

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea in Matematica

IL PROBLEMA  
DEI  
DUE CORPI

Tesi di Laurea in Astronomia e Fisica Matematica

Relatore:  
Chiar.ma Prof.ssa  
Francesca Pozzi

Presentata da:  
Gloria Teggi

Co-Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
Andrè Georges Martinez

Sessione Unica  
Anno Accademico 2016-2017

Alla mia famiglia

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
1.1	Problema dei due corpi . . . . .	5
1.2	Punto materiale . . . . .	5
1.3	Meccanica di un sistema di punti materiali . . . . .	6
1.4	Riduzione a un problema equivalente . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Moto in un campo centrale</b>	<b>11</b>
2.1	Moto in campo centrale . . . . .	11
2.2	Il problema di Keplero . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Il problema di Keplero nella meccanica Hamiltoniana</b>	<b>19</b>
3.1	Il problema di Keplero in due dimensioni . . . . .	19
3.2	Caso ellittico . . . . .	22
3.3	Problema di Keplero in tre dimensioni . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Sistema Solare ed Esopianeti</b>	<b>27</b>
4.1	Sistema Solare . . . . .	27
4.2	Esopianeti . . . . .	35
4.3	Condizioni di abitabilità . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Bibliografia e sitografia</b>	<b>41</b>



# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Problema dei due corpi

L'universo affascina l'uomo da sempre, ed è proprio il suo mistero che lo ha portato ad essere oggetto dei nostri studi da millenni. È oggetto delle nostre fantasie, paure che in esso si nascondano forme di vita diverse da quelle che conosciamo e speranze di trovare risposte ai nostri più grandi interrogativi. Tra tutti i temi di studio vi è il moto dei pianeti e la loro interazione reciproca, in particolare si parla di problema dei due (o più) corpi. Con questa locuzione si intende lo studio del moto di due corpi puntiformi massivi soggetti all'azione di reciproca attrazione gravitazionale descritta dalla legge di gravitazione universale di Newton. Il primo ad affrontare questo argomento fu Isaac Newton che cercò di risolvere il problema di dare la posizione e la velocità, per ogni tempo, di due particelle massive (di cui si conosce la massa) che si muovevano sotto una forza di attrazione reciproca. Il problema dei due corpi è importante per due motivi. È l'unico problema gravitazionale, a parte qualche caso particolare per il problema dei tre corpi, per cui abbiamo una soluzione generale e completa. In secondo luogo esistono molte situazioni che possono essere approssimate con il problema dei due corpi. Per esempio il moto della Luna e della Terra può essere approssimato, inizialmente, dal problema dei due corpi. Altri esempi sono dati dal moto di un pianeta intorno al Sole e dal moto di un pianeta attorno alla propria stella (è il caso degli esopianeti). Il viaggio di una sonda dalla Terra a Marte è un problema dei quattro corpi: Terra, Sole, sonda e Marte.

### 1.2 Punto materiale

Uno dei concetti fondamentali della meccanica è quello di punto materiale, cioè un corpo di cui possiamo trascurare le dimensioni se descriviamo il suo moto. Questa approssimazione è possibile o meno a seconda del problema che stiamo considerando. Ad esempio i pianeti possono essere considerati come punti materiali se ne studiamo il moto attorno al Sole, ma non se descriviamo la loro rotazione attorno ai propri assi.

Ricordiamo che un punto materiale nello spazio è descritto dal suo raggio vettore  $\mathbf{r}$  che ha coordinate cartesiane  $x, y, z$ . La derivata di  $\mathbf{r}$  rispetto al tempo è la velocità del punto materiale e la derivata seconda di  $\mathbf{r}$  rispetto al tempo è la sua accelerazione. Se consideriamo un sistema



**Figura 1.1.** Terra che sorge vista dalla Luna.  
 Il sistema Terra-Luna è un esempio di problema dei due corpi

di  $N$  punti materiali nello spazio, dobbiamo descrivere le coordinate  $x,y,z$  per  $N$  raggi vettori, quindi dobbiamo gestire  $3N$  coordinate.

### 1.3 Meccanica di un sistema di punti materiali

Le forze che possono agire su un sistema di punti materiali si possono distinguere in forze esterne, dovute all'azione di fonti esterne al sistema e forze interne, dovute all'azione di tutti i punti su un punto scelto  $i$ -esimo. L'equazione del moto (seconda legge di Newton), con  $p$  momento lineare, ( $p = mv$  e  $F = \frac{dp}{dt}$ ) per il punto  $i$ -esimo può essere scritta come:

$$\sum_j F_{ji} + F_i = \dot{p}_i \quad (1.1)$$

in cui il primo addendo rappresenta le forze interne sul punto  $i$ -esimo dovute al punto materiale  $j$ -esimo e il secondo le forze esterne. Ricordando che:

$$F = m \frac{dv}{dt} = ma = m \frac{d^2 r}{dt^2} \quad (1.2)$$

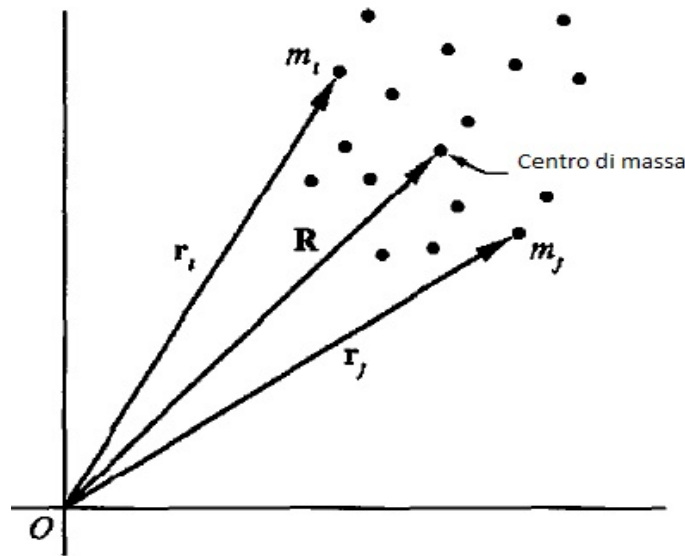
la formula precedente può essere scritta:

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i r_i = \sum_i F_i + \sum_{ij} F_{ji} \quad (1.3)$$

notiamo che nell'ultimo addendo inseriamo la condizione  $i < j$  altrimenti per il principio di azione e reazione si avrebbe 0. Per semplificare il primo membro possiamo introdurre un vettore  $R$  che sia la media dei raggi vettori dei punti materiali, pesata a seconda delle masse:

$$R = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i r_i}{M_{tot}} \quad (1.4)$$

Il vettore  $R$  definisce un punto che è detto centro di massa o più semplicemente centro di gravità. (Figura 1.2)



*Figura 1.2. Centro di massa per un sistema di  $N$  punti materiali*

## 1.4 Riduzione a un problema equivalente

Consideriamo un sistema di  $N$  punti  $P_1, \dots, P_N$  appartenenti ad  $\mathbb{R}^3$ , di massa  $m_1, \dots, m_N$  ed eventualmente vincolati. Siano  $q_1, \dots, q_d$  dei parametri lagrangiani (parametri per la descrizione del moto, con  $d$  gradi di libertà cioè il numero di variabili indipendenti necessarie per determinare univocamente la posizione del punto materiale tramite un'applicazione  $q \mapsto (P_1(q), \dots, P_N(q))$ . Un moto è descritto da  $\mathbb{R} \ni t \mapsto q(t)$  e l'energia cinetica del sistema è descritta dalla formula:

$$T = \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{2} \|\dot{P}_k\|^2 \quad (1.5)$$

con

$$\dot{P}_k = \frac{d}{dt} (P_k(q(t))) = dP_k(q(t)) \dot{q}(t) \quad (1.6)$$

e  $V = V(P_1(q), \dots, P_N(q))$  indica il potenziale del sistema.

Le forze in gioco sono uguali a

$$F = -\nabla V(P_1, \dots, P_N) \quad (1.7)$$

Definiamo come Lagrangiana l'unica funzione

$$L : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.8)$$

tale che per ogni moto descritto da  $\mathbb{R} \ni t \mapsto q(t)$  si ha:

$$T - V = L(q, \dot{q}) \quad (1.9)$$

Dato  $C$  il percorso sul quale evolve il sistema, tra i tempi  $t_1$  e  $t_2$ , definiamo l'azione relativa al moto con:

$$I(q) = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t)) dt \quad (1.10)$$

Un moto fisico rende sempre stazionaria l'azione. (Principio di Hamilton).

Ricordiamo che un moto è detto estremante dell'azione o che rende stazionaria l'azione se e solo se  $\forall t_1 < t_2$  e per ogni variazione  $\tilde{q}$  di  $q$ , con  $\tilde{q} = \tilde{q}(t)$  e

$$\tilde{q}(t_1) = q(t_1)$$

$$\tilde{q}(t_2) = q(t_2)$$

tra  $t_1$  e  $t_2$  si ha:

$$I(q) - I(\tilde{q}) = O(\aleph(\tilde{q} - q)^2) \quad (1.11)$$

Dove  $\aleph$  è la norma definita da:

$$\aleph(q) = \sup_{[t_1, t_2]} \left( \sqrt{\|q\|^2 + \|\dot{q}\|^2} \right) \quad (1.12)$$

Si può dimostrare che un moto rende stazionaria l'azione se e solo se è soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{q}} L(q(t), \dot{q}(t), t)) = \nabla_q L(q(t), \dot{q}(t), t) \quad (1.13)$$

equivalenti a :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} (q(t), \dot{q}(t), t) \right) = \frac{\partial L}{\partial q_k} (q(t), \dot{q}(t), t) \quad (1.14)$$

$$\forall k = 1, \dots, d$$

Nella nostra trattazione considereremo sistemi descritti da Lagrangiane indipendenti dal tempo, un tale sistema è detto autonomo.

Per un sistema con  $d$  gradi di libertà la Lagrangiana diventa

$$L(q, \dot{q}) \quad (1.15)$$



dove

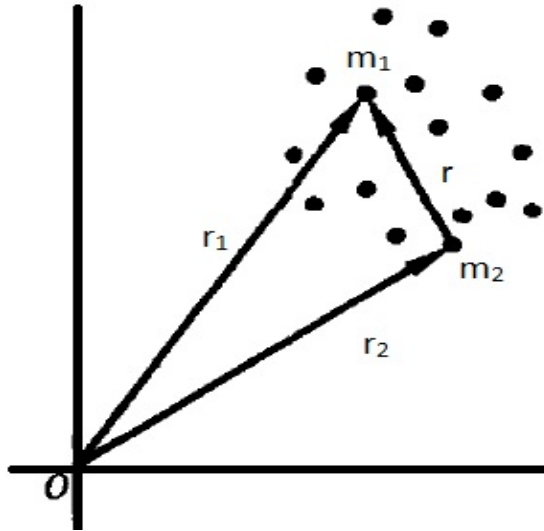
$$q = (q_1, q_2, \dots, q_d) \quad (1.16)$$

sono coordinate.

