

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

# Informazione Quantistica e Decoerenza: il caso dei qubit in centri NV

**Relatore:**

**Dott. Cristian Degli Esposti  
Boschi**

**Presentata da:**

**Alessandro Conigli**

Anno Accademico 2015/2016



*Alla mia famiglia con grande affetto,  
agli amici che mi hanno sempre sostenuto*



## Sommario

Lo scopo di questa tesi triennale è quello di fornire un'introduzione ad alcuni concetti della computazione quantistica e comprenderne i fenomeni fisici che ne stanno alla base, dall'idea astratta di qubit fino ai più recenti studi sui centri NV, passando attraverso appropriati strumenti matematici.

Recentemente si è realizzato che l'uso delle proprietà della meccanica quantistica può migliorare drasticamente le velocità di calcolo. È quindi cresciuto l'interesse nel campo dell'informazione quantistica. Tra le principali difficoltà vi è il fenomeno della decoerenza, responsabile della distruzione degli stati di sovrapposizione quanto-meccanici.

Studiamo la dinamica dei sistemi quantistici aperti, soffermandoci sugli aspetti della loro evoluzione rilevanti nel passaggio dal mondo quantico al classico. A tal fine, e per una migliore comprensione della decoerenza, ricaviamo l'equazione master cui deve obbedire la matrice di densità nel noto modello di Jaynes-Cummings per l'interazione ambiente-sistema.

In particolare, descriviamo come un ristretto set di manipolazioni sul sistema ci permetta di proteggerlo dalla decoerenza e come tale tecnica, detta disaccoppiamento dinamico, si rivela un utile strumento per la realizzazione di gates quantistici nel caso dei qubit implementati sfruttando i cosiddetti centri NV del diamante.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>1 Aspetti globali</b>	<b>5</b>
1.1 Verso i computer quantistici . . . . .	5
1.2 Problemi trattabili . . . . .	6
1.2.1 La classe P . . . . .	7
1.2.2 La classe NP . . . . .	7
1.3 Qubits . . . . .	8
1.3.1 Sistemi di qubits . . . . .	11
1.4 Computazione Quantistica . . . . .	12
1.4.1 Criteri di Di Vincenzo e Decoerenza . . . . .	13
1.4.2 Rappresentazione dell'informazione quantistica . . . . .	14
1.4.3 Trasformazioni Unitarie . . . . .	16
1.4.4 Preparazione degli inputs e lettura del risultato . . . . .	17
<b>2 Matrice di densità</b>	<b>20</b>
2.1 Stati quanto-meccanici <i>puri e misti</i> . . . . .	20
2.2 La Matrice di Densità . . . . .	22
2.3 Equazione master quantistica . . . . .	24
2.3.1 Sistemi quantistici aperti e chiusi . . . . .	25
2.3.2 Dinamica dei sistemi aperti . . . . .	27
2.3.3 Processo quantistico di Markov . . . . .	29
2.3.4 Equazione master quantistica per un processo di Markov . . . . .	32
<b>3 Decoerenza</b>	<b>34</b>
3.1 Ambiente, misura e sistema . . . . .	35
3.2 Decoerenza di un singolo qubit . . . . .	37
3.3 Il modello di Jaynes-Cummings . . . . .	38
3.3.1 Cavità di Fabry-Perot . . . . .	39
3.3.2 Atomo a due livelli . . . . .	41
3.3.3 Hamiltoniana del Modello . . . . .	41

