

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÁ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

ANIONI:
Particelle Identiche e Topologia in
Meccanica Quantistica

Relatore:
Prof.ssa Elisa Ercolessi

Presentata da:
Martino Stefanini

Anno Accademico 2015/2016

Sommario

Si espone la teoria quantistica non relativistica dei sistemi di particelle identiche, costruendo un opportuno spazio delle configurazioni la cui struttura è coerente con la loro indistinguibilità. Si impiegano nozioni di topologia algebrica per la formulazione di una meccanica quantistica su tale spazio, mostrando che in due dimensioni spaziali esiste una continuità di statistiche quantistiche. Le particelle con queste statistiche intermedie tra bosoni e fermioni sono chiamate anioni. Si illustra l'importanza che hanno assunto nella spiegazione dell'effetto Hall quantistico e nell'attuale ricerca sulla possibilità di creare un computer quantistico topologico.

Indice

Introduzione	vii
1 Particelle Identiche	1
1.1 La fisica classica e il paradosso di Gibbs	1
1.2 La meccanica quantistica	4
1.3 L'alternativa al postulato di simmetrizzazione e lo spazio delle configura- zioni di particelle indistinguibili	5
2 Topologia Algebrica	13
2.1 Cammini e Primo Gruppo di Omotopia	13
2.2 Il primo gruppo di omotopia di \mathbb{Q}_N : \mathbb{S}_N e \mathbb{B}_N	20
3 Meccanica quantistica in spazi non semplicemente connessi	27
3.1 La fase della funzione d'onda	27
3.2 Meccanica quantistica sul rivestimento universale	29
3.3 Le conseguenze per le particelle identiche	33
3.4 Alcune proprietà degli anioni e il modello di Wilczek	36
3.5 Esempio: due anioni interagenti armonicamente	39
4 Gli anioni esistono?	41
4.1 Vantaggi e svantaggi dell'uso di \mathbb{Q}_N	41
4.2 L'Effetto Hall quantistico	43
4.3 Il computer quantistico topologico	48
Conclusioni	51
Bibliografia	53

Elenco delle figure

1.1	Lo spazio delle configurazioni di due particelle su una retta, e il trasporto parallelo dei vettori in tale spazio.	9
1.2	Una possibile raffigurazione di $\Omega_1 \cong \mathbb{S}^1$	10
1.3	Una possibile raffigurazione di $\Omega_2 \cong \mathbb{RP}^2$. I punti opposti sull'equatore (vettori blu) sono identificati tra loro, e la curva γ (in rosso) è pertanto una curva chiusa.	11
2.1	Omotopia di due loop.	15
2.2	Prodotto di due cammini.	16
2.3	Omotopia di $f \cdot f^{-1}$ al loop banale.	17
2.4	Piano con "buco". Il loop f ha indice di avvolgimento nullo, il loop g +1, il loop h -2.	18
2.5	Rappresentazione grafica di una treccia a 3 stringhe.	22
2.6	Rappresentazione grafica del prodotto di due trecce a 3 stringhe.	22
2.7	Verifica grafica della proprietà $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$	23
2.8	Verifica grafica che nel gruppo delle trecce $\sigma_i \sigma_{i+1} \neq \sigma_{i+1} \sigma_i$	23
2.9	Verifica grafica che nel gruppo delle trecce $\sigma_i^2 \neq e$	24
2.10	I loop utilizzati nel Teorema 2.2.1, corrispondenti ai due modi possibili di scambiare le particelle i e $i + 1$ in un piano che le contiene.	25
3.1	Traiettorie di quattro particelle nello spaziotempo \mathbb{R}^{2+1} ; l'asse del tempo è verticale.	35
4.1	Grafici di $R_H = R_{yx}$ e R_{xx} in funzione del campo magnetico nell'effetto Hall quantistico. Da [16].	44

Introduzione

Con l'avvento della meccanica quantistica il concetto di particelle identiche ha assunto un ruolo inedito nella storia della Fisica. Il fatto che particelle dello stesso tipo avessero esattamente le stesse caratteristiche come massa e carica era un'ipotesi certamente semplificatrice in fisica classica, ma non aveva alcun significato più profondo a livello dinamico. Con la termodinamica statistica si sono avuti indizi che sistemi di particelle identiche avessero caratteristiche qualitativamente e quantitativamente distinte da sistemi di particelle diverse tra loro, già con l'analisi di semplici fenomeni come il mescolamento tra gas, che è l'oggetto del famoso paradosso di J.W. Gibbs. Nella teoria quantistica, invece, si è introdotto l'assunto dell'indistinguibilità delle particelle dello stesso tipo, e si è dovuto tenere conto di questa caratteristica nella sua costruzione. Si può considerare l'indistinguibilità un dato sperimentale: gli esperimenti hanno mostrato che (entro le incertezze sperimentali, sempre minori col passare degli anni) tutte le particelle di uno stesso tipo sono effettivamente identiche tra loro e, per la peculiarità della loro natura quantistica, non esiste procedura che possa distinguere l'una dall'altra. Le conseguenze di questo fatto vengono usualmente riassunte in un postulato aggiuntivo, il postulato di simmetrizzazione, che distingue tutte le particelle reali tra fermioni e bosoni, con comportamenti statistici differenti, che sono stati essenziali per la spiegazione della struttura della materia, dalla configurazione elettronica negli atomi alla struttura a bande nei solidi, dalla possibilità della realizzazione del laser al fenomeno più "esotico" della condensazione di Bose-Einstein. L'elaborazione teorica che porta a questo postulato, pur ricevendo alcune critiche [10], è rimasta grossomodo la stessa sino alla fine degli anni '70 del XX secolo, quando J.M. Leinaas e J. Myrheim pubblicarono un articolo [10] che proponeva un diverso approccio, con il quale si proponevano di chiarificare l'origine della distinzione tra bosoni e fermioni e di riuscire a fare a meno del postulato di simmetrizzazione. Sorprendentemente, scoprirono che l'esistenza di due sole classi distinte dipendeva dalla dimensione dello spazio delle configurazioni di ciascuna particella, e che in un mondo bidimensionale esisterebbe una continuità di classi di particelle identiche con statistiche distinte. Non furono gli unici a portare alla luce la possibile esistenza di questi oggetti, battezzati anioni [17, 18], anche se lo fecero da un punto di vista assai generale. Sebbene potesse sembrare che gli anioni fossero destinati a rimanere una curiosità teorica, un importante sviluppo sperimentale nell'ambito della materia condensata

si intrecciò inaspettatamente con questo filone di ricerca: la scoperta dell'effetto Hall quantistico intero (1980) e frazionario (1982). Nel corso di alcuni anni fu chiarito, sia nella teoria che con gli esperimenti, che la quantizzazione frazionaria della resistenza di Hall era dovuta all'esistenza di quasi-particelle bidimensionali che non erano né bosoni, né fermioni, e che avevano le caratteristiche proprie degli anioni. Negli ultimi due decenni, si è compreso che le particolari proprietà degli anioni possono essere utilizzate per costruire un nuovo tipo di computer quantistico, nel quale la computazione è protetta dagli errori in virtù della sua natura topologica, e questo ha attirato un particolare interesse verso la fisica degli anioni.

In questo testo si esporrà la teoria non relativistica che predice e descrive gli anioni e, in generale, la formulazione della meccanica quantistica su spazi delle configurazioni non semplicemente connessi, e si descriveranno brevemente gli sviluppi che ha avuto nella spiegazione dell'effetto Hall quantistico frazionario, per concludere con un cenno al computer quantistico topologico. Nel Capitolo 1 si richiamano i concetti di particelle identiche in meccanica classica e quantistica, con un cenno al paradosso di Gibbs. Successivamente, viene introdotta la costruzione dello spazio delle configurazioni di un insieme di particelle indistinguibili. Nel Capitolo 2 vengono esposti alcuni concetti e risultati di topologia algebrica che servono allo sviluppo della teoria quantistica quando lo spazio delle configurazioni non è semplicemente connesso, che è l'argomento del Capitolo 3. Applicando i risultati ottenuti ai sistemi di particelle identiche, si ottiene che bosoni e fermioni sono l'unica possibilità solamente in tre o più dimensioni. Sempre in questo Capitolo, si presenta il modello di anione composito di Wilczek e si risolve l'equazione di Schrödinger per due anioni che interagiscono mediante un potenziale armonico. Infine, nel Capitolo 4 si tirano le somme sulla teoria esposta, e si descrivono le applicazioni che ha trovato nell'effetto Hall quantistico e nel possibile sviluppo di computer quantistici topologici.

Capitolo 1

Particelle Identiche

La meccanica quantistica ha posto in grande risalto il ruolo dell'identità delle particelle, più di quanto abbia fatto la termodinamica statistica di fine XIX secolo, poiché la teoria richiede una trattazione differente per la dinamica stessa delle particelle se queste non sono distinguibili. Il risultato, com'è noto, è la suddivisione di tutte le particelle nelle classi disgiunte dei bosoni e fermioni, con comportamenti statistici drasticamente differenti, successivamente collegati allo spin in ambito relativistico con il teorema di connessione spin-statistica (M. Fierz, 1939, e W. Pauli, 1940). Tutto questo è stato confermato sperimentalmente innumerevoli volte, rivelandosi essenziale per comprendere la struttura di atomi, molecole, solidi, ecc. Tra la fine degli anni '70 e l'inizio degli anni '80 del '900, diversi autori hanno riesaminato, sotto prospettive differenti, l'approccio standard che porta a questa distinzione, proponendone uno differente che ha il pregio di mostrare nuove possibilità di statistiche quantistiche. In questo Capitolo si intende descrivere il punto di partenza di questa formulazione, nell'ambito della teoria quantistica non relativistica.

1.1 La fisica classica e il paradosso di Gibbs

In fisica classica una particella è un punto materiale, cioè un ente fisico-matematico di dimensioni trascurabili con tre gradi di libertà spaziali, dotato di una massa e di una carica elettrica¹. Dal punto di vista della Relatività l'inclusione della dimensione temporale non varia in modo sostanziale questa definizione: l'unica condizione aggiuntiva è che un oggetto descrivibile con soli tre gradi di libertà, cioè una particella elementare, senza struttura interna, deve essere realmente puntiforme. I gradi di libertà sono associati a grandezze estrinseche, cinematiche: posizione e velocità, oppure momento lineare, che

¹La massa è anche la "carica" dell'interazione gravitazionale; la fisica classica non include altre interazioni, poiché le altre due interazioni fondamentali note non si manifestano a livello macroscopico.

identificano lo stato della particella ma che per il resto sono proprietà accidentali, cioè accessorie, il cui valore, almeno in linea di principio, è arbitrario. A queste si aggiungono funzioni di fase come il momento angolare e l'energia. La dinamica è invece determinata dalle proprietà intrinseche, la massa e la carica elettrica, responsabili dell'accoppiamento della particella ai campi elettromagnetico e gravitazionale, e caratterizzano il "tipo" di particella. Due particelle sono identiche se hanno le stesse proprietà intrinseche, il che rende la loro dinamica equivalente. Quando si ha a che fare con insiemi di particelle dello stesso tipo (un gas di atomi di uno stesso isotopo, gli elettroni in un metallo, ecc.), l'ipotesi più semplice e naturale possibile è supporre che siano effettivamente identiche, e finora nessun esperimento l'ha mai smentita. Sistemi di questo genere sono l'argomento principale della termodinamica statistica, nella quale emerge in modo rilevante la questione della possibile indistinguibilità delle particelle identiche. Indistinguibilità significa che lo stato di un sistema di due o più particelle identiche non varia scambiando simultaneamente posizione e velocità/momento di due qualsiasi di esse. Più propriamente, non esiste misura che possa rivelare alcuna differenza tra le due configurazioni, ovvero le funzioni di fase² che descrivono il sistema non cambiano (compresa l'hamiltoniana). Infatti, nel calcolo dell'entropia con la formula di Boltzmann $S = k \cdot \ln(W)$, il numero di popolazioni possibili W (o il volume dello spazio delle fasi accessibile diviso per un fattore di scala, nell'approssimazione semi-classica) è diverso per particelle distinguibili o non distinguibili, con conseguenze misurabili sul comportamento termodinamico del sistema. L'esempio più notorio di quanto drastica sia questa differenza è senza dubbio il paradosso di Gibbs³[5, 2]. Il calcolo dell'entropia di un gas perfetto classico di volume V alla temperatura T , costituito di N atomi distinguibili fornisce

$$S^{DIST}(N, V, T) = Nk \ln(AVT^{\frac{3}{2}}) \quad (1.1.1)$$

dove A è una costante opportuna. Generalmente, l'entropia è considerata una quantità estensiva, cioè proporzionale al numero di costituenti⁴, ma questa espressione è sovra-estensiva poiché cresce come $N \ln N$, più rapidamente del numero di particelle del gas. Ciò porta a situazioni paradossali come quella descritta da Gibbs, nella quale due volumi identici V contenenti ciascuno N particelle dello stesso gas alla medesima temperatura T vengono uniti in un volume $2V$ di $2N$ atomi alla stessa temperatura T per semplice rimozione del setto che li divide. Il processo è perfettamente reversibile: basta rimettere al suo posto il setto per ritornare allo stato iniziale senza che per fare questo si debba trasferire lavoro o calore modificando alcun oggetto esterno. Dal punto di vista statistico, si è passati da due insiemi canonici (che scambiano solamente calore, poiché il

²Per funzione di fase si intende una generica funzione definita sullo spazio delle fasi.

³Nella letteratura scientifica vi sono una pleora di discussioni sulle varie versioni del paradosso, e qui non si vuole minimamente entrare nel merito delle varie considerazioni che ne emergono, sulla natura dell'entropia, ecc. Si vuole solo illustrare una versione del paradosso utile a mostrare come emerga la necessità di introdurre l'indistinguibilità nella meccanica statistica classica.

⁴Ma si veda al riguardo l'interessante discussione in [5]

setto permette il contatto termico) a due sistemi gran-canonici (che possono scambiare anche materia), e per sistemi macroscopici lontani da transizioni di fase non vi è alcuna differenza tra le funzioni di stato per sistemi canonici e gran-canonici [8], ivi compresa l'entropia. Dunque

$$\Delta S = S_F - S_I = 0 \iff S(2N, 2V, T) = 2S(N, V, T) \quad (1.1.2)$$

mentre l'espressione 1.1.1 prevede che l'entropia *aumenti* di $2Nk \ln 2$. La crescita paradossale dell'entropia è in perfetto accordo con la supposta distinguibilità degli atomi che costituiscono il gas, che permette di etichettarli con la parte del contenitore che occupavano prima della rimozione del setto: questa trasformazione raddoppia il volume di spazio delle fasi disponibile alle particelle delle due metà, e il reinserimento del setto non ripristina lo stato originale, poiché in media la metà delle particelle verrà a trovarsi nella porzione del recipiente opposta a quella iniziale, un macrostato diverso da quello di partenza. Si avrebbe la stessa situazione se nelle due parti ci fossero stati due gas chimicamente distinti, caso in cui è evidente la non reversibilità del processo, che comporterebbe un identico aumento di entropia $\Delta S = 2Nk \ln 2$. La reversibilità è recuperata se si ammette che gli atomi del gas siano indistinguibili, caso in cui due microstati differenti per uno scambio di particelle nello spazio delle fasi non sono distinti: in questo modo, lo stato finale del gas con il setto reinserito, in cui metà degli atomi che hanno cambiato compartimento (se considerati come distinguibili), non è diverso da quello iniziale. Nella statistica classica, l'indistinguibilità viene introdotta dividendo il volume dello spazio delle fasi disponibile per il numero $N!$ di permutazioni di N particelle, ottenendo l'entropia

$$S^{IND}(N, V, T) = Nk \ln(A' \frac{V}{N} T^{\frac{3}{2}}), \quad A' = eA \quad (1.1.3)$$

(e è il numero di Nepero) che è estensiva e dà correttamente $\Delta S = 0$. Ciò mostra che se si vuole che l'entropia sia una funzione di stato estensiva, microstati differenti per solo "scambio" di particelle identiche, cioè scambio delle loro coordinate ed impulsi, devono essere considerati in realtà lo stesso microstato (perlomeno ai fini statistici).

Questo non è ovvio in fisica classica, poiché nella loro dinamica le particelle identiche sono perfettamente distinguibili, perché si può usare la loro traiettoria (nello spazio delle configurazioni o delle fasi) per etichettarle in modo univoco. Infatti, sotto ipotesi abbastanza ampie sulla forma delle interazioni, le equazioni del moto (di Eulero-Lagrange o di Hamilton) ammettono soluzioni uniche, data la scelta di condizioni iniziali: si possono etichettare in modo arbitrario le particelle all'istante iniziale del moto, e la successiva evoluzione conserverà l'etichettatura senza ambiguità durante tutto il moto. Si può anche dire che sono le condizioni iniziali stesse di ciascuna particella a distinguerla dalle altre, ovvero la sua traiettoria: le proprietà estrinseche permettono di distinguerle.

