Alma Mater Studiorum Università di Bologna

SCUOLA di SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Problemi di minimo e massimo dall'antichità a oggi

Tesi di Laurea in Analisi Matematica e Storia della Matematica

Relatore: Chiar.mo Prof. Paolo Negrini Presentata da: Federica Cameli

Sessione Unica Anno Accademico 2015 - 2016 Io non so perché è tutto così vero che descrivere è impossibile bisogna immaginare.

(L'innocenza - Scisma)

Indice

Introduzione					
1	Problemi di minimo e massimo nell'antichità				
	1.1	Il problema di Didone	4		
	1.2	Euclide	5		
	1.3	Archimede	8		
	1.4	Apollonio	11		
	1.5	Zenodoro	18		
	1.6	Erone	26		
2	Gli	albori del calcolo differenziale: Fermat e Huygens	32		
	2.1	Methodus ad disquirendam maximam et minimam	32		
	2.2	De tangentibus linearum curvarum	38		
	2.3	Un problema di massimo risolto geometricamente	45		
	2.4	"Analysis ad refractiones" e "Synthesis ad refractiones"	47		
	2.5	La soluzione di Huygens	52		
3	La	nascita del calcolo differenziale: Leibniz, Newton	5 5		
	3.1	Leibniz	55		
	3.2	La Brachistocrona	58		
		3.2.1 La soluzione di Newton	59		
		3.2.2 La soluzione di Leibniz	59		
		3.2.3 La soluzione di Jean Bernoulli	63		
		3.2.4 La soluzione di Jacques Bernoulli	67		

TAT	T .	T /	VI
	1)	11	чL
$I \cup N$	11	11	7 '

	3.3	Il problema isoperimetrico	. 69
4		Methodus" di Eulero	7 2
5		Il Methodus	. 73
J	11 (ontributo di Lagrange	G.
	5.1	Il ruolo dei moltiplicatori di Eulero - Lagrange	. 99
6	Svil	uppi più recenti	103
	6.1	Derivazione dell'equazione di Eulero-Lagrange	. 104
	6.2	Metodi diretti	. 105
Bi	bliog	grafia	108

Introduzione

I problemi di minimo e di massimo hanno stimolato e affascinato gli scienziati fin da tempi remoti, tanto da farcene trovare già nelle opere dei matematici greci del III secolo a.C. Nella presente tesi sono esposti esempi classici in ambito geometrico e fisico, come la determinazione delle rette di lunghezza minima e massima che possono essere condotte a una conica da particolari punti; la determinazione del percorso che sceglie un raqqio di luce che viene emesso in un punto, riflesso da uno specchio e raggiunge un punto finale; il problema della brachistocrona, cioè quello di determinare la curva che rappresenti il percorso che un corpo compie per andare da un punto ad un altro, lungo un piano verticale, nel minor tempo possibile; il problema isoperimetrico, cioè quello di determinare tra tutte le figure con lo stesso perimetro quella che racchiuda area massima, e molti altri. Questi problemi sono affrontati con diversi metodi che si sono evoluti nel tempo: mentre nell'antichità le tecniche sfruttate per la risoluzione sono puramente geometriche, come vedremo attraverso l'analisi dei risultati di Euclide, Archimede, Apollonio, Zenodoro ed Erone, nei secoli XVII - XVIII viene impresso un forte impulso al loro studio dalla nascita di metodi infinitesimali, con la produzione di lavori sull'argomento da parte di Fermat, Huygens, i fratelli Bernoulli, fino alle fondamentali opere di Leibniz, Eulero e Lagrange.

Infine vi sarà un accenno ai più recenti *metodi diretti*: dal XIX secolo le questioni di *esistenza* e *determinazione* delle soluzioni si separano e questo conduce allo sviluppo di metodi per dimostrare l'esistenza di soluzioni che agiscono in modo "inverso" rispetto alle loro origini.

Capitolo 1

Problemi di minimo e massimo nell'antichità

1.1 Il problema di Didone

Il primo problema di massimo nella storia è un'antica leggenda riportata perfino nel Libro I dell'Eneide di Virgilio.

Nel IX secolo a.C. la principessa di Tiro, Didone, dopo l'uccisione del marito Sicheo per mano del fratello Pigmalione, fugge per mare insieme alla sorella e ad un vasto seguito; arrivata sulle coste libiche chiede al re Iarba un pezzo di terra su cui fondare la città: "taurino quantum possent circumdare tergo" (quanta una pelle di bue ne potesse circondare, Eneide, I, 367-368); il re acconsente e lei riesce a ottenere la terra necessaria per costruire una fortezza e fondare la città di Cartagine.

Come ha fatto? Didone, con un paio di forbici, ha tagliato la pelle di bue in strisce sottilissime con le quali ha formato un filo abbastanza lungo da poter circondare un'ampia zona.

Che forma ha dato a questo filo? Didone voleva uno sbocco sul mare quindi ha fissato le due estremità del filo e gli ha dato la forma di una semicirconferenza. Questo aneddoto è noto come *problema di Didone* ed è il classico problema isoperimetrico: fra tutte le curve piane di lunghezza data (cioè isoperimetriche, *iso*: stesso), qual è quella che racchiude la massima area?

Il problema in questione, in realtà, ha una soluzione abbastanza difficile; i Greci avevano capito che questa era rappresentata dalla circonferenza (infatti Virgilio utilizza la parola "circumdare", che ci fa dedurre che Didone avesse risolto in modo corretto il problema); analogamente avevano notato la proprietà isoepifanica della sfera (ossia, tra tutte le figure con uguale superficie, la sfera è quella di volume massimo). Proprio per questa proprietà di "massima capienza" nello spazio e nel piano, la sfera e il cerchio erano viste come la materializzazione della perfezione geometrica. E' impossibile dire con precisione chi abbia notato per primo questa proprietà; quello che però è noto è che Aristotele nel IV secolo a.C. la tratta come un fatto assodato. In ogni caso, gli antichi non avevano una dimostrazione rigorosa (per i nostri standard) di questo fatto; tra i solutori del problema, secondo gli standard del tempo, ricordiamo Archimede e Zenodoro, di cui parleremo più avanti.

1.2 Euclide

Il primo problema di massimo esplicitamente formulato è contenuto nel Libro VI degli *Elementi* di Euclide, matematico alessandrino del III secolo a.C. In quest'opera Euclide raccoglie e sistema in modo assiomatico tutto il sapere matematico fino ad allora disponibile e ci offre il primo esempio di "trattato scientifico", per il metodo rigorosamente deduttivo utilizzato.

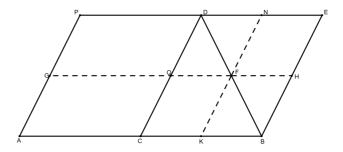
Proposizione 1.2.1 (Proposizione XXVII). Di tutti i parallelogrammi applicati alla stessa retta e deficienti di figure parallelogrammiche sia simili sia poste similmente a quella descritta sulla metà della retta, è massimo quel parallelogrammo che è applicato sulla metà della retta ed è simile al difetto.

Dimostrazione. Sia AB una retta e sia secata a metà in C. Sia stato applicato alla retta AB il parallelogrammo ACDP facendo difetto di una figura parallelogrammica DCBE descritta sulla metà di AB, cioè CB: dico che di

tutti i parallelogrammi applicati ad AB e che fanno difetto di figure parallelogrammiche simili e similmente poste a DCBE, ACDP è la maggiore. Sia applicato alla retta AB il parallelogrammo AKFG facendo difetto di una figura parallelogrammica FKBH simile e similmente posta a DCBE. Dico che ACDP è maggiore di AKFG.

Poiché il parallelogrammo DCBE è simile al parallelogrammo FKBH, allora essi sono intorno alla stessa diagonale (Prop.6-26). Si conduca la loro diagonale DB, e si descriva completamente la figura.

Poiché infatti CKFQ è uguale a FHEN, e FKBH è in comune, allora CB-HQ totale è uguale a KBEN totale (Prop.1-43). Ma CBHQ è uguale a CQGA, poiché anche AC è uguale a CB (Prop.1-36). Anche CQGA è quindi uguale a KBEN. Si aggiunga CKFQ ad entrambi. AKFG totale è quindi uguale allo gnomone CBENFQ, così che il parallelogrammo DCBE, cioè, ACDP, è maggiore del parallelogrammo AKFG. Di tutti i parallelogrammi applicati alla stessa retta e deficienti di figure parallelogrammiche sia simili che poste similmente a quella descritta sulla metà della retta, è quindi massimo quel parallelogrammo che è applicato sulla metà della retta ed è simile al difetto.



In termini moderni, potremmo enunciare questa proposizione nel seguente modo:

dato un triangolo ABC, se da un punto D del lato BC si tracciano le parallele ED ad AC, FD ad AB, l'area del parallelogramma AEDF è massima quando D è il punto medio di BC.

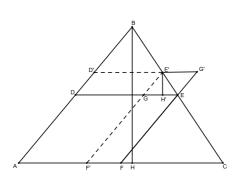
Dimostrazione. Sia AD'E'F' un parallelogramma, diverso da ADEF, inscritto in ABC. Sia G' il punto di intersezione di D'E' ed EF e sia G il punto di intersezione di DE ed E'F'.

Si vuole mostrare che l'area del parallelogramma AD'E'F' è minore dell'area del parallelogramma ADEF e che la differenza è equivalente all'area di EG'E'G. Per mostrare ciò, sia h la misura dell'altezza BH del triangolo ABC e sia h' la misura dell'altezza E'H' del triangolo GEE'; inoltre sia b la misura della base AC del triangolo ABC.

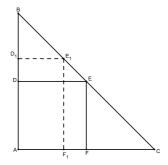
I triangoli GE'E e ABC sono simili perché E'G è parallelo ad AB e GE è parallelo ad AC (quindi si hanno gli angoli corrispondenti congruenti); da ciò deriva:

$$\frac{h'}{\mid GE\mid} = \frac{h}{b} \Leftrightarrow \frac{h'}{h/2} = \frac{\mid GE\mid}{b/2}$$

Da questa relazione segue che l'area del parallelogramma D'G'ED, di altezza h' e base DE=b/2, è uguale all'area del parallelogramma EGF'F, di altezza h/2 e base $\mid GE \mid$. Segue che l'area del parallelogramma ADEF è uguale all'area del della figura AD'G'EGF' che è più grande dell'area di AD'E'F' per l'area del parallelogramma GE'G'E.



Si noti che nel caso in cui AB = AC e l'angolo BAC è retto, tra tutti i rettangoli di perimetro dato il quadrato DEFA è quello di area massima.



1.3 Archimede

L'opera Sulla sfera e sul cilindro di Archimede, matematico, fisico e inventore siracusano del III secolo a.C., può essere considerata come la diretta continuazione degli Elementi di Euclide, in quanto riparte proprio da dove quest'ultimo termina: i cosiddetti solidi di rotazione.

Sulla sfera e sul cilindro è un'opera in due libri, ognuno preceduto da una lettera introduttoria di Archimede stesso al matematico alessandrino Dositeo.

Nel primo libro troviamo i noti risultati riguardanti la superficie e il volume della sfera, mentre il secondo libro è molto diverso: si potrebbe quasi dire che Archimede abbia qui raccolto e risolto, sotto la spinta di Dositeo, dei problemi abbastanza difficili da lui già proposti ai geometri di Alessandria. La proposizione più interessante (per l'argomento di questa tesi) è la IX del Libro II:

Proposizione 1.3.1 (Proposizione II, IX). Tra tutti i segmenti sferici compresi da uquale superficie, il maggiore è l'emisfero.

La proposizione così posta risolve il problema di massimo: tra tutti i segmenti sferici aventi uguale superficie, trovare quello di massimo volume; naturalmente si intende che i segmenti sferici da confrontare possano appartenere a sfere diverse.

Come si apprende dalla lettera introduttiva alla sua opera "Sulle spirali", con la dimostrazione di questa proposizione Archimede mostra la falsità del-

l'enunciato di un teorema che già da tempo aveva proposto ai geometri di Alessandria: "se il diametro di una sfera viene diviso in modo che il quadrato della parte maggiore sia triplo del quadrato della parte minore, e se il piano condotto per il punto di divisione perpendicolarmente al diametro taglia la sfera, la figura costituita dal maggior segmento sferico è la massima fra gli altri segmenti aventi uguale superficie."

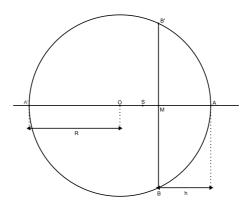
Prima di vedere la dimostrazione della Proposizione IX bisogna notare che Archimede sfrutta la Proposizione II dello stesso libro che stabilisce che un segmento sferico ha volume uguale a quello di un cono con base uguale a quella del segmento e con altezza H tale che il rapporto rispetto all'altezza h del segmento è lo stesso di quello tra la somma del raggio r della sfera con l'altezza h' del segmento rimanente e l'altezza h', cioè H:h=(r+h'):h'. Inoltre - altra nozione che viene sfruttata nella dimostrazione - dalle Proposizioni XLII-XLIII del Libro I si sa che la superficie di un segmento sferico è uguale a un cerchio avente per raggio il segmento di retta condotto dal vertice del segmento sferico su un punto della circonferenza del cerchio di base.

Dimostrazione. Sulla retta A'A prendiamo il punto H in modo tale che il cono di altezza HM e raggio di base MB abbia lo stesso volume del segmento sferico BAB'; prendiamo poi il punto K tale che A'K abbia lunghezza uguale al raggio R.

Siano V_C il volume del cono e V_S il volume del segmento; dall'ipotesi di uguaglianza di questi due volumi si ha

$$V_C = \frac{\pi}{3} |HM| \cdot |MB|^2 = \frac{\pi}{3} |HM| \cdot |MA'| \cdot |MA| =$$
$$= V_S = \frac{\pi}{3} (3R - h)h^2 = \frac{\pi}{3} |KM| \cdot |AM|^2$$

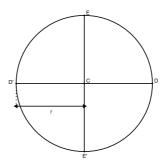
dove abbiamo posto | MB |2=| A'M | · | MA | per il secondo teorema di Euclide.



Da questa uguaglianza deriva

$$\frac{\mid HM \mid}{\mid AM \mid} = \frac{\mid KM \mid}{\mid A'M \mid}$$

Sia ora un'altra sfera tale che l'emisfero abbia la stessa superficie del segmento sferico BAB'.



Si ha che | ED |= $r\sqrt{2}$, | AB |²=| AA' | · | AM | (dal primo teorema di Euclide), da cui π | AB |²= $2\pi Rh$ = $S_S 2\pi r^2 = \pi$ | ED |², da cui

$$\mid AB\mid = \mid ED\mid$$

Ora si prenda un punto S sulla prima circonferenza tale che il segmento AS sia uguale al segmento CD e dimostriamo la disuguaglianza $|A'S| \cdot |AS| > |A'M| \cdot |AM| (\Leftrightarrow (2R-r)r > (2R-h)h)$. Questa disuguaglianza viene giustificata geometricamente: dati due triangoli con lo stesso perimetro, quello con l'area più grande è quello con il lato minore più grande.

In virtù dell'uguaglianza delle aree superficiali del segmento sferico e dell'emisfero, si ha

$$|AS|^2 = |AM| \cdot |A'K| \quad (\Leftrightarrow r^2 = Rh)$$

Questa uguaglianza, unitamente con la disuguaglianza precedente, porta a

$$|AS| \cdot |AA'| > |KM| \cdot |AM| \quad (\Leftrightarrow 2Rr > (3R - h)h)$$

Moltiplicando per |AM| si ottiene

$$|AS| \cdot |AA'| \cdot |AM| > |KM| \cdot |AM|^2 \quad (\Leftrightarrow 2Rrh > (3R - h)h^2)$$

Abbiamo mostrato prima che

$$|KM| \cdot |AM|^2 = |HM| \cdot |MB|^2$$

 $|AA'| \cdot |AM| = |AB|^2 = |ED|^2$

Per costruzione sappiamo che |AS| = |CD|. Riunendo tutto si ottiene

$$V_E = \frac{\pi}{3} |CD| \cdot |ED|^2 > \frac{\pi}{3} |HM| \cdot |MB|^2 = V_C = V_S$$
$$(\Leftrightarrow V_E = \frac{2\pi}{3}r^2 > \frac{\pi}{3}(3R - h)h^2 = V_C)$$

dove V_E è il volume dell'emisfero. Questo conclude la dimostrazione. \square

1.4 Apollonio

Apollonio di Perga, detto *il grande Geometra*, è stato un matematico e astronomo del III - II secolo a.C..

La sua opera più importante è chiamata "Le Coniche" ed era inizialmente composta da 8 libri; purtroppo, però, ce ne sono pervenuti solo 7, di cui i primi 4 in versione greca e gli ultimi 3 provenienti da una versione araba del IX secolo, stampata poi in latino nel XII secolo.

Le sezioni coniche erano già note da oltre un secolo, ma, come gli *Elementi* di Euclide avevano rimpiazzato tutti i manuali elementari precedenti, così

questa opera fa con i trattati già esistenti su tali curve.

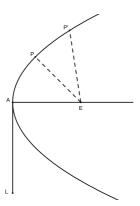
Di particolare interesse è il Libro V, che tratta il problema della determinazione delle *rette di lunghezza massima e minima* che possono essere condotte a una conica da particolari punti.

Il libro si apre con una dedica ad Attalo in cui Apollonio espone l'argomento del libro: proposizioni relative alle rette di lunghezza massima e minima, vale a dire le linee più lunghe e più corte che si possono condurre da un punto dato a una conica; afferma anche che i suoi predecessori non hanno affrontato la questione se non in modo superficiale, cioè si sono limitati a dimostrare semplicemente quali siano le rette che toccano le sezioni coniche. Lui considera l'argomento, invece, indispensabile per coloro che si occupano della loro scienza, la Geometria, ed è convinto che la materia sia tra quelle che sono degne di essere apprezzate per il loro valore intrinseco, cioè degna di essere studiata per se stessa (anche se, nel corso dei secoli, le sue teorie hanno avuto moltissima utilità pratica).

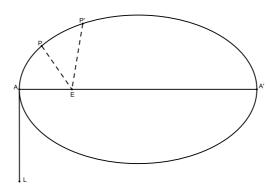
I suoi teoremi di massimo e minimo sono in realtà teoremi sulle tangenti e sulle normali alle sezioni coniche di fondamentale importanza in campi quali la meccanica celeste e la dinamica terrestre.

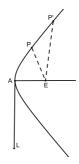
Nella determinazione di rette di lunghezza minima e massima, Apollonio inizia considerando punti particolari, cioè situati sull'asse maggiore di una conica a centro o sull'asse di una parabola; poi passa ai punti sull'asse minore di un'ellisse e infine considera punti generici interni alle coniche.

Proposizione 1.4.1 (Proposizione 82 (V, 4)). : In una parabola, se E è un punto sull'asse tale che AE è uguale a metà del latus rectum AL (il latus rectum è la corda parallela alla direttrice di una conica che passa per un fuoco; in questo caso viene spostata nel vertice A), allora la retta di lunghezza minima da E alla curva è AE; e se P è un qualsiasi altro punto sulla curva, PE aumenta all'allontanarsi di P da A.

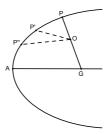


Proposizione 1.4.2 (Proposizione 83 (V, 5,6)). : Se E è un punto sull'asse di un'iperbole o di un'ellisse tale che AE è uguale a metà del latus rectum allora AE è la minore di tutte le rette che possono essere disegnate da E alla curva; e se P è un qualsiasi altro punto su essa, PE aumenta all'allontanarsi di P da A. Nell'ellisse, EA' (con A' l'altro punto di intersezione tra asse e conica) è la retta di massima lunghezza da E alla curva.

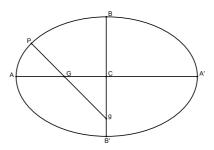




Proposizione 1.4.3 (Proposizione 87 (V, 12)). : Se G è un punto sull'asse di una conica e GP è la retta di lunghezza minima da G alla curva (o la normale a P) e se O è un punto su PG, allora OP è la retta di lunghezza minima da O alla curva e OP' aumenta allo spostarsi di P' da P verso A (o verso A').

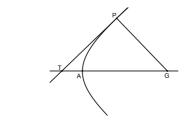


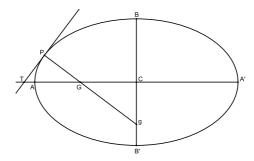
Proposizione 1.4.4 (Proposizione 91(V, 23)). : Se g è sull'asse minore di un'ellisse e gP è una retta di lunghezza massima da g alla curva e se gP incontra l'asse maggiore in G, allora GP è una retta di lunghezza minima da G alla curva. (In altre parole, la retta minima da G e la retta massima da g determinano una e la stessa normale.)



Proposizione 1.4.5 (Proposizione 92(V, 24, 25, 26)). : Solo una normale può essere disegnata da un punto di una conica, se questa normale può essere considerata come la retta di lunghezza minima dal punto in cui incontra AA' o come la retta di lunghezza massima dal punto in cui incontra l'asse minore (nel caso dell'ellisse).

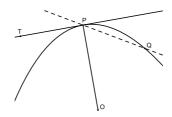
Proposizione 1.4.6 (Proposizione 93 (V, 27,28, 29,30)). : La normale a un punto P di una conica, se considerata come la retta di lunghezza minima dalla sua intersezione con l'asse AA' o come la retta di lunghezza massima dalla sua intersezione con BB' (nel caso dell'ellisse) è perpendicolare alla tangente in P.

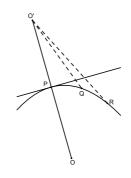




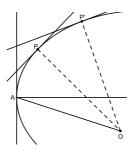
Proposizione 1.4.7 (Proposizione 94 (V, 31, 33, 34)). :

- In generale, se O è un punto interno a una conica e OP è una retta di lunghezza massima o minima da O alla conica, una retta PT che formi un angolo retto con OP toccherà la conica solo nel punto P.
- 2. Se O' è un punto su OP fuori dalla conica, allora tra tutte le rette disegnate da O' che incontrano la conica in un sol punto, O'P sarà la retta di lunghezza minima e tra tutte le altre rette, quelle più vicine sono minori di quelle più lontane.



