

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

LA
MATEMATICA
DEI FRATTALI

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Annamaria Montanari

Presentata da:
Martina Creddo

II Sessione
Anno Accademico 2015-2016

Introduzione

”La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l’universo), ma non si può intendere se prima non s’impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne’ quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.”

-Galileo Galilei

Gli oggetti della nostra esperienza non hanno di per sè i bordi lisci o le forme regolari di un cono, di un cerchio, di una sfera o di una retta come afferma la geometria euclidea. Il mondo in realtà è rugoso, increspato, di forma irregolare. Può sembrare strano, ma fino a non molto tempo fa non esisteva una geometria capace di descrivere i fenomeni naturali, ma ora c’è: si chiama geometria dei frattali ed è stata ideata e studiata intorno agli anni 60-70 del 900 da Benoit Mandelbrot. Le nuvole non sono sfere, le montagne non sono coni, i profili delle coste non sono cerchi: il libro di Mandelbrot descrive queste strutture apparentemente caotiche in modo matematico. I frattali sono degli insiemi, apparentemente caotici, ma che in realtà sono governati da una semplice regola matematica. In questa tesi verranno studiate le proprietà matematiche che li governano ma prima di addentrarci in questa impresa facciamo alcuni esempi di frattali che si possono trovare in natura, in modo da capire perchè sono stati studiati, perchè sono così affascinanti e capirne in modo intuitivo le principali proprietà.

Consideriamo ad esempio il **cavolo romano** Esso è in realtà un oggetto che gode di una proprietà molto sorprendente: se uno guarda questo oggetto a una distanza di dieci metri, lo potrebbe idealizzare con una piramide. Se mi concentro sulla piramide e mi avvicino a uno dei lati con l’occhio non vedo più la piramide, ma vedo ovviamente, il lato della piramide, cioè vedo una superficie. Questo accade ad esempio anche se considero una sfera, se la guardo da vicino non vedo una sfera ma vedo il piano tangente! Questo



Figura 1: Il cavolo romano

è quello che ci accade quando camminiamo sulla Terra, noi siamo talmente piccoli e camminiamo a una distanza talmente vicina che la Terra ci sembra piatta. Cambiando scala di solito cambia la "forma" dell'oggetto. Ora applichiamo la stessa cosa al cavolo romano, se guardo il cavolo romano da vicino che succede? Vedo ancora un cavolo romano!



Figura 2: cavolo romano guardato da vicino

Quindi il cavolo romano guardato da due scale completamente diverse ci sembra la stessa cosa. Se prendiamo una lente di ingrandimento e ingrandiamo ancora otteniamo di nuovo un cavolo romano. Quindi l'oggetto riproduce se stesso anche a scale molto piccole. Ovviamente a un certo punto ci si ferma ma una evidente idealizzazione matematica ci porta a pensare che potrebbero esistere oggetti che guardati a tutte le scale sono sempre uguali a se stessi, e questa proprietà viene detta autosimilarità. In natura questo non è

l'unico caso che gode di questa proprietà. Consideriamo per esempio **la felce**: guardando la figura si vede che i ramoscelli blu e rossi sono esattamente uguali a quello azzurro più grande. Un altro esempio sono gli **alberi**, essi

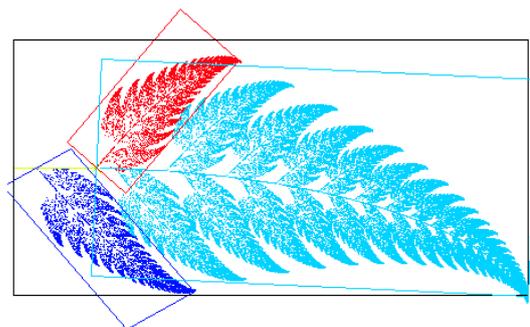


Figura 3: la felce

sono strutture apparentemente disordinate ma in realtà sono caratterizzati da una regola semplicissima: si parte dal tronco che poi si dirama in due-tre rami, ogni ramo si dirama in altri due-tre rami e così via. L'idealizzazione matematica di un albero reale porta a strutture molto utilizzate ad esempio in informatica. Se ingrandiamo un ramo, otteniamo l'albero di partenza e così via. Anche questa struttura risulta essere uguale a tutte le scale. Un

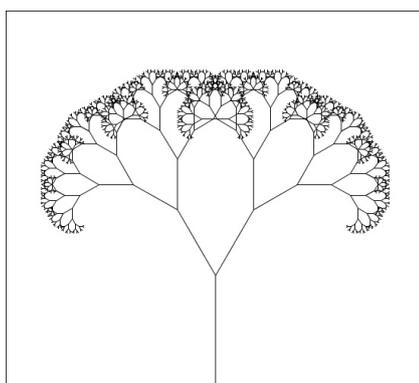


Figura 4: l'idealizzazione matematica di un albero

esempio simile è il **polmone**; infatti la struttura del polmone è simile a quella di un albero, vi sono tante piccole diramazioni che ovviamente a un certo punto si fermano. A cosa serve il polmone? Il polmone ci fa arrivare l'ossigeno e più ossigeno si prende, meglio è. L'idea è che quindi la superficie

totale di questi ramoscelli debba essere molto ampia, se la andiamo a misurare è uguale a quella di un campo da tennis(70-80 m^2)! Quindi da un lato la natura ha necessità di avere una grande superficie ma deve riuscire a farla stare nel busto, quindi in un volume molto contenuto. Il modo che la natura ha trovato per ottenere questa cosa è effettuare infinite diramazioni a ogni scala. Queste diramazioni a ogni scala, aumentano la superficie, se si prende l'albero matematico si può supporre che le diramazioni continuino fino all'infinito. In questo modo si ottiene una superficie infinita che però resta confinata in un volume finito e dunque questo è un primo esempio che ci fa capire che ci sono oggetti matematici che non vivono bene nelle dimensioni usuali: ho una superficie che è infinita e quindi non vive bene in dimensione 2, ma nemmeno in dimensione 3 perchè essa non ha volume. I frattali infatti hanno dimensione intermedia: questa è la seconda proprietà che li caratterizza.

Facciamo un ultimo esempio che è quello delle coste. Le coste, come vediamo nelle cartine geografiche sono molto frastagliate. La loro caratteristica è che la stessa frastagliatura si ripete a tutte le scale. Mandelbrot nel suo libro *'The fractal geometry of nature'* si chiede come si possa misurare la costa della Gran Bretagna.

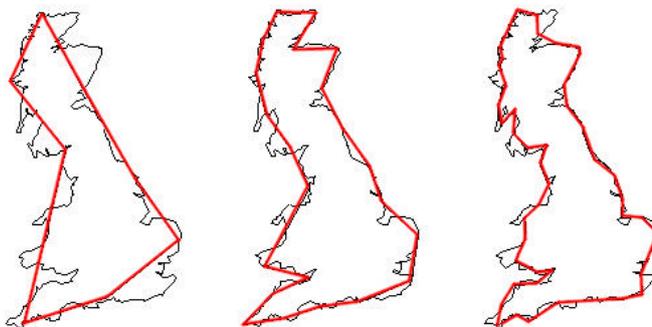


Figura 5: Approssimazioni della costa della Gran Bretagna con poligoni

Si approssima prima la costa con una poligonale. Se si usa un'approssimazione molto rozza, ad esempio una poligonale con segmenti lunghi tutti 200 km, ci risulterà che la costa è lunga all'incirca 2400 km. Se invece di 200km usiamo una poligonale con segmenti di 100 km e si ricalcola la lunghezza della costa troviamo che la lunghezza è aumentata ed è circa 2800 km. Se usiamo un'approssimazione di 50 km troveremo che la lunghezza della costa è di 3200 km circa! In realtà potremmo andare avanti e scoprire che più l'approssimazione è fine, più la lunghezza della costa tende a cresce-

re. Questo è un secondo esempio di qualcosa che sta in un'area finita (se circoscriviamo un rettangolo alla Gran Bretagna, seppur molto grande, quel rettangolo ha area finita e dunque anche quella della Gran Bretagna), però ogni volta che andiamo ad approssimare questa curva la lunghezza cresce. Questa è la stessa cosa che succedeva con il polmone. Quindi abbiamo una curva di lunghezza infinita che però sta in un'area finita.

Che cosa abbiamo capito di questi frattali "naturali"? Abbiamo capito che hanno due proprietà molto importanti che sono l'autosimilarità e il fatto di non "vivere bene" nelle dimensioni usuali, cioè avere dimensione intermedia (questa è la dimensione di Hausdorff). Dei frattali, non è stata data ancora una definizione unanime. **Noi considereremo un frattale come una figura geometrica caratterizzata dall'aver dimensione di Hausdorff non intera e dall'essere autosimilare.** Nel primo capitolo verrà fatta una breve introduzione sulle misure astratte per poi andare a definire la misura di Hausdorff e le sue proprietà, ad esempio come si comporta con le funzioni lipschitziane. Poi passeremo a definire la dimensione di Hausdorff e introdurremo due insiemi frattali molto famosi: l'insieme di Cantor e la curva di Koch, di cui ne verranno calcolate le rispettive dimensioni di Hausdorff applicando la definizione. Nel secondo capitolo parleremo delle contrazioni e daremo la definizione di insieme autosimilare. Daremo un importante teorema che lega l'autosimilarità e la dimensione di Hausdorff e applicheremo questo teorema a molti esempi di frattali. Nel terzo capitolo infine verranno descritti brevemente alcuni insiemi davvero sorprendenti: gli insiemi di Mandelbrot e di Julia, considerati frattali per la loro frastagliatura e per il fatto che pur non essendo autosimilari, la struttura di partenza si può ritrovare a tutte le scale.