Una coordinata  $q_k$  è detta ciclica se:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (1.17)$$

Consideriamo ora due corpi puntiformi di massa  $m_1$  e  $m_2$  con raggio vettore  $r_1, r_2$  rispetto a un'origine fissata  $O$ , in un sistema in cui le uniche forze in gioco siano dovute all'interazione gravitazionale  $V$ . Il vettore  $r = r_2 - r_1$  denota la posizione relativa di  $m_2$  rispetto a  $m_1$



**Figura 1.3.** Due corpi puntiformi

Possiamo considerare  $V$ , potenziale gravitazionale, come una qualunque funzione del vettore tra le due particelle  $r_2 - r_1$ . Un tale sistema ha 6 gradi di libertà: le tre componenti del raggio vettore dal centro di massa e le tre componenti del vettore differenza  $r = r_2 - r_1$ . La lagrangiana del sistema sarà allora data dalla formula

$$L = T(\dot{R}, \dot{r}) - V(r, \dot{r}, \dots). \quad (1.18)$$

Nel nostro caso l'energia potenziale dipende solo dalla distanza tra i due corpi. L'energia cinetica può essere scritta come somma dell'energia cinetica del moto del centro di massa più l'energia cinetica delle particelle rispetto al raggio vettore riferito al centro di massa:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{R}^2 + T' \quad (1.19)$$

$$T' = \frac{1}{2}(m_1)\dot{r}_1'^2 + \frac{1}{2}(m_2)\dot{r}_2'^2 \quad (1.20)$$

e valgono le seguenti relazioni:

$$r'_1 = \frac{-m_2}{m_1 + m_2} r \quad (1.21)$$

$$r'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r \quad (1.22)$$

Esprimendo tutto in termini di  $r$ :

$$T' = \frac{1}{2} m_1 \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{r} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left( - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{r} \right)^2 \quad (1.23)$$

$$T' = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{r}^2 \quad (1.24)$$

$$T' = \frac{1}{2} \dot{r}^2 \left( \frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \right) \quad (1.25)$$

$$T' = \frac{1}{2} \dot{r}^2 \left( \frac{m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \right) \quad (1.26)$$

da cui semplificando

$$T' = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{r}^2 \quad (1.27)$$

la Lagrangiana totale allora diventa

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{R}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{r}^2 - V(r, \dot{r}, \dots). \quad (1.28)$$

Consideriamo una coordinata e una traslazione di tutto il sistema materiale generale in una certa direzione. La coordinata  $q$  non apparirà nell'espressione dell'energia cinetica perchè la velocità ( $\dot{q}$ ) non è influenzata da un cambiamento di coordinate e quindi la derivata parziale di  $T$  rispetto a  $q$  è 0. Ricordando che stiamo considerando sistemi in cui l'energia potenziale dipende solo dalla distanza dei punti materiali, abbiamo che  $q$  è una coordinata ciclica. La precedente proposizione può essere riferita ad  $R$ : il centro di massa, questo implica che il centro di massa è una coordinata ciclica. Il centro di massa è fermo oppure si muove uniformemente quindi la sua derivata è nulla. A maggior ragione la Lagrangiana che descrive un sistema di due corpi risulta essere:

$$L = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{r}^2 - V(r, \dot{r}, \dots). \quad (1.29)$$

in cui

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2}{M_{tot}} \quad (1.30)$$

viene detta massa ridotta e  $M_{tot}$  la massa totale.

In questo modo abbiamo ridotto il problema dei due corpi riferito al loro centro di massa al moto equivalente di un solo punto materiale in un campo centrale.

## Capitolo 2

# Moto in un campo centrale

### 2.1 Moto in campo centrale

Riducendo il problema dei due corpi a quello del moto di un singolo corpo, dobbiamo affrontare il problema del moto di un punto materiale in un campo in cui il potenziale dipende solo dalla distanza  $r$  da un punto fissato, cioè in un campo centrale.

La forza agente sul punto materiale è data da

$$F = -\nabla V \in \mathbb{R}^3 \quad (2.1)$$

Il moto di un punto materiale in un campo centrale si estende su un piano.

Usando le coordinate polari  $r$  e  $\phi$  nel piano in cui il punto materiale si muove otteniamo:

$$x = r \cos \phi \quad (2.2)$$

$$y = r \sin \phi \quad (2.3)$$

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi \quad (2.4)$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi \quad (2.5)$$

L'energia cinetica  $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$  quindi sostituendo le precedenti diventa:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 \cos^2 \phi + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \phi - 2\dot{r}r \cos \phi \dot{\phi} \sin \phi + \dot{r}^2 \sin^2 \phi + r^2 \dot{\phi}^2 \cos^2 \phi + 2\dot{r}r \sin \phi \dot{\phi} \cos \phi) \quad (2.6)$$

da cui semplificando:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) \quad (2.7)$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - V(r) \quad (2.8)$$

in cui  $\phi$  è una coordinata ciclica perchè il sistema è invariante per rotazioni e la derivata di  $\phi$  corrisponde al momento angolare del sistema. Infatti

$$M_\phi = mr^2\dot{\phi} \quad (2.9)$$

Questa legge ha un'interpretazione geometrica interessante per quanto riguarda il moto di un punto materiale in un campo centrale. Essendo  $\phi$  ciclica,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\dot{\phi}\right) = 0 \quad (2.10)$$

L'espressione

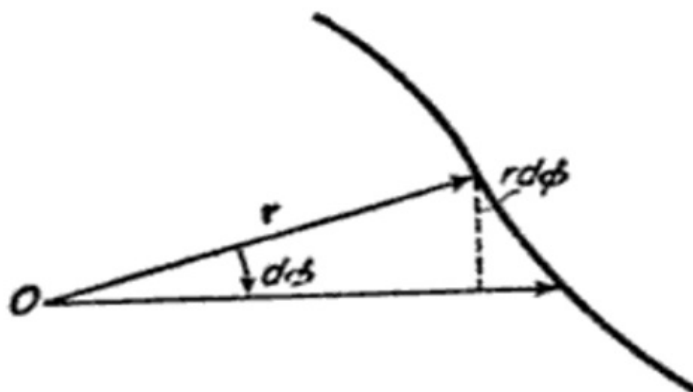
$$\frac{1}{2}rrd\phi \quad (2.11)$$

è l'area di un settore delimitato da due raggi vettori e da una parte di tragitto del punto materiale. Chiamiamo quest'area  $dA$ .

$$dA = \frac{1}{2}rrd\phi \quad (2.12)$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\phi}{dt} \quad (2.13)$$

In particolare stiamo proprio considerando l'area spazzata dal raggio vettore per unità di tempo. Dire che la velocità con cui si spazza l'area è costante equivale a dire che il momento angolare si conserva, cioè abbiamo appena ricordato la seconda legge di Keplero. (Figura 2.1)



**Figura 2.1.** Area spazzata dal raggio vettore

La soluzione del problema del moto di un punto materiale in un campo centrale è però più facilmente risolvibile utilizzando la legge di conservazione dell'energia e del momento angolare  $M$ , senza scrivere l'equazione del moto. Esprimendo  $\phi$  in termini di  $M$  e sostituendo nell'espressione dell'energia otteniamo:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{M^2}{r^2m} + V(r) \quad (2.14)$$

da cui

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\left\{ \frac{2E - \frac{M^2}{mr^2} - 2V(r)}{m} \right\}} \quad (2.15)$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\left\{ \frac{2}{m} [E - V(r)] - \frac{M^2}{m^2r^2} \right\}} \quad (2.16)$$

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\left\{ \frac{2}{m} [E - V(r)] - \frac{M^2}{m^2r^2} \right\}}} \quad (2.17)$$

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\left\{ \frac{2}{m} [E - V(r)] - \frac{M^2}{m^2r^2} \right\}}} + \text{costante} \quad (2.18)$$

Considerando  $M = mr^2\dot{\phi}$ ,  $d\phi = \frac{Mdt}{mr^2}$ , sostituendo dt ricavato dalle precedenti

$$\phi = \int \frac{M}{mr^2} \frac{dr}{\sqrt{2m [E - V(r)] - \frac{M^2}{m^2r^2}}} + \text{costante} \quad (2.19)$$

$$\phi = \int \frac{M \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - V(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} + \text{costante} \quad (2.20)$$

Ottenuta portando dentro la radice m.

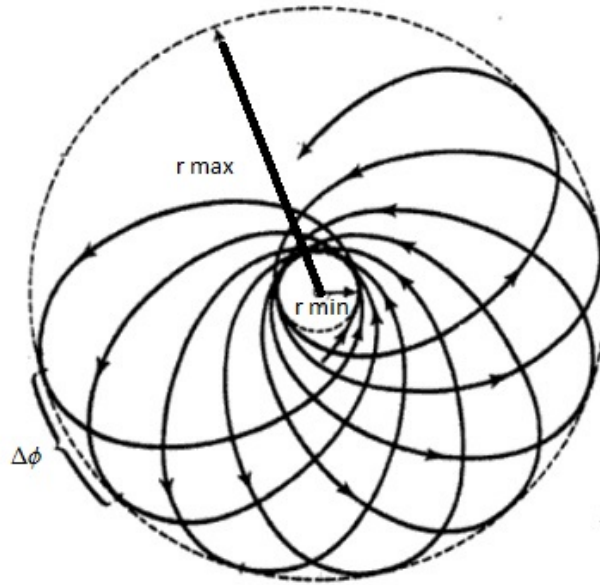
Le formule 2.18 e 2.20 forniscono la soluzione generale del problema.

Se l'intervallo in cui r può variare ha per limite solo la condizione  $r \geq r_{min}$  il moto è infinito: il punto materiale viene e torna all'infinito. Se invece r varia tra un  $r_{min}$  e un  $r_{max}$  il moto è finito e il tragitto si estende tra due sfere una di raggio uguale a  $r_{min}$  e l'altra di raggio uguale a  $r_{max}$ . In generale questo non significa che il percorso sia una curva chiusa. L'angolo spazzato in questo caso è dato dalla formula:

$$\Delta\phi = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{M \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{2m [E - V(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} + \text{costante} \quad (2.21)$$

Il percorso è chiuso se  $\Delta\phi$  è una frazione di  $2\pi$ , cioè  $\frac{2\pi m}{n}$ , dopo n periodi il raggio vettore ha compiuto m rivoluzioni complete e torna alla posizione iniziale.

