

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

**Estrazione adiabatica
di un fascio di particelle
mediante modulazione di un kicker**

Relatore:
Prof. Armando Bazzani

Presentata da:
Federico Paltrinieri

Anno Accademico 2015/2016

Ringrazio la mia famiglia, gli amici e compagni
per il costante supporto in questi 3 anni.

Il lavoro qui proposto si sviluppa nelle seguenti parti: una breve analisi dei fenomeni coinvolti, quali la risonanza e l'invarianza adiabatica, quindi sarà studiato il problema dell'estrazione adiabatica di un fascio mediante un modello hamiltoniano semplificato che simula l'effetto di un kick dipolare.

Indice

1	Fisica degli acceleratori	6
1.1	La forma generale dell'hamiltoniana	6
1.2	Il potenziale vettore magnetico per multipoli	8
2	Fenomeni coinvolti	10
2.1	Risonanza	10
2.2	Invarianza adiabatica	12
3	Analisi teorica del problema	14
3.1	Hamiltoniana mediata	14
3.2	Studio del potenziale congelato	17
4	Programma di simulazione	19
4.1	Impostazione del programma	19
5	Simulazione	21
5.1	Kick Dipolare	21
5.1.1	Termine di ottupolo spento	21
5.1.2	Termine di ottupolo acceso	25
5.2	Kick quadripolare	28

Introduzione

Questo lavoro si propone di analizzare numericamente la possibilità di estrazione adiabatica di un fascio di particelle mediante la modulazione di un kicker.

L'importanza di trovare nuovi metodi il più possibile efficienti per estrarre fasci di particelle da macchine circolari è un passo importante per la fisica nucleare e subnucleare odierna, che sta raggiungendo livelli di energia sempre più alti.

Le particelle cariche possono essere estratte da una macchina circolare in due diversi modi: con l'estrazione lenta o l'estrazione veloce. Nel primo caso, l'intero fascio è emesso in un giro con un kicker dipolare. L'altro è basato sull'effetto della risonanza di terzo ordine: il moto instabile generato dalle separatrici che uniscono 3 punti instabili aumenta l'ampiezza delle particelle. Questa tecnica permette l'estrazione del fascio in molti turni, in genere varie migliaia. Il metodo qui analizzato è una modalità intermedia, chiamata MTE (Multi Turn Extraction). Analizziamo il caso del transfer tra PS (Proton Synchrotron) e SPS (Super Proton Synchrotron) al Cern di Ginevra: le due macchine hanno due differenti circonferenze (la circonferenza del SPS è 11 volte quella del PS). La MTE prevede l'uso della risonanza non lineare per creare differenti isole nello spazio delle fasi, che si concretizzano in una separazione del fascio originario presente nel PS, che viene diviso in tante parti quanto è l'ordine della risonanza, più uno, ovvero la parte del fascio iniziale non intrappolata. Quindi il riempimento del SPS può essere effettuato utilizzando 2 soli fasci di particelle generati nel PS, che in risonanza 4, produrrebbero 10 sottoparti (l'undicesima parte che servirebbe per completare la circonferenza del SPS rimane vuota per il rise time del kicker)[3].

Questo approccio è chiamato Transfer Continuo (CT). Questo approccio quindi non ha bisogno di alcun intervento meccanico (ad esempio un setto) per effettuare lo splitting del fascio e ciò rappresenta uno dei punti a favore di questo metodo.

Struttura del lavoro

Il lavoro è strutturato in 5 capitoli: nel primo sarà studiata la fisica degli acceleratori e il motivo per cui il campo magnetico B dei magneti dei sincrotroni possa essere sviluppato matematicamente in modo tale che l'hamiltoniana del problema, apparentemente diversa da quella di una particella carica in un acceleratore, possa ricondursi, con opportune modifiche e semplificazione, al modello studiato. Nel secondo capitolo sarà date alcune nozioni generali sui fenomeni coinvolti nel trapping, quali la risonanza, con un semplice esempio, e l'invarianza adiabatica. Nel terzo capitolo sarà ulteriormente sviluppata l'analisi teorica dell'hamiltoniana del problema, per ricondursi ad un modello noto e come teoricamente si possa calcolare la probabilità di trapping. Nel quarto capitolo saranno analizzate le scelte adottate per il programma di simulazione, come il tempo di integrazione, la tipologia di integratore e quali parametri impostare. Infine nel quinto capitolo saranno riportati i risultati delle simulazioni numeriche per il kick dipolare in funzione del caso in cui il termine di ottupolo sia attivo o meno; infine una breve analisi del caso del kick quadripolare.

1 Fisica degli acceleratori

E' nota la difficoltà della meccanica hamiltoniana, che spesso viene evitata anche per risolvere problemi più facili della fisica degli acceleratori, quali l'influenza di magneti di sestupolo sul moto betatronico: infatti si può impostare un modello più semplice in cui il sestupolo è immaginato come un elemento la cui forza focalizzante cresce linearmente con il raggio. Partendo dall'hamiltoniana generale introdurremo alcune approssimazione che sono giustificate nel contesto dei moderni sincrotroni.

1.1 La forma generale dell'hamiltoniana

L'hamiltoniana per una particella carica di massa m , carica e , potenziale vettore magnetico \vec{A} e potenziale elettrico ϕ risulta:

$$H = e\phi + c\sqrt{(\vec{p} - e\vec{A})^2 + m^2c^2} \quad (1)$$

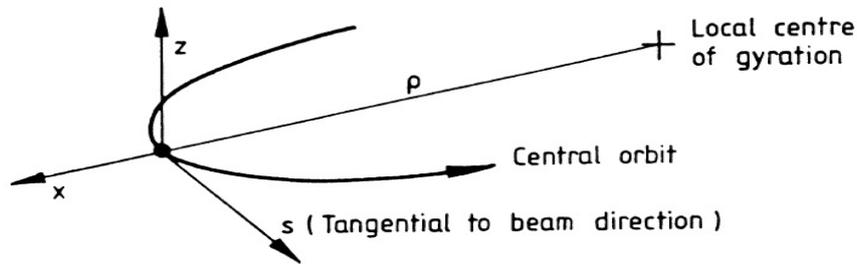


Fig. 1 Transverse coordinate system.

Figura 1: Scelta delle coordinate per l'hamiltoniana della particella carica

Facciamo la seguente scelta di coordinate mostrate in figura qui sopra: gli spostamenti trasversali sono x e z , mentre s è misurata lungo la traiettoria della particella. Il raggio locale di curvatura, ρ , è dipendente dal campo magnetico locale ed è inoltre funzione di s . Quindi l'hamiltoniana è esprimibile in queste coordinate come:

$$H = c\sqrt{m^2c^2 + (p_s - eA_s)^2\left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^{-2} + (p_x - eA_x)^2 + (p_z - eA_z)^2} + e\phi \quad (2)$$

Da adesso scartiamo il termine in ϕ , assunto costante, considerando così solo il campo magnetico e non quello elettrico.

