

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea Magistrale in Fisica

**Rapporto tensore su scalare con Gravità Indotta:  
analisi dell'approssimazione di Slow-Roll nei  
frames di Jordan e Einstein**

**Relatore:**  
Prof. Alexander Kamenschchik

**Presentata da:**  
Davide Cericola

**Correlatore:**  
Dott. Alessandro Tronconi

Anno Accademico 2015/2016



# Indice

<b>1</b>	<b>Inflazione</b>	<b>11</b>
1.1	La cosmologia moderna e i suoi problemi . . . . .	11
1.1.1	Problemi della teoria del big bang . . . . .	12
1.2	L'inflazione cosmica . . . . .	16
1.2.1	La dinamica dell'inflazione . . . . .	17
1.3	Dinamica omogenea di slow roll . . . . .	18
1.3.1	Le gerarchie dei parametri di slow roll . . . . .	18
1.3.2	Equazioni del moto e l'approssimazione di slow roll . . . . .	19
1.4	Dinamica delle perturbazioni . . . . .	20
1.4.1	La metrica perturbata . . . . .	20
1.4.2	Azione delle perturbazioni . . . . .	22
1.4.3	Quantizzazione e vuoto di Bunch-Davies . . . . .	22
1.5	Le soluzioni dell'equazione di Mukhanov . . . . .	24
1.5.1	Metodo del matching . . . . .	24
1.5.2	Approssimazione di SR al primo ordine . . . . .	25
1.6	Spettri di potenza ed osservabili . . . . .	26
<b>2</b>	<b>Gravità indotta</b>	<b>31</b>
2.1	Motivazioni storiche per la gravità indotta . . . . .	31
2.2	La dinamica inflazionaria in gravità indotta . . . . .	32
2.2.1	Le equazioni omogenee del sistema . . . . .	32
2.2.2	Le soluzioni esatte per la dinamica omogenea . . . . .	33
2.2.3	Approssimazione di slow roll omogenea . . . . .	34
2.3	La dinamica delle perturbazioni . . . . .	35
2.3.1	Le equazioni delle perturbazioni . . . . .	35
2.3.2	L'equazione di Pinney . . . . .	37
2.3.3	Gli spettri di potenza nell'approssimazione di slow roll . . . . .	38
2.3.4	Potenziali . . . . .	39
2.3.5	Confronto con i dati sperimentali . . . . .	42
2.4	Frame di Jordan e frame di Einstein . . . . .	44
2.4.1	Mapping dei frames . . . . .	44
2.4.2	Gli spettri di potenza delle perturbazioni . . . . .	47
2.4.3	Elaborazione di una nuova formula per $n_t$ . . . . .	48

<b>3</b>	<b>Analisi Numerica</b>	<b>51</b>
3.1	Elaborazione numerica di $n_t$ . . . . .	52
3.2	Risultati . . . . .	55
3.2.1	Potenziale di Landau-Ginzburg . . . . .	55
3.2.2	Potenziale di Coleman-Weinberg . . . . .	56
3.2.3	Potenziale di Starobinsky . . . . .	57
3.3	Soluzioni analitiche . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Conclusione</b>	<b>67</b>
<b>A</b>	<b>Funzioni di Bessel e di Neumann</b>	<b>73</b>
<b>B</b>	<b>Derivazione del potenziale di Starobinsky</b>	<b>75</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>79</b>

# Abstract

L'obbiettivo di questa tesi è quello di analizzare le conseguenze della scelta del frame (Jordan o Einstein) nel calcolo delle proprietà degli spettri primordiali generati dall'inflazione ed in particolare dell'osservabile  $r$  (rapporto tensore su scalare) al variare del potenziale del campo che genera l'espansione accelerata.

Partendo dalla descrizione della teoria dell'inflazione in relatività generale, focalizzando l'attenzione sui motivi che hanno portato all'introduzione di questa teoria, vengono presentate le tecniche di utilizzo comune per lo studio della dinamica omogenea (classica) inflazionaria e di quella disomogenea (quantistica). Una particolare attenzione viene rivolta ai metodi di approssimazione che è necessario adottare per estrarre predizioni analitiche dai modelli inflazionari per poi confrontarle con le osservazioni. Le tecniche introdotte vengono poi applicate ai modelli di inflazione con gravità indotta, ovvero ad una famiglia di modelli con accoppiamento non minimale tra il campo scalare inflatonico e il settore gravitazionale. Si porrà attenzione alle differenze rispetto ai modelli con accoppiamento minimale, e verrà studiata la dinamica in presenza di alcuni potenziali derivanti dalla teoria delle particelle e diffusi in letteratura. Il concetto di "transizione tra il frame di Jordan e il frame di Einstein" viene illustrato e le sue conseguenze nel calcolo approssimato del rapporto tensore su scalare sono discusse.

Infine gli schemi di approssimazione proposti vengono analizzati numericamente. Risulterà che per due dei tre potenziali presentati i metodi di approssimazione sono più accurati nel frame di Einstein, mentre per il terzo potenziale i due frames portano a risultati analitici similmente accurati.



# Introduzione

La teoria dell'inflazione nasce per risolvere alcuni problemi della teoria classica del big bang. Senza l'inflazione risultano di difficile comprensione alcuni problemi della cosmologia standard quali la piazzetta dell'universo e la sua omogeneità. Essa, inoltre, è in grado di spiegare dinamicamente l'origine delle strutture a grandi scale e delle disomogeneità osservate nella radiazione cosmica di fondo (CMB).

La teoria dell'inflazione prevede che l'origine di tali disomogeneità, come l'origine delle strutture a grandi scale, sia quantistica: esse derivano dalle fluttuazioni della materia quantistica che si accoppia alla gravità durante la fase inflazionaria.

La teoria dell'inflazione risolve questi problemi ipotizzando un periodo, nell'evoluzione dell'universo, caratterizzato da una accelerazione positiva del fattore di scala  $a(t)$ , ovvero della quantità che parametrizza l'espansione dell'universo. Questo significa che per la durata dell'inflazione l'espansione dell'universo deve essere accelerata.

La fase di inflazione agisce come un'enorme lente di ingrandimento che amplifica tutte le distanze collegando il mondo "microscopico" (quantistico) con il mondo "macroscopico" governato dalle leggi classiche e dalla relatività generale. Questa amplificazione rende i fenomeni quantistici sufficientemente grandi da essere osservabili ad "occhio nudo". Oggi, grazie ai progressi sperimentali e all'inflazione cosmica, si possono studiare processi fisici che avvengono a scale di energia diversi ordini di grandezza più grandi di quelle testate dagli acceleratori di particelle oggi in funzione.

Se la teoria dell'inflazione può considerarsi largamente accettata dalla comunità scientifica, tuttavia non esiste un modello consolidato di inflazione. I dati oggi disponibili, infatti, possono essere spiegati da modelli diversi derivanti da ipotesi di base diverse. Il concetto di "modello di inflazione" si declina stabilendo il contenuto di materia che determina l'accelerazione primordiale e le sue interazioni. In particolare l'interazione della materia con la metrica gioca un ruolo fondamentale nel determinare la dinamica della fase inflazionaria. I modelli più semplici di inflazione ipotizzano l'esistenza di un campo scalare (l'inflatone) con un'autointerazione (descritta da un potenziale) "debole" e un accoppiamento minimale tra il campo e il settore gravitazionale. In questi modelli la dinamica del settore gravitazionale viene descritta da una lagrangiana classica di Einstein-Hilbert.

Esistono poi modelli con un singolo campo scalare accoppiato in modo non minimale alla gravità. In questi ultimi modelli l'autointerazione del campo non è necessariamente debole. Queste teorie vengono comunemente chiamate scalari-tensoriali. L'accoppiamento

non minimale del campo scalare determina una dipendenza dal tempo della costante di Newton e deviazioni dalla relatività generale idealmente misurabili in esperimenti tipo Cavendish. Le teorie scalari-tensoriali sono particolarmente interessanti in cosmologia, più che in altri settori della fisica, perchè se le deviazioni dalla relatività generale sono estremamente piccole oggi, potrebbero non esserlo state nell'universo primordiale. In più va considerato che la scala temporale di evoluzione del campo scalare è cosmologica, quindi gli effetti di queste deviazioni possono essere indagati nel contesto della cosmologia.

Dirac nel 1937 per primo considerò la possibilità di una dipendenza temporale della "costante" di Newton. Dirac notò che le combinazioni adimensionali di costante cosmologica e costanti fisiche fondamentali sono collegate da una relazione che sorge naturalmente, a condizione che a una delle "costanti" sia consentito di variare su tempi cosmologici. La scelta di Dirac fu di lasciare che la costante gravitazionale  $G_N$  dipendesse dal tempo, mantenendo le altre costanti fondamentali appunto costanti.

L'idea di una teoria scalare-tensoriale per la gravità ha raggiunto la piena maturità con il lavoro di Brans e Dicke. Nel 1961 essi pubblicarono una nuova teoria che doveva diventare il prototipo della teoria alternativa alla relatività generale di Einstein. Le deviazioni di questa teoria dalla relatività generale sono costrette ad essere piccole perchè altrimenti sarebbero osservabili nel sistema solare.

Un esempio particolare di teoria scalare-tensoriale è rappresentato dai modelli di gravità indotta, in cui il campo scalare sostituisce la massa di Planck nella lagrangiana di Einstein-Hilbert.

I modelli di gravità indotta necessitano di un potenziale per il campo scalare che generi la rottura spontanea della simmetria. In questo modo il campo scalare, nel suo stato ad energia minima, ha un valore di aspettazione diverso da zero che genera la costante di Newton osservata ed una massa che gli impedisce di propagarsi a distanze abbastanza grandi da modificare le orbite dei pianeti del sistema solare. Nei primi anni '80, quando la teoria dell'inflazione fu proposta i modelli di gravità indotta vennero riconsiderati in ottica inflazionaria.

Un esempio di teoria scalare-tensoriale molto noto è rappresentato dal modello di inflazione mediante il campo di Higgs. In questo modello per accomodare le osservazioni cosmologiche con le caratteristiche del bosone di Higgs osservate ad LHC il campo di Higgs deve essere accoppiato in modo non minimale con la gravità. L'inflazione si ottiene nel regime in cui l'accoppiamento del campo di Higgs con lo scalare di Ricci domina sul contributo puramente geometrico di Einstein-Hilbert. Quindi l'inflazione ha luogo in un regime di gravità indotta.

Le teorie scalari tensoriali hanno un'importante proprietà matematica ovvero è possibile, mediante un'opportuna ridefinizione dei gradi di libertà, riscrivere la loro dinamica come quella di un campo scalare minimamente accoppiato alla gravità. Una simile trasformazione (o rimappatura dei gradi di libertà) viene chiamata transizione tra il frame di Jordan e il frame di Einstein, dove il frame di Einstein corrisponde al modello minimamente accoppiato (dove la metrica soddisfa alle equazioni della relatività generale), mentre il frame di Jordan corrisponde al modello originale scalare-tensoriale. L'equiva-

lenza fra i due frame è semplicemente matematica e gli osservabili fisici dei due frame sono generalmente diversi. Il frame fisico quindi definisce gli osservabili classici e quantistici. Nello studio dei modelli di inflazione è rilevante risolvere sia la dinamica classica omogenea (o di background) che la dinamica disomogenea delle perturbazioni quantistiche. Gli spettri di queste perturbazioni sono di centrale importanza nell'analisi dei modelli di inflazione poichè possono essere connessi con le osservazioni. Nella transizione fra i due frames gli osservabili associati agli spettri primordiali sono invarianti. Per questo motivo generalmente i modelli di inflazione costruiti mediante le teorie scalari-tensoriali vengono studiati nel frame di Einstein corrispondente dove la dinamica disomogenea è nota e si conoscono le formule approssimate che permettono di estrarre dalla teoria le predizioni analitiche. Nulla tuttavia vieta di calcolare le medesime quantità nel frame fisico di Jordan. Lo scopo di questa tesi consiste proprio nell'analisi delle approssimazioni che portano al calcolo degli spettri delle disomogeneità primordiali nei due frames. Il lavoro di tesi si concentrerà sullo studio di tre diversi potenziali del campo scalare di particolare interesse fisico: il potenziale di Landau e Ginzburg (LG), comunemente utilizzato per descrivere le transizioni di fase e la dinamica del campo di Higgs; il potenziale di Coleman Weinberg (CW) che deriva dalle correzioni quantistiche alla teoria non appena si accoppia il campo scalare con un altro settore di materia; infine il potenziale di Starobinsky (ST) che modella le correzioni quantistiche gravitazionali con un termine proporzionale allo scalare di curvatura al quadrato.

La dinamica quantistica delle disomogeneità primordiali viene descritta dall'equazione di Mukhanov. In questa tesi descriveremo nel dettaglio varie tecniche con cui è possibile risolverla in modo approssimato, calcolare le proprietà degli spettri primordiali ed infine conmetterle con le osservazioni.

L'importanza strategica di questi spettri di potenza è dettata dal fatto che le loro proprietà sono collegate con le proprietà dell'universo al momento del Big Bang; la successiva evoluzione dell'universo trasferisce queste disomogeneità iniziali sulle proprietà della radiazione cosmica di fondo (CMB) che noi oggi osserviamo. Si può quindi dire che le caratteristiche degli spettri di potenza sono collegate con quelle della CMB oggi osservabile, e quindi possono essere usate come una discriminante tra i vari modelli di inflazione che sono stati proposti.

Negli ultimi 20 anni gli esperimenti finalizzati all'osservazione delle caratteristiche della radiazione cosmica di fondo hanno permesso di costruire una mappa estremamente dettagliata delle sue disomogeneità. In particolare i dati del 2015 della collaborazione PLANCK rappresentano la fonte più completa a disposizione di informazioni sulle disomogeneità primordiali. Essi indicano l'esistenza di un limite superiore sull'osservabile  $r$  (noto come rapporto tensore su scalare) che misura il rapporto fra l'ampiezza delle disomogeneità derivanti dalle onde gravitazionali primordiali (tensoriali) e l'ampiezza delle disomogeneità prodotte dal campo inflatonico (scalari). Modellando l'evoluzione dell'universo in modo convenzionale questo limite è pari a  $r \leq 0.12$  al 95% C.L. ponendo un forte vincolo sulla scala di energia dell'inflazione e sugli scenari di inflazione dinamicamente compatibili con questa osservazione. In particolare i modelli di Starobinsky e di inflazione mediante il campo di Higgs risultano essere favoriti in questo senso.

In attesa di nuove, più accurate, stime di  $r$  dagli esperimenti di futura generazione (ad esempio la prossima generazione dell'esperimento BICEP) e alla luce della rilevanza dell'osservabile  $r$  lo studio, in questa tesi, delle approssimazioni nei frame di Jordan e Einstein sarà particolarmente rivolta alle conseguenze di queste approssimazione sul calcolo analitico del rapporto tensore su scalare.

La tesi è organizzata come segue. Nel primo capitolo verrà presentata la teoria standard dell'inflazione, i problemi che ha risolto nella teoria della cosmologia classica, con particolare attenzione al problema della piattezza e a quello dell'omogenità dell'universo.

Successivamente verranno presentate le tecniche comuni con cui viene studiata la dinamica inflazionaria per i modelli di inflazione in presenza di un campo scalare con accoppiamento minimale al settore gravitazionale (descritto dalle equazioni della relatività generale). Partendo dallo studio della dinamica classica omogenea si arriverà a discutere la dinamica delle fluttuazioni quantistiche primordiali, l'equazione di Mukhanov per le perturbazioni, e il vuoto di Bunch-Davies. Infine verranno introdotti i concetti di spettro di potenza e di indice spettrale. Verranno anche presentati gli ultimi, più aggiornati, risultati sperimentali confrontati con le previsioni teoriche.

Nel capitolo (2) verranno ripresi i concetti introdotti per il primo capitolo, e verranno applicati ai modelli di gravità indotta. Si porrà particolare attenzione alle differenze rispetto ai modelli minimamente accoppiati. Inoltre discuteremo il mapping fra i frame di Jordan e di Einstein a livello omogeneo e a livello della dinamica disomogenea.

Nel capitolo (3) verranno discussi i contributi originali di questa tesi, nell'ambito dell'analisi delle approssimazioni nella risoluzione dell'equazione di Mukhanov per le perturbazioni tensoriali in funzione della scelta del potenziale inflazionario. Infine verranno presentate le conclusioni di questo lavoro.

## Ringraziamenti.

Ringrazio il dott. A. Tronconi per il suo lavoro di correlatore di questa tesi, per avermi insegnato ciò che so di questo argomento, e per aver avuto la pazienza di affiancarmi.

Ringrazio mio nonno, per avere reso possibile questa laurea grazie al suo sostegno finanziario.

Ringrazio Alessandra Laterza e Martina De Vico per avermi convinto a ricominciare gli studi, e ringrazio tutte le persone che mi sono rimaste affianco negli ultimi anni, la mia famiglia e Vittoria Michali in particolar modo.

Daide Cericola.

# Capitolo 1

## Inflazione

### 1.1 La cosmologia moderna e i suoi problemi

La teoria dell'inflazione è nata per risolvere alcuni problemi posti dalla teoria del big bang. Tale teoria prevede che l'evoluzione dell'universo sia avvenuta tramite una espansione in un tempo finito, partendo da condizioni di estrema densità e temperatura, e un volume estremamente ridotto.

Negli istanti iniziali questa espansione è determinata da un fluido di particelle di massa trascurabile. Questa fase si chiama appunto "Era della Radiazione". Successivamente, a causa della stessa espansione, il fluido si raffredda (la massa della particelle cessa di essere trascurabile) ed inizia a comportarsi come polvere. Questa seconda fase dell'evoluzione prende il nome di "Era della Materia".

Lo studio della cosmologia moderna si basa sulla metrica di Friedmann-Robertson-Walker, che, in coordinate polari, si scrive come segue (d'ora in avanti useremo le unità naturali  $c = \hbar = 1$ ) ([2], [3]):

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \right], \quad (1.1)$$

dove  $t$  è il tempo cosmico, e  $a(t)$  è il "fattore di scala".

Questo ansatz è basato sulle ipotesi di spazio omogeneo ed isotropo, che sono alla base del modello di cosmologia che stiamo utilizzando.

Il raggio di curvatura dello spazio tempo può essere espresso in funzione del fattore di scala tramite la relazione:  $\mathcal{R}_{curv} \equiv a(t) |k|^{-1/2}$ .

$k$  è il parametro di curvatura dell'iper superficie di tipo spazio (identificata dalla parte spaziale della metrica): una curvatura negativa indica modelli iperbolici di universo, una curvatura piatta indica modelli euclidei, e una curvatura positiva indica modelli sferici.

$$\begin{cases} k = +1 & \rightarrow & \text{curvatura positiva} \\ k = 0 & \rightarrow & \text{spazio euclideo} \\ k = -1 & \rightarrow & \text{curvatura negativa.} \end{cases} \quad (1.2)$$

È spesso conveniente parametrizzare l'evoluzione con il tempo conforme  $\eta$  definito dalla seguente relazione  $ad\eta = dt$ . Di qui in avanti indicheremo con un punto le derivate rispetto al tempo cosmico e con un apice le derivate rispetto al tempo conforme. Si noti che  $t \in ]-\infty, +\infty[$  mentre  $\eta \in ]-\infty, 0[$ . Il fattore di scala è una funzione che rispetta le equazioni di campo di Einstein, che in forma tensoriale possono essere scritte come [4]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{1}{M_p^2}T_{\mu\nu}; \quad (1.3)$$

dove gli indici greci  $\{\mu, \nu\}$  valgono 0, 1, 2, 3;  $R_{\mu\nu}$  rappresenta il tensore di Ricci,  $R$  lo scalare di Ricci,  $g_{\mu\nu}$  il tensore metrico,  $T_{\mu\nu}$  il tensore energia impulso, e  $M_p^2 \equiv \frac{1}{8\pi G}$  è la massa di Planck.

Se imponiamo le ipotesi di omogeneità e isotropia allora le equazioni di Einstein si riducono alle due equazioni di Friedmann:

$$\begin{cases} 3H^2 + 3\frac{k}{a^2} = \frac{1}{M_p^2}\rho \\ 2\dot{H} + 3H^2 = -\frac{1}{M_p^2}p - \frac{k}{a^2}, \end{cases} \quad (1.4)$$

dove  $H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ ,  $p$  è la pressione, e  $\rho$  è la densità di energia dei fluidi cosmologici che determinano l'evoluzione del fattore di scala.

La funzione  $H(t)$  viene comunemente chiamata parametro di Hubble. Storicamente  $H$  fu introdotto come parametro di proporzionalità nella legge di Hubble, introdotta nel 1929, che lega la velocità di allontanamento dei corpi celesti lontani con la distanza a cui questi corpi sono posti:

$$v = H(t)d, \quad (1.5)$$

dove  $d$  indica la distanza di tali corpi celesti dal nostro punto di osservazione.

Questa legge è stata testata nel corso degli anni con sempre maggiore precisione, come mostrato in figura (1.1).

Per la descrizione dei fluidi cosmologici viene comunemente introdotto il parametro  $\omega$ , che definisce l'equazione di stato del fluido ed è uguale a:

$$\omega = \frac{p}{\rho}. \quad (1.6)$$

### 1.1.1 Problemi della teoria del big bang

La teoria del big bang nella sua formulazione originale presenta dei problemi concettuali:

- *Problema della piattezza dell'universo.* Possiamo definire la densità critica dell'universo come la densità che garantirebbe un universo perfettamente piatto [6]:

$$\rho_c = 3H^2M_p^2. \quad (1.7)$$

Possiamo, inoltre, introdurre il parametro di densità

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} \quad (1.8)$$

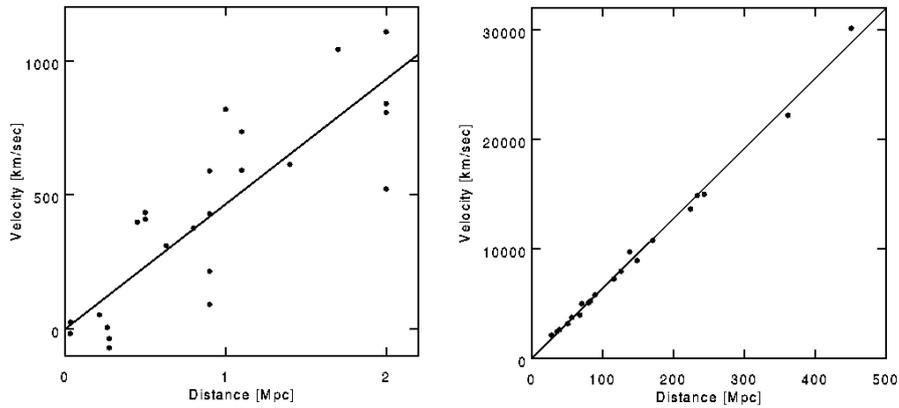


Figura 1.1: Diagrammi di Hubble: nell'asse x la distanza tra gli oggetti astronomici osservati e il punto di osservazione; nell'asse y la velocità di recessione di tali oggetti. Nel grafico a sinistra le misurazioni originali proposte da Hubble, il grafico a destra mostra misurazioni più recenti [5].

che è uguale ad 1 se l'universo è piatto. In termini di questo parametro la prima equazione di Friedmann si può scrivere così:

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}. \quad (1.9)$$

In un universo dominato dalla radiazione ( $\rho_R \propto a^{-4}$ ) o dalla materia ( $\rho_R \propto a^{-3}$ ),  $\Omega - 1$  aumenta all'aumentare di  $a$ .

Poichè le osservazioni attuali indicano che il parametro di densità dell'universo è estremamente vicino ad 1 [7]:

$$\Omega_0 = 1.00_{-0.03}^{+0.07}, \quad (1.10)$$

allora la teoria del big bang nella sua forma originale richiederebbe che  $\Omega$  al tempo di Planck sia:

$$|\Omega(a_{Pl}) - 1| \leq 10^{-16}, \quad (1.11)$$

dove il pedice  $Pl$  indica il valore al tempo di Planck  $t_{Pl}$ , definito come  $t_{Pl} \equiv \sqrt{G} \approx 5.4 \times 10^{-44} s$ .

Il problema della piattezza è quindi un problema di *fine - tuning*: per riprodurre il valore osservato oggi di  $\Omega$  è necessario ipotizzare che il valore di  $\Omega - 1$  al tempo di Planck fosse molto prossimo allo zero.

La probabilità che le condizioni iniziali dell'evoluzione dell'universo si siano settate casualmente a valori così prossimi allo zero è estremamente bassa.

- *Problema dell'omogeneità dell'universo.*

La radiazione cosmica di fondo è estremamente omogenea ed isotropa: i fotoni che

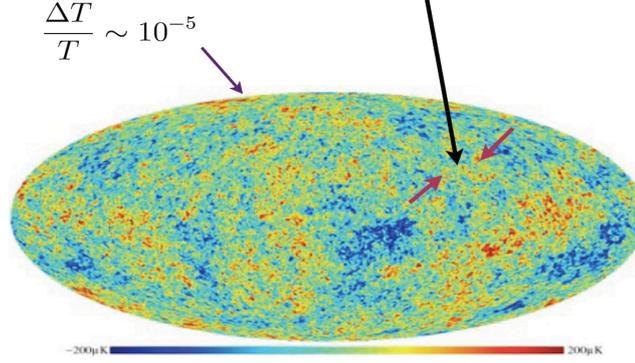


Figura 1.2: L'orizzonte  $H^{-1}$  al tempo della ricombinazione (tra le due frecce porpora) è molto minore della scala alla quale osserviamo le disomogeneità. L'immagine è del satellite Planck [8], le differenze di colore rappresentano variazioni nella temperatura dell'ordine di  $10^{-5}$  attorno alla temperatura media di  $T = 2.73$  K [9], il colore rosso indica una temperatura più alta, il colore blu una temperatura più bassa.

provengono da direzioni opposte hanno la stessa temperatura a meno di fluttuazioni di una parte su  $10^5$ . In un universo statico non sarebbe possibile giustificare questa omogeneità ed isotropia. Tuttavia in un universo in espansione si può immaginare che la superficie di last scattering (LSS) - la sfera immaginaria da cui provengono i fotoni osservati - fosse molto più piccola e causalmente connessa all'istante dell'emissione dei fotoni.

È possibile calcolare il raggio della LSS e confrontarlo con il raggio di Hubble all'istante del disaccoppiamento dei fotoni,  $H_d^{-1}$ . Il raggio di Hubble è approssimativamente uguale alla massima distanza percorsa da un segnale nell'universo primordiale e può quindi essere utilizzato per stimare le dimensioni delle regioni causalmente connesse.

Sapendo che l'universo si è espanso dal decoupling ad oggi nell'era della materia, allora:

$$H(t) = H_d \left( \frac{a_d}{a(t)} \right)^{3/2}; \quad (1.12)$$

possiamo inoltre calcolare il raggio  $R_0$  della LSS oggi (esso coincide con il raggio dell'universo osservabile):

$$R_0 \equiv R_{LSS}(t_0) = a(t_0) \int_{t_d}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \simeq \frac{2}{a_d H_d} \sqrt{\frac{a_0}{a_d}} \quad (1.13)$$

con

$$R_{LSS}(t_d) = \frac{a_d}{a_0} R_0 \simeq \frac{R_0}{1100}. \quad (1.14)$$

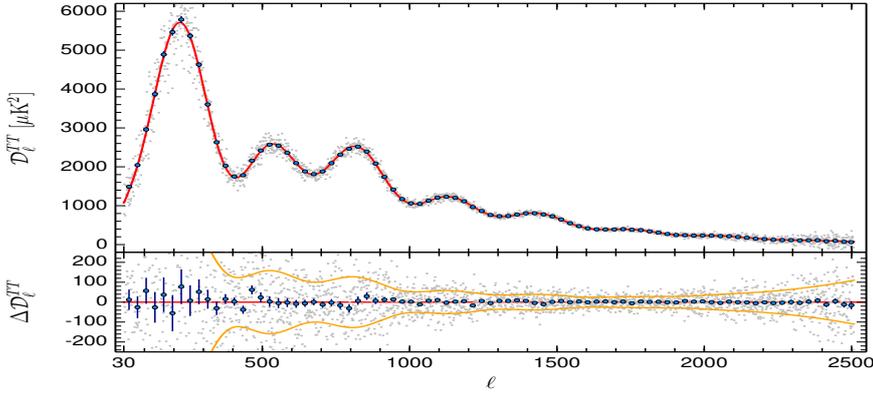


Figura 1.3: Correlazioni in temperatura e previsioni teoriche - Planck 2015.