Ma questo è solo un caso particolare. Ci sono solo due casi di moti finiti per i quali si ottiene un percorso chiuso: il caso in cui l'energia potenziale varia come  $\frac{1}{r}$  e il caso in cui l'energia potenziale varia come  $r^2$ . Nei prossimi capitoli studieremo uno di questi casi particolari.



*Figura 2.2. Moto tra un raggio minimo e uno massimo*

## 2.2 Il problema di Keplero

Lo studio del moto di un punto materiale di massa  $\mu$  in un campo centrale con potenziale di energia  $V(r) \propto \frac{1}{r}$  (la riduzione del problema dei due corpi) è conosciuto come il problema di Keplero. Una classe importante di campi centrali è formata da quelli nei quali l'energia potenziale è inversamente proporzionale a  $r$ , e la forza inversamente proporzionale a  $r^2$ . Ne sono un'esempio il campo gravitazionale di Newton e l'interazione elettrostatica di Coulomb. Nei capitoli precedenti abbiamo definito l'energia di un punto materiale di massa  $m$  come:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{M^2}{r^2m} + V(r) \quad (2.22)$$

la quantità

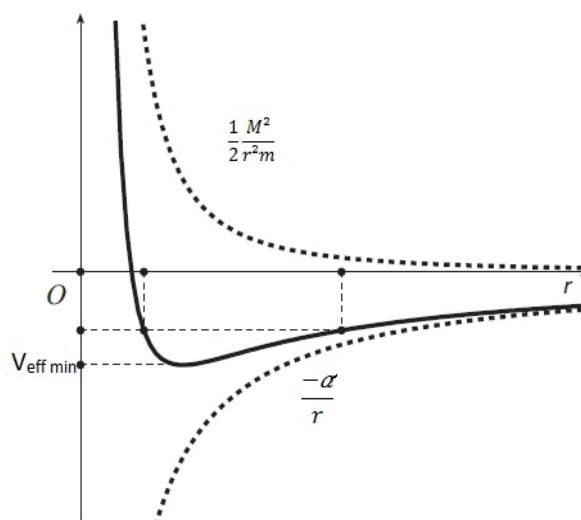
$$V(r) + \frac{M^2}{2mr^2} \quad (2.23)$$

prende il nome di potenziale efficace.

Consideriamo il caso attrattivo in cui l'energia potenziale è:  $V = -\frac{\alpha}{r}$  con  $\alpha$  costante positiva. Il potenziale effettivo è

$$V_{eff} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} = V(r) + \frac{M^2}{2mr^2} \quad (2.24)$$

Per  $r \rightarrow 0$ , il potenziale effettivo tende a  $+\infty$  e per  $r \rightarrow +\infty$  il potenziale effettivo tende a 0. Per  $r = \frac{M^2}{m\alpha}$  si ha il valore minimo. Infatti in corrispondenza del valore minimo la derivata



**Figura 2.3.** Potenziale effettivo

prima del potenziale efficace si annulla. Ricaviamo allora il punto di minimo del grafico:

$$\frac{dV_{eff}}{dr} = \frac{\alpha}{r^2} - \frac{M^2}{mr^3} = 0 \quad (2.25)$$

Ricavando r:

$$r = \frac{M^2}{\alpha m} \quad (2.26)$$

e sostituendolo nell'equazione del valore effettivo otteniamo:

$$V_{effmin} = -\frac{m\alpha^2}{2M^2}. \quad (2.27)$$

Focalizziamo l'attenzione sul caso gravitazionale. Il potenziale gravitazionale è dato dalle formule precedenti. Dunque m è la massa ridotta e  $\alpha = G(m_1 + m_2)$ . Il moto è possibile solo se  $E > V_{eff}$ . Nel caso in cui E sia uguale a  $V_{effmin}$  l'orbita è circolare.

Consideriamo le formule del campo centrale, sappiamo che:

$$\phi = \int \frac{M \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{2m [E - V(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} + costante \quad (2.28)$$

e sostituendo  $V = -\frac{\alpha}{r}$

$$\phi = \int \frac{M \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{2m [E + \frac{\alpha}{r}] - \frac{M^2}{r^2}}} + costante \quad (2.29)$$

Prendiamo l'origine di  $\phi$  in modo che la costante sia zero.

$$d\phi = \frac{M \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{2m \left[ E + \frac{\alpha}{r} \right] - \frac{M^2}{r^2}}} \quad (2.30)$$

integrando otteniamo:

$$\phi = \arccos \frac{\left(\frac{M}{r}\right) - \left(\frac{m\alpha}{M}\right)}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}}} + \phi_0 = \arccos \frac{\left(\frac{M^2}{rm\alpha}\right) - 1}{\sqrt{1 + \frac{2EM^2}{\alpha^2 m}}} + \phi_0 \quad (2.31)$$

Ponendo

$$p = \frac{M^2}{m\alpha} \quad (2.32)$$

e

$$e = \sqrt{\left[ 1 + \left( \frac{2EM^2}{m\alpha^2} \right) \right]} \quad (2.33)$$

otteniamo l'equazione della traiettoria del punto materiale:

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \phi \quad (2.34)$$

Questa è l'equazione di una sezione conica con un fuoco nell'origine,  $2p$  è chiamato lato retto dell'orbita ed  $e$  è l'eccentricità. Abbiamo scelto  $\phi$  in modo che il punto in cui  $\phi \equiv 0$  sia il punto più vicino all'origine. Nell'equivalente problema dei due corpi, l'orbita di ogni punto materiale è una sezione conica con un fuoco nel centro di massa dei due punti. Se  $E < 0$  ed  $e < 1$  l'orbita è un'ellisse e il moto è finito. (Figura 2.4) Al contrario se  $E > 0$  il moto è infinito.

Concordemente alle formule di geometria analitica sull'ellisse, chiamando  $a$  il semiasse maggiore e  $b$  il semiasse minore:

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \quad (2.35)$$

$$ap = b^2 \quad (2.36)$$

e sostituendo le espressioni di  $e$  e  $p$  si ha:

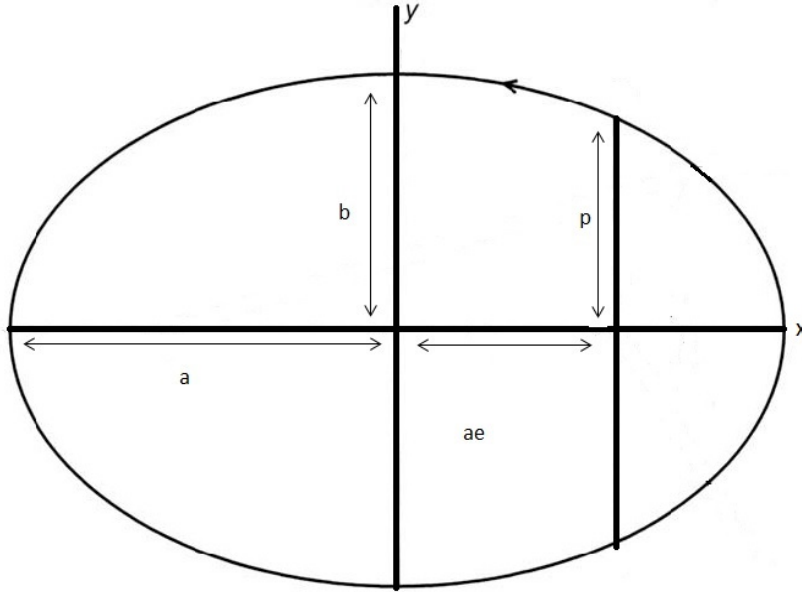
$$a = \frac{p}{(1 - e^2)} = \frac{\alpha}{2|E|} \quad (2.37)$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{(1 - e^2)}} = \frac{M}{\sqrt{(2m|E|)}} \quad (2.38)$$

L'asse maggiore dell'ellisse dipende dall'energia del punto materiale e non dal momento angolare. La distanza minima e quella massima dal fuoco dell'ellisse sono date da:

$$r_{min} = \frac{p}{(1 + e)} = a(1 - e) \quad (2.39)$$





**Figura 2.4.** *Ellisse*

$$r_{max} = \frac{p}{(1 - e)} = a(1 + e) \quad (2.40)$$

Se  $e=0$  l'ellisse diventa una circonferenza.

Il periodo di rivoluzione su un'orbita ellittica si ricava usando la legge di conservazione del momento angolare

$$M = mr^2\dot{\phi} = 2m\frac{dA}{dt} = cost \quad (2.41)$$

integrando  $M = 2m\dot{A}$  tra 0 e  $T_o$ , abbiamo  $2mA = T_oM$  in cui A indica l'area dell'orbita. Per un'ellisse  $A=\pi ab$  e prendiamo il periodo dell'orbita ellittica  $T_o$

$$T_oM = 2mA = 2mab\pi \quad (2.42)$$

$$T_o = \frac{2m\pi ab}{M} \quad (2.43)$$

$$= 2\pi \frac{\alpha m}{2|E|M} \frac{M}{\sqrt{2m|E|}} \quad (2.44)$$

$$= \pi\alpha m \sqrt{\frac{1}{2m|E|^3}} \quad (2.45)$$

$$= \pi\alpha\sqrt{\frac{m^2}{2m|E|^3}} \quad (2.46)$$

$$T_o = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}} \quad (2.47)$$

Ricordando l'equazione 2.37:

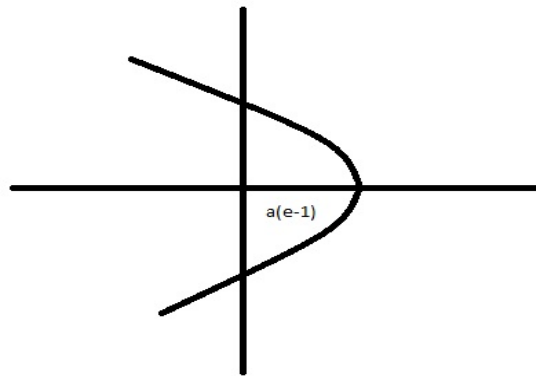
$$|E| = \frac{\alpha}{2a} \quad (2.48)$$

$$T_o = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{\frac{2\alpha^3}{2^3 a^3}}} \quad (2.49)$$

$$T_o = \pi\alpha\sqrt{\frac{4ma^3}{\alpha^3}} \quad (2.50)$$

$$T_o = \pi a^{\frac{3}{2}} 2\sqrt{\frac{m}{\alpha}} \quad (2.51)$$

La formula appena scritta è la terza legge di Keplero. Il periodo dipende dall'energia del punto materiale. Se  $E \geq 0$  il moto è infinito. Se  $E > 0$  ed  $e > 1$  il punto materiale disegna un'iperbole.



**Figura 2.5.** Iperbole

Se  $E = 0$  e  $e > 1$  il punto disegna una parabola.