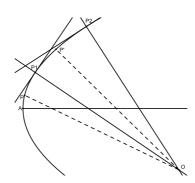


Proposizione 1.4.8 (Proposizione 104 (V, 64, 65, 66, 67)). : Se O è un punto al di sotto dell'asse di una conica tale che o nessuna normale o una sola normale può essere disegnata da O alla conica che tagli l'asse, allora OA è la minore delle rette che tagliano gli assi e quelle che sono ad essa più vicine sono minori di quelle più lontane.

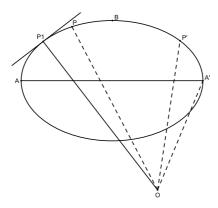


Proposizione 1.4.9 (Proposizione 106 (V, 72)). : Se da un punto O sotto l'asse di una parabola o iperbole è possibile disegnare due normali OP_1 e OP_2 che tagliano l'asse (P_1 più vicino al vertice A rispetto a P_2) e se P è un punto più lontano sulla curva e colleghiamo OP allora

- 1. se P è tra A e P₁ allora OP₁ è la maggiore tra tutte le rette OP e, tra tutte le rette dello stesso tipo, quelle più vicine a OP₁ sono maggiori di quelle più lontane
- 2. se P è tra P_1 e P_2 oppure è oltre P_2 allora OP_2 è la minore di tutte le rette OP e, tra tutte le rette dello stesso tipo, quelle più vicine a OP_2 sono minori di quelle più lontane.



Proposizione 1.4.10 (Proposizione 107 (V, 73)). : Se O è un punto sotto l'asse maggiore di un'ellisse ed è tale che è possibile disegnare da O una sola normale alla semiellisse ABA', allora se OP_1 è quella normale e P_1 è nel quadrante AB, OP_1 sarà la maggiore tra tutte le rette da O alla semiellisse e, tra le altre rette dello stesso tipo, quelle più vicine a OP_1 saranno maggiori di quelle più lontane. Inoltre OA' sarà la minore tra tutte le rette da O alla semiellisse.



I risultati di questo libro sono, per la maggior parte, molto vicini alle moderne teorie sulle normali e binormali e ai raggi di curvatura della geometria differenziale delle curve (Frenet, XIX secolo) e alla teoria delle evolute, iniziata da Huygens nella seconda metà del XVII secolo.

1.5 Zenodoro

"I poligoni regolari hanno area massima tra tutti i poligoni con egual perimetro e numero di lati."

"Il cerchio ha area maggiore di qualsiasi poligono regolare di egual perimetro."

Tra il III e il I secolo a.C. Zenodoro, matematico e astronomo probabilmente ateniese, scrive l'opera Sulle figure isoperimetriche, contenente tra l'altro la dimostrazione delle due proposizioni sopra citate. Purtroppo questo libro, che può considerarsi la prima opera scientifica dedicata al problema isoperimetrico, è andato perduto; fortunatamente, però, si è potuto ricostruirne il contenuto attraverso il Libro V delle Mathematicae Collectiones di Pappo e ad un trattato nel commentario di Teone al I libro dell'Almagesto di Tolomeo.

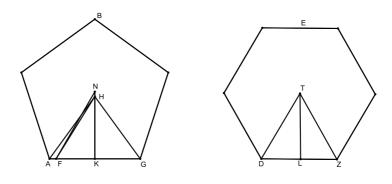
Pappo, matematico alessandrino del IV secolo d.C., con le sue *Collectiones*, opera in otto volumi, voleva produrre un compendio di tutta la matematica fino ad allora conosciuta. In particolare, nel Libro V compara le aree di figure piane differenti con lo stesso perimetro seguendo proprio il trattato di Zenodoro; inoltre compara anche i volumi di solidi diversi con la stessa area superficiale.

Per arrivare alla dimostrazione del teorema isoperimetrico di Zenodoro fra i poligoni aventi ugual perimetro, quelli regolari hanno area massima e il cerchio ha area maggiore di ogni poligono di egual perimetro sono necessarie delle proposizioni che, anche prese singolarmente, danno risultati utili. La dimostrazione è stata ricostruita attraverso il confronto delle

fonti sopra citate; operando in questo modo si è cercato di essere il più fedele possibile alla dimostrazione originaria di Zenodoro.

Proposizione 1.5.1 (Proposizione 1). Se due poligoni hanno egual perimetro, quello con più lati ha area maggiore.

Dimostrazione. Siano ABG e DEZ due poligoni regolari isoperimetrici, rispettivamente di n e m lati, con n < m.



Poiché n < m si ha

$$A\hat{H}G = \frac{2\pi}{n} > \frac{2\pi}{m} = D\hat{T}Z \text{ e } AG > DZ$$

Dall'uguaglianza dei perimetri si deduce che

$$\frac{AK}{MK} = \frac{AK}{DL} = \frac{AG}{DZ} = \frac{m}{n} = \frac{A\hat{H}G}{D\hat{T}Z}$$

in cui M è l'unico punto del segmento AK tale che MK = DL.

Dal lemma delle tangenti (che enunciamo solamente: sia ETL un triangolo rettangolo in L e sia M un punto interno al cateto EL, si ha $\frac{EL}{ML} > \frac{E\hat{T}L}{M\hat{T}L}$) si ottiene

$$\frac{AK}{MK} > \frac{A\hat{H}K}{M\hat{H}K}$$

Combinandole si ottiene

$$\frac{A\hat{H}K}{M\hat{H}K} < \frac{A\hat{H}G}{D\hat{T}Z} = \frac{A\hat{H}K}{D\hat{T}L}$$

da cui segue

$$M\hat{H}K > D\hat{T}L$$

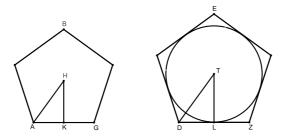
Sia N un punto sulla semiretta uscente da K contenente H tale che NK=LT. I due triangoli MHK e MNK sono rettangoli e hanno il cateto MK in comune, per cui si ha che

$$HK < NK = TL$$

Da ciò si deduce che l'area del poligono di n lati ABG, che è pari al prodotto del semiperimetro per l'apotema HK è inferiore all'area del poligono di m lati DEZ di apotema TL > HK.

Proposizione 1.5.2 (Proposizione 2). Un cerchio ha area maggiore di qualunque poliqono regolare ad esso isoperimetrico.

Dimostrazione. Sia ABG un poligono regolare di n lati e sia C un cerchio ad esso isoperimetrico. Sia p la misura del perimetro. Costruiamo il poligono regolare DEZ di n lati circoscritto al cerchio; naturalmente DEZ avrà il perimetro maggiore del perimetro di C, quindi l'apotema HK di ABG ha lunghezza inferiore all'apotema TL di DEZ.



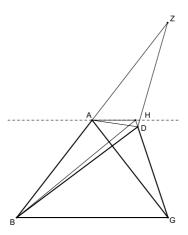
D'altra parte TL è un raggio del cerchio, quindi per il teorema di Archimede (che possiamo enunciare così: il prodotto del perimetro di un cerchio per il suo raggio è doppio dell'area del cerchio) si ha

$$\operatorname{area}(ABG) = \frac{1}{2}p \cdot HK < \frac{1}{2}p \cdot TL = \operatorname{area}(C)$$

e ciò conclude la dimostrazione.

Proposizione 1.5.3 (Proposizione 3). Sia DBG un triangolo di base BG, non isoscele. Il triangolo isoscele isoperimetrico ABG ha area maggiore.

Dimostrazione. Senza perdita di generalità, si supponga BD > GD e si tracci la retta r parallela a BG e passante per il punto A; si indichi con H il punto di intersezione tra r e la retta per DG e con Z il punto simmetrico di G rispetto ad r.



Per dimostrare che l'area di DBG è minore dell'area di ABG sarà sufficiente provare che l'area di DBG è minore dell'area di HBG, il che è provato dimostrando che D giace sotto la retta r, cioè che $G\hat{A}D < G\hat{A}H$. Per dimostrare ciò osserviamo che, per la disuguaglianza triangolare applicata al triangolo ZDB (notiamo che D non può appartenere alla retta AB, altrimenti non si avrebbe l'isoperimetria) si ha

$$ZD + DB > ZB = AB + AG = DB + DG$$

da cui

che, combinata col fatto che AZ = AG, implica

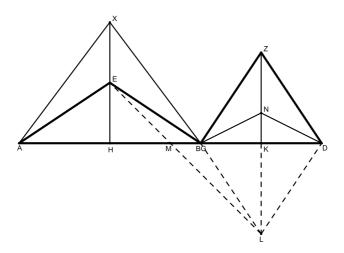
$$Z\hat{A}D > G\hat{A}D$$

e quindi si ricava ciò che volevamo: da $Z\hat{A}D+G\hat{A}D=2G\hat{A}H$ si ottiene $G\hat{A}D< G\hat{A}H$.

Proposizione 1.5.4 (Proposizione 4). Siano AEB e GZD due triangoli isosceli di basi non uguali AB e GD e con lati obliqui congruenti AE = GZ. Siano inoltre AXB e GND i due triangoli isosceli simili tali che AX+GN = AE + GZ. Si ha

$$area(AXB) + area(GND) > area(AEB) + area(GZD)$$

Dimostrazione. Supponiamo che $B \equiv G$ e che le due basi AB e GD siano allineate e tali che AB > GD. Chiamiamo L il simmetrico di Z rispetto alla retta AD, M il punto di intersezione tra EL e AB e H e K, rispettivamente, i piedi delle proiezioni di E e Z sulle basi AB e GD.



Da una proposizione chiamata "teorema di Pitagora in versione di somma" si ha che

$$(XB + BN)^2 = (XH + NK)^2 + HK^2$$

e anche

$$EL^{2} = (EM + ML)^{2} = (EH + LK)^{2} + HK^{2} = (EH + ZK)^{2} + HK^{2}$$

Per la disuguaglianza triangolare e la condizione di isoperimetria si ha

$$EL^2 < (EB + BL)^2 = (XB + BN)^2$$

Combinando questi ultimi tre risultati si ottiene

$$EH + ZK < XH + NK$$

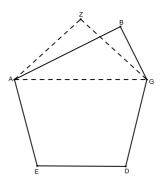
che, unito al fatto che XH > EH, ci fa dedurre che NZ < EX, da cui, ricordando che GK < HB si ricava

$$NZ \cdot GK < EX \cdot HB$$

che prova che la variazione totale dell'area, nel passaggio dai due triangoli iniziali AEB e GZD ai due triangoli simili AXB e GND è positiva. Ciò dimostra la tesi.

Proposizione 1.5.5 (Proposizione 5). Tra tutti i poligoni di uguale perimetro e numero di lati, quelli regolari hanno area massima.

Dimostrazione. La dimostrazione si divide in due parti. Per prima cosa si dimostra che se un poligono ABGD... non è equilatero allora è possibile costruirne un altro di ugual numero di lati e isoperimetrico, ma con area maggiore.



Per dimostrare ciò basta applicare la Proposizione 3 al triangolo ABG del poligono iniziale, in cui supponiamo $AB \neq BG$, ottenendo un nuovo poligono contenente il triangolo AZG. Questo mostra che l'area può essere massimizzata solo da poligoni equilateri.

A questo punto si considera un poligono equilatero e, attraverso la Proposizione 4, si dimostra che, se non fosse equiangolo, sarebbe possibile costruire

un poligono ad esso isoperimetrico e con lo stesso numero di lati, ma con area maggiore.

Questo vale per poligoni con n > 5 lati, infatti solo nei poligoni equilateri con almeno 5 lati è possibile individuare coppie di triangoli isosceli alle quali applicare la Proposizione 4.

Per quanto riguarda i poligoni con 3 lati, ogni triangolo equilatero è automaticamente equiangolo, ma l'esistenza deve essere data per scontata (cosa che era ai tempi di Zenodoro e anche a quelli di Pappo).

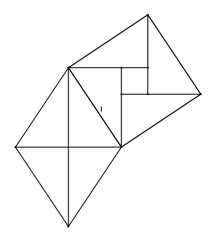
Il caso dei quadrilateri è un caso particolare: applicando quattro volte la Proposizione 3 ai triangoli individuati dalle diagonali, si può dimostrare che per ogni quadrilatero esiste un rombo isoperimetrico e di area non inferiore. In questo modo il problema viene ricondotto alla classe dei rombi. Si verifica immediatamente che, tra tutti i rombi di perimetro fissato, quello che ha area massima è il quadrato. Infatti è sufficiente decomporre il quadrato costruito su un lato di lunghezza l di un rombo in cinque parti: quattro triangoli rettangoli congruenti, con cateti le semidiagonali del rombo di lunghezze a < b, più un quadrato di lato b-a. Questo corrisponde a

$$l^2 = a^2 + b^2 = 2ab + (b - a)^2$$

da cui segue

$$2ab \le l^2 \tag{1.0}$$

e l'uguaglianza si ha solo se a=b, cioè quando il rombo coincide con il quadrato. In questo modo si è dimostrato che l'area del quadrato è maggiore di quella di ogni altro quadrilatero isoperimetrico e, in generale, che i poligoni di area massima, a parità di perimetro e numero di lati, sono quelli regolari.



I ragionamenti di Zenodoro hanno segnato profondamente il modo di affrontare il problema isoperimetrico, tanto che fino alla fine del XVII secolo si trovano ripetuti più o meno fedelmente. Il primo matematico che ha apportato delle innovazioni importanti alla questione è stato Jakob Steiner nel 1800, il quale inventò delle tecniche per dimostrare che ogni figura d'assegnato perimetro che racchiuda la massima area deve essere necessariamente un cerchio. Le tecniche di Steiner si basano su un semplice principio: sia S una figura piana d'area massima, se S non è un cerchio si può trovare un'altra figura piana T isoperimetrica a S ma che abbia area maggiore. Tuttavia anche Steiner lasciò una questione irrisolta: come fece notare Dedekind non si pone il problema dell'esistenza della soluzione del problema isoperimetrico. La teoria di Steiner fu perfezionata ad inizio '900 da Wilhelm Blaschke, il quale dimostrò l'esistenza di una figura con area massima usando un teorema di compattezza nella classe delle figure convesse.

La questione dell'esistenza rimase aperta fino alla fine del XIX secolo, quando Weierstrass propose una dimostrazione variazionale piuttosto generale dell'esistenza di figure di area massima. Dopo di lui, nel XX secolo, la *Teoria della Misura* di Lebesgue cambiò in modo radicale l'approccio alle questioni riguardanti le aree e i perimetri, in quanto la nozione di *misura secondo Lebesgue* consentiva di misurare l'area di molti più insiemi (si notò subito che la misura di Lebesgue era una generalizzazione del classico concetto di area

della geometria elementare). Per trovare una definizione altrettanto generale di perimetro che consentisse di misurare la lunghezza del bordo di insiemi particolarmente bizzarri bisognò aspettare gli anni '50 del XX secolo, quando Ennio De Giorgi riprese ed elaborò le idee di Caccioppoli e giunse alla dimostrazione dell'esistenza di soluzioni del problema isoperimetrico generale:

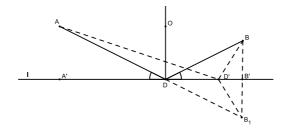
"tra tutte le figure piane aventi perimetro di De Giorgi assegnato, determinare quelle aventi misura di Lebesgue massima".

Adattando i ragionamenti di Steiner, dimostrò che queste figure sono necessariamente cerchi e questo vale in un qualsiasi spazio a dimensione finita.

1.6 Erone

Erone di Alessandria, matematico greco del I secolo d.C., interessato all'ottica e alla meccanica, ha scritto l'opera *Catottrica*, andata persa, ma di cui conosciamo gli argomenti trattati attraverso i commentari successivi in cui viene descritta.

In questo testo Erone ipotizza che la luce scelga sempre il percorso più breve come distanza per andare da un punto ad un altro; in questo modo riesce a dimostrare la legge della riflessione della luce: un raggio di luce proveniente da un punto A e incidente su uno specchio piano l in un punto D, viene riflesso nella direzione di un punto B tale che AD e BD formino con l angoli uguali. In pratica Erone dimostra che, fra tutti i cammini possibili per andare da A a B passando per lo specchio, il cammino più breve è quello per cui gli angoli di incidenza e riflessione sono uguali.



Dimostrazione. Sia B_1 il simmetrico del punto B rispetto alla retta l. Congiungiamo A con B_1 . Il punto D, punto di intersezione tra AB_1 ed l, è il punto per cui |AD| + |DB| è il minore cammino possibile per andare da A a B passando per lo specchio. Questo perché: consideriamo un altro punto $D' \neq D$ su l, allora

$$|AD'| + |D'B| = |AD'| + |D'B_1| > |AB_1| = |AD| + |DB|$$

dove abbiamo usato la proprietà della simmetria per cui $|DB| = |DB_1|$, $|D'B| = |D'B_1|$, e la disuguaglianza triangolare $|AD'| + |D'B_1| > |AB_1|$. Si noti che il punto D ha la proprietà che gli angoli A'DA e BDB' sono uguali; inoltre anche gli angoli ADO e ODB sono uguali: l'angolo di incidenza è uguale all'angolo di riflessione.

Gli storici della scienza vedono in questo principio una prima intuizione del fatto che la natura sia guidata da principi estremali e quindi il primo utilizzo del principio del minimo. L'idea di Erone venne ripresa nel XVII secolo da Fermat (come vedremo più avanti), il quale dimostrò che anche la legge della rifrazione della luce può essere enunciata in termini di principio del minimo: la dedusse infatti dall'assunzione che ciò che caratterizza la traiettoria di un raggio di luce che va da un punto ad un altro in un mezzo non omogeneo è l'impiego del tempo minimo.

Attraverso questo risultato possiamo mostrare un'altra dimostrazione per il teorema di Zenodoro.

Come abbiamo detto in un paragrafo precedente, Zenodoro dimostra, in modo rigoroso per gli standard dell'epoca, la seguente asserzione:

Se esiste un poligono piano con l'area più grande tra tutti i poligoni di dato perimetro, allora deve avere lati uguali e angoli uguali.

Se chiamiamo questo "poligono con l'area più grande" poligono massimale, il teorema si può esprimere più brevemente nel seguente modo:

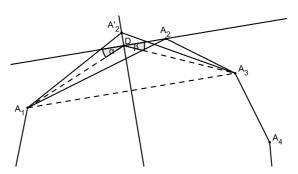
Un poligono massimale, se esiste, deve essere regolare.

Per dimostrarlo, è necessario dimostrare prima due lemmi e per farlo useremo due volte la soluzione del problema di Erone.

Lemma 1.6.1 (Lemma 1). Un poligono massimale deve avere lati uguali.

Dimostrazione. Sia $A_1A_2...A_n$ un poligono massimale, che è una figura convessa (perché un poligono non convesso non può essere massimale).

Per assurdo, supponiamo che non tutti i lati siano uguali. Siano A_1A_2 e A_2A_3 due lati consecutivi non uguali. Sia l la retta per A_2 parallela ad A_1A_3 .



Ora consideriamo il problema di Erone per la retta l e i punti A_1 e A_3 : vogliamo trovare il punto D su l che minimizzi la somma delle distanze $\mid A_1D\mid+\mid A_3D\mid$. Abbiamo visto che gli angoli α e β devono essere uguali, ma α è uguale all'angolo DA_1A_3 e β è uguale a DA_3A_1 . Questo vuol dire che A_1DA_3 è un triangolo isoscele, quindi D non coincide con A_2 .

Inoltre, l'area del triangolo A_1DA_3 è uguale all'area del triangolo $A_1A_2A_3$, perché hanno stessa base e stessa altezza; si ha anche che la somma dei lati A_1D e DA_3 è minore della somma dei lati A_1A_2 e A_2A_3 , in quanto D è la soluzione del problema di Erone.

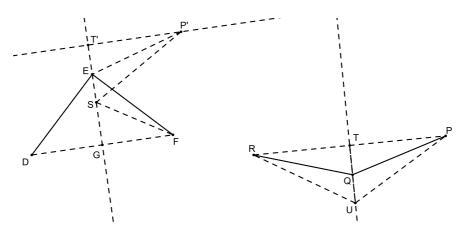
Costruiamo allora il triangolo isoscele $A_1A_2'A_3$ tale che $|A_1A_2'| + |A_2'A_3| = |A_1A_2| + |A_2A_3|$. Naturalmente quest'area è più grande dell'area del triangolo $A_1A_2A_3$, perché l'altezza $A_2'C$ è maggiore dell'altezza DC. Ma questo implica che l'area del poligono $A_1A_2' \dots A_n$ è più grande dell'area del poligono $A_1A_2 \dots A_n$, nonostante i poligoni siano isoperimetrici. Si è giunti a una contraddizione con l'ipotesi che il poligono fosse massimale, per cui la dimostrazione è completata.

Lemma 1.6.2 (Lemma 2). Un poligono massimale deve avere angoli uguali.

Dimostrazione. Sia $A_1A_2...A_n$ un poligono massimale che, come abbiamo visto, ha tutti i lati uguali e deve essere convesso.

Per assurdo, supponiamo che non tutti gli angoli siano uguali; ci saranno allora due angoli consecutivi diversi, siano α e β . Vogliamo mostrare che questo implica l'esistenza di due angoli non adiacenti diversi: consideriamo gli angoli successivi α , β , γ , δ , ε del poligono. Se $\alpha \neq \gamma$ o $\beta \neq \delta$, siamo a posto (perché non sono adiacenti); se $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$ e $\alpha \neq \beta$ la sequenza di angoli possiamo scriverla $\alpha\beta\alpha\beta\varepsilon$. Il primo e il quarto angolo non sono adiacenti e sono diversi, quindi ho mostrato ciò che volevo.

Da questa assunzione possiamo concludere che ci sono due triangoli DEF e PQR, ognuno dei quali formato da vertici successivi del poligono, tali che l'angolo in E sia minore dell'angolo in Q.



Siccome | DE |=| EF |=| PQ |=| QR |, la disuguaglianza degli angoli in E ed F implica | DF |<| PR |. Da E e Q tracciamo le perpendicolari EG a DF e QT a PR. Prolunghiamo EG fino al punto T' e formiamo il triangolo ET'P' congruente al triangolo PQT. Consideriamo a questo punto il problema di Erone sulla retta T'G riguardante i punti P' e F. Sia S la soluzione del problema di Erone; siccome l'angolo P'ET' (uguale a metà PQR) è maggiore dell'angolo FEG (ugale a metà DEF), il punto S non coinciderà con il punto E (la soluzione del problema di Erone è quel punto S tale che

P'ST' = FSG) e giacerà sul segmento EG.