3.4	Dinamica aperta di N qubits in una cavità ottica . . . . .	42
3.4.1	Hamiltoniana di Interazione . . . . .	43
3.4.2	Equazione master per il sistema . . . . .	43
3.5	Come combattere la decoerenza:	
	Quantum Error Correcting Codes . . . . .	44
3.5.1	Proteggere un bit classico . . . . .	45
3.5.2	Proteggere un qubit . . . . .	45
<b>4</b>	<b>La computazione quantistica al giorno d'oggi</b>	<b>49</b>
4.1	Centri NV . . . . .	50
4.1.1	Proprietà generali . . . . .	51
4.2	Disaccoppiamento Dinamico . . . . .	52
4.3	Esempio di quantum gates protetti . . . . .	53
	<b>Conclusioni</b>	<b>57</b>
	<b>A Proprietà dell'operatore di densità</b>	<b>58</b>
	<b>B Equazione di Schrödinger: considerazioni generali</b>	<b>61</b>
	<b>C Forma generale del generatore <math>\mathcal{L}</math></b>	<b>63</b>
	<b>D Calcolo dell'equazione master per un sistema di N spin interagente con l'ambiente</b>	<b>66</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>68</b>

# Introduzione

Per molti anni, l'aumento delle prestazioni dei computer è andato di pari passo con la miniaturizzazione dei componenti elettronici, fenomeno codificato empiricamente dalla legge di Moore: la densità dei transistor di un microchip e la relativa velocità di calcolo raddoppiano ogni diciotto mesi. Questo processo però non può procedere all'infinito, poiché la continua riduzione dimensionale dei componenti tira in ballo la fisica del mondo microscopico, regolata da leggi ben più complesse.

Per merito di una felice intuizione dei teorici dell'informazione, le leggi della meccanica quantistica, da limite che erano, si sono rivelate un'opportunità per la realizzazione di un nuovo modello di macchina capace di portare notevoli miglioramenti: il computer quantistico.

I computer quantistici dalla reale praticità non esistono ancora<sup>1</sup>, potrebbe volerci qualche decina di anni prima che un dispositivo del genere venga realizzato. Alcune opinioni in merito dubitano che un calcolatore quantistico su larga scala sia in principio realizzabile, ma noi siamo ottimisti, e il nostro sogno è che ogni bruco possa un giorno diventar farfalla.

Dopo questa generica introduzione dell'argomento, vediamo più in dettaglio i concetti toccati nel corso del lavoro di tesi.

Nel primo capitolo, dopo un breve accenno storico, impostiamo le basi del nostro percorso introducendo il concetto di qubit, colonna portante dell'informazione quantistica. Si prosegue poi con una revisione dei postulati della meccanica quantistica esplorando le caratteristiche dei qubits - peculiare l'esistenza di stati di sovrapposizione - fino ad individuare dei requisiti di base per un processo di computazione puramente quantistico: i criteri di Di Vincenzo.

Spetta al secondo capitolo il compito di fornire le adeguate nozioni matematiche adatte ad un rigoroso proseguo del lavoro. Introduciamo qui la matrice di densità, strumento ideale per la descrizione di stati quanto-meccanici puri e misti, elencandone le più importanti caratteristiche.

Dopo una visione generale delle proprietà dei sistemi aperti descriviamo, in analogia con l'equazione classica di Chapman-Kolmogorov e sotto l'approssimazione di Markov,

---

<sup>1</sup>In realtà nel 2011 è stato lanciato sul mercato il *D-wave two*, prototipo a 512 qubits, ma un effettivo miglioramento delle prestazioni per algoritmi convenzionali non è ancora stato confermato



l'equazione master - espressa in forma di Lindblad - cui deve obbedire la matrice di densità per un sistema aperto, soffermandoci particolarmente sul significato fisico di questo modello matematico.

Nel terzo capitolo spostiamo l'attenzione verso uno dei più affascinanti e controversi argomenti della meccanica quantistica: la decoerenza. Questo fenomeno, che trova spazio nello studio dell'interazione ambiente-sistema, è il principale responsabile della realtà classica con cui ogni giorno abbiamo a che fare: è alla decoerenza che si deve il collasso degli stati di sovrapposizione; è nella decoerenza che identifichiamo il peggior nemico della computazione quantistica.