## Capitolo 3

# Il problema di Keplero nella meccanica Hamiltoniana

### 3.1 Il problema di Keplero in due dimensioni

Abbiamo visto che un sistema può essere descritto da una Lagrangiana:

$$L = L(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, t) = T - V \quad (3.1)$$

Data una Lagrangiana per un moto è possibile descrivere lo stesso moto con un altro tipo di equazioni. È il caso della meccanica Hamiltoniana.

$$H = H(q, p, t) = \sup_{\dot{q} \in \mathbb{R}^d} (\langle p, \dot{q} \rangle - L(q, \dot{q}, t)) \quad (3.2)$$

in cui

$$p(t) = \nabla_{\dot{q}} L \quad (3.3)$$

viene detto impulso generalizzato.

Vengono definite le equazioni canoniche del moto e si può dimostrare che  $q(t)$  è soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange se e solo se la coppia  $(q(t), p(t))$  è soluzione delle due seguenti equazioni

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \quad (3.5)$$

Applichiamo la meccanica Hamiltoniana al problema dei due corpi. Iniziamo considerando un caso semplice: un problema planare con  $\phi$  ed  $r$  coordinate polari nel piano dell'orbita. L'energia cinetica di un pianeta di massa  $m$  rispetto al Sole in coordinate polari è

$$T = \frac{1}{2}m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) \quad (3.6)$$

e la sua energia potenziale è:

$$V = \frac{\beta m}{r} \quad (3.7)$$

in cui

$$\beta = G(m + M_{\odot}) \quad (3.8)$$

La Lagrangiana è data da:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - V(r) \quad (3.9)$$

$$L = \frac{1}{2m}m^2(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - V(r) \quad (3.10)$$

$$L = \frac{1}{2m}(m^2\dot{r}^2 + m^2r^2\dot{\phi}^2) - V(r) \quad (3.11)$$

$$L = \frac{1}{2m}\left(m^2\dot{r}^2 + \frac{m^2r^4\dot{\phi}^2}{r^2}\right) - V(r) \quad (3.12)$$

I nostri parametri sono  $q = (r, \phi)$  e  $p = (p_r, p_{\phi})$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad (3.13)$$

$$p_{\phi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} \quad (3.14)$$

da cui l'Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_{\phi}^2}{r^2}\right) - \frac{\beta m}{r} \quad (3.15)$$

in cui  $\phi$  è coordinata cilclica. Proviamo a cercare un sistema di coordinate per il quale l'Hamiltoniana sia zero. Prendiamo come funzione generatrice di tale trasformazione  $S = S(r, \phi, P_1, P_2, t)$  in cui  $P_1$  e  $P_2$  dovranno essere costanti. Ricordando le equazioni di Hamilton Jacobi:

$$H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (3.16)$$

L'equazione di Hamilton-Jacobi sarà:

$$H\left(r, \frac{\partial S}{\partial r}, \frac{\partial S}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (3.17)$$

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2\right) - \frac{\beta m}{r} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (3.18)$$

Per risolvere un tale tipo di equazione differenziale occorre utilizzare il metodo di separazione delle variabili. Assumiamo che la soluzione possa essere espressa come:

$$S(r, \phi, t) = S_r(r) + S_\phi(\phi) + S_t(t) \quad (3.19)$$

Abbiamo

$$\frac{1}{2m} \left( \left( \frac{dS_r}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{dS_\phi}{d\phi} \right)^2 \right) - \frac{\beta m}{r} = -\frac{dS_t}{dt} \quad (3.20)$$

è verificata solo se entrambi i membri hanno lo stesso valore costante che denotiamo con  $\alpha_1$ . Ora, l'equazione originale può essere divisa in due più semplici:

$$\frac{dS_t}{dt} = \alpha_1 \quad (3.21)$$

$$\frac{1}{2m} \left( \left( \frac{dS_r}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{dS_\phi}{d\phi} \right)^2 \right) - \frac{\beta m}{r} = \alpha_1 \quad (3.22)$$

Solo il termine  $\frac{dS_\phi}{d\phi}$  dipende da  $\phi$  e può essere egualato ad un'altra costante  $\alpha_2$ . Abbiamo così tre equazioni differenziali per determinare S:

$$\frac{dS_t}{dt} = -\alpha_1 \quad (3.23)$$

$$\frac{dS_\phi}{d\phi} = \alpha_2 \quad (3.24)$$

$$\frac{dS_r}{dr} = \sqrt{2m \left( \alpha_1 + \frac{\beta m}{r} \right) - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} \quad (3.25)$$

La funzione generatrice è:

$$S = -\alpha_1 t + \alpha_2 \phi + \int^r dr \sqrt{2m \left( \alpha_1 + \frac{\beta m}{r} \right) - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} \quad (3.26)$$

Abbiamo bisogno solo della derivata dell'ultima formula e non dobbiamo valutare l'integrale. Se prendiamo

$$P_1 = \alpha_1 \quad (3.27)$$

$$P_2 = \alpha_2 \quad (3.28)$$

$$Q_1 = \frac{\partial S}{\partial P_1} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} \quad (3.29)$$

$$Q_2 = \frac{\partial S}{\partial P_2} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} \quad (3.30)$$

Ora dobbiamo determinare  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . La nuova Hamiltoniana è:

$$H + \frac{\partial S}{\partial P_t} = H - \alpha_1 = 0 \quad (3.31)$$

$$\alpha_1 = H = -\frac{\beta m}{2a} \quad (3.32)$$

$\alpha_1$  è l'energia totale. Usando

$$\frac{\partial S}{\partial \phi} = p_\phi \quad (3.33)$$

Ma avevamo visto che  $\alpha_2 = p_\phi$  dunque:

$$\alpha_2 = p_\phi = mr^2\dot{\phi} = m\sqrt{a\beta(1-e^2)} \quad (3.34)$$

che è il modulo del momento angolare in cui abbiamo usato la definizione di eccentricità.

## 3.2 Caso ellittico

Restano da determinare le coordinate  $Q_1$   $Q_2$ :

$$Q_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = -t + \int \underbrace{\frac{m dr}{\sqrt{2m\left(\alpha_1 + \frac{\beta m}{r}\right) - \left(\frac{\alpha_2}{r}\right)^2}}}_{I_1} \quad (3.35)$$

$$Q_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \phi - \frac{\alpha_2}{m} \int \underbrace{\frac{m dr}{r^2 \sqrt{2m\left(\alpha_1 + \frac{\beta m}{r}\right) - \left(\frac{\alpha_2}{r}\right)^2}}}_{I_2} \quad (3.36)$$

Valutiamo meglio  $I_1$  e  $I_2$  e ad  $\alpha_1$   $\alpha_2$  andiamo a sostituire i valori precedentemente trovati:

$$I_1 = \int \frac{m dr}{\sqrt{2m\left(-\frac{\beta m}{2a} + \frac{m\beta}{r}\right) - m^2 a \beta \frac{(1-e^2)}{r^2}}} \quad (3.37)$$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int \frac{r dr}{\sqrt{-\frac{r^2}{a} + 2r - a(1-e^2)}} \quad (3.38)$$

$$I_2 = \int \frac{m dr}{r^2 \sqrt{2m\left(\frac{-m\beta}{2\alpha_2} + \frac{\beta m}{r} - \frac{m^2 a \beta (1-e^2)}{r^2}\right)}} \quad (3.39)$$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int \frac{dr}{r \sqrt{-\frac{r^2}{a} + 2r - a(1-e^2)}} \quad (3.40)$$

Integrando  $I_1$

$$I_1 = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\beta}(E_a - e \sin E_a)} \quad (3.41)$$

in cui  $E_a$  è anomalia eccentrica tale che

$$Q_1 = -t + I_1 = -t + \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}(E_a - e \sin E_a)} = \text{const} \quad (3.42)$$

il valore della costante si può ottenere considerando  $E_a = 0$  in  $t = \tau$  così  $Q_1 = -\tau$  e abbiamo ottenuto l'equazione di Keplero.

Integrando  $I_2$ :

$$I_2 = \frac{f}{\sqrt{a\beta(1-e^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a\beta(1-e^2)}} \arccos\left(\frac{\cos E_a - e}{1 - e \cos E_a}\right) \quad (3.43)$$

in cui  $f$  è l'anomalia vera,

$$Q_2 = \phi - \frac{\alpha_2}{m} I_2 = \phi - \arccos\left(\frac{\cos E_a - e}{1 - e \cos E_a}\right) \quad (3.44)$$

in cui  $\alpha_2 = m\sqrt{a\beta(1-e^2)}$ , il valore della costante si può prendere come  $E_a = 0$   $\phi = \omega$  e  $Q_2 = \omega$ . Usando  $r = a(1 - e \cos E_a)$  l'ultima formula può essere scritta come:

$$\frac{a(1-e^2)}{r} = 1 + e \cos(\phi - \omega) \quad (3.45)$$

che è l'equazione dell'ellisse in coordinate polari  $(r, \phi)$ .

### 3.3 Problema di Keplero in tre dimensioni

Consideriamo il caso in cui il piano di riferimento non coincida con il piano dell'orbita, siamo dunque in un sistema a tre dimensioni. Il moto del punto materiale è comunque piano ma viene descritto ora in tre dimensioni.