Adesso tracciamo la retta QT e su essa prendiamo il punto U tale che TU=T'S. Consideriamo i triangoli DSF e PUR: la somma dei lati DS, SF e RQ, QP è minore della somma dei lati DE, EF e RQ, QP dei triangoli DEF e PQR

$$|DS| + |SF| + |PU| + |UR| = 2(|SF| + |SP'|) < 2(|FE| + |EP'|)$$

= $|DE| + |EF| + |PQ| + |QR|$

dove abbiamo usato il fatto che i nostri triangoli sono isosceli e che S è la soluzione del problema di Erone.

D'altra parte, l'area del triangolo P'ES è più grande dell'area del triangolo ESF, in quanto le loro rispettive altezze sono $\mid P'T'\mid = \frac{1}{2}\mid PR\mid$ e $\mid FG\mid = \frac{1}{2}\mid DF\mid$ e abbiamo già notato che $\mid DF\mid <\mid PR\mid$. Da ciò segue che la somma delle aree dei triangoli DSF e PUR è maggiore della somma delle aree dei triangoli di partenza DEF e PQR:

(uso la notazione DEF per intendere "l'area di DEF")

$$DSF + PUR = DEF - 2ESF + PQR + 2P'ES >$$

 $> DEF + PQR$

Questo significa che il poligono $DSF \dots PUR \dots$ ha perimetro minore e area più grande del poligono di partenza $DEF \dots PQR \dots$

Adesso possiamo trattare ogni triangolo $(DSF \circ PUR)$ come abbiamo trattato A_1DA_3 nella dimostrazione del lemma precedente, in modo da ottenere un poligono isometrico con il poligono $DEF \dots PQR \dots$ Siccome l'area del nuovo poligono è più grande dell'area del poligono $DSF \dots PUR \dots$, sicuramente sarà più grande dell'area del poligono dato, e questa è una contraddizione con il fatto che il poligono dato era massimale.

Con questi due lemmi si ottiene che

Un poligono massimale è regolare.

Quello che potremmo domandarci è: chi ci dice che questo poligono massimale esista? Come abbiamo detto, la questione dell'esistenza delle soluzioni non era contemplata dagli autori antichi; solo nel XIX secolo i matematici hanno cominciato ad apprezzare la questione dell'esistenza e hanno cominciato a sviluppare metodi di dimostrazione dei teoremi di esistenza. Per avere la dimostrazione "completa", quindi, dovremmo aggiungere un terzo lemma:

Lemma 1.6.3 (Lemma 3). Esiste un poligono massimale.

Capitolo 2

Gli albori del calcolo differenziale: Fermat e Huygens

Nel 1637 il francese Pierre de Fermat pubblica un manoscritto intitolato *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* in cui riporta le sue ricerche sui massimi e minimi di una funzione (o, per meglio dire, di una grandezza variabile, in quanto il concetto di *funzione* si svilupperà solamente molti decenni più tardi) e, nella seconda parte, *De tangentibus linearum curvarum*, utilizza questo metodo per determinare le tangenti alle curve. In realtà Fermat non avrebbe pubblicato il suo elaborato se non fosse stato spinto dall'amico e corrispondente Martin Marsenne, il quale, in corrispondenza anche con Descartes, gli fa avere una copia della sua *Géométrie*, che sarebbe stata pubblicata di lì a breve e in cui sarebbe stato contenuto un metodo per il calcolo delle tangenti.

2.1 Methodus ad disquirendam maximam et minimam

Per il suo lavoro sulla teoria dei massimi e dei minimi Fermat sfrutta il concetto, di origine kepleriana, di *adaequatio*, che consiste nell'uguagliare due

quantità che sono approssimativamente uguali.

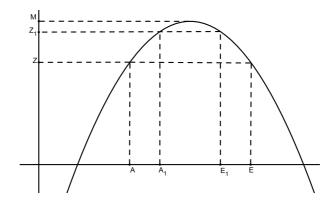
Consideriamo una funzione f di cui vogliamo calcolare, ad esempio, il massimo M.

Se prendiamo un valore Z minore di M, l'equazione f(X) = Z avrà due soluzioni: A ed E che si troveranno in parti opposte rispetto ad M.

Poiché f(A)=Z e f(E)=Z, si ha f(A)=f(E), cioè f(A)-f(E)=0 e quindi, dividendo per A-E si ottiene

$$\frac{f(A) - f(E)}{A - E} = 0$$

Se ora avviciniamo Z a M, sempre restando al di sotto, anche i punti A ed E si avvicineranno fra loro, finché coincideranno quando Z raggiungerà il valore massimo M. Quindi, dopo aver fatto le dovute semplificazioni, si pone E = A e si trova una equazione dalla quale si può ricavare il punto di massimo A e quindi il valore di M.



Per esempio, si voglia trovare il rettangolo di area massima tra tutti quelli di perimetro dato.

Sia 2B il perimetro, A la base e B-A l'altezza; l'area sarà $(B-A)A=BA-A^2$. Si deve quindi trovare il massimo della funzione $f(A)=BA-A^2$: poniamo f(A)-f(E)=0, cioè $BA-A^2-BE+E^2=0$, da cui

$$B(A - E) - (A^2 - E^2) = 0$$

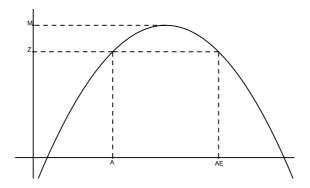
Dividiamo per A - E e semplifichiamo

$$B - (A + E) = 0$$

Ponendo E=A si trova B-2A=0 e quindi $A=\frac{B}{2}$. Quindi il rettangolo di area massima è il quadrato.

Questo appena esposto è il primo metodo dei massimi e minimi. Un punto importante è la divisione per A-E e quindi la semplificazione; in questo esempio si è rivelata un'operazione abbastanza semplice, in quanto $A^2-E^2=(A+E)(A-E)$, ma quando si ha a che fare con potenze di grado più alto si devono fare divisioni più complicate e calcoli molto più lunghi. Per questo motivo Fermat elabora una piccola variante, il secondo metodo dei massimi e minimi.

Le due soluzioni incognite dell'equazione f(X) = Z vengono indicate non più come A ed E, bensì come A e A+E; a questo punto si scrive f(A+E)-f(A) = 0, si divide per E e infine si pone E = 0.



L'intera teoria della determinazione dei massimi e dei minimi si fonda su due espressioni simboliche e su questa unica regola: sia A un termine qualunque del problema (piano, solido o di linea, a seconda di come sia conveniente per raggiungere lo scopo proposto) e, trovato il massimo o il minimo espresso in termini che contengono A o potenze di A, di grado qualunque, si ricominci

indicando con A+E quello che prima era A e si trovi di nuovo il massimo o il minimo in termini contenenti A ed E di grado qualunque. Si adeguaglino, come dice Diofanto, le due espressioni omogenee dei massimi o dei minimi e, sottratti i termini comuni (fatto questo, i due membri omogenei conterranno solamente termini in E o potenze di E) si dividano entrambe per E o per una potenza di E di grado superiore, finché E sia eliminata completamente da almeno uno dei termini. Si elidano poi da una parte e dall'altra i termini contenenti E o potenze di E e si eguaglino i termini che restano; oppure, se da una parte non resta nulla, si eguaglino, il che è lo stesso, i termini negativi ai positivi. La soluzione di quest'ultima uguaglianza darà il valore A, noto il quale, si conosceranno i massimi o minimi seguendo la traccia della precedente soluzione. Consideriamo un esempio.

Si divida la retta AC nel punto E tale che il rettangolo AEC sia massimo.

Indichiamo con B la retta AC. Sia A una delle due parti di B, quindi la rimanente sarà B-A e il rettangolo formato da questi due segmenti, del quale si deve trovare il massimo, sarà B per A-Aq. Si assuma poi che una parte di B sia A+E, dunque òa parte restante sarà B-A-E e il rettangolo che ha per lati questi segmenti sarà B per A-Aq. +B per E-A per E due volte -Eq. che si dovrà adeguagliare al rettangolo precedente B per A-Aq.

Sottratti i termini uguali B per E adeguaglierà A per E 2 volte +Eq. e, divisi tutti i termini per E, B eguaglierà A 2 volte +E. Si elimini E e quindi B eguaglierà A due volte, dunque B si deve dividere a metà per risolvere il problema iniziale, né si può dare un metodo più generale.

(traduzione da "Methodus ad disquirendam maximam et minimam", P. de Fermat, 1637)

Riassumendo in termini moderni, abbiamo un segmento di lunghezza nota B che vogliamo dividere in due parti in modo tale che i due segmenti ottenuti siano i lati del rettangolo di area massima. Si indica allora con A uno dei due segmenti e con B-A l'altro. La relazione da massimizzare si esprime in questo modo: $BA-A^2$, che rappresenta l'area del rettangolo.

A questo punto si riconsidera il primo segmento incognito A e lo si incrementa di un valore E; il primo segmento sarà ora A + E e l'altro B - A - E. La relazione da massimizzare diventa: (A + E)(B - A - E), cioè $BA - A^2 + BE - 2AE - E^2$.

Le due espressioni che rappresentano l'area del rettangolo non sono esattamente uguali, perché nel secondo caso abbiamo incrementato A di una quantità non nulla E, quindi non possono essere uguagliate, bensì adeguagliate:

$$BA - A^2 \approx BA - A^2 + BE - 2AE - E^2$$

Adesso, secondo le usuali regole dell'algebra, si possono eliminare i termini uguali in entrambi i membri dell'adequazione, da cui si ottiene

$$BE \approx 2AE + E^2$$

Dividiamo per E, supponendo per ora che sia diverso da zero, e otteniamo

$$B \approx 2A + E$$

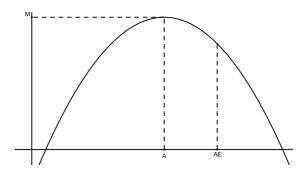
A questo punto, siccome l'incognita iniziale è A, l'incremento E deve valere 0; si pone allora E=0 e quindi l'adequazione diventa una vera equazione:

$$B = 2A$$

da cui $A = \frac{B}{2}$, cioè l'area del rettangolo è massima quando il lato è la metà del segmento dato, cioè quando il rettangolo è un quadrato.

Da un punto di vista tecnico, l'unica differenza tra il primo e il secondo metodo è quella di sostituire la divisione per A - E, che in generale potrebbe essere piuttosto lunga ed elaborata, con la divisione per la sola E, di certo

più semplice. In effetti questa è una semplificazione reale, in quanto è vero che così facendo si deve calcolare f(A+E), che è più complicata di f(E), ma questo calcolo comporta solo quello di potenze di A+E, più facili da eseguire rispetto alle divisioni per A-E. In realtà, ciò che sembra un mero miglioramento tecnico è qualcosa in più. Esaminando le quantità A ed E che appaiono nei due metodi si nota che esse cambiano in modo che sarà utile per gli utilizzi successivi: nel primo metodo le quantità A ed E vengono utilizzate in maniera simmetrica, in quanto rappresentano le soluzioni dell'equazione f(X) = Z e quindi al variare di Z anch'esse variano fino a coincidere quando Z = M (cioè sono entrambe incognite e variabili e solo per Z = M si fondono in una sola); nel secondo metodo, invece, chiamando A + E la variabile che prima era chiamata E, si perde la simmetria formale e A diventa fin dall'inizio la posizione, incognita, ma non variabile, del punto di massimo, mentre E rappresenta la variazione, variabile, ma non incognita, che si fa subire al punto di massimo.



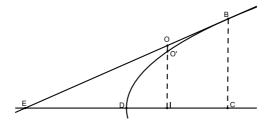
Fermat si basa su un'idea di Keplero per cui nell'intorno di un massimo o di un minimo le variazioni dell'ordinata sono insensibili rispetto all'incremento E dell'ascissa corrispondente al massimo. Per questo motivo si ha un'adequazione, cioè un'equazione approssimata che diventerà vera solo quando si porrà E=0, invece di una equazione, come nel primo metodo, cioè con una rappresentazione moderna:

$$\frac{f(A+E) - f(E)}{E} \bigg|_{E=0} = 0$$

In linea di principio il metodo di Fermat funziona correttamente per determinare il valore di una incognita che massimizzi o minimizzi una relazione, anche se Fermat non spiega chiaramente quali siano le motivazioni matematiche su cui si è basato per determinare questa regola.

2.2 De tangentibus linearum curvarum

Il secondo metodo dei massimi e minimi è molto adatto per affrontare il problema delle tangenti a una curva; nello specifico, riportando esattamente l'unico esempio proposto da Fermat stesso, vediamo la determinazione della tangente a una parabola.



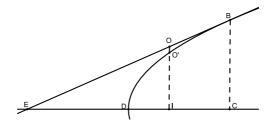
Riconduciamo al metodo precedente la determinazione della tangente a una curva qualsiasi in un punto dato. Si consideri, ad esempio, la parabola BDN di vertice D e diametro DC e si fissi il punto B da cui viene condotta la tangente alla parabola che interseca il diametro nel punto E. Si consideri un punto qualsiasi O che giace sulla retta BE e si traccino le ordinate OI e BC; il rapporto tra CD e DI sarà maggiore del rapporto del quadrato di BC al quadrato di OI, perché il punto O è esterno alla parabola. Per la similitudine dei triangoli, il quadrato di BC sta al quadrato di OI come il quadrato di CE sta al quadrato di IE e dunque il rapporto tra CD e DI sarà maggiore del rapporto tra il quadrato di CE e il quadrato di IE. Poiché B è un punto fissato, sarà nota anche la sua ordinata BC e quindi saranno noti

sia il punto C che il segmento CD. Sia dunque CD uguale a d (indichiamo con le lettere minuscole le lunghezze dei segmenti), CE uguale ad a e CI uguale a e. Allora il rapporto tra d e d-e sarà maggiore del rapporto tra aq e aq+eq-a per e due volte. Moltiplicando i medi e gli estremi della proporzione si ha d per aq+d in eq-d per e que volte maggiore di e per e que volte maggiore di e per e que volte sottraggano i termini comuni: e per e que volte adeguaglia e per e che si può scrivere anche: e per e que volte e si ha e per e que volte. Dividendo tutto per e si ha e per e que volte. Dividendo tutto per e si ha e per e que volte. Si elimini e per e quindi e que uguaglierà e per e due volte e infine e uguaglierà e due volte. Quindi abbiamo provato che e è il doppio di e come deve essere.

Questo metodo non sbaglia mai e anzi può essere esteso a molte bellissime questioni...

(traduzione da "Methodus ad disquirendam maximam et minimam", P. de Fermat, 1637)

Traduciamo in termini moderni: consideriamo la parabola BDN di vertice B e determiniamo la tangente in un suo punto B. La tangente incontra



il diametro, che nel nostro caso è l'asse, nel punto E; consideriamo il punto O che giace sulla retta tangente e conduciamo la perpendicolare OI all'asse, che interseca la parabola nel punto O'. I segmenti BC e O'I sono le ordinate dei punti B e O' che giacciono sulla parabola, le cui ascisse sono CD e ID. La proprietà della parabola ci dice che le ascisse stanno fra loro come i

quadrati delle rispettive ordinate:

$$CD:DI=BC^2:O'I^2$$

e siccome OI > OI' (perché il punto O è esterno alla parabola)

$$CD:DI = BC^2:O'I^2 > BC^2:OI^2$$

Consideriamo ora i triangoli rettangoli $B\hat{C}E$ e $O\hat{I}E$: essi sono simili per cui si ha

$$BC:OI=CE:IE$$

da cui

$$BC^2:OI^2=CE^2:IE^2$$

e quindi

$$CD:DI>CE^2:IE^2$$

A questo punto Fermat sostituisce la disuguaglianza con una adequazione:

$$CD:DI\approx CE^2:IE^2$$

Questa adequazione geometrica si può esprimere in termini algebrici ponendo $CD=d,\,CE=a$ e $CI=e,\,$ da cui $ID=d-e,\,DE=a-d$ e IE=a-e

$$\frac{d}{d-e} \approx \frac{a^2}{(a-e)^2}$$

$$d(a-e)^2 \approx a^2(d-e)$$

$$da^2 + de^2 - 2dae \approx a^2d - a^2e$$

Eliminando i termini

$$de^2 - 2dae \approx -a^2e$$

$$de^2 + a^2e \approx 2dae$$

dividiamo per e

$$de + a^2 \approx 2da$$

da cui, ponendo e = 0:

$$a = 2d$$

Abbiamo così ottenuto che in una parabola la sottotangente CE è doppia del segmento CD, cioè che per trovare la tangente alla parabola nel punto B basta prendere un punto E sull'asse in modo tale che CD = DE, così che la retta EB sarà la tangente cercata.

Vediamo in che modo questo metodo è legato a quello dei massimi e minimi:

consideriamo la disuguaglianza $CD:DI>BC^2:OI^2$ che possiamo scrivere $CD:BC^2>DI:OI^2$; se prendiamo un punto O qualsiasi a destra di B questa relazione ci dice che il rapporto $\frac{DI}{OI^2}$ è sempre minore del rapporto fissato $\frac{CD}{BC^2}$ e al più diventa uguale quando O coincide con B, ovvero e=0. Dalla similitudine dei triangoli BCE e OIE è

$$OI^2: IE^2 = BC^2: CE^2$$

allora

$$\frac{ID}{IO^2} = \frac{ID \cdot CE^2}{CB^2 \cdot IE^2}$$

che in termini algebrici, con CB = b, diventa

$$\frac{ID}{IO^2} = \frac{(d-e) \cdot a^2}{b^2 \cdot (a-e)^2}$$

In questa equazione l'unica grandezza che varia è e, quindi possiamo considerarla una "funzione di e":

$$f(e) = \frac{(d-e) \cdot a^2}{b^2 \cdot (a-e)^2}$$

e provare che ha un massimo per e=0. In questo modo il metodo delle tangenti è ricondotto al metodo dei massimi e minimi, anche se ci sono dei punti da precisare.

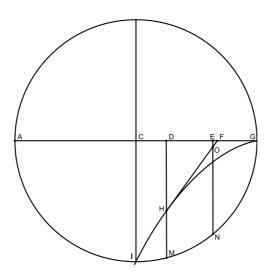
Il primo è che mentre nel metodo dei massimi e minimi l'incognita A denota la posizione del massimo o del minimo, nel problema della determinazione

della tangente questo punto è noto fin dall'inizio (cioè si sa a priori che il massimo della funzione f(e) deve cadere nel punto e=0) e si punta proprio su questo fatto per determinare la distanza incognita a=CE.

Il secondo è che Fermat non applica il metodo dei massimi e minimi all'espressione di f(e), ma utilizza direttamente l'adequazione, ottenuta scrivendo sulla tangente la proprietà specifica della curva.

Vediamo lo stesso metodo applicato alla cissoide di Nicomede e alla cicloide.

Cissoide di Nicomede



Per trovare la tangente in un dato punto H della curva, Fermat chiama a la sottotangente DF e pone AD = z, DG = n, DH = r e DE = e. La proprietà caratteristica della cissoide è espressa dalla proporzione

$$MD:DG=DG:DH$$

Tenendo conto del fatto che il triangolo AMG è rettangolo, per il II teorema di Euclide si ha $DM^2 = z \cdot n$, per cui, siccome $DM \cdot DH = DG^2$, si ha

$$r\sqrt{zn} = n^2$$

A questo punto Fermat ci dice che si deve considerare la proprietà specifica non più sulla curva, bensì sulla tangente; si trova quindi

$$NE:EG\approx EG:EO$$

Siccome
$$EG = n - e$$
, $EO = \frac{ra - re}{a}$ e $EN = \sqrt{zn - ze + ne - e^2}$ si ottiene

$$\sqrt{zn-ze+ne-e^2}:(n-e)\approx(n-e):\frac{ra-re}{a}$$

Elevando al quadrato e semplificando si ottiene

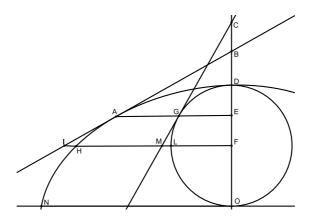
$$(n-e)^4 \cdot a^2 \approx (zn - ze + ne - e^2) \cdot (ra - re)^2$$

Ricordando che $r\sqrt{zn} = n^2$, i termini senza e si semplificano (a sinistra e a destra dell'adequazione si trova il termine $n^4 \cdot a^2$), è possibile quindi dividere per e e poi porre e = 0 (metodo dei massimi e dei minimi). Si giunge così a

$$3z \cdot a + n \cdot a = 2z \cdot n$$

da cui si trova la sottotangente a.

Cicloide



La cicloide è una curva trascendente e si definisce come la curva generata da un punto che giace su una circonferenza che rotola senza strisciare su una retta. La sua proprietà caratteristica è che tagliandola con una retta orizzontale come AE, il segmento AG tra la cicloide e il cerchio generatore è uguale all'arco di circonferenza GD.

Per trovare la tangente alla cicloide in un suo punto A si traccia la retta orizzontale AE e nel punto G la tangente GC alla circonferenza, nota dalla geometria elementare. In particolare possono considerarsi noti i segmenti GC e CE.

Se scriviamo la proprietà caratteristica della cicloide relativamente alla retta IF si avrà che il segmento HL è uguale all'arco LD, cioè la somma degli archi DG e GL. Fermat agisce in questo modo: prende le ordinate sulle tangenti trovate col metodo precedente al posto di quelle sulle curve, cioè al posto del segmento HL - con H ed L sulle curve - si prende il segmento IM - con I ed M sulle tangenti. Inoltre si possono prendere porzioni delle tangenti al posto delle porzioni corrispondenti di curve, cioè al posto dell'arco GL si può prendere la porzione di tangente GM. Facendo ciò l'equazione diventa una adequazione:

$$IM \approx GD + GM = AG + GM$$

Passiamo alla notazione algebrica ponendo DE = b, FE = e, BE = a, AG = c, AE = d, GC = l e CE = m; in questo modo si ha BF = a + e e, applicando il teorema di Talete ai triangoli IFB e MFC si trova

$$IF: AE = BF: BE \text{ da cui } IF = \frac{(a+e)d}{a}$$

$$MF: GE = CF: CE \text{ da cui } MF = \frac{(m+e)(d-c)}{m}$$

$$GM: GC = EF: EC \text{ da cui } GM = \frac{l \cdot e}{m}$$

da cui

$$IM = IF - MF = d + \frac{d \cdot e}{a} - d + c - \frac{(d-c)e}{m} = c + \frac{d \cdot e}{a} - \frac{d \cdot e}{m} + \frac{c \cdot e}{m}$$

L'adequazione diventa allora

$$c + \frac{d \cdot e}{a} - \frac{d \cdot e}{m} + \frac{c \cdot e}{m} \approx c + \frac{e \cdot l}{m}$$

e dunque

$$\frac{d \cdot e}{a} - \frac{d \cdot e}{m} + \frac{c \cdot e}{m} \approx \frac{e \cdot l}{m}$$

Dividendo per e si ottiene

$$\frac{d}{a} \approx \frac{d}{m} - \frac{c}{m} + \frac{l}{m}$$

da cui

$$a = \frac{m \cdot d}{l + d - c}$$

Come abbiamo detto e si vede bene da questi esempi, il metodo delle tangenti è basato sul metodo dei massimi e minimi, ma in modo indiretto, in quanto passa per l'assunzione che la proprietà caratteristica della curva in esame si tramuti in adequazione quando si passi dalla curva alla tangente.