Indice

Introduzione	i
1 La dimensione di Hausdorff	5
1.1 Misure astratte e misure metriche	6
1.2 Misure di Hausdorff in \mathbb{R}^N	8
1.2.1 Misura di Hausdorff e funzioni lipschitziane	13
1.3 Dimensione di Hausdorff	14
1.3.1 L'insieme di Cantor	17
1.3.2 La curva di Koch	19
2 Contrazioni e insiemi autosimilari	21
2.1 Dimensione e forma di un insieme autosimilare	25
2.2 Insiemi auto-affini	29
3 Insiemi di Mandelbrot e di Julia	31

Elenco delle figure

1	Il cavolo romano	ii
2	cavolo romano guardato da vicino	ii
3	la felce	iii
4	idealizzazione matematica di un albero	iii
5	Approssimazioni della costa della Gran Bretagna con poligoni	iv
1.1	Costruzione del fiocco di neve di Koch	6
1.2	esempi di δ -ricoprimenti	9
1.3	Costruzione dell'insieme di Cantor	18
1.4	Costruzione della curva di Koch	19
2.1	Curva di Koch	26
2.2	Triangolo di Sierpinski	27
2.3	The tree	28
2.4	Tappeto di Sierpinski	28
2.5	passi per la costruzione del pentagono di Sierpinski	29
2.6	esagono e ottagono di Sierpinski	29
2.7	la curva di Lévy	30
3.1	L'insieme di Mandelbrot e un suo ingrandimento a una scala molto piccola	31
3.2	$c = 0.31 + 0.04i$ l'insieme di Julia è connesso	33
3.3	$c=i$, insieme connesso senza parte interna	33
3.4	$c=0.194+0.6557i$, non connesso	33

Capitolo 1

La dimensione di Hausdorff

Come detto nell'introduzione, la caratteristica dei frattali, caratteristica dalla quale deriva il loro nome, è che, sebbene essi possano essere rappresentati (se non si pretende di rappresentare infinite iterazioni, cioè trasformazioni per le quali si conserva il particolare motivo geometrico) in uno spazio convenzionale a due o tre dimensioni, la loro dimensione non è intera. In effetti la dimensione di un frattale piano non può essere misurata definitamente, ma dipende strettamente dal numero di iterazioni al quale si sottopone la figura iniziale. Questa dimensione è la dimensione di Hausdorff. Prima di definire in modo preciso che cos'è questa dimensione, consideriamo un primo esempio di frattale matematico.

Consideriamo il fiocco di neve di Koch. La costruzione parte da un'isola a forma di triangolo equilatero con i lati di lunghezza unitaria. Poi si divide ciascun lato in tre intervalli, che avranno quindi lunghezza $\frac{1}{3}$. Quindi, sull'intervallo centrale di ciascuno dei tre lati, si colloca un promontorio a forma di triangolo equilatero, dai lati uguali a $\frac{1}{3}$. Si ottiene così un esagono regolare stellato, o stella di David, il cui perimetro ha lunghezza uguale a 4. Allo stesso modo si procede per ciascuno dei suoi dodici lati, e così di seguito.

Procedendo in questo modo, si ottiene una curva di lunghezza infinita: infatti a ogni passo la lunghezza aumenta di $\frac{4}{3}$ di quanto era prima. Notiamo che nonostante la curva sia di lunghezza **infinita**, sta in un'area **finita** (basta considerare il cerchio circoscritto al fiocco di neve).

Questo esempio ci fa venire in mente la costa della Gran Bretagna: ho una curva di lunghezza infinita che sta in un'area finita, questa curva ha dimensione frazionaria: questa dimensione è chiamata dimensione di Hausdorff. Secondo la definizione data da Hausdorff il fiocco di neve di Koch ha dimensione circa 1,26. In questo capitolo vedremo in dettaglio come viene definita questa dimensione, dando prima dei cenni preliminari sulle misure astratte.

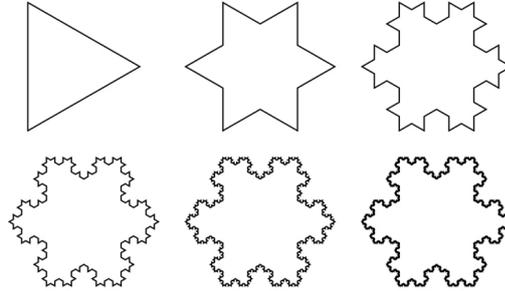


Figura 1.1: Costruzione del fiocco di neve di Koch

1.1 Misure astratte e misure metriche

Definizione 1.1 (misura su X). Se X è un arbitrario insieme non vuoto, si chiama misura su X una funzione

$$m : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$$

tale che:

1. $m(\emptyset) = 0$
2. $m(A) \leq m(B)$ se $A \subseteq B \subseteq X$ (m è monotona)
- 3.

$$m\left(\bigcup_{k \in N} A_k\right) \leq \sum_{k \in N} m(A_k)$$

se $A_k \subseteq X, \forall k \in N$ (m è numerabilmente sub-additiva)

Esempio 1. La misura esterna di Lebesgue in R^N è uno degli esempi più importanti di misura. Indicheremo tale misura con μ_N .

Definizione 1.2. Un sottoinsieme A di X si dice m -misurabile se $m(E) = m(E \cap A) + m(E \cap A')$ per ogni $E \subseteq X$.

Con A' abbiamo indicato il complementare di A rispetto a X : $A' = X \setminus A$

Osservazione 1. Si possono dimostrare le seguenti proprietà degli insiemi m -misurabili:

- Un sottoinsieme A di X è m -misurabile se, e solo se, è misurabile il suo complementare.

- Ogni sottoinsieme A di X avente m -misura nulla è m -misurabile.
- \emptyset e X sono m -misurabili
- se $(A_k)_{k \in \mathcal{A}}, (A) \subseteq N$, è una famiglia finita o numerabile di sottoinsiemi di X m -misurabili, allora

$$\bigcup_{k \in \mathcal{A}} A_k$$

e

$$\bigcap_{k \in \mathcal{A}} A_k$$

sono m -misurabili. Inoltre se $A_k \cap A_h = \emptyset$ per $k \neq h$,

$$m\left(\bigcup_{k \in \mathcal{A}} A_k\right) = \sum_{k \in \mathcal{A}} m(A_k)$$

- Se A e B sono sottoinsiemi m -misurabili di X , allora $A \setminus B$ è m -misurabile. Inoltre se $B \subseteq A$ e $m(B) < +\infty$,

$$m(A \setminus B) = m(A) - m(B)$$

- Se $(A_k)_{k \in N}$ è una successione di sottoinsiemi m -misurabili di X e se $(A_k)_{k \in N}$ è monotona crescente, allora

$$m\left(\lim_{k \rightarrow \infty} A_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(A_k)$$

- Se $(A_k)_{k \in N}$ è una successione di sottoinsiemi m -misurabili di X e se $(A_k)_{k \in N}$ è monotona decrescente e se $m(A_1) < +\infty$ allora

$$m\left(\lim_{k \rightarrow \infty} A_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(A_k)$$

Se m è una misura su uno spazio metrico (X, d) risulta interessante studiare la m -misurabilità dei sottoinsiemi chiusi (o, equivalentemente aperti) di X .

Definizione 1.3 (misura metrica). Se m è una misura su (X, d) , si dice che m è una misura metrica rispetto alla distanza d se

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B), \forall A, B \subseteq X : d(A, B) > 0$$

Teorema 1.1.1 (Carathéodory). *Se m è una misura metrica su (X, d) , ogni sottoinsieme chiuso di X è m -misurabile.*

Corollario 1.1.2. *Se m è una misura metrica su (X, d) , ogni sottoinsieme aperto di X è m -misurabile.*

Definizione 1.4. Una famiglia \mathcal{A} di sottoinsiemi di X è chiamata σ -algebra se

1. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$
2. $A \setminus B \in \mathcal{A}$ se A e $B \in \mathcal{A}$
- 3.

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$$

se $A_k \in \mathcal{A}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$

Definizione 1.5. L'intersezione di tutte le σ -algebre contenenti i chiusi (e quindi gli aperti) di X è una σ -algebra i cui elementi si chiamano **boreliani** di (X, d) .

Proposizione 1.1.3. *Se m è una misura metrica su (X, d) ogni boreliano di (X, d) è m -misurabile.*

1.2 Misure di Hausdorff in \mathbb{R}^N

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, poniamo

$$\omega_\alpha := \frac{\pi^{\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2} + 1)}, \quad (1.1)$$

dove Γ indica la *funzione gamma* di Eulero definita, per $s > 0$, nel modo seguente

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$$

È importante osservare che il numero reale positivo ω_α , quando α è un intero positivo, è la misura di Lebesgue α dimensionale del disco unitario di \mathbb{R}^α . Per ogni sottoinsieme non vuoto B di \mathbb{R}^N poniamo

$$r(B) := \frac{1}{2} \text{diam}(B) := \frac{1}{2} \{ \sup |x - y|, x, y \in B \}$$

Poniamo inoltre $m_\alpha(\emptyset) = 0$ e, se $B \neq \emptyset$,

$$m_\alpha(B) = \omega_\alpha(r(B))^\alpha \quad (1.2)$$

Esempio 2. *Sia*

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leq r^2\}$$

il disco di \mathbb{R}^3 di centro (a, b, c) e raggio r . Risulta $r(B) = r$ e $m_\alpha(B) = \omega_\alpha r^\alpha$.
In particolare

$$m_\alpha(B) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi r^3, & \text{se } \alpha = 3, \\ \pi r^2, & \text{se } \alpha = 2, \\ 2r, & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

Definizione 1.6 (δ -ricoprimento). Se A è un arbitrario sottoinsieme di \mathbb{R}^N e se δ è un numero reale positivo, si chiama δ -ricoprimento di A una famiglia $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$ di sottoinsiemi di \mathbb{R}^N tale che:

1. \mathcal{A} è finito o numerabile,
2. $\text{diam}(B_k) \leq \delta$, per ogni $k \in \mathcal{A}$,
- 3.

$$A \subseteq \bigcup_{k \in \mathcal{A}} B_k$$



Figura 1.2: esempi di δ -ricoprimenti

Definiamo:

$$H_\alpha^{(\delta)}(A) := \inf \left\{ \sum_{k \in \mathcal{A}} m_\alpha(B_k) / (B_k)_{k \in \mathcal{A}}, \delta\text{-ricoprimento di } A \right\}$$

Se $0 < \delta' < \delta$ ogni δ' ricoprimento di A è anche un δ -ricoprimento di A ; pertanto

$$H_\alpha^{(\delta)}(A) \leq H_\alpha^{(\delta')}(A).$$

La funzione

$$]0, +\infty[\ni \delta \mapsto H_\alpha^{(\delta)}(A) \in [0, +\infty]$$

è quindi monotona decrescente e, di conseguenza, ha limite in $[0, +\infty]$ per $\delta \mapsto 0^+$.