1.2 La meccanica quantistica

La teoria quantistica varia notevolmente questo schema. Le grandezze estrinseche perdono il loro ruolo identificativo nei confronti dello stato, poiché in generale non sono più definite, nel senso che la loro misura dà risultati distribuiti casualmente. Pertanto, anche la stessa nozione di stato cambia, da punto dello spazio delle fasi esadimensionale (per una particella in tre dimensioni) a vettore astratto in uno spazio di Hilbert con base non numerabile (gli autoket della posizione o dell'impulso), e le grandezze dinamiche estrinseche (posizione, impulso, momento angolare, energia, etc.) vengono elevate ad operatori lineari in questo spazio, i cui autovalori corrispondono ai risultati delle possibili misure. Tuttavia, le grandezze intrinseche non sono sottoposte a questa "quantizzazione"⁵, e rimangono perfettamente definite in ogni stato, come parametri contenuti nell'operatore hamiltoniano: per esempio, in meccanica quantistica non relativistica, la carica e la massa di una particella sono le due costanti q e m tali per cui l'hamiltoniano che determina l'evoluzione del relativo vettore di stato ha la forma

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\hat{\mathbf{q}}))^2}{2m} + q\phi(\hat{\mathbf{q}}) \quad (1.2.1)$$

dove \mathbf{A} e ϕ sono, rispettivamente, i potenziali vettore e scalare del campo elettromagnetico. La teoria quantistica aumenta anche i gradi di libertà delle particelle elementari, aggiungendo lo spin, e, in ambito relativistico, le interazioni debole e forte introducono nuove cariche interne (colore, numeri quantici di sapore), con il risultato di ingrandire il novero delle grandezze intrinseche. Tuttavia, la definizione data di particelle identiche è perfettamente valida anche in questo contesto non classico: sono identiche le particelle con le medesime proprietà intrinseche. È da notare che lo "spin di una particella" s è una quantità intrinseca per una particella elementare, che nella meccanica quantistica non relativistica determina il numero di funzioni d'onda necessarie per descriverla; infatti, $\hat{s}^2 = \hbar^2 s(s+1)\hat{1}$ è un semplice multiplo dell'identità. Invece, la proiezione dello spin in una certa direzione è una grandezza estrinseca. La distinguibilità di oggetti identici, come è stato detto, si basa sulla possibilità di attribuire loro un nome, un'etichetta, che di fatto li distingua, a patto di poterla assegnare univocamente durante tutta la loro evoluzione. Chiaramente, in meccanica quantistica questo non è possibile. La nozione di traiettoria (posizione e velocità perfettamente definite in ogni istante) è priva di significato nella teoria quantistica, a causa della non commutatività degli operatori di posizione ed impulso, e delle conseguenti relazioni d'indeterminazione; pertanto, l'operazione di

⁵La quantizzazione è qui intesa come corrispondenza tra funzioni di fase classiche e operatori lineari. Benché la carica elettrica sia "quantizzata", nel senso che è sempre multipla di una carica elementare $e/3$, ciò è essenzialmente diverso dalla quantizzazione dell'energia in un sistema legato: i livelli energetici di un tale sistema sono gli autovalori dell'operatore hamiltoniano, mentre non vi è nessun "operatore di carica" del quale le cariche delle particelle siano gli autovalori. La natura discreta della carica elettrica è da considerarsi un dato empirico nella meccanica quantistica non relativistica.

etichettatura che in fisica classica permette di distinguere le particelle identiche viene a perdere di senso, e di principio *le particelle identiche sono indistinguibili*. Questo porta a dover modificare la descrizione quantistica dei sistemi di particelle identiche: l'approccio standard consiste nel costruire uno spazio di Hilbert per N particelle considerate come distinguibili, assegnando un indice fittizio a ciascuna di esse, per poi selezionare in questo spazio il sottospazio dei vettori fisici che descrivono particelle indistinguibili in base al criterio che una permutazione arbitraria degli indici delle particelle non deve alterare lo stato descritto dai vettori. La permutazione σ degli indici è implementata come azione di un operatore lineare $\hat{P}(\sigma)$. Siccome la corrispondenza tra stati e ket è definita a meno di un fattore di fase, significa che per azione di $\hat{P}(\sigma)$ un vettore che descrive particelle indistinguibili può essere moltiplicato al più per un numero complesso a modulo unitario $\eta(\sigma)$ ⁶. Se si sceglie come permutazione una trasposizione τ , che scambia solamente due indici, allora applicandola due volte si deve ottenere il vettore iniziale, e questo è possibile se e solo se $\eta^2(\tau) = 1 \iff \eta(\tau) = \pm 1$ ⁷. Siccome $\eta(\tau)$ non dipende dal vettore di stato, il suo valore (+1 o -1) è caratteristico dell'intero sistema di particelle: il segno più identifica un insieme di bosoni, il segno meno un insieme di fermioni. Tutto questo viene riassunto nel

Postulato di simmetrizzazione: *i vettori di stato che possono descrivere un sistema di particelle identiche devono essere totalmente simmetrici oppure totalmente antisimmetrici rispetto alle permutazioni di particelle, a seconda che queste siano bosoni o fermioni, rispettivamente.*

1.3 L'alternativa al postulato di simmetrizzazione e lo spazio delle configurazioni di particelle indistinguibili

Questo modo di procedere, e la necessità del postulato, è stato criticato [10]: si trattano le particelle come se fossero distinguibili attribuendo loro delle etichette, che non sono elementi osservabili, per poi dover compensare l'arbitrarietà della loro assegnazione imponendo che lo stato fisico non cambi se se ne sceglie una differente. Ci si può chiedere se sia possibile eliminare questa ambiguità nella corrispondenza tra stato fisico e ket che lo descrive sin dal principio, senza dover ricorrere ad etichette fittizie e magari evitando l'introduzione di un altro postulato. Questa condizione somiglia al problema

⁶ $\eta(\sigma)$ non può dipendere anche dal vettore che moltiplica, per la linearità dell'operatore di permutazione

⁷In alternativa, l'analisi delle proprietà dell'operatore $\hat{P}(\sigma)$ porta ad affermare che la mappa $\sigma \rightarrow \eta(\sigma)$ deve essere una rappresentazione unidimensionale del gruppo delle permutazioni, ma ne esistono solo due: $\eta(\sigma) = 1 \forall \sigma \in \mathbb{S}_N$ oppure $\eta(\sigma) = (-1)^{\ell(\sigma)}$, dove $\ell(\sigma)$ è la parità della permutazione. Si ritroverà questo risultato nel Capitolo 3.

dell'entropia di un gas perfetto classico, all'origine del paradosso di Gibbs: calcolando il volume dello spazio delle fasi accessibile come se si trattasse di particelle distinguibili, si conta ogni microstato fisico $N!$ volte (degenerazione di scambio), e si è costretti a correggere questo conteggio solamente alla fine. Se si modificasse lo spazio delle fasi in modo che contenga esso stesso la condizione di indistinguibilità delle particelle, il calcolo del volume disponibile darebbe direttamente il risultato corretto. Questa è la via proposta da Leinaas e Myrheim nel 1977 [10]. In meccanica quantistica il concetto di spazio delle fasi è privo di senso, per via della non misurabilità simultanea di posizione e impulso. Ma l'indistinguibilità delle particelle si manifesta direttamente nella misura delle loro coordinate: se in una certa zona di spazio vi sono N elettroni, e un si misura la posizione di uno di essi, non esiste esperimento che possa distinguere a quale elettrone "appartenga" la posizione misurata; essendo tali particelle indistinguibili, una domanda simile è priva di significato. Si può cercare allora di costruire un sistema di coordinate che descriva la configurazione del sistema di particelle che rifletta questa caratteristica fisica. Siccome si parla di coordinate, l'ambiente più naturale per sviluppare la teoria è la rappresentazione di Schrödinger, in cui l'insieme degli stati è lo spazio di Hilbert \mathcal{L}^2 delle funzioni a quadrato sommabile definite sullo spazio delle configurazioni. Per semplicità e chiarezza, si considererà la descrizione quantistica di particelle a spin zero, per le quali basta una singola funzione d'onda per codificare lo stato. Si cercherà di costruire un dominio opportuno per queste funzioni. Se lo spazio delle configurazioni di una singola particella è la varietà \mathbb{X} , usualmente si descrive la configurazione di N particelle con un punto dello spazio \mathbb{X}^N , cioè con una N -upla di coordinate $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)$ in cui $\mathbf{x}_i \in \mathbb{X}^N$ è la posizione della i -esima particella. Se le particelle sono indistinguibili, un tale punto \mathbf{x} non corrisponde biunivocamente a una configurazione del sistema, poiché l'etichettatura sarebbe arbitraria, e permutando le coordinate \mathbf{x}_i si otterrebbe lo stesso stato: introducendo l'azione del gruppo delle permutazioni

$$\sigma(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \mathbf{x}_{\sigma^{-1}(N)}), \quad \sigma \in \mathbb{S}_N \quad (1.3.1)$$

allora tutti gli $N!$ nella forma $\sigma(\mathbf{x})$, ottenuti operando tutte le possibili permutazioni degli indici, descrivono la stessa configurazione. Con queste coordinate si ha una rappresentazione ridondante delle configurazioni di un sistema di N particelle indistinguibili. Per renderla biunivoca si identificano tra loro tutti i punti che differiscono solamente per lo scambio di coordinate di coppie di particelle, cioè si opera il quoziente dello spazio \mathbb{X}^N rispetto alla relazione di equivalenza

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \iff \exists \sigma \in \mathbb{S}_N \mid \mathbf{y} = \sigma \mathbf{x} \quad (1.3.2)$$

$\mathbb{X}^N/\mathbb{S}_N$ è un buon candidato come spazio delle configurazioni del sistema, ma in generale comporta delle complicazioni tecniche: può contenere singolarità o bordi, oppure non essere nemmeno una varietà. Questo è dovuto alle proprietà dell'insieme "diagonale"

$$\Delta = \{\mathbf{x} \in \mathbb{X}^N \mid \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j \text{ per almeno una coppia di indici distinti } i \neq j\} \quad (1.3.3)$$

Questo insieme è il luogo dei punti fissi dell'azione di \mathbb{S}_N , poiché se si scambiano due insiemi di coordinate \mathbf{x}_i identici si ottiene, ovviamente, lo stesso punto $\mathbf{x} \in \mathbb{X}^N$. Sfortunatamente, se un gruppo di trasformazioni in una varietà ha dei punti fissi, l'insieme quoziente della varietà rispetto all'azione di questo può sviluppare le patologie di cui sopra [11]. Negli esempi che si faranno più avanti, si vedrà che tipo di problemi si presentano in semplici casi d'interesse fisico. Dal punto di vista fisico, se il sistema è in una configurazione appartenente a Δ significa che due o più particelle sono sovrapposte nella stessa posizione: una collisione "per contatto", la cui descrizione è resa spinosa dalla (supposta) natura puntiforme delle particelle. Per evitare queste complicazioni e poter lavorare con delle varietà, i punti in Δ vengono esclusi: *lo spazio delle configurazioni di un sistema di N particelle indistinguibili è*

$$\mathbb{Q}_N = (\mathbb{X}^N \setminus \Delta) / \mathbb{S}_N = (\mathbb{X}^N / \mathbb{S}_N) \setminus \Delta \quad (1.3.4)$$

L'uso di questo spazio può essere esteso anche alla meccanica classica, ma generalmente si evita di farlo perché differisce dall'ordinario \mathbb{X}^N (che è molto più facile da trattare) solamente per proprietà globali, mentre la dinamica coinvolge solo le proprietà locali della varietà. A una traiettoria in \mathbb{Q}_N corrispondono $N!$ traiettorie in \mathbb{X}^N , ottenute permutando le posizioni iniziali delle particelle: finché le curve non si intersecano (cioè se le particelle collidono) è possibile sceglierne arbitrariamente una come evoluzione del sistema (e anche se avviene una collisione è possibile farlo, richiedendo la continuità delle derivate). Quindi, è possibile evitare l'identificazione dei punti differenti per l'azione di \mathbb{S}_N seguendo l'evoluzione temporale del sistema, e ciò è permesso dal fatto che l'evoluzione nel tempo è una trasformazione continua mentre le permutazioni delle coordinate sono un gruppo discreto [10].

La meccanica quantistica, invece, è sensibile alle proprietà globali dello spazio delle configurazioni, come si vedrà nel Capitolo 3. Gli oggetti geometrici che identificano queste proprietà globali "sensibili" sono spiegati nel Capitolo 2.

Qual è la struttura dello spazio delle configurazioni \mathbb{Q}_N per spazi individuali \mathbb{X} di interesse fisico? Una tipica varietà è lo spazio vettoriale euclideo \mathbb{R}^d . Siccome la dimensione di \mathbb{Q}_N eccede facilmente le tre, è interessante (e necessario) provare a decomporlo in spazi più "piccoli". Innanzitutto, quando si ha a che fare con insiemi di particelle, generalmente è utile separare il moto del centro di massa da quello relativo tra le particelle stesse. Le coordinate del centro di massa

$$\mathbf{X} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \quad (1.3.5)$$

sono invarianti sotto l'azione del gruppo delle permutazioni, e lo spazio euclideo \mathbb{R}^d che descrive può essere separato da \mathbb{Q}_N sotto forma di prodotto cartesiano⁸:

$$\mathbb{Q}_N = \mathbb{R}^d \times \mathcal{R}(d, N) \quad (1.3.6)$$

⁸Questo non è necessariamente possibile se lo spazio delle configurazioni individuale non è \mathbb{R}^d

dove si è indicato con $\mathcal{R}(d, N)$ lo spazio delle configurazioni che descrive i rimanenti $d(N - 1)$ gradi di libertà del moto relativo. Per studiare questo spazio conviene porsi nel caso più semplice di sistema di particelle, cioè per $N = 2$. In questo caso, $\mathcal{R}(d, 2)$ ha dimensione d e si ottiene dallo spazio \mathbb{R}^d delle posizioni relative $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ identificando $-\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ con \mathbf{x} ed escludendo la diagonale $\Delta = \{\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2\} = \{\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$. Un punto di questo insieme è identificato dalla distanza relativa tra le particelle, $|\mathbf{x}| \neq 0$, e dalla direzione della retta che le congiunge, che è descritta dal versore $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ purché si identifichino $\hat{\mathbf{x}}$ e $-\hat{\mathbf{x}}$. Quindi, $\mathcal{R}(d, 2)$ si separa in

$$\mathcal{R}(d, 2) =]0, +\infty[\times \Omega_{d-1} \quad (1.3.7)$$

dove l'intervallo reale è l'insieme ove può variare $|\mathbf{x}|$ mentre Ω_{d-1} è lo spazio contenente i restanti $d - 1$ gradi di libertà, che danno la direzione della congiungente le particelle: per quanto detto, si tratta dell'insieme dei versori di \mathbb{R}^d in cui versori opposti sono identificato tra loro. Questa scomposizione equivale all'utilizzo delle coordinate polari d -dimensionali, e Ω_{d-1} è riconducibile alla parte angolare, con le dovute identificazioni. I casi di maggiore interesse fisico (particelle su una retta, nel piano o nello spazio) sono esplicitati maggiormente in quanto segue.

d=1 Questo è un caso abbastanza speciale, poiché se le due particelle sono confinate a muoversi su una retta possono scambiarsi di posizione solo passando l'una attraverso l'altra. Tuttavia, lo spazio delle configurazioni è abbastanza semplice da permettere una descrizione quantistica "diretta" [10], senza la necessità di ricorrere alla formulazione più astratta del Capitolo 3. Infatti, è molto agevole costruire \mathbb{Q}_N a partire da $\mathbb{Q}_2 = \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2)\}$, senza la necessità di decomporlo: \mathbb{S}_2 contiene solo due elementi, l'identità e la trasposizione $\tau : (x_1, x_2) \rightarrow (x_2, x_1)$, che corrisponde alla riflessione delle coordinate rispetto alla diagonale del primo e terzo quadrante $\Delta = \{x_2 = x_1\}$. Perciò, per ottenere lo spazio delle configurazioni è sufficiente escludere uno dei due semipiani aventi Δ come bordo, oltre che la diagonale stessa:

$$\mathbb{Q}_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 > x_2\} \quad (1.3.8)$$

avendo scelto arbitrariamente di conservare il semipiano inferiore. Già in questo semplice caso si osserva l'apparire di una frontiera, coincidente con l'insieme dei punti uniti sotto l'azione del gruppo delle permutazioni. Vi è un'ulteriore caratteristica che non è immediatamente visibile. Supponiamo che le particelle siano libere e che possano attraversarsi: allora, una traiettoria che le porti a scambiarsi finirebbe nel semipiano superiore, ma per l'identificazione $(x_1, x_2) \sim (x_2, x_1)$ in realtà viene "riflessa" in quello inferiore. Questo significa che il vettore tangente $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, che contiene le velocità delle particelle, si trasforma in $\mathbf{v}' = (v_2, v_1)$ subendo il cambio di segno della componente normale al bordo Δ (si veda la Figura 1.1). Apparentemente, l'impulso individuale mv_i non è una costante del moto

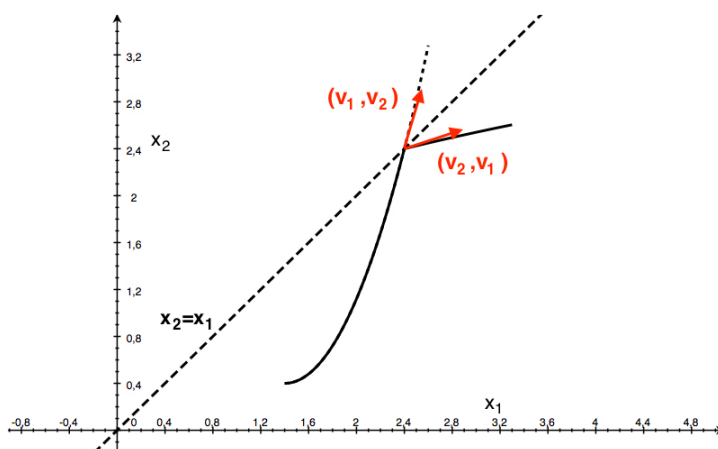


Figura 1.1: Lo spazio delle configurazioni di due particelle su una retta, e il trasporto parallelo dei vettori in tale spazio.

(sebbene quello totale $m(v_1 + v_2)$ si conservi). Si può renderlo un integrale primo se si definisce questo processo come il trasporto parallelo di un vettore lungo una curva: la componente del vettore normale alla diagonale $x_1 = x_2$ cambia di segno ogniqualvolta la curva tocca il bordo. Il prezzo di questa definizione è che lo spazio delle configurazioni diviene (globalmente) curvo. Altrimenti, si può notare che la riflessione del vettore tangente coincide con lo scambio delle velocità delle particelle, esattamente come accadrebbe se collidessero elasticamente, e allora si tratterebbe di una manifestazione dell'impenetrabilità delle stesse. Tuttavia, essendo le particelle indistinguibili, non vi è alcuna differenza tra i due processi.

d=2 Lo spazio $\mathcal{R}(2, 2)$ consiste nel piano reale privato dell'origine con i punti opposti $(\pm \mathbf{x})$ identificati. Introducendo le coordinate polari

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \\ y &= r \sin \phi \end{aligned}$$

$\mathcal{R}(2, 2)$ si separa come in 1.3.7. L'angolo ϕ normalmente è compreso tra $[0, 2\pi[$, ma l'identificazione dei punti diametralmente opposti si traduce nell'identificare punti i cui angoli differiscano di π . Perciò è sufficiente restringere ϕ all'intervallo $[0, \pi[$ identificando 0 con π :

$$\Omega_1 = [0, \pi[, \quad 0 \sim \pi \tag{1.3.9}$$

cioè si tratta, essenzialmente, della circonferenza \mathbb{S}^1 (si veda la Figura 1.2). È interessante costruire $\mathcal{R}(2, 2)$ in una maniera differente, partendo dalla sua definizione: il piano con i punti opposti identificati. Questo può essere fatto "tagliando" \mathbb{R}^2 lungo una qualsiasi semiretta che parta dall'origine e ripiegandolo fino a congiungere i due lembi, formando un cono circolare privo del vertice, con semiapertura di

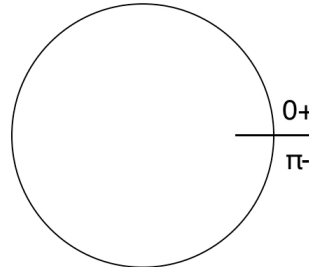


Figura 1.2: Una possibile raffigurazione di $\Omega_1 \cong \mathbb{S}^1$.

$\frac{\pi}{6}$ radianti. Qui si nota un altro tipo di patologia che può sviluppare $\mathbb{X}^N/\mathbb{S}_N$: una singolarità, il vertice del cono, che corrisponde all'insieme dei punti uniti $\Delta = \{\mathbf{0}\}$; esso deve essere escluso per ottenere \mathbb{Q}_N , poiché un cono con il vertice non è una varietà differenziabile. In questo caso la curvatura di $\mathcal{R}(2, 2)$ è più evidente che in una dimensione, poiché il cono è globalmente curvo, benché sia localmente piatto nei punti distinti dal vertice. Infatti, se si trasporta parallelamente un vettore lungo un cammino che gira intorno al vertice una volta, esso torna al punto iniziale invertito. Per vederlo, basta "aprire" di nuovo il cono mappandolo in \mathbb{R}^2 : un cammino che sul cono gira intorno al vertice una volta congiunge il punto iniziale \mathbf{x} con il suo opposto $-\mathbf{x}$. Il trasporto parallelo ordinario sul piano lungo il cammino porta un vettore \mathbf{v} inalterato nel punto finale, ma ricostruendo il cono i due punti vengono fatti coincidere e il vettore finale diventa $-\mathbf{v}$. Invece, una curva chiusa che non passa intorno alla singolarità viene mappata sul piano in un'altra curva chiusa, e il trasporto parallelo dei vettori su di essa li lascia inalterati. In generale, se un cammino sul cono compie n giri intorno al vertice, un vettore \mathbf{v} trasportato parallelamente viene trasformato in $(-1)^n \mathbf{v}$. È interessante notare che le curve che passano intorno alla singolarità non sono deformabili con continuità in quelle che non lo fanno, poiché per farlo dovrebbero attraversare il vertice, che invece è escluso. Questa caratteristica separa le curve in insiemi disgiunti, e verrà formalizzata nel Capitolo seguente.

d=3 Si tratta del caso di maggiore interesse fisico, poiché corrisponde alla situazione delle particelle reali. Ω_2 è l'insieme delle direzioni in \mathbb{R}^3 , che si può costruire come lo spazio dei versori tridimensionali con versori opposti identificati. Siccome l'insieme dei vettori unitari descrive la sfera \mathbb{S}^2 immersa in \mathbb{R}^3 , Ω_2 si ottiene identificando i punti antipodali della sfera fra loro: il risultato è una semisfera con i punti opposti sull'equatore identificati (si veda la Figura 1.3). Questo insieme è una possibile rappresentazione del piano proiettivo reale $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$. I versori tridimensionali possono

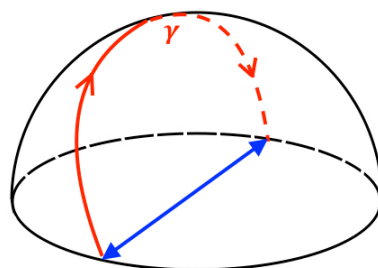


Figura 1.3: Una possibile raffigurazione di $\Omega_2 \cong \mathbb{RP}^2$. I punti opposti sull'equatore (vettori blu) sono identificati tra loro, e la curva γ (in rosso) è pertanto una curva chiusa.

essere espressi utilizzando le coordinate polari

$$\hat{\mathbf{x}} = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta), \quad \phi \in [0, 2\pi[, \quad \theta \in [0, \pi[\quad (1.3.10)$$

nelle quali il vettore opposto corrisponde agli angoli $(\pi - \theta, \phi + \pi)$ se $0 \leq \phi \leq \pi$, $(\pi - \theta, \phi - \pi)$ se $\pi \leq \phi \leq 2\pi$. Dunque, Ω_2 è descrivibile come il "rettangolo" $[0, \pi[\times [0, 2\pi[$ nel quale si identificano i punti (θ, ϕ) e $(\pi - \theta, \phi + \pi)$, cioè nel quale tutti i punti nella metà superiore $\phi \geq \pi$ vengono mappati nel rettangolo inferiore mediante $(\theta, \phi) \mapsto (\pi - \theta, \phi - \pi)$. Anche in questo caso, lo spazio delle configurazioni è curvo: un vettore trasportato parallelamente lungo un cammino chiuso in \mathbb{Q}_2 che in Ω_2 congiunge punti opposti della sfera torna al punto iniziale invertito.