Ci si sofferma poi sulla delicata dinamica di interazione ambiente-sistema andando a sviluppare il modello paradigmatico di Jaynes-Cummings e l'associata equazione di Lindblad per la matrice di densità del complesso.

Infine l'ultima sezione è dedicata a particolari algoritmi di protezione del codice dal processo di decoerenza, che prendono il nome di *quantum error correcting code*.

Il quarto ed ultimo capitolo mira a fornire una panoramica delle più moderne tecniche per la realizzazione di registri quantistici, dando particolare rilievo ai cosiddetti *nitrogen-vacancy center* ed ai risvolti sperimentali cui hanno condotto negli ultimi anni. Una consistente parte del capitolo è dedicata al disaccoppiamento dinamico, un geniale metodo che, con le dovute precauzioni, permette di proteggere da decoerenza gli stati di un qubit tramite l'utilizzo di specifiche Hamiltoniane che sopprimono le interazioni con l'ambiente.

Lo scopo di questo lavoro è fornire una visione di insieme della teoria dell'informazione quantistica, prestando particolare attenzione ai principi fisici che la sorreggono. Come si è intravisto il percorso che seguiamo parte dal relativamente semplice concetto di qubit, per poi procedere, con graduale aumento della difficoltà, verso scenari più impegnativi dal fascino certamente suggestivo. Unendo le conoscenze acquisite nel corso dei primi tre capitoli, siamo infine in grado di studiare i gates con centri NV, che rappresentano le tecniche di realizzazione più all'avanguardia nel campo dell'informazione quantistica. Come ultima cosa, si avvisa il lettore che nel corso del lavoro si è posto  $\hbar = 1$  salvo avviso contrario.

# Capitolo 1

## Aspetti globali

### 1.1 Verso i computer quantistici

Nel corso del XX secolo l'informazione è diventata un elemento predominante nella società moderna, grazie alla sempre più avanzata tecnologia che ha permesso lo sviluppo dei computer.

La storia dei calcolatori moderni nasce con il grande matematico Alan Turing che per primo ha spiegato in dettaglio il concetto astratto di ciò che noi chiamiamo computer programmabile, modello che porta oggi il suo nome. [1]

Le odierne tecnologie, basate sui circuiti integrati, mirano a ridurre le dimensioni delle componenti sino a raggiungere le scale atomiche: in questo contesto la materia non obbedisce più alle leggi della fisica classica, bensì alle più contro-intuitive regole della meccanica quantistica.

Dopo queste prime righe si potrebbe pensare che la tecnologia quantistica sia semplicemente in grado di ridurre le dimensioni ed aumentare la velocità di calcolo, ma la realtà è ben diversa: essa aprirebbe la strada a calcoli completamente nuovi che non hanno un corrispettivo nel mondo classico.

Basti pensare agli algoritmi quantistici di Peter Shor, per la scomposizione in fattori primi di grandi numeri, e di Lov Grover, per effettuare una ricerca in una lista non ordinata di  $N$  elementi, entrambi drasticamente più performanti degli algoritmi sviluppati in computer tradizionali.

Il principale vantaggio del calcolo quantistico nasce nel parallelismo che garantisce, ad un aumento lineare dello spazio fisico richiesto, una crescita polinomiale della potenza di calcolo, contrariamente al caso classico in cui la richiesta di spazio cresce essa stessa esponenzialmente.

Tuttavia la codifica di algoritmi quantistici non è cosa da poco. I più pessimisti potranno pensare che non vi è nulla in più che un computer quantistico possa fare che già

non sia stato scoperto.

Ma a noi piace vederla in un'altra maniera: la difficoltà risiede nella stesura dell'algoritmo, poiché il programmatore si pone di fronte a due problemi abitualmente non riscontrati.

Per prima cosa, la nostra mente è radicata in un mondo classico: se usiamo il nostro intuito come arma per costruire un algoritmo quantistico, allora quello che otterremo continuerà ad essere un'idea classica. Dovremmo spegnere il nostro intuito e basarci unicamente sugli effetti quantistici per ottenere un degno risultato.