Definizione 1.7 (misura di Hausdorff α -dimensionale). Si chiama **misura di Hausdorff** α -dimensionale di A il numero reale esteso

$$H_\alpha := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\alpha^{(\delta)}(A) = \sup_{\delta > 0} H_\alpha^{(\delta)}(A)$$

Osservazione 2. Poiché esiste una iniezione naturale di \mathbb{R}^N in \mathbb{R}^{N+p} , $p \geq 1$ (basta infatti identificare \mathbb{R}^N col sottospazio $\mathbb{R}^N \times \{0\}$, $0 \in \mathbb{R}^p$), ogni sottoinsieme di \mathbb{R}^N è quindi anche contenuto in \mathbb{R}^{N+p} . Tuttavia la misura di Hausdorff α -dimensionale di A **non** dipende dallo spazio euclideo nel quale A si considera immerso. Basta infatti osservare che

$$m_\alpha(B \cap \mathbb{R}^N) \leq m_\alpha(B), \forall B \subseteq \mathbb{R}^{N+p}.$$

Proposizione 1.2.1. $H_\alpha^{(\delta)}$ e H_α sono misure su \mathbb{R}^N . Inoltre H_α è una misura metrica rispetto alla distanza euclidea. Precisamente:

- $H_\alpha^{(\delta)}(\emptyset) = H_\alpha(\emptyset) = 0$
- $H_\alpha^{(\delta)}$ e H_α sono sub-additive
- $dist(A, B) > 0 \Rightarrow H_\alpha(A \cup B) = H_\alpha(A) + H_\alpha(B)$

Dimostrazione. Proviamo inanzi tutto che $H_\alpha^{(\delta)}$ è sub-additiva su \mathbb{R}^n . Scegliamo

$$\{A_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n.$$

Supponiamo che

$$A_k \subset \bigcup_{j=1}^\infty C_j^k$$

e che $\text{diam}C_j^k \leq \delta$; quindi $\{C_j^k\}_{j,k=1}^\infty$ ricopre $\bigcup_{k=1}^\infty A_k$. Allora:

$$H_\alpha^{(\delta)}\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) \leq \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \omega_\alpha \left(\frac{\text{diam}C_j^k}{2}\right)^\alpha.$$

Prendendo l'inf. troviamo:

$$H_\alpha^{(\delta)}\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) \leq \sum_{k=1}^\infty H_\alpha^{(\delta)}(A_k).$$

Proviamo le affermazioni relative a H_α . Prima di tutto

$$H_\alpha(\emptyset) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\alpha^{(\delta)}(\emptyset) = 0.$$

Inoltre se $A \subseteq \bigcup_{k \in N} A_k$, per ogni $\delta > 0$ si ha:

$$H_\alpha^{(\delta)}(A) \leq \sum_{k \in N} H_\alpha^{(\delta)}(A_k) \leq \sum_{k \in N} H_\alpha(A_k).$$

E quindi:

$$H_\alpha(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\alpha^{(\delta)}(A) \leq \sum_{k \in N} H_\alpha(A_k).$$

Con questo è provato che H_α è monotona e numerabilmente sub-additiva e che, quindi, è una misura su \mathbb{R}^N . Dimostriamo infine che H_α è una misura metrica.

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^N$ tali che $d(A, B) > 0$. Dobbiamo provare che

$$H_\alpha(A \cup B) = H_\alpha(A) + H_\alpha(B).$$

Ovviamente, poiché m è sub-additiva, basta dimostrare la disuguaglianza

$$H_\alpha(A \cup B) \geq H_\alpha(A) + H_\alpha(B). \quad (1.3)$$

Se $H_\alpha(A \cup B) = +\infty$ la (1.3) è ovvia. Supponiamo quindi $H_\alpha(A \cup B) < +\infty$. Essendo $H_\alpha^{(\delta)} \leq H_\alpha$ sarà allora

$$H_\alpha^{(\delta)}(A \cup B) < +\infty, \forall \delta > 0.$$

Fissato ad arbitrio $\epsilon > 0$, scegliamo un δ -ricoprimento $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$ di $A \cup B$, con $0 < \delta < d(A, B)$, tale che

$$H_\alpha^{(\delta)}(A \cup B) + \epsilon > \sum_{k \in \mathcal{A}} m_\alpha(B_k). \quad (1.4)$$

Poniamo ora $\mathcal{A}' = \{k \in \mathcal{A} / B_k \cap A \neq \emptyset\}$ e $\mathcal{A}'' = \{k \in \mathcal{A} / B_k \cap B \neq \emptyset\}$. Poiché $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$ è un δ -ricoprimento di $A \cup B$, le famiglie $(B_k)_{k \in \mathcal{A}'}$ e $(B_k)_{k \in \mathcal{A}''}$ sono δ -ricoprimenti, rispettivamente, di A e di B . Se $0 < \delta < d(A, B)$ risulta poi $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}'' = \emptyset$. Infatti, se esistesse $k \in \mathcal{A}' \cap \mathcal{A}''$, gli insiemi $B_k \cap A$ e $B_k \cap B$ sarebbero entrambi non vuoti, e risulterebbe,

$$d(A, B) \leq \text{diam}(B_k) \leq \delta,$$

contrariamente all'ipotesi.

Da $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}'' = \emptyset$ e da (1.4) otteniamo allora

$$H_\alpha^{(\delta)}(A \cup B) + \epsilon > \sum_{k \in \mathcal{A}'} m_\alpha(B_k) + \sum_{k \in \mathcal{A}''} m_\alpha(B_k) \geq H_\alpha^{(\delta)}(A) + H_\alpha^{(\delta)}(B)$$

per $0 < \delta < d(A, B)$. Da questa, per $\delta, \epsilon \rightarrow 0$, si ottiene la (1.3). □

Corollario 1.2.2. *Ogni boreliano di \mathbb{R}^N è H_α misurabile qualunque sia $\alpha \geq 0$*

Dimostrazione. Segue direttamente dalla proposizione precedente e dalla Proposizione 1.1.3. □

La misura di Hausdorff H_α è regolare nel senso seguente:

Teorema 1.2.3. *Qualunque sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ esiste un boreliano B di \mathbb{R}^N tale che*

$$B \supseteq A \text{ e } H_\alpha(B) = H_\alpha(A)$$

Dimostrazione. Se $H_\alpha(A) = +\infty$ l'affermazione è banale: in questo caso, infatti, basta prendere $B = \bar{A}$. Supponiamo allora $H_\alpha(A) < +\infty$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un $\frac{1}{k}$ -ricoprimento di A , $(B_j^k)_{j \in \mathcal{A}_k}$, tale che

$$\sum_{j \in \mathcal{A}_k} m_\alpha(B_j^k) < H_\alpha^{(1/k)}(A) + \frac{1}{k}$$

Poniamo

$$B^k = \bigcup_{j \in \mathcal{A}_k} \bar{B}_j^k \quad B = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B^k.$$

L'insieme B è un boreliano di \mathbb{R}^N contenente A e

$$H_\alpha^{(1/k)}(B) \leq H_\alpha^{(1/k)}(A) + \frac{1}{k} \tag{1.5}$$

in quanto

$$H_\alpha^{(1/k)}(B) \leq H_\alpha^{(1/k)}(B^k) \leq \sum_{j \in \mathcal{A}_k} m_\alpha(\bar{B}_j^k) < H_\alpha^{(1/k)}(A) + \frac{1}{k}.$$

Per $k \rightarrow +\infty$ da (1.5) si trae $H_\alpha(B) \leq H_\alpha(A)$. D'altra parte, essendo $A \subseteq B, H_\alpha(A) \leq H_\alpha(B)$. Quindi $H_\alpha(A) = H_\alpha(B)$. \square

Inoltre abbiamo un altro importante risultato che riguarda la misura di Hausdorff N -dimensionale:

Teorema 1.2.4. *Se $A \subseteq \mathbb{R}^N$ allora la misura di Hausdorff N -dimensionale di A è uguale alla misura di Lebesgue di A , cioè:*

$$H_N(A) = \mu_N(A)$$

Ora riportiamo alcuni importanti risultati per quanto riguarda la misura di Hausdorff e le funzioni lipschitziane.

1.2.1 Misura di Hausdorff e funzioni lipschitziane

Definizione 1.8. Una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, $A \subseteq \mathbb{R}^p$, si dice lipschitziana in A se esiste una costante $L \geq 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in A \quad (1.6)$$

la costante L che figura al secondo membro di questa disuguaglianza si dice che è una costante di Lipschitz di f .

Esempio 3. *Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una funzione lipschitziana con costante di Lipschitz $L = \|T\|$. Infatti*

$$|T(x) - T(y)| = |T(x - y)| \leq \|T\| |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^p.$$

Esempio 4. *Anche una isometria $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una funzione lipschitziana, infatti:*

$$|F(x) - F(y)| = |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Quindi, ogni isometria è una funzione lipschitziana con costante di Lipschitz $L = 1$. Dato che le trasformazioni ortogonali, le traslazioni sono isometrie, allora sono anche funzioni lipschitziane.