Se lo spazio delle configurazioni individuale non è \mathbb{R}^d , come accennato, le coordinate del centro di massa possono non essere separate dal moto relativo. Per esempio, \mathbb{Q}_2 per due particelle indistinguibili che si muovono su una circonferenza è un nastro di Möbius [10]. Avendo stabilito la corretta forma dello spazio delle configurazioni di un sistema di particelle identiche, si può procedere con la costruzione di una teoria quantistica, nella rappresentazione di Schrödinger. Questo è un compito non banale, per via delle caratteristiche che \mathbb{Q}_N possiede. Il prossimo Capitolo illustrerà la geometria necessaria per lo sviluppo della teoria.

Capitolo 2

Topologia Algebrica

La topologia algebrica studia le proprietà degli spazi topologici per mezzo di strumenti algebrici, grazie ad una nozione di gruppo costruita nell'insieme delle curve continue in tali spazi. Come precedentemente mostrato, lo spazio delle configurazioni \mathbb{Q}_N di un insieme di particelle identiche che si possono muovere in \mathbb{R}^d differisce sensibilmente da \mathbb{R}^{dN} , e tali differenze sono da ascrivere a proprietà globali che sono meglio analizzabili con gli strumenti della topologia algebrica. Questo approccio fornirà le basi per formulare la meccanica quantistica (non relativistica) su \mathbb{Q}_N , che sarà l'oggetto del prossimo Capitolo. La presente discussione non intende essere matematicamente completa, si darà risalto ai risultati e agli enunciati più che alle dimostrazioni, che possono essere trovare in [11, 4, 12].

2.1 Cammini e Primo Gruppo di Omotopia

Inizialmente, si lavorerà su un generico spazio \mathbb{T} e solo successivamente si specializzerà la discussione con lo spazio \mathbb{Q}_N . I minimi requisiti che si richiedono a \mathbb{T} sono:

- che sia uno spazio topologico, in modo da avere una nozione di continuità di funzioni;
- che sia connesso, cioè che non sia l'unione in due insiemi aperti (o chiusi) non vuoti e disgiunti;
- che sia connesso per archi, cioè che qualunque coppia di punti possa essere congiunta con un cammino.

Definizione 2.1. Un **cammino**¹ è un'applicazione continua dall'intervallo reale $[0, 1]$ all'insieme \mathbb{T} ; un **cammino chiuso** (o **loop**) è un cammino i cui estremi coincidono:

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{T} \mid f(0) = f(1) \quad (2.1.1)$$

Se si specifica il punto $f(0) = f(1) = x \in \mathbb{T}$ si ha un **loop in x** . Se, invece, $f(0) \neq f(1)$ il cammino è detto aperto.

Si noti che questa definizione è molto restrittiva: un cammino è specificato non solo dall'insieme di punti che "traccia" in \mathbb{T} (quella che usualmente viene detta curva), ma anche dalla "velocità" con la quale li percorre. Due cammini f e g che sono l'uno la riparametrizzazione dell'altro, cioè per i quali esiste una funzione continua, suriettiva e strettamente crescente $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tale che $g(t) = f(\tau(t)) \forall t \in [0, 1]$, sono da considerarsi distinti.

Definizione 2.2. Due cammini chiusi sono **liberamente omotopici** se e solo se esiste una mappa continua $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}$ tale che:

$$h(t, 0) = f(t) \quad (2.1.2a)$$

$$h(t, 1) = g(t) \quad (2.1.2b)$$

$$h(0, s) = h(1, s) \forall s \in [0, 1] \quad (2.1.2c)$$

In altre parole, esiste una famiglia di loop (terza condizione) $h_s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{T} \mid h_s(t) = h(t, s)$ che interpola in maniera continua tra f e g al variare del parametro s . Il concetto di omotopia descrive, intuitivamente, la condizione di due cammini che possono essere deformati in maniera continua l'uno nell'altro (Figura 2.1). È possibile definire l'omotopia anche per cammini aperti "a estremi fissati", ma nel seguito avranno maggiore importanza quelli chiusi. Se f e g sono entrambi loop in x si parla di **omotopia basata** se valgono le (2.1.2) con la condizione che tutti i loop interpolanti siano in x :

$$h_s(0) = h_s(1) = x \forall s \in [0, 1] \quad (2.1.3)$$

È semplice dimostrare che *l'omotopia tra cammini (libera e basata) è una relazione di equivalenza*. Si userà dunque il simbolo " \sim " per indicare tale relazione. Per esempio, tutti i loop differenti per la sola parametrizzazione sono tra loro omotopici.

¹cfr. [11] e [4]. Si utilizza $[0, 1]$ per comodità ed uniformità; è possibile esporre la teoria usando un generico intervallo non vuoto $[a, b]$, ma è sempre possibile ricondurlo a $[0, 1]$ cambiando opportunamente la parametrizzazione.

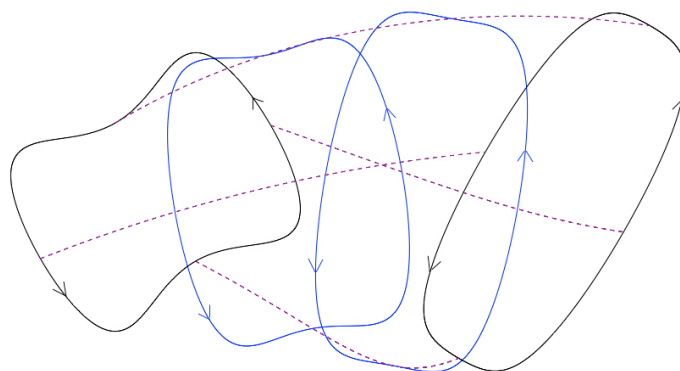


Figura 2.1: Omotopia di due loop.

È possibile introdurre alcune operazioni con i cammini.

Definizione 2.3. Il **prodotto** di due cammini f e g con l'estremo $f(1) = g(0)$ in comune è il cammino

$$(f \cdot g)(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t - 1) & \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases} \quad (2.1.4)$$

che percorre i due in successione, a "velocità" doppia (Figura 2.2).

Se i due cammini sono loop in x , anche il loro prodotto lo è.

Definizione 2.4. L'**inverso** di un cammino è semplicemente lo stesso cammino percorso a ritroso:

$$f^{-1}(t) = f(1 - t) \quad (2.1.5)$$

Definizione 2.5. Infine, il **cammino banale** (o **loop banale**) è quello che coincide con x :

$$e(t) \equiv x \quad \forall t \in [0, 1] \quad (2.1.6)$$

Queste definizioni, tuttavia, non sono sufficienti per dotare l'insieme dei loop in un punto della struttura di gruppo, principalmente perché la moltiplicazione tra loop non è associativa

$$f \cdot (g \cdot h) \neq (f \cdot g) \cdot h \quad (2.1.7)$$

Inoltre, non si riesce ad identificare l'elemento neutro: benché il loop banale sia un ovvio candidato, $e \cdot f \neq f \cdot e \neq f$, poiché entrambi coincidono con f percorso a velocità doppia. Infine, è intuitivo che percorrendo lo stesso cammino in un verso e poi nell'altro non si possa ottenere sempre lo stesso punto, a meno che il cammino non sia esso stesso un solo

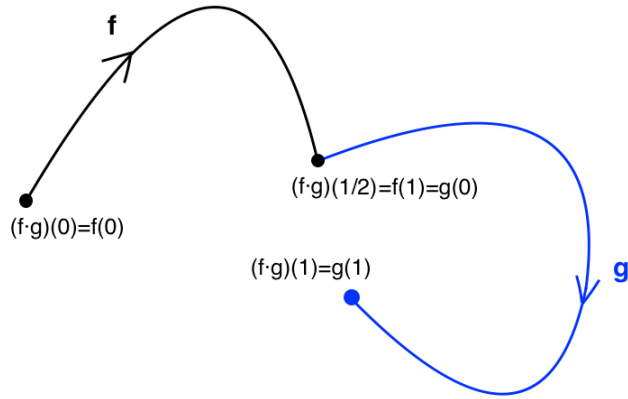


Figura 2.2: Prodotto di due cammini.

punto, dunque f^{-1} non è l'inverso di f : $f^{-1} \cdot f \neq f \cdot f^{-1} \neq e$. I cammini chiusi sono oggetti geometrici troppo "particolareggiati" da permettere l'introduzione di proprietà gruppali, poiché: per esempio, i prodotti $f \cdot (g \cdot h)$ e $(f \cdot g) \cdot h$ differiscono tra loro solamente per una diversa parametrizzazione. Come affermato poche righe fa, cammini con diversa parametrizzazione sono omotopici, dunque questi due prodotti potrebbero essere identificati per omotopia. Analogamente, $f \cdot f^{-1}$ può essere contratto ad un punto con la procedura illustrata in Figura 2.3 (e lo stesso si può fare con $f^{-1} \cdot f$). Questo dà l'idea della strada da percorrere: lavorare sull'insieme delle classi di equivalenza dei loop in x (l'insieme quoziente), che non distingue tra cammini omotopici. Infatti, non è difficile dimostrare che

Teorema 2.1.1. *L'insieme $\pi_1(\mathbb{T}, x)$ delle classi di omotopia dei loop in $x \in \mathbb{T}$ qualunque è un gruppo con le definizioni*

$$[f][g] = [f \cdot g] \quad (2.1.8a)$$

$$[e] \text{ è l'elemento neutro} \quad (2.1.8b)$$

$$[f]^{-1} = [f^{-1}] \quad (2.1.8c)$$

Tale gruppo è detto **gruppo fondamentale in x** , e contiene informazioni sulla "forma" globale dello spazio topologico \mathbb{T} .

Dimostrazione. (Abbozzo) La definizione di prodotto (2.1.8a) è coerente se e solo se $[f \cdot g]$ non dipende dalla scelta dei loop rappresentanti le classi di equivalenza $[f]$ e $[g]$, e in effetti è semplice dimostrare che se $f \sim f'$ e $g \sim g'$ allora $f \cdot g \sim f' \cdot g'$. Inoltre, la moltiplicazione gode della proprietà associativa: $[f]([g][h]) = [f][g \cdot h] = [f \cdot (g \cdot h)]$, $([f][g])[h] = [f \cdot g][h] = [(f \cdot g) \cdot h]$ ma $f \cdot (g \cdot h) \sim (f \cdot g) \cdot h$ e dunque $[f]([g][h]) = ([f][g])[h]$. La (2.1.8b) si dimostra notando che sia $e \cdot f$ sia $f \cdot e$ sono omotopiche a f (differiscono per

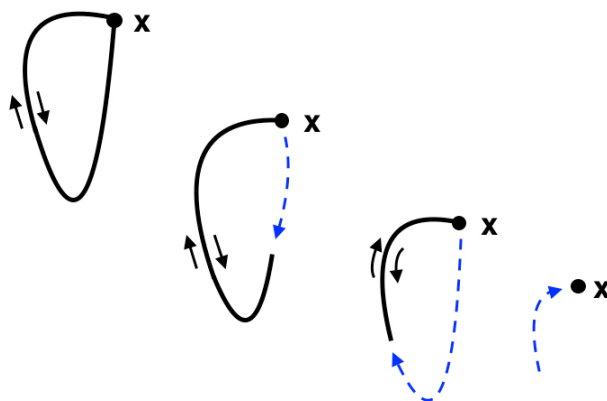


Figura 2.3: Omotopia di $f \cdot f^{-1}$ al loop banale.

una diversa parametrizzazione, come notato in precedenza), pertanto $[e][f] = [e \cdot f] = [f] = [f \cdot e] = [f][e]$. Infine, è già stato illustrato come $f \cdot f^{-1} \sim e \sim f^{-1} \cdot f$, dunque $[f][f^{-1}] = [f \cdot f^{-1}] = [e] = [f^{-1} \cdot f] = [f^{-1}][f]$, da cui la (2.1.8c). \square

L'elemento neutro $[e]$ di $\pi_1(\mathbb{T}, x)$ è solitamente indicato con 0. Non è difficile intuire la struttura dei gruppi fondamentali di alcuni spazi, sebbene in generale sia un compito difficoltoso dimostrarla.

Esempio 2.1. In \mathbb{R}^n è sempre possibile contrarre un cammino chiuso f al singolo punto di base x , mediante l'omotopia $h_s(t) = (1 - s)(f(t) - x) + x$, permessa dal fatto che \mathbb{R}^n è uno spazio vettoriale: pertanto tutti i loop sono omotopici al loop banale, cioè $\pi_1(\mathbb{R}^n, x) = \{0\} \forall x \in \mathbb{R}^n$. Analogamente ci si può convincere che il gruppo fondamentale di una sfera \mathbb{S}^2 è costituito dal solo elemento neutro, per qualunque punto base: $\pi_1(\mathbb{S}^2, x) = \{0\} \forall x \in \mathbb{S}^2$.

Esempio 2.2. Un esempio meno banale è costituito dal piano \mathbb{R}^2 con un "buco" compatto B (vedi Figura 2.4): i loop che non ci passano intorno sono contraibili al punto di base esattamente come in \mathbb{R}^2 , mentre quelli che lo avvolgono non lo possono fare, poiché dovrebbero passare attraverso il buco. Dunque, in $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus B, x)$ esiste almeno un elemento diverso da 0. In realtà, ne esistono infiniti altri: la presenza del buco permette di definire l'indice di avvolgimento ("winding number") di un cammino chiuso, che intuitivamente è il numero di giri che un loop fa intorno al buco, con un segno indicante il verso di percorrenza (scelto arbitrariamente uno dei due come positivo, normalmente quello antiorario). Si sceglie un punto p all'interno di B , e si calcola l'angolo che il vettore $f(t) - p$ spazza tra $t = 0$ e $t = 1$: esso è un multiplo dell'angolo giro, e il fattore moltiplicativo è precisamente l'indice di avvolgimento. Il fatto che i cammini non possano passare per B garantisce che $f(t) - p \neq 0 \forall t \in [0, 1]$, e perciò il winding number è sempre

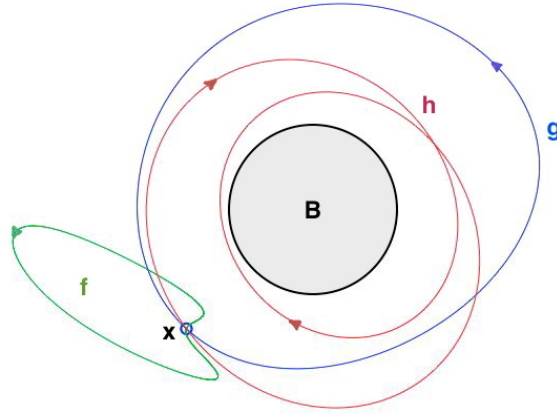


Figura 2.4: Piano con "buco". Il loop f ha indice di avvolgimento nullo, il loop g $+1$, il loop h -2 .

ben definito. Inoltre, si può dimostrare che non dipende dalla scelta del punto p , purché questo sia all'interno di B . Se il loop non contiene il buco, il suo indice di avvolgimento è nullo. Il winding number è un numero intero e non può variare in maniera continua, dunque un'omotopia può collegare solamente loop con lo stesso indice di avvolgimento. Ciò che si ottiene è che tutti i cammini con lo stesso winding number sono omotopiche, e in particolare loop con winding number nullo sono equivalenti al loop banale. Il indice di avvolgimento può essere utilizzato per etichettare gli elementi di $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus B, x)$, introducendo una corrispondenza con i numeri interi; tale applicazione è un omomorfismo tra gruppi, poiché è facile intuire che moltiplicando due loop con indice di avvolgimento n e m si ottiene un loop che si avvolge $n+m$ volte intorno al buco, dunque $[n][m] = [n+m]$ e il prodotto in $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus B, x)$ corrisponde all'operazione di gruppo in \mathbb{Z} . Inoltre, è piuttosto semplice comprendere che questa corrispondenza è in realtà biunivoca, e si può affermare che $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus B, x)$ è isomorfo a \mathbb{Z} :

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus B, x) \cong \mathbb{Z} \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus B \quad (2.1.9)$$

Per esempio, ciò vale per il piano privato dell'origine:

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, x) \cong \mathbb{Z} \quad \forall x \neq 0 \quad (2.1.10)$$

²Si può utilizzare questa corrispondenza per *definire* l'indice di avvolgimento. Esistono anche altre definizioni equivalenti.

e per il cerchio \mathbb{S}^1 , che non è ovviamente lo stesso tipo di insieme ma per il quale si può fare un discorso del tutto analogo:

$$\pi_1(\mathbb{S}^1, x) \cong \mathbb{Z} \quad \forall x \in \mathbb{S}^1 \quad (2.1.11)$$

Questi tre esempi di gruppi fondamentali non banali sono sostanzialmente equivalenti al gruppo dei numeri interi (rispetto all'operazione di somma), il che significa che si tratta di gruppi abeliani. In generale, esistono gruppi fondamentali non abeliani, come il piano con due "buchi" [11].