La coordinata indipendente nell'equazione precedente è t , ma è più conveniente usare s poichè la macchina risulta periodica di s . Essendo l'hamiltoniana coniugata a t , p_s e s , questa deve essere riscritta in una nuova hamiltoniana, K , in funzione della nuova variabile indipendente s :

$$K = -eA_s \mp \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \sqrt{\left(\frac{p_0}{c}\right)^2 - m^2c^2 - (p_x - eA_x)^2 - (p_z - eA_z)^2} \quad (3)$$

Applichiamo un semplice scaling delle coordinate:

$$\begin{cases} \bar{q} = q \\ \bar{s} = s \\ \bar{p} = \frac{p}{p} \\ \bar{K} = \frac{K}{p} \end{cases} \quad (4)$$

Da cui:

$$\bar{K} = -\frac{eA_s}{p} - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \sqrt{1 - \left(\bar{p}_x - \frac{eA_x}{p}\right)^2 - \left(\bar{p}_z - \frac{eA_z}{p}\right)^2} \quad (5)$$

Finalmente abbiamo riscritto l'hamiltoniana in una forma più maneggiabile, in modo si possa trascurare il piano verticale e assumendo che $\rho = \infty$. Inoltre assumeremo che il campo magnetico sia solo

trasversale e quindi $A_x = A_z = 0$. Questa hamiltoniana semplificata è valida solo per lo studio del moto orizzontale in un grande sincrotrone che comprende lunghi magneti. Pertanto otteniamo una nuova hamiltoniana[8]:

$$H \approx -\frac{eA_s}{p} - \sqrt{1 - \bar{p}_x^2} \quad (6)$$

e se $\bar{p}_x \ll 1$:

$$H \approx -\frac{eA_s}{p} + \frac{\bar{p}_x^2}{2} \quad (7)$$

1.2 Il potenziale vettore magnetico per multipoli

Sarebbe molto complicato scoprire i problemi legati al moto non lineare in un sincrotrone se non potessimo analizzare i campi magnetici in sviluppi in serie, nei quali ogni termine corrisponde ad un magnete con un certo numero di poli. Analizziamo solo i corpi centrali dei magneti, nei quali solo A_s è finito e ci sono solo le componenti trasversali del campo, ovvero B_x e B_z . Il potenziale vettore può essere espresso dalla serie:

$$A_s = \sum_{n=1} A_n f_n(x, z) \quad (8)$$

$$A_s = \sum_{n=1} A_n (x + iz)^n \quad (9)$$

In cui f_n corrisponde ad un multipolo con $2n$ poli. I termini reali formano una serie per multipoli normali per i quali il campo è normale ad un piano medio orizzontale.

Possiamo derivare la componente verticale del campo per un magnete a $2n$ poli:

$$B_z(z=0) = \frac{\partial A_s}{\partial x} = nA_n x^{n-1} \quad (10)$$

Che può essere scritto come un termine della serie di Taylor:

$$B_z(z=0) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1} B_z}{\partial x^{n-1}} x^{n-1} \quad (11)$$

Pertanto il termine dell'hamiltoniana del sincrotrone può essere riscritto come:

$$\frac{eA_s}{p} = \frac{1}{B_\rho} \sum \frac{1}{n!} \frac{\partial^{n-1} B_z}{\partial x^{n-1}} x^n \quad (12)$$

E quindi l'hamiltoniana diventa[8]:

$$H = \frac{p_x^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{B_\rho} \frac{1}{n!} \frac{\partial^{n-1} B_z}{\partial x^{n-1}} x^n \quad (13)$$

E quindi ogni ordine del multipolo contribuisce con un termine all'hamiltoniana. In virtù di questo sviluppo possiamo affermare che l'hamiltoniana studiata in questo lavoro rappresenta un modello semplificato medio per la dinamica betatronica di una particella dato da:

$$H = \frac{p^2}{2} + \omega_0^2 \frac{q^2}{2} + k_3 \frac{q^3}{3} + k_4 \frac{q^4}{4} + \epsilon q \cos(\omega_1 t) \quad (14)$$

Può ben rappresentare il comportamento di una particella carica in sincrotrone sottoposta inoltre ad un kick dipolare.

2 Fenomeni coinvolti

2.1 Risonanza

Il fenomeno della risonanza avviene se la frequenza della forza che provoca le oscillazioni di un sistema coincide con la frequenza di quest'ultimo. Analizziamo un caso molto semplice di risonanza unidimensionale nell'ambito della teoria delle piccole oscillazioni: dato un campo esterno variabile che agisce sul sistema, questo provocherà delle oscillazioni forzate. Supposte le oscillazioni provocate dal campo esterno piccole, il sistema avrà una propria energia potenziale e un'energia potenziale $U_e(x, t)$ dovuta al campo esterno. Sviluppando questo termine in serie di potenze di x , si ha che:

$$U_e(x, t) \cong U_e(0, t) + x \frac{\partial U_e}{\partial x} \quad (15)$$

Il primo termine dipende solo dal tempo (quindi risulta un termine additivo per la lagrangiana), mentre il secondo rappresenta la forza che agisce sul sistema; pertanto la lagrangiana del sistema può essere scritta nella forma:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{mx^2}{2} + xF(t) \quad (16)$$

Perciò l'equazione del moto può essere scritta come:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} F(t) \quad (17)$$

Supponendo che la forza esterna sia di tipo periodico:

$$F(t) = f \cos(\gamma t + \beta) \quad (18)$$

La soluzione all'equazione del moto si ottiene sommando la soluzione generale alla particolare, da cui:

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} \cos(\gamma t + \beta) \quad (19)$$

Nel caso in cui le frequenze dei due sistemi coincidano si verifica il fenomeno della risonanza. Cambiando appropriatamente il valore delle costanti, la soluzione può essere riscritta come:

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} [\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)] \quad (20)$$

che, per $\gamma \rightarrow \omega$, porta ad una indeterminazione di tipo $0/0$, risolvibile con la regola di L'Hopital; pertanto in regime di risonanza la soluzione è del tipo:

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{2m\omega} t \sin(\omega t + \beta) \quad (21)$$

e quindi l'ampiezza delle oscillazioni cresce linearmente con il tempo (finchè le oscillazioni non cessano di essere piccole)[4].