Si noti che il fattore  $\sim 1/1100$  deriva dal rapporto delle temperature della CMB oggi e all'istante del decoupling. Confrontando quindi  $R_{LSS}(t_d)$  con l'orizzonte di Hubble allo stesso istante si osserva che

$$\frac{R_{LSS}(t_d)}{H_d^{-1}} = 2 \left( \frac{a_0}{a_d} \right)^{1/2} \ll 1, \quad (1.15)$$

ovvero che la superficie del last scattering non era causalmente connessa all'istante del disaccoppiamento. Essa inoltre non può esserlo stata nemmeno precedentemente in un universo dominato dalla materia o dalla radiazione poiché il rapporto fra  $R_{LSS}(t)$  e  $H(t)^{-1}$  decresce in entrambi i casi in un universo in espansione. Nell'immagine 1.2 è possibile confrontare le dimensioni della superficie di last scattering connessa, con le dimensioni del raggio di Hubble attuale [10].

- *Problema della nascita delle grandi strutture.*

Per poter produrre le grandi strutture cosmologiche osservate sono necessarie microscopiche disomogeneità iniziali. La spiegazione della nascita delle grandi strutture cosmiche rappresenta un ulteriore problema, collegabile con il problema delle anisotropie nella CMB a piccola scala.

Accettando la teoria dell'inflazione il problema della nascita delle grandi strutture è automaticamente superato. Infatti l'inflazione produce, mediante un dinamica di origine quantistica, le condizioni iniziali necessarie allo sviluppo dell'universo che osserviamo. Il fatto che il meccanismo dell'inflazione sia in grado di generare dinamicamente le strutture a larga scala osservate è attualmente considerato il principale punto a favore della teoria.

## 1.2 L'inflazione cosmica

La soluzione ai problemi elencati nel paragrafo precedente può essere sviluppata ipotizzando l'esistenza di un periodo nella storia dell'universo chiamato inflazione precedente all'era della radiazione.

La sua definizione può essere espressa matematicamente in due forme diverse, ma equivalenti, specificando le proprietà caratteristiche dell'evoluzione del fattore di scala.

*Definizione 1:* l'espansione dell'universo è accelerata.

$$\frac{d^2 a}{dt^2} > 0. \quad (1.16)$$

*Definizione 2:* il raggio di Hubble comovente diminuisce.

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{aH} < 0. \quad (1.17)$$

Le due definizioni sono equivalenti, infatti:

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{aH} = \frac{d}{dt} \frac{1}{\dot{a}} = -\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2}. \quad (1.18)$$

Vediamo ora come l'inflazione risolve i problemi elencati nella teoria del big bang:

- *Problema della piattezza dell'universo.*

Durante una fase di espansione accelerata, per la (1.17),  $\Omega - 1$  diminuisce invece di aumentare.

È possibile, con un periodo inflazionario sufficientemente lungo, ottenere  $\Omega \simeq 1$  con una precisione arbitraria al tempo di Planck.

- *Problema dell'omogeneità dell'universo.*

L'ipotesi dell'esistenza di una fase di espansione accelerata, che precede l'era della radiazione, permette di giustificare l'omogeneità osservata della radiazione cosmica di fondo. Infatti, durante una fase di espansione accelerata, l'orizzonte di Hubble  $H^{-1} \simeq \text{const}$  mentre  $R_{LSS}$  espande proporzionalmente al fattore di scala. Quindi, risalendo indietro nel tempo, esiste un istante  $t_*$  a partire dal quale  $R_{LSS} < H^{-1}$ . Ne concludiamo che l'intera superficie di last scattering è causalmente connessa durante l'inflazione. Se le strutture (e le disomogeneità della CMB) sono originate dall'inflazione, esse sono necessariamente connesse causalmente. In questo contesto è possibile stimare quale sia la durata minima della fase di accelerazione necessaria affinché  $R_{LSS}(t_*) \simeq H_*^{-1}$ . Partendo dall'identità

$$R_* H_* = \frac{R_* R_f}{R_f R_0} R_0 H_* \simeq 1, \quad (1.19)$$

dove il pedice  $f$  indica la fine dell'era dell'accelerazione, se definiamo  $R_f/R_* = e^N$  allora

$$e^N \simeq \frac{R_f}{R_0} R_0 H_* = \frac{T_0}{T_f} R_0 H_* \Rightarrow N \simeq \ln T_0 R_0 - \ln \frac{T_f}{H_*} \simeq 67 - \ln \frac{T_f}{H_*}, \quad (1.20)$$

dove  $N$  prende il nome di numero di e-folds.

- *Problema della nascita delle grandi strutture.*

Lo spazio non è vuoto in senso classico. La meccanica quantistica prevede l'esistenza di fluttuazioni quantistiche dei campi presenti. La dinamica delle fluttuazioni quantistiche del vuoto al termine dell'inflazione produce le disomogeneità iniziali dalle quali si sono generate le strutture cosmiche osservate.

### 1.2.1 La dinamica dell'inflazione

Abbiamo visto che l'inflazione è una fase di espansione accelerata (1.16).

Dalle equazioni di Friedmann (1.4) si può concludere che un'espansione accelerata è generata da un fluido con pressione negativa ed equazione di stato  $\omega < -1/3$ .

Un fluido di questo tipo ha caratteristiche piuttosto esotiche. Si può dimostrare che un campo scalare omogeneo minimamente accoppiato alla gravità ha una densità di energia e una pressione definite dalle seguenti espressioni [11]:

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (1.21)$$

$$p = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (1.22)$$

Se la dinamica del campo scalare è tale che, per un certo periodo di tempo,  $V(\phi) \gg \frac{1}{2} \dot{\phi}^2$ , allora  $\phi$  si comporta come un fluido con pressione negativa, e con  $\omega \simeq -1$ . Un campo scalare con questa dinamica può generare l'inflazione e prende il nome di Inflatone.

La dinamica del campo inflatonico minimamente accoppiato con la gravità è descritta dalla seguente azione:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{g^{\mu\nu}}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{M_p^2}{2} R - V(\phi) \right]. \quad (1.23)$$

Dalla variazione dell'azione (1.23) rispetto alla metrica e al campo scalare e considerando solo la loro parte omogenea si ottengono le equazioni del moto del sistema: l'equazione di Friedmann, e l'equazione del moto del campo scalare [12]

$$\begin{cases} \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V_{,\phi} \\ H^2 = \frac{1}{3M_p^2} \left[ \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right]. \end{cases} \quad (1.24)$$

In particolare l'evoluzione del campo scalare è determinata dall'equazione di Klein Gordon (la prima equazione del sistema (1.24)). Il termine di frizione in questa equazione

ha un effetto dissipativo che permette di “rallentare” l’evoluzione del campo.

Possiamo inoltre osservare che affinché il campo evolva lentamente il potenziale deve essere quasi costante durante tutto il periodo dell’inflazione (e quindi anche la sua derivata seconda deve essere piccola).

Si noti che un potenziale costante determinerebbe inflazione infinita e non è fisicamente accettabile.

Un potenziale con le caratteristiche descritte sopra genera la cosiddetta inflazione di slow roll. L’inflazione termina quando il campo scalare si avvicina al minimo del potenziale che diventa quindi confrontabile con l’energia cinetica del campo  $V(\phi) \sim \frac{1}{2}\dot{\phi}^2$ . Al termine dell’inflazione generalmente si avvia il processo di “reheating”, che consiste nel decadimento dell’inflatone nei campi di particelle noti ([13], [14]) e nel conseguente “riscaldamento” dell’universo che è l’inizio del big bang caldo.

## 1.3 Dinamica omogenea di slow roll

### 1.3.1 Le gerarchie dei parametri di slow roll

È conveniente studiare la dinamica inflazionaria sostituendo i parametri di slow roll al posto di  $H$  e  $\phi$  e delle loro derivate.

Vengono comunemente definite due gerarchie di parametri di SR che descrivono rispettivamente l’evoluzione della metrica e del campo scalare [15, 16]  $\epsilon_i$ , e  $\delta_i$ :

$$\delta_0 = \frac{\phi}{\phi_0}, \quad \delta_{i+1} = \frac{d\delta_i}{dt} \frac{1}{H\delta_i} \quad (1.25)$$

e

$$\epsilon_0 = \frac{H_0}{H}, \quad \epsilon_{i+1} = \frac{d\epsilon_i}{dt} \frac{1}{H\epsilon_i} \quad (1.26)$$

dove  $\phi_0 = \phi(t_i)$ , e  $H_0 = H(t_i)$ . Queste due famiglie di parametri sono definite separatamente ma possono poi essere messe in relazione utilizzando le equazioni del moto.

La gerarchia delle  $\delta_i$ , collegata con le derivate del campo inflatonico  $\phi$ , descrive la cinematica del campo scalare; mentre la gerarchia delle  $\epsilon_i$ , collegata con il parametro di Hubble  $H$ , descrive la geometria dell’universo.

La definizione dei parametri di SR è tale che la derivata temporale di ciascun parametro è proporzionale al prodotto tra il parametro stesso e quello successivo (in altri termini è del secondo ordine). In regime di slow roll i parametri sono piccoli (a parte i primi parametri della gerarchia,  $\delta_0$  e  $\epsilon_0$ , che infatti non vengono normalmente sostituiti nelle equazioni del moto), le loro derivate sono del secondo ordine e, approssimando le espressioni al primo ordine si possono trascurare. Al primo ordine quindi i parametri di SR si possono trattare come costanti.

Dalla definizione dei parametri di slow roll si osserva che la definizione di inflazione è equivalente a:

$$\epsilon_1 < 1. \quad (1.27)$$

Questa definizione è equivalente alle definizioni (1.16), e (1.17), infatti:

$$\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a}; \quad (1.28)$$

che possiamo riscrivere, usando  $\epsilon_1$ , come:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2(1 - \epsilon_1); \quad (1.29)$$

se  $\ddot{a} > 0$ , allora  $\epsilon_1 < 1$ .

Affinchè l'inflazione duri sufficientemente a lungo è necessario che la variazione di  $\epsilon_1$  sia piccola nel tempo. Quindi, in regime di slow roll, anche  $\epsilon_1$  deve essere piccolo. Risolvendo l'equazione (1.29) con  $\epsilon_1 \simeq 0$ , si ricava  $a(t) \sim e^{Ht}$ , che significa che l'universo, durante l'epoca inflazionaria è descrivibile con un modello quasi De Sitter.

Per finire notiamo che convenzionalmente si assume che l'inflazione abbia termine quando

$$\epsilon_1 \simeq 1. \quad (1.30)$$

### 1.3.2 Equazioni del moto e l'approssimazione di slow roll

Studiamo ora l'approssimazione delle equazioni del moto che si ottiene in regime di slow roll grazie alle funzioni introdotte nella sezione precedente.

Il sistema di equazioni (1.24) diventa:

$$\delta_1(\delta_2 + \delta_1 - \epsilon_1) + 3\delta_1 = -\frac{V_{,\phi}}{\phi H^2} \quad (1.31)$$

$$1 = \frac{\phi^2}{3M_p^2} \left[ \frac{\delta_1^2}{2} + \frac{V(\phi)}{H^2 \phi^2} \right], \quad (1.32)$$

Al primo ordine nei parametri di slow roll le equazioni si riducono a:

$$H^2 \simeq \frac{V(\phi)}{3M_p^2} \quad (1.33)$$

$$\delta_1 \simeq -\frac{M_p^2}{\phi^2} \frac{d \ln V}{d \ln \phi} \equiv -\frac{M_p^2}{\phi^2} n_V. \quad (1.34)$$

La funzione  $n_V$  è semplicemente l'esponente del campo nel caso di un potenziale monomiale. Quindi, un potenziale sufficientemente piatto rende  $\delta_1 \ll 1$ .

L'equazione di Klein Gordon, a questo punto, esprime un rapporto tra il valore di  $\delta_1$  e la piattezza del potenziale. Inoltre derivando la (1.34) si ottiene:

$$\delta_2 = \frac{V_{,\phi\phi}\dot{\phi}}{V_{,\phi}H} - \frac{V_{,\phi}\dot{\phi}}{VH} - \frac{\dot{\phi}}{H\phi} = -\delta_1 \left( 2 - \frac{d \ln n_V}{d \ln \phi} \right) \quad (1.35)$$

Le equazioni del moto possono essere usate per connettere le gerarchie tra loro, e si ottiene:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2} \frac{\phi^2}{M_p^2} \delta_1^2 \quad (1.36)$$

A causa del fatto che lo slow roll si ottiene se  $V$  è sufficientemente piatto in letteratura vengono introdotti al posto di  $\epsilon_i$  e  $\delta_i$  i parametri di slow roll  $\epsilon_{SR}$ , e  $\eta_{SR}$  legati alla forma del potenziale dalle seguenti relazioni

$$\epsilon_{SR} = \frac{M_p^2}{2} \left( \frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2 \quad (1.37)$$

$$\eta_{SR} = M_p^2 \frac{V_{,\phi\phi}}{V} \quad (1.38)$$

dove si può mostrare utilizzando le equazioni di Friedmann che  $\epsilon_{SR} = \epsilon_1$  al primo ordine negli slow roll.

## 1.4 Dinamica delle perturbazioni

### 1.4.1 La metrica perturbata

L'aspetto più importante della teoria dell'inflazione è il fatto che la dinamica delle perturbazioni quantistiche del campo scalare e della metrica siano in grado di produrre le disomogeneità osservate nella CMB e le strutture grande scala [17].

In presenza di perturbazioni il tensore metrico può essere scomposto in una parte omogenea e una parte perturbata, e può essere descritto dal seguente elemento di linea generale [2, 6, 18]:

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + 2a(t)B_i dx^i dt + a^2(t) [(1 - 2\Psi)\delta_{ij} + 2E_{ij}] dx^i dx^j, \quad (1.39)$$

dove  $\Phi$ ,  $B_i$ ,  $\Psi$ , e  $E_{ij}$  rappresentano le perturbazioni dell'elemento di linea (1.1).

Il campo  $B_i$  può essere scomposto

$$B_i = \partial_i B - S_i, \quad (1.40)$$

dove  $B$  è un campo scalare e  $S_i$  ha divergenza nulla

$$\partial^i S_i = 0. \quad (1.41)$$

Il campo  $E_{ij}$  può essere scomposto nella somma di tre componenti nel seguente modo

$$E_{ij} = 2\partial_{ij}E + 2\partial_{(i}F_{j)} + h_{ij} \quad (1.42)$$

dove  $E$  è un campo scalare,  $F_j$  è un campo vettoriale a divergenza nulla

$$\partial^i F_i = 0, \quad (1.43)$$

e  $h_{ij}$  è un tensore trasverso e a traccia nulla

$$h_i^i = \partial^i h_{ij} = 0. \quad (1.44)$$

Le perturbazioni sono classificate in tre categorie in funzione del modo in cui si trasformano rispetto alle rotazioni spaziali.

La parte scalare delle perturbazioni è descritta da quattro campi scalari:  $\Phi$  (*lapse*),  $B$  (*shift*),  $\Psi$  (*perturbazione della curvatura spaziale*), e  $E$  (*shear*).

Quando si scompone il tensore metrico nella sua componente omogenea  $\bar{g}_{\mu\nu}$ , e nella componente delle perturbazioni  $\delta g_{\mu\nu}$ , la decomposizione non è univoca, ma vi è una ambiguità residua che dipende dalla scelta delle coordinate (gauge).

Infatti scegliendo un particolare gauge è possibile far comparire perturbazioni fittizie (non fisiche) in uno spazio omogeneo, o similmente eliminare alcuni dei campi delle perturbazioni presenti in (1.39).

Una generica trasformazione di coordinate infinitesima si può esprimere nel modo seguente:

$$\begin{cases} t \rightarrow t + \alpha \\ x^i \rightarrow x^i + \delta^{ij}\beta_{,j}, \end{cases} \quad (1.45)$$

ed in seguito alla trasformazione (1.45) le perturbazioni scalari della metrica si trasformano come segue

$$\begin{cases} \Phi \rightarrow \Phi - \dot{\alpha} \\ B \rightarrow B + a^{-1}\alpha - a\dot{\beta} \\ E \rightarrow E - \beta \\ \Psi \rightarrow \Psi + H\alpha. \end{cases} \quad (1.46)$$

È evidente che scegliendo opportunamente i campi  $\alpha$  e  $\beta$  si possono annullare due perturbazioni scalari.

Le disomogeneità  $\delta\phi$  del campo inflatonico sono descritte da un campo scalare. Anch'esse, come le perturbazioni scalari, dipendono dalla scelta delle coordinate. Le perturbazioni scalari della metrica e le perturbazioni (anch'esse scalari) del campo inflatonico sono legate dalle equazioni di Einstein.

Per descrivere correttamente le perturbazioni fisiche della metrica e del campo inflatonico è necessario utilizzare un'opportuna combinazione dei campi  $\Phi$ ,  $\Psi$ ,  $E$ ,  $B$ , e  $\delta\phi$  che sia invariante rispetto alle trasformazioni di coordinate.

Ne è un esempio la quantità  $\mathcal{R}$  [19, 6], definita come

$$\mathcal{R} = \Psi + \mathcal{H}\frac{\delta\phi}{\dot{\phi}} = \Psi + H\frac{\delta\phi}{\phi'}, \quad (1.47)$$

dove  $\mathcal{H} \equiv a^{-1}da/d\eta$ , che rappresenta la perturbazione di curvatura comovente, e la quantità  $v$

$$v = a(\delta\phi + \frac{\phi'}{H}\Psi) \quad (1.48)$$

chiamata variabile di Mukhanov [6]. Utilizzando i vincoli provenienti dalle equazioni del moto è possibile descrivere le perturbazioni scalari del sistema inflatone + gravità mediante una singola quantità gauge invariante.

Le perturbazioni tensoriali  $h_{ij}$  descrivono le onde gravitazionali primordiali prodotte

durante l'inflazione. Diversamente da quelle scalari esse sono gauge invarianti per definizione, quindi non dipendono dalla scelta delle coordinate. Le perturbazioni tensoriali sono polarizzate trasversalmente e massless quindi sono descritte da due gradi di libertà fra di loro indipendenti con la stessa dinamica. Nei modelli di inflazione a campo singolo lo spettro delle perturbazioni tensoriali permette di ricavare il rapporto tensore su scalare che è l'osservabile di cui si occupa nel dettaglio questa tesi.

### 1.4.2 Azione delle perturbazioni

Sviluppando al secondo ordine nelle perturbazioni l'azione (1.23), utilizzando i vincoli e rimuovendo i gradi di libertà non fisici, è possibile descrivere la dinamica delle perturbazioni scalari in termini di un unico campo  $v(\vec{x}, \eta)$ . La sua dinamica al secondo ordine è descritta da (1.49)

$$S_s = \int d\eta \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} \sum_{k \neq 0}^{\infty} \left[ \left( \frac{dv_{i,k}(\eta)}{d\eta} \right)^2 - \left( k^2 - \frac{z''}{z} \right) v_{i,k}(\eta)^2 \right] \quad (1.49)$$

dove  $v_k$  è la trasformata di Fourier di  $v(\vec{x}, \eta)$ , l'apice indica la derivata rispetto al tempo conforme  $\eta$ , e  $z \equiv a\sqrt{\epsilon_1}$ .

La dinamica delle perturbazioni tensoriali della metrica si può descrivere similmente utilizzando la trasformata di Fourier dei campi (che descrivono le due polarizzazioni) opportunamente riscaldati  $v_{i,k}^{(\lambda)} \equiv \frac{aM_P}{\sqrt{2}} Re(h_k)$  dove  $\lambda$  indica le due polarizzazioni:  $+$ ,  $\times$ .

$$S_t = \int d\eta \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} \sum_{\lambda=+,\times} \sum_{k \neq 0}^{\infty} \left[ \left( \frac{dv_{i,k}^{(\lambda)}}{d\eta} \right)^2 - \left( k^2 - \frac{a''}{a} \right) \left( v_{i,k}^{(\lambda)} \right)^2 \right]. \quad (1.50)$$

L'azione delle perturbazioni scalari e tensoriali è formalmente analoga a quella di un oscillatore armonico con una frequenza dipendente dal tempo.

Le equazioni del moto delle perturbazioni si ottengono calcolando la variazione dell'azione (1.49, 1.50) rispetto alle stesse perturbazioni per ottenere:

$$v_k'' + \left( k^2 - \frac{z''}{z} \right) v_k = 0. \quad (1.51)$$

nel caso scalare e

$$v_k'' + \left( k^2 - \frac{a''}{a} \right) v_k = 0. \quad (1.52)$$

nel caso tensoriale.

### 1.4.3 Quantizzazione e vuoto di Bunch-Davies

La dinamica delle perturbazioni primordiali obbedisce alle leggi della meccanica quantistica. Quindi la trattazione completa dello studio delle perturbazioni primordiali necessita della quantizzazione del sistema dinamico descritto dall'azione (1.49, 1.50). L'analogia

con l'oscillatore ordinario permette di procedere in modo analogo alla quantizzazione di un ordinario campo scalare con una massa dipendente dal tempo  $m_{eff}^2(\eta) = -z''/z$ . Partendo dall'azione

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} (\partial_\mu v \partial^\mu v + m_{eff}^2 v^2). \quad (1.53)$$

si introduce quindi il momento  $\pi(\eta, \vec{x})$  coniugato alla variabile di campo  $v$ , definito dalla relazione [20]

$$\pi = v'. \quad (1.54)$$

Si sostituiscono  $v$  e  $\pi$  con gli operatori corrispondenti  $\hat{v}$ ,  $\hat{\pi}$  che soddisfano alla relazione di commutazione

$$[\hat{v}(\eta_0, \vec{x}), \hat{\pi}(\eta_0, \vec{x}')] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (1.55)$$

L'equazione del moto per  $\hat{v}_k$ , trasformata di Fourier di  $\hat{v}$  è

$$\hat{v}_k'' + (k^2 + m_{eff}^2) \hat{v}_k = 0. \quad (1.56)$$

Similmente alla quantizzazione di un campo su spazio piatto è possibile introdurre gli operatori di creazione e distruzione  $\hat{a}_k^\dagger$ , e  $\hat{a}_k$  definiti da

$$\hat{v} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left( f_k^*(\eta) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \hat{a}_k + f_k(\eta) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \hat{a}_k^\dagger \right). \quad (1.57)$$

La relazione di commutazione tra  $\hat{v}$  e  $\hat{\pi}$  (1.55) si può riscrivere in termini di questi operatori come

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}. \quad (1.58)$$

Inoltre sostituendo la (1.57) in (1.56) si osserva che la funzione  $f_k$  soddisfa un'equazione analoga a quella del campo  $\hat{v}_k$

$$f_k'' + (k^2 + m_{eff}^2) f_k = 0. \quad (1.59)$$

Le due relazioni di commutazione (1.55) e (1.58) sono consistenti tra loro se la funzione  $f_k(\eta)$  soddisfa la condizione wronskiana

$$f_k' f_k^* - f_k'^* f_k = -i. \quad (1.60)$$

Si noti che  $f_k$  non è univocamente determinata ma dipende dalla scelta delle condizioni iniziali di (1.59).

Si definisce il vettore dello stato di vuoto al tempo  $\eta = \eta_0$ ,  $|0_k\rangle$ , come un autovettore dell'operatore  $\hat{a}_k$  corrispondente all'autovalore nullo:

$$\hat{a}_k |0_k\rangle = 0. \quad (1.61)$$

Questa definizione ovviamente non permette di fissare univocamente il vuoto fintanto che non vengono specificati  $f_k$  e  $f_k'$  al tempo  $\eta_0$ .

In un universo in espansione per ogni modo  $k$  del campo delle perturbazioni vi è un'istante di tempo in cui la sua lunghezza d'onda (che espande proporzionalmente ad  $a(t)$ )

è abbastanza piccola da poter trascurare gli effetti della curvatura dello spazio tempo ovvero  $\lambda_k \equiv a/k \ll H^{-1}$ . Prima di questo istante il vuoto sarà molto simile all'analogo Minkowskiano.

Parliamo in questo caso di vuoto di Bunch-Davies (BD), che rappresenta lo stato quantistico preferito in un universo quasi De Sitter, cioè il modello di universo durante l'inflazione.

Per costruire questo stato di vuoto si considera un modo  $k$  nel limite passato ( $\eta_0 \rightarrow -\infty$ ) e in tale limite si fissa:

$$f_k(\eta) \rightarrow \frac{e^{ik\eta}}{\sqrt{2k}}. \quad (1.62)$$

Si noti che in tale limite  $k/a \gg m_{eff}$ . Ovviamente lo stato di vuoto risulta completamente determinato una volta risolta l'equazione di Mukhanov (1.59). Il vuoto di BD è la soluzione che asintoticamente si comporta come (1.62).

## 1.5 Le soluzioni dell'equazione di Mukhanov

La soluzione generale dell'equazione di Mukhanov si può calcolare solo in alcuni casi. In particolare è nota la soluzione in un universo di de Sitter o in un universo che evolve secondo una legge di potenza, ovvero  $a(\eta) \propto \eta^{-q}$ . In questi casi si può esprimere la soluzione generale dell'equazione come una combinazione lineare di funzioni di Bessel moltiplicate per opportuni coefficienti dipendenti dal tempo. Si rimanda all'appendice (A) per maggiori dettagli circa le funzioni di Bessel.

Purtroppo nei casi fisicamente più rilevanti e nel caso dell'inflazione con SR l'equazione di Mukhanov non si risolve esattamente ed è necessario utilizzare tecniche approssimate che, fino ad oggi, hanno dato risultati analitici sufficientemente accurati per essere confrontati con i dati sperimentali. Solo il comportamento nel limite di grandi lunghezze d'onda delle soluzioni è rilevante per il confronto con le osservazioni, quindi non è necessario conoscere le soluzioni ad ogni istante ma solo nel suddetto limite.

Si noti che durante il periodo inflazionario (e più in generale in un universo in espansione) le lunghezze proprie variano proporzionalmente al fattore di scala e quindi in funzione del tempo. In questo senso ci riferiremo ai limiti  $\eta \rightarrow -\infty$  e  $\eta \rightarrow 0^-$  come ai limiti di piccole/grandi lunghezze d'onda rispettivamente (ovvero  $k/(aH) \gg 1$  e  $k/(aH) \ll 1$ ).

### 1.5.1 Metodo del matching

Questo metodo permette di calcolare il comportamento delle soluzioni a grandi lunghezze d'onda note le condizioni iniziali dell'evoluzione (che vengono fissate nel limite di piccole lunghezze d'onda). Osserviamo anzitutto che  $m_{eff}^2$  che compare nell'equazione di Mukhanov per le perturbazioni scalari e tensoriali è proporzionale a  $a^2 H^2$  moltiplicato per una funzione dei parametri di slow roll. Quindi nel limite  $k \gg aH$ ,  $\frac{z''}{z} \ll k^2$  e l'equazione di Mukhanov prende la seguente forma

$$f_k'' + k^2 f_k = 0. \quad (1.63)$$

La soluzione generale di (1.63) è quella di un oscillatore armonico

$$f_k \simeq C_1(k)e^{ik\eta} + C_2(k)e^{-ik\eta}, \quad (1.64)$$

dove le costanti di integrazione possono essere fissate dalle condizioni iniziali.