Nella definizione di $\pi_1(\mathbb{T}, x)$ è stato fissato il punto base x dei loop, ma in tutti gli esempi fatti il gruppo fondamentale non dipendeva dalla scelta di tale punto. Questo è un fatto del tutto generale. La connessione per cammini richiesta per \mathbb{T} permette di affermare che per qualunque coppia di punti x e y esiste un cammino aperto che li congiunge:

$$c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{T} \mid c(0) = x, c(1) = y \quad (2.1.12)$$

e il cammino inverso $c^{-1}(t) = c(1 - t)$ che li collega nell'ordine opposto. Dato un loop f in y , questo può essere trasformato in un loop in x percorrendo, nell'ordine, c , f e c^{-1} :

$$c \cdot f \cdot c^{-1} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{T} \mid (c \cdot f \cdot c^{-1})(0) = (c \cdot f \cdot c^{-1})(1) = x \quad (2.1.13)$$

Non sono state usate le parentesi perché non ha importanza se si usa $c \cdot (f \cdot c^{-1})$ o $(c \cdot f) \cdot c^{-1}$, siccome definiscono due loop omotopici; oppure, si potrebbe definire un prodotto generalizzato $(f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n)(t) = f_i(nt)$ se $t \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$, $i = 1, \dots, n$ (posto che $f_i(1) = f_{i+1}(0)$). In sostanza, non è rilevante la specifica parametrizzazione di $c \cdot f \cdot c^{-1}$, poiché in ogni caso si può costruire il **cambio di punto base**

$$\beta_c : \pi_1(\mathbb{T}, y) \rightarrow \pi_1(\mathbb{T}, x) \mid \beta_c[f]_y = [c \cdot f \cdot c^{-1}]_x \quad (2.1.14)$$

nella quale i pedici identificano il punto di base. Il risultato più importante è

Teorema 2.1.2. *La mappa $\beta_c : \pi_1(\mathbb{T}, y) \rightarrow \pi_1(\mathbb{T}, x)$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Innanzitutto, β_c è un omomorfismo, cioè preserva l'operazione di gruppo: $\beta_c([f \cdot g]_y) = [c \cdot f \cdot g \cdot c^{-1}]_x = [c \cdot f \cdot c^{-1} \cdot c \cdot g \cdot c^{-1}]_x = \beta_c[f]_y \beta_c[g]_y$, dove si è usato il fatto che $c \cdot c^{-1}$ è un loop in x omotopico al loop banale. Inoltre è una biiezione, poiché $\beta_{c^{-1}}$ è la mappa inversa: $\beta_c \beta_{c^{-1}}[f]_x = \beta_c[c^{-1} \cdot f \cdot c]_y = [c \cdot c^{-1} \cdot f \cdot c \cdot c^{-1}]_x = [c \cdot c^{-1}]_x [f]_x [c \cdot c^{-1}]_x = [e]_x [f]_x [e]_x = [f]_x$, e si dimostra analogamente che $\beta_{c^{-1}} \beta_c[f]_y = [f]_y$. \square

Pertanto tutti i gruppi fondamentali $\pi_1(\mathbb{T}, x)$, al variare di $x \in \mathbb{T}$ sono isomorfi tra loro, e si può omettere la specificazione del punto base definendo un singolo gruppo astratto $\pi_1(\mathbb{T})$ univocamente associato allo spazio topologico \mathbb{T} , che è chiamato **primo gruppo di omotopia** o **gruppo fondamentale** di \mathbb{T} . Tornando agli esempi fatti, si ha che $\pi_1(\mathbb{R}^n) = \pi_1(\mathbb{S}^2) = \{0\}$ e $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$. Si ricorda che questo è

possibile solo se l'insieme è connesso per archi.

Definizione 2.6. Uno spazio topologico \mathbb{T} è **semplicemente connesso** se il suo primo gruppo di omotopia coincide con il solo elemento neutro, $\pi_1(\mathbb{T}) = \{0\}$.

In altre parole, un insieme è semplicemente connesso se qualunque cammino chiuso in esso può essere contratto ad un punto. Per quanto detto poche righe fa, \mathbb{R}^n e la sfera \mathbb{S}^2 sono semplicemente connessi, mentre $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e \mathbb{S}^1 non lo sono. È interessante notare che $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è semplicemente connesso se $n \geq 3$, poiché in tre o più dimensioni un loop può contrarsi al suo punto base "aggirando" l'origine; questo è un esempio delle peculiarità geometriche che caratterizzano gli spazi a bassa dimensione.

Per stabilire l'isomorfismo tra i gruppi fondamentali in diversi punti di base si è scelto arbitrariamente un cammino c che li congiungesse, e ci si può domandare se la biiezione trovata dipenda da questa scelta, cioè se l'isomorfismo sia canonico. Il risultato principale è che

Teorema 2.1.3. *L'isomorfismo tra gruppi fondamentali in diversi punti è canonico se e solo se $\pi_1(\mathbb{T})$ è abeliano.*

Nel caso di gruppi di omotopia non abeliani si può ancora avere un isomorfismo canonico, ma non direttamente tra i gruppi fondamentali [11].

2.2 Il primo gruppo di omotopia di \mathbb{Q}_N : \mathbb{S}_N e \mathbb{B}_N

In generale, lo spazio delle configurazioni di N di particelle indistinguibili ha una struttura geometrica non banale (equazione 1.3.4), e ci si può aspettare che non sia semplicemente connesso. Infatti, si era già accennato nel Capitolo 1 che nello spazio \mathbb{Q}_2 per $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2$ i cammini che circondano il vertice non possono essere deformati con continuità in quelli che non lo fanno: in altre parole, questo spazio non è semplicemente connesso. Analogamente, ci si può convincere che nello spazio $\Omega_2 \cong \mathbb{R}\mathbb{P}^2$ non è possibile contrarre ad un punto cammini f che colleghino una coppia di punti opposti, mentre è possibile farlo percorrendoli due volte (cioè $f^2 \sim e$). La teoria quantistica costruita su \mathbb{Q}_N dipende in maniera essenziale dal primo gruppo di omotopia di questo spazio, come si vedrà nel Capitolo successivo, pertanto si descriverà $\pi_1(\mathbb{Q}_N)$ in questo paragrafo.

Come si è visto nel primo Capitolo, nella trattazione dei sistemi di particelle indistinguibili ha grande rilevanza il gruppo delle permutazioni di N oggetti, \mathbb{S}_N (detto gruppo simmetrico), sia nella trattazione standard che in quella alternativa che si sta descrivendo. Questo, ovviamente, perché la caratteristica fondamentale delle particelle non distinguibili è la possibilità di "scambiarle" di posto (ovvero scambiarne le etichette) senza modificare la configurazione del sistema. Per chiarezza, si richiamano qui le proprietà fondamentali di \mathbb{S}_N . Una permutazione è una biiezione dell'insieme $J_N = \{1, 2, \dots, N\} \subset \mathbb{N}$

in se stesso. L'insieme \mathbb{S}_N di tutte le permutazioni in J_N è dotato della struttura di gruppo, con l'operazione interna costituita dalla composizione di funzioni, e l'elemento neutro dato dall'identità $e(k) = k \forall k \in J_N$. Si tratta di un gruppo finito, contenente $N!$ elementi, e per $N \geq 3$ non è abeliano. Una **trasposizione** τ è una permutazione che scambia solamente due elementi di J_N , cioè che differisce dall'identità solo in in due punti. Si può dimostrare [9] che *ogni permutazione si può esprimere come prodotto di trasposizioni* e che, sebbene esistano infinite scomposizioni di questo genere, la parità del numero di trasposizioni necessarie è indipendente dalla scomposizione scelta: è un numero caratteristico della permutazione, chiamato parità della permutazione. Dunque, il gruppo può essere generato a partire da un opportuno insieme di trasposizioni, permettendo una costruzione interessante di \mathbb{S}_N . Si può sempre immaginare una permutazione come un'operazione che cambia l'ordine in un dato gruppo (finito) di oggetti, etichettandoli con i naturali in J_N . Se si indica con σ_i la trasposizione che scambia l' i -esimo oggetto con l' $(i+1)$ -esimo, allora è semplice dimostrare che:

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad (2.2.1a)$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ se } |i - j| \geq 2 \quad (2.2.1b)$$

$$\sigma_i^2 = e \quad (2.2.1c)$$

La seconda proprietà è esprimibile dicendo che le trasposizioni di oggetti consecutivi commutano se le coppie che cambiano l'ordine non hanno elementi in comune; la terza è equivalente ad affermare che una trasposizione è l'inversa di se stessa, ed è una proprietà caratteristica delle trasposizioni. Il gruppo \mathbb{S}_N è definibile come il gruppo generato da N generatori $\{e, \sigma_1, \dots, \sigma_{N-1}\}$, comprensivo dell'identità e , che soddisfino le (2.2.1), cioè è l'insieme che si ottiene moltiplicando tra loro un numero finito di generatori e dei loro inversi (che, in questo caso, coincidono con i generatori stessi). Questa modalità di costruzione dei gruppi, a partire da un insieme di elementi definiti astrattamente da una serie di relazioni, è detta **presentazione** di un gruppo, e si indica con

$$\mathbb{S}_N = \langle e, \sigma_1, \dots, \sigma_{N-1} \mid \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ se } |i - j| \geq 2, \sigma_i^2 = e \rangle \quad (2.2.2)$$

L'insieme finito di generatori (e dei loro inversi) che si adopera è in generale non unico, e l'insieme che si ottiene è solitamente infinito, ma nel caso delle permutazioni la particolare proprietà (2.2.1c) delle trasposizioni rende \mathbb{S}_N un gruppo finito.

Se dalla presentazione data si rimuove la condizione (2.2.1c) si ottiene un gruppo molto diverso: il **gruppo delle trecce a N stringhe**

$$\mathbb{B}_N = \langle e, \sigma_1, \dots, \sigma_{N-1} \mid \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ se } |i - j| \geq 2 \rangle \quad (2.2.3)$$

Può essere visualizzato con la costruzione seguente, illustrata in Figura 2.5 per $N = 3$: si hanno $2N$ punti fissi disposti in file parallele, e N fili elastici per collegarli in

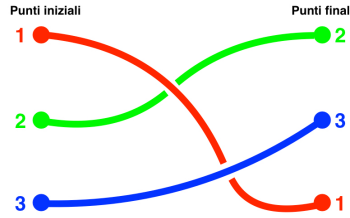


Figura 2.5: Rappresentazione grafica di una treccia a 3 stringhe.

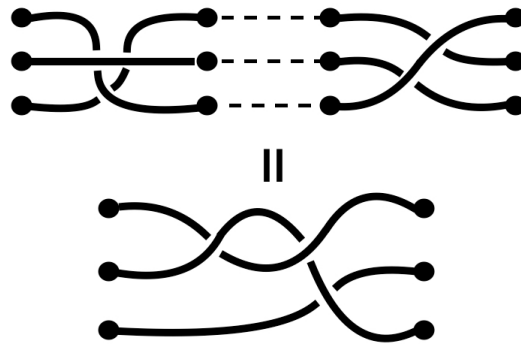


Figura 2.6: Rappresentazione grafica del prodotto di due treccie a 3 stringhe.

corrispondenza biunivoca. Ciascun elemento di \mathbb{B}_N , detto treccia, è un modo di comporre questo collegamento, considerando che:

1. i fili possono essere intrecciati ma non attraversarsi, e devono muoversi sempre verso i punti finali;
2. l'ordine in cui vengono sovrapposti conta: se il filo i passa sopra il filo j si ha una treccia diversa da quella che si otterrebbe con il filo j sopra il filo i ;
3. treccie che si ottengono l'una dall'altra deformando gli elastici senza che si attraversino sono lo stesso elemento (si formalizza come omotopia tra cammini aperti).

L'operazione di composizione tra treccie si può visualizzare affiancando i due diagrammi corrispondenti ai due elementi (nello stesso ordine), collegando i punti finali del primo con gli iniziali del secondo e deformando "omotopicamente" le stringhe fino alla configurazione standard, se necessario (si veda la Figura 2.6). Con questa costruzione è immediato vedere che l'identità è rappresentata dal diagramma "non intrecciato", e che l'inverso di una treccia è la treccia che si ottiene scambiando i punti iniziali con quel-

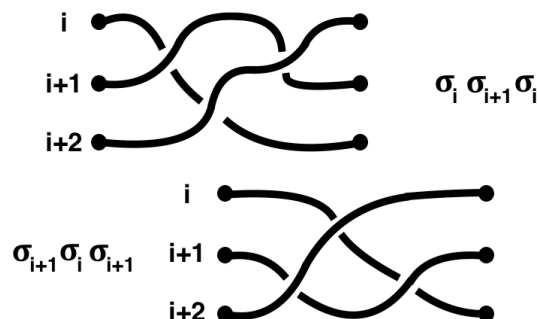


Figura 2.7: Verifica grafica della proprietà $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$.

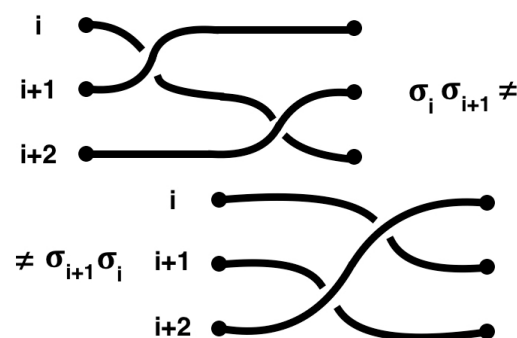


Figura 2.8: Verifica grafica che nel gruppo delle trecce $\sigma_i \sigma_{i+1} \neq \sigma_{i+1} \sigma_i$.

li finali, mantenendo le sovrapposizioni invariate³. Infine, i generatori possono essere identificati con le trecce che scambiano due punti adiacenti, con il medesimo ordine di sovrapposizione: per esempio, σ_i può essere definito dalla treccia che scambia i punti i e $i+1$ con il filo i -esimo che passa sotto l'altro. Allora, con semplici diagrammi come quelli in Figure 2.7 e 2.8 si può osservare come le proprietà (2.2.1a) e (2.2.1b) dei generatori siano soddisfatte, mentre la (2.2.1c) no (Figura 2.9). Infatti, l'inverso σ_i^{-1} del generatore i -esimo è rappresentato dalla treccia che scambia gli stessi punti i e $i+1$, ma con il filo i -esimo che passa *sopra* l'altro. Il gruppo delle trecce è un gruppo infinito, al contrario di quello delle permutazioni. È facile intuire il perché: l'assenza del requisito (2.2.1c) fa sì che componendo n volte un generatore con se stesso le due stringhe si "arrotolino" l'una intorno all'altra, e un diagramma può contenere un numero arbitrario di questi intrecci.

³Si può vedere quest'operazione come una riflessione del diagramma rispetto a un asse passante per il suo centro e parallelo alle file di punti. Ovviamente, questo sottintende che si dispongano le sovrapposizioni in maniera "simmetrica" rispetto a tale asse.

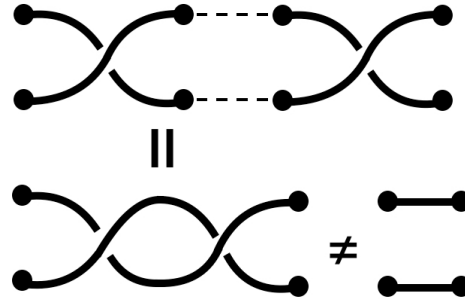


Figura 2.9: Verifica grafica che nel gruppo delle treccie $\sigma_i^2 \neq e$.

In altre parole, gli elementi σ_i^n con $n \in \mathbb{N}$ (o \mathbb{Z}) sono tutti distinti. Infine, dato un diagramma, è semplice scrivere la treccia corrispondente in termini dei generatori: si scorre il diagramma dai punti iniziali a quelli finali e nel verso crescente della numerazione dei punti, scrivendo un termine σ_i se si incontra una sovrapposizione in cui il filo i -esimo passa sotto il successivo, o un termine σ_i^{-1} se vi passa sopra. Nel Capitolo successivo si introdurrà un altro modo di visualizzare il gruppo delle treccie, in un contesto più fisico. Ora è possibile enunciare il teorema più importante di questo Capitolo. Si supponga di avere $N \geq 2$ particelle indistinguibili il cui spazio delle configurazioni individuale è $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$: allora lo spazio delle configurazioni del sistema è (equazione 1.3.4) $\mathbb{Q}_N = (\mathbb{R}^{dN}/\mathbb{S}_N) \setminus \Delta$. Allora, si può affermare che

Teorema 2.2.1.

$$\pi_1(\mathbb{Q}_N) = \mathbb{B}_N \text{ se } d = 2 \quad (2.2.4a)$$

$$\pi_1(\mathbb{Q}_N) = \mathbb{S}_N \text{ se } d \geq 3 \quad (2.2.4b)$$

Dimostrazione. (Abbozzo) La dimostrazione è complessa, si cercherà di dare un'idea intuitiva del perché vi sia questa differenza. Si consideri una traiettoria corrispondente allo scambio delle particelle i e $i+1$ nello spazio \mathbb{X}^N : si tratta di un cammino aperto che congiunge il punto $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_N)$ con $\tau_i(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_N)$, essendo τ_i un generatore di \mathbb{S}_N . Trasformando \mathbb{X}^N in \mathbb{Q}_N , il punto finale viene identificato con quello iniziale, e il cammino aperto viene mappato in un loop in \mathbf{x} (inteso come elemento di \mathbb{Q}_N). In questo senso, i cammini chiusi in \mathbb{Q}_N corrispondono allo scambio delle posizioni di particelle, e lo stesso vale per i generatori σ_i di $\pi_1(\mathbb{Q}_N)$, che rappresentano lo scambio prescindendo dai dettagli "cinematici" di come avvenga (poiché sono classi di equivalenza di loop omotopici). σ_i scambia le coordinate delle particelle i e $i+1$. La dimostrazione che questi oggetti soddisfano la (2.2.1a) e la (2.2.1b) non riveste particolare interesse, ovviamente la questione più importante riguarda la validità della (2.2.1c). Si considerino due rappresentanti dei loop σ_i e σ_i^{-1} "visti" ponendo le particelle i e $i+1$

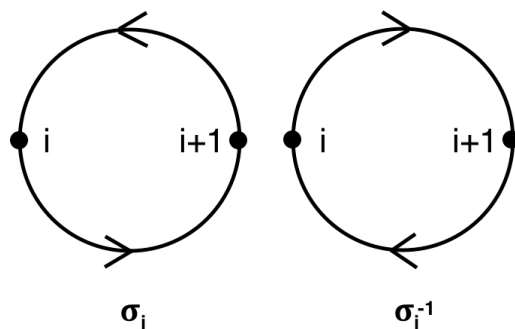


Figura 2.10: I loop utilizzati nel Teorema 2.2.1, corrispondenti ai due modi possibili di scambiare le particelle i e $i + 1$ in un piano che le contiene.

nello stesso spazio delle configurazioni \mathbb{R}^d : si ottengono cammini distinti come in Figura 2.10, che sono stati disegnati in un piano passante per le due particelle. Questo piano è ovviamente obbligato se $d = 2$, mentre può essere scelto per comodità in dimensioni maggiori. Se $d \geq 3$ i due cammini sono omotopici, poiché è possibile deformarli con continuità l'uno nell'altro ruotando il piano intorno all'asse congiungente le particelle. Perciò $\sigma_i \sim \sigma_i^{-1}$, che implica $\sigma_i^2 \sim e$. Perciò la (2.2.1c) è soddisfatta e $\pi_1(\mathbb{Q}_N) = \mathbb{S}_N$. Invece, se $d = 2$, questa rotazione non può essere eseguita, σ_i e σ_i^{-1} non sono omotopici e la (2.2.1c) non vale: il gruppo generato è \mathbb{B}_N . \square

Capitolo 3

Meccanica quantistica in spazi non semplicemente connessi

Nei due Capitoli precedenti si sono poste le basi per lo sviluppo di una teoria quantistica in rappresentazione di Schrödinger sullo spazio delle configurazioni \mathbb{Q}_N , per particelle a spin nullo. Si noti che nei postulati fondamentali della meccanica quantistica non vi è alcun riferimento all'indistinguibilità o meno delle particelle identiche: l'impossibilità di distinguere particelle dello stesso tipo l'una dall'altra è un dato essenzialmente sperimentale, che deve essere in qualche modo incluso nella teoria. Questo viene fatto imponendo una qualche forma di "invarianza" quando si "scambiano" le grandezze estrinseche delle particelle (posizione, spin, ecc.), ovvero le etichette scelte arbitrariamente per descrivere la configurazione del sistema. Il metodo tradizionale opera questa procedura sui vettori di stato, ma ha il difetto di lasciare nebuloso il concetto di scambio. La via che si sta seguendo nel presente testo introduce l'identificazione direttamente al livello di ciò che misurano gli esperimenti, cioè la posizione stessa delle particelle.