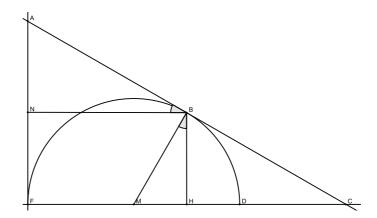
2.3 Un problema di massimo risolto geometricamente

Abbiamo già visto come Fermat proponga molte applicazioni del suo metodo dei massimi e minimi, spesso per sottolineare quanto sia buono; tra tutti i problemi che risolve, però, ce n'è uno, esposto nel Ad methodum de maxima et minima appendix, in cui Fermat non usa il suo metodo analitico (che è comunque applicabile, come vedremo), bensì utilizza delle considerazioni geometriche, ritenute una via più elegante.

Consideriamo la semicirconferenza FBD di diametro FD; sia BH la perpendicolare al diametro. Si vuole trovare il massimo del prodotto $FH \cdot HB$.

Risoluzione di Fermat

Fermat osserva che il problema consiste nel determinare, tra tutte le iperboli di equazione xy = k, quella che sia tangente alla semicirconferenza, Se B è il punto di tangenza delle due curve, naturalmente esse hanno la stessa



retta come tangente. Da una proposizione di Apollonio dimostrata nelle Coniche, se $A \in C$ sono punti di intersezione delle tangenti con gli assi allora AB = BC. Sia M il centro della semicirconferenza e sia BN la perpendicolare all'asse AF; allora il triangolo MBH è simile al triangolo ANB (perchè hanno $A\hat{N}B$ e $B\hat{H}M$ retti e $H\hat{B}M$ e $A\hat{B}N$ congruenti in quanto complementari dello stesso angolo $M\hat{B}N$), inoltre l'ipotenusa AB è uguale ad AF in quanto entrambi tangenti per A alla semicirconferenza. I triangoli ABN e AFC sono simili (perché BN è parallela a CF) e AC = 2AB per la proposizione di Apollonio, quindi anche AB = 2AN e quindi anche BM = 2MH. Per cui FHFM + MH è uguale a $\frac{3}{2}$ del raggio della circonferenza e il problema è risolto.

La soluzione analitica

Come abbiamo detto, il problema può essere risolto anche con il metodo dei massimi e minimi di Fermat: sia x l'ascissa di B e r il raggio e quindi $BH = \sqrt{r^2 - (x-r)^2}$; la funzione da massimizzare sarà

$$f(x) = x\sqrt{r^2 - (x - r)^2}$$

Consideriamo due punti x_1 e x_2 tali che $f(x_1) = f(x_2)$; elevando al quadrato si ha

$$x_1^2(r^2 - (x_1^2 + r^2 - 2x_1r)) = x_2^2(r^2 - (x_2^2 + r^2 - 2x_2r))$$

da cui

$$x_1^3(2r - x_1) = x_2^3(2r - x_2)$$

$$2r(x_1^3 - x_2^3) - (x_1^4 - x_2^4) = 0$$

$$2r(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) - (x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2) = 0$$

$$2r(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) - (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) = 0$$

Dividiamo per $(x_1 - x_2)$

$$2r(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) - (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) = 0$$

Infine, ponendo $x_1 = x_2 = x$, si ottiene un'equazione con soluzioni x = 0, estremo dell'intervallo in cui può variare x e che corrisponde al minimo di f(x), e $x = \frac{3}{2}r$, che è la soluzione richiesta.

2.4 "Analysis ad refractiones" e "Synthesis ad refractiones"

Analysis ad refractiones e Synthesis ad refractiones sono gli ultimi due libri, mandati da Fermat come allegati a una lettera al collega Marin Cureau de la Chambre, di un insieme di nove sul metodo dei massimi e minimi e riuniti insieme in un'opera chiamata Maxima et Minima.

Questi lavori sono fondamentali in quanto Fermat vi espone il suo principio:

la natura opera in modi che siano i più facili e i più veloci

Fermat capisce che in generale non è vero che la natura agisce sempre lungo i cammini più corti, anzi, propone l'esempio di Galileo: quando delle particelle si muovono sotto l'azione della gravità, esse procedono lungo cammini che impiegano il tempo minimo.

Questo enunciato è il primo ad apparire nella forma corretta e viene usato da Fermat per dimostrare la legge di Snell sulla rifrazione della luce, trovata

da quest'ultimo in modo sperimentale. Anche Descartes arriva alla stessa legge indipendentemente da Snell, deducendola dalle sue convinzioni sulla propagazione della luce: ritiene che la velocità della luce sia maggiore in un mezzo più denso e minore in un mezzo più rarefatto - come l'aria.

Fermat, invece, deriva la legge della rifrazione dall'assunzione opposta (che si rivelerà essere quella giusta): la luce si muove più lentamente in un mezzo più denso rispetto a un mezzo più rarefatto. Per dimostrarla utilizza, come abbiamo detto, il suo principio in questa forma:

in un mezzo non omogeneo, la luce viaggia da un punto a un altro lungo il cammino che richiede il tempo minimo.

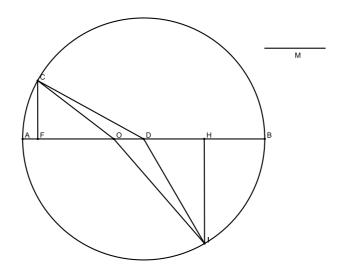


Figura 2.1: Fig.1

Consideriamo il cerchio ACBI con centro in D costituito dai due mezzi ACB e AIB con densità differenti. Supponiamo che un raggio di luce venga emesso dal punto C che si trova nel mezzo più rarefatto e arrivi al punto B nel mezzo più denso, superando l'interfaccia ADB. Il segmento M, esterno al cerchio, rappresenta la misura della resistenza della luce nel mezzo più rarefatto, mentre la resistenza nel mezzo più denso è data dalla lunghezza del segmento DF (Fermat usa il termine resistenza per indicare il reciproco

della velocità).

Il problema da risolvere è: collocare il punto O in modo tale che il tempo impiegato dal raggio di luce che parte da C e arriva a I, passando per O, sia minimo.

Introduciamo delle notazioni: siano F e H i piedi delle perpendicolari rispettivamente da C e I su AB, chiamiamo CD (raggio) $=N,\ DF=B$ e DH=A.

Secondo Fermat il valore minimo per il tempo è

$$N \cdot M + N \cdot B$$

che deriva dall'assunzione sulle velocità nei due mezzi, in quanto in un mezzo omogeneo (e i nostri due mezzi, considerati separatamente, lo sono) il tempo varia in modo direttamente proporzionale alla distanza percorsa e in modo inversamente proporzionale alla velocità.

Per mostrare ciò, sia DO=Ee, dal teorema dei coseni di Carnot applicato al triangolo COD si trova

$$CO^2 = N^2 + E^2 - 2N \cdot E \cdot \sin(\hat{CDO})$$

ma siccome $N \cdot \sin(\hat{CDO}) = DF$

$$CO^2 = N^2 + E^2 - 2B \cdot E$$

Analogamente, agendo sul triangolo *ODI* si trova

$$OI^2 = N^2 + E^2 + 2A \cdot E$$

(in quanto $ID \cdot \sin(\hat{ODI}) = -DH$)

La quantità da minimizzare diventa quindi

$$CO \cdot M + IO \cdot B = M\sqrt{N^2 + E^2 - 2BE} + B\sqrt{N^2 + E^2 + 2AE}$$

Fermat afferma che questa espressione può essere studiata col suo metodo dei massimi e dei minimi: il punto O deve essere posizionato su AB in modo tale che $CO \cdot M + IO \cdot B$ sia minima per il tempo. Pone allora

$$CO \cdot M + IO \cdot B \approx N \cdot M + N \cdot B$$

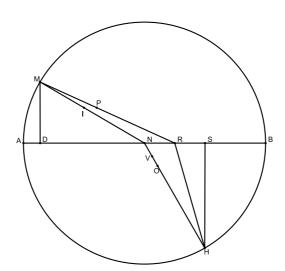
cioè fa un'adequazione e, attraverso calcoli algebrici, arriva al risultato A=M, da cui deriva (ricordando che più il mezzo è denso, più la luce procede lentamente)

$$\frac{DF}{DH} = \text{cost.} > 1$$

e questa conduce alla legge della rifrazione

$$\frac{\sin(F\hat{C}D)}{\sin(H\hat{I}D)} = \frac{DF}{DH} = \text{cost.} > 1$$

Quanto fin qui trovato, cioè la condizione necessaria , è quanto esposto nell' Analysis ad refractiones; in Synthesis ad refractiones Fermat nota come lui e Descartes siano giunti alla stessa conclusione nonostante siano partiti da ipotesi opposte (come già detto, per Descartes la luce si muove a velocità maggiore in un mezzo più denso rispetto ad uno più rarefatto) e poi passa all'analisi della condizione sufficiente: data la legge precedente, un raggio che si muove da un punto M nel primo mezzo verso un punto H nel secondo mezzo lungo il cammino MNH, con N centro della circonferenza, impiegherà il tempo minimo.



Fermat parte dal risultato del rapporto c tra la velocità nel primo mezzo e quella nel secondo

$$\frac{DN}{NS} = c > 1$$

dove assume esplicitamente (ponendo c>1)che la velocità nel primo mezzo, quello più rarefatto, sia maggiore di quella nel secondo mezzo, più denso. Siano D ed S i piedi delle perpendicolari rispettivamente di M e H su AB (linea di separazione dei mezzi), sia R un punto arbitrario sulla stessa linea e siano I e P punti rispettivamente su MN ed MR tali che

$$c = \frac{DN}{NS} = \frac{MR}{RP} = \frac{MN}{NI}$$

Si scelgano ora altri due punti O e V su RH in modo tale che

$$\frac{MN}{DN} = \frac{RN}{NO} \qquad \frac{DN}{NS} = \frac{NO}{NV}$$

Si vuole mostrare che il tempo che impiega un raggio di luce per andare da M ad H lungo il cammino MNH è minore del tempo lungo un qualsiasi altro cammino MRH; introduciamo la notazione t_{XY} che indica il tempo che la luce impiega per andare da X ad Y in un mezzo omogeneo. Sapendo che la velocità varia in modo direttamente proporzionale alla distanza e in modo inversamente proporzionale al tempo e sapendo che il rapporto tra le velocità nei due mezzi è c

$$\begin{split} \frac{t_{MN}}{t_{NH}} &= \frac{MN}{NH} \cdot \frac{1}{c} = \frac{NI}{NH} \\ \frac{t_{MR}}{t_{RH}} &= \frac{MR}{RH} \cdot \frac{1}{c} = \frac{RP}{RH} \end{split}$$

Da queste relazioni si conclude

$$\frac{t_{MNH}}{t_{MRH}} = \frac{t_{MN} + t_{NH}}{t_{MR} + t_{RH}} = \frac{NI + NH}{RP + RH}$$

in quanto le velocità lungo NH ed RH sono uguali. Ora bisogna mostrare che RP+RH>NI+NH: sappiamo che DN< MN e che NS< DN (da $\frac{DN}{NS}>1$), unite con le condizioni sui punti O e V si trova

$$NO < RN$$
 $NV < NO$

Applicando la legge dei coseni si trova anche che

$$MR > MN + NO$$

inoltre valgono le relazioni

$$\frac{DN}{NS} = \frac{MN}{NI} = \frac{NO}{NV} = \frac{MN + NO}{NI + NV} = \frac{MR}{RP}$$

e quindi si conclude

$$RP > NI + NV$$

Poi si mostra che RH>HV ricorrendo nuovamente alla legge dei coseni, applicata al triangolo NHR, e alla disuguaglianza NV< NO. Si ottiene quindi

$$RP + RH > NI + NV + HV$$

cioè la relazione voluta

$$RP + RH > NI + NH$$

Quando R si trova dalla parte opposta rispetto a N, Fermat dà una dimostrazione analoga per mostrare che anche in questo caso la relazione è valida.

2.5 La soluzione di Huygens

Come abbiamo visto, il principio di Fermat consente la formulazione precisa e la dimostrazione della legge di Snell. Nello specifico quello che si deve calcolare è il minimo della funzione che rappresenta il tempo

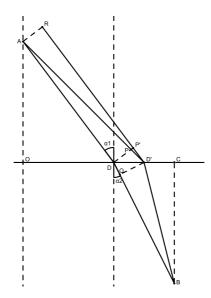
$$t = t_1 + t_2 = \frac{CD}{v_1} + \frac{DI}{v_2}$$

dove v_1 è la velocità della luce nel primo mezzo, v_2 la velocità nel secondo mezzo e CD e DI come nella Fig.2 Allora

$$f(x) = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (e - x)^2}}{v_2}$$

dove FD = x, FH = e e DH = e - x, sempre in riferimento alla Fig.1.

Fermat, come sappiamo, possiede l'algoritmo, cioè il suo metodo dei massimi e minimi, per la determinazione del minimo di questa funzione, però non lo



utilizza perché sa applicarlo solo ai polinomi e non alle espressioni radicali. La soluzione di Fermat è molto più complicata; una più semplice, basata sul principio di Fermat, ci viene data da Huygens.

Sia D un punto preso in modo tale che

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

dove v_1 e v_2 sono le velocità nel primo e nel secondo mezzo.

Vogliamo mostrare che qualunque altro punto D' venga preso, il tempo impiegato per percorrere AD'B sarà maggiore del tempo impiegato per percorrere ADB.

Tracciamo le perpendicolari ad AD per A e D; sia P il punto di intersezione tra la perpendicolare in D e AD' e tracciamo la parallela ad AD per D', che intersecherà le perpendicolari ad AD per A e D rispettivamente in R e P'. Infine tracciamo la perpendicolare a DB per D' e sia Q il suo punto di intersezione con DB.

Si nota che $P\hat{D}D'=\alpha_1$ (perché complementari dello stesso angolo) e $D'\hat{D}Q=\frac{\pi}{2}-\alpha_2$, quindi

$$|D'P'| = |D'D| \sin \alpha_1$$
 $|DQ| = |DD'| \sin \alpha_2$

Ora calcoliamo il tempo lungo i cammini ADB e AD'B. Sapendo che |AP|>|AD|, |D'P|>|D'P'| e |D'B|>|BQ| si ottiene

$$\frac{|AD'|}{v_1} > \frac{|AD| + |P'D'|}{v_1} = \frac{|AD|}{v_1} + |D'D| \frac{\sin \alpha_1}{v_1}$$

$$\frac{|D'B|}{v_2} > \frac{|BQ|}{v_2} = \frac{|DB| - |DQ|}{v_2} = \frac{|DB|}{v_2} - |DD'| \frac{\sin \alpha_2}{v_2}$$

Ricordando che $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$ si trova

$$\frac{|AD'|}{v_1} + \frac{|D'B|}{v_2} > \frac{|AD|}{v_1} + \frac{|DB|}{v_2}$$

Allora il punto di rifrazione che minimizza il tempo per andare da un punto A ad un punto B posti in due mezzi diversi è caratterizzato dal fatto che il rapporto tra i seni degli angoli di incidenza e rifrazione è uguale al rapporto $\frac{v_1}{v_2}$ che è costante (e questa è proprio la legge di Snell).

Capitolo 3

La nascita del calcolo differenziale: Leibniz, Newton

3.1 Leibniz

Nel 1684 viene pubblicato sugli *Acta Eruditorum*, periodico mensile tedesco di carattere scientifico fondato da lui stesso, un importantissimo articolo di Leibniz dal titolo *Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque Tangentibus quae nec Fractas nec Irrationales Quantitates moratur, et Singulare pro illis Calculi Genus; importantissimo in quanto vi vengono esposti i fondamenti del <i>calcolo differenziale*: vengono introdotti i concetti di differenziale e differenziazione.

L'articolo comincia con la definizione geometrica di differenziale di ordinate una curva: dato un sistema di assi si definisce una curva e la tangente in un suo punto V, che sarà VB, mentre la sottotangente sarà BX e v l'ordinata (sull'asse orizzontale) del punto V; allora preso dx, un segmentino sull'ascissa x (asse verticale), il differenziale di v, cioè dv, sarà tale che dv: dx = v: BX. Una volta data questa definizione vengono date le regole di calcolo: se la quantità è una costante a allora da = 0 e dax = adx; nel caso in cui si abbia addizione e sottrazione z - y + w + x = v allora

d(z - y + w + x) = dz - dy + dw + dx = dv;

nel caso in cui abbia una moltiplicazione y=xv allora dy=dxv=xdv+vdx; nel caso in cui si abbia una divisione $z=\frac{v}{y}$ allora $dz=d\frac{v}{y}=\frac{vdy-ydv}{y^2}$; nel caso in cui si abbia una potenza x^a allora $d(x^a)=ax^{a-1}dx$, $d(\frac{1}{x^a})=-\frac{adx}{x^{a+1}}$; nel caso in cui si abbia una radice $\sqrt[b]{a}$ allora $d\sqrt[b]{x^a}=\frac{a}{b}dx\sqrt[b]{x^{a-b}}$.

Questo modo di calcolare i differenziali si può sfruttare per ricavare altre nozioni, ad esempio per il calcolo dei massimi e dei minimi di una funzione. Come abbiamo visto, fino a questo momento il metodo usato è quello di Fermat, che però è applicabile solo in casi particolari; con questo metodo, cioè con l'utilizzo dei differenziali, si possono calcolare massimi e minimi in quasi tutti i casi.

Nell'articolo Nova methodus Leibniz spiega il comportamento dei segni dei differenziali e deduce che questi sono legati alla pendenza della curva: il differenziale dz in un punto Z di una curva può essere una quantità positiva o negativa a seconda di come è posizionata la tangente alla curva in Z; allora dato che le ordinate v possono crescere o decrescere, i differenziali dv saranno, rispettivamente, quantità positive o negative. Si nota però che in un punto M di massimo relativo di una curva non si presenta nessuno dei due casi; siccome le ordinate non crescono né decrescono, il differenziale dv in quel punto non può essere né positivo né negativo e quindi sarà nullo. Inoltre in quel punto la tangente sarà parallela all'asse. Ecco il testo originale:

Et quia ipsae ordinatae v modo crescunt, modo decrescunt, erit dv modo affirmativa modo negativa quantitas, et priore caso 1V1B tangens ducitur versus A; posteriore 2V2B in partes aversas: neutrum autem sit in medio circa M, quo momento ipsae v neque crescunt neque decrescunt, sed in statu sunt, adeoque sit dv aequ. 0, ubi nihil refert quantitas sit ne affirmativa an negativa, nam +0 aequ. -0: eoque in loco ipsa v, nempe ordinata L M, est maxima (vel si convexitatem Axi obverteret, minima) et tangens curvae in M neque supra X ducitur ad partes A ibique axi propinquat,

neque infra X ad partes contrarias, sed est axi parallela. Si dv sit infinita respectu ipsius dx, tunc tangens est ad axem recta, seu est ipsa ordinata. Si dv et dx aequales, tangens facit angulum semirectum ad axem.

Leibniz applica lo stesso discorso anche alla concavità della curva, basandosi sul differenziale al quadrato ddv, definendo i casi di convessità, concavità e punto di flesso.

Infine sottolinea la maggior efficacia e semplicità di questo metodo rispetto agli altri per risolvere il problema delle tangenti, in quanto usa direttamente i differenziali invece della sottotangente; conclude l'articolo mostrando come comportarsi con equazioni da differenziare: si può trasformare un'equazione in un'equazione differenziale sostituendo ogni termine con il suo differenziale e utilizzando le regole che sono state definite all'inizio. Questo è un passaggio fondamentale, in quanto questa tecnica verrà usata da tutti gli autori che vedremo.

Ex cognito hoc velut Algorithmo, ut ita dicam, calculi hujus, quem voco differentialem, omnes aliae aequationes differentiales inveniri possunt per calculum communem, maximaeque et minimae, itemque tangentes haberi, ita ut opus non sit tolli fractas aut irrationales, aut alia vincula, quod tamen faciendum fuit secundum Methodos hactenus editas. Demonstratio omnium facilis erit in his rebus versato, et hoc unum hactenus non satis expensum consideranti, ipsas dx, dy, dv, dw, dz, ut ipsarum x, y, v, w, z (cuiusque in sua serie) differentiis sive incrementis vel decrementis momentaneis proportionales haberi posse. Unde sit ut proposita quacunq; aequatione scribi possit ejus aequatio differentialis, quod pro quolibet membro (id est parte, quae sola additione vel subtractione ad aequationem constituendam concurrit) substituendo simpliciter quantitatem membri differentialem, pro alia vero quantitate, (quae non ipsa est membrum, sed ad mem-

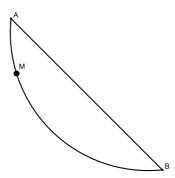
brum formandum concurrit) ejus quantitatem differentialem ad formandam quantitatem differentialem ipsius membri adhibendo, non quidem simpliciter, sed secundum Algorithmum hactenus praescriptum.

3.2 La Brachistocrona

Nel giugno 1696 Jean Bernoulli (conosciuto anche come Johann o John), decimo figlio di Nicolaus Bernoulli e, insieme al fratello Jacques (conosciuto anche come Jacob o James), capostipite di una prolifica famiglia di matematici, propone sugli *Acta Eruditorum* il seguente problema

Problema Novum, ad cujus Solutionem Mathematici invitantur Datis in plano verticali duobus punctis A et B, assignare mobili M viam AMB, per quam gravitate sua descendens, et moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum. B

(Dati due punti A e B in un piano verticale, trovare il cammino AMB attraverso il quale un punto mobile M, in virtù del suo peso, si muove per andare da A a B nel modo più veloce.)