L'energia cinetica di un pianeta in coordinate sferiche è:

$$L = \frac{1}{2}m \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \cos^2 \vartheta \dot{\phi}^2 \right) \quad (3.46)$$

mentre l'energia potenziale è:

$$V = -\frac{\beta m}{r} \quad (3.47)$$

La Lagrangiana in coordinate sferiche è allora:

$$L = \frac{1}{2}m \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \cos^2 \vartheta \dot{\phi}^2 \right) + \frac{m\beta}{r} \quad (3.48)$$

da cui

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad (3.49)$$

$$p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = mr^2\dot{\vartheta} \quad (3.50)$$

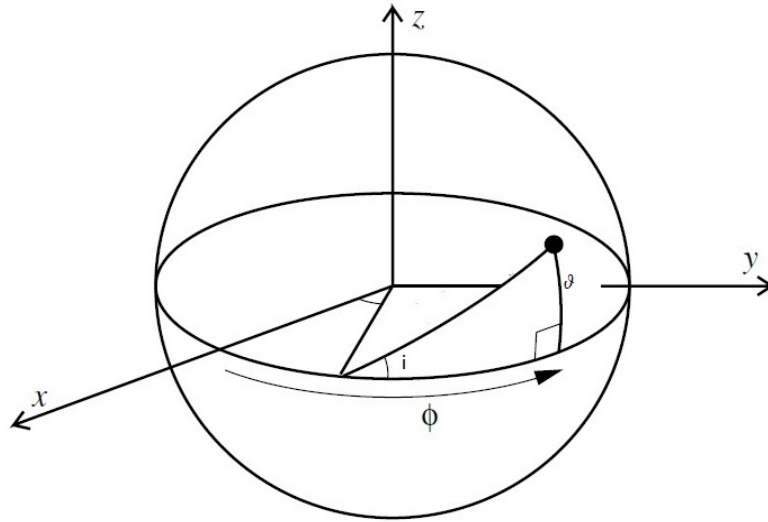
$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \cos^2 \vartheta \dot{\phi} \quad (3.51)$$

L'Hamiltoniana del problema di Keplero in coordinate sferiche è:

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right) - \frac{m\beta}{r} \quad (3.52)$$

Quindi l'equazione di Hamilton-Jacobi è:

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \vartheta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \vartheta} \left( \frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 \right] - \frac{\beta m}{r} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (3.53)$$



**Figura 3.1.** Quantità della soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi in tre dimensioni

La funzione generatrice è nella forma  $S = S(q, P, t) = S(r, \vartheta, \phi, P_1, P_2, P_3, t)$  con  $P_i = \alpha_i = \text{const.}$  Usando il metodo di separazione delle variabili, abbiamo la soluzione nella forma:

$$S(r, \vartheta, \phi, t) = S_r(r) + S_\vartheta(\vartheta) + S_\phi(\phi) + S_t(t) \quad (3.54)$$

Abbiamo:

$$\frac{dS_t}{dt} = -\alpha_1 \quad (3.55)$$

$$\frac{dS_\phi}{d\phi} = \alpha_2 \quad (3.56)$$



$$\left(\frac{dS_\vartheta}{dr}\right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{\cos^2 \vartheta} = \alpha_3^2 \quad (3.57)$$

$$\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 + \frac{\alpha_3^2}{r^2} = 2m \left(\alpha_1 + \frac{\beta m}{r}\right) \quad (3.58)$$

Come prima

$$\alpha_1 = -\frac{m\beta}{2a} \quad (3.59)$$

$$\alpha_2 = \frac{\partial S}{\partial \phi} = mr^2 \cos^2 \vartheta \dot{\phi} \quad (3.60)$$

La proiezione del raggio vettore sul piano xy è  $r \cos \vartheta$  e la proiezione della velocità  $\dot{r}$  del raggio vettore sul piano xy è  $r \cos \vartheta \dot{\phi}$ ;  $\alpha_2$  è il prodotto vettoriale tra  $r$  e  $\dot{r}$  sul piano xy. Dato che la componente  $\dot{r}$  è perpendicolare a  $r$ , la componente z del momento angolare è:

$$\alpha_2 = mr^2 \cos^2 \vartheta \dot{\phi} = mr \cos \vartheta r \cos \vartheta \dot{\phi} \quad (3.61)$$

si può scrivere anche come

$$M_z = m\sqrt{a\beta(1-e^2)} \cos i \quad (3.62)$$

Resta la terza costante:

$$\alpha_3 = \sqrt{\left(\frac{dS_\vartheta}{dr}\right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{\cos^2 \vartheta}} \quad (3.63)$$

$$\alpha_3 = \sqrt{p_\vartheta^2 + \frac{p_\phi^2}{\cos^2 \vartheta}} \quad (3.64)$$

$$\alpha_3 = \sqrt{m^2 r^4 \dot{\vartheta}^2 + \frac{m^2 r^4 \cos^4 \vartheta \dot{\phi}^2}{\cos^2 \vartheta}} \quad (3.65)$$

$$\alpha_3 = mr^2 \sqrt{\dot{\vartheta}^2 + \cos^2 \vartheta \dot{\phi}^2} = mr^2 f \quad (3.66)$$

con  $f$  anomalia vera, ma è anche il momento angolare totale, quindi possiamo scrivere:

$$M = m\sqrt{a\beta(1-e^2)} \quad (3.67)$$



## Capitolo 4

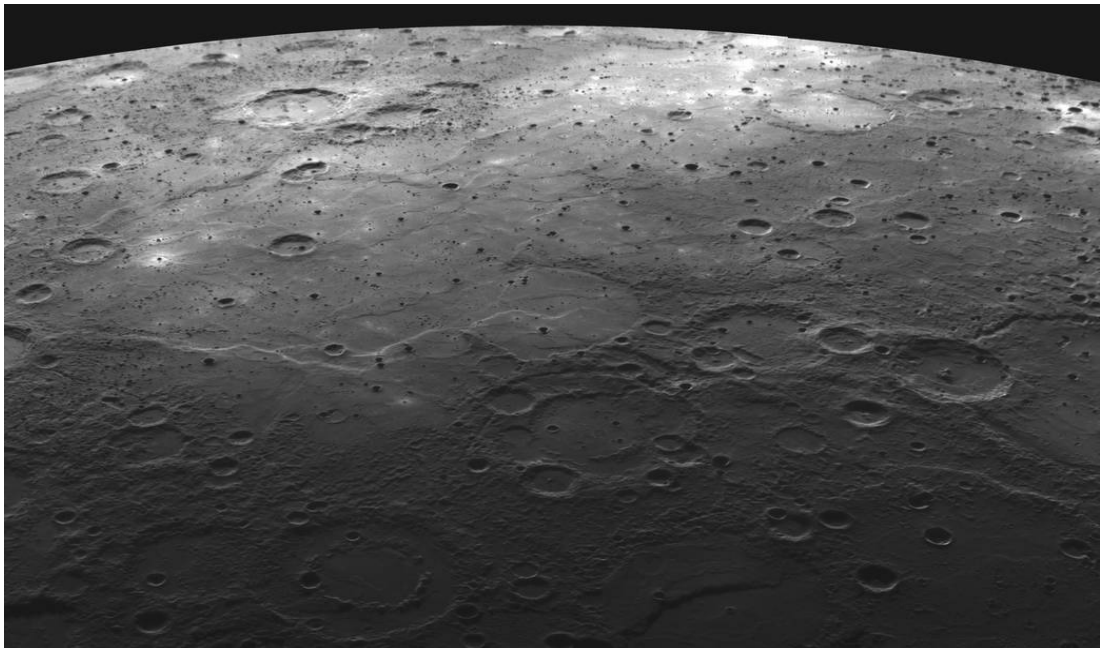
# Sistema Solare ed Esopianeti

### 4.1 Sistema Solare

Il Sistema Solare fornisce numerosi esempi di problema dei due corpi: la Terra che ruota intorno al Sole, la Luna attorno alla Terra ne sono solo alcuni esempi. All'Assemblea Generale di Praga dell'Unione Astronomica Internazionale (24 agosto 2006) si è definito cos'è un pianeta. Un pianeta è un corpo celeste che è in orbita intorno a una stella; ha una massa sufficiente affinché la sua gravità possa vincere le forze di corpo rigido, e ha forma quasi sferica; ha massa sufficiente per eliminare i corpi più piccoli dalla sua zona orbitale (sia distruggendoli con impatti diretti sia attraendoli in orbite stabili). Mentre invece si definisce pianeta nano un corpo celeste che è in orbita intorno a una stella; ha una massa sufficiente affinché la sua gravità possa vincere le forze di corpo rigido, e ha forma quasi sferica; non ha ripulito le vicinanze intorno alla sua orbita; non è un satellite. I pianeti del Sistema Solare sono otto: Mercurio, Venere, Terra, Marte, Giove, Saturno, Urano, Nettuno ed ognuno ha caratteristiche peculiari. Fino al 2006 anche Plutone era considerato un pianeta ma avanzando nel suo studio si è visto che aveva caratteristiche molto diverse dagli altri pianeti. Oggi sappiamo che Plutone, con un diametro di circa 2.280 chilometri, è sei volte più piccolo della Terra e che viaggia in un'orbita ellittica che attraversa l'orbita di Nettuno. Dal 2006 è stato declassato a pianeta nano e lo si considera appartenente alla fascia di Kuiper. Tale fascia si estende dall'orbita di Nettuno fino a 50 UA dal Sole e in essa ruotano corpi minori del Sistema Solare.

#### **Mercurio**

È il primo pianeta in ordine di distanza dal Sole, ed è il corpo con l'irraggiamento medio per unità di superficie maggiore. È anche il pianeta con la più forte escursione termica tra il dì e la notte. Si trova a una distanza media dal Sole di circa 58 milioni di km e presenta un'orbita con eccentricità: 0,206. È il pianeta più piccolo del Sistema Solare. Il moto del pianeta è influenzato in maniera significativa dai campi gravitazionali degli altri pianeti. Ciò complica lo studio del problema dei due corpi Sole-Mercurio perché occorre tener conto di una serie di forze in gioco. L'influenza degli altri pianeti sul moto di Mercurio è evidenziata soprattutto dal fatto che il pianeta ha un moto di precessione del perielio molto pronunciato. Il piano dell'orbita è inclinato rispetto al piano medio dell'eclittica di circa  $7^\circ$ . Mercurio non ha un'atmosfera in



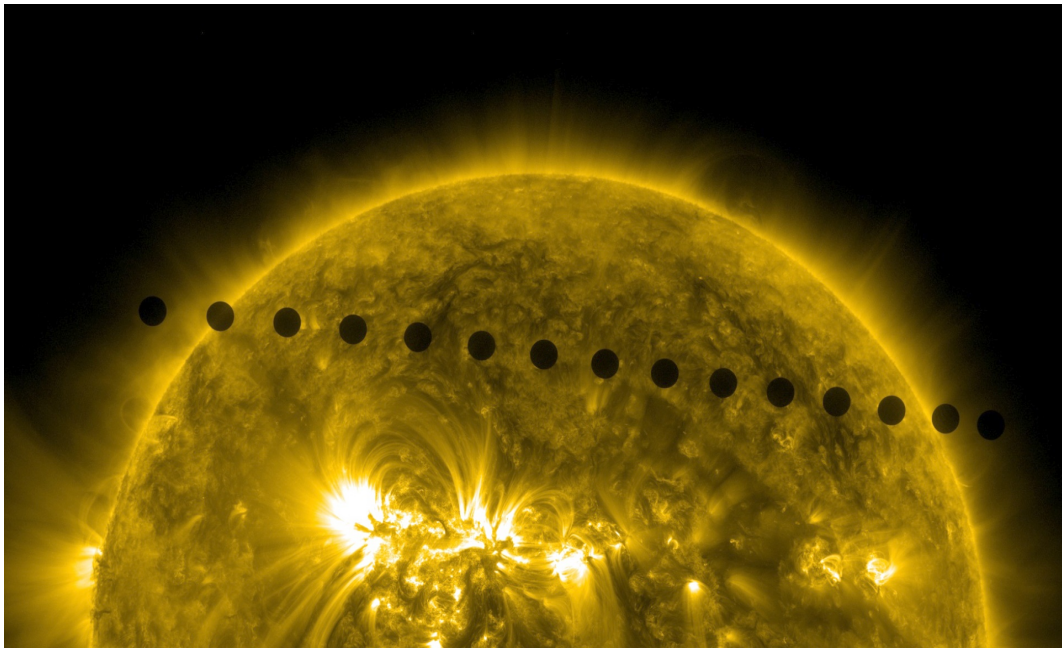
*Figura 4.1. Crateri di Mercurio*

grado di proteggerlo almeno parzialmente dai meteoriti che vi cadono continuamente. La sua superficie è caratterizzata infatti dai crateri di impatto. L'impatto maggiore è stato poco meno di 4 milioni di anni fa e ha portato alla formazione di un bacino di 1300km di diametro. La superficie di Mercurio è caratterizzata anche dalle pianure lisce. Esse sono vaste colate di lava provenienti dall'interno del pianeta, che ricordano una lontanissima attività del pianeta.