3.1 La fase della funzione d'onda

La funzione d'onda di un sistema di N particelle identiche a spin nullo è una funzione (complessa) in $\mathcal{L}^2(\mathbb{Q}_N)$. In generale, essa deve soddisfare determinate condizioni al contorno, che corrispondono alla determinazione del dominio in cui gli operatori corrispondenti alle principali osservabili sono autoaggiunti, l'hamiltoniano in primis, poiché esso determina l'evoluzione temporale del sistema. Come affermato nel Capitolo 2, lo spazio delle configurazioni del sistema non è semplicemente connesso, e questo complica la ricerca delle suddette condizioni al contorno, poiché *in uno spazio non semplicemente connesso la fase delle funzioni d'onda può essere polidroma*, rendendo ambigua la funzione d'onda stessa. È noto che operando una trasformazione unitaria sullo spazio di

Hilbert dei vettori di stato

$$|\psi\rangle = \hat{U}|\psi\rangle_U \iff |\psi\rangle_U = \hat{U}^+|\psi\rangle \quad (3.1.1a)$$

$$\hat{A} = \hat{U}\hat{A}_U\hat{U}^+ \iff \hat{A}_U = \hat{U}^+\hat{A}\hat{U} \quad (3.1.1b)$$

tutte le grandezze misurabili (probabilità, valori di aspettazione, ecc.) rimangono invariate, poiché esprimibili in funzione di prodotti scalari. L'operatore \hat{U} può, in generale, essere una funzione dell'operatore di posizione $\hat{\mathbf{q}}$, oppure essere un rappresentante di una famiglia di operatori unitari parametrizzata dal tempo, ma non servirà includere anche questa dipendenza. Gli operatori con questa caratteristica possono essere scritti nella forma $\hat{U} = e^{i\alpha(\hat{\mathbf{q}})}$, dove α è una funzione reale sufficientemente regolare delle coordinate. In rappresentazione di Schrödinger, per particelle a spin nullo, questo si traduce nella possibilità di passare dalle funzione d'onda $\phi(\mathbf{x})$ alle $\phi'(\mathbf{x}) = e^{-i\alpha(\mathbf{x})}\phi(\mathbf{x})$ senza alterare lo stato descritto dalle stesse. Contemporaneamente la (3.1.1b) lascia invariati gli operatori che sono funzioni della sola posizione, mentre gli operatori funzioni dell'impulso vengono modificati: ad esempio $\hat{\mathbf{p}}' = -i\hbar\nabla + \hbar\nabla\alpha$, che equivale all'introduzione di un potenziale vettore $\mathbf{A} = -\frac{\hbar}{q}\nabla\alpha$; tuttavia, questo non corrisponde a nessuna interazione fisica, poiché il campo magnetico $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ è nullo (se α non è singolare). Pertanto, si è soliti affermare che la funzione d'onda è indeterminata a meno di una fase, cioè a meno della moltiplicazione per una funzione delle coordinate a valori in $U(1)$. Non è ovvio se questa funzione possa essere fissata globalmente in maniera non ambigua, cioè come una funzione monodroma, e la conclusione cui si giunge [14] è che *questo è garantito solo se lo spazio delle configurazioni è semplicemente connesso*. Come controesempio, si consideri l'effetto Aharonov-Bohm [1], in cui la presenza di un solenoide impenetrabile, che limita pertanto lo spazio delle configurazioni impedendo la semplice connessione, fa sì che la fase della funzione d'onda sia polidroma.

Come si è visto nel Capitolo 1, l'indeterminazione della fase della funzione d'onda svolge un ruolo essenziale nella trattazione standard dei sistemi di particelle indistinguibili, diventando parte della "condizione al contorno" rappresentata dalla simmetria o antisimmetria delle funzioni d'onda. In questo contesto, il risultato sulla monodromia della fase non provoca problemi, poiché viene condotta sullo spazio delle configurazioni $\mathbb{X}^N = \mathbb{R}^{dN}$, che è semplicemente connesso. Invece \mathbb{Q}_N non è semplicemente connesso (Teorema 2.2.1) e di conseguenza la funzione d'onda può essere polidroma: questa è la complicazione teorica che si affronterà nel prossimo paragrafo. Siccome si tratta di un problema generale, non necessariamente legato ai sistema di particelle indistinguibili, nel seguito, se non sarà specificato diversamente, si lavorerà su un generico spazio delle configurazioni \mathbb{Q} non semplicemente connesso, che potrebbe essere riferito anche a una singola particella.

3.2 Meccanica quantistica sul rivestimento universale

Come si costruisce la teoria quantistica se lo spazio delle configurazioni non è semplicemente connesso? È noto come si fa se $\pi_1(\mathbb{Q}) = 0$: è possibile "estendere" \mathbb{Q} in modo da soddisfare questa condizione? La risposta è sì.

Definizione 3.1. Il **rivestimento universale** di uno spazio topologico \mathbb{Q} è costituito da un insieme $\tilde{\mathbb{Q}}$ e una mappa $p : \tilde{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Q}$ che soddisfano¹:

1. Esiste un ricoprimento aperto di \mathbb{Q} tale che, per ogni aperto U scelto in esso, la sua controimmagine $p^{-1}(U)$ è l'unione di aperti disgiunti di $\tilde{\mathbb{Q}}$, e che la restrizione di p a qualunque di essi sia un omeomorfismo² in U .
2. $\tilde{\mathbb{Q}}$ è semplicemente connesso: $\pi_1(\tilde{\mathbb{Q}}) = 0$.

Se è soddisfatta solamente la prima proprietà si parla semplicemente di rivestimento. Si dice anche che $\tilde{\mathbb{Q}}$ riveste \mathbb{Q} .

Il rivestimento universale di un insieme è unico, a meno di isomorfismi [11]. I rivestimenti sono una tecnica standard per il calcolo di proprietà topologiche, per la particolare corrispondenza che la "proiezione" p istituisce tra i due spazi. Un esempio tipico è l'insieme \mathbb{S}^1 che, come illustrato nel Capitolo 2, non è un insieme semplicemente connesso, in quanto $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$; il suo rivestimento universale è \mathbb{R} , che invece è semplicemente connesso. La proiezione p dipende da come si rappresenta \mathbb{S}^1 : se lo si intende come l'intervallo $[0, 1]$ con gli estremi identificati, allora una possibile mappa è $p : x \mapsto x - [x]$; se lo si identifica con $U(1)$, allora $p : x \mapsto e^{i2\pi x}$. Il rivestimento universale gode delle seguenti proprietà ([11]):

1. Esiste una azione libera di $\pi_1(\mathbb{Q})$ su $\tilde{\mathbb{Q}}$ che permuta le controimmagini $\tilde{q} \in p^{-1}(q)$ di ogni $q \in \mathbb{Q}$; l'azione di un gruppo \mathbb{G} è detta libera se
 - è transitiva: $\forall x, y \in \tilde{\mathbb{Q}} \exists g \in \mathbb{G} \mid y = gx$;
 - è effettiva: $gx = x \iff g = e \forall x \in \tilde{\mathbb{Q}}$;
2. $\tilde{\mathbb{Q}}$ può essere decomposto nell'unione di un insieme di domini fondamentali, ognuno dei quali è isomorfo a \mathbb{Q} , e contiene una e una sola controimmagine di ciascun punto di \mathbb{Q} . L'azione di $\pi_1(\mathbb{Q})$ mappa i domini tra loro.

¹[4, 12, 11]; il secondo autore aggiunge anche la proprietà di suriettività per p .

²Se \mathbb{Q} è una varietà differenziabile, si può dotare anche il suo rivestimento di una struttura analoga, e rendere p un diffeomorfismo.

La seconda proprietà permette di visualizzare il rivestimento universale come una collezione di "copie" dell'insieme rivestito: per esempio, \mathbb{R} è costituito dall'unione infinita dei domini fondamentali $[n, n + 1[$, $n \in \mathbb{Z}$, ognuno dei quali viene proiettato in \mathbb{S}^1 . Come si nota, ad uno stesso punto $q \in \mathbb{Q}$ possono corrispondere un numero finito o infinito di punti nel rivestimento; la cardinalità di $p^{-1}(q)$, però, non dipende da q . Un risultato utile, che si riporta senza dimostrazione³, è il

Teorema 3.2.1 (del sollevamento dell'omotopia). *Sia γ un loop in $q \in \mathbb{Q}$, $[\gamma] \in \pi_1(\mathbb{Q}, q)$ la classe di omotopia corrispondente, e sia $\tilde{q} \in p^{-1}(q)$, scelta arbitrariamente. Allora γ si solleva a una curva $\tilde{\gamma}$ in $\tilde{\mathbb{Q}}$ che congiunge \tilde{q} con $\tilde{q}' = [\gamma]\tilde{q}$, cioè il punto che si ottiene dall'azione di $[\gamma]$ su \tilde{q} .*

A meno che γ non sia omotopicamente equivalente al loop banale, \tilde{q}' differirà da \tilde{q} (si troverà in un diverso dominio fondamentale) e $\tilde{\gamma}$ sarà un cammino aperto. Solo se $\gamma \in 0$ il loop viene sollevato in un loop. Inoltre, tutti i cammini congiungenti \tilde{q} e \tilde{q}' vengono proiettati da p in loop appartenenti a $[\gamma]$.

In generale, dato lo spazio delle configurazioni \mathbb{Q} con gruppo fondamentale non banale, possiamo costruire uno spazio semplicemente connesso $\tilde{\mathbb{Q}}$ che lo riveste, i cui punti sono opportunamente proiettabili su \mathbb{Q} . È allora possibile costruire una meccanica quantistica su $\tilde{\mathbb{Q}}$ nella maniera ordinaria, poiché la sua semplice connessione garantisce che le funzioni d'onda siano a un solo valore: si avrà allora che lo stato del sistema è descritto da funzioni d'onda $\tilde{\Psi} \in \mathcal{L}^2(\tilde{\mathbb{Q}})$ che evolvono secondo l'equazione di Schrödinger $i\hbar \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t} = \hat{H} \tilde{\Psi}$. L'hamiltoniano \hat{H} è ottenuto "sollevando" quello su \mathbb{Q} ad un operatore simmetrico su $\tilde{\mathbb{Q}}$, così come gli operatori che rappresentano osservabili, ed è possibile farlo senza ambiguità poiché si tratta di operatori locali (tipicamente differenziali). A questo schema manca un ingrediente: quali sono le condizioni al contorno che devono essere soddisfatte dalle funzioni d'onda $\tilde{\Psi}(\tilde{q})$? Esse sono un'essenziale specificazione del dominio di autoaggiunzione delle osservabili più importanti, e sono determinate dal fatto che lo spazio delle configurazioni reale del sistema è \mathbb{Q} e non il suo rivestimento universale: la meccanica quantistica su $\tilde{\mathbb{Q}}$ deve poter essere "proiettata" in una meccanica quantistica su \mathbb{Q} . Come già rilevato, in generale a un punto in \mathbb{Q} corrisponde più di un punto in $\tilde{\mathbb{Q}}$, ma ogni controimmagine $\tilde{q} \in p^{-1}(q)$ di q corrisponde alla stessa configurazione: la funzione d'onda $\tilde{\Psi}(\tilde{q})$ ha un senso fisico se e solo se $|\tilde{\Psi}(\tilde{q})|^2$ non dipende dalla scelta di \tilde{q} , ma solamente da $q = p(\tilde{q})$. Questo significa che, se $\tilde{q}, \tilde{q}' \in p^{-1}(q)$, $\tilde{\Psi}(\tilde{q})$ e $\tilde{\Psi}(\tilde{q}')$ possono differire solamente per una fase. Le funzioni d'onda su $\tilde{\mathbb{Q}}$ sono a un solo valore, pertanto questa fase non può dipendere dal cammino che si segue per passare da un punto all'altro. Per quanto detto nel Teorema di sollevamento dell'omotopia, due punti che sono proiettati in q si ottengono l'uno dall'altro mediante l'azione della classe di omotopia di un loop in \mathbb{Q} con base q , e ogni cammino congiungente le due controimmagini si proietta in un loop nella medesima classe. Dunque, l'unico oggetto dal quale la fase può dipendere è l'elemento

³La si può trovare in [4]

del gruppo di omotopia $\pi_1(\mathbb{Q}, q)$:

Teorema 3.2.2. *Le funzioni d'onda definite sul rivestimento universale di \mathbb{Q} devono soddisfare la condizione al contorno*

$$\tilde{\Psi}([\gamma]\tilde{q}) = a([\gamma])\tilde{\Psi}(\tilde{q}) \quad \forall \tilde{q} \in \tilde{\mathbb{Q}}, \forall [\gamma] \in \pi_1(\mathbb{Q}) \quad (3.2.1)$$

con $a([\gamma]) \in U(1)$.

La meccanica quantistica su $\tilde{\mathbb{Q}}$ è allora chiamata **proiettabile**. La monodromia di $\tilde{\Psi}(\tilde{q})$ impone restrizioni ulteriori sulla mappa a : $\tilde{\Psi}([\gamma][\gamma']\tilde{q}) = a([\gamma])a([\gamma'])\tilde{\Psi}(\tilde{q})$, ma $\tilde{\Psi}([\gamma][\gamma']\tilde{q}) = \tilde{\Psi}([\gamma \cdot \gamma']\tilde{q}) = a([\gamma \cdot \gamma'])\tilde{\Psi}(\tilde{q})$, e allora deve essere

$$a([\gamma \cdot \gamma']) = a([\gamma])a([\gamma']) \quad (3.2.2)$$

e si può affermare che

Teorema 3.2.3. *La mappa*

$$a : \pi_1(\mathbb{Q}) \rightarrow U(1) \mid [\gamma] \mapsto a([\gamma]) \quad (3.2.3)$$

è una rappresentazione unitaria a una dimensione del gruppo fondamentale di \mathbb{Q} , e viene anche detta **carattere** di $\pi_1(\mathbb{Q})$ ⁴.

Si noti che il gruppo unitario $U(1)$ è abeliano, mentre in generale $\pi_1(\mathbb{Q})$ non lo è; le rappresentazioni unitarie a dimensione più alta possono essere non abeliane, e compaiono se la funzione d'onda è a più componenti, cioè in caso di gradi di libertà interni e discreti, come lo spin.

Riassumendo: si è stabilito il criterio (3.2.1) che rende $|\tilde{\Psi}(\tilde{q})|^2$ una funzione del solo punto $q = p(\tilde{q})$, identificabile con $|\Psi(q)|^2$. Cosa si può dire di $\Psi(q)$? Come si "proietta" una funzione d'onda su $\tilde{\mathbb{Q}}$ in una funzione d'onda su \mathbb{Q} ? Come affermato in precedenza, $\tilde{\mathbb{Q}}$ contiene tante "copie" di \mathbb{Q} isomorfe ad esso, i domini fondamentali; la funzione $\tilde{\Psi}(\tilde{q})$ su di uno qualsiasi di essi dà essenzialmente una funzione su \mathbb{Q} , letta in coordinate differenti. Si può scegliere un dominio fondamentale \mathcal{F}_1 e operare una restrizione di $\tilde{\Psi}(\tilde{q})$ su di esso: poiché esiste l'isomorfismo $\tilde{h}_1 : \mathbb{Q} \rightarrow \mathcal{F}_1 \mid q \mapsto \tilde{q}$, è ben definita

$$\Psi(q) = \tilde{\Psi}(\tilde{h}_1(q)), \quad q \in \mathbb{Q} \quad (3.2.4)$$

Notare che l'isomorfismo usato è proprio del dominio \mathcal{F}_1 e solo di esso. Sebbene la definizione data (3.2.4) sembri univoca, essa è valida solo finché l'argomento di $\tilde{\Psi}$ rimane

⁴Per conoscere i caratteri $a([\gamma])$ non è strettamente necessario determinare il primo gruppo di omotopia, un compito generalmente arduo: basta il primo gruppo di omologia a coefficienti interi $\mathbb{H}_1(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$, che è solitamente più facile da ricavare. È definito come il gruppo quoziente $\pi_1/[\pi_1, \pi_1]$, noto anche come abelianizzazione di π_1 . Dato un gruppo G , $[G, G]$ è il sottogruppo dei commutatori, definito come il minimo sottogruppo contenente tutti gli elementi nella forma di "commutatori" $gh(hg)^{-1}$. I caratteri sono anche rappresentazioni unitarie di $\mathbb{H}_1(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$.

nel dominio fondamentale scelto, ed è facile uscirne: in base al Teorema di sollevamento dell'omotopia, se in \mathbb{Q} si compie un loop γ basato in q , la controimmagine $\tilde{q} = \tilde{h}_1(q)$ nel dominio \mathcal{F}_1 viene mandata lungo un cammino aperto fino al punto $[\gamma]\tilde{q}$, che appartiene a un altro dominio \mathcal{F}_2 (ciascun dominio contiene una e una sola preimmagine di ogni punto di \mathbb{Q}). In questo nuovo dominio vi è un diverso isomorfismo $\tilde{h}_2 : \mathbb{Q} \rightarrow \mathcal{F}_2$, e si può ripetere la "proiezione" (3.2.4) utilizzandolo: si ottiene lo stesso punto $q \in \mathbb{Q}$, ma il valore della funzione d'onda proiettata Ψ non è lo stesso. Infatti, $\tilde{\Psi}([\gamma]\tilde{q} \in \mathcal{F}_2) = a([\gamma])\tilde{\Psi}(\tilde{q} \in \mathcal{F}_1)$, in base alla (3.2.1), e lo stesso vale per $\Psi(q)$ dopo che si è compiuto il loop. La conclusione è che *se lo spazio delle configurazioni non è semplicemente connesso, le funzioni d'onda sono polidrome: compiendo un cammino chiuso in \mathbb{Q} , le funzioni devono essere moltiplicate per il caratteri del primo gruppo di omotopia $\pi_1(\mathbb{Q})$ corrispondenti alla classe di omotopia del loop*. In simboli,

$$\Psi(q) \xrightarrow{\gamma} a([\gamma])\Psi(q) \quad (3.2.5)$$

In altre parole, la meccanica quantistica sul rivestimento universale definisce un'azione di $\pi_1(\mathbb{Q})$ su $\mathcal{L}^2(\mathbb{Q})$. Questa è la condizione al contorno cercata. Essa ha un'interessante conseguenza riguardante il principio di sovrapposizione: si supponga di avere due funzioni d'onda sullo spazio delle configurazioni Ψ_1 e Ψ_2 , che vengono moltiplicate, rispettivamente, per $a_1([\gamma])$ e $a_2([\gamma])$ quando si percorre un loop γ . Il principio di sovrapposizione ci porta a considerare $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ come un'altra possibile funzione d'onda del sistema (si omette il fattore di normalizzazione, non è essenziale per il discorso). Dopo il loop, la funzione d'onda diventa $a_1\Psi_1 + a_2\Psi_2 = a_1(\Psi_1 + a_1^*a_2\Psi_2)$, cioè la fase relativa delle funzioni cambia, a meno che $a_1 = a_2$. L'unica possibilità per preservare la coerenza è l'introduzione di una **regola di superselezione**: *il principio di sovrapposizione vale soltanto per funzioni d'onda che vengono moltiplicate per lo stesso carattere di $\pi_1(\mathbb{Q})$ quando viene compiuto un loop in \mathbb{Q}* . Di conseguenza, le funzioni d'onda sulle quali $\pi_1(\mathbb{Q})$ agisce allo stesso modo formano, per combinazione lineare, sottospazi vettoriali dello spazio di Hilbert $\mathcal{L}^2(\mathbb{Q})$, detti settori di superselezione, ognuno caratterizzato da un carattere a , la cui somma diretta dà lo spazio di Hilbert stesso.