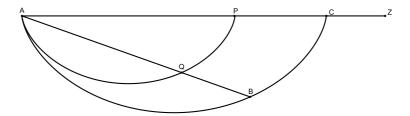


Il problema dovrebbe essere risolto entro dicembre dello stesso anno, ma, siccome non si ricevono risposte, Bernoulli prolunga la scadenza alla Pasqua

1697, finché, nel maggio 1697, appaiono le soluzioni di Jean e del fratello Jacques e una breve nota di Leibniz.

3.2.1 La soluzione di Newton

Il 30 gennaio 1697 Newton manda all'amico Sir Charles Montagu la sua soluzione del problema di Bernoulli:



Dato il punto A, disegnare il segmento APCZ e su esso descrivere prima una cicloide AQP che taglia il segmento AB nel punto Q e poi una seconda cicloide ABC, le cui base e altezza sono, rispettivamente, come AB sta ad AQ. Questa seconda cicloide passerà per il punto B e sarà la curva lungo la quale una particella pesante andrà nel modo più veloce da A a B.

Newton, nel suo scritto, non fornisce ulteriori informazioni su come sappia che la curva è una cicloide; inoltre lo scritto esce in forma anonima, ma Bernoulli in una lettera scrive che ha riconosciuto "ex ungue leonem" (il leone dal suo artiglio).

3.2.2 La soluzione di Leibniz

In una lettera datata 16 giugno 1696 Leibniz espone la sua soluzione al problema della brachistocrona. Essa comincia con l'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x - \alpha}{\beta - x}}$$

ma senza nessuna informazione riguardo la sua provenienza e come l'autore abbia fatto a trovarla. Poi vengono scelti gli assi di riferimento: l'asse x è

quello verticale, mentre l'asse y quello orizzontale. A questo punto, senza nessuna ulteriore spiegazione Leibniz asserisce che

$$ds = \frac{k}{\sqrt{x}}dy$$

ricordando che l'asse x è quello verticale e le quantità misurate su esso sono chiamate altitudini, l'asse y è quello orizzontale e le quantità misurate su esso sono chiamate latitudini e s è la lunghezza dell'arco lungo la curva.

Dal fatto che $ds^2 = dx^2 + dy^2$ segue che

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{2b - x}}$$

 $con 2b = k^2.$

Poi introduce una variabile v tale che $\frac{v}{b} = \frac{dy}{dx}$ da cui $y = \int \frac{v}{b} dx$.

Va sottolineato che nella lettera non fa mai menzione del fatto che la curva risolvente il problema sia una cicloide, sebbene probabilmente l'autore sapesse già dal 1686 che questa equazione differenziale definisse una tale curva.

Vediamo in che modo Leibniz arriva all' equazione: parte dall'ipotesi galileiana che il tempo t_{AB} per andare da A a B è dato dalla relazione

$$AB = \frac{1}{2}gt_{AB}^2 \cdot \sin ABC = \frac{1}{2}gt_{AB}^2 \cdot \frac{AC}{AB}$$

mentre il tempo t_{AC} per andare da A a C lungo la verticale è dato da

$$AC = \frac{1}{2}gt_{AC}^2$$

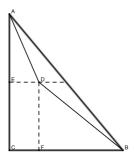
da cui

$$t_{AB} = \frac{AB}{AC}t_{AC}$$

Leibniz ha i punti A, B, C ed E fissati, ma vuole trovare il punto D sulla parallela a CB per E in modo tale che il tempo di discesa lungo il cammino composto da AD e DB sia minimo. Trova allora

$$r \equiv t_{AE} = \sqrt{\frac{AE}{AC}} t_{AC}$$

$$n \equiv t_{EC} = (1 - \sqrt{\frac{AE}{AC}})t_{AC}$$



da cui

$$t_{AD} = \frac{AD}{AE} \cdot r$$
$$t_{DB} = \frac{DB}{EC} \cdot n$$

(si derivano allo stesso modo di t_{AB}).

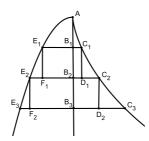
Questo lo rende in grado di calcolare $t_{ADB}=t_{AD}+t_{DB}$ e minimizzarlo, sotto le condizioni: $AE=\cos t$., $EC=\cos t$., $AD^2=AE^2+ED^2$ e $DB^2=EC^2+FB^2=EC^2+(CB-ED)^2$

$$r \cdot \frac{ED}{AD \cdot AE} = n \cdot \frac{FB}{DB \cdot EC}$$

da cui

$$t_{AD} \cdot \frac{ED}{AD^2} = t_{DB} \frac{FB}{DB^2}$$

Sia AE una parabola di vertice A e asse AB così che un corpo che cada verticalmente da A impieghi il tempo AE per raggiungere B; sia AC la curva di discesa più veloce che Leibniz chiama tachystoptota.



Dalle relazioni appena trovate si ha che

$$t_{C_1C_2} \cdot \frac{D_1C_2}{(C_1C_2)^2} = t_{C_2C_3} \cdot \frac{D_2C_3}{(C_2C_3)^2}$$

da cui, utilizzando le formule trovate prima

$$t_{C_1C_2} = \frac{C_1C_2}{C_1D_1}t_{C_1D_1}$$

$$t_{C_2C_3} = \frac{C_2C_3}{C_2D_2}t_{C_2D_2}$$

Notando che $C_1D_1 = C_2D_2$ si trova

$$t_{C_1D_1} \cdot \frac{D_1C_2}{C_1C_2} = t_{C_2D_2} \frac{D_2C_3}{C_2C_3}$$

e quindi

$$F_1 E_2 \cdot \frac{D_1 C_2}{C_1 C_2} = F_2 E_3 \frac{D_2 C_3}{C_2 C_3}$$

in quanto $F_1E_2 = B_2E_2 - B_1E_1$ è il tempo che il corpo impiega per cadere da B_1 a B_2 , cioè da C_1 a D_1 .

Le distanze $B_1B_2=B_2B_3=\ldots$ sono piccole, quindi possiamo scrivere ds=gtdt, perciò ad esempio $B_1B_2=gt_{AB_1}\cdot t_{B_1B_2}$. Da ciò segue

$$1 = \frac{B_1 B_2}{B_2 B_3} = \frac{B_1 E_1}{B_2 E_2} \cdot \frac{F_1 E_2}{F_2 E_3} = \frac{\sqrt{AB_1}}{\sqrt{AB_2}} \cdot \frac{F_1 E_2}{F_2 E_3}$$

in quanto $F_1E_2=t_{B_1B_2}$ e $F_2E_3=t_{B_2B_3}$; da qui la soluzione

$$\frac{D_1 C_2}{D_2 C_3} = \frac{C_1 C_2}{C_2 C_3} \cdot \frac{\sqrt{AB_2}}{\sqrt{AB_1}}$$

cioè

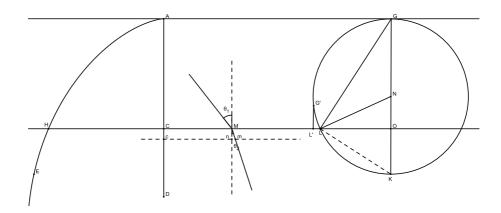
$$dy = k'\sqrt{x} \cdot dc$$

con $dc^2 = dx^2 + dy^2$, cioè proprio la relazione proposta da Leibniz.

3.2.3 La soluzione di Jean Bernoulli

Nella soluzione proposta da Jean Bernoulli è evidente il riferimento all'ottica e l'ispirazione fornitagli da Fermat, infatti la soluzione dipende direttamente dal principio di Fermat.

Jean parte dalla seguente situazione fisica: una particella si muove da un mezzo con una certa densità a un altro mezzo con densità differente; non considera però un mezzo con densità uniforme, bensì un mezzo formato da infinite lamelle o fette orizzontali distinte. In questo caso la particella non si muove seguendo una linea dritta, ma, secondo il principio di Fermat, seguirà un cammino che minimizzi il tempo.



Sia GLK una circonferenza assegnata; CH = t è l'ordinata della curva AHE che misura la velocità della luce nel punto C; CO è lungo quanto la misura della semicirconferenza GLK; M è un punto su CO; GO = AC = x; CM = y; Cc = Mn = dx; Mm = dz; nm = dy; GK = a. Se θ_1 e θ_2 sono rispettivamente l'angolo di incidenza e di rifrazione:

$$\sin \theta_2 = \frac{nm}{Mm} = \frac{dy}{dz}$$

in quanto Mnm è un triangolo rettangolo.

Per la legge di Snell si ha $\frac{\sin\theta}{v}=\frac{1}{a}=\cos t$ e, siccome v=CH=t, $\sin\theta_2=\frac{dy}{dz}=t\cdot\frac{1}{a}$ da cui

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{a}t$$

Ricordando che $dz^2 = dx^2 + dy^2$

$$dy^{2} = \frac{t^{2}}{a^{2}}dz^{2} = \frac{t^{2}}{a^{2}}(dx^{2} + dy^{2})$$
$$dy^{2} - \frac{t^{2}}{a^{2}}dy^{2} = \frac{t^{2}}{a^{2}}dx^{2}$$

da cui

$$dy^2 = \frac{t^2}{a^2 - t^2} dx^2$$

e quindi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t}{\sqrt{a^2 - t^2}}$$

A questo punto Jean Bernoulli considera la legge di Galileo sulla caduta dei gravi $v = \sqrt{ah}$ da cui, ponendo v = t e h = AC = x, si ha $t^2 = ax$ e quindi $t = \sqrt{ax}$. Sostituendo l'espressione trovata per t nell'equazione precedente si ha

$$dy = \sqrt{\frac{x}{a - x}} dx$$

da cui

$$dy = dx \sqrt{\frac{x \cdot x}{x(a-x)}} = dx \frac{x}{\sqrt{ax-x^2}} = dx \frac{2x}{2\sqrt{ax-x^2}} = \frac{2xdx + adx - adx}{2\sqrt{ax-x^2}}$$

perciò

$$dy = \frac{1}{2} \frac{adx}{\sqrt{ax - x^2}} - \frac{1}{2} \frac{(a - 2x)dx}{\sqrt{ax - x^2}}$$

L'ultima parte è facilmente integrabile

$$\int \frac{1}{2} \frac{a - 2x}{\sqrt{ax - x^2}} dx = \sqrt{ax - x^2} + \text{cost.}$$

Vediamo un'interpretazione geometrica di questa, in riferimento alla figura precedente:

$$\sqrt{ax - x^2} = \sqrt{GK \cdot GO - GO^2} = \sqrt{GO(GK - GO)} = \sqrt{GO \cdot KO} = LO$$

(per il teorema di Euclide)

cioè
$$LO^2 = GO \cdot KO$$
.

Ci resta da integrare la prima parte dell'equazione precedente:

$$\begin{split} &d(arcGL) = \sqrt{dL'L^2 + dG'L'^2} = \sqrt{(d(\sqrt{ax - x^2}))^2 + dx^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{adx - 2xdx}{2\sqrt{ax - x^2}}\right)^2 + dx^2} = \sqrt{\frac{a^2dx^2 + 4x^2dx^2 - 4axdx^2 + 4axdx^2 - 4x^2dx^2}{(2\sqrt{ax - x^2})^2}} = \\ &= \frac{adx}{2\sqrt{ax - x^2}} \end{split}$$

da cui

$$arcGL = \int \frac{a}{2\sqrt{ax - x^2}} dx$$

Riunendo tutto si trova

$$CM = y = \int dy = arcGL - LO$$

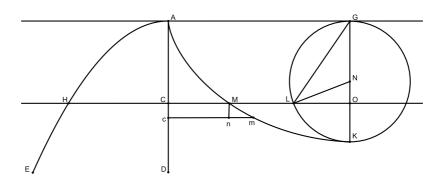
Ma si ha anche

$$MO = CO - CM = CO - arcGL + LO = semicircGLK - arcGL + LO = arcLK + LO$$

che, combinata con MO = ML + LO, ci dà

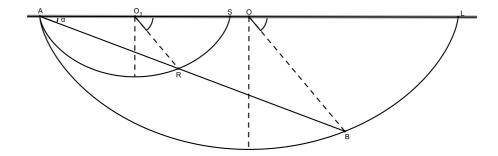
$$arcLK = ML$$

Da quest'ultima si deduce che la circonferenza GLKO genera la cicloide AMK come curva minimizzante.



In questo modo Jean Bernoulli dimostra l'esistenza della curva richiesta; la seconda parte della dimostrazione riguarda l'unicità della soluzione:

Si scelga un punto A in cui la cicloide comincia ad essere generata; ci sarà sempre un punto B per cui la cicloide passi.



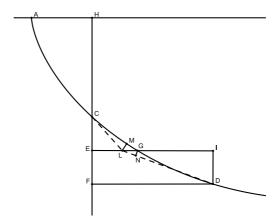
Ora consideriamo la seguente proprietà: due cicloidi che cominciano nello stesso punto A sono tali che O_1R e OB sono paralleli, per cui possiamo usare il teorema di Talete

$$AR : AB = AO_1 : AO = 2AO_1 : 2AO = AS : AL$$

quindi AL viene determinato in virtù del quarto proporzionale.

Quindi si può costruire una cicloide AS, determinare su essa un punto R, tracciare la semiretta AR e trovare su essa un punto B tale che determini in modo unico il punto L (per il teorema di Talete). E' così unicamente determinata la cicloide ABL.

3.2.4 La soluzione di Jacques Bernoulli



Per prima cosa Jacques nota che una proprietà di massimizzazione o minimizzazione su una curva vale globalmente, quindi vale anche localmente, cioè su un piccolo arco di curva. Considerando la figura, Jacques sceglie un punto C arbitrario sull'arco di curva che considera minimizzante per il problema, poi traccia la semiretta HCF perpendicolare ad AH (con AH: ordinata del punto C). Il punto D viene preso molto vicino a C; si ha poi CE = EF, EI parallelo ad AH e FD e LM perpendicolare a CG. Si noti infine che se $L \in EI$, allora LG rappresenta il differenziale di EG. Si pone

$$tCG + tGD = tCL + tLD$$

da cui

$$tCG - tCL = tLD - tGD$$

dove con tXY si intende il tempo per andare da X a Y. Posto ciò, Jacques deduce

$$\frac{CE}{CG} = \frac{tCE}{tCG}$$
 e $\frac{CE}{CL} = \frac{tCE}{tCL}$

da cui

$$CG = CE \cdot \frac{tCG}{tCE}$$
 e $CL = CE \cdot \frac{tCL}{tCE}$

Si consideri ora il rapporto $\frac{CE}{CG-CL}$; sostituendolo nell'equazione precedente si ottiene

$$\frac{CE}{CG-CL} = \frac{CE}{CE(\frac{tCG-tCL}{tCE})} = \frac{tCE}{tCG-tCL}$$

I triangoli MLGe CEGsono simili, quindi $\frac{MG}{GL}=\frac{EG}{CG}$ e $\frac{CG}{LG}=\frac{CE}{ML},$ da cui $\frac{CE}{GL}=\frac{ML}{CG}.$

A questo punto Jacques pone ${\cal CL}$ approssimativamente uguale a ${\cal CM},$ quindi

$$CG - CL = CG - CM = MG$$

per cui, dalle espressioni precedenti si ottiene

$$\frac{CE}{GL} = \frac{MG}{GL} \cdot \frac{CE}{MG} = \frac{MG}{GL} \cdot \frac{CE}{CG - CL} = \frac{EG}{CG} \cdot \frac{CE}{CG - CL}$$

da cui

$$\frac{CE}{GL} = \frac{EG \cdot tCE}{CG \cdot (tCG - tCL)}$$

Poi Jacques considera l'intervallo EF e procede allo stesso modo: prende GN perpendicolare a DL, DN approssimativamente uguale a DG e LD-GD=LD-DN=LN; come prima, il triangolo GNL è simile al triangolo GID e ottiene

$$\frac{EF}{GL} = \frac{GI \cdot tEF}{GD \cdot (tLD - tGD)}$$

Ricordando che EF = CE si ha

$$\frac{EG \cdot tCE}{GI \cdot tEF} \frac{CG \cdot (tCG - tCL)}{GD \cdot (tLD - tGD)}$$

da cui

$$\frac{EG \cdot tCE}{GI \cdot tEF} = \frac{CG}{GD}$$

A questo punto Jacques considera la legge di caduta dei gravi $tCE = \frac{CE}{\sqrt{2gHC}}$ per un corpo che cade da un'altezza HC con velocità iniziale nulla. Analogamente $tEF = \frac{EF}{\sqrt{2gHE}}$, quindi

$$\frac{tCE}{tEF} = \frac{\sqrt{HC}}{\sqrt{HE}}$$

per cui, riunendo

$$\frac{CG}{GD} = \frac{EG \cdot tCE}{GI \cdot tEF} = \frac{EG}{GI} \cdot \frac{\sqrt{HC}}{\sqrt{HE}}$$

da cui

$$CG = \frac{EG}{\sqrt{HE}} \cdot \frac{\sqrt{HC}}{GI} \cdot GD$$

Infine, ponendo $CG=ds=\sqrt{dx^2+dy^2},\ HE=x,\ CE=dx,\ EG=dy$ e $\frac{\sqrt{HC}}{GI}\cdot GD=k$ si arriva a

$$ds = \frac{k}{\sqrt{x}}dy$$
 cioè $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{k}{\sqrt{x}}dy$

cioè

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{k^2 - x}}$$

Integrando l'equazione appena ottenuta si trova l'equazione di una cicloide che è generata da una circonferenza di diametro $k^2 = a$.

3.3 Il problema isoperimetrico

Dopo aver risolto, a seguito della sfida lanciata dal fratello Jean, il problema della brachistocrona, Jacques Bernoulli propone al fratello altri problemi. Si stabilisce così una sorta di sfida tra i due che porta a un'interessante corrispondenza sull'argomento finché nel 1701 Jacques scrive un'ampia memoria

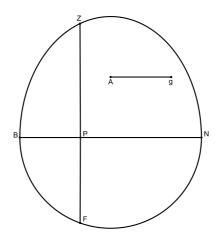
che poi costituirà anche la sua dissertazione di dottorato (e sarà pubblicata sugli Acta Eruditorum): Analysis magni Problematis Isoperimetrici

Lo chiamo magnum problema non tanto per le difficoltà a risolverlo (sebbene, come si possa facilmente constatare ci siano), quanto perché ci apre la via per indagare nuovi campi del sapere e per giungere a nuovi confini della Scienza

Dall'opera si può dedurre che Jacques Bernoulli aveva capito che il suo metodo per risolvere il problema della brachistocrona sarebbe potuto essere facilmente esteso a una classe considerevole di problemi. In effetti l'Analysis contiene le idee di base che si ritroveranno nell'opera del 1718 di Jean Bernoulli e che Eulero riprenderà per trasformarle nel suo metodo sistematico. Lo scritto è costituito da sei teoremi e tre problemi; il secondo problema, che è in due parti, è da segnalare in quanto riprende una antica nozione su una condizione isoperimetrica.

Si chiede tra tutte le curve isoperimetriche descritte su una stessa base BN, di trovare la curva BFN che non sia essa ovviamente che delimiti lo spazio massimo assegnato, bensì lo sia la curva BZN. Le ordinate PZ siano a sua volta in un certo rapporto con PF o con l'arco BF, cioè che comunque sia proporzionale mediante un segmento Ag dato con PF o con l'arco BF.

Si sa che una circonferenza racchiude il massimo spazio isoperimetrico possibile; quello che qui ci si chiede è: quale curva, le cui ordinate non siano semplici come quelle del cerchio, ma elevate a una qualsiasi potenza, riempirebbe il più grande spazio, in relazione a qualsiasi altra curva isoperimetrica? Lo scritto di Jacques Bernoulli è molto pesante e "noioso", ma lui cerca di mettere le basi per un metodo più generale e sistematico. Nel 1718 il fratello Jean scrive Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des problèmes sur les Isoperimetres, avec une nouvelle méthode courte et facile de les resoudre sans calcul, laquelle s'étend aussi à d'autres problèmes qui ont



rapport à ceux-là, in cui ritrova anche i risultati trovati da Jacques, ma in modo molto meno tedioso, senza calcoli (come premesso nel titolo).

Il punto cruciale nell'*Analysis* di Jacques è che lui capisce che quando ci si trova in una condizione isoperimetrica, in generale bisogna considerare due ordinate variabili e non una come si faceva in precedenza. Jean capisce che questa idea del fratello è fondamentale e la usa, ma sviluppa il suo *Remarques* da un punto di vista più geometrico sintetico, trasferendo a segmenti infinitesimi teoremi geometrici euclidei per poi applicare i differenziali.

Capitolo 4

Il "Methodus" di Eulero

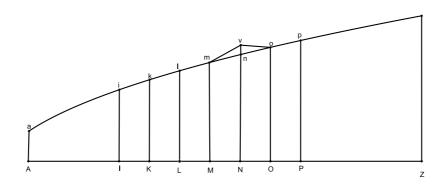
Il matematico svizzero più importante forse di tutti i tempi è sicuramente Leonhard Euler, italianizzato in Eulero (1707 - 1783). In realtà Eulero non era destinato alla carriera matematica, bensì a quella ecclesiastica; ma da giovane studia sotto la guida di Jean Bernoulli e collabora con i suoi figli Nicolaus e Daniel e attraverso essi scopre la sua vocazione, tanto che a 26 anni si ritrova ad essere il matematico più importante dell'Accademia di Pietroburgo. Eulero è stato un matematico molto prolifico: in vita pubblicò più di 500 lavori e per quasi mezzo secolo dopo la sua morte continuarono ad apparire suoi lavori tanto che la bibliografia dei suoi scritti comprende 886 titoli.

Non si sa con certezza quando Eulero comincia ad interessarsi seriamente al calcolo delle variazioni, ma probabilmente durante il periodo in cui è a Basilea con Jean Bernoulli; in ogni caso tra il 1732 e il 1736 Eulero prende in considerazione problemi derivanti dai problemi isoperimetrici di Jacques Bernoulli. Nel 1744 viene pubblicata l'opera Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes sive Solutio Problematis Isoperimetrici Latissimo Sensu Accepti, nella cui introduzione Eulero pone una lista di cento problemi per illustrare il suo metodo; l'importante contributo di Eulero e di quest'opera al calcolo delle variazioni è che cambia il modo di approcciare la situazione: non si fa più una discussione particolare per ogni caso o per

pochi casi specifici, bensì si parla di una classe generale di problemi, infatti lui prende il metodo di Jacques e Jean Bernoulli e lo trasforma in una nuova branca della matematica.