Nel limite  $k \gg aH$  gli effetti della curvatura dello spazio tempo sono trascurabili, e quindi la soluzione deve coincidere con quella dello spazio piatto. In particolare sarà:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{\sqrt{2k}} \\ C_2 = 0. \end{cases} \quad (1.65)$$

In altri termini il vuoto quantistico iniziale deve coincidere col vuoto di Minkowski. In questo caso parleremo di vuoto di Bunch-Davies.

Viceversa nel limite  $k \ll aH$  (prendiamo ad esempio il caso scalare, il caso tensoriale si ottiene facilmente sostituendo  $z \rightarrow a$ ) l'equazione di Mukhanov diventa

$$f_k'' - \frac{z''}{z} f_k = 0; \quad (1.66)$$

in questo limite la soluzione più generale è

$$f_k = c_1(k)z + c_2(k)z \int \frac{d\eta}{z^2}. \quad (1.67)$$

Nel limite di grandi lunghezze d'onda il secondo contributo in (1.67) è trascurabile. Il coefficiente del termine dominante può essere fissato raccordando l'approssimazione (1.64) con l'approssimazione (1.67) quando  $k \approx aH$ :

$$|c_1(k)z|_{k/(aH)=1} = |C_1(k)| = \frac{1}{\sqrt{2k}} \quad (1.68)$$

e quindi la soluzione a grandi lunghezze d'onda sarà

$$f_k(\eta) \sim \frac{1}{z\sqrt{2k}} \Big|_{k/(aH)=1} z. \quad (1.69)$$

In questo modo si riesce ad esprimere la soluzione di Bunch-Davies dell'equazione differenziale di Mukhanov nella regione  $k \ll aH$ , che è quella che andrà confrontata con le osservazioni, e che permette di calcolare lo spettro delle perturbazioni cosmologiche.

### 1.5.2 Approssimazione di SR al primo ordine

Diversamente si può risolvere l'equazione di Mukhanov sfruttando l'approssimazione di slow roll e quindi trattando i parametri di slow roll come costanti. Questo schema di approssimazione è accurato al primo ordine nei parametri. Correzioni del secondo ordine

sono fuori controllo ma spesso irrilevanti rispetto ai contributi dominanti al primo ordine. Per il caso scalare, ad esempio

$$\frac{z''}{z} = \frac{\left(2 - \epsilon_1 + \frac{\epsilon_2}{2} + 2\epsilon_2 - \epsilon_1\epsilon_2 + \frac{\epsilon_2^2}{2} + \epsilon_2\epsilon_3\right)}{\eta^2(1 - \epsilon_1)^2} \simeq \frac{2}{\eta^2} \left(1 + \frac{3}{2}\epsilon_1 + \frac{3}{4}\epsilon_2\right) \quad (1.70)$$

e la soluzione è

$$f_k = (-\eta)^{\frac{1}{2}} \left( c_1(k) H_\nu^{(1)}(-k\eta) + c_2(k) H_\nu^{(2)}(-k\eta) \right) \quad (1.71)$$

dove  $H_\nu^{(1,2)}(x)$  sono le funzioni di Hankel e  $\nu = \frac{3}{2} + \epsilon_1 + \frac{3}{2}\epsilon_2$ .

Le costanti  $c_{1,2}(k)$  sono legate dalle condizioni iniziali. Nel limite  $-k\eta \rightarrow \infty$  le funzioni di Hankel si riducono a

$$H_\nu^{(1,2)}(-k\eta) \rightarrow e^{\mp ik\eta} \sqrt{\frac{2}{\pi(-k\eta)}} \quad (1.72)$$

e quindi Bunch-Davies corrisponde a:

$$\begin{cases} c_1(k) = \sqrt{\frac{\pi}{4}} \\ c_2(k) = 0. \end{cases} \quad (1.73)$$

Ovviamente in questo caso la soluzione approssimata è nota su tutto l'asse temporale e l'espressione (1.71) dovrà essere valutata nel limite di grandi lunghezza d'onda per poter essere confrontata con gli osservabili cosmologici.

Le soluzioni approssimate ottenute con i due metodi descritti sono equivalenti al primo ordine dei parametri di slow roll. Inoltre nel caso di puro de Sitter il metodo del matching dà il risultato esatto.

## 1.6 Spettri di potenza ed osservabili

Gli spettri delle perturbazioni primordiali generate durante l'inflazione hanno caratteristiche peculiari che possono essere descritte da una serie di parametri. Questi parametri differiscono a seconda del modello di inflazione considerato. Al termine dell'inflazione le perturbazioni primordiali determinano le disomogeneità iniziali del fluido cosmologico che dà il via, con il big bang caldo, all'era della radiazione. Le loro caratteristiche a questo istante si riverberano nella formazione delle strutture e nelle disomogeneità della radiazione cosmica di fondo che oggi osserviamo. È quindi possibile, assumendo una serie di ipotesi in merito all'evoluzione dell'universo dal big bang fino ad oggi, estrarre informazioni sull'epoca inflazionaria dalle osservazioni della CMB e della distribuzione di materia nell'universo.

Sono sostanzialmente 3 le caratteristiche degli spettri primordiali che riusciamo a confrontare con le osservazioni della CMB: gli indici spettrali  $n_s - 1$  ed  $n_t$  delle perturbazioni scalari e tensoriali rispettivamente e l'ampiezza delle perturbazioni scalari  $A_s$ . Per determinare gli indici spettrali è necessario calcolare il valore di aspettazione sul vuoto di

BD della funzione a due punti del campo che descrive le perturbazioni e lo spettro di potenza corrispondente

$$\mathcal{P}_v \propto k^3 \langle 0 | \hat{v}_k^2 | 0 \rangle \propto k^3 |f_k|^2. \quad (1.74)$$

Nel limite di grandi lunghezze d'onda, l'indice spettrale  $n_v$  è il secondo coefficiente della serie di Taylor di  $\ln \mathcal{P}_v$  intorno al logaritmo della scala pivotale  $k_*$  definita come uno dei numeri d'onda caratteristici dello spettro osservato oggi nella CMB. Il primo termine invece è il logaritmo dell'ampiezza delle perturbazioni alla scala pivotale,  $A_v$ . Quindi:

$$\ln \mathcal{P}_v(k) \simeq \ln A_v + \left. \frac{d \ln \mathcal{P}_v}{d \ln \frac{k}{k_*}} \right|_{k=k_*} \ln \frac{k}{k_*} + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 \ln \mathcal{P}_v}{d \ln \frac{k}{k_*}^2} \right|_{k=k_*} \ln^2 \frac{k}{k_*} + \mathcal{O} \left( \ln^3 \frac{k}{k_*} \right) \quad (1.75)$$

ed  $n_v \equiv \left. \frac{d \ln \mathcal{P}_v}{d \ln \frac{k}{k_*}} \right|_{k=k_*}$ . In altri termini l'indice spettrale indica la dipendenza da  $k$  dello spettro intorno a  $k_*$ :

$$\mathcal{P}_v(k) \simeq A_v \left( \frac{k}{k_*} \right)^{n_v}. \quad (1.76)$$

È evidente che anche l'indice spettrale dipende dalla scelta di  $k_*$  (che ad esempio l'esperimento Planck assume pari a  $k_* = 0.05 Mpc^{-1}$ ). In un universo che espande con  $H = cost$  (de Sitter) la dinamica dei modi delle perturbazioni è la stessa (non dipende da  $k$ ). Quindi lo spettro risultante sarà indipendente da  $k$ . Parleremo in questo caso di spettro piatto. In un universo inflazionario le deviazioni da de Sitter sono piccole e proporzionali ai parametri di slow roll quindi anche la dipendenza degli spettri primordiali dalla scala  $k$  sarà ad essi proporzionale ovvero l'indice spettrale è proporzionale ad una combinazione lineare dei parametri di SR all'ordine più basso. La dipendenza dell'indice spettrale dalla scelta della scala pivotale quindi sarà del secondo ordine nei parametri di slow roll e viene normalmente trascurata (a meno che i parametri di SR non siano abbastanza grandi).

Le perturbazioni scalari sono descritte dallo “spettro di potenza della perturbazione scalare di curvatura comovente” definita in (1.47) il cui spettro di potenza è dato [21]

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} |\mathcal{R}_k|^2 = \frac{k^3}{2\pi^2} \left| -\frac{H \delta \phi_k}{\dot{\phi}} \right|^2, \quad (1.77)$$

dove  $\delta \phi_k$  è la trasformata di Fourier della perturbazione del campo inflatonico  $\delta \phi$ .

La seconda delle due uguaglianze in (1.77) vale nel particolare gauge dello spazio piatto, definito come

$$\Psi_{flat} = 0. \quad (1.78)$$

Per descrivere le perturbazioni tensoriali si introduce lo “spettro di potenza delle perturbazioni tensoriali”:

$$\mathcal{P}_h(k) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} (|h_{+,k}|^2 + |h_{\times,k}|^2). \quad (1.79)$$

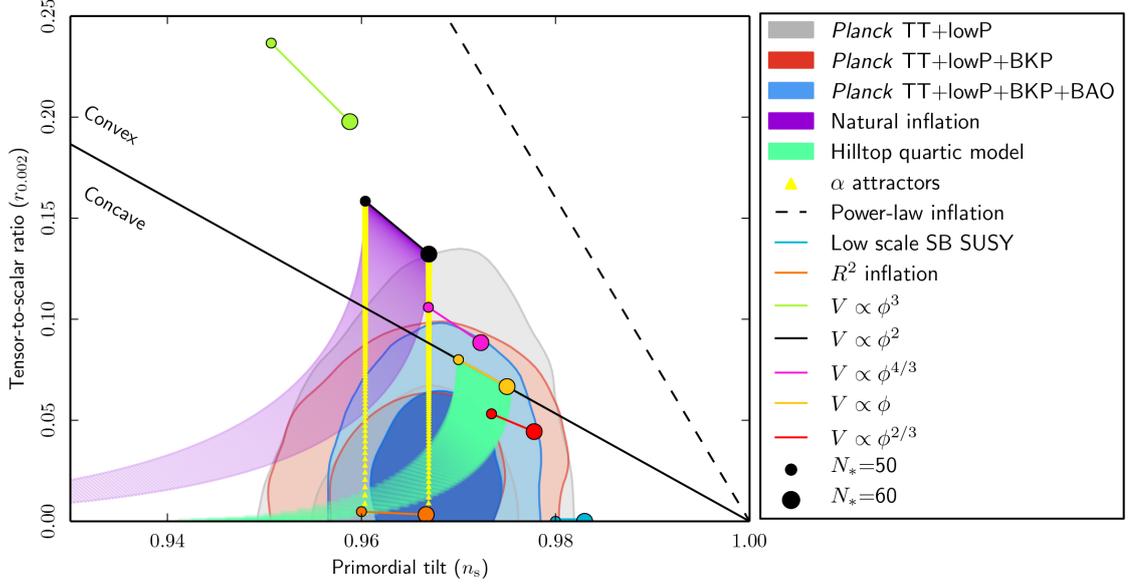


Figura 1.4: *Dati di Planck - confronto con diversi modelli di inflazione*

Si definisce l'indice spettrale delle perturbazioni scalari, che indicheremo come  $n_s - 1$ , come:

$$n_s - 1 \equiv \left. \frac{d \log(\mathcal{P}_{\mathcal{R}})}{d \log\left(\frac{k}{k_*}\right)} \right|_{k=k_*}. \quad (1.80)$$

La formula che collega  $n_s - 1$  ai parametri di slow dipende dal modello di inflazione considerato. Nel caso si consideri un singolo campo inflatonico minimamente accoppiato alla gravità si trova la seguente relazione

$$n_s - 1 \simeq -2\epsilon_1 - \epsilon_2. \quad (1.81)$$

I parametri di slow roll che compaiono nella formula precedente vengono poi valutati durante l'inflazione per ottenere una stima dell'indice spettrale in funzione della durata della fase inflazionaria (espressa normalmente mediante il numero di e-folds  $N_*$ ). Inserendo nella formula (1.81) i parametri di slow roll come scritti in (1.34), (1.35), e (1.36) si può ottenere l'indice spettrale in funzione del potenziale e delle sue derivate come segue

$$n_s - 1 \simeq 2M_p^2 \frac{V_{,\phi\phi^*}}{V_*} - 3M_p^2 \left( \frac{V_{,\phi^*}}{V_*} \right)^2, \quad (1.82)$$

dove l'asterisco indica che il campo deve essere calcolato  $N_*$  e-folds prima della fine dell'inflazione.

È chiaramente possibile ripetere le stesse considerazioni appena fatte per le perturbazioni tensoriali: si introduce l'indice spettrale  $n_t$

$$n_t \equiv \left. \frac{d \log(\mathcal{P}_h)}{d \log\left(\frac{k}{k_*}\right)} \right|_{k=k_*}. \quad (1.83)$$

La formula che collega  $n_t$  ai parametri di slow roll è scritta come segue nel caso di inflazione a campo singolo minimamente accoppiato alla gravità

$$n_t \simeq -2\epsilon_1, \quad (1.84)$$

ed usando le formule che collegano i parametri di slow roll al potenziale si ottiene

$$n_t \simeq - \left( \frac{M_p V_{,\phi^*}}{V_*} \right)^2. \quad (1.85)$$

Dallo sviluppo in serie (1.75) risultano definiti, oltre agli indici spettrali  $n_s - 1$  ed  $n_t$  anche le ampiezze scalari e tensoriali  $A_s$ ,  $A_t$ . Di queste quattro quantità solo 3 possono essere confrontate con le osservazioni data la precisione dei dati sperimentali: l'ampiezza delle perturbazioni scalari e tensoriali e l'indice spettrale delle perturbazioni scalari. L'ampiezza delle perturbazioni scalari è nota con un errore dell'1% circa

$$\ln(10^{10} A_s) = 3.089 \pm 0.036 \quad (\text{TT} + \text{lowP Planck data} - \text{livello confidenza } 68\%) \quad (1.86)$$

e similmente anche  $n_s$  è stimato con una buona precisione

$$n_s = 0.9655 \pm 0.0062 \quad (\text{TT} + \text{lowP Planck data} - \text{livello confidenza } 68\%). \quad (1.87)$$

Al posto dell'ampiezza delle perturbazioni tensoriali, è conveniente considerare l'osservabile  $r$  (rapporto tensore su scalare) definito come

$$r \equiv \frac{A_t}{A_s}. \quad (1.88)$$

Per consistenza nei modelli di inflazione a campo singolo  $r$  è proporzionale all'indice spettrale  $n_t$  (al primo ordine nello slow roll) e vale la relazione

$$r = -8n_t \quad (1.89)$$

quindi  $n_t$  si estrae dall'osservabile  $r$ . Il rapporto tensore su scalare è legato dalla relazione

$$\frac{H_*^2}{M_P^2} \simeq \frac{\pi^2}{2} A_s \cdot r \quad (1.90)$$

al valore della parametro di Hubble durante la fase inflazionaria e quindi all'energia del campo inflatonico durante l'inflazione. Sperimentalmente non si è ancora riusciti ad ottenere una stima accurata di  $r$  che sarebbe molto importante per ricavare la scala di energia dell'inflazione e discriminare fra i vari modelli di inflazione proposti in letteratura. Gli esperimenti di ultima generazione (Planck, la cui analisi è ancora in corso, e

WMAP qualche anno fa) sono riusciti solo a trovare un limite superiore al valore di  $r$ ,  $r_{max} \simeq 10^{-1}$ . Nel mese di marzo 2014, è stato annunciato che l'esperimento BICEP2 ha rilevato tracce dei modi B lasciati dalle onde gravitazionali nella radiazione cosmica di fondo dell'Universo primordiale dopo il Big Bang. I modi B sono segnali nella polarizzazione della radiazione cosmica di fondo che possono essere attribuiti alle perturbazioni tensoriali primordiali per estrarne una stima di  $r$ . Sfortunatamente quei risultati si sono dimostrati errati poichè la polarizzazione osservata non aveva un'origine inflazionaria. Tuttavia è in corso la presa dati dell'esperimento BICEP (*Background Imaging of Cosmic Extragalactic Polarization*) di terza generazione che potrebbe misurare con una precisione molto migliore di Planck il valore del rapporto scalare su tensore. Per questo motivo è fondamentale, dal punto di vista teorico, ottenere previsioni il più accurate possibile di questo rapporto.

Nella figura (1.4) sono presentati i vincoli più aggiornati di  $n_s$  ed  $r$  e confrontati con le previsioni teoriche dei modelli di inflazione più noti.

## Capitolo 2

# Gravità indotta

### 2.1 Motivazioni storiche per la gravità indotta

Come si è accennato nell'introduzione la prima teoria metrica della gravitazione che prevedesse un'origine dinamica per la "costante" di Newton  $G_N$  è stata proposta nel 1961 da Brans e Dicke. Nel modello di Brans e Dicke un campo scalare massless era associato alla costante gravitazionale. Questo campo, evolvendo dinamicamente in presenza di materia, conduceva a previsioni diverse rispetto alla relatività generale e ad una variazione di  $G_N$  nel tempo secondo una legge di potenza. Il modello conteneva un parametro adimensionale  $\omega$  ed era compatibile con le osservazioni solo previa l'assunzione che questo parametro fosse molto grande.

L'idea di un'origine dinamica per la costante di Newton fu riproposta qualche anno dopo da Sakharov (1967). Sakharov in particolare notò che le correzioni quantistiche alla dinamica di un campo scalare su spazio curvo generano il termine di interazione fra il campo scalare e lo scalare di Ricci associato alla metrica di background. Quindi partendo da una teoria contenente solo un campo scalare si genera mediante un meccanismo quantistico l'azione per la gravità che è quindi "indotta". Diversi anni più tardi anche Zee (1981) attribuisce un'origine dinamica alla massa di Planck ispirandosi tuttavia al fenomeno della rottura spontanea della simmetria, già noto.

L'idea di associare alla massa di Planck il valore di aspettazione di un campo scalare è essa stessa ispirata ai successi ottenuti nell'ambito della fisica delle particelle. Nella formulazione originale della teoria elettrodebole si ipotizzava che l'interazione fosse puntuale a 4 fermioni con la costante di accoppiamento di Fermi che aveva le dimensioni dell'inverso di una massa al quadrato. Più tardi, con gli sviluppi successivi della teoria, si scoprì che tali dimensioni nascondevano una particella mediatrice massiva non ancora rivelata (il bosone vettore). Descrivendo la teoria elettrodebole attraverso lo scambio di queste nuove particelle le costanti di accoppiamento risultano essere adimensionali.

Per analogia si può pensare che la costante gravitazionale, che presenta delle dimensioni, dipenda a sua volta dal valore di aspettazione di un campo scalare interagente non ancora rivelato. Perché questa interazione possa generare una costante gravitazionale dimensionata, l'accoppiamento tra il campo scalare  $\sigma$ , e il settore gravitazionale deve

essere non minimale.

Parleremo di gravità indotta riferendoci quindi ad una teoria metrica della gravitazione in cui la dinamica gravitazionale è generata da un termine del tipo  $\gamma\sigma^2 R$  dove  $\sigma$  è il campo scalare che genera dinamicamente la massa di Planck,  $R$  è lo scalare di curvatura e  $\gamma$  è l'accoppiamento adimensionale.

All'interno della teoria la dinamica del campo scalare viene governata da un potenziale di autointerazione, che dipende dalle ipotesi fisiche che vengono fatte sul sistema in oggetto.

In questo lavoro verranno esaminate le conseguenze dell'assunzione di 3 diversi potenziali. Il potenziale di Landau-Ginzburg (LG) ispirato al lavoro originale di Zee, il potenziale di Coleman-Weinberg (CW) che emerge naturalmente non appena si considerano le correzioni quantistiche alla dinamica del campo scalare, ed infine il potenziale di Starobinsky (ST). Quest'ultimo potenziale genera una dinamica equivalente a quella del modello di inflazione di Starobinsky che, originariamente introdotto nel 1979, ad oggi è considerato uno dei candidati più probabili a descrivere la dinamica inflazionaria. Il potenziale di LG è utilizzato in letteratura per descrivere la teoria dell'inflazione mediante il campo di Higgs e negli ultimi anni ha acquistato una notevole rilevanza in ambito cosmologico.

## 2.2 La dinamica inflazionaria in gravità indotta

### 2.2.1 Le equazioni omogenee del sistema

La dinamica del sistema campo scalare inflatonico accoppiato in maniera non minimale alla gravità può essere descritta dalla seguente azione [15, 22]:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{g^{\mu\nu}}{2} \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma + \frac{\gamma}{2} \sigma^2 R - V(\sigma) \right], \quad (2.1)$$

dove  $\gamma$  è un parametro adimensionale definito positivo che descrive l'accoppiamento non minimale tra il campo scalare e la gravità, mentre  $\sigma$  è il campo scalare che gioca contemporaneamente il ruolo di campo inflatonico e di campo che genera la costante di Newton effettiva nella gravità indotta. Ovviamente il modello che consideriamo è quello più semplice che permette di ottenere un fase inflazionaria in gravità indotta senza l'aggiunta di ulteriori campi scalari.

Imponendo le condizioni di omogeneità ed isotropia e variando l'azione (2.1) rispetto al campo e alla metrica (1.1) si ottengono le equazioni del moto

$$\begin{cases} \ddot{\sigma} + 3H\dot{\sigma} + \frac{\dot{\sigma}^2}{\sigma} = -\frac{V_{eff,\sigma}}{1+6\gamma} \\ H^2 = \frac{1}{3\gamma\sigma^2} \left[ \frac{\dot{\sigma}^2}{2} + V(\sigma) \right] - 2H\frac{\dot{\sigma}}{\sigma}. \end{cases} \quad (2.2)$$

dove

$$V_{eff,\sigma} \equiv V_{,\sigma} - 4V/\sigma \quad (2.3)$$

Il sistema (2.2) è la controparte del sistema (1.24). La prima equazione è l'equazione di Klein Gordon. Rispetto al caso (1.24) si osservi l'aggiunta di un termine legato alla velocità del campo al quadrato nella prima equazione, ed un termine che descrive l'autointerazione dipendente da un potenziale effettivo definito da (2.3). La seconda è l'equazione modificata di Friedmann.

Confrontando il sistema (2.2) con il sistema (1.24) si nota che il ruolo dinamico principale che aveva il potenziale nel modello di inflazione classica, nel modello a gravità indotta viene svolto dal potenziale efficace. Se  $V_{eff,\sigma} \ll 1$  il campo evolve lentamente. Risolvendo quest'ultima condizione in funzione del campo  $\sigma$  si ottiene che un potenziale quartico  $V \simeq \sigma^4$  è compatibile con  $\sigma \simeq cost$ .

L'inflazione ha fine nel processo di reheating, ovvero sia il decadimento del campo scalare inflatonico nei campi di particelle noti, e quindi il riscaldamento dell'universo che è l'inizio del big bang caldo.

### 2.2.2 Le soluzioni esatte per la dinamica omogenea

È interessante analizzare le soluzioni esatte della dinamica omogenea per cogliere alcune delle differenze peculiari con la relatività generale. In quest'ultimo contesto le equazioni del moto (1.24) sono

$$\delta_1^2 \frac{\phi^2}{2M_p^2} = \epsilon_1 \Rightarrow \delta_1 + \delta_2 = \frac{\epsilon_2}{2}. \quad (2.4)$$

e l'equazione di Klein Gordon può essere quindi riscritta utilizzando i parametri di slow roll e il potenziale nella forma

$$(\delta_2 + \delta_1 - \epsilon_1) \delta_1 + 3\delta_1 + \frac{V}{H^2 \phi^2} n_{\tilde{V}} = 0. \quad (2.5)$$

con  $n_{\tilde{V}} = \frac{d \ln \tilde{V}}{d \ln \phi}$ . Si osserva piuttosto facilmente che esistono soluzioni con  $\epsilon_1$  costante e diversa da zero e  $\delta_1 = \pm \sqrt{2\epsilon_1} M_P / \phi$  con  $\tilde{V} \propto \exp \sqrt{2\epsilon_1} \phi / M_P$ . Si tratta della ben nota soluzione tipo power law che corrispondentemente permette di ottenere soluzioni esatte anche per la dinamica delle perturbazioni cosmologiche.

Nel contesto della gravità indotta, riscrivendo le equazioni (2.2) previa l'introduzione dei parametri di SR e combinando fra loro le equazioni si ottiene

$$\epsilon_1 = \left[ 3(\delta_1 - 4\gamma + \gamma n_V) + \delta_1 \left( 6\gamma - \frac{\delta_1}{2} \right) n_V + \delta_1 (\delta_1 + \delta_2) \right] \times \frac{1}{\delta_1 - 6\gamma}. \quad (2.6)$$

con  $n_V = \frac{d \ln V}{d \ln \sigma}$ . Una diversa combinazione delle equazioni (2.2) permette di scrivere la seguente relazione fra le gerarchie di parametri di SR (indipendente dalla forma del potenziale):

$$\epsilon_1 = \frac{\delta_1}{1 + \delta_1} \left( \frac{\delta_1}{2\gamma} + 2\delta_1 + \delta_2 - 1 \right). \quad (2.7)$$

La soluzione non triviale di questo sistema di equazioni è rappresentata da  $\epsilon_2 = \delta_2 = 0$  con

$$V = V_0 \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n, \quad (2.8)$$

$$\delta_1 = -\frac{\gamma(n-4)}{1+\gamma(n+2)}, \quad \epsilon_1 = \frac{\gamma(n-2)(n-4)}{2+2\gamma(n+2)}. \quad (2.9)$$

È interessante osservare che, diversamente dalla relatività generale, in questo caso esistono due soluzioni tipo de Sitter, corrispondenti ad un potenziale quartico e ad un potenziale quadratico. Mentre nel caso quartico anche  $\delta_1 = 0$  e il campo è fermo, nel caso quadratico  $\delta_1 = \frac{2\gamma}{1+4\gamma} \neq 0$  e il campo è crescente (e risale il potenziale!). Partendo dalle soluzioni esatte si conclude che si può avere slow roll perturbando il potenziale quartico oppure perturbando quello quadratico ma mantenendo  $\gamma \ll 1$ . Diversamente  $\delta_1$  sarebbe grande e lo spettro generato dalle perturbazioni cosmologiche non sarebbe sufficientemente piatto. Si noti che, similmente al caso esatto in GR, discusso all'inizio della sezione, anche in quest'ultimo caso le equazioni delle perturbazioni potranno essere risolte esattamente.