Il principale risultato che riguarda le funzioni lipschitziane e la misura di Hausdorff è il seguente:

Teorema 1.2.5. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^p$ e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}^N$ una funzione lipschitziana con costante di Lipschitz L .*

Allora, per ogni $\alpha \geq 0$, risulta

$$H_\alpha(f(A)) \leq L^\alpha H_\alpha(A). \quad (1.7)$$

Dimostrazione. Proviamo che per ogni $\delta > 0$ risulta

$$H_\alpha^{(L\delta)}(f(A)) \leq L^\alpha H_\alpha^{(\delta)}(A) \quad (1.8)$$

Da questa, per $\delta \rightarrow 0+$, seguirà (1.7).

Osserviamo prima di tutto che per ogni $B \subseteq A$,

$$\text{diam}(f(B)) = \sup_{x,y \in B} |f(x) - f(y)| \leq \sup_{x,y \in B} |x - y| = L \text{diam}(B). \quad (1.9)$$

Allora, se $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$ è un arbitrario δ -ricoprimento di A , $(f(B_k))_{k \in \mathcal{A}}$ è un $L\delta$ -ricoprimento di $f(A)$, e quindi

$$H_\alpha^{L\delta}(f(A)) \leq \sum_{k \in \mathcal{A}} m_\alpha(f(B_k)) \leq \text{per la (1.9)} \sum_{k \in \mathcal{A}} L^\alpha m_\alpha(B_k).$$

Da questa, per l'arbitrarietà del δ -ricoprimento $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$ di A , segue la (1.8). \square

1.3 Dimensione di Hausdorff

La definizione di dimensione di Hausdorff di un sottoinsieme di \mathbb{R}^N si fonda sulla seguente proposizione:

Proposizione 1.3.1. *Se A è un sottoinsieme di \mathbb{R}^N tale che*

$$H_\alpha < +\infty$$

per un opportuno $\alpha \geq 0$, allora

$$H_{\alpha+t}(A) = 0 \quad \forall t > 0 \quad (1.10)$$

Dimostrazione. Per ogni δ e $t > 0$ e per ogni δ -ricoprimento di A , $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$, si ha

$$\begin{aligned} H_{\alpha+t}^{(\delta)}(A) &\leq \sum_{k \in \mathcal{A}} m_{\alpha+t}(B_k) = \sum_{k \in \mathcal{A}} \omega_{\alpha+t} \left(\frac{\text{diam}(B_k)}{2} \right)^{\alpha+t} \\ &\leq \left(\text{poiché } \text{diam}(B_k) \leq \delta \right) \frac{\omega_{\alpha+t}}{\omega_\alpha} \left(\frac{\delta}{2} \right)^t \sum_{k \in \mathcal{A}} \omega_\alpha \left(\frac{\text{diam}(B_k)}{2} \right)^\alpha = \end{aligned}$$

$$= (\text{posto } c_{\alpha,t} = \frac{\omega_{\alpha+t}}{\omega_\alpha} 2^{-t}) c_{\alpha,t} \delta^t \sum_{k \in \mathcal{A}} m_\alpha(B_k).$$

Prendendo, all'ultimo membro, l'estremo inferiore rispetto a tutti i δ -ricoprimenti di A , si ottiene

$$H_{\alpha+t}^{(\delta)}(A) \leq c_{\alpha,t} \delta^t H^{(\delta)}(A) \leq c_{\alpha,t} \delta^t H_\alpha(A).$$

Per $\delta \rightarrow 0+$ l'ultimo membro di queste disuguaglianze tende a zero, in quanto $t > 0$ e $H_\alpha(A) < +\infty$ per ipotesi. Allora

$$H_{\alpha+t}(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} H_{\alpha+t}^{(\delta)}(A) = 0.$$

□

Corollario 1.3.2. Per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^N$ risulta

$$H_{N+t}(A) = 0 \quad \forall t > 0 \tag{1.11}$$

Dimostrazione. Se $D(0, k)$ indica il disco di \mathbb{R}^N di centro 0 e raggio k , risulta

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap D(0, k))$$

e quindi, per la sub-additività numerabile della misura di Hausdorff,

$$H_{N+t}(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} H_{N+t}(A \cap D(0, k)). \tag{1.12}$$

D'altra parte

$$H_N(A \cap D(0, k)) = \mu_N(A \cap D(0, k)) \leq \mu_N(D(0, k)) \leq \omega_N k^N < +\infty,$$

e quindi, per la proposizione precedente

$$H_{N+t}(A \cap D(0, k)) = 0 \quad \forall t > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Da questa e dalla (1.12) segue subito la (1.11). □

Definizione 1.9 (Dimensione di Hausdorff). Si chiama **dimensione di Hausdorff** di un sottoinsieme A di \mathbb{R}^N il numero reale non negativo

$$\alpha(A) := \inf \{s > 0 / H_s(A) = 0\} \tag{1.13}$$

Osserviamo esplicitamente che per il Corollario 1.3.2, qualunque siano $A \subseteq \mathbb{R}^N$ e $s > N$ risulta $H_s(A) = 0$. Pertanto

$$\alpha(A) \leq N \text{ per ogni } A \subseteq \mathbb{R}^N$$

Proposizione 1.3.3. *Se A è un sottoinsieme di \mathbb{R}^N avente dimensione di Hausdorff $\alpha(A) > 0$, allora*

$$H_t(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } t > \alpha(A) \\ +\infty & \text{se } 0 \leq t < \alpha(A) \end{cases}$$

Dimostrazione. Se $t > \alpha(A)$ esiste $s < t$ tale che $H_s(A) = 0$. Per la proposizione 1.3.1 risulta quindi $H_t(A) = 0$.

Se $0 \leq t < \alpha(A)$ e se fosse, ragionando per assurdo, $H_t(A) < +\infty$, ancora per la Proposizione 1.3.1 si avrebbe $H_s(A) = 0$ per ogni $s > t$. Ne verrebbe per la definizione 1.9, $\alpha(A) \leq t$, contro l'ipotesi. \square

Concludiamo con alcuni esempi:

Esempio 5. *Se $a \in \mathbb{R}^N$, allora*

$$H_0(\{a\}) = 1.$$

Infatti se $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$ è un δ -ricoprimento di A , allora

$$\sum_{k \in \mathcal{A}} m_0(B_k) = \sum_{k \in \mathcal{A}} \omega_0(r(A))^0 = \omega_0 \text{card} \mathcal{A} = \text{card} \mathcal{A} \geq 1$$

Pertanto $H_0^{(\delta)}(\{a\}) \leq 1$ per ogni $\delta > 0$. D'altra parte, essendo ovviamente $(\{a\})$ un δ -ricoprimento di $\{a\}$, qualunque sia $\delta > 0$, risulta

$$H_0^{(\delta)}(\{a\}) \leq m_0(\{a\}) = \omega_0(r\{a\})^0 = 1$$

Allora $H_0^{(\delta)}(A) = 1$ per ogni $\delta > 0$, e quindi $H_0(A) = 1$.

Esempio 6. *Se A è un sottoinsieme di \mathbb{R}^N finito o numerabile allora*

$$H_0(A) = \text{card}(A) \text{ e } \alpha(A) = 0.$$

Infatti, se $A = \{a_k/k \in \mathcal{A}\}$ con $\mathcal{A} \subseteq N$ e $a_k \neq a_h$ se $k \neq h$, allora

$$H_0(A) = H_0\left(\bigcup_{k \in \mathcal{A}} \{a_k\}\right) = (\{a_k\} \text{ è } H_0\text{-misurabile in quanto chiuso e}$$

$$\{a_k\} \cap \{a_h\} = \emptyset \text{ per } k \neq h)$$

$$\sum_{k \in \mathcal{A}} H_0(\{a_k\}) = H_0(\{a_k\}) = 1$$

per l'Esempio 3 $\text{card} \mathcal{A} = \text{card} A$.

Questo dimostra che $H_0(A) = \text{card}A$. Per dimostrare che $\alpha(A) = 0$ basta osservare che, per ogni $t > 0$, si ha

$$H_t(A) \leq \sum_{k \in \mathcal{A}} H_t(\{a_k\}) = 0$$

in quanto, essendo $H_0(\{a_k\}) = 1$, risulta $H_t(\{a_k\}) = 0$ per ogni $t > 0$.

Esempio 7. Ogni sottoinsieme μ_p -misurabile di \mathbb{R}^p avente misura (di Lebesgue) positiva ha dimensione di Hausdorff p . Infatti se $A \subseteq \mathbb{R}^p$ e $\mu_p(A) > 0$, allora per il Teorema 1.2.4, $H_p(A) > 0$. Di conseguenza, se s è un numero reale non negativo tale che $H_s(A) = 0$, deve essere $s > p$. In altri termini

$$\inf \{s \geq 0 / H_s(A) = 0\} \geq p,$$

D'altra parte, poiché $A \subseteq \mathbb{R}^p$, $\alpha(A) \leq p$. In definitiva $\alpha(A) = p$.

1.3.1 L'insieme di Cantor

Il piú noto sottoinsieme di \mathbb{R} avente dimensione di Hausdorff non intera è l'insieme di Cantor C , così definito:

$$C = \bigcap_{k \geq 0} C_k \tag{1.14}$$

dove $(C_k)_{k \geq 0}$ è la successione di plurintervalli chiusi definita, per ricorrenza, col procedimento seguente:

- C_0 è l'intervallo chiuso $[0, 1]$.
- C_1 si ottiene rimuovendo da C_0 l'intervallo aperto $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, quindi $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$.
- C_2 si ottiene rimuovendo, dal centro di ogni intervallo componente C_1 , un intervallo aperto di lunghezza $(\frac{1}{3})^2$; quindi $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$.

In generale, C_{k+1} si ottiene rimuovendo dal centro di ogni intervallo componente C_k un intervallo aperto di lunghezza $(\frac{1}{3})^{k+1}$.