Nel caso del nostro problema, il sistema sarà simile a quello appena studiato, essendo l'hamiltoniana del tipo:

$$H = \frac{p^2}{2} + \omega_0^2 \frac{q^2}{2} + k_3 \frac{q^3}{3} + k_4 \frac{q^4}{4} + \epsilon q \cos(\omega_1 t) \quad (22)$$

In cui è presente una forzante dipendente dal tempo con periodo 2π , la cui frequenza sarà modulata in modo tale che passi per la risonanza non lineare per ottenere il fenomeno del trapping.

2.2 Invarianza adiabatica

Per analizzare questo fenomeno, analizziamo la dinamica di un sistema hamiltoniano della forma:

$$E = H_0(q, p, \lambda) \quad (23)$$

dove $\lambda = \epsilon t$ e H dipende periodicamente da λ con periodo 2π . Per λ fissato, H_0 verrà chiamato hamiltoniano congelato. Assumiamo che lo spazio delle fasi congelato sia diviso in varie regioni divise da curve separatrici e in ogni regione possiamo effettuare il cambio di variabili azione e angolo:

$$I = I(E, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{H_0(q,p,\lambda)=E} p(E, q, \lambda) dq$$

$$\theta = \left. \frac{\partial F}{\partial I} \right|_q (q, I, \lambda)$$

dove $F(I, q, \lambda)$ è la funzione generatrice calcolata dalla definizione:

$$F(q, E(I, \lambda), \lambda) = \int_{H_0=E}^q p(q, E, \lambda) dq$$

che dipende da λ che è tenuto fisso durante l'integrazione. Nella definizione di $F(q, I, \lambda)$ si può scegliere l'origine dell'angolo θ in modo arbitrario. Posto $H_0 = H_0(I, \lambda)$, si ha la frequenza del sistema congelato:

$$\Omega(I, \lambda) = \frac{dH_0}{dI}$$

Se $\lambda = \epsilon t$ con $\epsilon \ll 1$, tale che $\frac{1}{\epsilon}$ sia una scala di tempo molto più lungo del tempo caratteristico $\frac{2\pi}{\Omega}$ del sistema congelato: questo significa che le orbite non sono vicine alla separatrice. Dalla precedente definizione si ha che:

$$\theta = \frac{\partial H_0}{\partial I} \int_{H_0=E}^q \left. \frac{\partial p}{\partial E} \right|_q dq = \Omega(E, \lambda) \int_{H_0=E}^q \frac{dq}{\dot{q}} = \theta_0 + \Omega(E, \lambda)t$$

Dai presupposti dati finora, l'azione $I(p, q, \lambda)$ del sistema congelato è un invariante adiabatico:

$$|I(p(t), q(t), \epsilon t) - I_0| \leq O(\epsilon) \quad (24)$$

per $t \leq \frac{1}{\epsilon}$. Inoltre se H_0 è periodicamente dipendente da λ , l'azione I risulta essere un invariante adiabatico perpetuo.[7] Bisogna sottolineare che questo approccio perturbativo richiede che $\Omega(E, \lambda)$ non sia vicino a zero: il rapporto

$$e = \frac{\epsilon}{\Omega^2(E, \lambda)} \ll 1 \quad (25)$$

definisce il parametro di adiabaticità[2].

3 Analisi teorica del problema

3.1 Hamiltoniana mediata

Il tipo di Hamiltoniana che ci propone di analizzare è:

$$H = p^2 + \omega_0 \frac{q^2}{2} + \sum_{i=3}^n k_n \frac{q^n}{n} + \epsilon q^n \cos(\omega_1 t)$$

Nel caso nel termine finale la q compaia alla prima potenza si parlerà di kick dipolare, mentre nel caso q^n si presenti come q^2 si parlerà di kick quadripolare.

Partendo da caso in cui $q^n = q$ e fermando i termini diella sommatioria alla quarta potenza:

$$H = \frac{p^2}{2} + \omega_0^2 \frac{q^2}{2} + k_3 \frac{q^3}{3} + k_4 \frac{q^4}{4} + \epsilon q \cos(\omega_1 t) \quad (26)$$

Applichiamo la trasformazione canonica:

$$\begin{cases} p = P\sqrt{\omega_0} \\ q = \frac{Q}{\sqrt{\omega_0}} \end{cases} \quad (27)$$

$$H = \omega_0 \left(\frac{P^2 + Q^2}{2} \right) + k_3 \frac{Q^3}{3} + k_4 \frac{Q^4}{4} + \epsilon Q \cos(\omega_1 t)$$

Questa è l'hamiltoniana di riferimento con cui è stato analizzato il problema a livello numerico. Applichiamo la sostituzione del parametri $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_0}$ e $k = \frac{k_3}{k_4}$:

$$H = \left(\frac{P^2 + Q^2}{2} \right) + k \frac{Q^3}{3} + \frac{Q^4}{4} + \epsilon Q \cos(\omega_1 t) \quad (28)$$

Imponiamo il cambio di coordinate canoniche:

$$\begin{cases} P = \sqrt{2\rho} \sin \phi \\ Q = \sqrt{2\rho} \cos \phi \end{cases} \quad (29)$$

L'hamiltoniana diventa:

$$H = \rho - \frac{k}{3}(2\rho)^{3/2} \sin^3 \phi + \rho^2 \sin^4 \phi + \epsilon\sqrt{2\rho} \sin \phi \cos(\omega t) \quad (30)$$

Volendo mediare il sistema vicino alla risonanza γ , applichiamo un'altra trasformazione canonica $(\rho, \phi) \rightarrow (\tilde{\rho}, \gamma)$

$$\gamma = \phi - \omega t \implies \phi = \gamma + \omega t$$

Poichè la trasformazione dipende dal tempo, abbiamo bisogno di una funzione generatrice:

$$F(\tilde{\rho}, \phi) = \tilde{\rho}\gamma = \tilde{\rho}(\phi - \omega t) = \rho(\phi - \omega t)$$

e il nuovo hamiltoniano diventa:

$$H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} = H - \rho\omega$$

e quindi:

$$H' = \rho(1-\omega) - \frac{k}{3}(2\rho)^{3/2} \sin^3(\gamma+\omega t) + \rho^2 \sin^4(\gamma+\omega t) + \epsilon\sqrt{2\rho} \sin(\gamma+\omega t) \cos(\omega t)$$

Iniziamo a mediare l'hamiltoniana vicino a γ sulla dinamica veloce data da ωt . Su un periodo abbiamo che:

- $\langle \sin^3 x \rangle = 0;$
- $\langle \sin^4 x \rangle = \frac{3}{8};$
- $\langle \sin(\gamma+\omega t) \cos(\omega t) \rangle = \sin \gamma \langle \cos^2(\omega t) \rangle + \cos \gamma \langle \sin(\omega t) \rangle \langle \cos(\omega t) \rangle$
- $\langle \sin(\omega t) \rangle = 0;$
- $\langle \cos^2 x \rangle = \frac{1}{2};$

Quindi l'hamiltoniana mediata risulta:

$$H = \rho(1 - \omega) + \frac{3}{8}\rho^2 + \frac{\epsilon}{2}\sqrt{2\rho}\sin\gamma \quad (31)$$

Con un nuovo cambio di coordinate:

$$\begin{cases} x = \sqrt{2\rho}\sin\gamma \\ y = \sqrt{2\rho}\cos\gamma \end{cases} \quad (32)$$

L'hamiltoniana diventa:

$$H = (1 - \omega)\left(\frac{x^2 + y^2}{x}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{x^2 + y^2}{x}\right)^2 + \frac{\epsilon}{2}x$$

Posti i seguenti parametri:

$$\begin{cases} \lambda = -\frac{16}{3}(1 - \omega) \\ \mu = \frac{16}{3}\epsilon \end{cases} \quad (33)$$

Otteniamo infine[5]:

$$H = (x^2 + y^2)^2 - \lambda(x^2 + y^2) + \mu x \quad (34)$$

Neishtadt prova che la probabilità di trapping può essere calcolata usando la formula[1]:

$$P = \frac{I_1 - I_2}{I_1} \quad (35)$$

dove:

$$I_1 = - \int_{l_1} dt \frac{\partial H}{\partial \lambda}$$

$$I_2 = - \int_{l_2} dt \frac{\partial H}{\partial \lambda}$$

Di cui non sarà data dimostrazione.

3.2 Studio del potenziale congelato

Il potenziale, escludendo il termine della forzante periodica, risulta essere:

$$U(q) = \omega_0 \frac{Q^2}{2} + k_3 \frac{Q^3}{3} + k_4 \frac{Q^4}{4}$$

Studiamo questo potenziale cercando i possibili punti iperbolici: posto $k_3 \leq 0$ affinché questi si trovino nel semiasse positivo, il potenziale ha il seguente andamento:

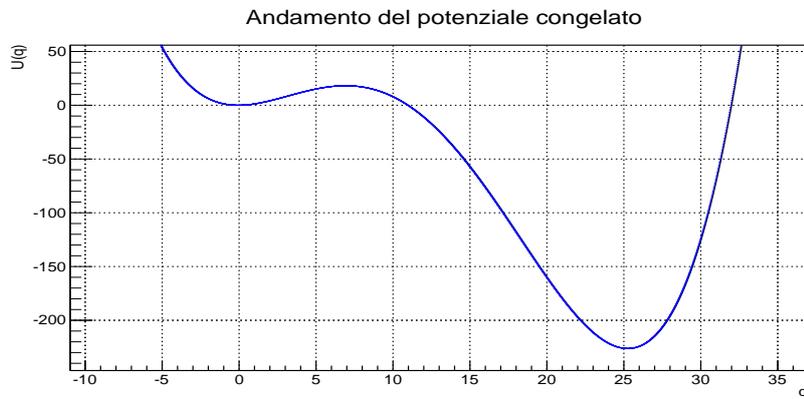


Figura 2: Esempio di potenziale per $k_3 = -2$, $k_4 = 0.1$ e $\omega_0 = 2\pi(\sqrt{2} - 1)$

Poichè è lecito considerare che il fascio di particelle venga generato centrato nell'origine, si vuole evitare di passare il punto iperbolico nello spazio delle fasi durante la generazione. Posto $k_3 = -1$ come parametro fisso, sono stati modulati gli altri due valori: ω_0 viene preso con valore irrazionale, ovvero $2\pi(\sqrt{2} - 1)$; k_4 , dallo studio dei massimi e minimi del potenziale, deve soddisfare la relazione:

$$U'(Q) = \omega_0 Q + k_3 Q^2 + k_4 Q^3 = 0$$

Da cui le soluzioni:

$$\begin{cases} Q = 0 \\ Q = \frac{-k_3 \pm \sqrt{k_3^2 - 4k_4\omega_0}}{2k_4} \end{cases} \quad (36)$$

$$k_4 \leq \frac{k_3^2}{4\omega_0} \simeq 0.09606$$

In ogni caso la q del punto iperbolico non potrà essere minore del valore ottenuto per $k_4 = 0$ data da:

$$U'(Q) = \omega_0 Q + k_3 Q^2 = 0$$

$$\begin{cases} Q = 0 \\ Q = -\frac{\omega_0}{k_3} \simeq 2.6025 \end{cases} \quad (37)$$

Per cui la generazione gaussiana del fascio di particelle sarà effettuata con sigma tale da essere all'interno di questo valore; nel caso in cui k_4 abbia un valore maggiore di quello calcolato, l'andamento del potenziale nel semiasse positivo sarà quello di una buca di potenziale con minimo in zero senza punti iperbolici, come riportato in figura.

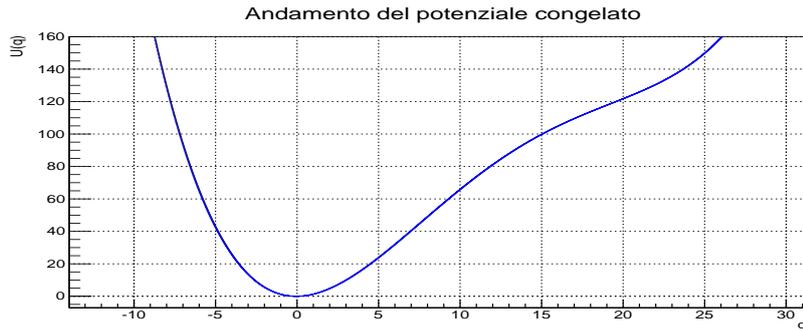


Figura 3: Esempio di potenziale per $k_3 = -1$, $k_4 = 0.12$ e $\omega_0 = 2\pi(\sqrt{2} - 1)$

4 Programma di simulazione

Il fenomeno dell'intrappolamento adiabatico mediante la modulazione di un kicker è stato studiato mediante una simulazione numerica e questa sezione vuole approfondire come è stato pensato il programma alla base della simulazione rispetto all'analisi teorica affrontata in precedenza.

