3.4: Rappresentazione della formula 3.5

Potrebbe essere interessante studiare il comportamento di un sistema di particelle identiche in uno spazio non semplicemente connesso. In generale, una volta eseguita l'operazione (3.4) che ci permette di costruire lo spazio globale delle configurazioni, non possiamo dire nulla a priori sul gruppo fondamentale di omotopia dello spazio che si ottiene. Non esiste un teorema che ci permette di risolvere il problema, ma bisogna analizzare caso per caso lo spazio dove le particelle sono vincolate. La ragione per cui non esiste un metodo generale é dovuta sostanzialmente all'eliminazione dei punti fissi del gruppo delle permutazioni. Un esempio interessante e di non difficile computazione é la circonferenza. Immaginiamo per semplicitá di vincolare 2 particelle identiche sulla circonferenza. Lo spazio totale delle configurazioni é il prodotto cartesiano  $S^1 \times S^1$  che non é altro che il toro. Avremo quindi:

$$X = (T - \Delta)/S_2 \tag{3.5}$$

Il toro da un punto di vista topologico si ottiene identificando a due a due i lati di un quadrato di lato  $2\pi$ , vedi figura (Fig. 3.4). I punti fissi sono dati dalla diagonale del quadrato ed essendo fisicamente inconsistenti(energia infinita) li andremo ad eliminare. Si noti che tali punti costituiscono un loop sul toro appartenente alla classe  $[\gamma]_{(1,1)}$ . Ora, quozientare lo spazio sotto il gruppo  $S_2$  vuol dire identificare i punti simmetrici

rispetto alla diagonale e quindi ripiegare il triangolo superiore su quello inferiore. Questa operazione comporta l'identificazione dei cateti del triangolo (stesso tipo di freccia) e l'eliminazione del vertice tra i cateti. Topologicamente possiamo deformare in modo continuo la figura che ne risulta ottenendo in definitiva il nastro di Moebius. Possiamo così concludere che:  $\pi_1(X) = \mathbb{Z}$ . Si ricordi che la diagonale nella seconda e terza immagine non è presente. Il ragionamento fatto non sarebbe lecito se fosse presente il bordo, il quale ci costringerebbe a scegliere un verso anche sulla diagonale, cosa che risulterebbe completamente arbitraria.

Adesso vogliamo comprendere quale condizione generale deve soddisfare la funzione d'onda nel rivestimento universale, che analogamente alla striscia di Moebius è  $\mathbb{R}^2$ , affinché rappresenti uno stato fisico realizzabile per due particelle identiche su  $S^1$ . L'azione di  $[\gamma]_n \in \pi_1(X)$  sul piano euclideo e la condizione su  $\psi(\tilde{x}, \tilde{y}) : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{C}$  possono ad esempio essere così:

$$[\gamma]_n(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\tilde{x} + 2\pi n, \tilde{y} + 2\pi n); \quad \psi(\tilde{x} + 2\pi n, \tilde{y} + 2\pi n) = e^{i\theta n} \psi(\tilde{x}, \tilde{y}) \quad (3.6)$$

Si noti che l'azione del gruppo fondamentale sul rivestimento corrisponde a far girare ambedue le particelle su tutta la circonferenza e nello stesso verso, fino a farle tornare nei relativi punti iniziali. Si tratta evidentemente di una generalizzazione di quanto già visto per la singola particella su  $S^1$ .

Si può però effettuare un altro tipo operazione. Ricordiamo infatti che le controimmagini dei punti di  $\tilde{X}$  che differiscono per l'ordine delle componenti sono identificate nello spazio  $X$ . Allora, se si scambiano di posto le posizioni delle particelle facendole girare nello stesso verso si ottiene un loop in  $X$ . Inoltre possiamo dire che questo loop non è omotopo a quello che si ottiene scambiando le particelle nel verso opposto. Riscriviamo la condizione (3.6) in una forma più generale:

$$\psi([\gamma]_n(\tilde{x}, \tilde{y})) = e^{i\theta n} \psi(\tilde{x}, \tilde{y})$$