Come esempio molto semplice, si esplicita quanto detto nell'ultimo paragrafo per $\mathbb{Q} = \mathbb{S}^1 = \{x \in [0, \ell[\mid x = 0 \sim x = \ell\}$. Il rivestimento universale di \mathbb{S}^1 è \mathbb{R} , con proiezione $p : x \mapsto x - \ell[\frac{x}{\ell}]$; i domini fondamentali sono gli intervalli $\mathcal{F}_n = [n\ell, (n+1)\ell[$, $n \in \mathbb{Z}$, sui quali $p : x \mapsto x - n\ell$. Si consideri il loop in $x = 0$ $\gamma(t) = \ell t$, $t \in [0, 1]$: esso ha indice di avvolgimento 1, e perciò appartiene alla classe di omotopia [1] corrispondente all'intero 1 in $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$. Questa classe agisce sul rivestimento come [1] : $x \mapsto x + \ell$ (notare che se $x \in \mathcal{F}_n \Rightarrow x + \ell \in \mathcal{F}_{n+1}$), e ha il carattere $a(1) = e^{i\theta_1}$. Dunque, in questo caso la (3.2.1) si scrive $\tilde{\Psi}(x + \ell) = a(1)\tilde{\Psi}(x) = e^{i\theta_1}\tilde{\Psi}(x)$. Questa condizione è la stessa che viene imposta alle funzioni d'onda di Bloch per potenziali unidimensionali con periodo ℓ , a patto di scrivere $\theta_1 = k\ell$ e di scegliere $\theta_1 \in] - \pi, \pi]$. Si può pensare alla cella unitaria $[0, \ell[$ come \mathbb{S}^1 , identificando gli estremi fra loro. Per questa analogia, la condizioni al contorno (3.2.1) sono anche chiamate "condizioni di Bloch generalizzate".

3.3 Le conseguenze per le particelle identiche

Si può finalmente costruire la teoria delle particelle identiche, sostituendo \mathbb{Q} con \mathbb{Q}_N . Se lo spazio delle configurazioni individuale è $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$, allora il Teorema 2.2.1 (Capitolo 2) afferma che $\pi_1(\mathbb{Q}_N) = \mathbb{B}_N$ o \mathbb{S}_N a seconda che, rispettivamente, $d = 2$ o $d \geq 3$. Si comincerà dal caso $d \geq 3$, il più rilevante per la pratica. Innanzitutto, si devono trovare i caratteri del gruppo simmetrico; siccome ogni elemento σ di \mathbb{S}_N è esprimibile come un "monomio" dei generatori (e dei loro inversi), e i caratteri soddisfano la (3.2.2) (sono rappresentazioni in $U(1)$ del gruppo), allora $a(\sigma)$ è un analogo monomio nei caratteri $a(\sigma_j)$ dei generatori, ed è sufficiente cercare i fattori di fase $a(\sigma_j) = e^{-i\theta_j}$ dei soli generatori. Si noti che, in generale, essendo $a([\gamma]) \in U(1)$ si ha che $a([\gamma]^{-1}) = a([\gamma])^*$ e non serve cercare i caratteri degli inversi dei generatori. La proprietà $\sigma_j \sigma_k = \sigma_k \sigma_j$ per $|j - k| \geq 2$ (equazione 2.2.1b) è soddisfatta automaticamente ($U(1)$ è abeliano). La proprietà $\sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j = \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1}$ si traduce in $e^{-i(2\theta_j + \theta_{j+1})} = e^{-i(\theta_j + 2\theta_{j+1})} \iff e^{-i\theta_j} = e^{-i\theta_{j+1}}$, il che implica $\theta_j = \theta_{j+1}$ per $0 \leq j \leq N - 1$, poiché gli argomenti sono limitati all'intervallo $[0, 2\pi[$. In altre parole, $\theta_j = \theta$ è indipendente dal generatore. Infine, la proprietà $\sigma_j^2 = e$ implica che $e^{-2i\theta} = 1$, che è soddisfatta se solo se $\theta = 0$ o $\theta = \pi$. Pertanto, i caratteri possibili sono solamente due:

$$a(\sigma) = 1 \quad \forall \sigma \in \mathbb{S}_N \quad (3.3.1a)$$

$$a(\sigma) = (-1)^{\ell(\sigma)} \quad (3.3.1b)$$

nella seconda delle quali $\ell(\sigma)$ è il numero di trasposizioni che compongono la permutazione σ , la cui parità è una caratteristica di σ stessa (cfr. Capitolo 2). In altre parole, la seconda categoria di caratteri vale +1 se la permutazione è pari, -1 se è dispari. Evidentemente, si è ritrovato il risultato standard della suddivisione delle particelle in bosoni e fermioni: il settore di superselezione avente $a(\sigma) \equiv 1$ corrisponde alle funzioni d'onda completamente simmetriche per "scambio" di particelle, e descrive bosoni, mentre l'altro settore è costituito di funzioni d'onda completamente antisimmetriche nelle coordinate⁵ delle particelle, che sono pertanto fermioni. Tuttavia, rispetto alla teoria tradizionale delle particelle identiche, si ha un'informazione in più: *l'esistenza delle sole due classi distinte di fermioni e bosoni è l'unica possibilità solo se la dimensione dello spazio delle configurazioni delle singole particelle è 3 o maggiore.*

La "sorpresa" che si guadagna nell'approccio fin qui sviluppato è nel caso bidimensionale: $\pi_1(\mathbb{Q}_N) = \mathbb{B}_N$, un gruppo molto diverso da quello simmetrico e non si può presumere che il risultato sia lo stesso. Si può fare il medesimo discorso sviluppato in precedenza per quanto riguarda i caratteri dei generatori del gruppo delle trecce, solo che la condizione

⁵Ovviamente, per particelle senza spin è sufficiente scambiare le etichette delle coordinate per scambiare le particelle. Lo spin non è stato considerato per semplicità, ma la trattazione può essere estesa per comprenderlo in sé, e i risultati che si enunciano sono del tutto generali. Si veda [10]

$\sigma_j^2 = e$ è assente, e si può affermare solamente che

$$a(\sigma_j) = e^{-i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi[\quad \forall j = 1, \dots, N-1 \quad (3.3.2)$$

e non esistono particolari vincoli sui valori dell'argomento θ . Pertanto, *in due dimensioni spaziali esistono infiniti settori di superselezione, etichettati dall'angolo $\theta \in [0, 2\pi[$, in ciascuno dei quali lo "scambio" di particelle identiche comporta che*

$$\Psi \xrightarrow{\sigma_j} e^{-i\theta} \Psi \quad (3.3.3)$$

Siccome, al contrario del caso tridimensionale, la trasposizione delle etichette di due particelle porta la funzione d'onda del sistema ad essere moltiplicata per una fase *qualunque*, in inglese "any", queste particelle sono state battezzate **anyons** da Frank Wilczek [18], qui "tradotto" in **anioni** per evitare il più cacofonico "qualunquoni" che pure è stato usato⁶. Si utilizza anche il termine "statistica frazionaria" per descrivere questa categoria di particelle, sebbene non sia una denominazione del tutto appropriata. Se il parametro θ vale 0 o π si ritrovano bosoni o fermioni, rispettivamente, ma in generale la fase $e^{-i\theta}$ differirà da ± 1 . Per uno scambio arbitrario delle etichette $b \in \mathbb{B}_N$, il carattere che moltiplica la funzione d'onda è

$$a(b) = e^{-im\theta} \quad (3.3.4)$$

dove $m = n(\sigma_j) - n(\sigma_j^{-1})$ è l'intero che si ottiene sottraendo il numero dei fattori σ_j^{-1} al numero dei fattori σ_j nei quali è possibile scomporre b . È possibile comprendere visivamente la peculiarità del caso bidimensionale descrivendo (classicamente) il moto delle particelle nello spaziotempo \mathbb{R}^{2+1} . Si veda, per esempio, la Figura 3.1., nella quale sono illustrate le configurazioni di $N = 4$ particelle all'istante iniziale 0 e a un generico tempo successivo t_0 , e le traiettorie che percorrono. Le N posizioni iniziali distinte sul piano $t = 0$ sono congiunte in maniera biunivoca alle N posizioni finali sul piano $t = t_0$ da N cammini aperti che non si intersecano; se si identificano tra loro i cammini che possono essere deformati con continuità l'uno nell'altro, mantenendo fissi gli estremi e senza che intersechino altre traiettorie (si tratta ancora una volta di omotopia), si ha una rappresentazione grafica del gruppo delle trecce. La raffigurazione utilizzata nel Capitolo 2 è essenzialmente la medesima, ma "schiacciata" su un piano ortogonale a $t = \text{costante}$, per questioni di leggibilità. Anche con questa rappresentazione tridimensionale si può osservare come si abbia $\sigma_j^2 \neq e$ nel gruppo delle trecce, poiché è ben definito il verso dello "scambio" tra le particelle j e $j+1$: basta misurare l'angolo di rotazione del vettore che congiunge la particella $j+1$ con la particella j rispetto a una direzione spaziale arbitraria. Osservando tale vettore da "sopra" il piano xy , sia il generatore σ_j che il suo inverso lo ruotano di un angolo piatto, ma in versi opposti, e analogamente le traiettorie dei due punti si avvolgono l'una intorno all'altra in versi contrari, e non è possibile deformare

⁶([19]). Ovviamente, non vi è possibilità di confusione con gli omonimi ioni negativi.

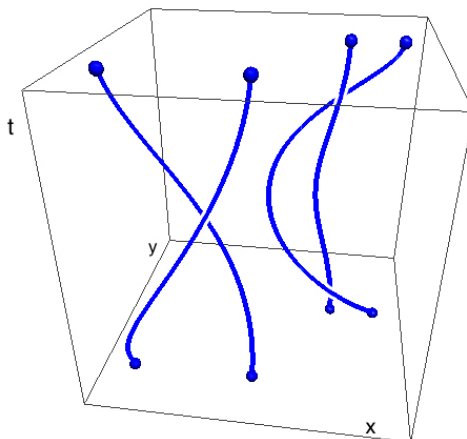


Figura 3.1: Traiettorie di quattro particelle nello spaziotempo \mathbb{R}^{2+1} ; l'asse del tempo è verticale.

una coppia di traiettorie nell'altra, senza aprirle o intersecarle. Ciò è caratteristico della bidimensionalità dello spazio delle configurazioni: con una o più dimensioni spaziali aggiuntive la deformazione di σ_j in σ_j^{-1} è invece possibile. Tutto questo non è altro che un diverso modo di illustrare l'abozzo di dimostrazione del Teorema 2.2.1 nel Capitolo 2. Con la presente modalità di raffigurazione dei processi di "scambio" delle posizioni delle particelle, si può riscrivere la fase (3.3.4) in una maniera alternativa [20]. L'intero m che vi compare dà il numero netto di scambi di posizione delle particelle, cioè il numero di mezzi giri compiuti dai vettori congiungenti tutte le possibili coppie di particelle. Se ϕ_{jk} è l'angolo del vettore congiungente le particelle j e k rispetto all'asse x (ma se ne potrebbe scegliere un altro), e $\Delta\phi_{jk}$ la sua variazione tra il tempo $t = 0$ e $t = t_0$, allora $m = \frac{1}{\pi} \sum_{j < k} \Delta\phi_{jk}$ e

$$a(b) = \exp\left(-i \frac{\theta}{\pi} \sum_{j < k} \Delta\phi_{jk}\right) \quad (3.3.5)$$

Gli angoli relativi ϕ_{jk} variano in maniera regolare durante lo scambio e si può evitare di fare riferimento solamente alla loro variazione totale alla fine dello scambio, riscrivendo l'espressione precedente come

$$a(b) = \exp\left(-i \frac{\theta}{\pi} \int_0^{t_0} dt \frac{d}{dt} \sum_{j < k} \Delta\phi_{jk}\right) \quad (3.3.6)$$

che mette in evidenza l'aspetto "cinematico" dello scambio di particelle, che è dettato dalla treccia b .

3.4 Alcune proprietà degli anioni e il modello di Wilczek

La non banalità della fase che la funzione d'onda guadagna in uno scambio tra le posizioni di due anioni porta a conseguenze particolari, che non appaiono in fermioni e bosoni. Innanzitutto, *il carattere $a(b)$ dipende dall'intera "storia" degli scambi e non solo dalla configurazione finale*. Per vederlo, si supponga che $b \in \mathbb{B}_N$ rappresenti un dato insieme di interscambi di anioni, e $b' \in \mathbb{B}_N$ una treccia che porta alla medesima configurazione finale, ma nella quale una coppia di particelle compie k giri in più. Con la rappresentazione di \mathbb{B}_N di cui sopra, ci si convince facilmente che b e b' sono due insiemi di traiettorie non omotopici, cioè non riducibili l'uno all'altro. La rotazione in più per una coppia di particelle corrisponde ad aggiungere $2k\pi$ a uno dei $\Delta\phi_{jk}$, e si ottiene

$$a(b') = e^{-i2k\theta} a(b) \quad (3.4.1)$$

L'unica possibilità che i due fattori non distinguano la "storia" degli scambi, è che la fase aggiuntiva valga 1 per ogni valore di k , e ciò si ha solo se le particelle sono bosoni ($\theta = 0$) o fermioni ($\theta = \pi$, si ricordi che $0 \leq \theta \leq 2\pi$). Per un generico valore dell'angolo θ i due caratteri sono diversi, eccezion fatta per alcuni valori di k , qualora θ sia un sottomultiplo intero di π . Questa peculiarità degli anioni è ovviamente da ricollegarsi alle proprietà del gruppo delle trecce, che, al contrario del gruppo simmetrico, è un gruppo infinito. Un'altra caratteristica interessante è il comportamento degli anioni rispetto alle trasformazioni di parità e di inversione temporale. L'operazione parità P in due dimensioni consiste nell'inversione di uno solo degli assi, che viene riflesso specularmente rispetto all'altro. È semplice osservare che questo porta all'inversione dei versi in cui i vettori congiungenti le particelle ruotano, e pertanto basta porre $\Delta\phi_{jk} \xrightarrow{P} -\Delta\phi_{jk}$ nella (3.3.5), il che equivale a cambiare il segno di θ (seguendo la convenzione $\theta \in [0, 2\pi[$, è più corretto dire che $\theta \xrightarrow{P} 2\pi - \theta$). L'inversione temporale T ha lo stesso risultato; ciò può essere visto notando che le traiettorie in \mathbb{R}^{2+1} vengono percorse a ritroso, e quindi vale lo stesso per gli angoli $\Delta\phi_{jk}$, oppure, più formalmente, appellandosi al risultato generale [11, 7] per cui simultaneamente al cambio di segno del tempo si deve coniugare la funzione d'onda. In entrambi i casi,

$$a(b) \xrightarrow{P,T} a^*(b) \quad (3.4.2)$$

e la fase rimane invariata solamente se è reale, il che accade solo se in realtà si ha a che fare con bosoni o fermioni. Dunque, si può concludere affermando che *la meccanica quantistica degli anioni non è simmetrica per parità o inversione temporale, ma lo è per la simmetria combinata PT* .

Wilczek coniò il termine "anyons" sviluppando un semplice modello di particelle "ordinarie" sottoposte in una configurazione particolare all'effetto Aharonov-Bohm [17, 18]. Si supponga di avere una particella carica libera di muoversi all'esterno un solenoide

ideale (infinito), ma solo su un piano ad esso ortogonale. Il raggio R del solenoide non ha particolare rilevanza, è può essere considerato trascurabile (in tal caso, si può parlare di una singola linea di flusso). In ogni caso, il solenoide è impenetrabile per la particella (e pertanto il suo spazio delle configurazioni è il piano "bucato" del Capitolo 2, che non è semplicemente connesso). Com'è noto, il campo magnetico di un solenoide infinito è costante al suo interno (e allineato al suo asse) e nullo all'esterno. Tuttavia, non è nullo il potenziale vettore all'esterno:

$$\Phi = \int_{\Sigma(\Gamma)} ds \cdot \mathbf{B} = \int_{\Sigma(\Gamma)} ds \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \oint_{\Gamma} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{A} \quad (3.4.3)$$

nella quale Φ il flusso di campo magnetico attraverso la sezione del solenoide, Γ una curva chiusa che lo circonda senza attraversarlo, e in cui si è usata la legge di Stokes. Adottando un sistema di coordinate cilindrico con l'asse z coincidente con l'asse del solenoide in cui il piano dove la particella è confinata sia il piano $z = 0$. Supponendo per simmetria che il potenziale vettore sia diretto tangenzialmente, come il versore \mathbf{e}_ϕ , dalla terza uguaglianza qui sopra si ricava

$$\mathbf{A} = \frac{\Phi}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi \quad \text{per } r > R (\rightarrow 0) \quad (3.4.4)$$

Ovviamente, il campo magnetico corrispondente è nullo, ma nell'hamiltoniano entra \mathbf{A} e perciò la trattazione è diversa da quella di una semplice particella libera. È notevole che venga alterato lo spettro della componente z del momento angolare: infatti, detta e la carica della particella, $\hat{l}_z = (\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A}))_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{e\Phi}{2\pi}$, e se le autofunzioni Ψ dipendono da ϕ nella maniera usuale, come $e^{im\phi}$, con m intero per monodromia, allora $\hat{l}_z \Psi = \hbar(m - \frac{e\Phi}{2\pi\hbar})\Psi$, ovvero gli autovalori di \hat{l}_z sono⁷

$$l_z = \hbar(m - \frac{e\Phi}{2\pi\hbar}), \quad m \in \mathbb{Z} \quad (3.4.5)$$

L'intero spettro viene traslato di una quantità che in generale può essere un qualunque numero reale, e può non essere possibile avere un momento nullo (si parla in tal caso di "barriera centrifuga").

Si potrebbe pensare di eliminare il potenziale vettore (3.4.4) con un'opportuna trasformazione di gauge, e ricondursi al caso di una particella libera: basterebbe sottrargli il gradiente della funzione $\Lambda = \frac{\Phi\phi}{2\pi}$; corrispondentemente, si dovrebbero condurre le trasformazioni (3.1.1) con $\hat{U} = e^{-\frac{i}{\hbar}e\Lambda}$. Tuttavia, questa è una trasformazione di gauge singolare (cioè impropria), poiché Λ è polidroma, e allora la nuova funzione d'onda

$$\Psi' = \hat{U}^+ \Psi = e^{\frac{i e \Phi \phi}{2\pi \hbar}} \Psi \quad (3.4.6)$$

⁷Allo stesso risultato si può arrivare in maniera classica, calcolando la variazione di l_z che si ha "accendendo" il flusso da 0 a Φ , a causa del campo elettrico $-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ indotto.

acquisisce la stessa proprietà: infatti, soddisfa la condizione al contorno

$$\Psi'(r, \phi + 2\pi) = e^{\frac{ie\Phi}{\hbar}} \Psi'(r, \phi) \quad (3.4.7)$$

È evidente la similitudine con la (3.2.5), e infatti si possono pensare le Ψ' come funzioni d'onda sul rivestimento universale di $\mathbb{R} \setminus B$, $B = \{(r, \phi) | r \leq R\}$, il cui primo gruppo di omotopia è $\pi_1(\mathbb{R} \setminus B) = \mathbb{Z}$ (equazione 2.1.9), oppure si può fattorizzare la dipendenza da ϕ e considerare le funzioni che si ottengono come funzioni su \mathbb{S}^1 , che ha il medesimo gruppo fondamentale. Comunque si proceda, in quest'ottica l'equazione precedente non è altro che la (3.2.5) per $[\gamma] = [1]$, $a([1]) = e^{\frac{ie\Phi}{\hbar}}$, ed equivale all'esempio fatto nei sugli elettroni in un potenziale periodico.