4.1 Il Methodus

Nei primi due capitoli Eulero considera il semplice problema di trovare tra tutte le curve del piano y=y(x), con $0 \le x \le a$, quella tale che $\int Z dx$ sia un massimo o un minimo, dove Z è una funzione di $x, y, p = \frac{dy}{dx}, q = \frac{dp}{dx}, r = \frac{dq}{dx}$, ecc. Eulero considera l'ascissa AZ divisa in infiniti piccoli intervallini tutti uguali $dx = HI = IK = KL = \dots$ dai punti $\dots x_{''}, x_{'}, x = AM, x', x'', \dots$ con le corrispondenti ordinate $Mm = y, Nn = y', Oo = y'' \dots$ e $Ll = y_{'}, Kk = y_{''} \dots$



Poi approssima le derivate con l'aiuto delle differenze finite:

$$p = \frac{y' - y}{dx} \qquad p' = \frac{y'' - y'}{dx} \qquad p'' = \frac{y''' - y''}{dx} \qquad \dots$$

$$p' = \frac{y - y'}{dx} \qquad p'' = \frac{y'' - y''}{dx} \qquad \dots$$

$$q = \frac{y'' - 2y' + y}{dx^2} \qquad q' = \frac{y''' - 2y'' + y'}{dx^2} \qquad q'' = \frac{y^{iv} - 2y''' + y''}{dx^2} \qquad \dots$$

$$q' = \frac{y' - 2y + y'}{dx^2} \qquad q'' = \frac{y - 2y' + y''}{dx^2} \qquad \dots$$

e analogamente per r, s, \ldots

Dopo ciò approssima l'integrale $\int_0^a Z dx$ con la somma

$$\int_0^x Zdx + Zdx + Z'dx + Z''dx + \dots$$

dove $Z=Z(x,y,p,q,r,\ldots), Z'=Z(x',y',p',q',r',\ldots), Z''=Z(x'',y'',p'',q'',r'',\ldots)$ ecc., e suppone che anz sia un estremale; allora la derivata rispetto all'ordinata y', vista come variabile, sarà nulla al valore y'=Nn. Per calcolare questa derivata Eulero prima procede con calcolare gli effetti su y,p,q, ecc. dell'alterazione di y', considerando - in relazione al disegno - dy'=nv. Fatto ciò passa al caso di Z nella forma

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp$$

cioè Z è funzione di x, y e p. L'alterazione di y' varia sia p sia p', per cui nella $\int_0^a Z dx$ ciò che viene influenzato è

$$Zdx + Z'dx = Z(x, y, p)dx + Z(x', y', p')dx$$

Eulero esprime questa come una funzione di y' e vuole che sia un estremo; questo vuol dire che la derivata rispetto a y' sarà nulla. Per calcolare la derivata, nota che la variazione di y' in Zdx produce $P \cdot nv$ (con nv = y' - y) e in Z'dx produce $N' \cdot nvdx - P' \cdot nv$; quindi per avere un estremo P + N'dx - P' = 0 cioè $N' - \frac{P' - P}{dx} = 0$ che al limite diventa

$$N - \frac{dP}{dx} = 0$$

Ora vediamo il caso in cui Z dipende da x, y, p, q e r, cioè Z = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr. Anche in questo caso l'integrale è visto come funzione di y' e quindi la derivata rispetto a y' dovrà essere nulla per avere un estremo

$$0 = \frac{d}{dy}(Z'' + Z' + Z + Z')dx = dx(N' - \frac{\Delta P}{dx} + \frac{\Delta^2 Q}{dx^2} - \frac{\Delta^3 R}{dx^3})$$

(dove $\Delta X = X' - X$). Passando al limite si ottiene l'equazione differenziale di Eulero:

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} = 0$$

Per mostrare come usare la sua equazione differenziale, Eulero propone vari esempi. Vediamone uno: si vuole minimizzare l'integrale

$$\int \frac{dx\sqrt{1+pp}}{\sqrt{x}}$$

In questo caso si ha

$$dZ = -\frac{dx\sqrt{1+pp}}{2x\sqrt{x}} + \frac{pdp}{\sqrt{x(1+pp)}}$$

quindi

$$M = -\frac{\sqrt{1+pp}}{2x\sqrt{x}}, N = 0, P = \frac{p}{\sqrt{x(1+pp)}}$$

per cui $P = \frac{p}{\sqrt{x(1+pp)}} = cost = \frac{1}{\sqrt{a}}$. Questa ci dà l'equazione differenziale

$$p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{a - x}}$$

che integrata ci dà la cicloide.

Sempre nello stesso capitolo, Eulero mostra una regola mnemonica per arrivare a scrivere la sua equazione differenziale, che avrà una grande influenza su Lagrange.

Nel caso in cui dZ = Mdx + Ndy + Pdp, nel differenziale porre Mdx = 0, lasciare Ndy invariata e scrivere -pdP al posto di Pdp:

$$Ndy - pdP = 0$$

siccome dy=pdx, ci si riconduce subito alla sua equazione differenziale $N-\frac{dP}{dx}=0.$

Nel caso in cui Z dipende da x, y, p e q, attraverso la differenziazione e il passaggio a limite ottiene l'equazione

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} = 0$$

Nel capitolo III Eulero espone problemi più complicati: considera $\int_0^a Z dx$, dove Z dipende da x, y, p, ecc. e da una quantità $\Pi = \int_0^x [Z] dx$, dove la funzione integranda è data dalle equazioni differenziali

$$dZ = Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdp + \dots$$

$$d[Z] = [M]dx + [N]dy + [P]dp + \dots$$

Giunge così al primo esempio di problema di Lagrange: minimizzare

$$\int Z(x,y,y',\Pi)dx$$

sotto la condizione $\Pi' - [Z](x, y, y') = 0$; questo porta a generalizzare la sua condizione necessaria. In pratica ciò che trova è il primo semplice esempio della regola dei moltiplicatori di Lagrange; il procedimento visto per i casi più semplici si può usare anche in questo caso con piccole modifiche.

Un problema tipico che si può gestire con questo metodo è quando Z è della forma $Z=A(x,y)(1+p^2)^{1/2}dx=A(x,y)ds$, con s: lunghezza dell'arco lungo la curva y=y(x), oppure, più in generale, della forma Z=A(x,y,s)ds. Eulero pone

$$\Pi = s = \int_0^x \sqrt{1 + p^2} dx$$

Torniamo al caso generale $\int_0^a Z dx$ con $\Pi = \int [Z] dx$: Eulero, come nei casi precedenti, suddivide l'intervallo AZ in intervallini determinati dai punti ..., $x_{"}, x_{"}, x_{"}, x_{"}, x_{"}, x_{"}, \dots$, le cui rispettive ordinate sono ..., $y_{"}, y_{"}, y_{"}, y_{"}, y_{"}, \dots$; scrive poi [Z] = f(x, y, p, q) e nota che

$$[Z''] = f(x'', y'', p'', q'') \quad [Z'] = f(x', y', p', q') \quad [Z'] = f(x', y', p', q') \quad \dots$$
$$\Pi' = \Pi + [Z]dx \quad \Pi'' = \Pi' + [Z']dx = \Pi + [Z]dx + [Z']dx \quad \dots$$

$$J = \int_0^{x_t} Z dx + Z dx + Z' dx + Z'' dx + \dots$$

In queste espressioni si noti che Π è costante rispetto a y'', che è l'ordinata che Eulero sceglie di far variare in questo caso. La condizione di estremo è $\frac{dJ}{dy''}=0$, con J vista come funzione della sola y''. Calcolando tutte le derivate e ricordando che la somma di tutte queste deve essere zero lungo l'arco minimizzante, Eulero arriva alla condizione

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} + L[P] - \frac{dL}{dx}[Q] - 2L\frac{d[Q]}{dx} + ([N] - \frac{d[P]}{dx} + \frac{d^2[Q]}{dx^2}) \int_x^a Ldx$$

(sempre in riferimento al disegno precedente). In realtà lui preferisce scrivere $\int_x^a L dx = \int_0^a L dx - \int_0^x L dx = H - \int_0^x L dx$, per cui l'espressione precedente diventa

$$0 = [N](H - \int Ldx) - \frac{d[P](H - \int Ldx)}{dx} + \frac{dd[Q](H - \int Ldx)}{dx^2} + \dots + N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \dots$$

Notiamo che se scriviamo

$$\lambda(x) = \int_{x}^{a} L(\cdot)d\cdot$$

allora questa equazione assume la forma equivalente

$$(N + \lambda[N]) - \frac{d}{dx}(P + \lambda[P]) + \frac{d^2}{dx^2}(Q + \lambda[Q]) = 0$$

con $\frac{d\lambda}{dx} = -L$ e $\lambda(a) = 0$. E' chiaro che λ è un moltiplicatore di Lagrange.

Vediamo il primo esempio che Eulero propone: prende $dZ = Ld\Pi$ e d[Z] = dy e vuole trovare tra tutte le curve che passino per due punti fissati quella tale che $\int Zdx$ sia un estremo, con Z funzione solo di Π e Z(0) = 0. Allora nell'espressione $d[Z] = [M]dx + [N]dy + [P]dp + \dots$ si ha [M] = 0, [N] = 1, [P] = 0, [Q] = 0, ..., quindi nell'equazione fondamentale si ottiene $\int_x^a Ldx = 0$, cioè $L \equiv 0$ che implica $Z \equiv 0$, $\Pi = cost$ e $y \equiv 0$.

Un altro problema più generale che Eulero propone è il seguente: $d[Z] = [L]d\pi + [M]dx + [N]dy + [P]dp + [Q]dq$, con $\pi = \int [z + dx, e \ d[z] = [m]dx + [M]dx$

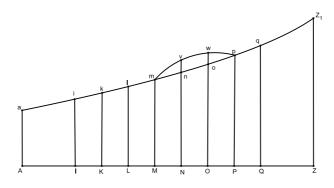
[n]dy + [p]dp + [q]dq. Nuovamente vuole trovare la condizione per cui $\int Zdx$ sia un estremo; arriva con calcoli analoghi a quanto visto finora, solo più complicati, alla sua equazione

$$0 = (N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \dots) + \\
+ \left[[N](H - \int Ldx) - \frac{d[P](H - \int Ldx)}{dx} + \frac{dd[Q](H - \int Ldx)}{dx^2} - \dots \right] + \\
+ \left[[n] \left(G - \int [L]dx (H - \int Ldx) \right) - \frac{d[p](G - \int [L]dx (H - \int Ldx))}{dx} + \\
+ \frac{dd[q](G - \int [L]dx) (H - \int Ldx)}{dx^2} + \dots \right]$$

Eulero semplifica la notazione di questa equazione ponendo $T=H-\int L dx,$ $V=G-\int [L] dx (H-\int L dx)$:

$$0 = N + [N]T + [n]V - \frac{d(P + [P]T + [p]V)}{dx} + \frac{dd(Q + [Q]T + [q]V)}{dx^2} - \dots$$

Nel capitolo V Eulero spiega come gestire i problemi in cui la soluzione deve soddisfare una ulteriore condizione, ad esempio l'isoperimetria. In queste situazioni, come anche i fratelli Bernoulli avevano fatto, Eulero permette a due ordinate consecutive di variare indipendentemente. Nel disegno, queste ordinate sono $Nn = y^{iv}$ e $Oo = y^v$ e sono variate di nv e ow rispettivamente.



Eulero osserva che, dopo aver calcolato le variazioni in y, p, q, r, \ldots , si trova che ognuna è della forma $nv \cdot I + ow \cdot K$; inoltre I è l'espressione che sarebbe presente se variasse solo Nn (e quindi è lo stesso valore calcolato precedentemente), così come K è l'espressione che sarebbe presente se variasse solo Oo e quindi è il valore di I all'ordinata successiva: K = I' = I + dI. Nel caso precedente, quando variava la sola ordinata Nn = y', nell'integrale $\int Zdx$ la parte diversa da zero era della forma $dA \cdot dy' = I \cdot nv$; in questo caso la parte rilevante diventa

$$dA \cdot dy^{iv} + dA' \cdot dy^v = nv \cdot dA + ow \cdot dA'$$

Se l'ulteriore condizione è data da un altro integrale che è una costante, allora la parte rilevante sarà della forma

$$dB \cdot dy^{iv} + dB' \cdot dy^{v} = nv \cdot dB + ow \cdot dB'$$

Lungo un estremale queste due quantità devono essere nulle, quindi, per quantità arbitrarie α e β si ha

$$nv \cdot \alpha dA + ow \cdot \alpha dA' = 0$$
 $nv \cdot \beta dB + ow \cdot \beta dB' = 0$

quindi, scegliendo in modo adeguato α e β si ha

$$\alpha dA + \beta dB = 0$$
 $\alpha dA' + \beta dB' = 0$

queste danno ad Eulero la condizione

$$\frac{nv}{ow} = -\frac{dA'}{dA} = -\frac{dB'}{dB}$$

da cui, siccome $dA' = dA + d^2A$ e $dB' = dB + d^2B$, ottiene

$$\frac{d^2A}{dA} = \frac{d^2B}{dB}$$

Integrando si trova $\log dA - \log dB = \log C$, quindi $C = \frac{dA}{dB}$; avevamo trovato prima che $\frac{dA}{dB} = -\frac{\beta}{\alpha}$, quindi $C = -\frac{\beta}{\alpha}$, ma, siccome ci sono anche le quantità α' e β' per cui $\alpha'dA' + \beta'dB' = 0$, segue direttamente che

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta} = cost.$$

In seguito a questo, Eulero nota che ci sono due problemi strettamente asoociati che sono essenzialmente equivalenti: il primo è quello di massimizzare o minimizzare una funzione V nella classe di curve per cui un altro funzionale W ha un valore costante dato; il secondo è quello di massimizzare o minimizzare W nella classe di curve per cui V ha un valore costante. E' facile notare che i problemi hanno lo stesso insieme di estremali.

Nel capitolo seguente Eulero prova a esaminare il problema variazionale quando ci sono più condizioni, cioè un insieme finito di funzionali ognuno dei quali assume un fissato valore. Afferma che se α e β sono costanti e A e B integrali o funzionali, la curva minimizzante per il problema di minimizzazione di $\alpha A + \beta B$ è la stessa per il problema di minimizzazione di B soggetto alla condizione che A abbia un valore fissato. Poi generalizza questo risultato anche al caso di tre integrali A, B e C: la curva che massimizza $\alpha A + \beta B + \gamma C$ è la stessa che massimizza C con le condizioni che A e B abbiano valori fissati.

Una parte molto interessante del *Methodus* è la seconda appendice: *De motu projectorum in medio non resistente, per Methodum maximorum ac minimorum determinando*. Parafrasando le parole di Eulero stesso, l'appendice comincia dicendo che siccome tutti i moti della natura seguono leggi di massimo o di minimo, allora appare ovvio che anche considerando cammini curvi che i corpi descrivono sotto l'azione di certe forze si dovranno ottenere proprietà di massimo o di minimo. L'appendice è molto importante in quanto contiene la prima pubblicazione del *principio di minima azione*, che però è attribuito a Maupertuis, matematico contemporaneo di Eulero.

Sit massa corporis projecti = M, ejusque, dum spatiolum = ds emetitur, celeritas debita altitudini = v; erit quantitas motus corporis in hoc loco = $M\sqrt{v}$; quae per ipsum spatiolum ds multipli-

Il principio di minima azione, come formulato da Eulero, è:

cata, dabit $Mds\sqrt{v}$ motus corporis collectivum per spatiolum ds. Jam dico lineam a corpore descriptam ita fore comparatam, ut, inter omnes alias lineas iisdem terminis contentas, sit $\int Mds\sqrt{v}$, seu, ob M constans, $\int ds\sqrt{v}$ minimum.

Cioè: sia M la massa di un corpo (in realtà si tratta di un corpo puntiforme che si muove in un piano), sia v la metà della radice della sua velocità (in realtà il testo dice che v è la radice della velocità, ma questo crea problemi successivamente), sia ds la lunghezza di un elemento di arco lungo il cammino; allora tra tutte le curve che passano per gli stessi estremi, la curva richiesta è quella che rende minimo l'integrale $\int M ds \sqrt{v}$, o, con M costante, l'integrale $\int ds \sqrt{v}$. Eulero sottolinea che se la distanza ds è percorsa in un tempo dt allora $ds = dt \sqrt{2v}$ e l'integrale si può scrivere

$$\int ds \sqrt{v} = \sqrt{2} \int v dt$$

Per prima cosa osserva che se non ci sono forze agenti sulla particella e la sua velocità iniziale è costante, allora il suo principio implica che s è un minimo e il moto deve essere uniforme lungo una linea dritta che unisca i due estremi: questa è la legge di Newton sul moto.

Nel caso in cui l'unica forza agente sia la gravità, Eulero pone AP = x, PM = y e Mm = ds, per cui dv = gdx (v come detto sopra) e quindi v = a + gx. Il cammino della particella si trova allora minimizzando l'integrale

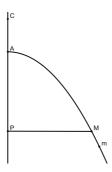
$$\int ds \sqrt{a+gx} = \int dx \sqrt{(a+gx)(1+pp)}$$

Eulero commenta che $N=0,\ P=\frac{p\sqrt{a+gx}}{\sqrt{1+pp}},$ quindi come conseguenza $P=cost=\sqrt{C},$ allora segue che $dy=dx\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{a-C+gx}}$ cioè

$$y = \frac{2}{g}\sqrt{C(a - C + gx)}$$

che è una parabola. Quando a=C e la velocità iniziale è $\sqrt{2a}$, la parabola diventa

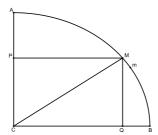
$$y = \sqrt{\frac{2v_0^2}{g}}x$$



la nota formula.

Successivamente Eulero tratta il caso di una forza verso il basso che non è più una costante, ma una funzione X di x; poi il caso in cui agiscono una forza orizzontale Y(y) e una forza verticale X(x) e poi il caso di forze centrali e mostra che il suo principio produce risultati noti anche in questo caso. Infine Eulero osserva anche che il suo principio è applicabile al caso di più corpi o particelle.

Vediamo il caso di forza centrali:



sia $CP=QM=x,\ PM=y,\ CM=\sqrt{x^2+y^2}=t$ e si assuma che la forza centrale T sia funzione solo di t. Le componenti della forza lungo MQe MP sono rispettivamente $\frac{Tx}{t}$ e $\frac{Ty}{t}$, per cui

$$dv = -\frac{Txdx}{t} - \frac{Tydy}{t} = -Tdt$$
 da cui $v = A - \int Tdt$

Allora l'integrale diventa

$$\int dx \sqrt{(1+pp)(A-\int Tdx)}$$

Attraverso un piccolo calcolo si mostra che la condizione di Eulero diventa

$$-\frac{Tydx\sqrt{1+p^2}}{2t\sqrt{A-\int Tdx}} = \frac{dp\sqrt{A-\int Tdt}}{\sqrt{(1+p^2)^3}} - \frac{pTdt}{2\sqrt{(1+p^2)(A-\int Tdx)}}$$

che si riduce alla forma più semplice

$$\frac{T(xdy - ydx)}{2t(A - \int Tdt)} = \frac{dp}{1 + p^2}$$

Per eliminare variabili, Eulero esprime dx e dy in funzione di dt e ottiene

$$\frac{Tdt}{2(A - \int Tdt)} = \frac{dp(py + x)}{(1 + p^2)(px - y)} = \frac{xdp}{px - y} - \frac{pdp}{1 + p^2}$$

Integrando si ottiene

$$\frac{C}{\sqrt{A - \int Tdt}} = \frac{px - y}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{xdy - ydx}{ds}$$

e si può osservare che il membro di destra è la distanza perpendicolare dal punto C alla tangente alla curva in M; per cui la velocità è inversamente proporzionale a questa distanza. Come dice correttamente Eulero, questa è una proprietà molto importante del moto: se infatti ci mettiamo in coordinate polari con C: polo e CB: asse, questa espressione ci dice che

$$\frac{ds}{d\tau} \cdot r^2 \frac{d\theta}{ds} = \cos t \operatorname{cioè} r^2 \frac{d\theta}{d\tau} = \cos t$$

Se chiamiamo A l'area spazzata dal raggio vettore che parte dall'asse CB, si può scrivere

 $2\frac{dA}{d\tau} = r^2 \frac{d\theta}{d\tau} = \cos t$

cioè: sia $\frac{dA}{d\tau}$ la velocità areolare, allora essa è costante quando si è in presenza di una forza centrale contraria. In sostanza questa è la legge di Keplero.

Eulero conclude l'appendice riflettendo sulla generalizzazione del principio di minima azione e sottolinea che il principio sembra incorrere in difficoltà quando si consideri il moto in un mezzo resistente. In effetti Lagrange nel 1788 mostrerà che il principio è valido in generale per forze conservative in cui tutti i vincoli siano indipendenti dal tempo; nel caso contrario l'integrale potrebbe non essere un estremo.

Capitolo 5

Il contributo di Lagrange

Nell'agosto 1755 il diciannovenne torinese Giuseppe Lodovico Lagrange scrive una lettera a Eulero con allegata una appendice in cui viene esposta una nuova e rivoluzionaria idea: il giovane, che già si interessa di problemi del calcolo delle variazioni stimolato dalle ricerche di Eulero, dice di essere in grado di eliminare la necessità dei lunghi calcoli geometrici dal metodo del 1744 e di ridurre il processo a un apparato puramente analitico. Eulero giudica molto interessante il lavoro di Lagrange, che chiama calcolo delle variazioni, tanto da mettere in secondo piano il suo metodo, per far avere al ragazzo tutto il merito della scoperta. Lagrange lavora sulle sue idee fino al 1760, quando vengono pubblicate nella rivista Miscellanea Taurinensia, poi produce altri lavori sull'argomento fino a che nel 1788 esce l'opera più importante: Méchanique Analitique, dove si trovano anche i cosiddetti moltiplicatori di Lagrange.