dove questa volta  $n$  etichetta anche i loop di cui si è discusso sopra. L'azione di  $[\gamma]_n$  in  $\tilde{X}$  non fa altro che scambiare le posizioni in  $\mathbb{R}^2$  delle particelle  $n$  volte. È molto interessante notare che dopo due scambi i punti e le particelle tornano alle posizioni iniziali, ma il fattore di fase diviene del tipo  $e^{i2\theta}$  e non si annulla come ci si potrebbe aspettare. Nel paragrafo precedente abbiamo visto che il gruppo fondamentale di omotopia dello spazio che descrive un sistema di particelle identiche in  $\mathbb{R}^3$  è isomorfo a  $S_n$  e i suoi generatori sono idempotenti. Se scegliamo come generatore di  $\pi_1(X)$  la classe  $[\gamma]_1$  notiamo che:  $[\gamma]_1^2 \neq [\gamma]_1$ . Effettuare due scambi vuol dire quindi costruire un loop non omotopo a quello associato al singolo scambio. Vedremo nel prossimo paragrafo che questa caratteristica ci porterà a definire una nuova famiglia di particelle. Concludiamo dicendo che la costruzione dello spazio fisico di due particelle vincolata sulla circonferenza può essere generalizzato a un numero arbitrario di particelle adottando un metodo topologico analogo. In particolare avremo sempre:  $\pi_1((T^n - \Delta)/S_n) = \mathbb{Z}$

### 3.3.2 Anioni

Si immagini di vincolare un sistema di particelle identiche in uno spazio 2-dimensionale, ad esempio un piano infinito. Questa situazione é fisicamente realizzabile se si introduce in modo opportuno un campo magnetico sufficientemente intenso. La funzione d'onda sará del tipo:  $\psi : Q \rightarrow \mathbb{C}$ , con  $Q = (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \dots \mathbb{R}^2 - \Delta) / S_N$ . Analogamente a quanto visto in precedenza, possiamo dire sicuramente che gli elementi di  $S_N$  sono anche elementi di  $\pi_1(Q)$ . Esiste però una differenza sostanziale con gli spazi dimensione maggiore ( $\geq 3$ ). La proprietá:

$$[\gamma]_{\sigma_i} \sim [\gamma]_{\sigma_i^{-1}}$$

non viene mantenuta quando lo spazio di singola particella ha dimensione uguale a 2. Immaginiamo infatti di deformare  $[\gamma]_{\sigma_i}$  in  $[\gamma]_{\sigma_i^{-1}}$  su di un piano infinito. Non essendo disponibile la terza dimensione non é possibile trasformare in modo continuo un loop nel suo inverso, ma eventualmente solo in modo discontinuo tramite un'operazione di paritá. Quindi la proprietá di idempotenza:  $[\gamma]_{\sigma_i}^2 = [\gamma]_I$  é perduta e conseguentemente anche l'isomorfismo con il gruppo delle permutazioni. Per la descrizione dello spazio  $Q$  si necessita di un gruppo piú grande, discreto e infinito. Si tratta delle gruppo delle trecce ed é indicato come  $B_N$ . I generatori sono  $N$  e soddisfano le seguenti:

$$B_N = \{I, \sigma_1 \dots \sigma_n \mid \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}; \sigma_i \sigma_j = \sigma_j, \mid i - j \mid \geq 2\}$$

É possibile mostrare che gli elementi del gruppo possono essere generati associando una fase ai generatori. Non dovendo piú soddisfare il vincolo di idempotenza il valore di  $\theta$  é arbitrario e i generatori possono assumere una qualunque forma:  $a(\sigma_j) = e^{-i\theta}$ . Fissato  $\theta$ , la funzione d'onda di un sistema di particelle identiche con dominio nel rivestimento universale puó costituire uno stato fisico se é vincolata dalla condizione [3]:

$$\psi(\tilde{x}) = e^{i \sum (\pm \theta)} \psi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \dots \mathbb{R}^2, \forall [\gamma] \in \pi_1(X) \mid \tilde{x} = [\gamma]x$$

Se  $\theta \not\subset \{0, \pi(\text{mod } 2\pi)\}$  la descrizione statistica del sistema diviene una sorta di media tra quella di Bose e di Fermi e le particelle prendono il nome di anioni.