	Parametri
Distanza media dal Sole	$5,791 \cdot 10^7$ km
Eccentricità orbita	0,206
Inclinazione del piano orbitale	$7^\circ$
Velocità media orbitale	47,9km/s
Periodo orbitale	88 giorni

## Venere

Venere è il secondo oggetto più luminoso nel cielo dopo la luna ed è il secondo pianeta in ordine di distanza dal Sole, intorno al quale ruota a una distanza media di  $1,08 \cdot 10^8$  km. Ha una rotazione molto lenta e una rotazione completa dura circa 243 giorni terrestri. Il moto è orario, cioè ruota intorno al proprio asse in senso opposto agli altri pianeti. L'accelerazione di



*Figura 4.2. Passaggio di Venere*

gravità di Venere  $8,63 \text{ m/s}^2$  permette di trattenere i gas per formare un'atmosfera che è densa: biossido di carbonio (97%), piccole quantità di vapore acqueo, azoto e vapori di acido solforico, nella quale sono presenti molti gas serra che trattengono il calore. Venere è il pianeta più caldo del sistema Solare ed ha una temperatura compresa tra i 250 K e i 850 K. Su Venere sono presenti pianure ondulate, crateri, ed è possibile riconoscere due enormi strutture alte 5000 m interpretate come vulcani a scudo.

	Parametri
Distanza media dal Sole	$1,082 \cdot 10^8 \text{ km}$
Eccentricità orbita	0,007
Inclinazione del piano orbitale	$3^\circ 23'$
Velocità media orbitale	35km/s
Periodo orbitale	224,7 giorni

## Terra

La Terra ha un nucleo di materiale denso (soprattutto Ferro e Nichel) che occupa metà del raggio ed è avvolto da un mantello di rocce ricche in ferro e magnesio, a sua volta ricoperto da una crosta di rocce eterogenee e meno dense. La crosta presenta alte catene montuose e fosse



*Figura 4.3. 1 aprile 2015, scatto dell'equipe con Samantha Cristoforetti*

di sprofondamento ricoperte dai mari. Il nostro pianeta ha un'orbita ellittica con eccentricità relativamente bassa, pari a circa 0,017, questo implica che l'orbita è più simile ad una circonferenza che ad un'ellisse, e che la differenza tra distanza massima e minima sia di appena 5 milioni di km. La Terra ha un'atmosfera meno densa di quella di Venere costituita da azoto, ossigeno, anidride carbonica e vapore acqueo. Circa i 3/4 della superficie sono ricoperti dall'acqua oltre ai ghiacciai. L'attività dell'atmosfera e l'evoluzione della crosta hanno cancellato le tracce di impatti di meteoriti che hanno caratterizzato il primo miliardo di anni di evoluzione del Sistema Solare.

## **Marte**

Ha distanza media dal Sole di 228 milioni di km. Appare di colore rosso a causa della presenza di ossido di ferro sulla superficie. Ha un'orbita molto vicina ad una circonferenza e il valore dell'eccentricità dell'orbita è 0,093. Marte compie una rotazione attorno al proprio asse in 24h 37m. La sua temperatura è tra i 130K all'ombra e 300K al Sole. Si verifica una così ampia escursione termica perchè l'atmosfera è molto rarefatta (biossido di carbonio e azoto) e non riesce a mitigare le escursioni termiche. Sono presenti calotte polari ricche di acqua e ricoperte di biossido di carbonio. Marte possiede due satelliti, Phobos e Deimos. Fino all'esplorazione del 2004 si pensava che su Marte non ci fosse vita. Ma sono state trovate tracce della presenza di acqua e metano nell'atmosfera. Il metano sulla Terra è prodotto soprattutto da organismi appartenenti al regno Archea.

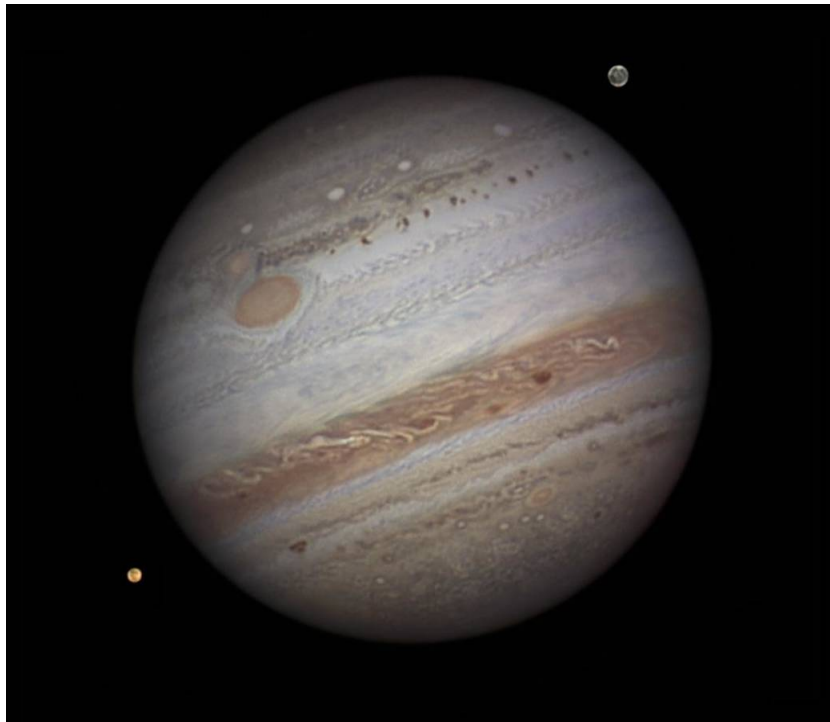


*Figura 4.4. Suolo di Marte*

	Parametri
Distanza media dal Sole	$2,279410^8$ km
Eccentricità orbita	0,093
Inclinazione del piano orbitale	$1^\circ 51'$
Velocità media orbitale	24,14km/s
Periodo orbitale	687 giorni

## Giove

È il pianeta più voluminoso e massiccio, (la sua massa è il doppio di quella di tutti gli altri pianeti) ed ha una distanza media dal Sole di 780 milioni di km. È schiacciato ai poli a causa di una velocità di rotazione molto elevata (all'equatore  $40000 \text{ km/h}$ ). Compie una rotazione intorno al proprio asse in meno di 10 ore. Giove compie una rivoluzione completa in 12 anni. L' eccentricità dell'orbita è 0,048. È un pianeta prevalentemente gassoso con una densità che varia in funzione dalla distanza dal nucleo. La sua superficie appare a strisce bianche e rosse. Esse sono dovute ai movimenti convettivi dell'atmosfera gioviana, innescati dal Sole e dal calore prodotto da Giove. La velocità di rotazione conferisce all'atmosfera una struttura a strisce; nelle zone chiare i gas risalgono e nelle zone scure i gas ridiscendono. Le macchie (come per esempio la grande macchia rossa) che interrompono l'alternanza delle bande corrispondono a perturba-



*Figura 4.5. Giove, Io e Ganimede*

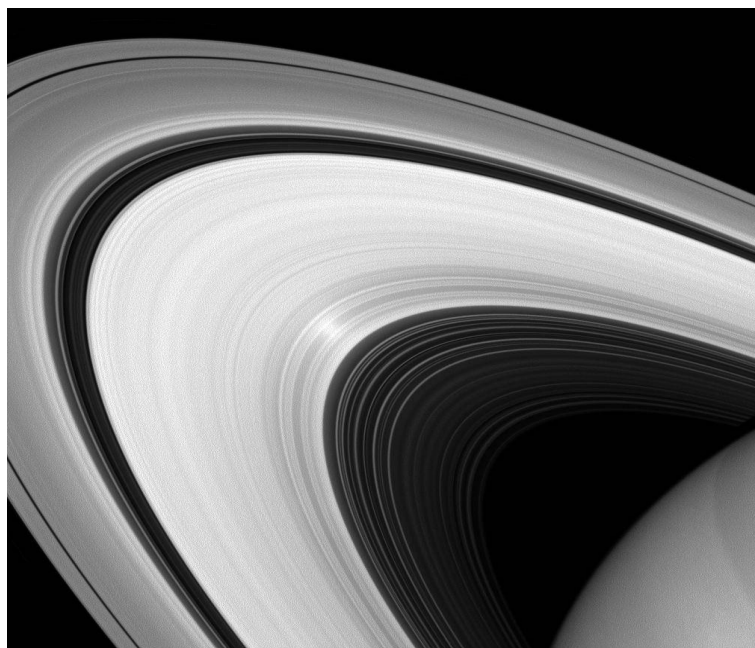
zioni cicloniche. Giove è composto da idrogeno ed elio, con piccolissime tracce di vapore acqueo, metano ed ammoniaca. È una sfera liquida con un involucro gassoso e un piccolo nucleo solido. Sono stati osservati anche alcuni sottili anelli. Giove possiede 20 satelliti maggiori.

	Parametri
Distanza media dal Sole	7,7833 $10^8$ km
Eccentricità orbita	0,048
Inclinazione del piano orbitale	1° 18'
Velocità media orbitale	13,1km/s
Periodo orbitale	11,86 anni

## Saturno

È il secondo pianeta più grande del nostro Sistema e supera di 10 volte le dimensioni della Terra. Ruota su se stesso molto velocemente e questo provoca una schiacciamento notevole ai poli. È un pianeta gassoso, è fatto da un grosso involucro di gas che avvolge un nucleo di idrogeno liquido. L'atmosfera ha una struttura simile a quella di Giove. Le perturbazioni e i





*Figura 4.6. Immagine agli infrarossi degli anelli di Saturno*

venti sono più veloci di quelli di Giove (per le misurazioni che si sono potute fare) all'equatore raggiungono  $1800 \text{ km/h}$ . Saturno possiede l'anello più luminoso del Sistema Solare. Quest'anello è inclinato rispetto al piano equatoriale di Saturno di  $26^\circ$ . Gli anelli sono formati da frammenti solidi (forse ammoniaca solida) e polvere, ognuno in rotazione attorno al pianeta su una propria orbita. Saturno possiede 18 satelliti maggiori, tra cui Titano che è l'unico satellite del Sistema Solare a possedere una vera atmosfera.