### 2.2.3 Approssimazione di slow roll omogenea

Come abbiamo visto nel capitolo precedente risulta conveniente studiare la dinamica inflazionaria tramite i parametri di slow roll. Utilizzando le definizioni nelle formule (1.25) - (1.26), ma basate sul campo scalare  $\sigma$ , le equazioni del moto (2.2) possono essere riscritte come segue:

$$\begin{cases} \delta_1(\delta_2 + \delta_1 - \epsilon_1) + 3\delta_1 + \delta_1^2 = -\frac{V_{eff,\sigma}}{(1+6\gamma)\sigma H^2} \\ 1 = \frac{1}{3\gamma} \left[ \frac{\delta_1^2}{2} + \frac{V(\sigma)}{H^2\sigma^2} \right] - 2\delta_1. \end{cases} \quad (2.10)$$

Fatta esclusione per  $\delta_0$  e  $\epsilon_0$ , che non compaiono nelle equazioni, i parametri sono piccoli nel regime di slow roll, e i prodotti tra due o più parametri risultano trascurabili; il sistema (2.10) al primo ordine si riduce quindi a:

$$\begin{cases} H^2 \simeq \frac{V(\sigma)}{3\gamma\sigma^2} \\ 3H\dot{\sigma} \simeq -\frac{V_{eff,\sigma}}{1+6\gamma}, \end{cases} \quad (2.11)$$

e in particolare dalla seconda equazione si ottiene

$$\delta_1 \equiv \sigma^{-1} \frac{d\sigma}{dN} \simeq -\frac{\gamma}{1+6\gamma} (n_V - 4) = -\gamma\sigma \frac{V_{eff,\sigma}}{(1+6\gamma)V}, \quad (2.12)$$

dove ricordiamo, dal capitolo precedente, che  $n_V \equiv d \ln V / d \ln \sigma$  ed è l'esponente del potenziale nel caso monomiale. Si nota facilmente dall'equazione precedente che, in gravità indotta, per ottenere  $\delta_1 \ll 1$ , si può far tendere  $\gamma \ll 1$ , oppure si può assumere un potenziale con un andamento quasi quartico  $V \sim \sigma^4$ .

Derivando la (2.12) rispetto ad  $N$  si ottiene:

$$\delta_2 \simeq -\gamma\sigma^2 \frac{V_{eff,\sigma\sigma}}{(1+6\gamma)V} + \gamma\sigma \frac{V_{eff,\sigma}}{(1+6\gamma)V} \left( \sigma \frac{V_{eff,\sigma}}{V} + 3 \right), \quad (2.13)$$

che, in funzione di  $n_V$ , diventa

$$\delta_2 = -\frac{\gamma}{1+6\gamma} \frac{d \ln n_V}{d \ln \sigma} \delta_1 = \frac{\gamma^2}{(1+6\gamma)^2} \frac{d \ln n_V}{d \ln \sigma} (n_V - 4). \quad (2.14)$$

Sviluppando il lato destro della (2.7) nell'approssimazione di slow roll si ottiene

$$\epsilon_1 \simeq -\delta_1 + \frac{\delta_1^2}{2\gamma}, \quad (2.15)$$

Si noti che il termine  $\frac{\delta_1^2}{2\gamma}$  è stato mantenuto in un'espressione al primo ordine nei parametri di SR, anche se formalmente è del secondo ordine. Questa scelta deriva dal fatto che il termine in questione è dello stesso ordine di grandezza di  $\delta_1$  quando  $\gamma \ll 1$  e quindi in quel limite non è affatto trascurabile. Al contrario quando  $\gamma \geq 1$  il contributo di questo termine è trascurabile al primo ordine. In altri termini anche il parametro costante  $\gamma$  deve essere considerato insieme agli altri parametri di SR per valutare le quantità trascurabili al primo ordine nell'approssimazione di SR.

## 2.3 La dinamica delle perturbazioni

### 2.3.1 Le equazioni delle perturbazioni

Nei modelli di gravità indotta considerati in questa tesi il campo scalare che genera la massa di Planck è anche responsabile dell'inflazione. Le sue disomogeneità si accoppiano a quelle della metrica tramite le equazioni di Einstein e generano le fluttuazioni primordiali responsabili della formazione delle strutture a grandi scale, e delle disomogeneità che si osservano nella CMB. Ovviamente a causa di un diverso accoppiamento fra il campo inflatonico e la gravità (rispetto alla relatività generale) le equazioni per le perturbazioni hanno una forma diversa, e gli spettri primordiali saranno analiticamente diversi dal caso studiato nel primo capitolo.

Sviluppando al secondo ordine l'azione (2.1) nelle perturbazioni del campo scalare, e rimuovendo i gradi di libertà non fisici usando le equazioni del moto, si ottiene, al solito, un'azione per le perturbazioni. Variando tale azione si ottiene un'equazione che descrive la loro dinamica [15] ed in particolare le perturbazioni del campo inflatonico:

$$\delta \ddot{\sigma}_k + \left( 3H + \frac{\dot{Z}}{Z} \right) \delta \dot{\sigma}_k + \left[ \frac{k^2}{a^2} - \frac{d}{dt} \left( \frac{a^3 Z (\dot{\sigma} \delta_1)}{a^3 Z \sigma \delta_1} \right) \right] \delta \sigma_k = 0; \quad (2.16)$$

dove  $Z$  viene definita come:

$$Z = \frac{H^2 \sigma^2 (1+6\gamma)}{(\dot{\sigma} + H\sigma)^2} = \frac{1+6\gamma}{(1+\delta_1)^2}. \quad (2.17)$$

Le perturbazioni scalari della metrica prodotte dalle fluttuazioni quantistiche del campo scalare in fase di espansione accelerata sono collegate alle perturbazioni del campo

attraverso la relazione

$$\mathcal{R}_k = -\frac{H\delta\sigma_k}{\dot{\sigma}}, \quad (2.18)$$

nel gauge di curvatura uniforme, dove  $\mathcal{R}_k$  è la trasformata di Fourier delle perturbazioni scalari di metrica.

L'equazione (2.16) può essere riscritta introducendo

$$S_k \equiv a\sqrt{Z}\delta\sigma_k, \quad (2.19)$$

e passando al tempo conforme, nella seguente maniera:

$$\frac{d^2 S_k}{d\eta^2} + [k^2 + M_S^2(\eta)] S_k = 0 \quad (2.20)$$

$$M_S^2 \equiv -\mathcal{H}^2 [\delta_1^2 + \delta_2^2 + (3 - \epsilon_1)(\delta_1 + \delta_2 + 1) + \delta_2\delta_3 + \frac{\delta_1\delta_2}{1 + \delta_1} \left( \epsilon_1 + \delta_1 - 3\delta_2 - \delta_3 + \frac{2\delta_1\delta_2}{1 + \delta_1} - 2 \right) - 1], \quad (2.21)$$

con  $\mathcal{H} = aH$ . In questo modo l'equazione ha la forma dell'equazione di Mukhanov già studiata nel capitolo precedente.

Le perturbazioni tensoriali sono massless e polarizzate trasversalmente, risultano quindi descritte da due gradi di libertà, come nel caso della gravità generale. Confrontando con (1.79) possiamo scrivere i due gradi di libertà come  $h_{s,k}$ , dove  $s \in \{\times, +\}$ .

Sviluppando al secondo ordine l'azione (2.1) nelle perturbazioni tensoriali e variando l'azione ottenuta si giunge ad un'equazione che ne descrive la dinamica:

$$\ddot{h}_{s,k} + (3H + 2H\delta_1)\dot{h}_{s,k} + \frac{k^2}{a^2}h_{s,k} = 0. \quad (2.22)$$

Definendo  $T_{s,k} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}a\sigma\sqrt{\gamma}h_{s,k}$  si può riscrivere l'equazione (2.22) come segue:

$$\frac{d^2 T_{s,k}}{d\eta^2} + [k^2 + M_T^2(\eta)] T_{s,k} = 0 \quad (2.23)$$

$$M_T^2(\eta) \equiv -\mathcal{H}^2 [2 - \epsilon_1 + \delta_1(3 + \delta_1 + \delta_2 - \epsilon_1)]. \quad (2.24)$$

Le formule (2.20) e (2.23) sono formalmente analoghe all'equazione di Mukhanov (1.63). La differenza risiede nella dipendenza dai parametri di SR che viene influenzata dall'accoppiamento non minimale tra campo scalare e gravità.

Quando i parametri di SR sono costanti (o si possono trattare come tali nel contesto dell'approssimazione di SR) le equazioni delle perturbazioni si possono risolvere esattamente. In particolare quindi si possono trovare soluzioni esatte nel caso di potenziale tipo power law.

### 2.3.2 L'equazione di Pinney

L'evoluzione dei modi di perturbazione all'esterno dell'orizzonte degli eventi porta alla formazione di strutture di grande scala, ovverosia alla formazione delle disomogeneità classiche osservate nella CMB. L'equazione che regola la dinamica dei modi delle oscillazioni quantistiche, l'equazione di Mukhanov (1.59), è un'equazione per la funzione complessa  $f_k$ . Lo spettro di potenza si calcola partendo dal modulo di questa funzione. Possiamo quindi sostituire all'equazione di Mukhanov l'equazione che regola la dinamica del modulo di  $f_k$ . L'unico vantaggio che ne deriva sarà a livello numerico. È possibile ottenerla partendo dalla sostituzione

$$f_k = \rho e^{i\theta} \quad (2.25)$$

all'interno dell'equazione (1.59), ottenendo

$$-\theta'^2 + 2i\theta' \frac{\rho'}{\rho} + \frac{\rho''}{\rho} + i\theta'' + \omega^2 = 0, \quad (2.26)$$

dove  $\omega^2 = k^2 + m_{ef}^2$ .

La parte reale dell'equazione (2.26) è data da

$$-\theta'^2 + \frac{\rho''}{\rho} + \omega^2 = 0. \quad (2.27)$$

Imponendo la condizione wronskiana su  $f_k$  si ottiene

$$\theta' = \frac{1}{2\rho^2}, \quad (2.28)$$

che soddisfa identicamente la parte complessa dell'equazione (2.26). Sostituendo nella (2.27) ed effettuando la sostituzione  $\rho \rightarrow \frac{\rho}{\sqrt{2}}$  si ottiene

$$\rho'' + \omega^2 \rho = \frac{1}{\rho^3}. \quad (2.29)$$

Quest'ultima prende il nome di equazione di Pinney.

Per risolvere il problema di Cauchy è fondamentale impostare le condizioni iniziali. Nel limite di lunghezze d'onda corte i modi delle perturbazioni  $f_k$  tendono al limite

$$f_k \xrightarrow{SW} \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{ik\eta}, \quad (2.30)$$

dove *SW* sta per Short Wavelengths. Quindi

$$\rho \xrightarrow{SW} \frac{1}{\sqrt{k}} = \rho_{SW}. \quad (2.31)$$

La condizione iniziale per l'evoluzione dei modi delle perturbazioni é, al solito, fissata all'interno dell'orizzonte degli eventi, quindi si può impostare la condizione iniziale del problema di Cauchy come  $\rho(0) = \rho_{SW}$ .

L'equazione (2.29), insieme alla condizione iniziale data da (2.31) e la condizione sulle derivate  $\rho' = 0$ , formano il sistema di Cauchy che verrà analizzato numericamente.

### 2.3.3 Gli spettri di potenza nell'approssimazione di slow roll

Risolviendo le equazioni delle perturbazioni descritte nella sezione precedente si possono estrarre le quantità che vengono confrontate con le osservazioni:  $A_s$ ,  $r$  ed  $n_s - 1$ . L'inflazione anche in presenza di gravità indotta si può ottenere con lo SR ed in questo caso gli spettri inflazionari sono approssimativamente piatti. Le espressioni che si ottengono sono le seguenti al primo ordine nello SR sono:

$$n_s - 1 = -2(\delta_1 + \delta_2 + \epsilon_1), \quad (2.32)$$

che può essere riscritta in funzione del potenziale sostituendo i parametri di slow roll con (2.12), (2.13) e (2.15), ottenendo

$$n_s - 1 = \frac{2\gamma\sigma_*^2}{1 + 6\gamma} \left[ \frac{V_{eff,\sigma\sigma*}}{V_*} - \frac{3V_{eff,\sigma*}}{\sigma_* V_*} - \frac{3V_{eff,\sigma*}^2}{2V_*^2} \right] \quad (2.33)$$

dove l'asterisco indica che le quantità devono essere calcolate  $N_* \simeq 60$  e-folds prima della fine dell'inflazione. Partendo invece dalla (1.79), e sviluppando attorno a  $k_*$ , si giunge ad una espressione per  $n_t$  nei parametri di slow roll

$$n_t = -2(\delta_1 + \epsilon_1), \quad (2.34)$$

e sostituendo i parametri di slow roll (2.12), (2.13) e (2.15) si ottiene

$$n_t = -\frac{\gamma\sigma_*^2}{(1 + 6\gamma)^2} \left( \frac{V_{eff,\sigma*}}{V_*} \right)^2 \quad (2.35)$$

È possibile esprimere anche il termine  $A_s$  nei parametri di slow roll

$$A_s \simeq \frac{H_*^2}{4\pi^2 (1 + 6\gamma) \delta_{1*}^2 \sigma_*^2}, \quad (2.36)$$

Lo spettro di potenza delle perturbazioni tensoriali alla scala pivotale può essere espresso come:

$$A_t \simeq \frac{2H_*^2}{\pi^2 \gamma \sigma_*^2}. \quad (2.37)$$

È possibile infine ottenere l'osservabile  $r$ , il rapporto tensore su scalare, e la relazione che lo legghi all'osservabile  $n_t$

$$r = \frac{A_t}{A_s} = -8n_t, \quad (2.38)$$

e introducendo la (2.34) si può riscrivere la formula in funzione dei parametri di slow roll come

$$r = 16(\delta_1 + \epsilon_1), \quad (2.39)$$

mentre utilizzano la (2.35) la si può scrivere in funzione del potenziale

$$r = \frac{8\gamma\sigma_*^2 (V_{eff,\sigma*})^2}{(1 + 6\gamma)^2 V_*^2}. \quad (2.40)$$

Dalla (2.39) segue che anche nella teoria della gravità indotta  $r$  ed  $n_t$  sono legati da una relazione di consistenza e rappresentano un osservabile unico.

Le formule per gli indici spettrali in funzione dei parametri di slow roll sono state ottenute risolvendo le equazioni delle perturbazioni in modo approssimato e sono valide al primo ordine nei parametri di slow roll. Previsioni al secondo ordine non si possono estrarre da questi metodi di approssimazione. Tuttavia utilizzando le equazioni del moto (2.7) si osserva che  $\epsilon_1 + \delta_1 = \frac{\delta_1^2}{2\gamma} + \mathcal{O}(\delta_1^2)$ . L'espressione per  $n_s - 1$ , anche utilizzando le equazioni del moto, contiene contributi proporzionali ai parametri di SR al primo ordine. Invece l'espressione per  $n_t$  risulta:

$$n_t = -2 \left( \frac{\delta_1^2}{2\gamma} + \mathcal{O}(\delta_1^2) \right) \quad (2.41)$$

e per  $\gamma \ll 1$  è confrontabile con i parametri di SR al primo ordine. Diversamente per  $\gamma \geq 1$  l'espressione è del secondo ordine, quindi completamente fuori controllo. Il regime  $\gamma \geq 1$  è fisicamente molto importante poichè, ad esempio, l'inflazione con il campo di Higgs può essere realizzata solo in regime di gravità indotta con  $\gamma \gg 1$ . Dunque in questo caso la teoria non è in grado di produrre risultati analitici sotto controllo da confrontare con le future osservazioni.

Esistono, come accennato in precedenza, soluzioni esatte per le equazioni delle perturbazioni. In particolare per potenziali monomiali  $V \propto \sigma^n$  si ottiene

$$n_s - 1 = n_t = \frac{2\gamma(n-4)^2}{\gamma(n-4)^2 - 2(6\gamma+1)}, \quad (2.42)$$

$$r = -\frac{8n_t}{1 - \frac{n_t}{2}}, \quad (2.43)$$

che è in accordo con la condizione di consistenza precedentemente ottenuta nel caso di SR.

### 2.3.4 Potenziali

Gli indici spettrali analizzati nel paragrafo precedente, come gli stessi parametri di slow roll, posso essere scritti in funzione del potenziale che si decide di applicare al modello. Tutta l'analisi degli spettri primordiali descritta fino ad ora e il modo con cui vengono prodotti dalla fase inflazionaria, per essere confrontata con le osservazioni, necessita che venga specificato un potenziale per il campo scalare. Anche la dinamica di SR si basa sulla scelta corretta del potenziale. In questa tesi verranno esaminati 3 potenziali di particolare interesse teorico/fenomenologico: il potenziale di Landau Ginzburg (LG), il potenziale di Coleman Weinberg (CW) ed il potenziale di Starobinsky (ST).

Il potenziale per il campo scalare è necessario anzitutto per stabilizzare il campo e risolvere i problemi di cui originariamente soffriva il modello di Brans e Dicke. Quindi il potenziale deve avere un minimo per un valore del campo diverso da zero ( $\sigma_0 \neq 0$ ). Questa richiesta fissa il valore della costante di Newton effettiva al termine dell'inflazione al valore osservato oggi. Inoltre il minimo genera una massa per il grado di libertà scalare che diversamente, con una massa troppo piccola o al limite nulla, darebbe modifiche

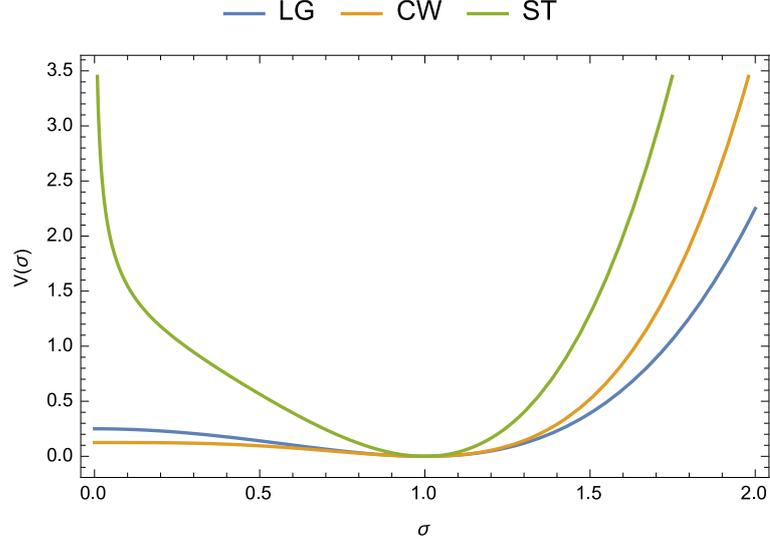


Figura 2.1: Nel grafico sono rappresentati i tre potenziali nell'intervallo tra lo zero e 2. Il potenziale ST presenta l'andamento crescere più veloce e il massimo relativo più grande, LG e CW sono simili: LG cresce più lentamente lontano dal minimo, ma ha un massimo relativo più alto. Nel grafico sono stati impostati i valori di:  $\mu = \sigma_0 = \gamma = M = 1$ .

osservabili (a grandi distanze) alla legge di Newton. Secondariamente richiediamo che il potenziale nel minimo sia trascurabile ( $V(\sigma_0) \simeq 0$ ). Se così non fosse al termine dell'inflazione vi sarebbe un'energia di vuoto residua non trascurabile che produrrebbe una seconda fase accelerata. In sostanza l'inflazione non avrebbe termine.

A questi vincoli si aggiunge la condizione di slow roll in gravità indotta, che prevede un andamento quartico per il potenziale lontano dal suo minimo (regime di large field (LF)) [23]. Come osservato in precedenza un'altra possibilità è avere un accoppiamento non minimale molto piccolo. La terza alternativa per ottenere una fase di quasi de Sitter è rappresentata dall'adozione di un potenziale con un andamento quadratico ma in questo caso alcuni parametri di slow roll sarebbero troppo grandi e vi sarebbero problemi a generare un meccanismo che chiuda la fase inflazionaria.

Veniamo quindi alla discussione dei potenziali scelti.

Il potenziale di LG è il seguente

$$V_{LG} = \frac{\mu}{4} (\sigma^2 - \sigma_0^2)^2, \quad (2.44)$$

dove  $\mu$  è il parametro adimensionale. Il potenziale di LG è generalmente introdotto per descrivere le transizioni di fase, infatti modella le correzioni a temperature finita ad un potenziale quartico. È il potenziale utilizzato nel lavoro originale di Zee sulla gravità indotta. Ma soprattutto è il potenziale del campo di Higgs. Si noti che l'inflazione può aver luogo sia da destra (regime di campo grande - LF) che da sinistra (regime di campo piccolo - SF) del minimo. Nel secondo caso però è necessario assumere  $\gamma \ll 1$

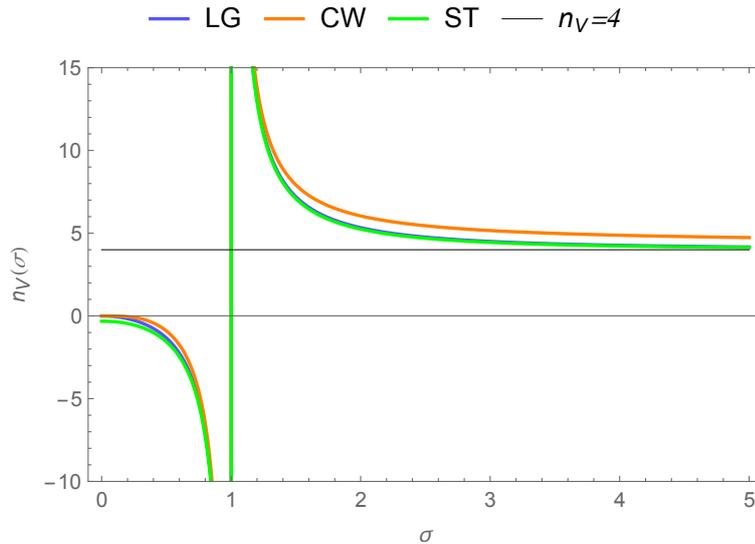


Figura 2.2: Nel grafico è rappresentata la funzione  $n_V$  per i tre potenziali in esame. Si nota come lontano dal minimo LG e ST abbiano un andamento pressochè identico, mentre CW presenta un andamento leggermente più rapido. Anche in questo grafico le costanti sono state impostate tutte unitarie.

per ottenere lo slow roll.

Il potenziale di CW invece descrive le correzioni quantistiche al potenziale quartico. La sua espressione è data da

$$V_{CW} = \frac{\mu}{8}\sigma^4 \left( \log\left(\frac{\sigma^4}{\sigma_0^4}\right) - 1 \right) + \frac{\mu}{8}\sigma_0^4, \quad (2.45)$$

dove il termine costante aggiuntivo viene inserito per garantire che  $V_{CW}(\sigma_0) = 0$ . Anche in questo caso l'inflazione può aver luogo in regime LF a SF (con gamma piccoli nel secondo caso).

Il potenziale ST è un potenziale che fenomenologicamente traduce la dinamica del sistema

$$S = \frac{1}{2} \int^4 x \sqrt{-g} \left( M_p^2 R + \frac{R^2}{6M^2} \right) \quad (2.46)$$

in un un modello di gravità indotta con un campo scalare  $\sigma$ . Il modello equivalente con gravità indotta è descritto da un potenziale

$$V_{ST} = \frac{3}{4} M^2 \gamma^2 \sigma^4 \left( 1 - \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{-\sqrt{\frac{2(1+6\gamma)}{3\gamma}}} \right)^2, \quad (2.47)$$

dove  $M$  è la costante caratteristica del modello, che, nel limite  $\gamma \gg 1$  approssima bene il potenziale LG. Differentemente dai casi LG e CW il potenziale di Starobinsky è

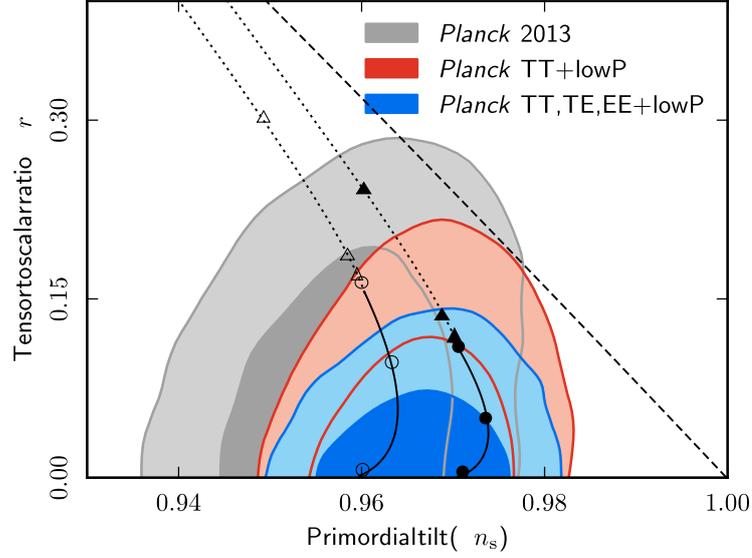


Figura 2.3: I valori degli osservabili  $n_s$  e  $r$ , per il potenziale LG.

divergente nel limite  $\sigma \rightarrow 0$ .

I potenziali appena introdotti sono plottati nella figura (2.1), ottenuta imponendo che le costanti  $\gamma$ ,  $\mu$ ,  $\sigma_0$ , e  $M$  siano tutte unitarie.

È possibile confrontare anche l'andamento monomiale di questi potenziali introducendo la funzione

$$n_V = \sigma \frac{V_{,\sigma}}{V}, \quad (2.48)$$

Nel grafico (2.2) è possibile confrontare l'andamento dei tre potenziali che stiamo analizzando.

### 2.3.5 Confronto con i dati sperimentali

I potenziali introdotti sono compatibili con i dati sperimentali acquisiti negli ultimi anni, in particolare con quelli della collaborazione Planck del 2013. L'andamento di  $n_s$  e di  $r$  per il potenziale LG sono riassunti nel grafico (2.3) al variare di  $\gamma$ .

Per ogni colore, e quindi per ogni dataset da cui sono estratti gli intervalli di confidenza per i parametri selezionati, la zona scura rappresenta il 68% di confidenza, la zona chiara rappresenta il 95% di confidenza. Sono rappresentate due fasi inflazionarie di durata differente. In particolare la linea che presenta i marker pieni corrisponde a  $N_* = 70$ , mentre quella con i marker vuoti  $N_* = 50$ . La linea tratteggiata rappresenta la perfetta aderenza alla regola (equivalente alla definizione (2.38))

$$rn_s = 3r + 16n_s - 16, \quad (2.49)$$

la linea puntinata rappresenta il regime di SF, la linea continua il regime di LF. I

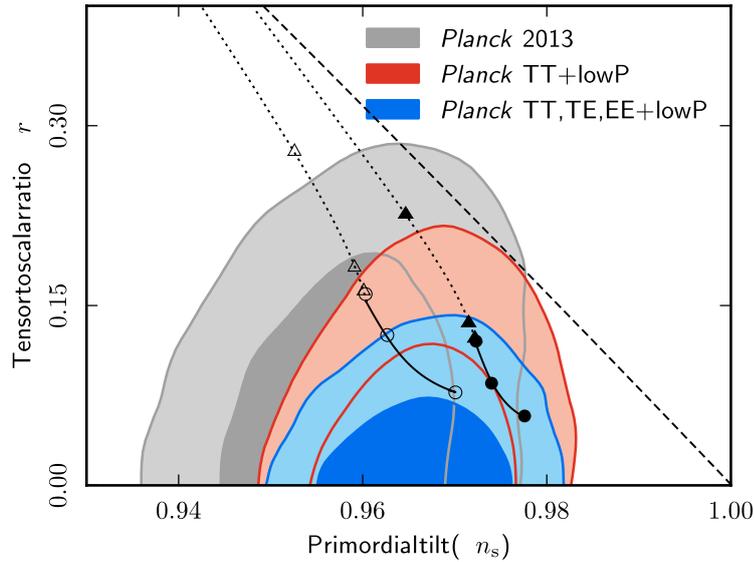


Figura 2.4: I valori degli osservabili  $n_s$  e  $r$ , per il potenziale CW.

marker rappresentano scelte diverse di  $L_\gamma \equiv \ln \gamma$ :  $L_\gamma = -5, -4, -3$  in regime di SF, e  $L_\gamma = -7, -3, 1$  in LF. Il potenziale LG non pone limiti in regime di LF, ma in regime di SF impone che  $L_\gamma < -3$  per essere compatibile con le osservazioni.