Essendo  $\theta$  un valore generico, avremo che lo stato finale della funzione d'onda lungo un percorso chiuso in  $X$  risentirá sempre del tipo di percorso. Questo é identificato da una qualche trecce in  $B_N$  che scambia le etichette delle particelle nel piano reale. Da un punto di vista geometrico, scambiando le etichette si costruiscono vere e proprie trecce nello spazio 2-dimensionale descritte dall'algebra dei generatori. Intuitivamente si puó pensare che l'azione dei generatori sui punti dello spazio consiste nell'arrotolare o srotolare due stringhe che collegano in senso temporale questo processo. L'azione di ogni generatore cambia l'ordine relativo tra due etichette  $i \leftrightarrow j$  che corrisponde ad una angolo relativo  $(\pi / -\pi)$  tra i punti dello spazio. Fissate  $i$  e  $j$ , ad ogni scambio si aggiunge o si sottrae il valore  $\pi$ . In particolare si aggiunge se si continuano ad intrecciare i punti mentre si toglie ad ogni srotolamento. Quindi possiamo riesprimere il fattore  $a([g])$  mettendone in chiara luce il significato ed il fatto che tiene conto della storia del percorso:

$$a([g]) = e^{-i\frac{\theta}{\pi} \sum_{i<j} \Delta\phi_{ij}}$$

dove  $\Delta\phi_{ij}$  indica la variazione dell'angolo relativo tra due etichette, ossia tra due particelle. Si noti che il valore di  $a([g])$  risentirà anche del verso del percorso, essendo un loop non equivalente al suo inverso. Questo comporta una violazione della parità per un sistema di anioni.

Abbiamo visto che il processo di intrecciare le etichette può essere studiato da un punto di vista geometrico analizzando la forma effettiva delle trecce, cioè come si sviluppano effettivamente nel tempo. Quindi possiamo generalizzare la formula precedente esprimendo le variazioni  $\Delta\phi_{ij}$  come funzioni  $\phi_{ij}(t)$  nella variabile temporale.

$$a([g]) = e^{-i\frac{\theta}{\pi} \int_0^T dt \frac{d}{dt} \sum_{i<j} \phi_{ij}(t)}$$

# Capitolo 4

## Fenomenologia

In questo capitolo conclusivo vogliamo descrivere alcuni fenomeni nei quali entra in gioco in modo piú o meno diretto la topologia ed il gruppo omotopico dello spazio delle configurazioni di sistemi fisici.

### 4.1 Effetto Aharonov-Bohm

Immaginiamo una particella libera nello spazio 3-dimensionale in cui é presente un solenoide infinito percorso da una corrente costante nel tempo. Per costruzione la particella é soggetta ad un campo magnetico  $H$  nullo. Lo spazio accessibile alla particella é simile ad un piano con un buco, ma avendo aumentato di una unitá la dimensione dello spazio, il buco deve essere nel nostro caso una retta o tubo infinito. Ricordiamo che si puó sempre ridefinire il potenziale vettore  $A$  tramite la trasformazione  $A \rightarrow A + \nabla\Omega(x)$ . Si ricordi inoltre che per costruzione, la funzione scalare  $\Omega(x)$  é esprimibile in forma integrale come funzione di un generico cammino di integrazione  $C_x$ :

$$\Omega(x) = \int_{C_x} dx A$$

Quindi, il valore di  $\Omega(x)$  in un punto generico puó essere ottenuto come integrazione del potenziale vettore lungo un qualunque percorso che termina in quel punto. Consideriamo adesso un punto  $x_i$ , in cui si effettua una prima osservazione della particella e un punto  $x_f$  di osservazione finale. Il valore della funzione  $\Omega(x)$  in  $x_f$  puó essere calcolato analizzando un qualsiasi cammino che lo collega a  $x_i$ . In particolare ci chiediamo se il percorso per giungere in  $x_f$  comporta qualche differenza se lo si compia percorrendo una curva  $\gamma_1$  o una curva  $\gamma_2$  tali che la composizione  $\gamma_1 \circ \gamma_2^{-1} = \gamma$  é una loop che racchiude il solenoide. Consideriamo l'espressione seguente:

$$\Omega(x_f) - \Omega'(x_f) = \int_{\gamma_1} dx A - \int_{\gamma_2} dx A = \oint_{\gamma} dx A =$$

$$= \int_{\Delta\gamma} d^2x (\nabla \times A) = \int_{\Delta\gamma} d^2x H = \Phi(\Delta\gamma)$$

dove  $\Phi(\Delta\gamma)$  indica il flusso del campo magnetico attraverso una qualunque superficie  $\Delta\gamma$  che ha per bordo  $\gamma$ . Poiché una qualunque di queste é attraversata dal solenoide avremo:

$$\Omega(x_f) - \Omega'(x_f) = \int_{\gamma} dx A = \Phi(\Delta\gamma) \neq 0$$

Da un punto di vista analitico notiamo che quanto scritto sta a significare che la forma differenziale "dxA" non é esatta, cioè non é esprimibile come derivata esterna di una forma differenziale e quindi se la si integra lungo un loop il valore sará diverso da zero e dipenderá in generale dal tipo di loop  $\gamma$ . Quanto detto é conseguenza diretta del lemma di Poincaré che asserisce che una forma differenziale chiusa é esatta se é definita su un dominio semplicemente connesso. La semplice connessione permetterebbe infatti di costruire una omotopia tra i cammini di integrazioni qualunque essi siano e ottenere una funzione scalare  $\Omega(x)$  ben definita in ogni punto dello spazio. Poiché nel nostro caso  $\Omega(x)$  deve essere una funzione polidroma le trasformazione di Gauge che cancella il potenziale vettore nell'equazione di Schroedinger comporta una trasformazione per la funzione d'onda che la rende polidroma:

$$\psi(x) \rightarrow \psi(x) e^{-\frac{i}{\hbar c} \Omega(x)}$$

Si noti che i valori di  $\psi(x)$  differiscono solo per l'esponente del fattore di fase per multipli interi di  $2\pi$ . Questo fatto é conseguenza dell'azione del gruppo di omotopia  $\mathbb{Z}$  sullo spazio dei numeri complessi . Per capire in cosa si esprime fisicamente la polidromia della funzione d'onda, consideriamo un fascio di particelle che si separa e si ricongiunge compiendo due archi di circonferenza attorno al solenoide (Fig. 4.1). Notiamo innanzitutto che posso scegliere arbitrariamente il fattore di fase iniziale e rendere la funzione d'onda ad un sol valore. Questa scelta é arbitraria visto che non cambia l'informazione fisica

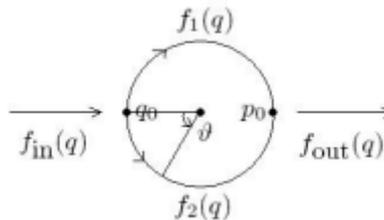


Figura 4.1: Fascio di due particelle. I punti  $q_0$  e  $p_0$  indicano ipotetiche posizioni di localizzazione della funzione d'onda

della funzione d'onda. Il fatto fondamentale é che girando in versi opposti le funzioni d'onda acquistano delle fasi opposte in segno. Quindi una volta ricongiunti la somma delle funzioni conterr  un termine di interferenza non banale.

$$f_{out}(q) = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})f_{in}(q)$$

La funzione d'onda finale sar  differente da quella iniziale e quindi se ne potr  misurare caratteristiche differenti rispetto ad un fascio che si divide e ricongiunge non girando attorno al solenoide.