Potremmo, prima di tutto, cercare di calcolare la misura di Lebesgue di questo insieme. Notiamo che il plurintervallo C_k è quindi unione di 2^k



Figura 1.3: Costruzione dell'insieme di Cantor

intervalli chiusi e disgiunti ciascuno dei quali ha lunghezza $(\frac{1}{3})^k$. La lunghezza totale di ogni C_k è quindi $(\frac{2}{3})^k$. La misura di Lebesgue di C è:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 0.$$

Notiamo che quindi la misura di Lebesgue è nulla pur essendo un insieme non vuoto. Questa misura non è molto vantaggiosa. Proviamo, invece, a trovare la dimensione e la misura di Hausdorff di questo insieme.

Se indichiamo con $\mathcal{I}_k = (I_{k,j})_{j=1, \dots, 2^k}$ la famiglia di questi intervalli di lunghezza $(\frac{1}{3})^k$, allora \mathcal{I}_k è un δ_k -ricoprimento di C con $\delta_k = (\frac{1}{3})^k$. Per ogni $t \geq 0$ risulta quindi

$$H_t^{(\delta_k)}(C) \leq \sum_{j=1}^{2^k} m_t(I_{k,j}) = 2^k \omega_t \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^k\right)^t = \omega_t 2^{-t} 2^k 3^{-kt}$$

Da questa disuguaglianza, indicando con s il numero reale

$$s := \frac{\ln 2}{\ln 3} \tag{1.15}$$

si trae

$$H_t^{(\delta_k)}(C) \leq \omega_t 2^{-t} \exp(k(s-t)\log 3)$$

e quindi, per ogni $t > s$

$$H_t(C) = \lim_{k \rightarrow +\infty} H_t^{(\delta_k)}(C) = 0$$

mentre, per $t=s$,

$$H_s(C) = \lim_{k \rightarrow +\infty} H_s^{(\delta_k)}(C) \leq \omega_s 2^{-s}.$$

Si può dimostrare che vale anche la disuguaglianza inversa:

$$H_s(C) \geq \omega_s 2^{-s}$$

Pertanto

$$H_s(C) = \omega_s 2^{-s} \quad \alpha(C) = s$$

1.3.2 La curva di Koch

La curva di Koch, descritta per la prima volta da Helge Von Koch, matematico svedese, nel 1904 è definita ricorsivamente in questo modo: partiamo dal primo intervallo C_0 , un segmento che possiamo identificare con l'intervallo $[0, 1]$, poi dividiamo C_0 in tre parti uguali. Togliamo la parte centrale e la sostituiamo con una "punta" costituita da due lati lunghi un terzo della linea originaria che formano un angolo pari a 60 gradi. In questo modo si ottiene una spezzata costituita da quattro segmenti uguali. Si ripete la stessa operazione su ognuno di questi quattro segmenti, ottenendo così una spezzata più complessa formata da 16 piccoli segmenti, lunghi ciascuno $\frac{1}{9}$ della linea originaria. Si prosegue così all'infinito e, il limite di questa sequenza è la curva di Koch. Notiamo che tre curve di Koch, originate da tre lati di un

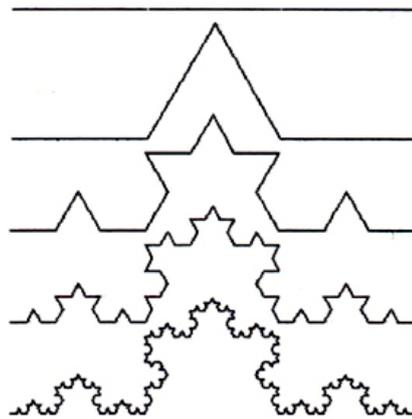


Figura 1.4: Costruzione della curva di Koch

triangolo equilatero generano il fiocco di neve di Koch visto a inizio capitolo. Dato che la curva di Koch, che denotiamo con K è costruita ricorsivamente come l'insieme di Cantor, possiamo ripetere lo stesso ragionamento che abbiamo utilizzato per trovare la dimensione di Hausdorff di C e otterremo che:

$$\alpha(K) = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,2618.$$

va infine fatta una piccola osservazione su questa curva molto particolare: è una curva continua, che non interseca mai se stessa, perchè i nuovi triangoli costruiti su ciascun lato sono sempre abbastanza piccoli da evitare di urtarsi tra loro, ma pur essendo continua non ha tangente in nessun punto.

Osservazione 3. Per costruire la curva di Koch divido per tre il segmento $[0, 1]$ e poi costruisco un ‘triangolo’ nell’intervallo in mezzo, così da tre segmenti ne ottengo quattro e così via. La sua dimensione di Hausdorff è $\frac{\ln 4}{\ln 3}$. Allo stesso modo, nell’insieme di Cantor divido l’intervallo unitario in tre segmenti e ne prendo solo due e così via. La sua dimensione di Hausdorff è $\frac{\ln 2}{\ln 3}$. Se avessi un frattale costruito dividendo l’intervallo unitario in tre parti e poi prendendone cinque (e così via), la sua dimensione sarebbe $\frac{\ln 5}{\ln 3}$.

Capitolo 2

Contrazioni e insiemi autosimilari

In questo capitolo parleremo dell'autosimilarità, cioè la proprietà che hanno gli insiemi frattali di ripetersi sempre uguali a tutte le scale. Un insieme autosimilare, in poche parole, è un insieme formato da miniature di sé stesso. Iniziamo a dare le definizioni necessarie per descrivere matematicamente questa meravigliosa proprietà.

Definizione 2.1. Diciamo che la mappa $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una contrazione se esiste una costante $c \in (0, 1)$ in modo che la disuguaglianza

$$\|\psi(x) - \psi(y)\| \leq c \|x - y\|$$

valga per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$.

In altre parole, una mappa è una contrazione se soddisfa la definizione di essere Lipschitz con una costante c minore di uno. Noi definiamo la costante di ψ di essere la più piccola tra tutte le c e la denotiamo con $L(\psi)$. Secondo il principio di contrazione in uno spazio metrico completo, ψ ha un unico punto fisso \bar{x} , cioè esiste un unico punto \bar{x} che soddisfa l'equazione

$$\bar{x} = \psi(\bar{x}) \tag{2.1}$$

Scriviamo semplicemente $F(\psi)$ per questo punto fisso.

Ora estendiamo l'equazione (2.1) a diverse contrazioni e diamo la seguente definizione:

Definizione 2.2. Sia $m \geq 2$ un numero naturale e sia $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m\}$ un insieme di contrazioni definite su \mathbb{R}^n . Diciamo che un insieme $V \neq \emptyset$, compatto in \mathbb{R}^n è autosimilare se soddisfa

$$V = \bigcup_{i=1}^m \psi_i(V) \tag{2.2}$$

Osservazione 4. Non viene richiesto che le contrazioni siano "simili" nel senso geometrico. Sono solo contrazioni nel senso generale. Però altre definizioni di autosimilarità sono un po' più rigorose e insistono sul fatto che non tutte le contrazioni sono solo simili ma devono anche soddisfare una certa condizione di separazione, cioè che le miniature devono essere reciprocamente separate.

Per spiegare meglio questo concetto diamo una condizione semplificata che chiamiamo "condizione del quadrato".

Condizione del quadrato: esiste un quadrato Q tale che i quadrati Q_1, \dots, Q_m che si ottengono come immagini di Q tramite le contrazioni ψ_1, \dots, ψ_m rispettivamente sono tutti contenuti in Q e hanno in comune a due a due al più due punti del bordo (perimetro).

Se vale la condizione del quadrato l'insieme V gode della proprietà seguente: le contrazioni ψ_1, \dots, ψ_m trasformano V in copie rimpicciolite di V sostanzialmente prive di punti comuni e dunque V è un oggetto molto strano, del quale è difficile stabilire la dimensione.

Infatti possiamo considerare (2.2) proprio come l'equazione (2.1), come il punto fisso di una qualche contrazione. Ragioniamo così: sia $K(\mathbb{R}^n)$ l'insieme di tutti gli insiemi compatti non vuoti di \mathbb{R}^n . Per un elemento $A \in K(\mathbb{R}^n)$ poniamo

$$N_\epsilon(A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n; \text{dist}(x, A) \equiv \min_{y \in A} |x - y| \leq \epsilon \right\}$$

e diciamo che $N_\epsilon(A)$ è l' ϵ -collare di A . L'insieme $K(\mathbb{R}^n)$ diventa uno spazio metrico quando diamo la seguente definizione:

Definizione 2.3 (Distanza di Hausdorff).

$$d_H(A, B) = \min_{\epsilon \geq 0} \{A \subset N_\epsilon(B), B \subset N_\epsilon(A)\}$$

Il vantaggio di avere questa distanza è dato da questo teorema:

Teorema 2.0.4. *Con la distanza di Hausdorff d_H , $K(\mathbb{R}^n)$ diventa uno spazio metrico completo.*

Dimostrazione. Sia $\{A_i\}$ una successione di Cauchy arbitraria in $K(\mathbb{R}^n)$ tale che per ogni $\epsilon > 0$ possiamo scegliere un $m \equiv m(\epsilon)$ abbastanza grande con $d_H(A_p, A_q) \leq \epsilon$ per ogni coppia di interi p e q , $p \geq q \geq m$. Dobbiamo far vedere che la successione $\{A_i\}$ converge rispetto alla distanza di Hausdorff a un punto di $K(\mathbb{R}^n)$. Poniamo

$$E_k = \overline{\bigcup_{i=k}^{\infty} A_i}.$$

Ogni E_k è un insieme compatto. Dato che la successione $\{E_k\}$ è monotona decrescente, l'insieme

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$$

appartiene a $K(\mathbb{R}^n)$. Da qui segue che

$$E \subset E_q = \overline{\bigcup_{i=q}^{\infty} A_i} \subset N_{\epsilon}(A_q).$$

Dall'altro lato, dato $x \in A_q$, esistono punti $y_p \in A_p$ tali che $\|x - y_p\| \leq \epsilon$, per ogni intero p , $p \geq q$, perchè $A_q \subset N_{\epsilon}(A_p)$. Se z è un punto di accumulazione della successione $\{y_p\}$, abbiamo che $\|x - z\| \leq \epsilon$. Inoltre, per ogni $p \geq k$ abbiamo

$$y_p \in A_p \subset E_p \subset E_k,$$

e E_k è compatto, otteniamo che $z \in E_k$ e dato che k era arbitrario ciò implica che $z \in E$. Quindi abbiamo che

$$x \in N_{\epsilon}(\{z\}) \subset N_{\epsilon}(E).$$

Così $d_H(E, A_q) \leq \epsilon$ e cioè la successione $\{A_i\}$ converge a E . □

Useremo questo risultato per mostrare che esiste un unico insieme autosimilare.