Il grafico mostra come una maggiore confidenza con i dati sperimentali corrisponda ad un  $\gamma$  più alto in regime di LF. Ciò significa che in regime di potenziale quartico (LF) è possibile avere inflazione sia per  $\gamma \ll 1$  che per  $\gamma \geq 1$ .

Si può aggiungere che se consideriamo solo la combinazione dei datasets TT, TE, EE e lowP (area blu), solo la linea corrispondente a  $N_* = 70$  è compatibile con le osservazioni nel regime di SF e più in generale si può dire che in regime di SF sono favoriti i modelli con un numero maggiore di e-folds di inflazione.

Il caso CW è illustrato nella figura (2.4).

Anche in questo caso è presente una buona corrispondenza per  $\gamma \geq 1$ , ma non altrettanto buona per  $\gamma \ll 1$ . Inoltre per  $\gamma$  grandi l'inflazione è presente solo nella regione di LF. Anche in questo caso, considerando i datasets combinati TT, TE, EE e lowP, la linea  $N_* = 70$  risulta compatibile anche nel regime di SF. È importante sottolineare come considerando la combinazione dei dati TT, TE, EE e lowP non esiste un  $\gamma$  che dia una corrispondenza superiore al 68% con i dati sperimentali.

Questi dati confermano che in regime LF vi è una compatibilità rispetto ai dati osservati per ogni valore di  $\gamma$  o di  $N_*$ , e proprio per questo l'analisi successiva avrà luogo in tale regione.

## 2.4 Frame di Jordan e frame di Einstein

Per completare il quadro descritto finora bisogna aggiungere un ultimo tassello fondamentale: è possibile, mediante un cambio di variabile opportuno ed una ridefinizione dei gradi di libertà (mapping) trasformare l'azione che descrive la dinamica di un campo con accoppiamento non minimale (2) nell'azione che descrive un modello di campo scalare con accoppiamento minimale (1). Questa analogia formale permette quindi di riscrivere un modello di inflazione in gravità indotta come un modello di inflazione in relatività generale. È necessario sottolineare che questa analogia formale non corrisponde ad un'equivalenza dal punto di vista della fisica dei modelli. Una simile operazione di mapping prende il nome di "transizione tra il frame di Jordan e il frame di Einstein", dove il frame di Jordan è quello, nel nostro caso, della gravità indotta, mentre il frame di Einstein è quello dello spazio tempo minimamente accoppiato con il campo scalare.

Poichè i due frames non sono fisicamente equivalenti è necessario specificare quale dei due frames sia quello fisico.

Nonostante ciò si può dimostrare che gli spettri inflazionari nei due frames sono gli stessi, quindi può essere conveniente estrarre le espressioni analitiche per questi spettri in un frame piuttosto che nell'altro. In linea di principio, se fossimo in grado di risolvere esattamente la dinamica delle perturbazioni nei due frames, la scelta sarebbe completamente equivalente. Tuttavia per estrarre previsioni analitiche da un modello di inflazione reale, come abbiamo più volte sottolineato, è necessario adottare delle approssimazioni (comunemente quella di SR al primo ordine). Le espressioni approssimate ottenibili nei due frames sono diverse e quindi si pone la questione di quale frame produca previsioni teoriche che meglio approssimano la soluzione esatta. Il problema risulta centrale nel calcolo del rapporto tensore su scalare  $r$  come avremo modo di evidenziare in seguito.

### 2.4.1 Mapping dei frames

All'interno delle formule che seguono le quantità del frame di Einstein saranno indicate con la tilde (per esempio  $\tilde{a}$ ), mentre nel frame di Jordan saranno usate le quantità senza tilde (per esempio  $a$ ), l'unica eccezione sarà il campo scalare, che nel frame di Jordan verrà identificato con  $\sigma$ , mentre nel frame di Einstein con  $\phi$ .

Si consideri l'azione di un campo scalare non minimamente accoppiato alla gravità

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ U(\sigma)R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\sigma_{,\mu}\sigma_{,\nu} + V(\sigma) \right]. \quad (2.50)$$

Se si opera la seguente trasformazione conforme

$$g_{\mu\nu} = \frac{U_0}{U} \tilde{g}_{\mu\nu} \quad (2.51)$$

dove  $U_0$  è una costante e si introduce un nuovo campo scalare  $\phi$  tale che

$$\frac{d\phi}{d\sigma} = \frac{\sqrt{U_0(U + 3U'^2)}}{U} \Rightarrow \phi = \int \frac{\sqrt{U_0(U + 3U'^2)}}{U} d\sigma. \quad (2.52)$$

allora l'azione (2.50) si può riscrivere come l'azione per un campo scalare minimamente accoppiato:

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[ U_0 \tilde{R} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + W(\phi) \right] \quad (2.53)$$

dove

$$W(\phi) = \frac{U_0^2 V(\sigma(\phi))}{U^2(\sigma(\phi))} \quad (2.54)$$

è il potenziale del campo del frame di Einstein e  $U_0$  è legata alla costante di Newton nel frame di Einstein. In particolare sarà  $U_0 = M_P^2/2$ . Così, se si sceglie come frame di Jordan il frame della gravità indotta

$$U(\sigma) = \frac{\gamma}{2} \sigma^2 \quad (2.55)$$

si ottiene dall'equazione (2.52)

$$\phi = \sqrt{\frac{2U_0(1+6\gamma)}{\gamma}} \ln \left[ \frac{\sigma}{\sigma_0} \right] \quad (2.56)$$

e, all'inverso,

$$\sigma = \sigma_0 e^{\sqrt{\frac{\gamma}{2U_0(1+6\gamma)}} \phi}. \quad (2.57)$$

Si noti che la relazione differenziale (2.52) non è sempre banalmente integrabile come nel caso appena descritto della gravità indotta. Inoltre spesso la relazione (2.52) è integrabile ma non si riesce ad invertire la relazione  $\phi = \phi(\sigma)$ .

La transizione tra il frame di Jordan e il frame di Einstein rappresenta, a tutti gli effetti, niente più che un cambio di variabile che mischia i gradi di libertà della metrica ed il campo scalare.

Siccome il fattore di scala si trasforma come

$$\tilde{a} = \sqrt{\frac{U}{U_0}} a, \quad (2.58)$$

attraverso la (2.58) si può trovare la relazione tra le derivate logaritmiche nei due frame

$$\frac{d}{d \ln(\tilde{a})} = \left( 1 + \frac{1}{2} \delta_1 n_U \right)^{-1} \frac{d}{d \ln(a)}; \quad (2.59)$$

dove  $n_U \equiv \frac{d \log U}{d \log \sigma}$ .

Sfruttando la trasformazione (2.59) si può ottenere la corrispondente trasformazione dei parametri di slow roll fra i due frames. La trasformazione di  $H$  è

$$\tilde{H} = \frac{\dot{\tilde{a}}}{\tilde{N} \tilde{a}} = \sqrt{\frac{U_0}{U}} H \left( 1 + \frac{1}{2} \delta_1 n_U \right), \quad (2.60)$$

da cui si ottiene

$$\tilde{\epsilon}_1 = -\frac{d \log(\tilde{H})}{d \log(\tilde{a})} = \frac{\epsilon_1 + \frac{\delta_1 n_U}{2}}{\left(1 + \frac{1}{2} \delta_1 n_U\right)} - \frac{n'_U \delta_1^2 + n_U \delta_1 \delta_2}{2 \left(1 + \frac{1}{2} \delta_1 n_U\right)^2}, \quad (2.61)$$

dove  $n'_U \equiv \frac{d^2 \log U}{d \log \sigma^2}$ .

Utilizzando le equazioni del moto nel frame di Jordan:

$$\epsilon_1 = \frac{\delta_1}{4 \left(1 + \frac{1}{2} \delta_1 n_U\right)} \left[ \delta_1 \left( \frac{\sigma^2}{U} + 2n_U^2 + 2n'_U \right) + 2(\delta_2 - 1)n_U \right]. \quad (2.62)$$

la (2.61) può essere semplificata nella forma:

$$\tilde{\epsilon}_1 = \frac{\delta_1^2 \left( 3n_U^2 + \frac{\sigma^2}{U} \right)}{4 \left( 1 + \frac{1}{2} \delta_1 n_U \right)^2}. \quad (2.63)$$

Similmente  $\epsilon_2$  può essere espresso come

$$\tilde{\epsilon}_2 = \tilde{\epsilon}_1^{-1} \frac{d\tilde{\epsilon}_1}{d \log \tilde{a}} = \frac{4 \left[ \frac{\delta_2}{2} + \frac{\delta_1}{4} \frac{(6n_U n'_U + 2\sigma^2/U - n_U \sigma^2/U)}{(3n_U^2 + \sigma^2/U)} - \frac{\delta_1(\delta_1 n'_U + \delta_2 n_U)}{4(1 + \delta_1 n_U/2)} \right]}{\left(1 + \frac{1}{2} \delta_1 n_U\right)}. \quad (2.64)$$

Si noti che le relazioni (2.61,2.64) sono esatte. Mediante le espressioni (2.61,2.64) si possono esprimere gli indici spettrali delle perturbazioni primordiali utilizzando i parametri di SR del frame di Jordan o del frame di Einstein.

Utilizzando il mapping fra le quantità omogenee descritto nella prima parte di questa sezione è possibile calcolare le espressioni dei potenziali introdotti nel paragrafo (2.3.4) (espressi nel frame di Jordan), nel frame di Einstein. Per il potenziale LG si ottiene:

$$W_{LG} = \frac{\mu M_p^4}{4\gamma^2} \left( 1 - e^{-2\frac{\phi}{M_p} \sqrt{\frac{\gamma}{1+6\gamma}}} \right)^2; \quad (2.65)$$

il potenziale CW nel frame di Einstein diventa:

$$W_{CW} = \frac{\mu M_p^4}{8\gamma^2} \left( e^{-4\frac{\phi}{M_p} \sqrt{\frac{\gamma}{1+6\gamma}}} - 1 \right) + \frac{\mu M_p^3}{2\gamma^2} \phi \sqrt{\frac{\gamma}{1+6\gamma}}; \quad (2.66)$$

mentre per il potenziale ST si può scrivere:

$$W_{ST} = \frac{3}{4} M^2 M_p^4 \left( 1 - \exp \left( -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_p} \right) \right)^2. \quad (2.67)$$

### 2.4.2 Gli spettri di potenza delle perturbazioni

Mediante le formule (esatte) che mappano i parametri di SR nei due frames è possibile, ad esempio, esprimere gli indici spettrali ottenuti nel frame di Einstein mediante l'approssimazione di SR nello stesso frame in funzione dei parametri di SR del frame di Jordan. Essendo poi noti gli indici spettrali calcolati con l'approssimazione di SR nel frame di Jordan (ovviamente in funzione dei parametri di SR del frame di Jordan) è possibile fare un confronto delle previsioni analitiche dei due frames. Ad esempio per l'indice spettrale delle perturbazioni scalari ottenuto nel frame di Einstein si ha

$$n_s - 1 = -2\tilde{\epsilon}_1 - \tilde{\epsilon}_2 \simeq -2 \left[ \epsilon_1 + \delta_2 + \frac{n_{U^*}\delta_1}{2} + \frac{6n_{U^*}n'_{U^*} + \frac{\sigma_*^2}{U^*}(2 - n_{U^*})}{6n_{U^*}^2 + 2\frac{\sigma_*^2}{U^*}}\delta_1 \right] \quad (2.68)$$

al primo ordine nei parametri di SR di entrambi i frames; per l'indice spettrale  $n_t$  invece si ottiene

$$n_t = -2\tilde{\epsilon}_1 \simeq -\frac{\delta_1^2 \left( 3n_{U^*}^2 + \frac{\sigma_*^2}{U^*} \right)}{2} \quad (2.69)$$

all'ordine più basso non triviale.

Per il caso di gravità indotta  $n_U = 2$  ed

$$n_s - 1 = -2\tilde{\epsilon}_1 - \tilde{\epsilon}_2 \simeq -2(\epsilon_1 + \delta_2 + \delta_1); \quad n_t = -2\tilde{\epsilon}_1 = -\frac{\delta_1^2(1 + 6\gamma)}{\gamma}. \quad (2.70)$$

Si noti a questo punto che  $n_s - 1$  coincide con l'espressione ottenuta nel frame di Jordan, invece  $n_t$  è un'espressione del primo ordine nel frame di Einstein e viene mappata in una quantità che, nel frame di Jordan è del secondo ordine (se  $\gamma \geq 1$ ). Ma facendo i conti nel frame di Jordan non si possono ottenere risultati esatti al secondo ordine nei parametri di SR. Infatti al primo ordine si era ottenuto  $n_t = -2(\delta_1 + \epsilon_1)$  che, utilizzando l'equazione del moto (2.7), diventa

$$n_t^{(JF)} = -\frac{\delta_1^2}{\gamma} \left( \gamma \frac{\delta_1}{\delta_2} + 1 + 6\gamma \right), \quad (2.71)$$

mentre nel frame di Einstein si aveva

$$n_t^{(EF)} = -\frac{\delta_1^2}{\gamma} (1 + 6\gamma). \quad (2.72)$$

Se  $\gamma \ll 1$  le ultime due formule coincidono. Quando invece consideriamo  $\gamma \geq 1$  il termine  $\gamma \frac{\delta_1}{\delta_2}$  risulta confrontabile con gli altri termini, rendendo le due formule diverse.

Correzioni al valore degli indici spettrali del secondo ordine nei parametri di SR sono normalmente trascurati. Nel confronto di  $n_s - 1$  con le osservazioni queste correzioni sono ininfluenti soprattutto considerato che il contributo al primo ordine è diverso da zero. Per quello che riguarda  $n_t$  invece il discorso è diverso: anzitutto nel frame di Jordan il primo contributo ad  $n_t$  (e conseguentemente ad  $r$ ) diverso da zero è del secondo ordine.

Inoltre l'osservabile  $r$  ha una rilevanza peculiare perchè associato al calcolo della scala dell'inflazione e all'ampiezza delle onde gravitazionali primordiali che saranno tra gli osservabili cosmologici più importanti dei prossimi esperimenti progettati per misurare la "struttura più fine" della CMB. Appare perciò importante il modo con cui le previsioni teoriche di  $r$  vengono calcolate e questo è l'obiettivo principale di questa tesi.

### 2.4.3 Elaborazione di una nuova formula per $n_t$

Nel paragrafo precedente si è discussa l'ambiguità che l'indice spettrale  $n_t$  presenta nei due frame (2.72, 2.71). Si è anche notato che il parametro di slow roll  $\tilde{\epsilon}_1$  del primo ordine nel frame di Einstein per  $\gamma \geq 1$  è dell'ordine di grandezza di una combinazione del secondo ordine dei parametri di SR del frame di Jordan ( $\tilde{\epsilon}_1 \sim \mathcal{O}(\epsilon_1^2)$ ). Siccome l'equazione che governa la dinamica delle perturbazioni tensoriali nel frame di Einstein dipende solo  $\tilde{\epsilon}_1$  allora l'approssimazione di SR al primo ordine in quel frame ci si attende che sia accurata fino al primo ordine in quel frame e quindi al secondo ordine nel frame di Jordan. Ci aspettiamo quindi che l'approssimazione di SR nel frame di Einstein sia accurata a meno di contributi del terzo ordine nei parametri di SR del frame di Jordan. Differentemente l'approssimazione al primo ordine del frame di Jordan è necessariamente accurata a meno di contributi del secondo ordine nei parametri di SR dello stesso frame. Quindi ci aspettiamo che i risultati analitici del frame di Einstein siano migliori rispetto a quelli che si ottengono applicando l'approssimazione di SR al primo ordine nel frame di Jordan.

In questa sezione si vuole ottenere un'espressione analitica nel frame di Jordan che sia più accurata di quella ottenuta applicando semplicemente l'approssimazione di SR al primo ordine. Per migliorare l'approssimazione iniziamo con l'esprimere la  $m_{eff} \equiv M_T^2$  delle perturbazioni (2.24) mediante una quantità al secondo ordine. Dalle definizioni delle gerarchie dei parametri di slow roll (1.25) sappiamo che i parametri del secondo ordine sono connessi alle derivate dei parametri del primo ordine. Quindi in un'espressione che contiene solo contributi al secondo ordine (o superiori del secondo) si possono tranquillamente trattare i parametri come costanti. In questo approccio però, qualora comparissero contributi al primo ordine, non sarebbe più coerente trattarli come costanti ma bisognerebbe considerare la loro dipendenza temporale. Riassumendo: per avere una approssimazione di  $n_t$  nel frame di Jordan al secondo ordine bisogna quindi cercare un'equazione per le perturbazioni che non contenga contributi al primo ordine.

Definiamo anzitutto la nuova coordinata che parametrizzerà l'evoluzione temporale  $\xi \equiv \frac{k}{aH}$ . La derivazione nel tempo conforme si trasforma nella derivazione rispetto a  $\xi$  seguendo la regola:

$$\frac{d}{d\eta} = k(\epsilon_1 - 1) \frac{d}{d\xi}. \quad (2.73)$$

A questo punto decomponiamo la variabile di Mukhanov per le perturbazioni tensoriali in un modulo,  $R$ , e la fase  $\psi$  (come si fa normalmente per derivare l'equazione di Pinney)

$$v_k = R e^{i\psi}. \quad (2.74)$$

La condizione iniziale per  $R$  (vuoto di Bunch Davis) è  $R = \frac{1}{\sqrt{2k}}$ . L'equazione per  $R$  è:

$$(1 - \epsilon_1)^2 \xi^2 \left( \frac{R''}{R} + 2i \frac{R'}{R} \psi' - \psi'^2 + i\psi'' \right) + \epsilon_1 \epsilon_2 \xi \left( \frac{R'}{R} + i\psi' \right) + \left[ \xi^2 - \frac{z''}{(aH)^2 z} \right] = 0, \quad (2.75)$$

dove ora l'apice indica la derivata rispetto a  $\xi$ . Risolvendo la parte immaginaria di tale equazione si ottiene

$$\psi' = \frac{1}{2k(1 - \epsilon_1)R^2} \quad (2.76)$$

e sostituendo il risultato nella parte reale, si ottiene un'equazione a termini reali in  $R$ :

$$(1 - \epsilon_1)^2 \xi^2 \left( \frac{R''}{R} - \left( \frac{1}{2k(1 - \epsilon_1)R^2} \right)^2 \right) + \epsilon_1 \epsilon_2 \frac{R'}{R} \xi + \left[ \xi^2 + \frac{M_T^2}{(aH)^2} \right] = 0. \quad (2.77)$$

In questa equazione possiamo ridefinire la funzione incognita

$$R = \xi^\lambda \rho, \quad (2.78)$$

e fissare il parametro  $\lambda$  al seguente modo

$$\lambda = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{(1 - \epsilon_1)^2} \right). \quad (2.79)$$

Si noti che  $\lambda$  è formalmente introdotta come una costante ma fissata da (2.79) risulta essere una funzione dei parametri di SR. Quindi stiamo implicitamente assumendo che l'espressione a lato destro di (2.79) sia costante. Essendo uguale ad una costante più un contributo del secondo ordine nei parametri di SR essa è certamente costante fino al secondo ordine dell'approssimazione. Per finire scriviamo l'equazione così ottenuta per  $\rho$ :

$$\xi^2 \rho'' + \xi \rho' + \left( \frac{\xi^2}{(1 - \epsilon_1)^2} - \frac{2 - \epsilon_1 + 3\delta_1 + \delta_1 \delta_2 - \epsilon_1 \delta_1 + \delta_1^2}{(1 - \epsilon_1)^2} - \lambda^2 \right) \rho = \frac{\xi^{2-4\lambda}}{4(1 - \epsilon_1)^2 \rho^3 k^2}. \quad (2.80)$$

In questa espressione sono presenti ancora contributi al primo ordine ma, utilizzando l'equazione del moto per la parte omogenea (2.7) si può sviluppare in serie di Taylor il secondo termine nella parentesi tonda e riscriverlo come una costante più soli contributi del secondo ordine. Rimane la dipendenza da  $\epsilon_1$  al primo ordine nel primo termine nella parentesi tonda e a lato destro. Tuttavia se adottiamo la tecnica del matching per cercare le soluzioni approssimate di questa equazione allora nel limite a grandi lunghezze d'onda possiamo trascurare i contributi  $\frac{\xi^2}{(1 - \epsilon_1)^2}$  e il lato destro ed otteniamo una soluzione che non contiene contributi al primo ordine. Similmente nel limite di piccole lunghezze d'onda rimangono solo i due contributi che abbiamo appena trascurato nel limite opposto per cui  $(1 - \epsilon_1)^2$  si cancella. Dunque le soluzioni che vengono raccordate all'orizzonte non contengono contributi del primo ordine. In questo senso diciamo che la soluzione trovata è del "secondo ordine" nei parametri di slow roll. In realtà sappiamo che la procedura

del matching può indurre errori fino al primo ordine nei parametri di SR quindi i risultati trovati devono essere verificati numericamente e confrontati con le approssimazioni già discusse. Nel limite di piccole lunghezze d'onda quindi

$$\rho \simeq \frac{\xi^{-\lambda}}{\sqrt{2k}}; \quad (2.81)$$

mentre nel limite di grandi lunghezza d'onda

$$\rho \simeq B\xi^\alpha. \quad (2.82)$$

con

$$\alpha^2 \simeq \frac{9}{4} + \frac{3(1+6\gamma)}{2\gamma}\delta_1^2 - \frac{9}{2}\delta_1\delta_2. \quad (2.83)$$

Approssimando in serie di Taylor la radice quadrata di (2.83) si ottiene

$$\alpha \sim \pm \left( \frac{3}{2} + \frac{\varepsilon}{3} \right), \quad (2.84)$$

dove

$$\varepsilon = -\frac{9}{2}\delta_1\delta_2 + \frac{3}{2\gamma}(1+6\gamma)\delta_1^2. \quad (2.85)$$

Ricordando che lo spettro di potenza può essere scritto nella forma

$$\mathcal{P}_t = k^3 R^2, \quad (2.86)$$

e l'indice spettrale  $n_t$  è l'esponente di  $k$  nel limite a grandi lunghezze d'onda si ottiene

$$n_t^{(JF,2)} = 4\delta_1\delta_2 - \frac{1+6\gamma}{\gamma}\delta_1^2 = 4\delta_1\delta_2 + n_t^{(EF)} \quad (2.87)$$

dove l'apice  $(JF, 2)$  indica che si tratta di un'espressione ottenuta nel frame di Jordan mediante un'approssimazione del secondo ordine nei parametri di slow roll.

## Capitolo 3

# Analisi Numerica

In questo capitolo sono principalmente discussi i contributi originali di questa tesi. Come si è mostrato nel capitolo precedente con le formule (2.71) e (2.72) l'indice spettrale  $n_t$ , al contrario di  $n_s$ , ha una espressione diversa nei due frames all'ordine più basso dell'approssimazione di SR (quando  $\gamma \geq 1$ ). Questa differenza è analiticamente verificabile quando si esprime  $n_t$  calcolato rispettivamente nei due frames utilizzando la gerarchia di parametri di SR nel frame di Jordan (avremmo potuto fare lo stesso confronto utilizzando la gerarchia del frame di Einstein). Si pone quindi il problema, per quanto detto nei capitoli precedenti, di quale schema di approssimazione sia più accurato. Sapendo che

$$\tilde{\epsilon}_1 \sim \mathcal{O}(\epsilon_1^2), \quad (3.1)$$

ci si aspetta che l'approssimazione al primo ordine nel frame di Einstein sia accurata a meno di contributi del terzo ordine nel frame di Jordan. Ciò implicherebbe che i risultati nel frame di Einstein siano migliori dei risultati del frame di Jordan. Per questo, nella sezione (2.4.3), si è cercato di migliorare l'approssimazione che permette di esprimere  $n_t$  nel frame di Jordan. Purtroppo però la procedura del matching che si è dovuta utilizzare per estrarre  $n_t$  nel limite di grandi lunghezze d'onda può indurre, a sua volta, correzioni al secondo ordine fuori controllo. La bontà di quest'ultimo schema di approssimazione adottato deve perciò essere testato.

La bontà dei 3 schemi di approssimazione adottati verrà quindi confrontata attraverso il calcolo numerico ("esatto") di  $n_t$ . Si noti che la soluzione numerica che verrà confrontata con le espressioni analitiche approssimate è esatta a meno di correzioni trascurabili dovute all'impossibilità di studiare con il calcolo numerico i limiti  $k/(aH) \rightarrow \infty$  e  $k/(aH) \rightarrow 0$  che analiticamente vengono utilizzati rispettivamente per fissare le condizioni iniziali ed il limite di grandi lunghezze d'onda.

Riassumendo: ciò che ci si aspetta è che la formula del frame di Einstein sia più precisa della formula al primo ordine del frame di Jordan.

Più difficile è invece fare delle previsioni su quale formula sarà la più precisa tra (2.72), e (2.87).

Uno degli obiettivi di questa tesi è quello di capire, per ognuno dei potenziali introdotti nel capitolo precedente (LG, CW, e ST), quale dei due frames approssimi meglio il ri-

sultato numerico.

### 3.1 Elaborazione numerica di $n_t$

Le formule di  $n_t$  ottenute nei due frames introdotte nei paragrafi precedenti devono essere confrontate con il risultato numerico dell'indice spettrale ottenuto dalla soluzione delle equazioni del moto non approssimate. Per risolvere l'equazione che descrive la dinamica delle perturbazioni tensoriali è innanzitutto necessario specificare la loro massa effettiva  $m_{eff}$  e la dinamica di background ( $a(t)$ ). Siccome i calcoli sono stati impostati nel frame di Jordan (abbiamo detto che gli spettri sono gli stessi nei due frames) la massa effettiva dipende anche dal campo scalare  $\sigma(t)$  come si vede in (2.24). Risolvere numericamente le equazioni che descrivono la parte omogenea (di background) del sistema non è sempre banale. In particolare risulta numericamente più conveniente risolvere le equazioni differenziali nel tempo cosmico piuttosto che nel tempo conforme o nel logaritmo del fattore di scala. Secondariamente è necessario ottenere una soluzione numerica con un'accuratezza di diverse cifre significative. Quest'ultimo dettaglio non sarebbe necessario se lo studio si fermasse all'analisi dell'evoluzione del sistema omogeneo ma è conseguenza del fatto che la parte omogenea entra nell'equazione delle perturbazioni che è molto sensibile alla dinamica di background.

Una volta ottenuto il sistema di equazioni che descrive la dinamica del background in funzione del tempo cosmico e del potenziale scelto lo si risolve nelle variabili  $\sigma(t)$  e  $a(t)$ , facendo attenzione di rispettare i criteri che garantiscono il tipo di inflazione che si sta cercando. I parametri che vengono impostati sono  $\gamma$ ,  $\mu$ ,  $\sigma(0)$ ,  $\sigma_0$ ,  $a(0)$ , e  $M$  per il potenziale di Starobinsky.

Il minimo del potenziale  $\sigma_0$  viene impostato al valore simbolico di 1, ovvero tutte le energie vengono espresse in funzione di  $\sigma_0$ . Si noti che l'analisi numerica che viene impostata è del tutto generale: l'obiettivo principale è quello di capire quale schema di approssimazione funzioni meglio in funzione del potenziale scelto. In questo senso non viene simulato un periodo "realistico" di inflazione (con un reheating ed una durata precisa) poichè queste richieste non sono necessarie alle finalità della nostra analisi. Le uniche richieste che si impongono sulla parte omogenea sono le seguenti.