4.1 Impostazione del programma

Il programma di analisi del problema è stato scritto in linguaggio C++/ROOT, sull'applicativo Visual Studio 2015. Sono state fatte le seguenti scelte operative:

- dovendo ricorrere ad un integratore per simulare l'orbita delle particle, è stato utilizzato un integratore simplettico di quart'ordine denominato Candy-Rozmus, strutturato nella seguente maniera[6]:

$$\begin{aligned}q_1 &= q_i + c_1 P(p_i) \Delta t & p_1 &= p_i + d_1 F(q_1) \Delta t \\q_2 &= q_1 + c_2 P(p_1) \Delta t & p_2 &= p_1 + d_2 F(q_2) \Delta t \\q_3 &= q_2 + c_3 P(p_2) \Delta t & p_3 &= p_2 + d_3 F(q_3) \Delta t \\q_4 &= q_3 + c_4 P(p_3) \Delta t & p_4 &= p_3 + d_4 F(q_4) \Delta t \\q_{i+1} &= q_4 & p_{i+1} &= p_4\end{aligned}$$

dove sono richieste le condizioni a contorno: q_0 e p_0 e il passo Δt . Le funzioni $P(p_i)$ e $F(q_i)$ sono rispettivamente:

- $P = p_i$;
- $F = -q(\omega_0 + k_3 q + k_4 q^2) - e \cos(\psi)$; Per kick dipolare
- $F = -q(\omega_0 + k_3 q + k_4 q^2) - eq \cos(\psi)$ Per kick quadripolare

ψ rappresenta la fase della forzante periodica esterna, uguale a $\psi = 2\pi\omega_1 t$, ed viene aggiornata ad ogni step temporale dell'integratore simplettico.

I coefficienti:

$$c_1 = c_4 = \frac{2 + 2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}}{6} \quad c_2 = c_3 = \frac{1 - 2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}}{6}$$

$$d_1 = 0 \quad d_2 = d_4 = \frac{1}{2 - 2^{\frac{1}{3}}} \quad d_3 = \frac{1}{1 - 2^{\frac{2}{3}}}$$

sono ricavati dalla formula di Baker–Campbell–Hausdorff[9].

- scelto l'integratore, il Δt di integrazione è stato posto pari a $\Delta t = \frac{1}{100\omega_1}$, così che le sezioni di Poincaré graficate nello spazio delle fasi, salvate ogni 100 step temporali, siamo prese al compiere del periodo del kick:

$$\psi * 100\Delta t = \frac{200\pi\omega_1}{100\omega_1} = 2\pi$$

;

- Al fine di soddisfare il criterio di adiabaticità, che è stato definito come il rapporto:

$$e = \frac{\epsilon}{\Omega^2(E, \lambda)} \ll 1$$

Fissato $\Omega_0 = \sqrt{2} - 1$, ponendo $\epsilon = 2 \times 10^{-5}$, otteniamo:

$$e = \frac{2 \times 10^{-5}}{(\sqrt{2} - 1)^2} \simeq 1.17 \times 10^{-4}$$

sufficiente per soddisfare la condizione.

5 Simulazione

Le simulazioni hanno tutte alcune caratteristiche in comune:

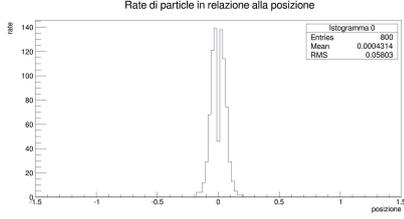
- la generazione delle particle con distribuzione gaussiana, centrate in $Q = 0$ e $P = 0$, con sigma variabile, generalmente compresa tra 0.1 e 0.3;
- dopo una fase di stabilizzazione del fascio viene acceso istantaneamente il kick, con modulo variabile; in questa configurazione la distribuzione spaziale, inizialmente gaussiana centrata in zero, è traslata in un nuovo Q centrale a causa del kick. Inoltre la forzante modifica la simmetria a campana della gaussiana di generazione, creando due sottogaussiane che si annullano nel nuovo Q centrale.
- La frequenza della forzante ω_1 è inizialmente maggiore di $4\omega_0$ ed è modulata diminuendone lentamente il valore passando per la risonanza, entro un range del 1 – 2% di $4\omega_0$;

Date queste informazioni globali, faremo due tipi di analisi: la prima con il termine di ottupolo $k_4 = 0$, la seconda con $k_4 \neq 0$. Alla fine sarà analizzato il caso del kick quadripolare.

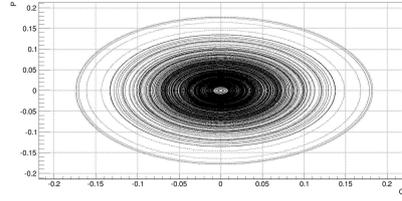
5.1 Kick Dipolare

5.1.1 Termine di ottupolo spento

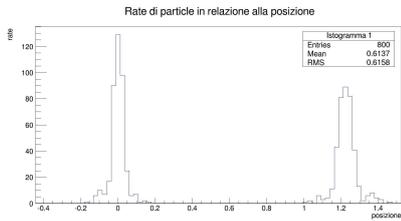
Il trapping effettuato senza termine di ottupolo è di norma meno efficiente di quello in cui è presente, poichè le isole nello spazio delle fasi occupano un'area minore se applichiamo la stessa tipologia di forzante per $k_4 = 0$ o $k_4 \neq 0$.



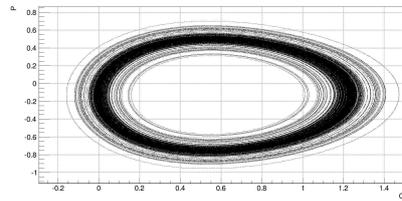
(a) Forzante spenta



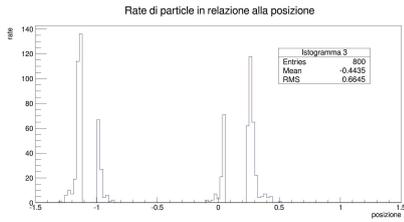
(b) Forzante spenta



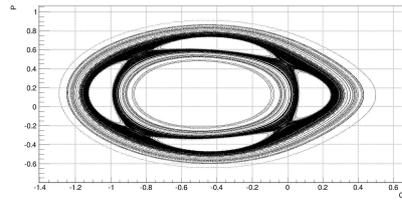
(c) $\epsilon = 20, \omega_1 = 4\omega_0 + 0.2\%$



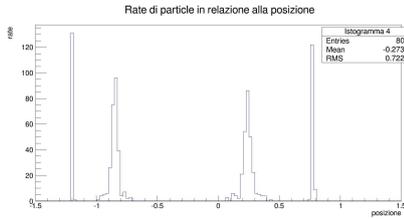
(d) $\epsilon = 20, \omega_1 = 4\omega_0 + 0.2\%$