Teorema 2.0.5. *Data una famiglia di m contrazioni $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m\}$, $m \geq 2$, esiste un unico insieme autosimilare V .*

Dimostrazione. Definiamo prima una mappa $\Phi : K(\mathbb{R}^n) \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ tale che:

$$\Phi(A) = \bigcup_{i=1}^m \psi_i(A), \tag{2.3}$$

dove le $\psi_i(A)$ sono le immagini di A tramite le ψ_i . Dato che l'immagine di un insieme compatto tramite una mappa continua è compatta e che l'unione finita di insiemi compatti è compatta ci assicura che Φ manda $K(\mathbb{R}^n)$ in $K(\mathbb{R}^n)$. Poiché per il teorema precedente $K(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio metrico completo, rimane da dimostrare che la mappa Φ è una contrazione su $K(\mathbb{R}^n)$. Così il nostro unico punto fisso $F(\Phi) \in K(\mathbb{R}^n)$ sarà il nostro desiderato insieme autosimilare.

Ora per gli insiemi arbitrari $A_0, A_1, A_2, A_3 \in K(\mathbb{R}^n)$ valgono le seguenti proprietà:

- $d_H(\psi_i(A_0), \psi_i(A_1)) \leq L(\psi_i)d_H(A_0, A_1)$.
- $d_H(A_0 \cup A_1, A_2 \cup A_3) \leq \max \{d_H(A_0, A_2), d_H(A_1, A_3)\}$.

Per provare la prima, poniamo $s = d_H(A_0, A_1)$; poi per ogni $x \in A_0$ esiste un certo $y \in A_1$ tale che $\|x - y\| \leq s$. Questo implica che

$$\|\psi_i(x) - \psi_i(y)\| \leq L(\psi_i) \|x - y\| \leq L(\psi_i)s,$$

e quindi $\psi_i(x) \in N_t(\psi_i(A_1))$, dove scriviamo per semplicità $L(\psi_i)s = t$. Da questo otteniamo che $\psi_i(A_0) \subset N_t(\psi_i(A_1))$, dato che abbiamo scelto x in modo arbitrario. Similmente otteniamo la seconda relazione di inclusione. Poi, per dimostrare la seconda proprietà poniamo $s = d_H(A_0, A_2)$ e $t = d_H(A_1, A_3)$; l'inclusione $A_0 \subset N_s(A_2)$ e $A_1 \subset N_t(A_3)$ danno le inclusioni

$$A_0 \cup A_1 \subset N_s(A_2) \cup N_t(A_3) \subset N_r(A_2 \cup A_3),$$

dove $r = \max \{s, t\}$. La seconda inclusione viene nello stesso modo. Ora per ogni $A, B \in K(\mathbb{R}^n)$, e l'uso ripetuto della seconda proprietà otteniamo

$$d_H(\Phi(A), \Phi(B)) = d_H\left(\bigcup_{i=1}^m \psi_i(A), \bigcup_{i=1}^m \psi_i(B)\right) \leq \max_{1 \leq i \leq m} d_H(\psi_i(A), \psi_i(B)).$$

Dalla prima proprietà,

$$\leq \left(\max_{1 \leq i \leq m} L(\psi_i)\right) d_H(A, B),$$

da cui otteniamo la disuguaglianza

$$\max_{1 \leq i \leq m} L(\psi_i) < 1$$

che ci permette di dire che $\Phi : K(\mathbb{R}^n) \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ è una contrazione. \square

Il risultato precedente ci dice che, partendo da un insieme compatto A , la successione di insiemi compatti $\{\Phi^k(A)\}$ converge a un insieme autosimilare V . In particolare, se un insieme B in $K(\mathbb{R}^n)$ soddisfa $\Phi(B) \subset B$ (per esempio B può essere una palla chiusa di raggio abbastanza grande centrata nell'origine), la successione $\{\Phi^k(B)\}$ di insiemi compatti è monotona decrescente e quindi il suo limite $\bigcap \Phi^k(B)$ diventa un insieme autosimilare V . La stessa osservazione si applica a $B \in K(\mathbb{R}^n)$ con $\Phi(B) \supset B$ (per esempio B potrebbe essere un punto fisso di ψ_i) e in questo caso vediamo che $V \supset B$.

2.1 Dimensione e forma di un insieme autosimilare

Diamo prima qualche risultato riguardante la dimensione di Hausdorff.

Dato un insieme di contrazioni $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m\}$ definiamo la dimensione di similarità del corrispondente insieme autosimilare V come la radice positiva di un'equazione in d

$$\sum_{i=1}^m (L(\psi_i))^d = 1, \quad (2.4)$$

che dipende solo dalle costanti di Lipschitz delle contrazioni. Chiamiamo questo valore $\dim_S(V)$. Sebbene chiamiamo $\dim_S(V)$ 'dimensione', non definisce una vera e propria dimensione, ma usiamo questo nome perché sotto certe condizioni questo valore corrisponde alla dimensione di Hausdorff dell'insieme autosimilare V .

Aggiungiamo che l'equazione (2.3) ha un'unica radice positiva perché la funzione $f(x) = \sum (L(\psi_i))^x$ è monotona decrescente e soddisfa la relazione $f(0+) = m \geq 2 > f(\infty) = 0$. Abbiamo in generale la seguente disuguaglianza:

Teorema 2.1.1. *Per un insieme autosimilare V ,*

$$\alpha(V) \leq \dim_S(V).$$

dove con $\alpha(V)$ è la dimensione di Hausdorff definita nel Capitolo 1.

E' molto importante capire quando la disuguaglianza precedente diventa un'uguaglianza, infatti solitamente calcolare la dimensione di Hausdorff è difficile (vedi gli esempi finali del capitolo 1), mentre se valesse l'uguale ci ricondurremmo a risolvere un'equazione.

Diciamo che l'insieme di contrazioni $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m\}$ soddisfa la condizione di 'insieme aperto' se esiste un intorno aperto $U \subset \mathbb{R}^n$, $U \neq \emptyset$ tale che

$$\psi_i(U) \subset U, 1 \leq i \leq m, \text{ and } \psi_i(U) \cap \psi_j(U) = \emptyset, i \neq j.$$

Dato che $\Phi(\bar{U}) \subset \bar{U}$, abbiamo che $V \subset \bar{U}$, come abbiamo detto alla fine di (2.1). Inoltre, diciamo che una mappa $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una contrazione simile se $\|\psi(x) - \psi(y)\| = L(\psi) \|x - y\|$, per ogni x e per ogni y in \mathbb{R}^n . Ora abbiamo il seguente teorema di Hutchinson.

Teorema 2.1.2. *Per un insieme autosimilare V definito da una famiglia di contrazioni simili che soddisfano la condizione di insieme aperto, vale l'uguaglianza $\alpha(V) = \dim_S(V)$.*

Esempio 8. Consideriamo di nuovo l'insieme di Cantor C , descritto nell'esempio 6 del Capitolo 1. L'insieme di Cantor è autosimilare e corrisponde a due contrazioni:

$$\psi_1(x) = \frac{x}{3}, \quad \psi_2(x) = 1 - \frac{x}{3}$$

I fattori di contrazione $L(\psi_1) = L(\psi_2) = \frac{1}{3}$ e quindi secondo l'equazione (2.3) $\dim_S(C)$ è data da:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^d + \left(\frac{1}{3}\right)^d = 1$$

. Da questa equazione troviamo che $d = \dim_S(C) = \frac{\log 2}{\log 3}$. In questo caso la condizione di insieme aperto è soddisfatta con $U = (0, 1)$, quindi $\dim_S(C)$ coincide con la dimensione di Hausdorff: abbiamo trovato esattamente lo stesso risultato ottenuto nel Capitolo 1!

Esempio 9. Controlliamo con questo teorema anche la dimensione della curva di Koch K . In pratica si suddivide l'intervallo $[0, 1]$ come descritto nel Capitolo 1. K è un insieme autosimilare, corrispondente alle contrazioni di

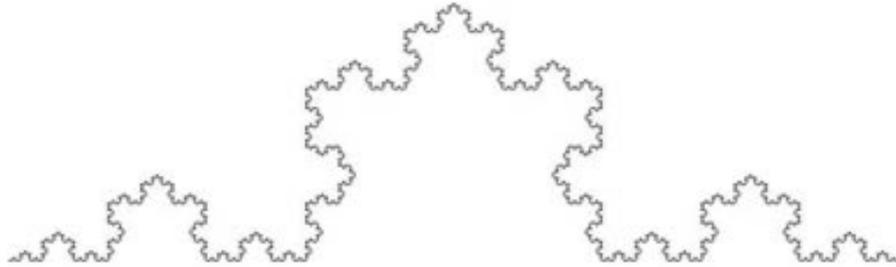


Figura 2.1: Curva di Koch

$\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$:

$$\psi_1(z) = \omega \bar{z}, \quad \psi_2(z) = \bar{\omega}(\bar{z} - 1) + 1$$

dove $\omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{6}$. Siccome $L(\psi_1) = L(\psi_2) = |\omega| = \frac{1}{\sqrt{3}}$, risolvendo

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^d + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^d = 1$$

otteniamo che $\dim_S(K) = \frac{\log 4}{\log 3}$ che è uguale alla dimensione di Hausdorff poiché soddisfa la condizione di insieme aperto.