Ora si immagini di riunire rigidamente particella carica e flusso d'induzione magnetica in un solo oggetto composito, e si consideri la dinamica di una coppia di tali oggetti, ciascuno con la stessa carica ed il medesimo flusso. Affinché si possano trattare gli effetti alla Aharonov-Bohm con meno complicazioni possibili è conveniente immaginare che $e \rightarrow 0$ contemporaneamente a $|\Phi| \rightarrow \infty$ in modo che il prodotto $e\Phi$ rimanga costante e finito: in questo modo è possibile trascurare completamente l'interazione elettrostatica tra i due compositi. Perciò, ciascun composito risente solamente del potenziale vettore dovuto al flusso che attraversa l'altro. Cosa succede se si scambiano di posto i due compositi? Si può ripetere il procedimento fatto sopra, eliminando l'interazione per mezzo di una trasformazione di gauge singolare, e si ottiene [17, 18]:

$$\Psi'(R, \Theta, r, \phi + \pi) = e^{\frac{ie\Phi}{\hbar}} \Psi'(R, \Theta, r, \phi) \quad (3.4.8)$$

nella quale R, Θ sono le coordinate polari del centro di massa, e r, ϕ quelle del moto relativo. Ma questo è esattamente ciò che ci si aspetta da due anioni: *i compositi (bidimensionali) flusso-carica si comportano da anioni*. Sono proprio questi oggetti ad essere stati battezzati "anyons" da Wilczek. Questa equivalenza permette di implementare la teoria degli anioni associando loro un flusso Φ e una carica e^* fittizi tali che $\frac{e^*\Phi}{\hbar} = \theta$, sviluppando una teoria quantistica "ordinaria" per particelle che interagiscono solamente per effetto Aharonov-Bohm (quindi in assenza di campo magnetico) per mezzo di potenziali vettori del tipo (3.4.4). È possibile [20] eliminare queste interazioni a lungo raggio operando trasformazioni di gauge singolari, al prezzo di rendere polidroma la funzione d'onda, che deve soddisfare condizioni al contorno come le due precedenti. Notare questo dualismo nella descrizione: o si lavora con funzioni d'onda a un sol valore ma con un'equazione di Schrödinger per particelle interagenti, oppure si possono avere funzioni d'onda libere ma vincolate da condizioni al contorno non banali, che sono riconducibili alla formulazione sul rivestimento universale dello spazio delle configurazioni. Inoltre, si sottolinea che l'interazione tra i compositi/anioni è puramente quantistica, poiché i potenziali vettori che la mediano corrispondono a campi magnetici nulli. Infine, una piccola annotazione: in questo modello di anioni, l'angolo statistico θ , si può scrivere come il rapporto $\frac{\Phi}{\hbar/e^*}$ tra il flusso di campo magnetico associato al composito e il "quanto di flusso" $\frac{\hbar}{e^*}$, caratteristico dell'anione stesso.

3.5 Esempio: due anioni interagenti armonicamente

Si conclude il Capitolo con un esempio che mostra come la dinamica degli anioni differisca da quella di bosoni e fermioni, interpolandola. In generale, le condizioni al contorno che debbono essere imposte alla funzione d'onda rendono particolarmente complicata la risoluzione dell'equazione di Schrödinger, poiché è possibile che non si possa separare il moto del centro di massa (se è presente un campo esterno) oppure perché vi sono più di due anioni. In alcuni casi semplici, invece, è possibile trovare le soluzioni esatte. Si considerino due anioni identici in due dimensioni, interagenti mediante un potenziale centrale $U(|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|)$, ma per il resto isolati. È possibile operare l'usuale scomposizione del moto ed eliminare la parte relativa al moto del centro di massa, che è quello di una particella libera di massa $2m$, e ottenere quella per il moto relativo, che equivale a quella di una particella di massa $\mu = m/2$, dove m è la massa dei due anioni. L'hamiltoniano, in coordinate polari (r, ϕ) , è

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) + U(r) \quad (3.5.1)$$

nella quale si noti l'uso del laplaciano bidimensionale. L'equazione agli autovalori $\hat{H}\Psi = w\Psi$ (w è l'energia del moto relativo) ammette la separazione delle variabili scrivendo le soluzioni nella forma

$$\Psi(r, \phi) = \frac{\chi(r)}{\sqrt{r}} e^{il\phi} \quad (3.5.2)$$

ottenendo

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2\chi(r)}{dr^2} + \left(U(r) + \frac{\hbar^2 (l^2 - \frac{1}{4})}{2\mu r^2} - w \right) \chi(r) = 0 \quad (3.5.3)$$

con le condizioni

$$\chi(0) = 0 \quad (3.5.4a)$$

$$\int_0^{+\infty} dr |\chi|^2 = 1 \quad (3.5.4b)$$

Fino a questo passaggio, non è ancora stato introdotto il fatto che le particelle sono anioni, caratteristica che si impone mediante le condizioni al contorno (3.3.3), che in questo caso sono date da

$$\Psi(r, \phi + \pi) = e^{-i\theta} \Psi(r, \phi) \iff e^{il(\phi+\pi)} = e^{-i\theta} e^{il\phi} \iff e^{il\pi} = e^{-i\theta} \quad (3.5.5)$$

che è risolta da

$$l = -\frac{\theta}{\pi} + 2k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.5.6)$$

Indipendentemente dalla forma esplicita dell'energia potenziale, si può già capire come agiscano le condizioni al contorno anioniche: selezionano lo spettro del momento angolare, modificando la forma del potenziale efficace cui è soggetta la parte radiale della funzione d'onda. Si noti che, se $\theta \neq 0$, non è possibile avere momento angolare nullo. Il caso $\theta = 0$ corrisponde a due bosoni (con funzione d'onda simmetrica), mentre il caso $\theta = \pi$ corrisponde a due fermioni (con funzione d'onda antisimmetrica). Inoltre, valori di θ differenti di un multiplo intero di 2π danno il medesimo spettro di l , pertanto è sufficiente restringere l'attenzione a $\theta \in [0, 2\pi[$, come si è fatto finora.

Se il potenziale è armonico, $U(r) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2$, la (3.5.3) (con le condizioni (3.5.4)) è risolubile esattamente, e si ottiene lo spettro energetico [10]

$$w_{n,k} = \hbar\omega \left(n + \left| 2k - \frac{\theta}{\pi} \right| + 1 \right), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (3.5.7)$$

Questo spettro contiene, come casi limite, gli spettri per due bosoni o due fermioni, ma al variare di θ tra 0 e π interpola in maniera continua fra il primo e il secondo, e poi a ritroso tra π e 2π . Si noti che θ è osservabile, poiché non determina solo una semplice traslazione dell'intero spettro energetico, ma anche la differenza di energia tra i livelli.

Capitolo 4

Gli anioni esistono?

4.1 Vantaggi e svantaggi dell'uso di \mathbb{Q}_N

La teoria sviluppata nelle Sezioni precedenti ha richiesto un lavoro particolare ed impegnativo, e l'introduzione di concetti di topologia algebrica oltre alla geometria differenziale usuale: si è costruito lo spazio delle configurazioni di un sistema di particelle identiche in modo che fosse una rappresentazione non ridondante dei possibili stati spaziali delle particelle (Capitolo 1), con il risultato di aver complicato notevolmente tale spazio, dotandolo di proprietà molto differenti da quelle dell'ordinario \mathbb{R}^{dN} . Tanto diverse da richiedere una revisione della meccanica quantistica su di esso, che ha avuto come risultato la necessità di estendere il concetto di funzione d'onda, ammettendo che possa essere polidroma. Ci si può chiedere, pertanto, se il gioco valga la candela. Innanzitutto, la polidromia della funzione d'onda non dà problemi alla sua interpretazione fisica, poiché è limitata a una fase a modulo unitario che, ad esempio, non influisce su $|\Psi(q)|^2$, che rimane ad un sol valore, e lo stesso vale per altre grandezze misurabili (fintantoché si rimane in un dato settore di superselezione). D'altronde, che la funzione d'onda possa divenire multivoca se lo spazio delle configurazioni non è semplicemente connesso è un risultato che risale al lavoro di Pauli già citato, e si ritrova nel contesto dell'effetto Aharonov-Bohm (come, per esempio, i compositi carica-flusso del Capitolo precedente), sebbene non sia sempre inevitabile in questo caso¹. Molti autori citati (Wilczek [17, 18], Wu [20], Morandi [11]) hanno fatto notare che ammettere la liceità di funzioni d'onda polidrome è un passo naturale nella teoria quantistica, che non ne lede l'interpretazione fisica, poiché la funzione d'onda non è una grandezza misurabile. In ogni caso, la formulazione della meccanica quantistica non può limitarsi a spazi delle configurazioni semplicemente connessi, e la teoria esposta nel Capitolo 3 compie tale generalizzazione, che è necessaria non solo per trattare le particelle identiche su \mathbb{Q}_N , ma anche per casi

¹Aharonov e Bohm, nel loro citatissimo articolo [1], risolsero esattamente l'equazione di Schrödinger in presenza di un solenoide ideale impenetrabile, ottenendo funzioni univoche.

molto più banali, come quello di una particella confinata su una circonferenza. La discussione delle particelle indistinguibili ha ulteriori pregi: innanzitutto, è concettualmente soddisfacente la costruzione di uno spazio delle configurazioni con la corretta corrispondenza biunivoca tra i suoi punti e la configurazione fisica del sistema, che non può distinguere le particelle se sono realmente identiche. Grazie a questa costruzione, non si deve imporre alcun postulato di simmetrizzazione sulle funzioni d'onda, anche perché su \mathbb{Q}_N il concetto di "scambio" di oggetti identici perde di significato. Questo evita anche situazioni bizzarre come il fatto che, in linea di principio, la condizione di simmetria o antisimmetria ha carattere globale, e deve essere applicata anche a particelle che si trovano a grande distanza (per esempio, due protoni su galassie diverse). Con il postulato di simmetrizzazione, questa correlazione viene "risolta" dal fatto che, se la sovrapposizione delle funzioni d'onda delle due particelle è molto piccola, non vi è differenza pratica nell'utilizzare come funzione d'onda totale quella simmetrizzata o il semplice prodotto delle due, cioè considerare le due particelle come effettivamente indipendenti². Utilizzando lo spazio delle configurazioni \mathbb{Q}_N , invece, questa situazione non compare, perché \mathbb{Q}_N è localmente isometrico allo spazio delle configurazioni \mathbb{X}^N di N particelle non identiche, differendo da questo solamente in proprietà topologiche globali che entrano in gioco solamente se le particelle possono realmente scambiarsi di posto durante il loro moto.

Si osserva ancora una volta che la necessità di introdurre l'indistinguibilità delle particelle identiche è da ritenersi un risultato sperimentale, non incluso negli assiomi fondamentali della meccanica quantistica; se con l'approccio qui presentato si riesce a fare a meno di postulato di simmetrizzazione, si deve comunque aggiungere come principio il fatto che lo spazio delle configurazioni corretto per un insieme è \mathbb{Q}_N e non il prodotto cartesiano degli spazi individuali.

Il risultato più importante che si è ottenuto è che l'esistenza di due sole classi di particelle, fermioni e bosoni, dipende dal numero di dimensioni fisiche dello spazio delle configurazioni individuale: in tre o più dimensioni è l'unica possibilità, in due vi è un'infinità continua di classi³. La teoria fin qui esposta, dunque, chiarifica il ruolo della topologia nel distinguere le differenti statistiche quantistiche presenti in natura. Lo spazio reale è tridimensionale, ed è per questo che le particelle (molecole, atomi, particelle elementari) sono solo bosoni e fermioni. La scoperta dell'esistenza di statistiche frazionarie in due dimensioni è sicuramente interessante dal punto di vista teorico, ma l'ovvia domanda che dà il nome a questo Capitolo è se sia possibile realizzare tali statistiche: gli anioni esistono?

²Questo è un risultato esatto se i supporti delle due funzioni hanno intersezione nulla, e se gli apparati di misura non si estendono su entrambi i supporti. Si veda [3].

³Il caso monodimensionale non è stato trattato, ma è svolto in [10] da Leinaas e Myrheim, per due particelle, in modo esplicito e senza utilizzare la costruzione topologica del Capitolo 3, e il risultato è ancora l'esistenza di anioni, ma le cui statistiche sono identificate da un parametro che può assumere qualunque valore reale.

4.2 L'Effetto Hall quantistico

Confinare particelle reali in due dimensioni non è possibile, perché non si tratta di "appiattare" il più possibile il sistema per trascurarne la profondità: deve essere realmente ridotto ad un piano, e ciò non è sicuramente attuabile se le particelle sono composite, poiché avranno un'estensione, e in pratica nemmeno per particelle elementari. Pertanto, inizialmente si consideravano gli anioni un semplice "esercizio accademico" ([18]), lontano da applicazioni pratiche. Invece, la teoria degli anioni in due dimensioni spaziali trovò un fruttuoso campo di applicazione nella fisica dello stato condensato, con la scoperta e la spiegazione dell'effetto Hall quantistico. L'argomento è vasto e complesso, ed esula dallo scopo del presente testo, se ne darà una semplice riassunto. L'effetto Hall classico riguarda il comportamento di un conduttore immerso in campi elettrico e magnetico ortogonali fra loro: compare una differenza di potenziale trasversale rispetto al campo elettrico, proporzionale al campo magnetico applicato, e il cui segno dipende da quello dei portatori di carica. Si supponga che il campo magnetico $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ sia applicato perpendicolarmente al piano contenente una lastra bidimensionale conduttrice. Detta n la densità numerica (per unità di superficie) di portatori, e la loro carica, \mathbf{v} la loro velocità e $\mathbf{J} = nev$ la densità di corrente (che giace nel piano xy) la legge di Ohm $\mathbf{E} = \rho_0\mathbf{J}$ in assenza di campo magnetico viene modificata dalla forza di Lorenz nell'equazione

$$\mathbf{J} = nev = \rho_0(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \rho_0\left(\mathbf{E} + \frac{1}{ne}\mathbf{J} \times \mathbf{B}\right) \quad (4.2.1)$$

la cui soluzione è la legge di Ohm generalizzata

$$\mathbf{E} = \hat{\rho}\mathbf{J}, \quad \hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_0 & -\frac{B}{ne} \\ \frac{B}{ne} & \rho_0 \end{pmatrix} \quad (4.2.2)$$

In due dimensioni, le componenti del tensore resistivo $\hat{\rho}$ sono direttamente delle resistenze. Il termine diagonale $R_{xx} = \rho_0$ è detto resistenza longitudinale e ha carattere dissipativo, mentre il termine

$$R_H = \frac{B}{ne} = \rho_{yx} = -\rho_{xy} \quad (4.2.3)$$

è detto **resistenza di Hall** ed è definibile come il rapporto tra la differenza di potenziale in direzione ortogonale alla densità di corrente e la corrente stessa. Classicamente, è una funzione lineare dell'intensità del campo magnetico.

Se si porta la temperatura a qualche frazione di K (oggi si può arrivare a 10 mK, ma i primi esperimenti furono condotti a 4.2 K [6]), e si utilizzano elevati campi magnetici ($1 - 10^1$ T) [16], il comportamento del sistema diventa sorprendente. Innanzitutto, la resistenza di Hall mostra un andamento non lineare all'aumentare del campo magnetico, alternando zone di proporzionalità diretta a dei plateaux nei quali rimane essenzialmente

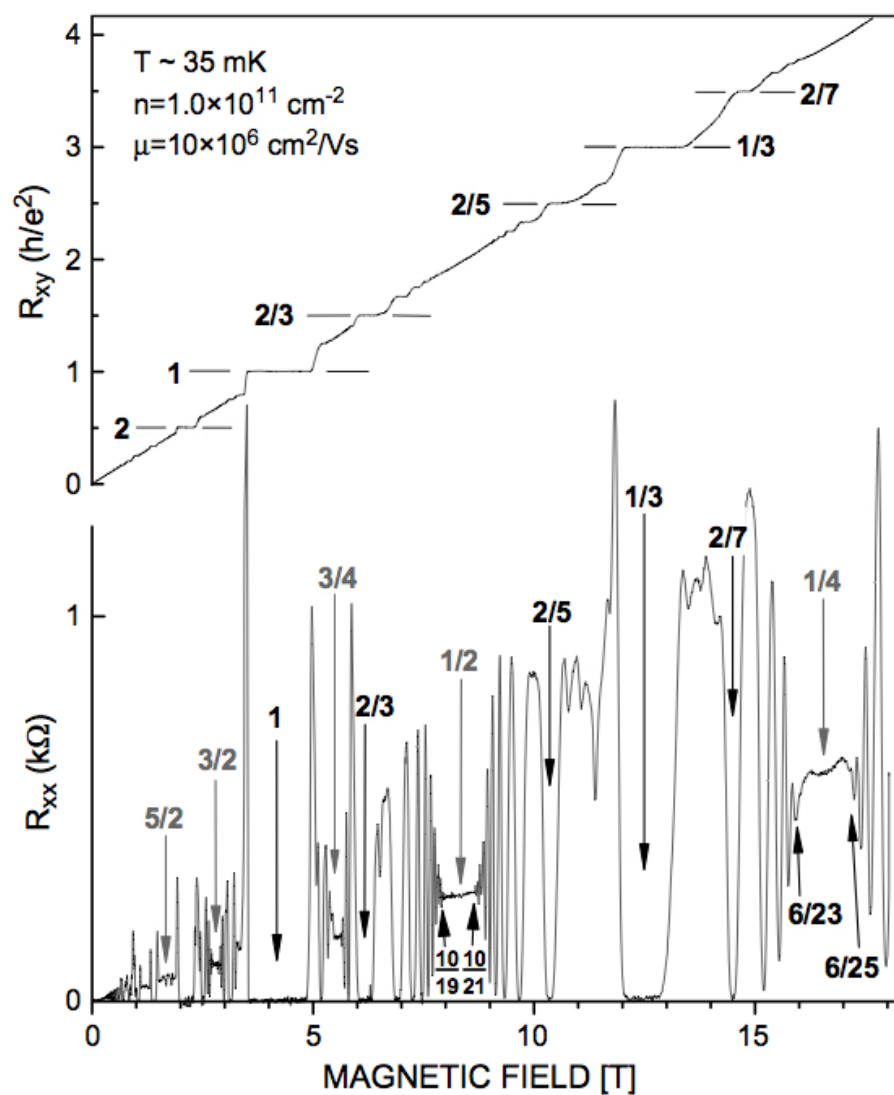


Figura 4.1: Grafici di $R_H = R_{yx}$ e R_{xx} in funzione del campo magnetico nell'effetto Hall quantistico. Da [16].

costante. Contemporaneamente, la resistenza longitudinale si annulla [16]: la corrente scorre senza dissipazione di calore. Questi fenomeni sono mostrati in Figura 4.1. Ma ancor più affascinante è il fatto che, sebbene i campi magnetici corrispondenti ai plateaux dipendano dal materiale, i valori che R_H assume in essi sono *quantizzati* e *universali*, secondo la relazione [6, 11, 15, 16]

$$R_H = \frac{1}{\nu} \frac{h}{e^2} \quad (4.2.4)$$

nella quale h è la costante di Planck e e è la carica elementare, e ν assume valori interi o semplici razionali con denominatori per lo più dispari. Nel primo caso si parla di effetto Hall a quantizzazione intera (in inglese IQHE, "Integer Quantum Hall Effect"), e ν può arrivare fino ad alcune decine [16]); nel secondo caso il fenomeno prende il nome di effetto Hall a quantizzazione frazionaria (FQHE, "Fractional Quantum Hall Effect"), e il denominatore di ν è solitamente inferiore a 15 [16]. Il numero di plateaux osservati aumenta con la qualità di preparazione del materiale e al diminuire della temperatura.