- i) Si richiede che i parametri di slow roll siano piccoli. In particolare la piccolezza di  $\epsilon_1$  come abbiamo spiegato in dettaglio nel primo capitolo - problema dell'omogeneità - è necessaria affinché i modi delle perturbazioni che all'inizio dell'evoluzione sono dentro all'orizzonte  $k/(aH) \gg 1$  escano dall'orizzonte al termine dell'evoluzione per produrre lo spettro di potenza che confronteremo con le osservazioni.
- ii) È necessario che l'evoluzione "inflazionaria" sia sufficientemente lunga da portare i suddetti modi le cui condizioni iniziali sono fissate dentro l'orizzonte, all'esterno dell'orizzonte con  $k/aH \ll 1$ . Il numero di e-folds  $\Delta N$  di evoluzione impatta sull'approssimazione con cui necessariamente si fissano le condizioni iniziali per l'evoluzione numerica delle perturbazioni. Appare ragionevole scegliere  $15 < \Delta N < 20$

Valori di  $\Delta N$  più piccoli genererebbero errori sistematici troppo grandi, mentre valori di  $\Delta N$  più grandi richiederebbero un tempo di elaborazione troppo lungo e non necessario per le nostre finalità.

La condizione iniziale su  $a(t)$  viene impostata anch'essa al valore di 1. Il valore di  $a(t)$  non entra negli osservabili ma impatta, a livello numerico, nel calcolo di diverse quantità intermedie quindi è sensato che  $a(t)$  non diventi nè troppo grande nè troppo piccolo.

Il parametro  $\gamma$  viene scelto in modo che valga  $\gamma \geq 1$ , poichè questo è l'intervallo in cui è interessante fare l'analisi e le tre approssimazioni analitiche divergono.

La scelta dei parametri  $\gamma$ ,  $\mu$ ,  $M$  e  $\sigma(0)$  impatta sulla funzione  $N(t) \equiv \log \frac{a(t)}{a(0)}$  ed è importante affinché l'inflazione copra almeno 15 e-folds, e permetta ai modi delle perturbazioni di uscire completamente dall'orizzonte degli eventi. Studieremo un intervallo di modi i cui estremi differiscono di un ordine di grandezza. Questo intervallo è definito in modo tale che all'istante iniziale dell'evoluzione  $k/(a_i H_i) \in [10^3, 10^4]$ . La scelta di  $\Delta N$  garantisce che al termine dell'evoluzione,  $t_f$ ,  $k/(a_f H_f) \sim [10^{-3}, 10^{-4}]$ .

Si noti che la dinamica omogenea di SR segue comunemente un attrattore che è approssimativamente dato dalla relazione fra i parametri di SR al primo ordine. Alla termine dell'inflazione però il sistema si allontana dall'attrattore inflazionario ed il campo inizia ad oscillare intorno al minimo del potenziale. Nel calcolo della soluzione numerica omogenea di background una scelta delle condizioni iniziali tali che il sistema inizi ad evolvere sull'attrattore inflazionario non è banale. Tuttavia è ragionevole attendersi che dopo poche e-folds il sistema si stabilizzi su tale attrattore. Il transiente, ovvero la fase in cui il sistema omogeneo si stabilizza, non solo non è interessante nell'analisi delle approssimazioni che abbiamo impostato ma rischia di falsare i risultati dell'analisi stessa. È per questo che l'evoluzione delle perturbazioni viene studiata solo a partire dall'istante di tempo  $t_i$  dal quale il background evolve sull'attrattore.

I parametri  $\gamma$ ,  $\mu$ ,  $M$  e  $\sigma(0)$  vengono impostati anche in modo da rendere i parametri di slow roll abbastanza grandi (dell'ordine di  $10^{-1} \sim 10^{-2}$ ). Anzitutto questa richiesta è quella che normalmente riproduce  $n_s \approx 0.96$ , come osservato negli esperimenti. Inoltre questa scelta amplifica le deviazioni che vogliamo analizzare fra le tre approssimazioni, rendendo in effetti più chiara l'analisi e le figure che ne derivano.

Una volta ottenuta la dinamica del background risolvendo numericamente le equazioni per i gradi di libertà omogenei, si possono usare i risultati per studiare l'evoluzione delle perturbazioni attraverso l'equazione di Mukhanov (2.23). Le componenti di Fourier delle perturbazioni del campo e della metrica sono delle quantità complesse, quindi è conveniente utilizzare, al posto dell'equazione di Mukhanov, un'equazione reale per l'osservabile (reale) a cui siamo interessati: la corrispondente equazione di Pinney.

Si può scomporre  $T_{s,k}$  nell'equazione (2.23) in un modulo  $\rho$  e in una fase  $\theta$ , ottenendo  $T_{s,k} = \frac{\rho}{\sqrt{2}} e^{i\theta}$ , e imponendo la condizione wronskiana

$$T^* T' - T T'^* = -i \quad (3.2)$$

che può essere scritta come  $\theta' = \frac{1}{\rho^2}$ , la (2.23) diventa l'equazione di Pinney

$$\rho'' + \omega^2 \rho - \frac{1}{4\rho^3} = 0, \quad (3.3)$$

dove  $\omega^2 = k^2 + M_T^2$ . Sostituendo il tempo conforme con il tempo cosmico si ottiene l'equazione:

$$\ddot{\rho} + H\dot{\rho} + \left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{M_T^2}{a^2} \right) \rho = \frac{1}{a^2 \rho^3}, \quad (3.4)$$

dove  $M_T^2/a^2$  viene scritta come (confrontare con (2.24))

$$\frac{M_T^2}{a^2} = - \left( 2H^2 - \epsilon_1 H^2 + \frac{3H\dot{f}(t)}{f(t)} + \frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} \right), \quad (3.5)$$

dove la funzione  $f(t)$  è definita da

$$f(t) \equiv \sqrt{\gamma \sigma^2}. \quad (3.6)$$

L'andamento degli spettri di potenza delle perturbazioni (1.79) è ben approssimato dalla formula

$$\mathcal{P}_t \propto k_*^3 \exp \left( 3 \ln \frac{k}{k_*} \right) \rho \left[ t_f, k_* \exp \left( \ln \frac{k}{k_*} \right) \right]^2 \quad (3.7)$$

dove la dipendenza in  $k$  viene calcolata numericamente risolvendo l'equazione di Pinney (3.4) per una serie finita di modi (normalmente  $\sim 10$ ). In quest'ultima espressione  $k_*$  è la scala pivotale e si è semplicemente riscritta la dipendenza da  $k$  utilizzando l'identità

$$k = k_* \exp \left( \ln \frac{k}{k_*} \right) \equiv k_* l_k. \quad (3.8)$$

La variabile  $l_k$  è quella che definisce naturalmente l'indice spettrale (si veda (1.75)). In particolare se interpoliamo il logaritmo naturale di (3.7) in funzione di  $l_k$  con una parabola  $y = ax^2 + bx + c$  il coefficiente lineare  $b$  per definizione è l'indice spettrale. Questo è il modo in cui numericamente è possibile estrarre  $n_t$  da (3.7). La scala pivotale è il punto in cui si sviluppa in serie il logaritmo dello spettro. I risultati sono poco sensibili alla scelta di  $k_*$  che viene definito come

$$k_* \equiv 10^{(\log_{10} k_f + \log_{10} k_i)/2} \quad (3.9)$$

essendo  $k_i$  e  $k_f$  gli estremi dell'intervallo dei modi considerati. La scala pivotale è centrata rispetto ai logaritmi degli estremi e non rispetto agli estremi stessi.

Si noti che il coefficiente del termine quadratico rappresenta  $\alpha_t$ , il running di  $n_t$ . Per avere dei buoni risultati è importante che tra  $n_t$  e il running ci sia qualche ordine di grandezza di differenza, infatti con un running troppo alto risulterebbe difficile identificare univocamente una pendenza dello spettro nell'intervallo dei  $k$  poichè essa sarebbe molto dipendente dalla scelta di  $k_*$  all'interno dell'intervallo dei modi.

L'indice spettrale così ottenuto mediante interpolazione viene confrontato con gli indici spettrali ottenuti dalle formule viste nei capitoli precedenti.

## 3.2 Risultati

In questa sezione si esporranno i risultati dell'analisi numerica dei tre potenziali. Per ogni potenziale verrà proposta una piccola casistica di condizioni iniziali. Non è sbagliato supporre che i potenziali che si stanno analizzando, soprattutto in regime di slow roll, siano sufficientemente continui e lisci da dare risultati simili anche per differenti valori iniziali non troppo distanti da quelli scelti. Per ogni caso presentato vengono riportati due grafici. Nel primo è plottato  $\ln \mathcal{P}_t$  in funzione di  $\ln k/k_*$ . La linea punteggiata rappresenta la soluzione numerica mentre le 3 linee solide mostrano le 3 previsioni analitiche ottenute nei due frames. Inoltre con una zona ombreggiata si rappresenta la variazione di  $n_t^{(e)}$  dovuta all'aggiunta di un contributo (positivo o negativo) del secondo ordine nei parametri di SR del frame di Jordan. In particolare si sceglie il parametro di SR più grande fra  $\epsilon_1$  ed  $\epsilon_2$  e si plotta la regione fra  $n_t^{(e)} - \epsilon_{max}^2$  e  $n_t^{(e)} + \epsilon_{max}^2$ . Ci si attende che la differenza fra le approssimazioni sia dell'ordine della regione ombreggiata. Nel secondo grafico sono rappresentati i parametri di SR significativi e la loro evoluzione nel tempo cosmico del frame di Jordan. La condizione iniziale  $\sigma(0)$  verrà indicata in unità di  $\sigma_0$ . Insieme ai grafici verranno presentati i valori numerici di  $n_t$  nel frame di Jordan con la formula al primo ordine ( $n_t^{(JF)}$ ),  $n_t$  nel frame di Einstein ( $n_t^{(EF)}$ ) al primo ordine, e  $n_t$  nel frame di Jordan con la formula al secondo ordine ( $n_t^{(JF,2)}$ ); il valore del fit numerico lineare ( $n_t^{(e)}$ ) - ovvero la stima esatta dell'indice spettrale, e del running ( $\alpha_t$ ). Verranno infine mostrati l'errore relativo tra la numerica e  $E$  ( $(n_t^{(e)} - n_t^{(EF)})\%$ ), quello tra la numerica e  $n_t^{(JF)}$  ( $(n_t^{(e)} - n_t^{(JF)})\%$ ), e l'errore relativo di  $n_t^{(EF)}$  rispetto a  $n_t^{(JF)}$  ( $(n_t^{(EF)} - n_t^{(JF)})\%$ ). Qualora  $n_t^{(JF,2)}$  risulti approssimare meglio di  $n_t^{(EF)}$  (come nel caso del potenziale CW), verrà mostrato anche l'errore relativo del fit rispetto a  $n_t^{(JF,2)}$  ( $(n_t^{(e)} - n_t^{(JF,2)})\%$ ).

### 3.2.1 Potenziale di Landau-Ginzburg

L'inflazione ha luogo fintanto che il campo scalare non giunge nel minimo del potenziale, quindi più  $\sigma(0)$  è lontano dal minimo del potenziale, più l'inflazione avrà una lunga durata.

Dinamicamente questo caso ha una caratteristica peculiare rispetto agli altri ovvero, nel regime di campo grande il potenziale è molto vicino a quello quartico e i parametri di SR possono essere resi molto piccoli. Le condizioni iniziali dei due casi proposti sono:

	$\sigma(0)$	$\gamma$	$\mu$	$t_i$	$t_f$
<i>LG 1° caso</i>	8	5	1	10	30
<i>LG 2° caso</i>	7	50	0.5	25	120

(3.10)

Dai dati del primo caso si ottengono i grafici (4.3) e (4.4), dai dati del secondo caso si ottengono (3.3) e (3.4).

Le relative pendenze sono:

	<i>LG 1° caso</i>	<i>LG 2° caso</i>
$n_t^{(JF)}$	-0.0005	-0.0009
$n_t^{(JF,2)}$	-0.0034	-0.0059
$n_t^{(EF)}$	-0.0015	-0.0026
$n_t^{(e)}$	-0.0016	-0.0027
$\alpha_t$	-0.00004	-0.00012
$\epsilon_1$	0.021	0.016
$\tilde{\epsilon}_1$	0.0014	0.0008
$(n_t^{(e)} - n_t^{(EF)})\%$	5.2	7.19
$(n_t^{(e)} - n_t^{(JF)})\%$	195.5	217.3
$(n_t^{(EF)} - n_t^{(JF)})\%$	180.86	196

(3.11)

Si nota come in tutti i grafici il frame di Einstein sia preferito.  $\tilde{\epsilon}_1$  risulta essere sensibilmente inferiore del corrispondente parametro del frame di Jordan.

### 3.2.2 Potenziale di Coleman-Weinberg

Differentemente dal caso LG il potenziale CW non è asintoticamente quartico. Quindi i parametri di SR nel regime LF sono più grandi. In questo caso il frame di Einstein non è favorito come nel caso di LG ma vi sono situazioni in cui l'espressione di  $n_t$  del frame di Jordan è da preferirsi rispetto all'approssimazione del frame di Einstein. In questo paragrafo aggiungeremo la misura dell'errore relativo  $(n_t^{(e)} - n_t^{(JF,2)})\%$ .

Le condizioni iniziali delle due casistiche proposte sono:

	$\sigma(0)$	$\gamma$	$\mu$	$t_i$	$t_f$
<i>CW 1° caso</i>	40	20	1	0.7	6
<i>CW 2° caso</i>	50	40	0.4	1	8

(3.12)

Dai dati del primo caso si ottengono i grafici (3.5) e (3.6), dai dati del secondo caso si ottengono (3.7) e (3.8).

Le relative pendenze sono:

	<i>CW 1° caso</i>	<i>CW 2° caso</i>
$n_t^{(JF)}$	-0.018	-0.015
$n_t^{(JF,2)}$	-0.025	-0.020
$n_t^{(EF)}$	-0.020	-0.017
$n_t^{(e)}$	-0.023	-0.018
$\alpha_t$	-0.00051	-0.00058
$\epsilon_1$	0.065	0.055
$\tilde{\epsilon}_1$	0.012	0.0084
$(n_t^{(e)} - n_t^{(EF)})\%$	15.67	7.29
$(n_t^{(e)} - n_t^{(JF,2)})\%$	5.98	11.22
$(n_t^{(e)} - n_t^{(JF)})\%$	30.73	19.78
$(n_t^{(EF)} - n_t^{(JF)})\%$	13	11.6

(3.13)

Sono stati riportati i due esempi più notevoli ottenuti, ovverosia quello dove è favorito il frame di Jordan tramite la formula approssimata al secondo ordine e quello dove è favorito il frame di Einstein. La casistica di esempi calcolati per preparare questo lavoro è molto più ampia, e in quasi tutti i casi calcolati il frame più favorito era quello di Jordan al secondo ordine. Esiste comunque almeno un set di condizioni iniziali che rendono il frame di Einstein favorito.

### 3.2.3 Potenziale di Starobinsky

Come è stato sottolineato nel capitolo precedente, il potenziale di Starobinsky è una generalizzazione del potenziale LG, e tende a quest'ultimo per  $\gamma \gg 1$ . Dal momento che i risultati per il potenziale LG sono già stati presentati, in questa sede verranno presentati i risultati al limite opposto, ovverosia quando  $\gamma \sim 1$ .

Le condizioni iniziali delle due casistiche proposte sono:

	$\sigma(0)$	$\gamma$	$\mu$	$t_i$	$t_f$
<i>ST 1° caso</i>	5	1	5	0.1	1
<i>ST 2° caso</i>	7	1	5	2.9	8.1

(3.14)

Dai dati del primo caso si ottengono i grafici (3.9) e (3.10), dai dati del secondo caso si ottengono (3.11) e (3.12).

Le relative pendenze sono:

	<i>ST 1° caso</i>	<i>ST 2° caso</i>
$n_t^{(JF)}$	-0.003	-0.0005
$n_t^{(JF;2)}$	-0.017	-0.0031
$n_t^{(EF)}$	-0.0077	-0.0014
$n_t^{(e)}$	-0.0087	-0.0015
$\alpha_t$	-0.00067	-0.00004
$\epsilon_1$	0.035	0.0136
$\tilde{\epsilon}_1$	$-1.2 \times 10^{-6}$	0.0006
$(n_t^{(e)} - n_t^{(EF)})\%$	13.64	4.5
$(n_t^{(e)} - n_t^{(JF)})\%$	195.2	172.5
$(n_t^{(EF)} - n_t^{(JF)})\%$	159.7	160.63

(3.15)

Anche in questo caso il frame di Einstein risulta un'approssimazione migliore. Nel regime di LF per  $\sigma(0) \sim 10\sigma_0$  in realtà il comportamento del potenziale è essenzialmente quartico e non ci si aspettano particolari differenze rispetto a LG.

### 3.3 Soluzioni analitiche

Per terminare calcoliamo i valori analitici di  $\sigma$ ,  $\epsilon_1$ ,  $\delta_1$ ,  $r$ ,  $\tilde{\epsilon}_1$ , e  $\delta_2$  per i tre potenziali in funzione della durata dell'inflazione  $N_*$ . Questa è la dipendenza funzionale che generalmente viene riportata in letteratura. Avendo stimato la bontà dei metodi di approssimazione nei due frames ed avendo scelto la migliore espressione approssimata di  $n_t$  in funzione dei parametri di SR nel frame di Jordan ora andiamo ad introdurre la dipendenza da  $N_*$ . Si noti che la durata dell'inflazione è una quantità che dipende dalla scelta del frame. Quindi di qui in avanti si assume che il frame di Jordan sia quello fisico ed  $N_*$  si riferirà a quel frame.

Partendo dalla definizione di  $\delta_1 = \frac{d \ln \sigma}{dN} \equiv F(\sigma)$  si può scrivere

$$\int_{\sigma_*}^{\sigma_e} \frac{d\sigma}{\sigma F(\sigma)} = \int_0^{N_*} dN = N_*, \quad (3.16)$$

dove  $\sigma_e$  indica il valore del campo alla fine dell'inflazione e per la condizione di slow roll (2.12)

$$F(\sigma) = -\frac{\gamma}{1+6\gamma}(n_V - 4). \quad (3.17)$$

In prima approssimazione identifichiamo  $\sigma_e \approx \sigma(0)$ .

L'integrazione del termine al lato sinistro dell'equazione (3.16) può essere non banale. Inoltre è generalmente necessario approssimare il risultato dell'integrazione in modo da poter invertire la relazione ottenuta ed esprimere  $\sigma_* \equiv \sigma(N_*)$ . Tutti i risultati riportati

sotto sono ottenuti assumendo  $\gamma \geq 1$   
 Nel caso LG si ottiene

$$\frac{1+6\gamma}{8\gamma} \frac{\sigma_*^2}{\sigma_0^2} \simeq N_* \Rightarrow \sigma_* \simeq \sigma_0 \sqrt{\frac{8\gamma N_*}{1+6\gamma}}. \quad (3.18)$$

e conseguentemente

$$\delta_1 \simeq -\epsilon_1 \simeq -\frac{1}{2N_*}, \quad \delta_2 \simeq -\frac{1}{N_*}, \quad \tilde{\epsilon}_1 \simeq \frac{1+6\gamma}{8\gamma} \frac{1}{N_*^2} \quad (3.19)$$

Siccome l'espressione migliore per  $r$  in questo caso è quella del frame di Einstein avremo:

$$r \simeq \frac{1+6\gamma}{\gamma} \frac{2}{N_*^2} \xrightarrow{\gamma \gg 1} \frac{12}{N_*^2} \quad (3.20)$$

che è il ben noto risultato dell'inflazione mediante campo di Higgs. Nel caso CW si ottiene invece

$$\frac{1+6\gamma}{8\gamma} \ln^2 \frac{\sigma_*^2}{\sigma_0^2} \simeq N_* \Rightarrow \sigma_* \simeq \sigma_0 \exp \left[ \sqrt{\frac{2\gamma N_*}{1+6\gamma}} \right]. \quad (3.21)$$

e conseguentemente

$$\delta_1 \simeq -\epsilon_1 \simeq -\sqrt{\frac{\gamma}{2N_*(1+6\gamma)}}, \quad \delta_2 \simeq -\frac{1}{2N_*}, \quad \tilde{\epsilon}_1 \simeq \frac{1}{4N_*} \quad (3.22)$$

L'espressione per  $r$  è generalmente migliore nel frame di Jordan dove ha la seguente forma

$$r \simeq -8(4\delta_1\delta_2 - 2\tilde{\epsilon}_1) \simeq \frac{4}{N_*} \left( 1 - \sqrt{\frac{8\gamma}{N_*(1+6\gamma)}} \right). \quad (3.23)$$

Il secondo termine nella parentesi del risultato finale scompare nel frame di Einstein. Seppure formalmente trattato come contributo del secondo ordine rispetto ai parametri di SR è evidente che il termine correttivo è piuttosto piccolo e dell'ordine di  $\delta_1$ .

Infine nel caso ST si ottiene

$$\frac{3}{4} \frac{\sigma_*}{\sigma_0} \sqrt{\frac{2(1+6\gamma)}{3\gamma}} \simeq N_* \Rightarrow \sigma_* \simeq \sigma_0 \left( \frac{4N_*}{3} \right)^{\sqrt{\frac{3\gamma}{2(1+6\gamma)}}}. \quad (3.24)$$

e conseguentemente

$$\delta_1 \simeq -\epsilon_1 \simeq -\sqrt{\frac{6\gamma}{1+6\gamma}} \frac{1}{2N_*}, \quad \delta_2 \simeq -\frac{1}{N_*}, \quad \tilde{\epsilon}_1 \simeq \frac{3}{4N_*^2} \quad (3.25)$$

L'espressione per  $r$  è sempre migliore nel frame di Einstein dove ha la seguente (ben nota) forma

$$r \simeq \frac{12}{N_*^2}. \quad (3.26)$$

Come è stato specificato nel capitolo (1.63)  $N_*$  deve essere dell'ordine di  $50 \sim 70$  e-folds per ottenere un periodo inflazionario che risolva i problemi collegati con la cosmologia classica.

I risultati per  $r$  in funzione di  $N_*$  appena presentati sono gli ultimi risultati di questa tesi. Abbinati all'analisi numerica dei potenziali rappresentano la migliore stima analitica disponibile per  $r$  nei modelli di inflazione in gravità indotta all'ordine più basso in  $1/N_*$ .

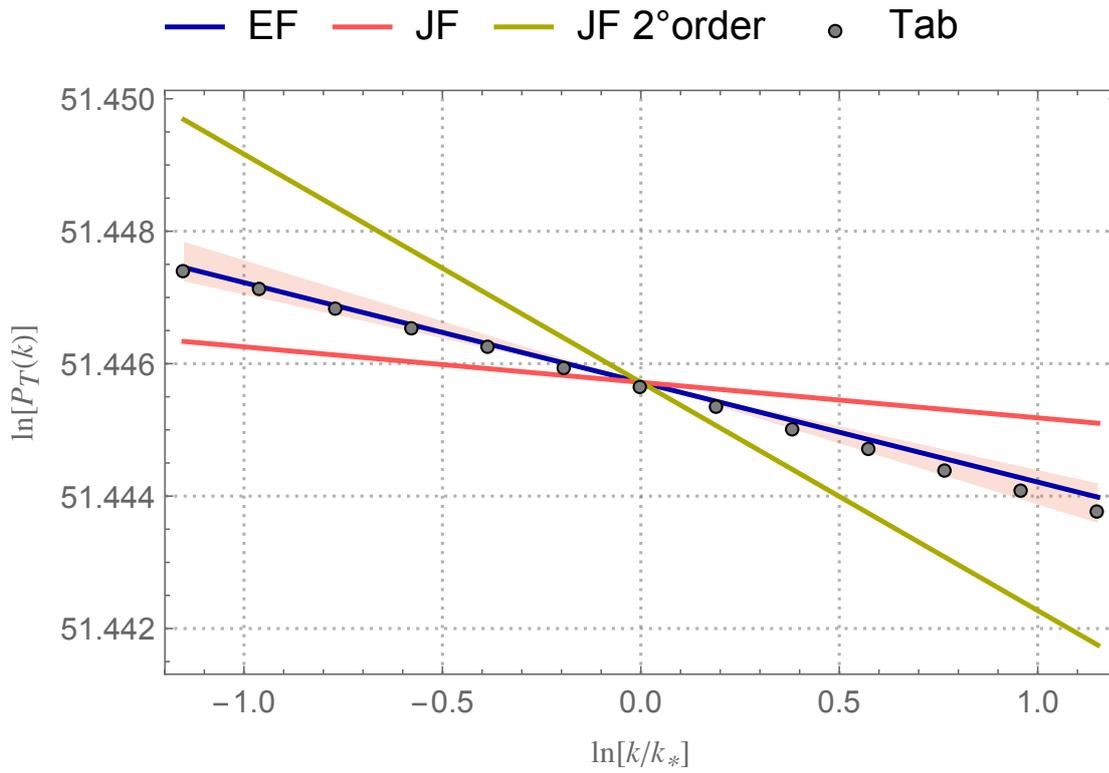


Figura 3.1: In questo grafico sono rappresentate le pendenze degli indici spettrali per il potenziale LG, i valori dei parametri sono:  $\gamma = 5$ , e  $\mu = 1$ . I valori delle pendenze delle rette sono riportati in (3.11).

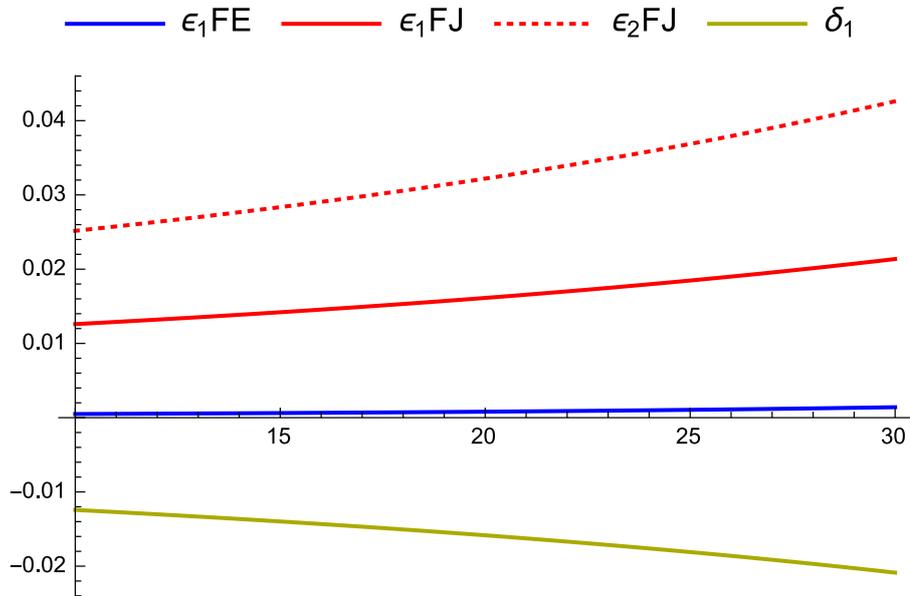


Figura 3.2: Pendenze dei parametri di slow roll per LG con i valori  $\gamma = 5$ ,  $\mu = 1$ ,  $\sigma(0) = 8$ .  $\epsilon_1$  calcolato nel frame di Einstein risulta essere minore di circa un ordine di grandezza.