Esempio 10. Esaminiamo ora il triangolo di Sierpinski. Esso è ottenuto partendo da un triangolo equilatero di lato unitario ed eliminando dalla sua

superficie il triangolo che ha come lati i segmenti che uniscono i punti medi dei lati del triangolo precedente, ottenendo tre triangoli di lato $\frac{1}{2}$. Poi si ripete l'operazione precedente sui tre triangoli rimasti e così via. Otteniamo così una figura di perimetro infinito e di area che tende a zero.

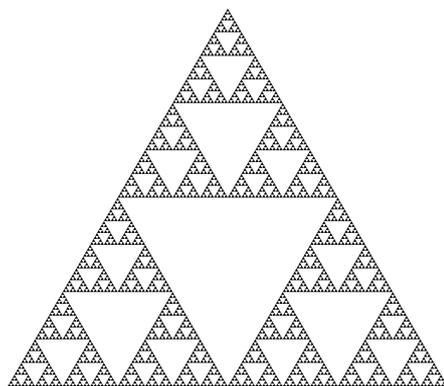


Figura 2.2: Triangolo di Sierpinski

Esso è definito dalle seguenti contrazioni:

$$\psi_1(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) \quad \psi_2(x, y) = \psi_1(x, y) + \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \psi_3 = \psi_1(x, y) + (1, 0)$$

Per cui $L(\psi_1) = L(\psi_2) = L(\psi_3) = \frac{1}{2}$, allora l'equazione (2.3) diventa:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^d + \left(\frac{1}{2}\right)^d + \left(\frac{1}{2}\right)^d = 1$$

perciò la dimensione di Hausdorff è $\frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,585$.

Esempio 11. Un altro esempio è l'insieme autosimilare chiamato 'albero', che corrisponde alle seguenti due contrazioni simili di \mathbb{C} :

$$\psi_1(z) = \omega(\bar{z}), \quad \psi_2(z) = \frac{2\bar{z} + 1}{3}$$

Dato che $L(\psi_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e $L(\psi_2) = \frac{2}{3}$, la dimensione di Hausdorff di questo insieme è la radice positiva dell'equazione:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^d + \left(\frac{2}{3}\right)^d = 1$$

Qui come U prendiamo l'interno del pentagono di vertici $0, 1, \omega, \bar{\omega}, \omega^2$.



Figura 2.3: The tree

Esempio 12. Senza dare esplicitamente le equazioni delle contrazioni, descriviamo in breve altri frattali davvero spettacolari. Il primo che consideriamo è il **tappeto di Sierpinski**. La costruzione è la seguente: si parte da un quadrato che possiamo anche supporre essere unitario. Si divide il quadrato in nove quadrati uguali e si toglie il quadrato al centro. Questo procedimento continua ad essere ripetuto per gli otto quadratini rimanenti e così via. Ogni volta si ottengono otto quadratini di lunghezza $\frac{1}{3}$ rispetto a quello da cui siamo partiti. Proprio come per il triangolo, anche qui si ottiene una figura

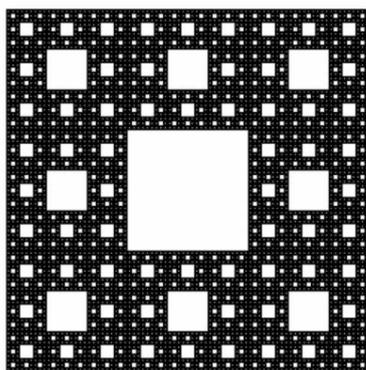


Figura 2.4: Tappeto di Sierpinski

con area che tende a zero e perimetro infinito. Come si può intuire dalla costruzione geometrica il tappeto di Sierpinski è dato da otto contrazioni con rapporto di contrazione $L(\psi) = \frac{1}{3}$. Per cui la sua dimensione di Hausdorff è data risolvendo l'equazione:

$$8 \left(\frac{1}{3} \right)^d = 1$$

per cui $d = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1,893$

Ora passiamo anche a considerare il **pentagono di Sierpinski** costruito in questo modo: prendiamo come figura di partenza un pentagono regolare in cui supponiamo il lato unitario e il vertice in basso a destra coincidente con l'origine degli assi cartesiani. A questo punto applichiamo cinque contrazioni

con $L(\psi) = \frac{1}{2(1+\cos 72^\circ)}$ e anche traslazioni in modo da ottenere la seconda figura dell'immagine sottostante: Poi si procede allo stesso modo con i cinque

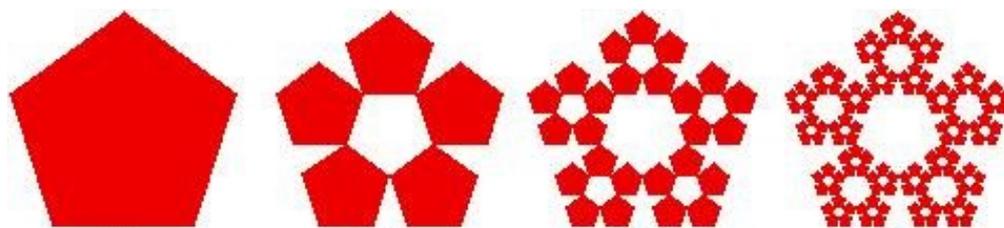


Figura 2.5: passi per la costruzione del pentagono di Sierpinski

pentagoni trovati e così via in modo da ottenere una bellissima figura (vedi immagine). Si può dimostrare che la dimensione di Hausdorff è $\frac{\ln 5}{\ln(\frac{1}{L(\psi)})} \approx 1,6723$.

Allo stesso modo, ma cambiando figura di partenza, ad esempio prendendo un esagono, si ottiene l'esagono di Sierpinski di dimensione uguale a $1 + \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 1,63$, oppure si può partire anche da un ottagono e così via.

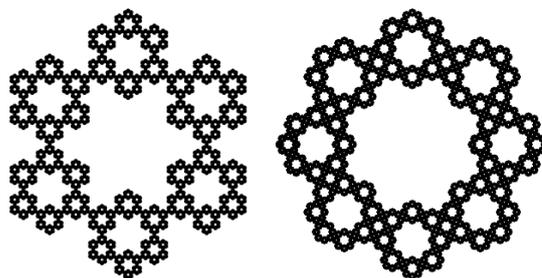


Figura 2.6: esagono e ottagono di Sierpinski

2.2 Insiemi auto-affini

Un insieme autosimilare definito da una contrazione lineare è chiamato insieme auto-affine. In questa sezione considereremo solo insiemi auto-affini determinati da due contrazioni ψ_1, ψ_2 . Esprimiamo queste trasformazioni in termini di trasformazioni di \mathbb{C} :

$$\psi(z) = az + b\bar{z} + c$$

Senza perdere di generalità, possiamo normalizzare ψ in modo tale che $z = 0$ sia il punto fisso di ψ_1 e $z = 1$ sia il punto fisso di ψ_2 . Così otteniamo la

seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \psi_1(z) \\ \psi_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \gamma - \delta \end{pmatrix}$$

dove $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ sono parametri complessi. Chiamiamo la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ la matrice dei parametri.

Ogni insieme autosimilare sarà associato alle due contrazioni e cioè alla matrice dei parametri. Ovviamente, dobbiamo assegnare le seguenti condizioni ai parametri in modo tale che ψ_1, ψ_2 siano delle contrazioni:

$$0 < |\alpha| + |\beta| < 1 \quad \text{and} \quad 0 < |\gamma| + |\delta| < 1,$$

Infatti, se consideriamo ψ_1 abbiamo

$$\|\psi_1(z) - \psi_2(w)\| = \|\alpha(z - w) + \beta(\bar{z} - \bar{w})\| \leq (|\alpha| + |\beta|) \|z - w\|.$$

Inoltre notiamo che ψ_i è una contrazione simile solo se $\alpha\beta = \gamma\delta = 0$. Dato che i frattali sono insiemi connessi, potremmo chiederci quali sono le condizioni da dare ai parametri della matrice affinché ottenga degli insiemi connessi. Data la difficoltà, questa parte non verrà trattata e dunque passiamo subito a dare degli esempi. Poniamo $\sigma = \frac{1+i}{2}$.

Esempio 13. La curva di Koch è data dalla matrice $\begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ 0 & \bar{\sigma} \end{pmatrix}$

Esempio 14. La curva di Lévy è definita dalla matrice $\begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}$. La particolarità di questa curva è che ha area uguale al triangolo isoscele con vertici in $0, 1, e \sigma$. Avendo area positiva, la sua dimensione di Hausdorff è quindi due.

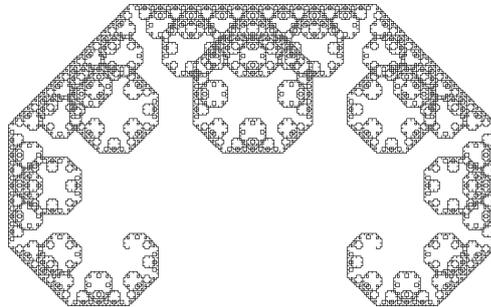


Figura 2.7: la curva di Lévy

Capitolo 3

Insiemi di Mandelbrot e Julia

L'ultimo capitolo di questa tesi è dedicato a degli insiemi molto particolari: gli insiemi di Mandelbrot e di Julia. L'insieme di Mandelbrot o frattale di Mandelbrot è uno dei frattali più popolari conosciuto anche per le suggestive immagini a colori che ne sono state divulgate. Esso è considerato un frattale perchè a diverse scale, muovendosi tra infinite increspature, ritroviamo sempre la stessa struttura di partenza. Su Youtube, cercando 'Mandelbrot set' è possibile vedere questo insieme ingrandito a diverse scale, anche molto piccole e il fatto che ad ogni scala troviamo la struttura di partenza che è simile a un cuore (vedi figura).