	Parametri
Distanza media dal Sole	$1,4294 \cdot 10^9 \text{ km}$
Eccentricità orbita	0,056
Inclinazione del piano orbitale	$2^\circ 29'$
Velocità media orbitale	$9,67 \text{ km/s}$
Periodo orbitale	29,46 anni

## Urano

Ha un'orbita molto poco inclinata rispetto al piano dell'eclittica (poco meno di  $1^\circ$ ) ed ha un valore di eccentricità pari a 0.046. Urano compie una rivoluzione completa intorno al Sole in poco più di 84 anni. È importante notare che il suo asse di rotazione è inclinato rispetto al piano dell'eclittica di circa  $98^\circ$ . Ha un'atmosfera di colore verde-azzurro, dovuto all'assorbi-



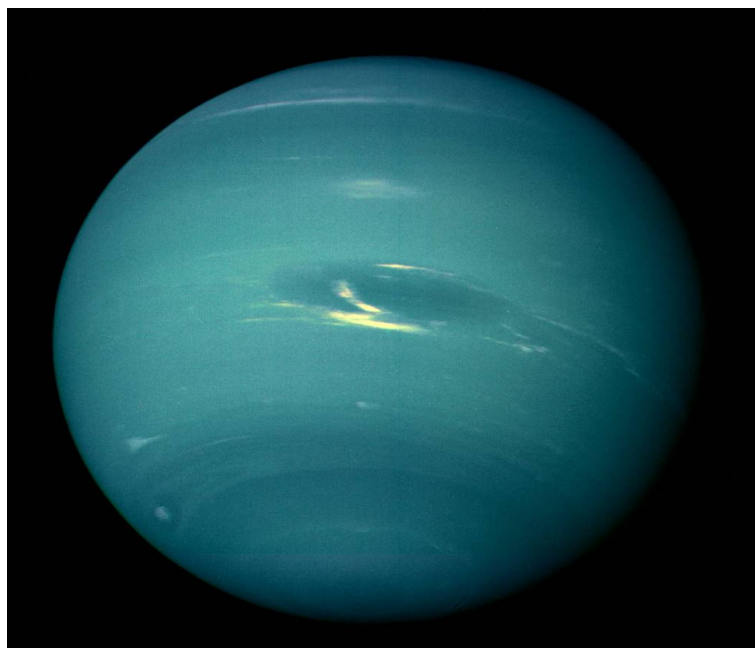
*Figura 4.7. Pianete crescente*

mento della radiazione rossa da parte del metano, spesso 7600 km di idrogeno, elio e metano. La temperatura varia tra  $-208^{\circ}C$  a  $-215^{\circ}C$ . Ha 21 satelliti maggiori e 10 sottili anelli.

	Parametri
Distanza media dal Sole	$2,87099 \cdot 10^9 \text{ km}$
Eccentricità orbita	0,046
Inclinazione del piano orbitale	$0^{\circ} 46'$
Velocità media orbitale	6,8 km/s
Periodo orbitale	84,01 anni

## Nettuno

È il pianeta più lontano dal Sole, da cui dista  $4,5043 \cdot 10^9$  km. Venne cercato ed individuato nel 1846 a seguito di calcoli fatti per spiegare alcune perturbazioni osservate nell'orbita di Urano. La sua rotazione dura 16 h e la sua rivoluzione intorno al Sole 164,8 anni. Ha un'atmosfera densa e spessa composta da idrogeno, elio, metano che gli conferisce il caratteristico colore azzurro. Anch'essa è striata come quella di Giove, ma a causa dell'enorme distanza dal Sole i moti dei gas sono dovuti solo ad un'attività del pianeta che ha un nucleo in parte liquido. È un pianeta freddo con escursioni termiche poco rilevanti da  $-232^{\circ}C$  a  $-211^{\circ}C$ . Ha 8 satelliti maggiori e una serie di anelli poco visibili.



*Figura 4.8. Nettuno, 16 maggio 2016*

	Parametri
Distanza media dal Sole	$4,5043 \cdot 10^9$ km
Eccentricità orbita	0,0097
Inclinazione del piano orbitale	$1^\circ 46'$
Velocità media orbitale	5,45km/s
Periodo orbitale	164,8 anni

## 4.2 Esopianeti

I pianeti extra solari, detti anche esopianeti o exopianeti, sono oggetti planetari rocciosi o gassosi, che orbitano intorno a stelle vicine diverse dal Sole. Il ramo dell'Astronomia che si occupa dello studio e della caratterizzazione degli esopianeti ha nascita recente, ciò è dovuto anche al fatto che necessita di strumenti molto sensibili. Uno dei primi esopianeti ad essere individuato è stato Pegaso 51-b, che si trova nella costellazione di Pegaso ad una distanza di 50 a.l. dal Sole. Pegaso 51-b è un pianeta molto più grande della Terra con massa circa la metà di quella di Giove,  $M_j$  o  $M_G$  che è la massa di riferimento in planetologia. La scoperta avvenne nel 1995 ad opera degli astronomi svizzeri Mayor e Queloz, all'Observatoire de Haute-Provence, in Francia, grazie al metodo della velocità radiale, il metodo con il quale sono stati scoperti la gran parte dei pianeti extrasolari attualmente noti. Il sensibile spettroscopio usato per la scoperta è stato in grado di rilevare anche i piccoli cambiamenti di regolarità nella velocità delle



*Figura 4.9. Cielo attorno alla stella Pegasi 51*

linee spettrali pari a circa 70 metri al secondo. Pegasi 51-b ruota attorno alla stella Pegasi 51 che è una stella di media grandezza, molto simile al Sole.

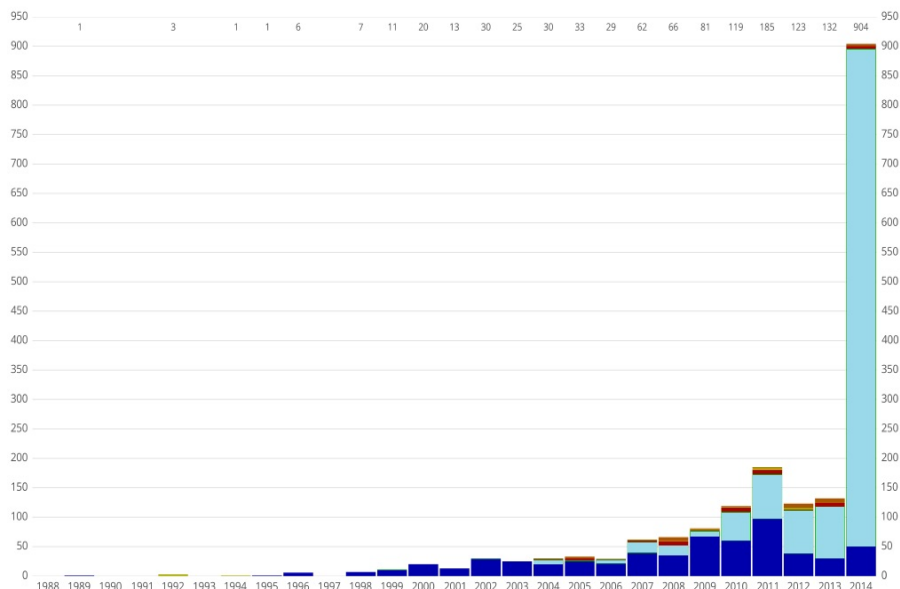
La ricerca degli esopianeti ha avuto grande sviluppo negli ultimi decenni. Tra il 1992 e il 1996 i pianeti extra solari identificati erano una decina, prima del 2010 se ne contavano due centinaia circa. A maggio 2016 la NASA ha reso ufficiali i risultati del telescopio spaziale Kepler (lanciato nel 2009) che ha individuato 1284 esopianeti. Siamo arrivati a circa 3200.

#### *Tecniche di ricerca*

Esistono molte tecniche di ricerca dei pianeti extrasolari, dirette ed indirette. In generale è difficile osservare un pianeta perchè non brilla di luce propria e quindi è difficile da individuare nel cielo.

#### *Velocità radiale*

La tecnica con cui sono stati individuati più pianeti è quella che sfrutta la spettroscopia, in particolare l'Effetto Doppler. Misurando la velocità in allontanamento e in avvicinamento della stella rispetto alla Terra, con l'effetto doppler, è possibile scoprire un pianeta. Infatti il pianeta che orbita attorno alla stella, ne modifica la posizione. Analizzando lo spettro è possibile misurare lo spostamento causato alla stella dalla presenza di un altro corpo. In particolare si



**Figura 4.10.** Numero di esopianeti scoperti con le varie tecniche nei diversi anni. Azzurro: transit, blu: velocità radiale, rosso: immagine diretta, marrone microlensing, verde: timing

misura la velocità verso lo spettatore: la velocità radiale della sorgente. Questa tecnica non fornisce informazioni sulla composizione e grandezza dei pianeti individuati ma l'introduzione di spettrografi ha dato la possibilità di individuare con questo metodo anche pianeti di massa circa 30 volte la massa terrestre.

#### *Fotometria o transit*

È il metodo più recente e il secondo in ordine di successo. La fotometria a occultazione permette di determinare le fluttuazioni di luminosità della stella ospite, dovute al passaggio del pianeta davanti alla stella stessa. In base al periodo delle fluttuazioni è possibile stimare il periodo di rivoluzione dell'esopianeta. È però possibile avvalersi di tale metodo se la linea di vista è complanare o vicina al piano dell'orbita del pianeta. Un punto debole di questo metodo è il non fornire informazioni sulla massa del pianeta. I due precedenti metodi possono dare informazioni sulla composizione chimica dell'atmosfera degli esopianeti, perché durante il transito la luce emessa dalla stella può passare attraverso l'atmosfera del pianeta ed essere studiata da noi attraverso la spettroscopia.

#### *Microlensing*

Un metodo diretto è fornito dalle immagini. La luce emessa da una stella viene deviata e ampliata dall'attrazione gravitazionale di pianeti e così si può dedurre la presenza di un pianeta. Questo metodo evidenzia anche pianeti di massa piccola, ma è raro da osservare.

#### *Timing*

Si usa per stelle che presentano fenomeni periodici, come le pulsar, la presenza di un pianeta

altera il periodo della pulsazione del pianeta.