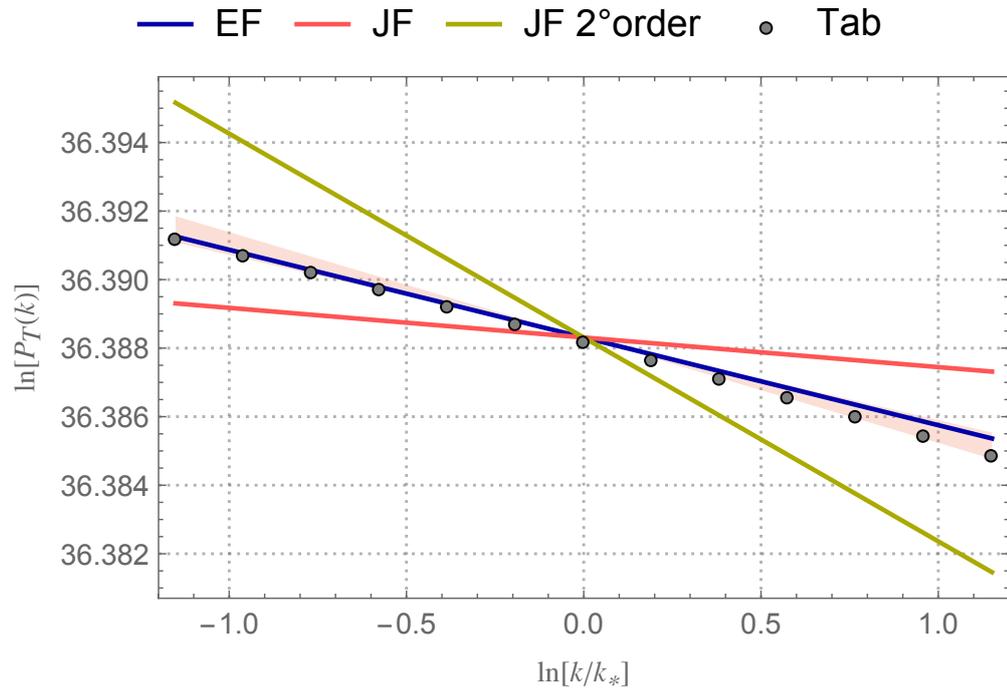


Figura 3.3: In questo grafico sono rappresentate le pendenze degli indici spettrali per il potenziale LG, i valori dei parametri sono:  $\gamma = 50$ ,  $\mu = 0.5$ . I valori delle pendenze delle rette sono riportati in (3.11).

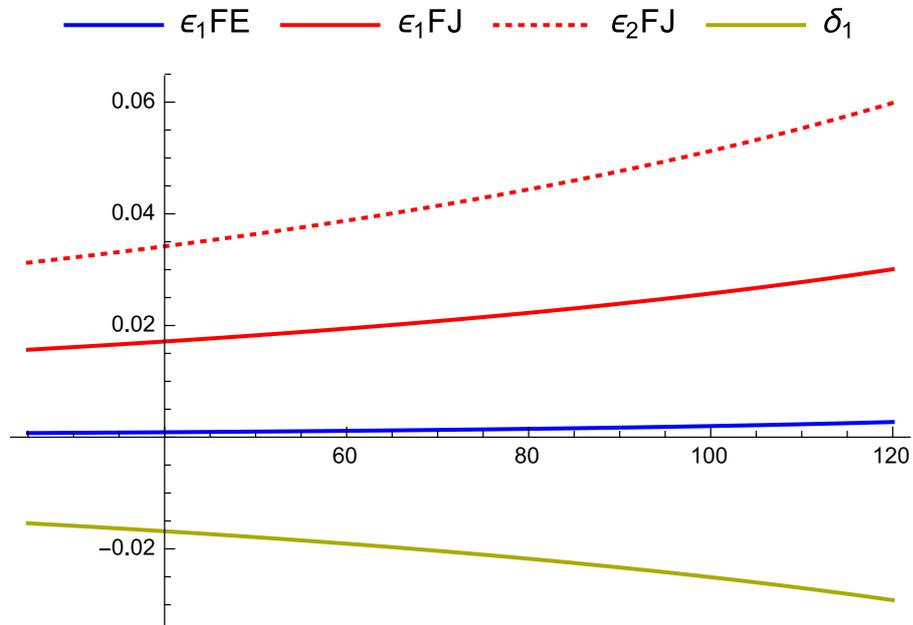


Figura 3.4: Pendenze dei parametri di slow roll per LG, i parametro valgono  $\gamma = 50$ ,  $\mu = 0.5$ ,  $\sigma(0) = 7$ .

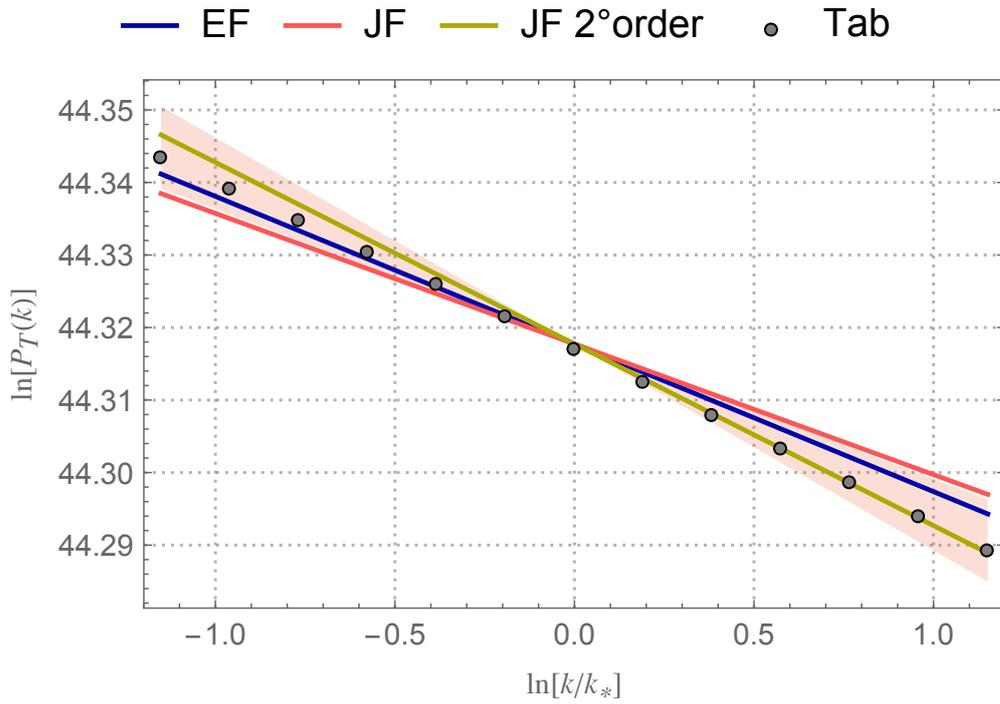


Figura 3.5: In questo grafico sono rappresentate le pendenze degli indici spettrali per il potenziale CW, i valori dei parametri sono:  $\gamma = 20$ ,  $\mu = 1$ ,  $\sigma(0) = 40$ . I valori delle pendenze delle rette sono riportati in tabella (3.13).

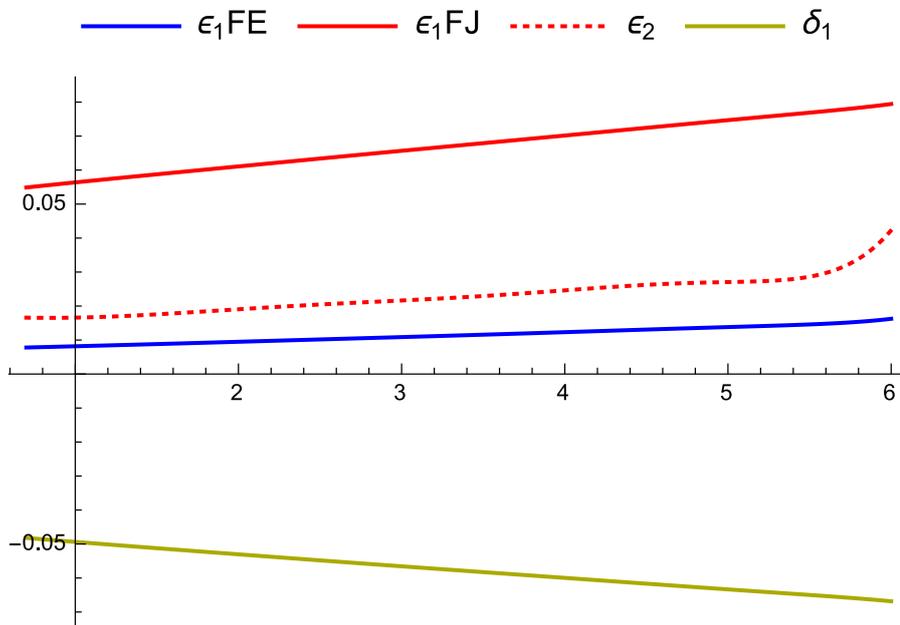


Figura 3.6: Grafico dei parametri di slow roll per CW, i parametri valgono  $\gamma = 20$ ,  $\mu = 1$ ,  $\sigma(0) = 40$ .

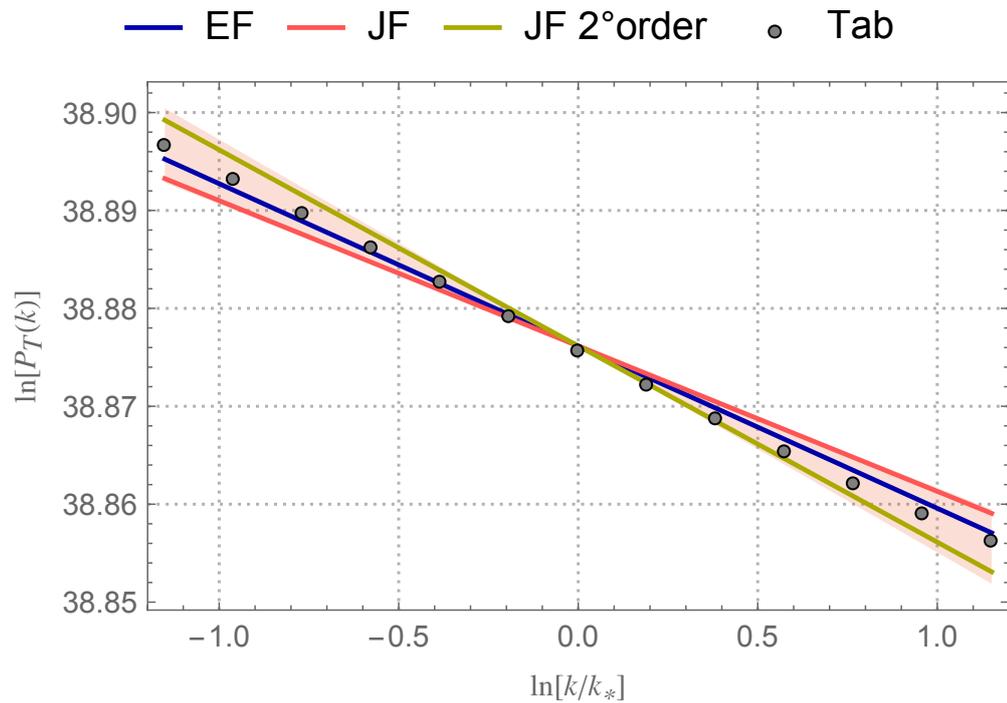


Figura 3.7: In questo grafico sono rappresentate le pendenze degli indici spettrali per il potenziale CW, i valori dei parametri sono:  $\gamma = 40$ ,  $\mu = 0.4$ ,  $\sigma(0) = 50$ . I valori delle pendenze delle rette sono riportati in (3.13).

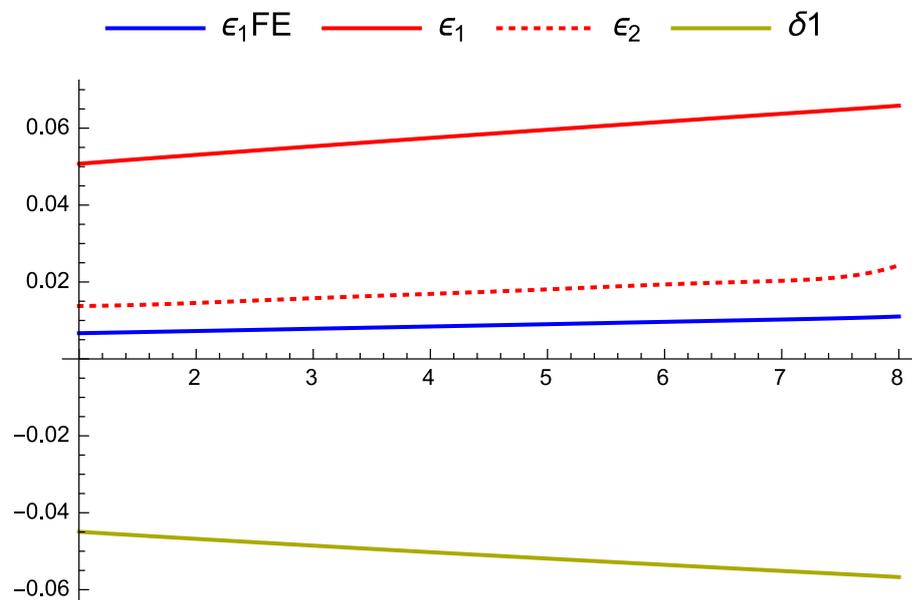


Figura 3.8: Grafico dei parametri di slow roll per CW, i parametri valgono  $\gamma = 40$ ,  $\mu = 0.4$ ,  $\sigma(0) = 50$ .

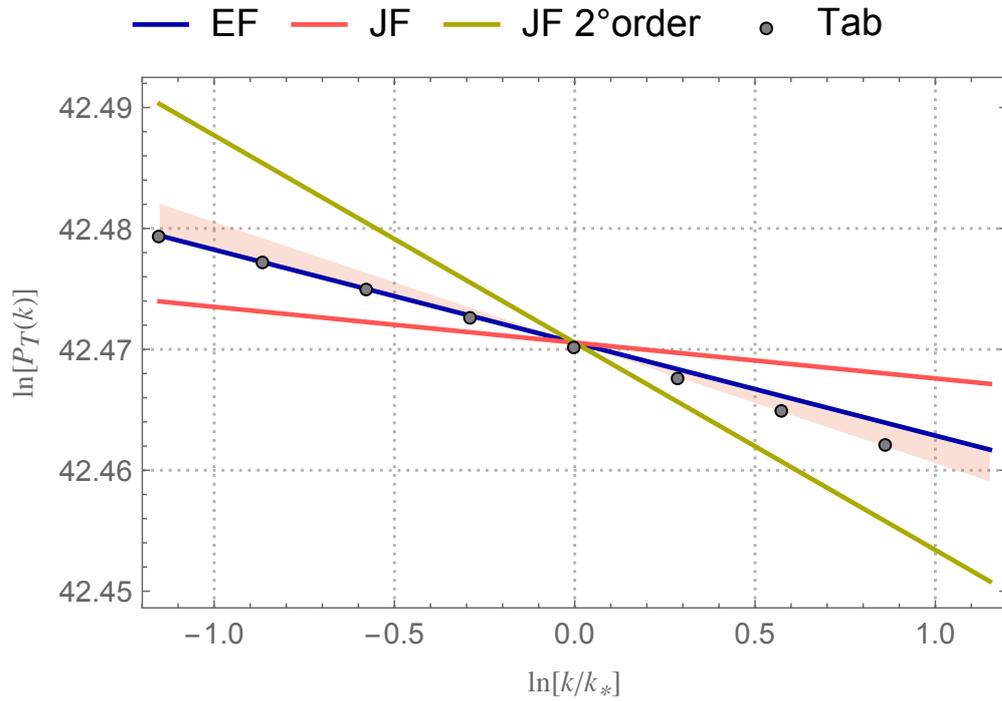


Figura 3.9: In questo grafico sono rappresentate le pendenze degli indici spettrali per il potenziale ST, i valori dei parametri sono:  $\gamma = 1$ ,  $\mu = 5$ ,  $\sigma(0) = 5$ . I valori delle pendenze delle rette sono riportati in (3.15).

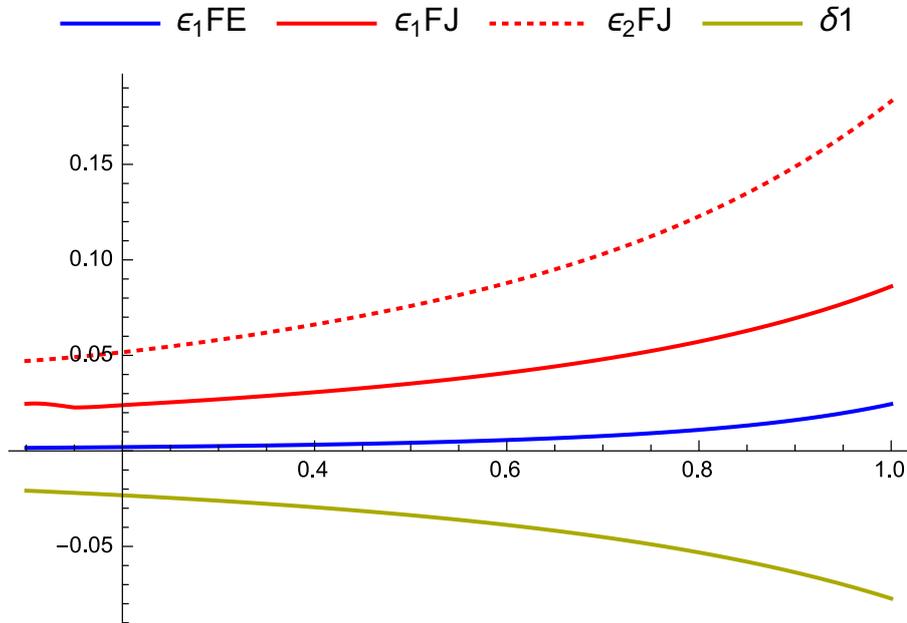


Figura 3.10: Grafico dei parametri di slow roll per ST, i parametri valgono:  $\gamma = 1$ ,  $\mu = 5$ ,  $\sigma(0) = 5$ .  $\epsilon_1^{(JF)}$  risulta essere almeno un ordine di grandezza maggiore rispetto a  $\epsilon_1^{(EF)}$ .

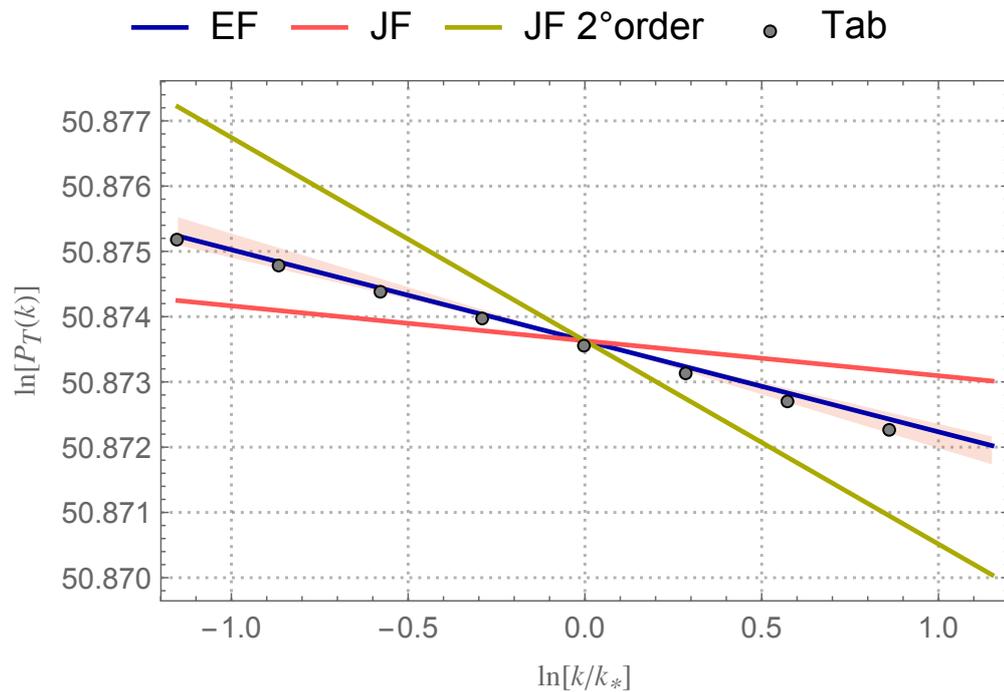


Figura 3.11: In questo grafico sono rappresentate le pendenze degli indici spettrali per il potenziale ST, i valori dei parametri sono:  $\gamma = 1$ ,  $\mu = 5$ ,  $\sigma(0) = 7$ . I valori delle pendenze delle rette sono riportati in (3.15).

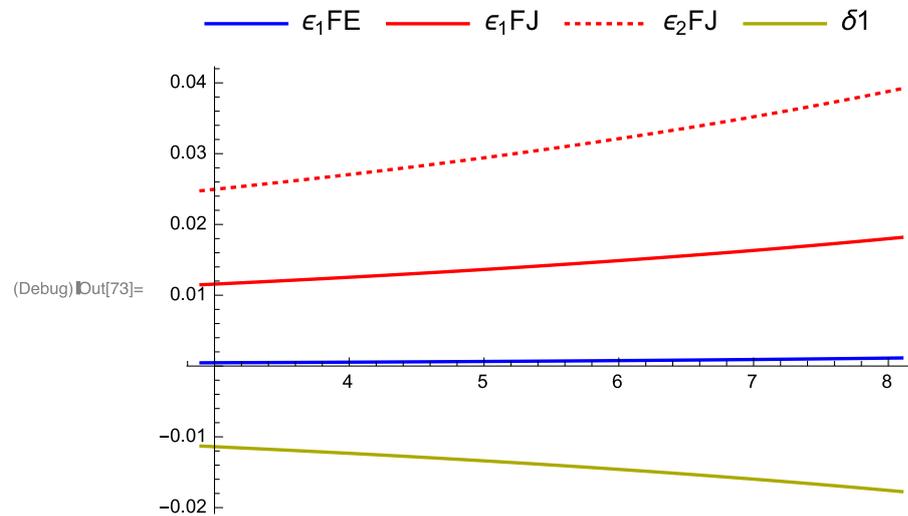


Figura 3.12: Grafico dei parametri di slow roll per ST, i parametri valgono  $\gamma = 1$ ,  $\mu = 5$ ,  $\sigma(0) = 7$ . Anche in questo caso  $\epsilon_1^{(JF)}$  risulta essere almeno un ordine di grandezza maggiore rispetto a  $\epsilon_1^{(EF)}$ .

## Capitolo 4

# Conclusione

Il paradigma inflazionario si basa sull'ipotesi di un periodo nell'evoluzione cosmica dell'universo nel quale il fattore di scala ha vissuto un'evoluzione accelerata. Attraverso questo semplice accorgimento trovano soluzione tutta una serie di problemi collegati con le osservazioni che vengono fatte della radiazione cosmica di fondo e della struttura stessa dell'universo. Le caratteristiche osservate, troppo peculiari per essere frutto di una selezione casuale delle condizioni iniziali, vengono elegantemente descritte come la conseguenza di dinamiche antecedenti al big bang caldo.

Per ottenere queste dinamiche i modelli più semplici prevedono l'esistenza di un campo scalare con un'autointerazione "debole", e un accoppiamento minimale con il settore geometrico. Esistono poi modelli che prevedono un accoppiamento non minimale tra campo scalare e gravità, dove è previsto all'interno dell'azione un termine di accoppiamento diretto tra il campo scalare e lo scalare di Ricci.

Sia nelle teorie ad accoppiamento minimale sia nelle teorie ad accoppiamento non minimale (dette anche teorie scalari-tensoriali) la forma del potenziale determina la dinamica del campo scalare. Dal lato non minimale diverse teorie sono state proposte per descrivere questo tipo di dinamica, teorie derivanti dalle ipotesi che si possono imporre sulla dinamica microscopica, o sulle proprietà geometriche dello spazio tempo. Le equazioni che descrivono la dinamica del sistema gravità + campo scalare inflatonico possono essere convenientemente riscritte con l'utilizzo delle gerarchie di parametri di slow roll  $\epsilon_i$  e  $\delta_i$ . Durante l'inflazione i parametri di slow roll sono dell'ordine di  $10^{-1} \sim 10^{-2}$ , e dal momento che, per come sono definiti, la loro derivata temporale è proporzionale al quadrato dei parametri stessi si riesce ad applicare alla dinamica inflazionaria uno schema di approssimazione che trascura tutte le quantità di ordine superiore a quello lineare nei parametri di slow roll. La fase in cui queste condizioni sono verificate e l'approssimazione è accurata prende il nome di "regime di slow roll".

Il paradigma inflazionario indica nelle perturbazioni della metrica e nelle perturbazioni del campo scalare l'origine della complessità delle strutture di grande scala che oggi si osservano, oltre che delle disomogeneità osservate nella CMB.

Le perturbazioni fisiche della metrica e del campo scalare (comunemente classificate come perturbazioni scalari e tensoriali) vengono descritte da quantità gauge invarianti che

soddisfano all'equazione di Mukhanov. Ciascuna equazione di Mukhanov (ne esiste una che governa la dinamica delle perturbazioni scalari ed una per le perturbazioni tensoriali) può essere riscritta nella forma dell'equazione di Pinney.

L'equazione di Mukhanov può essere risolta in modo approssimato utilizzando due metodi diversi: nel primo metodo (metodo del matching) si risolve l'equazione nei due limiti  $\frac{k}{aH} \ll 1$  e  $\frac{k}{aH} \gg 1$ , e alla fine si opera il matching all'orizzonte tra le soluzioni ( $\frac{k}{aH} \simeq 1$ ); il secondo metodo consiste nell'approssimare l'equazione di Mukhanov al primo ordine nei parametri di slow roll ovvero trattandoli come costanti. L'equazione così approssimata ha come soluzione generale una combinazione di funzioni di Hankel.

La soluzione dell'equazione di Mukhanov permette di calcolare gli spettri di potenza delle perturbazioni scalari e tensoriali ( $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  per il caso scalare, e  $\mathcal{P}_h(k)$  per quello tensoriale), il cui sviluppo in serie porta alla definizione degli indici spettrali:  $n_s$  per il settore scalare e  $n_t$  per quello tensoriale.

$$n_t \equiv \left. \frac{d \log(\mathcal{P}_h)}{d \log\left(\frac{k}{k_*}\right)} \right|_{k=k_*}. \quad (4.1)$$

Gli indici spettrali sono degli osservabili ed esiste una relazione che collega, nei modelli di inflazione a campo singolo,  $n_t$  con un terzo osservabile, il rapporto tensore su scalare  $r$ . Quest'ultimo osservabile è di fondamentale importanza poichè è direttamente collegato alla scala di energia dell'inflazione oltre che all'abbondanza delle onde gravitazionali primordiali.

I metodi di approssimazione introdotti nel primo capitolo della tesi per i modelli di inflazione minimamente accoppiati alla relatività generale vengono utilizzati nel secondo capitolo della tesi per i modelli di gravità indotta.

Una trasformazione conforme ed una ridefinizione dei gradi di libertà dinamici permette di passare dai modelli ad accoppiamento minimale ai modelli con gravità indotta. Questo tipo di trasformazione prende il nome di "transizione tra il frame di Jordan e il frame di Einstein". La corrispondenza fra i due frames non è fisica ma è solo matematica. Tutte le quantità in gioco possono essere tradotte da un frame all'altro ed in generale gli osservabili nei due frames sono diversi. A causa di questa ambiguità vi è la necessità di specificare il frame fisico in cui gli osservabili possono essere confrontati con le osservazioni. Relativamente alle dinamica delle disomogeneità primordiali i due frames sono invece equivalenti ovvero gli osservabili prodotti nei due frames sono gli stessi. Tuttavia gli schemi di approssimazione che è necessario implementare nei due frames ai fini di risolvere l'equazione di Mukhanov possono condurre a predizioni analitiche diverse. Esistono infatti alcune ambiguità relative all'indice spettrale  $n_t$  e quindi relative ad  $r$  ad esso collegato. Queste ambiguità sono significative solo per certe scelte dei parametri del modello inflazionario ed in particolare per certi modelli di inflazione.