Di questo insieme il matematico Mandelbrot (da cui deriva il nome di questi

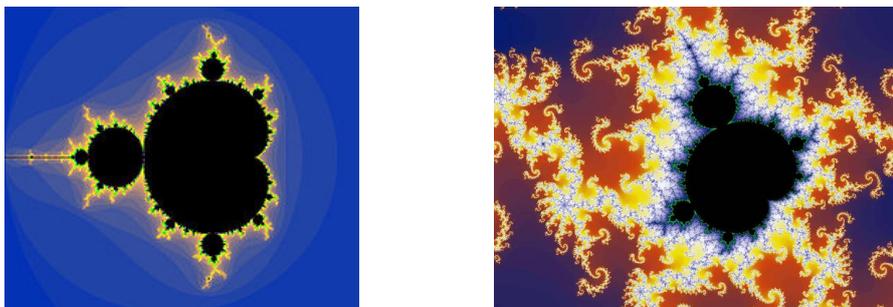


Figura 3.1: L'insieme di Mandelbrot e un suo ingrandimento a una scala molto piccola

insiemi), ottenne per primo immagini al calcolatore e iniziò a descriverlo. Gli insiemi di Julia devono il loro nome al loro scopritore Gaston Julia, ed essi sono strettamente collegati a quelli di Mandelbrot. La formula matematica che li descrive è infatti:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad \text{con } z, c \in \mathbb{C}$$

Questo vuol dire che, partendo dal punto z_0 si ottiene quello successivo nel seguente modo: $z_1 = z_0^2 + c$ e così via. Il comportamento della successione z_n dipende da z_0 e da c .

Gli insiemi di Julia si ottengono fissando c e facendo variare z_0 nel piano complesso, mentre quello di Mandelbrot si ottiene fissando $z_0 = 0$ e facendo variare c . Riassumendo, se indichiamo l'insieme di Mandelbrot con M esso è definito da

$$M = \left\{ \begin{array}{l} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = z_n^2 + c \end{array} \right.$$

mentre gli insiemi di Julia J_c , che dipendono da c sono definiti da una funzione

$$f_c(z) = z^2 + c$$

Dato che questi insiemi sono definiti tramite delle successioni, ci si può chiedere se queste successioni convergano o meno. In effetti alcuni punti convergono all'interno di una regione limitata il cui confine ha forma frattale. I punti che convergono, di solito nelle raffigurazioni (ad esempio la figura sopra) vengono colorati con un colore scuro, mentre ai punti che vanno all'infinito viene assegnato un colore diverso a seconda della loro velocità.

Abbiamo detto che gli insiemi di Julia dipendono da c . Si è vista un'importante relazione che lega l'insieme di Mandelbrot a quello di Julia:

- se c è scelto all'interno dell'insieme di Mandelbrot (nella parte nera, dove converge) allora l'insieme di Julia J_c corrispondente sarà connesso.
- se c è scelto fuori dall'insieme di Mandelbrot il corrispondente insieme di Julia non è connesso
- se c è scelto sul confine dell'insieme di Mandelbrot l'insieme di Julia corrispondente si riduce a uno scheletro che non ha parte interna, cioè non ha alcuna area ma è ancora connesso

Tramite Matlab possiamo creare un codice che prende in input il parametro c e ci dà l'insieme di Julia corrispondente. Vediamone qualche esempio:

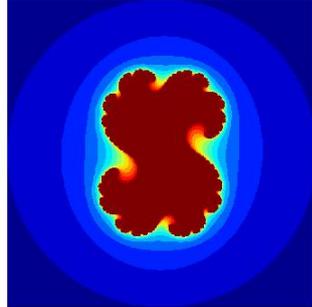


Figura 3.2: $c = 0.31 + 0.04i$ l'insieme di Julia è connesso

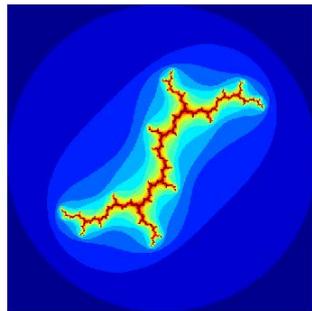


Figura 3.3: $c=i$, insieme connesso senza parte interna

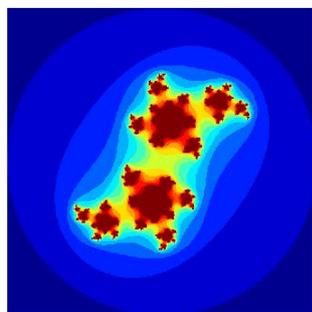


Figura 3.4: $c=0.194+0.6557i$, non connesso

Codice Matlab:

```
function Julia(c,k,v)
if nargin <3;
k = 14;
v = 500;
end
r = max(abs(c),2);
d = linspace(-r,r,v);
A = ones(v,1)*d+i*(ones(v,1)*d)';
B = zeros(v,v);
for s = 1:k
B = B+(abs(A)<=r);
A = A.*A+ones(v,v).*c;
end;
imagesc(B); colormap(jet);
hold off;
axis equal;
axis off;
```


Bibliografia

- [1] [Lanconelli, 1997] Ermanno Lanconelli, *Lezioni di Analisi Matematica 2, Seconda parte*, Pitagora Editrice Bologna, 1997.
- [2] [Yamaguti, Hata, Kigami, 1993] Masaya Yamaguti, Masayoshi Hata, Jun Kigami, *Mathematics of Fractals*, American Mathematical Society, vol. 167, 1993.
- [3] [Falconer, 1985] K.J. Falconer, *The geometry of fractal sets*, Cambridge University Press, 1985.
- [4] [Mandelbrot, 1982] Benoit B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman and Company, 1982.

Siti Web consultati

- [5] Luigi Orsina, Teorema delle contrazioni e sistemi di funzioni iterate, Appunti del Corso.
URL:<http://www1.mat.uniroma1.it/people/orsina/Frattali.pdf>
- [6] Alessandro Fonda, Elementi di analisi superiore, Appunti del corso
URL:<http://www.dmi.units.it/fonda-elementi-analisi-superiore.html>
- [7] Frattali autosimili
URL:<http://www-dimat.unipv.it/gilardi/WEBGG/PSPDF/frattali.pdf>
- [8] Frattali: l'ordine oltre il disordine, Giuseppe Mingione
URL:<https://www.youtube.com/watch?v=KV0gql8dPyw>

Ringraziamenti

Alla fine di questa esperienza volevo ringraziare la professoressa Annamaria Montanari per la sua competenza, disponibilità e per l'aiuto ricevuto durante la realizzazione di questa tesi.

Un grande ringraziamento va inoltre ai miei genitori che durante questi tre anni mi hanno sostenuta, ascoltato le mie scelte, hanno gioito con me per i miei successi e mi hanno sempre rincorata durante le mie cadute. Li ringrazio inoltre per il sacrificio che fanno tutti i giorni per darmi la possibilità di andare a scuola e realizzare i miei sogni, non sarei nulla senza di loro.

Ringrazio mio fratello gemello Luca per l'affetto che mi ha sempre dimostrato, per i pianti che ha dovuto sopportare, per le mattine d'inverno in treno con me, per la compagnia davanti a un caffè caldo e una brioches nel nostro bar preferito di Bologna prima di iniziare lezione e per questo ringrazio molto volentieri anche lo staff del Caffè Vanity di Bologna per l'allegria che mi trasmettono ogni mattina.

Ringrazio i miei amici più cari, tra cui Sabrina, che come una sorella mi ha sostenuta dall'asilo fino a questo momento. Ringrazio Silvia perchè c'è sempre stata e mi ha sempre trasmesso tanta positività; ringrazio Felicity per le belle esperienze e i sorrisi che riesce sempre a strapparmi.

Ringrazio Lorena per le belle esperienze passate insieme e con lei tutti gli amici conosciuti più di recente e quelli vecchi che non si sono scordati di me e a cui ancora dopo tanti anni, voglio molto bene. Ovviamente, l'università è fatta anche di compagni e devo dire che io sono stata molto fortunata: voglio ringraziare di cuore tutti gli amici che ho conosciuto in questi tre anni, perchè ci siamo sostenuti, ci siamo confrontati, ci siamo aiutati, abbiamo studiato insieme, abbiamo affrontato gli esami. Grazie, perchè senza di voi l'esperienza universitaria sarebbe stata incompleta. Grazie perchè quell'aula sembrava più luminosa con la vostra presenza e quei viaggi di ritorno in treno meno stancanti, grazie alle vostre chiacchiere e i vostri sorrisi. Uno degli ultimi ringraziamenti, sperando di non essere troppo superba, va a me, che da Cesenatico a Bologna ho fatto la pendolare tutti i giorni, a me che non ho mollato e alla fine ce l'ho fatta.

Ora concludo con una piccola riflessione: sono veramente fortunata a poter studiare. In particolare a poter studiare matematica. Quando sono in Dipartimento e seguo le lezioni tenute da grandi professori, che hanno dedicato la loro vita alla matematica, alla ricerca e hanno girato il mondo e sono lì davanti a te, che ti spiegano argomenti che non puoi ascoltare spesso, ecco, in quel momento mi sento davvero fortunata. Quante persone abbiamo incontrato che magari, raccontando la loro giornata ci hanno detto: "Solite cose, università...", e invece no, per me questa esperienza non è stata monotona. Tre anni di università non sono diventati 'quotidianità', perchè ogni giorno era pura magia, era pura scoperta, era ascoltare cose che magari non avrei mai più sentito in vita mia.

E poi, andare a scuola o andare all'Università apre la mente e il cuore, si abbattano davvero tanti muri e tanti pregiudizi e questo è uno dei grandi scopi dell'educazione che, dato che dopo l'Università voglio andare a insegnare nelle scuole, cercherò di perseguire. Dato che è un tema che mi sta molto a cuore, un pensiero va a tutte le donne nel mondo che, solo perchè donne, non possono studiare.

"Non mi importa di dovermi sedere sul pavimento a scuola. Tutto ciò che voglio è istruzione. E non ho paura di nessuno."

Malala Yousafzai