Nella lettera del 1755 Lagrange dice ad Eulero di essere stato ispirato proprio da una sua frase: "è desiderabile un metodo libero dalla geometria"; per fare ciò Lagrange definisce una nuova forma di differenziale che viene chiamata variazione e che indica con δ invece che con d. La connessione con una funzione di x, y, y', \ldots si ha in questo modo: la variabile x è fissata e viene calcolato il differenziale in modo ordinario, ma con argomenti

differenziali δy , $\delta y'$, ecc. Poi vengono definite le regole di commutazione

$$\delta dF(y) = d\delta F(y)$$
 $\delta d^m F(y) = d^m \delta F(y)$ con $m = 1, 2, \dots$ e $\delta \int Z = \int \delta Z$

e si scrive il differenziale della funzione integranda, come anche Eulero aveva fatto

$$dZ = Mdx + Ndy + Pd^2y + Qd^3y + \dots$$

la cui variazione diventa

$$\delta Z = N\delta y + P\delta dy + Q\delta d^2y + \dots$$

Per rendere $\delta \int Z = \int \delta Z$ più chiara si potrebbe vedere $\int Z$ come valutato lungo una famiglia di curve $y = y(x,\alpha)$: applicare la variazione δ consiste nel differenziare rispetto al parametro α ; allora se l'arco dato corrisponde ad $\alpha = 0$ si avrà $\delta y(x) = \alpha \cdot \frac{\delta y(x,\alpha)}{\delta \alpha}\Big|_{\alpha=0}$. Dall'altro lato, Z è vista come una funzione di x,y,dy,d^2y,\ldots , viene differenziata rispetto ad α , poi si pone $\alpha=0$ e poi viene integrata rispetto a x. In questo modo Lagrange si è liberato da variazioni del tipo nv,ow,\ldots (cioè quelle usate da Eulero); inoltre con questo metodo non c'è bisogno di decidere quante ordinate debbano essere cambiate.

Il primo problema che vuole risolvere attraverso il suo formalismo è: trovare una relazione tra x e y per cui l'integrale $\int_0^a Z$ sia un massimo o un minimo. Si ha $dZ = Mdx + Ndy + Pd^2y + Qd^3y + \ldots$ e, in accordo con le sue regole, come abbiamo detto, scrive $\delta Z = N\delta y + P\delta dy + Q\delta d^2y + \ldots$ Allora, da $\delta \int Z = \int \delta Z$ segue

$$\delta \int Z = \int N\delta y + \int P\delta dy + \int Q\delta d^2y + \dots =$$

$$= \int N\delta y + \int Pd\delta y + \int Qd^2\delta y + \dots =$$

$$= \int N\delta y + P\delta y - \int dP\delta y + Qd\delta y - dQ\delta y + \int d^2Q\delta y + \dots$$

e quindi

$$\delta \int Z = \int (N - dP - d^2Q - \dots) \delta y + (P - dQ + \dots) \delta y + (Q - \dots) d\delta y + \dots$$

(con integrali calcolati tra x=0 e x=a). Quindi se le curve sono tali che $0=\delta y=d\delta y=\ldots$ agli estremi, allora si ha

$$\delta \int Z = \int (N - dP + d^2Q - d^3R + \dots)\delta y$$

e siccome δy è arbitrario tra 0 e a, allora $N-dP+d^2Q-d^3R+\cdots=0$. Notiamo che Lagrange assume tacitamente che deve valere $\delta \int Z=0$ per avere un estremo.

Poi Lagrange si interessa a un altro risultato già ottenuto da Eulero nel *Methodus*, sottolineando quanto semplicemente lui possa ottenerlo. Si ha

$$dZ = Ld\pi + Mdx + Ndy + Pd^2y + \dots$$

con $\pi = \int_0^x (Z) e^{-x}$

$$d(Z) = (M)dx + (N)dy + (P)d^2y + \dots$$

così si può scrivere

$$\delta Z = L\delta\pi + N\delta y + P\delta dy + \dots$$

con $\delta \pi = \int (N) \delta y + \int (P) \delta dy + \dots$ e

$$\delta(Z) = (N)\delta y + (P)\delta dy + \dots$$

quindi

$$\delta \int Z = \int N \delta y + \int P d \delta y + \dots + \int L \int (N) \delta y + \int L \int (P) d \delta y + \dots$$

Ponendo $H=\int_0^a L$ e $V=H-\int_0^x L$ si trova facilmente che

$$\delta \int_0^a Z = \int_0^a [N + (N)V] \delta y + \int_0^a [P + (P)V] d\delta y + \dots$$

da cui si conclude, come prima

$$N + (N)V - d[P + (P)V] + \dots = 0$$

Utilizza un ragionamento analogo anche nel caso in cui sia Z sia (Z) contengano $\pi = \int_0^x (Z)$: δZ in questo caso è $(L)\delta \pi + (N)\delta y + (P)\delta^2 y + \dots$, quindi

$$\delta \pi = \delta \int (Z) = \int \delta Z = \int [(L)\delta \pi + (N)\delta y + \dots]$$

Da queste due si ottiene

$$d\delta\pi = (L)\delta\pi dx + (N)\delta y dx + (P)d\delta y dx + \dots$$

Ponendo $V = (N)\delta y + (P)d\delta y + \dots$, si deve risolvere

$$d\delta\pi - (L)\delta\pi dx = Vdx$$

per la quale trova $\delta \pi = e^{\int (L)} \int V e^{-\int (L)}$ e quindi

$$\delta \int Z = \int N \delta y + \int P d\delta y + \dots + \int e^{\int (L)} L \int e^{-\int (L)} (N) \delta y + \dots$$

Ponendo
$$H=\int_0^a e^{\int(L)}L,\,V=H-\int_0^x e^{\int(L)}L$$
e $S=e^{-\int(L)}V$ si trova

$$N + (N)S - d[P + (P)S] + d^{2}[Q + (Q)S] - \dots = 0$$

Lagrange è in corrispondenza con Eulero per un bel periodo prima di pubblicare i suoi importanti risultati sui *Miscellanea Taurinensia* per la prima volta nel 1760/61. Nei suoi lavori precedenti Lagrange asserisce correttamente che la sua variazione δZ di una funzione è come il differenziale, a parte che nelle variabili differenziali. Quindi se Z è una funzione di x e dZ = mdx, allora $\delta Z = m\delta x$ e analogamente per le altre equazioni.

Il primo problema che tratta consiste in un integrale indefinito $\int Z$, con Z funzione di $x, y, z, dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z, \ldots$, di cui cerca la curva che massimizzi o minimizzi l'integrale definito $\int Z$.

In accordo con i noti metodi per trovare massimo e minimo, è necessario differenziare, considerare le quantità x, y, z, dx, dy, dz, ... come variabili e porre il differenziale uguale a zero. Chiamando la variazione col simbolo δ si avrà $\delta \int Z = 0$, cioè $\int \delta Z = 0$. Per calcolare il valore dell'ultimo integrale si scrive

$$\delta Z = n\delta x + p\delta dx + q\delta d^2x + \dots + N\delta y + P\delta dy + Q\delta d^2y + \dots + v\delta z + w\delta dz + \dots$$

Poi si noti che $\delta dx = d\delta x$, $\delta d^2x = d^2\delta x$ ecc. e che $\int p d\delta x = p\delta x - \int dp\delta x$, $\int q d^2\delta x = q d\delta x - dq\delta x + \int d^2q\delta x$ ecc. e quindi

$$\int Z = 0 = \int (n - dp + d^2q - \dots)\delta x + \int (N - dP + d^2Q - \dots)\delta y +$$

$$+ \int (v - dw + \dots)\delta z + (p - dq + d^2r - \dots)\delta x +$$

$$+ (q - dr + \dots)d\delta x + (r - \dots)d^2\delta x + \dots +$$

$$+ (P - dQ + d^2R - \dots)\delta y + (Q - dR + \dots)d\delta y +$$

$$+ (R - \dots)d^2\delta y + \dots + (w - \dots)\delta z + \dots$$

da cui si conclude

$$(n - dp + d^2q - \dots)\delta x + (N - dP + d^2Q - \dots)\delta y + (v - \dots)\delta z = 0$$

e anche

$$(p-dq+d^2r-\ldots)\delta x + (q-dr+\ldots)d\delta x + (r-\ldots)d^2\delta x + \cdots +$$

$$+(P-dQ+d^2R-\ldots)\delta y + (Q-dR+\ldots)d\delta y + (R-\ldots)d^2\delta y +$$

$$+(w-\ldots)\delta z + \cdots = 0$$

Si chiami il valore al punto finale con 'M, mentre al punto iniziale con M': la condizione diventa M' - M' = 0.

Quando non ci sono vincoli sulle variazioni $\delta x, \delta y, \delta z,$ le equazioni precedenti diventano

$$n - dp + d^{2}q - \dots = 0$$

$$N - dP + d^{2}Q - \dots = 0$$

$$v - dw + d^{2}t - \dots = 0$$

Ora si supponga che la curva in questione sia tale che un estremo giaccia su una superficie data. Senza perdita di generalità consideriamo f(x, y, z, x', y', z'), perciò la condizione diventa $0 = f_{x'}\delta x + f_{y'}\delta y + f_{z'}\delta z$, con $\delta x, \delta y, \delta z$ coseni direttori della normale del bordo della superficie nel punto di intersezione tra la curva e la superficie. Allora si può scrivere

$$0 = f dt + f_{x'}(\delta x - x' dt) + f_{y'}(\delta y - y' dt) + f_{z'}(\delta z - z' dt)$$

Il risultato è la nota condizione di trasversalità.

Lagrange, per mostrare la potenza del suo metodo, considera il famoso problema della brachistocrona: prende x e y rispettivamente come assi verticale e orizzontale e l'integrale da minimizzare è

$$\int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{x}}$$

Da questa calcola che $n = -\frac{ds}{2x\sqrt{x}}$, $p = \frac{dx}{\sqrt{x}ds}$, $P = \frac{dy}{\sqrt{x}ds}$ e $w = \frac{dz}{\sqrt{x}ds}$ e tutte le altre quantità sono nulle.

Bisogna trovare tra tutte le curve ammissibili quella che ci dia il tempo di minima discesa, allora dalle condizioni trovate in generale deduce le relazioni

$$- \frac{ds}{2x\sqrt{x}} - d\frac{dx}{\sqrt{x}ds} = 0$$
$$-d\frac{dy}{\sqrt{x}ds} = 0$$
$$-d\frac{dz}{\sqrt{x}ds} = 0$$

da cui, moltiplicando e sommando, si trova

$$d\left(\frac{1}{x} - \frac{dx^2}{xds^2}\right) = 0$$

(ricordiamo che $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$). Se si integrano la seconda e la terza equazione precedente e i risultati vengono divisi fra loro, si trova $\frac{dy}{dz} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$, che implica che il moto avviene in un piano verticale. Poi si riscrive y e z

attraverso un'unica variabile t tale che $t=\sqrt{y^2+z^2}$ e attraverso questa si ha

$$z = t \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}$$
 $y = t \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}$ $dy = dt \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}$ $ds = \sqrt{dx^2 + dt^2}$

e quindi

$$dt = \frac{\sqrt{x}dx}{c-x}$$
 $c = \frac{ab}{a+b}$

la cui soluzione è una cicloide generata da una circonferenza di diametro c che rotola su una retta orizzontale.

Poi Lagrange considera il caso della brachistocrona quando il primo estremo è fissato e il problema diventa quello di trovare tra tutte le curve che passino per quel punto quella che scende su un fissato piano orizzontale nel minor tempo possibile. Allora in questo caso 'M=0 e M'=0 sono equivalenti alla condizione $\frac{dx}{\sqrt{x}ds}\delta x+\frac{dy}{\sqrt{x}ds}\delta y+\frac{dz}{\sqrt{x}ds}\delta z=0$ con le quantità valutate sul piano, cioè $\delta x=0$ e δy e δz arbitrari. Questo ci dà $\frac{dy}{\sqrt{x}ds}=0$, $\frac{dz}{\sqrt{x}ds}=0$, $a=\infty$ e $b=\infty$, così la cicloide si trasforma in una linea verticale.

Analogamente si possono considerare i casi in cui il piano, invece che orizzontale, sia verticale e ortogonale all'asse y o z.

Successivamente Lagrange considera il caso in cui il secondo estremo giaccia su una superficie arbitraria e si trova che la curva minimizzante taglia la superficie ad angolo retto.

Infine se la brachistocrona deve andare da una superficie ad un'altra, allora si avrà sia M' = 0 sia M' = 0, quindi la curva minimizzante taglia entrambe le superfici ortogonalmente.

Vediamo ora come Lagrange affronta il problema di trovare la soluzione della brachistocrona quando tutte le curve sono costrette a giacere su una superficie data di equazione dz = pdx + qdy; da questa trova il vincolo sulle variazioni $\delta z = p\delta x + q\delta y$, che deve valere lungo ogni curva. Ottiene così,

sapendo che δx e δy sono arbitrari

$$-pd\frac{dz}{\sqrt{x}ds} - \frac{ds}{\sqrt{x}ds} - d\frac{dx}{\sqrt{x}ds} = 0$$
$$-qd\frac{dz}{\sqrt{x}ds} - d\frac{dy}{\sqrt{x}ds} = 0$$

Attraverso la relazione dz = pdx + qdy si nota che queste due equazioni sono equivalenti, perciò la curva soluzione può essere trovata scegliendo una di queste.

Lagrange considera anche gli altri casi, ad esempio quando il secondo estremo può variare lungo una curva della superficie.

A questo punto Lagrange sottolinea che

M. Euler est le premier qui ait donné des formules générales pour trouver les courbes dans lesquelles une fonction intégrale donnée est la plus grande ou la plus petite; mais les formules de cet Auteur sont moins générales que les notres: 1. parce qu'il ne fait varier que la seule changeante y dans l'expression Z; 2. parce qu'il suppose que le premier et le dernier point de la courbe sont fixes.

(Eulero è il primo ad aver dato le formule generali per trovare le curve lungo le quali una data espressione integrale abbia il valore più grande o più piccolo; ma le sue formule sono meno generali di queste perché 1. non può che variare la variabile y nell'espressione di Z; 2. Eulero assume che il primo e l'ultimo punto della curva siano fissati.)

Lagrange propone un secondo problema: trovare le condizioni per cui l'espressione $\int Z$ sia un massimo o un minimo, sapendo che Z è una funzione algebrica di $x, y, z, dx, dy, dz, dx^2, dy^2, \ldots$ e di $\Pi = \int Z'$, con Z' funzione di x, y, z, dx, dy, \ldots

Per prima cosa nota che

$$\delta Z = Ld\Pi + n\delta x + p\delta dx + q\delta d^2x + \dots + N\delta y + P\delta dy + \dots + vdz + w\delta dz + \dots$$

 $\delta Z' = n'\delta x + p'\delta dx + q'\delta d^2x + \dots + N'\delta y + P'\delta dy + \dots + v'dz + w'\delta dz + \dots$ Poi ha

$$\delta \int Z = \int \delta Z = \int (n\delta x + p\delta dx + \dots) + \int L \int (n'\delta x + p'\delta dx + \dots)$$

in cui, come prima, il primo integrale si può trasformare in $\int (n-dp+d^2q-\dots)\delta x+(p-dq+\dots)\delta x+(q-\dots)d\delta x+\dots$, mentre il secondo, integrando per parti, si può scrivere $\int L\int (n'\delta x+p'\delta dx+\dots)-\int \Big[\int L(n'\delta x+p'\delta dx+\dots)\Big];$ come aveva fatto anche Eulero, Lagrange pone $H=\int L$ su tutto l'intervallo, quindi

$$\int \left[(H - \int L)(n'\delta x + p'\delta dx + \dots) \right] =$$

$$= \int \left[n'(H - \int L) - dp'(H - \int L) + \dots \right] \delta x +$$

$$+ \left[p'(H - \int L) - dq'(H - \int L) + \dots \right] \delta x + \left[q'(H - \int L) - \dots \right] d\delta x + \dots$$

Per semplificare la notazione pone $n+n'(H-\int L)=(n), p+p'(H-\int L)=(p)$ e $q+q'(H-\int L)=(q)$ e analogamente per (N), (P), ecc. Allora

$$\delta \int Z = \int \left[(n) - d(p) + d^2(q) - \dots \right] \delta x +$$

$$+ \int \left[(N) - d(P) + d^2(Q) - \dots \right] \delta y +$$

$$+ \int \left[(v) - d(w) + \dots \right] \delta z +$$

$$+ \left[(p) - d(q) + \dots \right] \delta x + \left[(q) - \dots \right] \delta dx + \dots +$$

$$+ \left[(P) - d(Q) + \dots \right] \delta y + \left[(Q) - \dots \right] \delta dy + \dots +$$

$$+ \left[(w) - \dots \right] \delta z + \dots = 0$$

che è una forma analoga a quella del problema visto prima. Va sottolineato che questo procedimento può essere generalizzato.

Affronta anche altri problemi in cui Z è definita mediante una equazione differenziale del primo ordine, poi del secondo e infine comincia a trattare il

caso di integrali multipli.

In una appendice Lagrange propone un'applicazione diversa del suo metodo: lo usa per trovare quel poligono, tra tutti quelli con fissato numero di lati, la cui area sia la più grande.

Le coordinate dei vertici sono (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , ..., (x_{I-1}, y_{I-1}) , con (x_0, y_0) e (x_{I-1}, y_{I-1}) sull'asse x. Per calcolare l'area si divide il poligono in trapezoidi di altezze $x_{i+1} - x_i$ e basi $y_{i+1} - y_i$ (e quindi potranno venire aree dei trapezoidi anche negative). L'area di un trapezoide siffatto è

$$\frac{y_{i+1} + y_i}{2}(x_{i+1} - x_i) = \left[y_i + \frac{y_{i+1-y_i}}{2}\right](x_{i+1} - x_i)$$

e quindi l'area totale del poligono

$$\int (y + \frac{1}{2}dy) = \sum_{i=0}^{I-1} [y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{2}](x_{i+1} - x_i)$$

dove $dy = y_{i+1} - y_i$ e $dx = x_{i+1} - x_i$. la condizione di minimo si ha quando la variazione della somma è nulla, quindi

$$0 = \int \left[(\delta y)dx + \frac{1}{2}(\delta dy)dx + (y + \frac{1}{2}dy)\delta dx \right]$$

siccome la lunghezza di ogni lato, $\sqrt{dx^2 + dx^2}$ è fissata, allora $\delta \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dx\delta dx + dy\delta dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = 0$, cioè $\delta dx = -\frac{dy\delta dy}{dx}$; sostituendo si ottiene $\int [dx\delta y + z\delta dy] = 0$, con $z = \frac{1}{2}dx - \frac{ydy}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx}$. Attraverso le formule per la differenza di un prodotto (ricordiamo che $df = f_{i+1} - f_i$) si ha

$$z\delta y + \int (dx - d'z)\delta y = 0$$

Siccome $\delta y|_0 = \delta y|_{I-1} = 0$, si trova $\int (dx - d'z)\delta y = 0$ per δy arbitrario; perciò dx - d'z = 0 e quindi $a = x + dx - z = x + dx - \frac{1}{2}dx + \frac{ydy}{dx} + \frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx}$, cioè

$$adx = \left(x + \frac{1}{2}dx\right)dx + \left(y + \frac{1}{2}dy\right)dy = \frac{1}{2}d(x^2) + \frac{1}{2}d(y^2)$$

Dall'integrazione si ha che $2ax+r^2=x^2+y^2$, che è l'equazione di una circonferenza con centro sull'asse x. Si conclude quindi che il poligono desiderato

deve essere inscritto in una semicirconferenza limitata dall'asse. L'ultimo δx deve essere zero quando la base del poligono è fissata e questo ci dà $\delta x = -\int \frac{dyd\delta y}{dx}$ e deve essere zero anche $\int [dx\delta y + (\frac{1}{2}dx - \frac{ydy}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx})d\delta y]$. Combinando le cose e moltiplicando per un coefficiente k si ottiene

$$\int \left[dx\delta y + \left(k\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx}\right)d\delta y\right] = 0$$

Se chiamiamo la somma tra parentesi z si ha a=x+dx-z o $adx=kdy+\frac{1}{2}d(x^2)+\frac{1}{2}d(y^2),$ che dà

$$ax + b^2 = ky + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

Si può racchiudere tutto in un teorema:

le plus grand polygone qu'on puisse former avec des cotés donnés est celui qui peut etre inscrit dans un cercle.

cioè il poligono più grande che può essere formato a partire da lati dati è quello che può essere inscritto in una circonferenza.

Su questa scia, Lagrange mostra altri esempi, come considerare il caso in cui è dato il perimetro, ma non il lato del poligono e trova che tutti i lati devono essere uguali tra loro, cioè il poligono deve essere regolare.

Nel 1766 vengono pubblicati altri scritti di Lagrange sui Miscellanea Taurinensia nei quali vengono sviluppate situazioni più complicate. Prima di tutto però sviluppa un calcolo che gli servirà in seguito: sia ϕ una funzione data da un'equazione differenziale di grado arbitrario con ϕ, x, y, z e i differenziali di queste quantità. Chiama questa equazione differenziale $\Phi = 0$ e cerca $\delta\Phi$ (ricordiamo che $x = x(t), y = y(t), z = z(t), \ldots$ di estremi (a, b, c, \ldots) e (l, m, n, \ldots)). La variazione $\delta\Phi$ si scrive in questa forma

$$\delta\Phi = p\delta\phi + p'\delta d\phi + p''\delta d^2\phi + \dots + q\delta x + q'\delta dx + \dots + r\delta y + r'\delta dy + \dots + s\delta z + s'\delta dz + \dots = 0$$

con $p, p', p'', \ldots, q, q', \ldots$ sono funzioni date di $\phi, x, y, \ldots, d\phi, dx, \ldots$ Siccome $\delta d\phi = d\delta \phi$ ecc. si ha

$$p\delta\phi + p'd\delta\phi + p''d^2\delta\phi + \dots + q\delta x + q'd\delta x + \dots + r\delta y + r'd\delta y + \dots + s\delta z + s'd\delta z + \dots = 0$$

$$(5.1)$$

Moltiplicando per una funzione indeterminata ξ e integrando per parti (Lagrange semplifica i risultati cambiando la notazione), si ottiene

$$\int (P\delta\phi + Q\delta x + R\delta y + S\delta x + \dots) +$$

$$+P'\delta\phi + P''d\delta\phi + \dots + Q'\delta x + Q''d\delta x + \dots +$$

$$+R'\delta y + R''d\delta y + \dots + S'\delta z + S''d\delta z + \dots = cost$$

in cui l'integrando viene chiamato Ψ e la parte fuori dall'integrazione Π :

$$\Pi + \int \Psi = \cos t$$

Sia Γ il valore di Π all'estremo inferiore di integrazione e Δ il valore all'estremo superiore; allora $\Delta = \Gamma - \int \Psi$. Si scelga ξ in modo tale che $0 = P = p\xi - d(p'\xi) + d^2(p''\xi) - \ldots$; questa viene vista da Lagrange come una equazione differenziale lineare, quindi sceglie una costante arbitraria da porre nella soluzione generale in modo tale che al secondo estremo dell'intervallo di integrazione le quantità P'', P''', ... siano nulle. Si ottiene così

$$(P'\delta\phi) = [P'\delta\phi + P''d\delta\phi + \dots + Q'\delta x + Q''d\delta x + \dots + \\ + R'\delta y + R''d\delta y + \dots + S'\delta z + S''d\delta z + \dots] - \\ - (Q'\delta x + Q''d\delta x + \dots + R'\delta y + R''d\delta y + \dots + S'\delta z + S''d\delta z + \dots) - \\ - \int (Q\delta x + R\delta y + S\delta z + \dots)$$

che è valida a condizione che ξ è scelta in modo tale che $0 = p\xi - d(p'\xi) + d^2(p''\xi) - \dots$, con (P'') = 0, (P''') = 0, ecc.