Si noti che la logica é molto simile a quella che si utilizza nello studio delle funzioni polidrome nell'analisi complessa, in particolare nello studio del logaritmo complesso. Siano  $z, w \in \mathbb{C}$  e consideriamo le soluzioni dell'equazione:  $e^z = w$ . Queste definiscono la funzione logaritmo:

$$w = \rho e^{i\theta} \rightarrow \log w = \log \rho + i \arg w$$

dove  $\arg w = \theta + 2\pi n$  é definita a meno di multipli interi di  $2\pi$ . Quello che si fa per trattare questa funzione e in generale le funzioni polidrome é di scegliere una determinazione principale, ossia un valore singolo di  $n$ , ad esempio  $n = 0$ . Consideriamo un certo loop basato in  $w_0 \in \mathbb{C}$  che si avvolge  $m$  volte attorno al centro del piano complesso. La richiesta di continuit  sulla funzione logaritmo comportar  un valore finale differente dal valore iniziale di  $2m\pi$ .

## 4.2 Statistica frazionaria

Abbiamo visto che per un sistema di anioni la funzione d'onda lungo un percorso chiuso acquista una fase dipendente dal loop compiuto. Questo fatto comporta importanti conseguenze nel comportamento statistico del sistema che lo distingue fisicamente e non solo matematicamente da sistemi fermioni e bosonici. Per comprenderne le caratteristiche si necessita di descrivere lo stato del sistema in termini di integrali sui cammini di Feynmann. Consideriamo innanzitutto una singola particella posta in uno spazio semplicemente connesso. La probabilit  che dopo una misura di posizione  $x$  al tempo  $t = 0$  si effettuer  una misura in  $x'$  al tempo  $t = T$  é esprimibile nel formalismo di Feynmann come un propagatore:

$$A(x', x; T) = \int D_\gamma(t) e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma]} \quad (4.1)$$

dove  $D_\gamma$  indica una somma su tutte le possibili curve che connettono il punto iniziale al punto finale.  $S$  é invece l'azione, ossia:

$$S[\gamma] = \int_0^T dt \mathbb{L}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)); \quad \gamma(0) = x, \quad \gamma(T) = x'$$

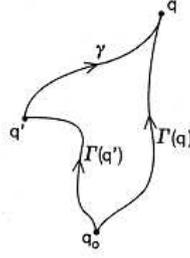


Figura 4.2: La composizione scelta chiude il percorso. La categoria del loop non dipende da  $\Gamma_i$  e  $\Gamma_f$

dove  $\mathbb{L}$  é la lagrangiana del sistema. In uno spazio semplicemente connesso non bisogna far distinzioni tra le curve da un punto di vista topologico, essendo queste tutte omotopicamente equivalenti. Possiamo quindi dire che l'ampiezza di probabilità  $A(x', x; T)$  risulta ben definita. Se  $X$  non é semplicemente connesso dobbiamo descrivere e costruire il propagatore nel rivestimento universale. Si può provare che un propagatore consistente con la condizione generale (3.1) deve essere espresso come [3]:

$$A(x_f, x_i; T) = \sum_{\alpha \in \pi_1(X)} a([\alpha]) A_\alpha(x_f, x_i; T) \quad (4.2)$$

dove  $A_\alpha(x_f, x_i; T)$  sono i propagatori ottenuti restringendosi agli integrali lungo cammini che connettono  $x_i$  e  $x_f$  appartenenti a classi di omotopia  $[\alpha] \in \pi_1(X)$  differenti. In pratica si stanno sommando propagatori definiti su una ben definita classe di omotopia, moderati da un fattore di fase  $a([\alpha])$  funzione della classe di omotopia stessa. Poiché i cammini che stiamo considerando sono in realtà aperti dobbiamo trovare un modo che li identifichi univocamente con una certa classe di loop. Per farlo basta semplicemente considerare un qualunque punto in  $x_0 \in X$  e chiudere il percorso considerando due cammini omotopi  $\Gamma_i(x)$  e  $\Gamma_f(x)$  che congiungono il punto  $x_0$  rispettivamente al punto iniziale e al punto finale del cammino preso in considerazione (Fig. 4.2). Il loop che assoceremo ad un generico cammino  $\gamma$  sarà fatto così:

$$\gamma \rightarrow \Gamma_i \circ \gamma \circ \Gamma_f^{-1}$$

A partire dalla equazione (4.2) ed inserendo l'espressione (4.1), otteniamo una forma ridotta del propagatore esprimibile come:

$$A(x_f, x_i; T) = \chi(x_f)\chi(x_i) * A_0(x_f, x_i; T); \quad \chi(x_f) = e^{-i\frac{\theta}{\pi} \sum_{ij} \int_{\Gamma(x_f)} d\phi_{ij}(t)}$$

in cui compare solo il propagatore associato alla classe di omotopia con  $\alpha = 0$ . Ci ritroviamo quindi nella situazione vista per spazi semplicemente connessi, ma con una lagrangiana che va modificata coerentemente:

$$\mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L} - \frac{\hbar\theta}{\pi} \sum_{i<j} \frac{d}{dt} \phi_{ij}(t)$$

Per comprendere il significato del termine che va aggiunto alla funzione di Lagrange ricerchiamo un sistema fisico in cui compare un termine di interazione analogo [7]. Consideriamo un sistema di  $N$  particelle interagenti nel piano reale. Immaginiamo che ad ogni particella sia associato un flusso magnetico statico di intensità  $\Phi$ . Possiamo esprimere il valore del potenziale vettore in coordinate polari  $(r, \theta)$

$$A(x) = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{z \times x}{\|x\|} = \frac{\Phi}{2\pi} \nabla \phi$$

dove nel nostro modello il campo magnetico associato alle particelle é una delta di Dirac rispetto alla direzione individuata da  $z$ . Ora, l'hamiltoniana del sistema non é altro che una somma di termini cinetici modificati dalla presenza del potenziale vettore:

$$H = \sum_i \frac{1}{2m} (p_i - \frac{e}{c} A_s(x_i))^2; \quad A_s(x_i) = \frac{\Phi}{2\pi} \sum_{j(j \neq i)} \frac{z \times (x_i - x_j)}{\|x_i - x_j\|}$$

dove notiamo che il valore del potenziale vettore su di una particella é generato dalla mutua interazione tra il flusso magnetico associato alla particella  $i$  e la  $s$ -esima sorgente. La lagrangiana di questo sistema espressa in coordinate polari contiene un termine aggiuntivo analogo a quello ottenuto ragionando in termini di propagatore.

$$\mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L} - \Phi \hbar \frac{d}{dt} \sum_{i<j} \phi_{ij}(t)$$

Mettendo a confronto le due formule possiamo dedurre che il valore di  $\theta$  é univocamente determinato dal flusso di campo associato alle particelle. Possiamo concludere che la descrizione di un sistema di anioni, che esiste in spazi di dimensione inferiore a 3, é equivalente a quella di un sistema di particelle indistinguibili nello stesso spazio, dove ad ogni particella é associato un flusso magnetico fittizio la cui intensità é in relazione con il valore della fase statistica  $\theta$ , che non si conosce a priori, ma può essere determinata facendo misure sullo spettro energetico del sistema.

# Conclusioni

Abbiamo visto come la topologia entra in gioco in modo piú o meno decisivo nella trattazione di alcune situazioni fisiche nell'ambito della meccanica quantistica. A dir il vero molto delle problematiche che abbiamo affrontato con gli strumenti fornitici dalla topologia, potevano essere trattate con metodi analitici. Nel primo capitolo ad esempio, abbiamo fatto a meno dei concetti di omotopia e di rivestimento universale, ma siamo comunque giunti a conclusioni corrette sfruttando il principio della meccanica quantistica che impone una corrispondenza biunivoca tra osservabili di un sistema e operatori autoaggiunti sullo spazio di Hilbert degli stati.

L'obiettivo della tesi era di mettere in luce il ruolo della topologia nello studio di situazioni fisiche dove lo spazio fisico delle posizioni é rappresentato da insiemi matematici non banali da un punto di vista topologico. In particolare abbiamo ottenuto con nuovi strumenti una descrizione generale, semplice e delucidante. Grazie a questo approccio si é riusciti ad interpretare in modo coerente le conseguenze fisiche dei risultati ottenuti.