In questa tesi vengono quindi confrontate tre diverse predizioni analitiche per  $n_t$ , derivanti da tre schemi di approssimazione differenti: l'indice spettrale viene calcolato nel frame di Einstein, dove si può applicare l'approssimazione di slow roll al primo ordine

ed ottenere

$$n_t^{(EF)} = -\frac{\delta_1^2}{\gamma} (1 + 6\gamma), \quad (4.2)$$

in funzione dei parametri di slow roll del frame di Jordan; oppure può essere calcolato nel frame di Jordan con l'approssimazione di Slow roll al primo ordine per ottenere

$$n_t^{(JF)} = -2(\epsilon_1 + \delta_1), \quad (4.3)$$

che attraverso le equazioni del moto può essere riscritta come

$$n_t^{(JF)} = -\frac{\delta_1^2}{\gamma} \left( \gamma \frac{\delta_1}{\delta_2} + 1 + 6\gamma \right), \quad (4.4)$$

ovvero come un'espressione al secondo ordine e quindi potenzialmente fuori controllo rispetto allo schema di approssimazione adottato; infine si è ottenuta una espressione per  $n_t$  cercando di ottenere accuratezza al secondo ordine nel frame di Jordan

$$n_t^{(JF,2)} = 4\delta_1\delta_2 - \frac{1 + 6\gamma}{\gamma} \delta_1^2. \quad (4.5)$$

Attraverso l'elaborazione numerica delle equazioni è possibile ottenere il valore "esatto" di  $n_t$  e confrontarlo con i risultati approssimati.

I risultati ottenuti nel capitolo (3) confermano l'ipotesi che  $n_t$  espresso nel frame di Einstein sia più prossimo al valore numerico rispetto a  $n_t$  espresso al primo ordine nel frame di Jordan. Per i potenziali LG e ST gli errori relativi tra  $n_t^{(e)}$  e  $n_t^{(EF)}$  sono almeno un ordine di grandezza inferiori rispetto agli errori relativi tra  $n_t^{(EF)}$  e  $n_t^{(JF)}$  e tra  $n_t^{(e)}$  e  $n_t^{(JF)}$ , testimoniando come il frame di Einstein sia la migliore scelta per quei potenziali. Nel caso del potenziale CW l'errore relativo tra  $n_t^{(e)}$  e  $n_t^{(EF)}$  è circa la metà dell'errore tra  $n_t^{(e)}$  e  $n_t^{(JF)}$ , testimoniando come il frame di Einstein sia ampiamente favorito rispetto al frame di Jordan al primo ordine.

Diverso invece il comportamento di  $n_t^{(JF,2)}$ , che nel caso del potenziale LG approssima  $n_t^{(e)}$  meglio di  $n_t^{(JF)}$ , ma non risulta essere migliore di  $n_t^{(EF)}$ ; nel caso del potenziale CW per alcuni valori iniziali risulta essere la migliore scelta possibile, mentre in altri casi risulta peggiore di  $n_t^{(EF)}$ ; e nel potenziale ST risulta essere la scelta peggiore rispetto a  $n_t^{(JF)}$ , e di conseguenza anche rispetto a  $n_t^{(EF)}$ .

Una possibile interpretazione di questi risultati si evince dallo studio dei parametri di slow roll e dell'equazione di Mukhanov. In particolare parametro di slow roll  $\epsilon_1$  è molto diverso tra i due frame (è dell'ordine di grandezza del quadrato dei parametri di slow roll nel frame di Jordan). Inoltre nel frame di Einstein l'equazione di Mukhanov dipende solo da quel parametro. Quindi l'approssimazione del primo ordine nel frame di Einstein è equivalente a quella del secondo ordine nel frame di Jordan. Tuttavia si nota che mentre nei casi LG e ST  $\tilde{\epsilon}_1$  è minore di  $\epsilon_1$  di almeno un ordine di grandezza, nel caso del potenziale CW la differenza è minore. Questo significa che per i potenziali LG e ST quando si fanno i conti al primo ordine nel frame di Einstein si sta mantenendo un

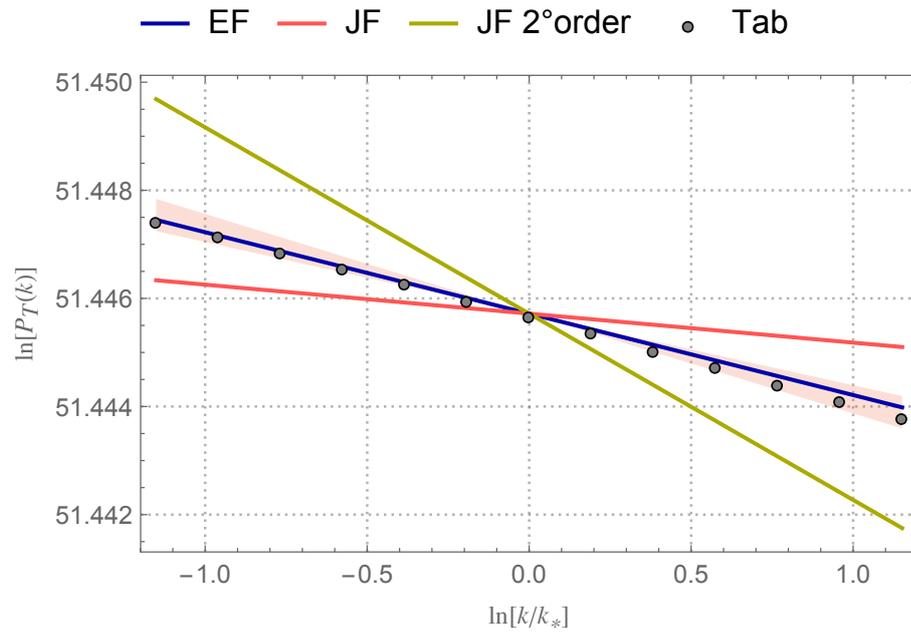


Figura 4.1: Grafico rappresentativo del potenziale LG, con il frame di Einstein che approssima meglio del frame di Jordan i risultati corretti.

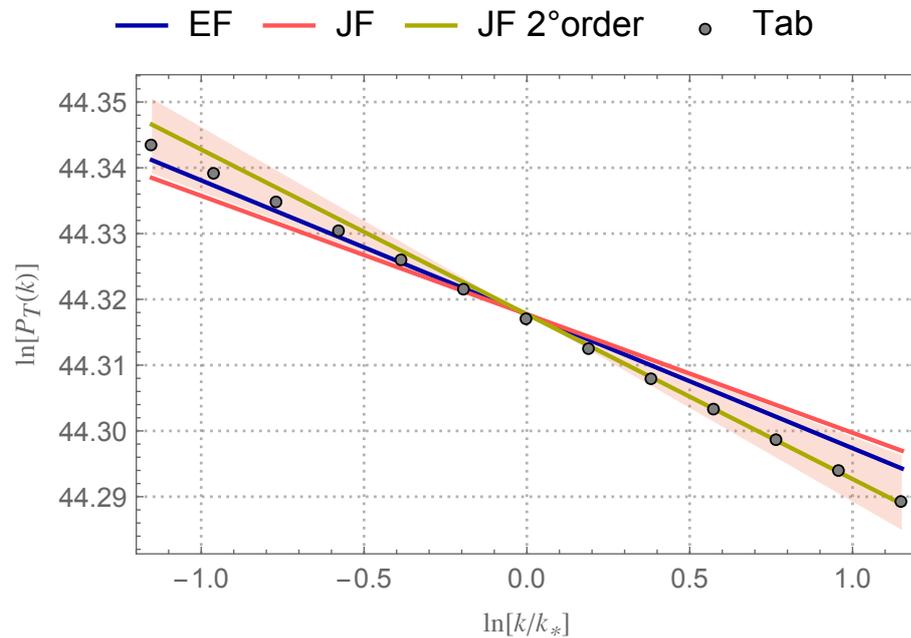


Figura 4.2: Grafico rappresentativo del potenziale CW, con il frame di Einstein che approssima meglio del frame di Jordan al primo ordine, i risultati corretti. Al secondo ordine il frame di Jordan approssima meglio di quello di Einstein.

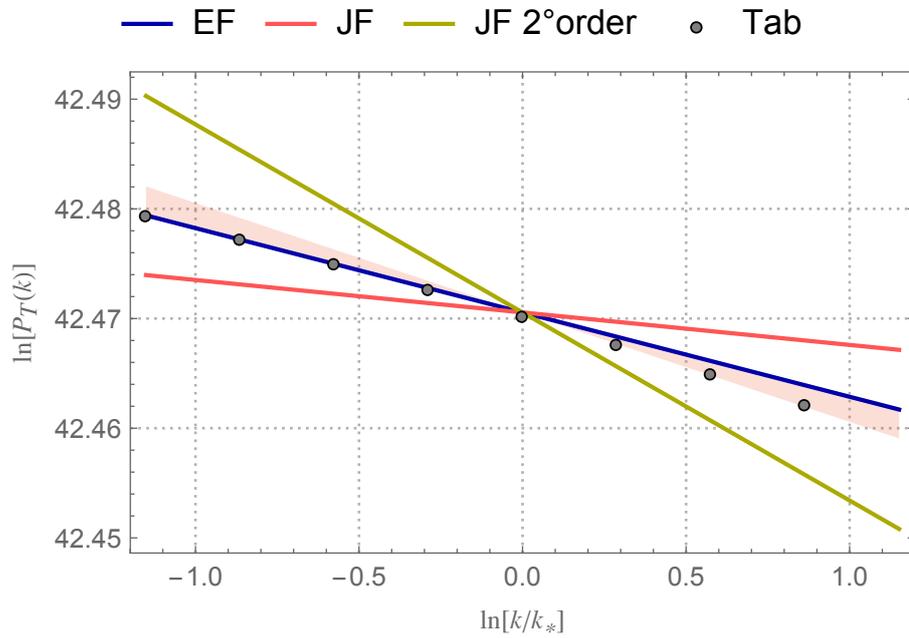


Figura 4.3: Grafico rappresentativo del potenziale ST, con il frame di Einstein che approssima meglio del frame di Jordan i risultati corretti.

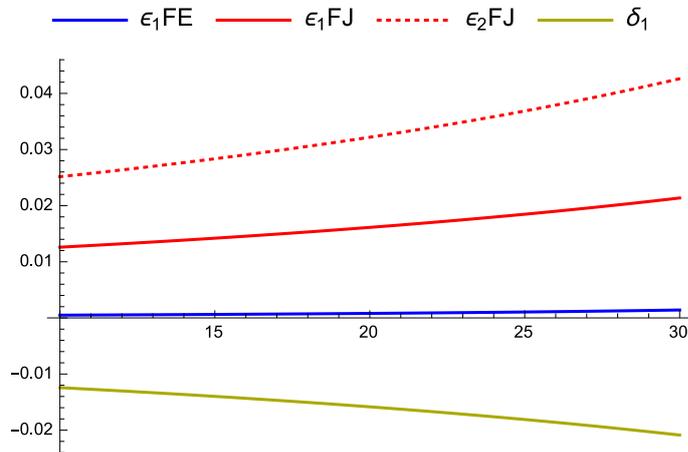


Figura 4.4: Pendenze dei parametri di slow roll nel caso del potenziale LG. Si nota la grande distanza di  $\epsilon_1$  tra il frame di Jordan e il frame di Einstein.

livello di precisione paragonabile e anche superiore a quello del secondo ordine nel frame di Jordan.

Nel caso del potenziale CW, invece, la distanza tra i due valori di  $\epsilon_1$  non è altrettanto marcata, lasciando intendere che l'accuratezza delle formule al secondo ordine nel frame di Jordan può essere migliore dell'accuratezza delle formule al primo ordine nel frame di Einstein.

Riassumendo i risultati è possibile dire che:

- LG:  $n_t^{(e)}$  viene approssimato meglio nel frame di Einstein.  $n_t^{(JF,2)}$  rappresenta una approssimazione peggiore rispetto a  $n_t^{(EF)}$ .
- CW: in molti casi  $n_t^{(e)}$  viene approssimato meglio nel frame di Jordan tramite la formula al secondo ordine. In alcuni casi particolari il frame di Einstein approssima meglio di quello di Jordan.
- ST:  $n_t^{(e)}$  viene approssimato meglio nel frame di Einstein.  $n_t^{(JF,2)}$  rappresenta una approssimazione peggiore rispetto a  $n_t^{(JF)}$ .

Per quanto detto nei capitoli precedenti si può concludere che per quasi tutti i potenziali le formule del frame di Einstein sono nettamente più accurate delle corrispondenti del frame di Jordan. Una maggiore attenzione andrà posta sul potenziale CW, per il quale bisognerà indagare con maggiore attenzione in quali casi sia favorito un frame rispetto all'altro. Sempre in merito al potenziale CW sarà interessante capire se migliorando l'approssimazione di matching adottata per estrarre le formule  $n_t^{(JF,2)}$  si migliora sensibilmente l'accuratezza dell'approssimazione.

Per finire riportiamo le espressioni analitiche di  $r$  per i tre potenziali adottando, per ciascun potenziale, l'espressione più accurata:

$$r_{LG} \simeq \frac{1+6\gamma}{\gamma} \frac{2}{N_*^2}, \quad r_{CW} \simeq \frac{4}{N_*} \left( 1 - \sqrt{\frac{8\gamma}{N_*(1+6\gamma)}} \right), \quad r_{ST} \simeq \frac{12}{N_*^2}. \quad (4.6)$$

## Appendice A

# Funzioni di Bessel e di Neumann

Le funzioni di Bessel sono le soluzioni delle equazioni armoniche cilindriche:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0; \quad (\text{A.1})$$

dove  $\alpha$  è una costante qualsiasi.

Le soluzioni a queste equazioni sono le soluzioni di Bessel:

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n! \Gamma(\nu + n + 1)}, \quad (\text{A.2})$$

le quali presentano il problema di una ridondanza nell'indice  $\alpha$  che può essere sia positivo che negativo.

Per ovviare a questo problema vengono introdotte le funzioni di Neumann:

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}, \quad (\text{A.3})$$

che andrebbero sostituite ad una delle due funzioni ridondanti di Bessel.

La combinazione della funzione di Bessel e della funzione di Neumann che viene sostituita è detta funzione di Hankel:

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x), \quad (\text{A.4})$$

la funzione di Hankel  $H_\alpha^{(2)}(x)$  è semplicemente la complessa coniugata.



## Appendice B

# Derivazione del potenziale di Starobinsky

Si descrive ora brevemente la derivazione del potenziale di Starobinsky a partire dalla teoria  $f(R)$ . Tale teoria prevede che l'azione di Einstein-Hilbert possa essere generalizzata con l'aggiunta di un termine quadratico in  $R$ , diventando

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left( M_p^2 R + \frac{R^2}{6M^2} \right), \quad (\text{B.1})$$

e rappresentata in forma linearizzata

$$S_l = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left( M_p^2 R + \frac{2R}{M} \psi - 6\psi^2 \right). \quad (\text{B.2})$$

Imponendo la trasformazione di frame data da

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij} \left( 1 + 2 \frac{\psi}{MM_p^2} \right)^{-1} = g_{ij} \Omega^{-2} \quad (\text{B.3})$$

L'azione (B.2) diventa:

$$\begin{aligned} S_l &= \frac{1}{2} \int d^4\tilde{x} \sqrt{-\tilde{g}} \left( M_p^2 \tilde{R} + \frac{2}{M} \tilde{R} \psi - 6\psi^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} M_p^2 \left( R - 6 \frac{\partial_a \Omega \partial_b \Omega}{\Omega^2} - \frac{6}{M_p^2} \psi^2 \Omega^4 \right). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Definendo  $\frac{\phi}{\phi_0} = \ln \Omega$ , e applicando la (B.3) si ottiene

$$\psi = \frac{MM_p^2}{2} \left( e^{-2\phi/\phi_0} - 1 \right), \quad (\text{B.5})$$

e quindi l'azione si trasforma in

$$S_l = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left( M_p^2 R - 6M_p^2 g^{ab} \frac{\partial_a \phi \partial_b \phi}{\phi_0^2} - 6e^{-4\phi/\phi_0} \frac{M^2 M_p^4}{4} \left( e^{2\phi/\phi_0} - 1 \right)^2 \right); \quad (\text{B.6})$$

imponendo il valore  $\phi_0 = \sqrt{6}M_p$ , infine

$$S_l = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left( M_p^2 R - g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi - \frac{3}{2} M^2 M_p^4 \left( 1 - \exp \left[ -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_p} \right] \right)^2 \right). \quad (\text{B.7})$$

L'azione sopra riportata vede come termine di potenziale il potenziale di Starobinsky.

# Elenco delle figure

1.1	Diagrammi di Hubble: nell'asse x la distanza tra gli oggetti astronomici osservati e il punto di osservazione; nell'asse y la velocità di recessione di tali oggetti. Nel grafico a sinistra le misurazioni originali proposte da Hubble, il grafico a destra mostra misurazioni più recenti [5]. . . . .	13
1.2	L'orizzonte $H^{-1}$ al tempo della ricombinazione (tra le due frecce porpora) è molto minore della scala alla quale osserviamo le disomogeneità. L'immagine è del satellite Planck [8], le differenze di colore rappresentano variazioni nella temperatura dell'ordine di $10^{-5}$ attorno alla temperatura media di $T = 2.73$ K [9], il colore rosso indica una temperatura più alta, il colore blu una temperatura più bassa. . . . .	14
1.3	Correlazioni in temperatura e previsioni teoriche - Planck 2015. . . . .	15
1.4	<i>Dati di Planck - confronto con diversi modelli di inflazione</i> . . . . .	28
2.1	Nel grafico sono rappresentati i tre potenziali nell'intervallo tra lo zero e 2. Il potenziale ST presenta l'andamento crescere più veloce e il massimo relativo più grande, LG e CW sono simili: LG cresce più lentamente lontano dal minimo, ma ha un massimo relativo più alto. Nel grafico sono stati impostati i valori di: $\mu = \sigma_0 = \gamma = M = 1$ . . . . .	40
2.2	Nel grafico è rappresentata la funzione $n_V$ per i tre potenziali in esame. Si nota come lontano dal minimo LG e ST abbiano un andamento pressochè identico, mentre CW presenta un andamento leggermente più rapido. Anche in questo grafico le costanti sono state impostate tutte unitarie. . . . .	41
2.3	I valori degli osservabili $n_s$ e $r$ , per il potenziale LG. . . . .	42
2.4	I valori degli osservabili $n_s$ e $r$ , per il potenziale CW. . . . .	43
3.1	In questo grafico sono rappresentate le pendenze degli indici spettrali per il potenziale LG, i valori dei parametri sono: $\gamma = 5$ , e $\mu = 1$ . I valori delle pendenze delle rette sono riportati in (3.11). . . . .	61
3.2	Pendenze dei parametri di slow roll per LG con i valori $\gamma = 5$ , $\mu = 1$ , $\sigma(0) = 8$ . $\epsilon_1$ calcolato nel frame di Einstein risulta essere minore di circa un ordine di grandezza. . . . .	61

3.3	In questo grafico sono rappresentate le pendenze degli indici spettrali per il potenziale LG, i valori dei parametri sono: $\gamma = 50$ , $\mu = 0.5$ . I valori delle pendenze delle rette sono riportati in (3.11). . . . .	62
3.4	Pendenze dei parametri di slow roll per LG, i parametri valgono $\gamma = 50$ , $\mu = 0.5$ , $\sigma(0) = 7$ . . . . .	62
3.5	In questo grafico sono rappresentate le pendenze degli indici spettrali per il potenziale CW, i valori dei parametri sono: $\gamma = 20$ , $\mu = 1$ , $\sigma(0) = 40$ . I valori delle pendenze delle rette sono riportati in tabella (3.13). . . . .	63
3.6	Grafico dei parametri di slow roll per CW, i parametri valgono $\gamma = 20$ , $\mu = 1$ , $\sigma(0) = 40$ . . . . .	63
3.7	In questo grafico sono rappresentate le pendenze degli indici spettrali per il potenziale CW, i valori dei parametri sono: $\gamma = 40$ , $\mu = 0.4$ , $\sigma(0) = 50$ . I valori delle pendenze delle rette sono riportati in (3.13). . . . .	64
3.8	Grafico dei parametri di slow roll per CW, i parametri valgono $\gamma = 40$ , $\mu = 0.4$ , $\sigma(0) = 50$ . . . . .	64
3.9	In questo grafico sono rappresentate le pendenze degli indici spettrali per il potenziale ST, i valori dei parametri sono: $\gamma = 1$ , $\mu = 5$ , $\sigma(0) = 5$ . I valori delle pendenze delle rette sono riportati in (3.15). . . . .	65
3.10	Grafico dei parametri di slow roll per ST, i parametri valgono: $\gamma = 1$ , $\mu = 5$ , $\sigma(0) = 5$ . $\epsilon_1^{(JF)}$ risulta essere almeno un ordine di grandezza maggiore rispetto a $\epsilon_1^{(EF)}$ . . . . .	65
3.11	In questo grafico sono rappresentate le pendenze degli indici spettrali per il potenziale ST, i valori dei parametri sono: $\gamma = 1$ , $\mu = 5$ , $\sigma(0) = 7$ . I valori delle pendenze delle rette sono riportati in (3.15). . . . .	66
3.12	Grafico dei parametri di slow roll per ST, i parametri valgono $\gamma = 1$ , $\mu = 5$ , $\sigma(0) = 7$ . Anche in questo caso $\epsilon_1^{(JF)}$ risulta essere almeno un ordine di grandezza maggiore rispetto a $\epsilon_1^{(EF)}$ . . . . .	66
4.1	Grafico rappresentativo del potenziale LG, con il frame di Einstein che approssima meglio del frame di Jordan i risultati corretti. . . . .	70
4.2	Grafico rappresentativo del potenziale CW, con il frame di Einstein che approssima meglio del frame di Jordan al primo ordine, i risultati corretti. Al secondo ordine il frame di Jordan approssima meglio di quello di Einstein. . . . .	70
4.3	Grafico rappresentativo del potenziale ST, con il frame di Einstein che approssima meglio del frame di Jordan i risultati corretti. . . . .	71
4.4	Pendenze dei parametri di slow roll nel caso del potenziale LG. Si nota la grande distanza di $\epsilon_1$ tra il frame di Jordan e il frame di Einstein. . . . .	71

# Bibliografia

- [1] Zeldovich, Y.B., Starobinsky, A.A.: “Quantum creation of a universe in a nontrivial topology”. *Sov. Astron. Lett.* 10, 135 (1984)
- [2] D. Baumann: “The physics of inflation - A course for graduate students in particle physics and cosmology”, Dec (2011).
- [3] S. M. Carroll: “Lecture Notes on General Relativity”, Institute for Theoretical Physics, University of California, 3 Dec (1997).
- [4] S. Capozziello, V. Faraoni: “Beyond Einstein gravity - a survey of gravitational theories for cosmology and astrophysics”, Springer Science (2011).
- [5] M. Scalosi: “Inflation, Universality and Attractors”, 4 lug (2016).
- [6] A. Riotto: “Inflation and the Theory of Cosmological Perturbations”, DFPD-TH/02/22 (2002).
- [7] K.A. Olive, Particle Data Group: “Review of particle physics”, *Chinese Physics C* 38 (2014), no. 9, 090001.
- [8] P.A.R. Ade et al.: “Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results”, *Astron.Astrophys.* 571 (2014), A1.
- [9] D. J. Fixsen, “The temperature of the cosmic microwave background”, *The Astrophysical Journal* 707 (2009), 916920.
- [10] L. Senatore: “Lectures on Inflation”, Stanford Institute for Theoretical Physics, 2 Sep (2016).
- [11] J. Lidsey, A. Liddle: “Reconstructing the inflaton potential an overview”, *Reviews of Modern Physics*, Vol. 69, No. 2, April (1997).
- [12] J. Mielczarek: “Inflationary power spectra with quantum holonomy corrections”, 10.1088/1475-7516/2014/03/048, 6 Nov (2013).
- [13] L. F. Abbott, E. Farhi and M. B. Wise, *Phys. Lett. B* 117, 29 (1982).
- [14] A. D. Dolgov, *Phys. Rept.* 222, 309 (1992).

- [15] A. Cerioni, F. Finelli, A. Tronconi: “Inflation and Reheating in Spontaneously Generated Gravity”, *Phys.Rev.D*81:123505 (2010).
- [16] J. Amoròs, J. de Haro: “Discrepancies between observational data and theoretical forecast in single field slow roll inflation”, Departament de Matemàtica Aplicada I, Universitat Politècnica de Catalunya, 9th Nov (2015).
- [17] V. Mukhanov, S. Winitzki: “Introduction to quantum effects in gravity”, Cambridge University press, April (2007).
- [18] A. Y. Kamenshchik, A. Tronconi, G. Venturi: “Quantum Cosmology and the Evolution of Inflationary Spectra”, May 20, (2016).
- [19] D. Gregori, M. Cicoli: “Inflazione cosmica e onde gravitazionali primordiali”, Sessione II Anno Accademico 2013/2014.
- [20] V.F. Mukhanov: “Quantum theory of gauge invariant cosmological perturbations”, 13 gen (1988).
- [21] Planck Collaboration: “Planck 2015 results. XX. Constraints on inflation”, 23 Mar (2015).
- [22] D. Burns, S. Karamitsos, A. Pilaftsis: “Frame-covariant formulation of inflation in scalar-curvature theories”, April 25, (2016).
- [23] S. Dodelson, W. H. Kinney and E. W. Kolb, *Phys. Rev. D* 56 3207 (1997).
- [24] A. Kamenshchik, E. Pozdeeva, A. Tronconi: “Integrable cosmological models with non-minimally coupled scalar fields”, *Class. Quantum Grav.* 31 (2014).
- [25] J. Hwang: “Quantum fluctuations of cosmological perturbations in generalized gravity”, *Class.Quant.Grav.*14:3327-3336,1997
- [26] J. Mielczarek: “Inflationary power spectra with quantum holonomy corrections”, 10.1088/1475-7516/2014/03/048, Wed, 6 Nov (2013).
- [27] E. Komatsu, J. Dunkley: “Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation”, 10.1088/0067-0049/180/2/330, 17 Oct (2008).
- [28] P.P. Coles, F. Lucchin: “Cosmology: The origin and evolution of cosmic structure”, Wiley, (2003).
- [29] A.R. Liddle, D.H. Lyth, “Cosmological inflation and large-scale structure”, Cambridge University Press, (2000).
- [30] V. Mukhanov: “Physical foundations of cosmology”, Cambridge University press, April (2005).

- [31] E.D. Stewart, D. H. Lyth: “A more accurate analytic calculation of the spectrum of cosmological perturbations produced during inflation”, *Phys.Lett.B*302:171-175 (1993).
- [32] J. Mather et al., “*Astrophys. J.*”, in press (1993).
- [33] Kamenshchik A Yu, Tronconi A, Venturi G and Vernov S Yu 2013: “Reconstruction of Scalar Potentials in Modified Gravity Models” *Phys. Rev. D* 87 063503 (arXiv:1211.6272[gr-qc])
- [34] D. H. Lyth, A. Riotto: “Particle Physics Models of Inflation and the Cosmological Density Perturbation”, Tue, 16 Mar (1999), arXiv:hep-ph/9807278.
- [35] A. Linde: “Particle Physics and Inflationary Cosmology”, Sat, 26 Mar (2005), arXiv:hep-th/0503203.