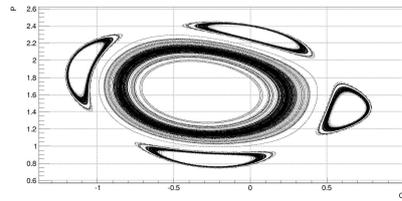
(e) $\epsilon = 20, \omega_1 = 4\omega_0 - 0.1\%$



(f) $\epsilon = 20, \omega_1 = 4\omega_0 - 0.1\%$



(g) $\epsilon = 20, \omega_1 = 4\omega_0 - 1\%$

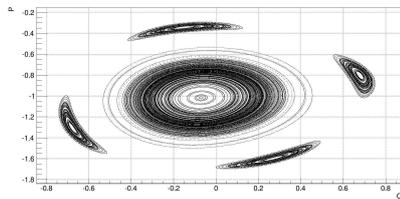


(h) $\epsilon = 20, \omega_1 = 4\omega_0 - 1\%$

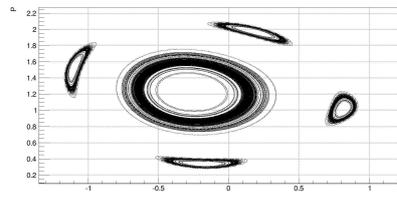
Figura 4: Grafici di densità spaziale di particle (sinistra) e spazio delle fasi corrispondente(destra) per 480 particle, con percentuale di trapping al 33.8%

Gli istogrammi nelle pagine seguenti riportano nell'asse delle ascisse il minimo e il massimo di ogni orbita nello spazio delle fasi di ogni particella per la coordinata q , mentre nelle ordinate il rate di frequenza della determinata q . Dal primo istogramma si osserva che le orbite sono centrate in zero e hanno una distribuzione simile ad una gaussiana, mentre, accendendo istantaneamente ad esempio la forzante a $\epsilon = 20$ (valore per cui si ottiene una buona probabilità di trapping), la distribuzione normale viene persa poichè la forzante allarga le orbite rispetto al nuovo punto medio, che non è più zero, ma un altro valore. Inoltre la forzante modifica leggermente il valore medio della la variabile angolo θ .

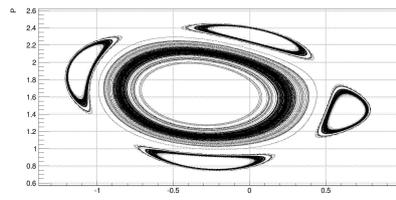
Dagli spazi delle fasi, sui cui assi si trovano q per le ascisse e p per le ordinate, notiamo invece l'evoluzione delle orbite: ω_1 inizia con un valore leggermente superiore a $4\omega_0$ e viene modulata in diminuzione fino ad essere inferiore dell'1% del valore iniziale; dall'attraversamento della risonanza iniziano a crearsi le isole di trapping che man mano si allontanano dall'origine al diminuire di ω_1 .



(a) $\epsilon = 10$, $\omega_1 = 4\omega_0 - 1\%$



(b) $\epsilon = 15$, $\omega_1 = 4\omega_0 - 1\%$



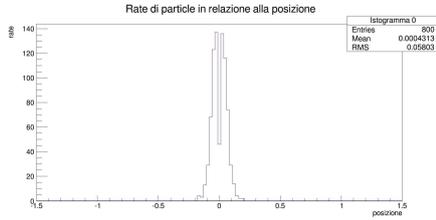
(c) $\epsilon = 20$, $\omega_1 = 4\omega_0 - 1\%$

Figura 5: Spazi delle fasi a fine modulazione di ω_1 , aventi rispettivamente $\epsilon = 10$, $\epsilon = 15$ e $\epsilon = 20$

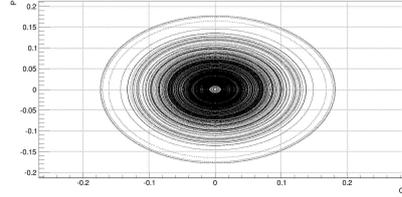
Ad influenzare la probabilità di trapping è sicuramente il modulo ϵ della forzante, che porta la percentuale di trapping dal 20% al 33.8% per i grafici qui riportati.

5.1.2 Termine di ottupolo acceso

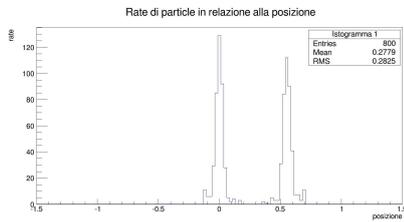
Con $k_4 \neq 0$, il fenomeno del trapping avviene con maggiore probabilità, poichè l'ottupolo aumenta l'area delle isole.



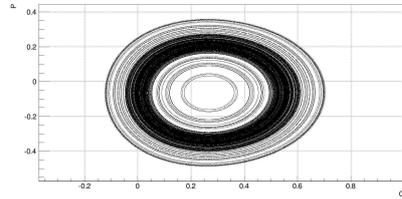
(a) Forzante spenta



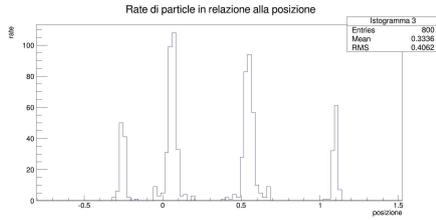
(b) Forzante spenta



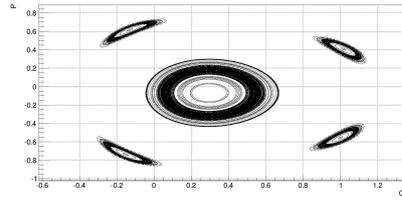
(c) $\epsilon = 10$, $\omega_1 = 4\omega_0 + 0.2\%$



(d) $\epsilon = 10$, $\omega_1 = 4\omega_0 + 0.2\%$

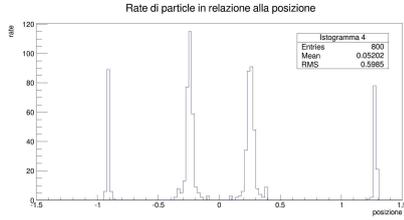


(e) $\epsilon = 10$, $\omega_1 = 4\omega_0 - 0.1\%$

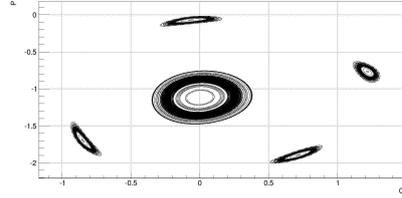


(f) $\epsilon = 10$, $\omega_1 = 4\omega_0 - 0.1\%$

Confrontando questi grafici con i precedenti (nei quali $k_4 = 0$), il trapping avviene con maggiore facilità sempre aumentando il valore di ϵ , ma anche al variare di k_4 . Infatti, aumentando k_4 di step di 0.05, la probabilità di trapping, partendo da 12.5%, aumenta al 22.5% a $k_4 = 0.10$, 33,2% a $k_4 = 0.15$ e 47% a $k_4 = 0.20$. Si riporta qui il caso in cui $k_4 = 0.20$ e $\epsilon = 20$, che presenta una percentuale di trapping pari al 60.7%:

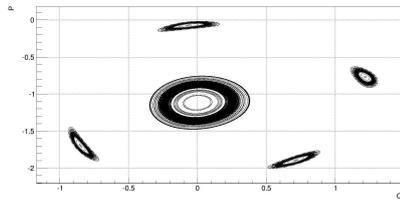


(a) $\epsilon = 10, \omega_1 = 4\omega_0 - 1\%$

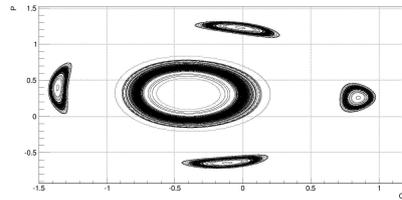


(b) $\epsilon = 10, \omega_1 = 4\omega_0 - 1\%$

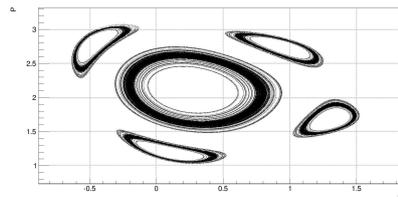
Figura 7: Grafici di densità spaziale di particle (sinistra) e spazio delle fasi corrispondente (destra) per 400 particle, con percentuale di trapping al 25,4%



(a) $\epsilon = 10, \omega_1 = 4\omega_0 - 1\%$

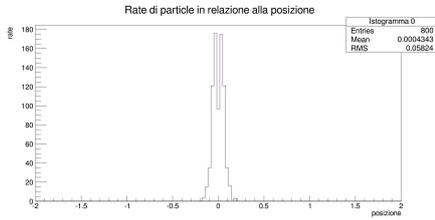


(b) $\epsilon = 15, \omega_1 = 4\omega_0 - 1\%$

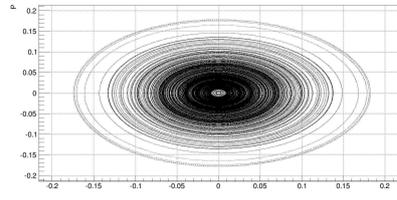


(c) $\epsilon = 20, \omega_1 = 4\omega_0 - 1\%$

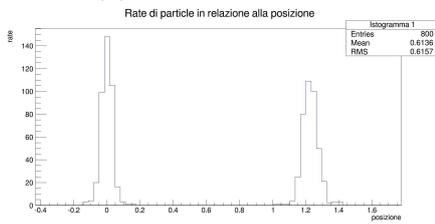
Figura 8: Spazi delle fasi a fine modulazione di ω_1 , aventi rispettivamente $\epsilon = 10, \epsilon = 15$ e $\epsilon = 20$



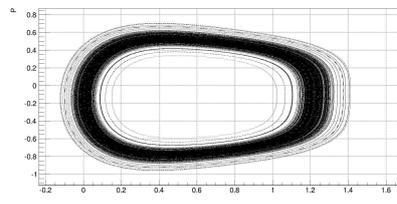
(a) Forzante spenta



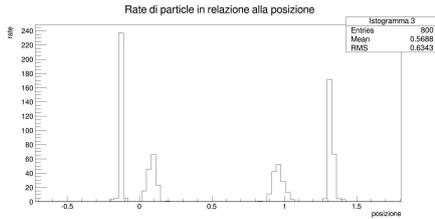
(b) Forzante spenta



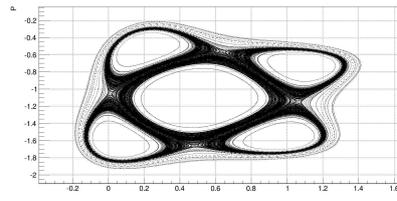
(c) $\epsilon = 10, \omega_1 = 4\omega_0 + 0.2\%$



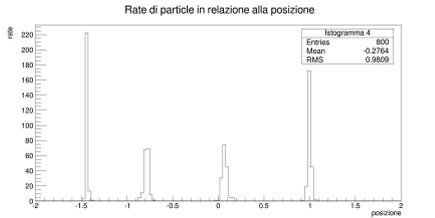
(d) $\epsilon = 10, \omega_1 = 4\omega_0 + 0.2\%$



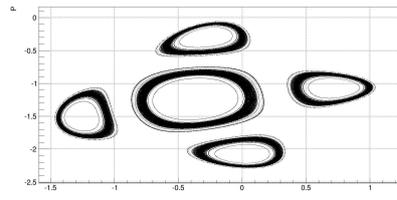
(e) $\epsilon = 10, \omega_1 = 4\omega_0 - 0.1\%$



(f) $\epsilon = 10, \omega_1 = 4\omega_0 - 0.1\%$



(g) $\epsilon = 10, \omega_1 = 4\omega_0 - 1\%$



(h) $\epsilon = 10, \omega_1 = 4\omega_0 - 1\%$

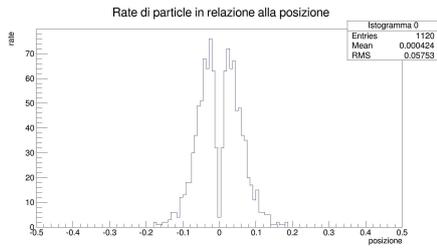
Figura 9: Grafici di densità spaziale di particle (sinistra) e spazio delle fasi corrispondente (destra) per 480 particle, con percentuale di trapping al 60.7%

5.2 Kick quadripolare

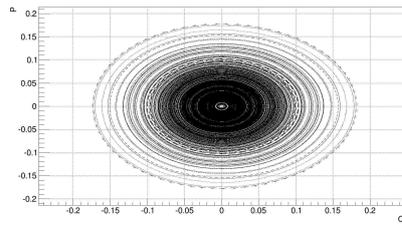
Nel caso del kick quadripolare, l'hamiltoniana diventa:

$$H = \omega_0 \left(\frac{P^2 + Q^2}{2} \right) + k_3 \frac{Q^3}{3} + k_4 \frac{Q^4}{4} + \epsilon \frac{Q^2}{2} \cos(\omega_1 t)$$

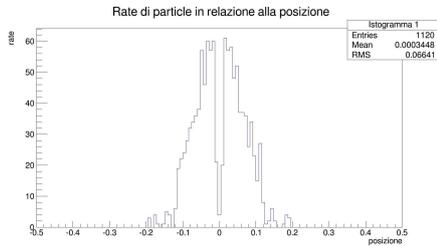
A causa del differente tipo di kick, il fascio non verrà traslato dal valore centrale della gaussiana di generazione, ma rimarrà sempre centrato in zero, con la differenza però che il valore medio della variabile angolo θ aumenta considerevolmente attorno all'origine aumenta all'aumentare di ϵ (circa un 7% per $\epsilon = 5$, un 25% a $\epsilon = 10$, quindi il valore iniziale di ω_1 sarà maggiore rispetto al caso del kick dipolare.