Poi Lagrange prosegue cercando di massimizzare o minimizzare la funzione ϕ in $\Phi = 0$. Nota che ϕ può contenere integrali indefiniti e le condizioni iniziali determineranno gli estremi; assume come condizioni iniziali

 $x=a,\ y=b,\ z=c,$ ecc. e vede che ϕ e i suoi differenziali sono funzioni di $a,b,c,\ldots,da,db,dc,\ldots$. Ancora di più, se ci sono μ costanti di integrazione, allora le quantità $\phi,d\phi,\ldots,d^{\mu-1}\phi$ nei punti a,b,c,\ldots sono arbitrarie e supposte date. A questo punto Lagrange assume che ϕ sia un massimo o un minimo quando l'altro estremo di integrazione sia fissato a $x=l,\ y=m,\ z=n,\ldots$. Allora $(\delta\phi)=0$ e quindi

$$0 = \int (Q\delta x + R\delta y + S\delta z + \dots)$$

$$0 = [P'\delta\phi + P''d\delta\phi + \dots + Q'\delta x + Q''d\delta x + \dots + \\ + R'\delta y + R''d\delta y + \dots + S'\delta z + S''d\delta z + \dots] - \\ - (Q'\delta x + Q''d\delta x + \dots + R'\delta y + R''d\delta y + \dots + S'\delta z + S''d\delta z + \dots)$$

devono valere separatamente rispetto alle variazioni.

Considerando la prima equazione: per $a \le x \le l, b \le y \le m$ e $c \le z \le n,$

$$Q\delta x + R\delta y + S\delta z + \dots = 0$$

Se non c'è relazione tra x, y, z, \ldots allora $\delta x, \delta y, \delta z, \ldots$ sono indipendenti, per cui si ha l'uguaglianza con zero solo se $Q = R = S = \cdots = 0$.

Se c'è una relazione tra x, y, z, \ldots della forma $Xdx + Ydy + Zdz + \cdots = 0$, allora si ha RX - QY = 0, SX - QZ = 0 ecc. In generale sarà necessario ridurre i differenziali $\delta x, \delta y, \ldots$ al numero più piccolo possibile e uguagliare a zero i coefficienti di quelli che rimangono; in questo modo si troverà la relazione necessaria tra x, y, \ldots in modo tale che ϕ sia la più grande o la più piccola.

Considerando la seconda equazione: si rinominano le funzioni (per esempio $f = \phi(a, b, c, ...)$)e per usare la nuova relazione ottenuta bisogna esaminare il problema e trovare le condizioni che eventualmente esistano tra f, a, b, c, ..., l, m, n, ... e i loro differenziali; si trova anche il modo in cui riscrivere δf e δdf in funzione dei differenziali $\delta a, \delta b, \delta c, ...$ in modo tale che l'equazione diventi lineare in $\delta a, \delta b, ..., \delta l, \delta m, ...$

Lagrange considera ora un semplice esempio: $\phi = \int Z$, con Z funzione di x,y,z,\ldots e i loro differenziali. Allora

$$\Phi = Z - \delta\phi \qquad \delta\phi = \delta Z - \delta d\phi$$

Si può esprimere

$$\delta Z = q\delta x + q'\delta dx + \dots + r\delta y + r'\delta dy + \dots + s\delta z + s'\delta dz + \dots$$

Ricordando l'equazione generale

$$\delta\Phi = p\delta\phi + p'\delta d\phi + p''\delta d^2\phi + \dots + q\delta x + q'\delta dx + \dots + r\delta y + r'\delta dy + \dots + s\delta z + s'\delta dz + \dots = 0$$

si ha $p=0,\,p'=-1,\,p''=0,\,\ldots$ Si possono così trovare i valori di $P=-d\xi,$ $P'=\xi,\,P''=0,\,\ldots$ Se si pone P=0, naturalmente si trova $\xi=\cos t=1$. Dalle condizioni che abbiamo visto prima si trova che, per $x=a,\,y=b,$ $z=c,\,\ldots,\,\phi=0$ quindi $f\equiv 0$ e $\delta f\equiv 0$; la condizione diventa quindi

$$A'\delta a + A''\delta da + \dots + B'\delta b + \dots - L'\delta l - L''\delta dl - \dots - M'\delta m - \dots = 0$$

Considera anche l'esempio in cui $\phi = \int Z$, con Z funzione di x, y, z, \ldots , i loro differenziali e anche un'altra variabile della forma $(\phi) = \int (Z)$, con (Z) che dipende da x, y, z, \ldots e i loro differenziali. Allora

$$\delta Z = q\delta x + q'\delta dx + \dots + r\delta y + r'\delta dy + \dots + s\delta z + \dots + \pi\delta(\phi)$$

in cui chiamiamo $q\delta x + q'\delta dx + \cdots + r\delta y + r'\delta dy + \cdots + s\delta z + s'\delta dz + \cdots = \delta V$. A questo punto prosegue con la solita trattazione.

Infine ripropone il problema della brachistocrona nel caso in cui gli estremi siano liberi di muoversi lungo due curve nello stesso piano e, con il suo metodo, trova che la curva minimizzante taglierà ogni curva ortogonalmente.

Leggiamo dalle proprie parole di Lagrange i vantaggi del suo *metodo delle* variazioni per la risoluzione di problemi di massimo e di minimo:

Les principaux avantages de ma méthode des variations pour la solution des problèmes de maximis et minimis consistent:

- 1. dans la simplicité et la généralité du calcul, comme on peut s'en convainere aisément en comparant cette méthode avec celle que M. Euler a donnéè dans son excellent ouvrage intitulé: Methodus inveniendi lineas curvas, etc. et meme avec celle que M. Fontaine vient de donner dans son Mémoire intitulé: Addition à la méthode, etc., dejà cité plus haute.
- 2. En ce que ma méthode fournit des équations déterminées qui servent à résoudre les Problèmes d'une manière plus générale et plus complète qu'on ne l'avait fait avant moi. Quoique ces èquations soient une suite nécessaire et naturelle de mon analyse des variations, et que leur usage ne soit qu'une application très simple des principes de la méthode générale de maximis et minimis [...]
- (1. la semplicità e generalità del calcolo, come si può vedere paragonandolo col metodo di Eulero.
- 2. il fatto che il metodo fornisca delle equazioni determinate che servono per risolvere i problemi in un modo più generale e più completo rispetto ai precedenti.)

5.1 Il ruolo dei moltiplicatori di Eulero - Lagrange

Prima Eulero e poi Lagrange (per imitazione) scoprono il ruolo dei moltiplicatori quando compare una condizione del tipo $y' - \phi(x, y) = 0$. Nel 1788 Lagrange, come possiamo vedere nella $M\`{e}chanique$ Analitique, capisce come determinarli almeno in modo operativo:

Soient L=0, M=0, N=0, etc. les différentes équations de condition données par la nature du systeme, les quantités L, M, N, etc. étant des fonctions finies des variables x, y, z, x', y', z', etc.; en différentiant ces équations on aura celles-ci, dL=0, dM=0, dN = 0 etc. lesquelles donneront la relation qu'il doit y avoir entre les différentielles des memes variables. En général nous représenterons par dL = 0, dM = 0, dN = 0, etc. les équations de condition entre ces différentielles, soit que ces équations soient elles-memes des différences exactes ou non, pourvu que les différentielles n'y soient que linéaires. Maintenant comme ces équations ne doivent servir qu'à éliminer un pareil nombre de différentielles dans l'équation des vitesses virtuelles, après quoi les coefficiens des différentielles restantes, doivent etre ègalés chacun à zéro, il n'est pas difficile de prouver par la théorie de l'élimination des équations linéaires, qu'on aura les memes résultats si on ajoute simplement à l'équation des vitesses virtuelles, les différentes équations de condition dL = 0, dM = 0, dN = 0, etc. multipliées chacune par un coefficient indéterminé, qu'ensuite on égalé à zéro la somme de tous les termes qui se trouvent multipliés par une meme différentielle; ce qui donnera autant d'équations particulieres qu'il y a de différentielles; qu'enfin on élimine de ces dernieres équations les coefficiens indéterminés par lesquels on a multiplié les équations de condition.

(Siano L=0, M=0, N=0, etc. le equazioni delle condizioni date dalla natura del sistema, le quantità L,M,N, etc. sono funzioni nelle variabili x,y,z,x',y',z', etc.; differenziando queste equazioni si avrà dL=0, dM=0, dN=0 etc. che daranno la relazione che esiste tra i differenziali delle variabili stesse. [...] Ora siccome queste equazioni non devono servire che a eliminare un ugual numero di differenziali nell'equazione delle velocità virtuali, dopo di che i coefficienti dei differenziali restanti devono essere ognuno eguagliato a zero, non è difficile dimostrare dalla teoria di eliminazione di equazioni

lineari, che si avranno gli stessi risultati se semplicemente si aggiungono all'equazione delle velocità virtuali le equazioni delle condizioni dL=0, dM=0, dN=0, etc. ognuna moltiplicata per un coefficiente indeterminato, dopo ciò si eguaglierà a zero la somma di tutti i termini che si trovano moltiplicati per uno stesso differenziale; questo darà equazioni differenziali particolari.)

Il principio generale che dà Lagrange è

Lorsqu'une fonction de plusieurs variables doit etre un maximum ou minimum, et qu'il y a entre ces variables une ou plusieurs équations, il suffira d'ajouter à la fonction proposée les fonctions qui doivent etre nulles, multipliées chacune par une quantité indéterminée, et de chercher ensuite le maximum ou minimum comme si les variables étaient indépendantes; les équations qu'on trouvera, combinées avec les équations données, serviront à déterminer toutes les inconnues.

(Quando una funzione a più variabili deve essere un massimo o un minimo e tra queste variabili ci sono una o più equazioni, sarà sufficiente aggiungere alla funzione data le funzioni che devono essere nulle, ognuna moltiplicata per una quantità indeterminata, e cercare il massimo o il minimo come se le variabili fossero indipendenti; le equazioni che si troveranno, combinate con le equazioni date, serviranno a determinare tutte le incognite.)

Ad esempio si voglia minimizzare l'integrale

$$\int_{a}^{b} f(x, y, y', \dots, z, z', \dots) dx$$

soggetto alla condizione

$$\phi(x, y, y', \dots, z, z', \dots) = 0$$

dal principio generale si deduce che si deve aggiungere a f la ϕ moltiplicata per una variabile Δ e considerare indipendenti le variabili. Si trova

$$f'(y) - f'(y')' + f'(y'')'' - \dots + \Delta \phi'(y) - \Delta \phi'(y')' + \dots = 0$$

$$f'(z) - f'(z')' + f'(z'')'' - \dots + \Delta \phi'(z) - \Delta \phi'(z')' + \dots = 0$$

Queste servono per trovare Δ come funzione di x e un arco estremale y in funzione di x.

Vediamo anche l'esempio del problema isoperimetrico con

$$\int_{a}^{b} f(x, y, y', \dots, z, z', \dots) dx$$

da massimizzare o minimizzare, soggetto alla condizione

$$\int_{a}^{b} \phi(x, y, y', \dots, z, z', \dots) dx = cost$$

Di nuovo si considera $f+\Delta\phi$, ma in questo caso Δ è una costante che può essere determinata dalla condizione.

Capitolo 6

Sviluppi più recenti

Il metodo classico del Calcolo delle Variazioni consiste nel determinare le soluzioni dell'equazione di Eulero-Lagrange; l'esistenza del minimo (o massimo) può essere data dal problema stesso, come si vede negli esempi più classici: l'esistenza del minimo (o massimo) viene implicitamente assunta come evidente dalla natura stessa del problema, in pratica viene postulata (pare ovvio che esista il percorso più veloce che una particella percorre per andare da un punto a un altro in un piano verticale, così come esiste "sicuramente" la figura che, a parità di perimetro, racchiude l'area massima); oppure studiando la variazione seconda del funzionale per determinare la natura del punto stazionario.

Gli studi di Eulero e di Lagrange ci forniscono le condizioni necessarie per determinare i minimi (o massimo): porre la variazione uguale a zero fornisce un'equazione differenziale di cui il minimo (o massimo) è soluzione; tuttavia i procedimenti presuppongono implicitamente l'appartenenza delle soluzioni a particolari classi di funzioni regolari, inoltre nei loro procedimenti viene sfruttato il fatto che l'annullarsi dell'integrale che rappresenta la variazione implichi l'annullarsi della funzione integranda. Questo è il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni, che nei primi tempi dello sviluppo della teoria era considerato quasi come un assioma.

I metodi classici si basano sull'esistenza di soluzioni di equazioni differenziali

per determinare l'esistenza del minimo (o massimo) di funzionali integrali. Nel caso di una dimensione si tratta di risolvere un problema agli estremi per equazioni differenziali ordinarie, di cui sappiamo che l'esistenza delle soluzioni è data solo in casi particolari; nel caso di integrali multipli, invece, si tratta di risolvere un'equazione differenziale alle derivate parziali (o sistemi di equazioni) che può essere molto complicata.

6.1 Derivazione dell'equazione di Eulero-Lagrange

Consideriamo una funzione $f:[a,b]\times \mathbf{R}\times \mathbf{R}\to \mathbf{R}$ continua, con derivate prima e seconda continue e con [a,b] intervallo compatto di \mathbf{R} ; definiamo il funzionale

$$J(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx$$

Vogliamo mostrare che J sia differenziabile per ogni $y \in X = C^1([a, b])$. Le ipotesi su f consentono di applicare la formula di Taylor, quando si incrementano la seconda e la terza variabile; allora, per $x, h \in X$ si ha

$$J(y+h) - J(y) = \int_{a}^{b} \left(f(x,y(x) + h(x), y'(x) + h'(x)) - f(x,y(x), y'(x)) \right) dx =$$

$$= \int_{a}^{b} \left(h(x) \cdot f_{y}(x,y(x), y'(x)) + h'(x) \cdot f_{y'}(x,y(x), y'(x)) + o(|h(x)| + |h'(x)|) \right) dx =$$

$$= \int_{a}^{b} \left(h(x) \cdot f_{y}(x,y(x), y'(x)) + h'(x) \cdot f_{y'}(x,y(x), y'(x)) \right) dx$$

$$+ o\left(\max|h(x)| + \max|h'(x)| \right)$$

Il funzionale L che associa

$$h \mapsto L(h) = \int_a^b \Big(h(x) \cdot f_y(x, y(x), y'(x)) + h'(x) \cdot f_{y'}(x, y(x), y'(x)) \Big) dx$$

è lineare ed è il differenziale di J in y; quindi J è differenziabile e questa ne è l'espressione. Le $y \in X$ per cui il differenziale di J in y è nullo sono le funzioni tali che per ogni $h \in X$ si ha

$$\int_{a}^{b} \left(h(x) \cdot f_{y}(x, y(x), y'(x)) + h'(x) \cdot f_{y'}(x, y(x), y'(x)) \right) dx = 0$$

Per determinare una forma più conveniente nella quale non compaia h si sfrutta un lemma:

Lemma 6.1.1 (Lemma). Siano $\alpha, \beta \in C([a, b])$ tale che per ogni $h \in C_0^1([a, b])$ sia $\int_a^b (\alpha(x)h(x)+\beta(x)h'(x))dx = 0$. Allora β è derivabile in [a, b] ed è $\beta' = \alpha$.

Siccome siamo nelle ipotesi del lemma, si ottiene la relazione

$$\frac{d}{dx}f_{y'}\Big(x,y(x),y'(x)\Big) = f_y\Big(x,y(x),y'(x)\Big)$$

che è l'equazione di Eulero-Lagrange del funzionale J e che è soddisfatta da ogni funzione $y \in X$ stazionaria per il funzionale J.

A partire da questa equazione si può dare una trattazione più moderna degli esempi già visti: il problema della brachistocrona, il problema degli isoperimetri, ecc.

6.2 Metodi diretti

In tempi più recenti l'accresciuta sensibilità per il rigore espositivo ha dato impulso a ricerche volte a dimostrare l'effettiva esistenza di minimi o massimi di funzionale; inoltre si sono sviluppati studi che utilizzano questi metodi "inversamente" rispetto alle loro origini, noti come metodi diretti.

Agli inizi del 1800 le questioni di esistenza e determinazione delle soluzioni si separano (forse determinante in questo nuovo modo di affrontare il problema delle soluzioni è stato il teorema fondamentale dell'Algebra: Gauss prova l'esistenza delle radici di un'equazione senza badare di darne un'espressione esplicita); nel calcolo delle variazioni si ottengono importanti risultati, spesso legati a considerazioni di natura fisica. Alla fine del 1800 Riemann dà un nuovo impulso alle ricerche sul calcolo delle variazioni affrontando il problema da un punto di vista diverso: provare l'esistenza delle soluzioni di equazioni differenziali attraverso l'esistenza del minimo di funzionali integrali. Questa intuizione generale Riemann la deriva da un problema di natura

fisica: consideriamo una superficie formata da uno strato sottile e uniforme di un materiale conduttore di elettricità e supponiamo che in essa si generi una corrente stazionaria dovuta a batterie, allora il potenziale associato è una soluzione di un problema al contorno per un'equazione differenziale che può essere dedotta dal seguente problema di minimo: determinare tra tutti i possibili flussi del campo elettrico quello che conduce una minima quantità di calore.

Questo procedimento è il cosiddetto principio di Dirichlet: assegnata un'equazione differenziale, se essa può essere vista come l'equazione di Eulero-Lagrange di un funzionale integrale, stabilendo con tutt'altri metodi (legati alla semicontinuità per successioni) l'esistenza del minimo per il funzionale si ottiene l'esistenza della soluzione dell'equazione differenziale di partenza. Il punto centrale è proprio questo: si deve provare in modo diretto l'esistenza del minimo per ottenere come conseguenza l'esistenza della soluzione della relativa equazione differenziale.

Nasce così il procedimento dei *metodi diretti*, grazie ai quali per tutto il 1900 sono stati dati notevoli contributi alla teoria delle equazioni differenziali e al calcolo delle variazioni.

Vediamo un semplice esempio: determinare una funzione u nel dominio Ω con assegnato valore sulla frontiera

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \delta \Omega \end{cases}$$

Questo si può ricondurre al problema di determinare il minimo del funzionale di Dirichlet:

$$D(u,\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |Du(x)|^2 dx$$

nella classe delle funzioni che valgano q su $\delta\Omega$.

Cioè: consideriamo il problema di minimo per il funzionale di Dirichlet:

 $\inf\{D(u,\Omega), u \in U\}$, con U: classe di funzioni continue in $\overline{\Omega}$, regolari a tratti in Ω e tali che u=g su $\delta\Omega$, con $D(g)<+\infty$. Questo problema ammette una e una sola soluzione $\overline{u}\in C(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$, che è una funzione armonica e risolve il problema differenziale iniziale.

Questo è proprio il principio di Dirichlet, che viene formulato in modo corretto da Hilbert nel 1900, ed è una conseguenza della teoria classica del calcolo delle variazioni, in quanto $\Delta u=0$ è l'equazione di Eulero-Lagrange del funzionale di Dirichlet.

Bibliografia

- [1] V.M. Tikhomirov Stories about Maxima and Minima, American Mathematical Society, 1990
- [2] V. Girolimetti *Problemi di massimo e minimo: un po' di storia*, http://mat.unicam.it/
- [3] G.P. Leonardi *Il mistero isoperimetrico di Zenodoro*, http://gpleo.altervista.org/
- [4] G. Di Meglio *Il problema isoperimetrico classico, storia e mito*, Magazine di Matematicamente.it, numero 13 Agosto 2010
- [5] Archimede Sulla sfera e sul cilindro a cura di Attilio Frajese, Unione Tipografico-Editrice Torinese, 1974
- [6] C. Marchini *L'opera di Apollonio di Perga*, http://old.unipr.it/arpa/urdidmat/
- [7] Apollonio di Perga *Trattato sulle sezioni coniche*, Cambridge: At The University Press, 1896
- [8] C. Boyer Storia della matematica Oscar Saggi Mondadori, 1990
- [9] H. H. Goldstine A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th century, Springer-Verlag, 1980
- [10] E. Giusti Les méthodes des maxima et minima de Fermat Annales de la faculté des sciences Mathématiques de Toulouse, tome XVIII, n. S2 (2009), p. 59 - 85, http://afst.cedram.org ,

- [11] E. Giusti Dalla Géometrie al Calcolo: il problema delle tangenti e le origini del calcolo infinitesimale in Storia della Scienza - Istituto dell'enciclopedia Treccani, 2002
- [12] P. Freguglia La geometria tra tradizione e innovazione. Temi e metodi geometrici nell'età della rivoluzione scientifica 1550 - 1650, Bollati Boringhieri, 1999
- [13] L. Biacino A geometrical solution by Fermat to a problem of maximum, Applied Mathematical Sciences Vol. 8, 2014, no. 136, 6827-6834, www.m-hikari.com
- [14] P. de Fermat *Oeuvres*, Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire, 1912
- [15] G. W. Leibniz Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque tangentibus, que nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus in Acta Eruditorum, Ottobre 1684, Prostant apud J. Grossium J. F. Gleditschium, 1684
- [16] Euler L. Methodus inveniendi lineas curvas Maximi Minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti, Lausannae Genevae, 1744
- [17] Lagrange Oeuvres, Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire, 1867
- [18] E. Mascolo Appunti di calcolo delle variazioni, www.math.unifi.it/mascolo