Secondariamente, non siamo interessati ad un algoritmo puramente quanto-meccanico, bensì ad un qualcosa che sia *migliore* di ogni altro corrispettivo classico!

Quale classe di problemi può essere risolta efficientemente in un computer quantistico, e come tale classe si rapporta ai problemi risolti con tecnologie classiche? Sicuramente una delle cose più eccitanti della computazione quantistica è la ricerca di una soddisfacente risposta a questa domanda, che al momento si presenta come una delle più grandi sfide per i pionieri di questo strano mondo. [2]

## 1.2 Problemi trattabili

Spostiamo l'attenzione sui problemi, e studiamo la possibilità di trattarli in base alla quantità di risorse necessarie per la soluzione. Considerando i risultati ottenuti nel corso del tempo, possiamo suddividere i problemi in queste categorie:

1. I problemi che ammettono algoritmi efficienti di risoluzione<sup>1</sup>.
2. Problemi che per loro natura non sono risolvibili efficientemente, e dunque intrattabili.
3. Problemi per i quali non si è a conoscenza di algoritmi efficienti, tuttavia nessuno ha finora provato che tali algoritmi non esistono.

Il notevole interesse per queste tematiche ha portato a definire e studiare le cosiddette classi di complessità, ovvero insieme di problemi risolvibili caratterizzati da proprietà comuni - che siano le risorse necessarie o il tipo di macchina che li risolve.[3]

Per entrare più a fondo nell'argomento è giusto spendere del tempo per lo studio più dettagliato di queste classi.

---

<sup>1</sup>Un algoritmo è detto efficiente se il suo tempo di risoluzione è polinomiale rispetto alle dimensioni dell'input.

### 1.2.1 La classe P

Vengono così definiti tutti quei problemi che, nel peggiore dei casi, ammettono un algoritmo risolutivo il cui tempo di calcolo è limitato da un polinomio nelle dimensioni dell'input.

Intuitivamente rappresenta la classe dei problemi trattabili efficientemente: chiaramente è poco realistico definire trattabile un problema risolubile da algoritmi con un tempo dell'ordine di  $n^k$  con  $k$  elevato; tuttavia la maggior parte dei problemi appartenenti a tale classe ammette un algoritmo risolutivo che richiede  $O(n^3)$  passi su un input di dimensione  $n$ .

La controparte naturale della classe appena descritta è data dai problemi che *non* è possibile risolvere in tempo polinomiale. Per quest'ultimi si può provare che ogni algoritmo risolutivo richiede un tempo asintoticamente superiore ad ogni polinomio.

### 1.2.2 La classe NP

Essendo una il complementare dell'altra le due classi sopra discusse dovrebbero contenere tutti i problemi risolubili. In realtà molti quesiti di notevole interesse non trovano spazio in nessuna delle due casistiche. Per questi problemi non sono stati trovati algoritmi di soluzione efficienti ma neppure la loro non esistenza è provata.

La classe più rappresentativa di questo folto gruppo è quella dei problemi NP-completi, per la cui comprensione è importante conoscere il concetto di macchine non deterministiche. Questi problemi sono computazionalmente equivalenti tra loro, nel senso che un algoritmo polinomiale per uno solo di essi implicherebbe l'esistenza di un analogo algoritmo per tutti gli altri. L'assenza di tale procedura, nonostante gli sforzi compiuti, ha portato all'ipotesi che i problemi NP-completi non siano risolubili<sup>2</sup> in tempo polinomiale e dunque non siano contenuti nelle classi  $P$ . [4]

### Macchine non deterministiche

Le classi sinora esaminate utilizzano modelli di calcolo esclusivamente deterministici, cioè la transizione da un passo della computazione al successivo è sempre univocamente determinata. Al contrario una macchina non deterministica è un modello di calcolo che può compiere delle scelte durante la computazione. Come conseguenza il suo funzionamento su un dato input non è più determinato da un'unica computazione, ma da un insieme di computazioni distinte, una per ogni possibile sequenza di scelte compiute. Una volta assimilato questo concetto vediamo come definire la classe  $NP$ :

**Definizione 1.1.** Un problema  $A$  appartiene alla classe  $NP$  se, data un'istanza  $a$  affermativa di tale problema, è possibile verificare tramite un algoritmo efficiente che tale istanza sia vera.