La relazione di quantizzazione (4.2.4) è decisamente notevole: innanzitutto perché è stata verificata con una precisione di una parte su un miliardo [16], e perché significa che in un plateau tutta la complessità della materia condensata viene "dimenticata", e una grandezza macroscopica come la resistenza di Hall diviene un semplice multiplo del "quanto di resistenza" $\frac{h}{e^2}$ ottenuto combinando due costanti fondamentali. La (4.2.4) mostra come la resistenza di Hall in un plateau non dipenda dal campo magnetico applicato, dalla densità di elettroni o dalla geometria del dispositivo. In realtà, i risultati fin qui riassunti sono estrapolazioni allo zero assoluto di ciò che si osserva sperimentalmente a temperature finite, con gas di elettroni pressoché bidimensionali che si ottengono nelle giunzioni tra semiconduttori in vari dispositivi ad elevatissima mobilità, come MOSFET e HEMT. L'esatta quantizzazione di R_H nell'IQHE fu scoperta nel 1980 da K. von Klitzing, e gli valse il Premio Nobel nel 1985, mentre il FQHE fu scoperto da D. Tsui e H. Störmer nel 1982, anch'essi premiati con il Nobel nel 1998 assieme a R. Laughlin.

L'IQHE si può spiegare, a grandi linee, con un modello a bande, che considera gli elettroni come indipendenti. Un elettrone confinato in due dimensioni e sottoposto a un campo magnetico uniforme e costante ortogonale al piano ha uno spettro discreto, costituito dai cosiddetti livelli di Landau [11]

$$w_n = \hbar\Omega\left(N + \frac{1}{2}\right), \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2.5)$$

dove $\Omega = \frac{eB}{m}$ è la frequenza di Larmor (m è la massa dell'elettrone, $-e$ la sua carica); come si vede, sono i medesimi di un oscillatore armonico unidimensionale. Se A è l'area della porzione del piano nella quale l'elettrone si può muovere, la degenerazione di ciascun livello è [11]

$$g_n = \frac{A}{2\pi l^2} \quad (4.2.6)$$

dove l è la lunghezza magnetica $\sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$, e pertanto la densità di stati per unità di area di ciascun livello di Landau è

$$n_B = \frac{1}{2\pi l^2} = \frac{eB}{h} \quad (4.2.7)$$

In un modello a particelle indipendenti, questo è anche il numero di particelle (per unità di superficie) che può occupare un dato livello di Landau. Confrontando la (4.2.3) con la (4.2.4), è semplice ottenere

$$n = \nu n_B \quad (4.2.8)$$

che dà a ν il significato di frazione di livelli di Landau completamente occupati. Dunque, nell'IQHE vi sono un certo numero di livelli completamente occupati. Nel modello a particelle indipendenti, senza impurezze e con campo elettrico nullo i livelli di Landau sono completamente degeneri. Se si aggiunge un campo elettrico parallelo al piano degli elettroni, i livelli si separano in bande di ampiezza proporzionale al campo elettrico stesso [11], ma in generale rimangono separate poiché nelle condizioni sperimentali in cui si osserva l'effetto Hall quantistico è sempre verificata $E \ll cB$ (dove c è la velocità della luce), e l'influenza del campo elettrico è una mera perturbazione. La caratteristica più importante dei sistemi reali che si deve aggiungere è la presenza di impurità distribuite disordinatamente, e questo comporta un'ulteriore allargamento delle bande [13, 11]; la peculiarità è che i livelli energetici che si spostano nei gap corrispondono a stati localizzati, mentre gli stati delocalizzati rimangono vicini ai livelli di Landau. Aumentando il campo magnetico applicato si riscalda l'energia del sistema di bande (i livelli di Landau sono proporzionali a $\Omega \propto B$), e corrispondentemente il potenziale chimico le attraversa (infatti, questo equivale ad un esperimento ideale in cui si diminuisce la densità di elettroni presenti). Tuttavia, solo quando esso attraversa il centro delle bande (cioè le energie (4.2.5)) si sottraggono stati in grado di condurre la corrente, e pertanto la resistenza Hall aumenta. Invece, quando esso si trova tra due livelli di Landau successivi gli stati localizzati corrispondenti non contribuiscono alla resistività, che rimane "congelata" al valore precedente. In questo modo, si può spiegare la presenza dei plateaux. Il fatto che la resistenza di Hall sia un sottomultiplo intero di $\frac{h}{e^2}$ richiede un'analisi più specifica e complessa, ma è comunque un fatto ben compreso [11].

L'effetto Hall frazionario è un fenomeno più complicato, e la sua origine microscopica meno chiara. Se il modello a particelle indipendenti porta all'effetto Hall intero, evidentemente quello frazionario dipende fortemente dalle correlazioni tra gli elettroni, e deve tenere conto della repulsione coulombiana tra di essi. Infatti, risulta [13] che tale interazione non è più trascurabile proprio quando i livelli di Landau sono occupati solo parzialmente, cioè quando ν non è intero. La trattazione teorica del fenomeno diviene approssimata e si deve far ricorso a modelli fenomenologici, basati sulla scelta di appropriate funzioni d'onda di prova da inserire nel principio variazionale. Quest'approccio è affiancato da calcoli numerici, in modo da controllare l'accuratezza dell'approssimazione, sebbene siano ovviamente limitati ad un numero molto contenuto di elettroni. Per

esempio, il prototipo di funzione d'onda di prova fu proposto da Laughlin per descrivere gli stati in cui $\nu = \frac{1}{k}$, dove k è un intero dispari (è molto studiato il caso $k = 3$) è data da [11, 13, 15]

$$\Psi(z_1, \dots, z_p) = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^k e^{-\frac{1}{4l^2} \sum_i |z_i|^2} \quad (4.2.9)$$

nella quale $z_i = x_i + iy_i$ è la coordinata complessa dell'elettrone i -esimo. Essendo in questo caso $\nu < 1$, questa funzione d'onda descrive lo stato degli elettroni nel livello fondamentale di Landau. Questi stati ammettono delle eccitazioni in forma di perturbazioni localizzate della densità elettronica, dette quasi-particelle o quasi-lacune a seconda del segno (rispettivamente, negativo o positivo) della carica in eccesso [11, 16, 13, 15]. Di solito, ci si riferisce a entrambi come quasi-particelle, sebbene siano le quasi-lacune il tipo più rilevante per il FQHE. Si tratta di vortici [16], cioè sono punti rispetto ai quali gli elettroni hanno un momento angolare fissato. Il risultato più importante è che *le quasi-lacune dell'effetto Hall quantistico frazionario sono anioni, e portano una carica frazionaria: se il frazione di livelli occupati è ν , allora l'angolo statistico è $\theta = \nu\pi$, e la carica elettrica è $e^* = \nu e$* [11, 16, 13, 15]. La dimostrazione di questo fatto procede, a grandi linee, calcolando il comportamento della funzione d'onda delle quasi-particelle quando sono trasportate lungo dei loop, l'una intorno all'altra. I centri dei vortici, cioè le posizioni delle quasi-particelle $\mathbf{R} = (\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_q)$, sono parametri nell'hamiltoniano elettronico [13], al cui variare cambiano gli autostati del sistema. Notare che, sebbene questi stati siano livelli eccitati per gli elettroni, sono livelli fondamentali per le quasi-lacune. Se esiste un solo stato fondamentale non degenere $|\Psi(\mathbf{R})\rangle$ per ogni valore \mathbf{R} delle posizioni, allora se le si fa variare ciclicamente in maniera adiabatica (cioè "infinitamente lenta") in modo che la configurazione finale sia una permutazione di quella iniziale (cioè se si scambiano due o più quasi-particelle), il Teorema Adiabatico [11, 13] afferma che lo stato finale corrisponde ancora al livello fondamentale, ma che l'autovettore che lo descrive differisce da quello iniziale per una fase. Oltre a un termine dinamico, dipendente dagli autovalori dell'energia e dal tempo impiegato, vi è un termine geometrico detto **fase di Berry** [11, 13] pari a

$$\alpha = i \oint d\mathbf{R} \langle \Psi(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} | \Psi(\mathbf{R}) \rangle \quad (4.2.10)$$

dove l'integrale è preso sulla traiettoria $\mathbf{R}(t)$. Questa fase non dipende dal tempo impiegato per eseguire la variazione delle coordinate delle quasi-particelle, ma solo dalla traiettoria seguita. Si scompone [11, 13] una parte geometrica, proporzionale all'area racchiusa dal loop, e una parte che dipende dalla topologia della traiettoria, che, se calcolata per uno scambio di quasi-lacune, fornisce proprio l'angolo statistico θ . Se si confronta la fase di Berry con la fase che l'autostato acquisisce in virtù dell'effetto Aharonov-Bohm, si può calcolare la carica delle quasi-particelle.

Le quasi-particelle vengono prodotte quando, variando il campo magnetico, la frazione di livelli occupati tenderebbe a discostarsi dalla frazione di plateaux ν ; tuttavia, finché il

numero di eccitazioni generate è piccolo, queste non partecipano alla conduzione poiché rimangono "intrappolate" nelle impurità presenti, e ciò mantiene la resistenza di Hall stazionaria [11]. Tuttavia, quando il numero di quasi-lacune diviene significativo, cominciano a comportarsi come un gas di particelle dotate di carica frazionaria, del tutto analogo al gas di elettroni sottostante, che esibirà un proprio effetto Hall quantistico, con particolari valori di ν . Dunque, il modello teorico predice una gerarchia di stati FQHE [11, 13], molti dei quali sono stati osservati, e questa è una delle prove più importanti del fatto che le quasi-particelle nell'effetto Hall quantistico frazionario sono una realizzazione fisica degli anioni. Si sottolinea anche un altro fatto sorprendente: queste particelle "esotiche" sono accessibili sperimentalmente con un amperometro ed un voltmetro, una situazione rara nella fisica moderna.

4.3 Il computer quantistico topologico

Dunque, alla domanda che dà il titolo a questo Capitolo si può rispondere affermativamente. E non solo gli anioni esistono realmente, ma sono anche oggetto di ricerca per una possibile applicazione pratica: il computer quantistico topologico. Un computer quantistico è una macchina (finora ancora ipotetica) che esegue calcoli manipolando gli stati di un sistema quantistico, e la peculiare possibilità di sovrapporli coerentemente permette di implementare algoritmi rapidissimi, grazie ai quali si potrebbero risolvere problemi che gli esistenti computer classici non possono attaccare per via del tempo che impiegherebbero. Per esempio, R. Feynman (1982) mostrò come un computer quantistico possa simulare un sistema a molti corpi in maniera esponenzialmente più veloce di un computer classico [13], mentre P. Shor (1994) ideò un algoritmo per computer quantistico in grado di scomporre un numero di M bit nei suoi fattori primi in un tempo a crescita poco più che polinomiale in M , mentre l'algoritmo classico più rapido che si conosca riesce ad assolvere lo stesso compito in un tempo che cresce esponenzialmente con M [13]. Con un computer quantistico si potrebbero svolgere simulazioni al momento impensabili in campi come la materia condensata o la QCD. Dunque, l'interesse sia teorico sia applicativo all'argomento è assai elevato. Il funzionamento basilare di un computer quantistico è lo stesso di una qualunque misura in meccanica quantistica: si inizializza il sistema ad un certo stato iniziale $|\psi(0)\rangle$, lo si fa evolvere unitariamente scegliendo un opportuno hamiltoniano $\hat{H}(t)$ e infine si misura lo stato finale per ottenere il risultato del calcolo [13]. L'hamiltoniano è, essenzialmente, il software da far girare, mentre l'informazione è incapsulata negli stati $|\psi(t)\rangle$; solitamente, si usa scegliere come unità d'informazione un *qubit* ("quantum bit"), cioè un sistema a due stati [13]. Gli ostacoli più grandi per il funzionamento dello schema sono di due tipi [13]:

- errori casuali, introdotti dall'interazione con l'ambiente o con l'apparato di misura, che portano il sistema in uno stato entangled con l'ambiente, con il risultato che quest'ultimo diviene parte della computazione, ma in maniera incontrollabile; si

parla di *decoerenza*, per la quale l'informazione viene condivisa con l'ambiente, ma di fatto persa dal sistema;

- errori sistematici, che avvengono qualora l'hamiltoniano non sia esattamente quello desiderato, e una piccola perturbazione provoca un grosso errore nel calcolo.

Per risolverli si cerca il più possibile di isolare il sistema dall'ambiente, e di trovare algoritmi che permettano la correzione degli errori durante il calcolo (senza che una misura "di controllo" distrugga lo stato del sistema).

L'idea del computer quantistico topologico è di avere un sistema che sia naturalmente protetto da questo genere di problemi, ed è basata proprio sul comportamento degli anioni. Se si riesce a immagazzinare l'informazione e a condurre i calcoli su di essa in maniera puramente topologica, cioè facendoli corrispondere ad elementi del gruppo delle trecce, allora il sistema sarà immune a perturbazioni locali, poiché \mathbb{B}_N è un gruppo discreto e non è possibile portarne un elemento nell'altro per mezzo di variazioni continue [13]. Il funzionamento basilare è il seguente [13]:

inizializzazione: si creano anioni in determinate posizioni spaziali, la cui configurazione contiene lo stato iniziale in maniera *globale*;

evoluzione: li si fa muovere l'uno intorno all'altro in modo da "intrecciare" le loro traiettorie spaziotemporali; come descritto nel Capitolo 3, questo modifica lo stato del sistema in maniera corrispondente alla treccia che descrive la topologia dell'intreccio e che dipende fortemente dalla sua "storia";

misura: si misura lo stato finale per ottenere il risultato del calcolo, tipicamente mediante esperimenti di interferometria per misurare la differenza di fase accumulata nel punto precedente.

Per il tipo di esperimenti che si possono usare, si rimanda a [13] e a [16]; qui si sottolinea che possono essere condotti con amperometri e voltmetri, su dispositivi che mostrano FQHE, poiché sono gli unici per i quali sia stata accertata, seppure in maniera indiretta, la possibilità di produrre anioni [13]. Il punto di forza di questo schema di funzionamento è il secondo, poiché il risultato dell'evoluzione dipende solamente dalla topologia della traiettoria delle quasi-particelle, che è pertanto insensibile alla maniera esatta in cui la traiettoria stessa viene percorsa, e quindi alle perturbazioni locali con l'ambiente o alle piccole imprecisioni dell'hamiltoniano [13]. Un'analoga protezione caratterizza anche il processo di misura. Tutto questo risulta anche dal fatto che, al contrario di ciò che accade in un computer quantistico convenzionale, l'informazione è incapsulata in maniera globale e non locale.

Tuttavia, gli anioni dei quali si è trattato finora non sono sufficienti per un computer quantistico topologico, poiché nello scambio delle coordinate il loro stato acquisisce una semplice fase moltiplicativa, che è un elemento troppo "povero" per la computazione.

Sono necessari i cosiddetti **anioni non abeliani**, che corrispondono, nel linguaggio del Capitolo 3, a rappresentazioni unitarie a dimensione più alta del gruppo delle trecce, che sono descritti non da una sola funzione d'onda, ma da un vettore di funzioni d'onda che in un loop nello spazio delle configurazioni viene moltiplicato per una matrice unitaria. Il loro nome viene dal fatto che, in generale, il gruppo delle matrici unitarie non è abeliano (la moltiplicazione tra matrici non è commutativa). La loro esistenza negli stati FQHE è teoricamente possibile se il livello fondamentale delle quasi-lacune è degenere, caso in cui il ragionamento delineato nel paragrafo precedente deve essere modificato: se esistono più autovettori linearmente indipendenti per ogni posizione delle quasi-particelle, il Teorema Adiabatico afferma soltanto che lo stato finale sarà sempre all'interno dello stesso autospazio dello stato iniziale, e questo significa che vi sarà una matrice unitaria a moltiplicare il vettore iniziale [13]. La richiesta di anioni non abeliani non è ovvia: vi sono solo due stati FQHE per i quali ne è ipotizzata l'esistenza sulla base di calcoli teorici e simulazioni numeriche, corrispondenti a $\nu = 5/2$ e a $\nu = 12/5$ [13, 16]; tuttavia, non si ha ancora una prova sperimentale certa che le eccitazioni anioniche in essi siano davvero non abeliane.

Conclusioni

La teoria degli anioni è un capitolo affascinante della Fisica. È cominciato da un'indagine critica dei fondamenti della teoria quantistica delle particelle identiche, scoprendo che l'esistenza, ormai del tutto assodata, di soli bosoni e fermioni non è l'unica possibilità. Poi, la concomitante scoperta dell'effetto Hall quantistico ha inaugurato un nuovo filone di ricerca che si è inaspettatamente unito a quello degli anioni, in un interessante parallelismo tra teoria ed esperimenti nei quali i ricercatori possono osservare statistiche "esotiche" con un semplice amperometro. Infine, l'eccitante speranza di aver finalmente trovato un modo di rendere possibile la costruzione del computer quantistico. La teoria si è intrecciata con gli esperimenti, diverse branche del sapere si sono unite grazie al lavoro collettivo di decine di persone: un magnifico esempio di Fisica.

Bibliografia

- [1] Aharonov, Y., Bohm, D., *Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory* Phys. Rev., **115**(3), 485, (1959).
- [2] Ben-Naim, A., *On the So-Called Gibbs Paradox, and on the Real Paradox*, Entropy **9**, 132-136, (2007).
- [3] Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., Laloe F., *Quantum Mechanics*, Vol. 2, Wiley-VCH, 1977.
- [4] Hatcher, A., *Algebraic Topology*, Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [5] Jaynes E.T., *The Gibbs Paradox*, in Maximum Entropy and Bayesian Methods; Smith, C. R.; Erickson, G. J.; Neudorfer, P. O., Eds.; Kluwer Academic: Dordrecht, p.1-22, 1992.
- [6] von Klitzing, K., *25 Years of Quantum Hall Effect (QHE) A Personal View on the Discovery, Physics and Applications of this Quantum Effect*, Poincaré Seminar, Paris, 2004.
- [7] Landau, L. D., Lifšič E., *Fisica teorica III- Meccanica quantistica non relativistica*, Editori riuniti university press, 2010.
- [8] Landau, L. D., Lifšič E., *Fisica teorica V- Fisica statistica*, Editori riuniti university press, 2010.
- [9] Lang, S., *Algebra Lineare*, Bollati Boringhieri, 1977.
- [10] Leinaas, J.M., Myrheim, J., *On the theory of identical particles*, Nuovo Cim. **B37**, 1, (1977).
- [11] Morandi, G, *The role of topology in classical and quantum physics*, Springer-Verlag 1992.
- [12] Nakahara, M., *Geometry, topology and physics*, Institute of Physics Publishing, 2003.

-
- [13] Nayak, C., Simon, S.H., Stern, A., Freedman, M., Das Sarma, S., *Non-Abelian Anyons and Topological Quantum Computation*, arXiv:0707.1889v2 [cond-mat.str-el].
- [14] Pauli, W., *Über ein Kriterium für Ein- oder Zweiwertigkeit der Eigenfunktionen in der Wellenmechanik. [On a criterion for one- or two-valuedness of eigenfunctions in wave mechanics]*, *Helv. Phys. Acta*, **12**(2):147–168, (1939).
- [15] Shapere, A., Wilczek, F. *Geometric Phases in Physics*, World Scientific, 1989.
- [16] Stern, A. *Anyons and the quantum Hall effect- A pedagogical review*, *Ann. Phys.*, **323**, pp. 204–249 (2008).
- [17] Wilczek, F., *Magnetic flux, angular momentum, and statistics*, *Phys. Rev. Lett.* **48**(17), 1144, (1982).
- [18] Wilczek, F., *Quantum mechanics of fractional-spin particles*, *Phys. Rev. Lett.* **49**(14), 957, (1982).
- [19] Wilczek, F. *I Qualunquoni*, in *Le Scienze*, 1.7.1991.
- [20] Wu, Y.S., *Multiparticle quantum mechanics obeying fractional statistics*, *Phy. Rev. Lett.*, **53**(2),111, (1984)