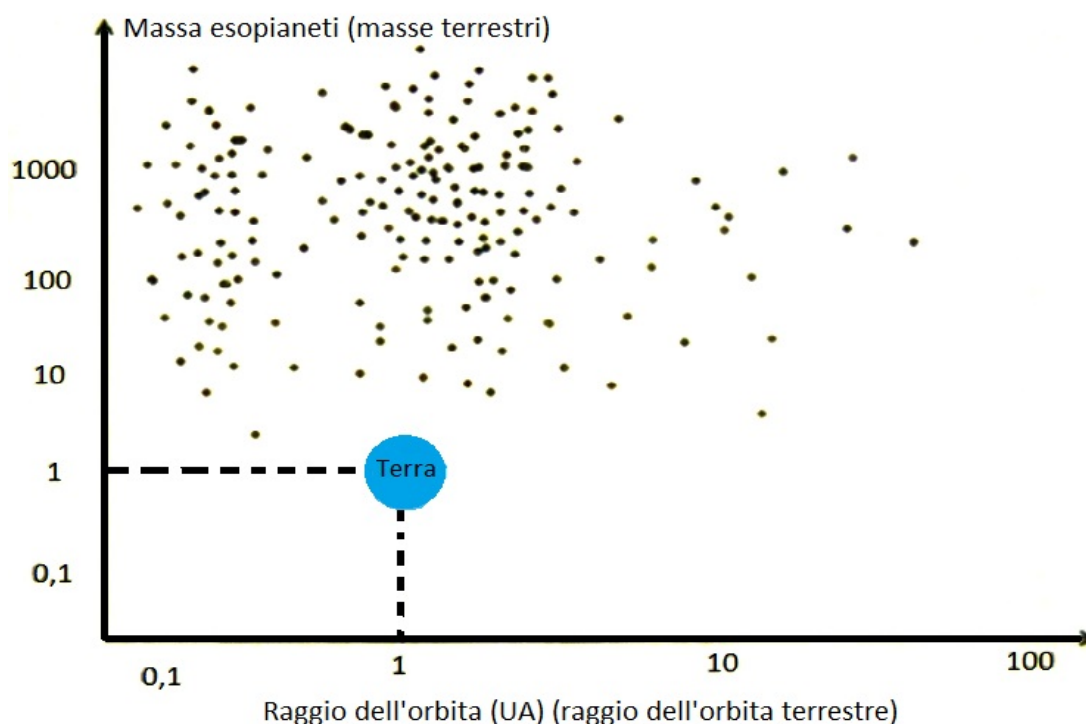
#### *Metodo astrometrico*

Alcuni metodi misurano la posizione di una certa stella in funzione del tempo e poi verificano se essa si sposta od oscilla rispetto a un punto di equilibrio. Questo non è un metodo molto preciso e permette di studiare solo pianeti molto massicci.

#### *Metodo diretto*

È il più diretto dei metodi e si basa sulla cattura di immagini. Il metodo dell'immagine diretta deve però avvalersi di accorgimenti in modo da oscurare la luce proveniente dalla stella attorno alla quale ruota l'esopianeta, che non permette una buona visione della luce riflessa dal pianeta. Nel 2004, un gruppo di astronomi utilizzò il Very Large Telescope dell'ESO in Cile per ottenere un'immagine di  $2M1207b$ , un compagno per la nana bruna  $2M1207$ . L'anno successivo si scoprì che quel corpo celeste era di natura planetaria. Il 13 novembre 2008 fu annunciato che il telescopio spaziale Hubble aveva osservato direttamente un pianeta extrasolare in orbita attorno alla brillante stella Fomalhaut con massa non superiore a 3 volte quella di Giove.

La maggior parte degli esopianeti scoperti fin ora hanno una massa molto maggiore di quella terrestre e in genere sono molto vicini alla propria stella. Queste caratteristiche permettono a un esopianeta di essere più osservabile con le tecniche sopra citate.



*Figura 4.11. Esopianeti scoperti in funzione della massa e del raggio della loro orbita*

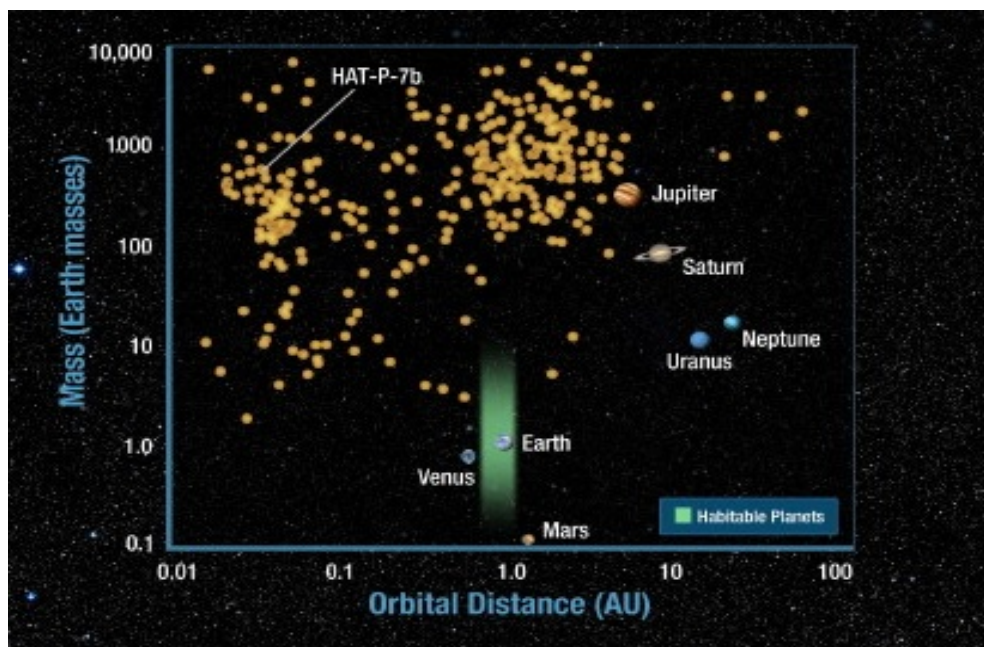
### 4.3 Condizioni di abitabilità

Da sempre l'uomo si è posto domande sulla vita nello spazio. Si sono trovati esopianeti ma la domanda permane e per trovare una risposta è utile sapere quali sono le condizioni di abitabilità. È nata così l'astrobiologia o esobiologia.

Lo sviluppo della vita è agevolato dalla presenza di acqua allo stato liquido e da alcuni gas. Affinchè si verifichino queste condizioni è necessaria una temperatura tra  $0^{\circ}C$  e  $100^{\circ}C$ .

Perchè si sviluppi la vita è necessaria una certa quantità di atmosfera, che resti gravitazionalmente legata al pianeta e che sia capace di filtrare le radiazioni nocive (come i raggi ultravioletti) provenienti dallo spazio. In un pianeta che non è protetto dalle radiazioni nocive le uniche forme di vita che si possono sviluppare sono nel sottosuolo e queste devono dipendere dall'energia chimica per i propri bisogni. Per esempio alcuni microbi terrestri ottengono energia da composti organici (composti del carbonio), altri da composti inorganici contenenti elementi come lo zolfo e il manganese. Un'atmosfera è importante anche per trattenere calore e impedire che questo si disperda nello spazio, ed evitare così grandi escursioni termiche tra la parte di pianeta direttamente irradiata e la zona in ombra. Si cercano negli esopianeti le stesse condizioni che si verificarono sulla Terra milioni di anni fa e che portarono allo sviluppo delle prime forme di vita unicellulari. La Terra si trova a 150 milioni di chilometri dal Sole, e questo le permette di ricevere la giusta quantità di radiazioni e calore. Inoltre la Terra ha trattenuto un'atmosfera che è andata via via arricchendosi.

È possibile individuare un intervallo di distanza dalla stella, entro il quale sono garantite le giuste condizioni di irraggiamento e temperatura e l'acqua si trova allo stato liquido. L'intervallo dipende dalla massa della stella e viene detto fascia di abitabilità. Con l'aumentare della massa della stella, aumenta anche la distanza dalla fascia di abitabilità. Ad esempio se il Sole fosse stato meno massiccio anche Venere sarebbe stata all'interno della fascia di abitabilità. Se un pianeta si trova all'interno della fascia non è certo che vi siano forme di vita, ma sul pianeta vi sono le condizioni ottimali.



*Figura 4.12. Zona abitabile (in verde) del Sistema Solare; HAT-P-7b è un esopianeta scoperto nel 2008 nella costellazione del Cigno*



## Capitolo 5

# Bibliografia e sitografia

A.E Roy, 2005, Orbital Motion, Taylor e Francis

Landau L.D., Lifshitz E.M., 1982, Mechanics, Butterworth-Heinemann

Murray C.D, Dermott S.F, 1999, Solar system dynamics, Cambridge University Press

H.Goldstein, C. Poole, J. Safko, 2001, Classical Mechanics, Addison-Wesley

Valtonen M., Karttunen H.,2006, The three body problem, Cambridge University Press

[www.nasa.gov](http://www.nasa.gov)



# Elenco delle figure

1.1	Terra che sorge vista dalla Luna. Il sistema Terra-Luna è un esempio di problema dei due corpi . . . . .	6
1.2	Centro di massa per un sistema di N punti materiali . . . . .	7
1.3	Due corpi puntiformi . . . . .	9
2.1	Area spazzata dal raggio vettore . . . . .	12
2.2	Moto tra un raggio minimo e uno massimo . . . . .	14
2.3	Potenziale effettivo . . . . .	15
2.4	Ellisse . . . . .	17
2.5	Iperbole . . . . .	18
3.1	Quantità della soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi in tre dimensioni . . . . .	24
4.1	Crateri di Mercurio . . . . .	28
4.2	Passaggio di Venere . . . . .	29
4.3	1 aprile 2015, scatto dell'equipe con Samantha Cristoforetti . . . . .	30
4.4	Suolo di Marte . . . . .	31
4.5	Giove, Io e Ganimede . . . . .	32
4.6	Immagine agli infrarossi degli anelli di Saturno . . . . .	33
4.7	Pianete crescente . . . . .	34
4.8	Nettuno, 16 maggio 2016 . . . . .	35
4.9	Cielo attorno alla stella Pegasi 51 . . . . .	36
4.10	Numero di esopianeti scoperti con le varie tecniche nei diversi anni. Azzurro: transit, blu: velocità radiale, rosso:immagine diretta, marrone microlensing, verde: timing . . . . .	37
4.11	Esopianeti scoperti in funzione della massa e del raggio della loro orbita . . . . .	38
4.12	Zona abitabile (in verde) del Sistema Solare; HAT-P-7b è un esopianeta scoperto nel 2008 nella costellazione del Cigno . . . . .	40