---

<sup>2</sup>Finora nessuno ha dimostrato un tale risultato.

Dunque l'appartenenza alla classe  $NP$  è meno stringente rispetto all'appartenenza a  $P$ : affinché un problema sia  $NP$ , non è necessario risolverlo entro un tempo polinomiale, bensì verificare entro questo tempo che una data istanza sia affermativa.

### Problemi NP-completi

Come anticipato, un'importante classe è quella dei problemi  $NP$  completi, per la cui definizione dobbiamo introdurre prima il concetto di riduzione polinomiale

**Definizione 1.2.** Un problema  $A$  si riduce polinomialmente ad un problema  $B$  se, data un'istanza  $a$  di  $A$ , è possibile costruire in tempo polinomiale un'istanza  $b$  di  $B$  tale che  $a$  è affermativa se e solo se  $b$  è affermativa.

Quindi, possiamo dire che se  $A \rightarrow B$ <sup>3</sup>, il problema  $B$  è *almeno tanto difficile* quanto lo è  $A$ . A questo punto, possiamo definire la  $NP$ -completezza:

**Definizione 1.3.** Un problema  $A$  si dice  $NP$ -completo se:

- $A \in NP$
- Preso un qualunque problema  $B \in NP$ ,  $B$  si riduce polinomialmente ad  $A$ .

Dunque, se un problema è  $NP$ -completo, significa che esso è almeno altrettanto difficile quanto un *arbitrario* altro problema in  $NP$  - almeno nel senso che qui diamo alla parola “difficoltà”, misurata in termini di complessità computazionale. Si tratta quindi dei più difficili problemi  $NP$  e, come già anticipato, se trovassimo un algoritmo polinomiale per uno qualsiasi di questi, avremmo trovato un algoritmo polinomiale per *tutti* i problemi  $NP$ . La stragrande maggioranza degli addetti al settore ritiene che un tale algoritmo per i problemi  $NP$ -completi non possa esistere. Questa congettura è ormai così affermata che stabilire la  $NP$ -completezza di un problema equivale a considerarlo come intrattabile, visto l'alto indice di difficoltà intrinseco.

## 1.3 Qubits

Alla base della computazione e della teoria dell'informazione classica troviamo quella pietra miliare che è il *bit*. Il regno dell'informatica quantistica è costruito su di un concetto analogo, il *quantum bit*, o *qubit* per comodità. In questa sezione andiamo ad esplorarne le proprietà, costruendo un confronto con il bit classico.

In primis introduciamo i qubits come entità matematiche caratterizzate da specifiche proprietà; un approccio del genere ha il vantaggio di poter costruire, partendo da oggetti astratti, una teoria del tutto generale e indipendente da uno specifico sistema per la sua

---

<sup>3</sup>Leggiamo questa notazione come: “ $A$  si riduce in  $B$ ”.

realizzazione.

E dunque, cos'è un qubit? Si tratta della più piccola porzione in cui qualsiasi informazione codificata può essere scomposta: così come il classico bit ha uno stato - che sia 0 o 1 - allo stesso modo il qubit ne possiede uno.

Tali stati possono essere  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , dove con la notazione " $| \rangle$ " si fa riferimento alla *notazione di Dirac*, ampiamente usata in meccanica quantistica.