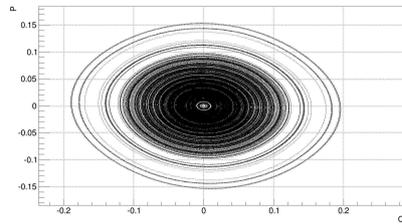
(a) Forzante spenta



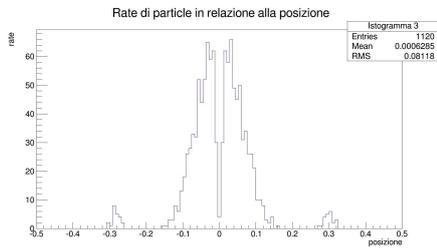
(b) Forzante spenta



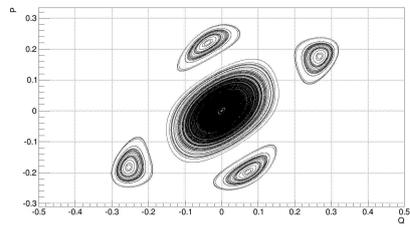
(c) $\epsilon = 10$, $\omega_1 = 4\omega_0 + 8\%$



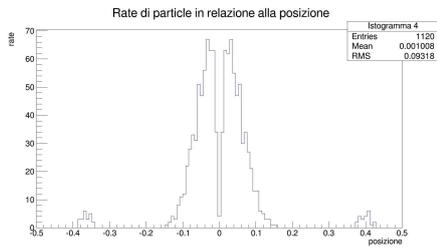
(d) $\epsilon = 10$, $\omega_1 = 4\omega_0 + 8\%$



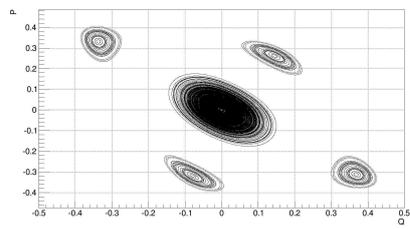
(a) $\epsilon = 10$, $\omega_1 = 4\omega_0 - 7.5\%$



(b) $\epsilon = 10$, $\omega_1 = 4\omega_0 - 7.5\%$



(c) $\epsilon = 10$, $\omega_1 = 4\omega_0 - 7\%$



(d) $\epsilon = 10$, $\omega_1 = 4\omega_0 - 7\%$

Figura 11: Grafici di densità spaziale di particelle (sinistra) e spazio delle fasi corrispondente (destra) per 320 particelle, con percentuale di trapping al 33%

Conclusioni

Il modello di hamiltoniana proposto, ovvero:

$$H = \frac{p^2}{2} + \omega_0^2 \frac{q^2}{2} + k_3 \frac{q^3}{3} + k_4 \frac{q^4}{4} + \epsilon q \cos(\omega_1 t) \quad (38)$$

descrive con buona approssimazione il fenomeno del trapping in risonanza non lineare. Ad influenzare la probabilità di intrappolamento è il modulo della forzante, che ha un ruolo di prim'ordine in qualsiasi configurazione, sia che sia presente il termine di ottupolo o meno, sia che il kick sia dipolare o quadripolare. Come previsto la presenza del termine di ottupolo aumenta considerevolmente la probabilità che una particella sia intrappolata in un'isola di risonanza, quasi raddoppiandola.

Anche il parametro di adiabaticità, che è stato definito:

$$e = \frac{\epsilon}{\Omega^2(E, \lambda)} \ll 1 \quad (39)$$

riveste un ruolo fondamentale nel fenomeno: nel caso questo risultasse elevato (già dell'ordine di 10^{-4}), l'avvicinamento e allontanamento delle isole nello spazio delle fasi dal punto ellittico sarebbe troppo veloce e il trapping non avverrebbe.

Si evidenzia una notevole differenza tra il kick dipolare e quello quadripolare: il primo all'accensione sposta il fascio dal punto ellittico originario in un nuovo punto e ciò può rappresentare un problema all'interno di un acceleratore di particelle se non viene stimato correttamente lo spostamento; il secondo invece non effettua una traslazione del fascio, ma modifica la frequenza originaria aumentandola notevolmente, per cui bisogna conoscere a priori il nuovo valore o non sarà possibile osservare alcun fenomeno di trapping.

Riferimenti bibliografici

- [1] Anton V. Artemyev Anatoly I. Neishtadt Alexei A. Vasiliev. “Capture into resonance and escape from it in a forced nonlinear pendulum”. In: *Regul. Chaotic. Dyn.* 18.6 (2013), pp. 686–696.
- [2] A. Bazzani. “Notes on adiabatic Theory”. In: *Lezioni di fisica dei sistemi complessi* (), pp. 9–13.
- [3] R. Capi M. Giovannozzi. “Novel Method for Multiturn Extraction: Trapping Charged Particles in Islands of Phase Space”. In: *Phys. Rev. Lett* 88.10 (2002).
- [4] Evgenij M. Lifits Lev D. Landau. *Fisica Teorica I, Meccanica*.
- [5] Anatoly I. Neishtadt. “Passage through a separatrix in a resonance problem with a slowly-varying parameter”. In: *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 39.4 (1975), pp. 594–605.
- [6] S. Rambaldi. “Time Integration Methods”. In: *Lezioni di fisica dei sistemi complessi* () .
- [7] V.I.Arnold. “Small denominators and problem of stability of motion in Classial and Celestial Mechanics”. In: *Russ. Math. Survey* 18.6 (1963).
- [8] E.J.N. Wilson. “Advanced Accelerator Physics”. In: (1985), pp. 41–46.
- [9] H. Yoshida. “Construction of higher order symplectic integrators ”. In: (1990).