É interessante soprattutto soffermarsi sulle conseguenze ottenute nell'ambito della meccanica statistica. In questo caso la topologia ha assunto un ruolo chiave ed indispensabile. Gli anioni esistono perché le proprietà topologiche degli spazi sono rispettate anche in natura. La fenomenologia che le caratterizza é molto complessa ed infatti nella tesi ci si é limitati a dare giusto qualche informazione che fa capo al modello piú semplice che oggi esiste.

Si noti che negli ultimi decenni si é scoperta sempre piú l'importanza che assume la topologia nello studio della materia; gli anioni costituiscono un esempio di fase "esotica" della materia. Altri esempi importanti sono i superconduttori o i superfluidi (condensati di Bose-Einstein). Queste fasi possono essere spiegate solo a partire da considerazioni di natura topologiche.

Proprio quest'anno i tre fisici: D.Thouless, J.M. Kosterlitz e D.Haldane hanno ricevuto il premio Nobel per una ricerca innovativa dal nome: "Transizioni di fase topologiche e fasi topologiche della materia", che dagli anni '80 porta avanti l'idea chiara e innovativa che la topologia concede alla natura l'esistenza di fasi esotiche. L'analisi era incentrata su sistemi di particelle vincolate in spazi di dimensione uguale a uno o due, che in condizioni di temperatura molto basse manifestano proprietà collettive inaspettate. Il banco di prova della teoria é stato l'effetto Hall quantistico. Sperimentalmente si osserva che la

conduttanza di un sistema di particelle vincolate in catene o su membrane bidimensionali, a temperature molto vicine lo zero assoluto, si presenta come funzione di interi, al diminuire di un campo magnetico esterno applicato. Questa caratteristica é dovuta ad un insieme di fattori quali in particolare, la dimensionalit  dello spazio e la disposizione dei dipoli magnetici interni(dove si tiene conto anche dello spin). A prescindere dalle motivazioni fisiche, possiamo interpretare il meccanismo fisico interno, riproducendolo opportunamente come spazio topologico con certe propriet  . In questa visione possiamo pensare che sia la natura dello spazio a cambiare a causa di "strappi". In particolare le discontinuit  della conduttanza sopra discusse possono essere visti come conseguenza dell'aumento del numero di buchi nello spazio. Questo aumento modifica gli invarianti topologici dello spazio, ad esempio la caratteristica di Eulero.

Grazie a queste recente scoperta e alla prospettiva aperta dalla topologia nello studio del comportamento statistico di particelle, gli studi che si conducono in questo ambito vedono allargarsi un orizzonte di future scoperte. La topologia pu  essere pensata come un nuovo masso su cui posarsi e vedere meglio la natura. Il legame tra stati della materia e topologia va consolidato e compreso ancora pi  a fondo e nelle sfaccettature che presenta.

D'altronde, anche nell'ambito della tecnica si pu  gi  cominciare a pensare a come sfruttare e "controllare" le fasi "esotiche", in modo da vedere applicazioni nell'elettronica e in futuro anche nella computazione quantistica.

# Bibliografia

- [1] C.Kosniowski, *Introduzione alla topologia algebrica*, Zanichelli, (Cambridge University Press,1988)
- [2] M.A.Naimark, A.I.Stern *Theory of group representation*, Springer-Verlag (Germany, 1982)
- [3] G.Morandi, *The role of topology in classical and Quantum Physics*, Springer-Verlag(Germany, 1992)
- [4] E.Sernesi, *Geometria 2*, Boringhieri, (Torino, 1994)
- [5] A.S.Schwarz, *Topology for Physicist*, Springer-Verlag, (Berlin Heidelberg, 1994)
- [6] A.P.Balachandran, G.Marmo, B.S.Skagerstam, A.Stern, *Classical topology and quantum states*, World Scientific, (Singapore by Loi Printing Pte. Ltd, 1991)
- [7] A.Shapere, F.Wilczek, *Geometric Phases in physics*, World Scientific, (Singapore by Utopia Press,1989)