Non si possono di certo omettere i principi fondamentali che ne governano le regole perchè, come vedremo, ci accompagneranno lungo tutto il percorso [5]:

- Il primo postulato definisce l'ambito in cui si colloca la meccanica quantistica:  
*Ad ogni sistema quanto-meccanico isolato è associato uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  sul campo complesso. In un dato istante il sistema è descritto da un vettore unitario appartenente a tale spazio*

- Il secondo postulato stabilisce l'evoluzione temporale del sistema:  
*Il variare in funzione del tempo di un sistema quanto-meccanico è descritto da un operatore unitario  $U$ . Al tempo  $t$  lo stato  $|\psi(t)\rangle$  del sistema è legato allo stato iniziale dalla relazione*

$$|\psi(t)\rangle = U|\psi(0)\rangle \quad (1.1)$$

- Il terzo ci fornisce la probabilità di misurare un osservabile:  
*Le misure quantistiche sono descritte da una collezione  $\{M_m\}$  di operatori di misura agenti sullo spazio degli stati del sistema in esame<sup>4</sup>. Sia  $|\psi\rangle$  lo stato del sistema immediatamente prima della misura; allora la probabilità di uscita del risultato  $m$  è data da*

$$p(m) = \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle \quad (1.2)$$

e lo stato del sistema dopo la misura è

$$|\psi\rangle = \frac{M_m |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle}} \quad (1.3)$$

*L'insieme dei valori possibili per una grandezza è dettato dallo spettro dell'operatore ad essa associato.*

Caratteristica peculiare della meccanica quantistica è dunque quella di fornire solamente predizioni statistiche piuttosto che deterministiche, come avviene nel regime classico.

Le proprietà stesse dei qubit discendono da questo ramo della fisica, ed è proprio in questo fatto che dobbiamo cercare le potenzialità del nostro nuovo oggetto: contrariamente ai bit, che hanno uno stato ben definito, il qubit può esistere in una combinazione lineare degli stati, chiamata *sovrapposizione*:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (1.4)$$

---

<sup>4</sup>L'indice  $m$  si riferisce ai possibili valori di uscita nell'esperimento.

dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono le ampiezze di probabilità ed in generale appartengono al campo complesso.

Più formalmente il qubit è un vettore unitario in uno spazio complesso duo-dimensionale: lo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ . In tale spazio gli stati  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  formano una base ortonormale detta *base computazionale*.

Tipicamente si tratta di un sistema microscopico, quale sia un atomo, lo spin nucleare o un fotone polarizzato, in cui vengono identificati due differenti livelli energetici relativi ai due stati della base computazionale.

Quando misuriamo lo stato di un qubit in questa base la probabilità dell'uscita  $|0\rangle$  è data da  $|\alpha|^2$  mentre per lo stato  $|1\rangle$  è  $|\beta|^2$ . Dato che il modulo quadro delle ampiezze indica la probabilità di uscita di un risultato, la relazione che lega  $\alpha$  e  $\beta$  è banalmente:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (1.5)$$

Condizione che geometricamente possiamo interpretare come normalizzazione ad uno del vettore di stato del qubit.

L'abilità del qubit di esistere come sovrapposizione corre contro il senso comune della comprensione del mondo attorno a noi: può esistere in un continuo di stati tra  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  fino a che non operiamo una misura<sup>5</sup> del suo stato.[6]

## La sfera di Bloch

Tenendo a mente la condizione di normalizzazione, possiamo scrivere un generico stato di un qubit nella forma

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle \quad (1.6)$$

Le coordinate  $\theta$  e  $\varphi$  identificano un punto di una sfera unitaria tridimensionale: la *sfera di Bloch*. Questa costruzione geometrica ci fornisce un comodo diagramma per rappresentare gli stati di un qubit. [7]

Visti in tale sfera, i bit classici possono trovarsi solo ai poli con il resto della superficie della sfera inaccessibile, mentre un qubit puro può occupare un qualsiasi punto della sfera.

Ed ora la domanda sorge spontanea: quanta informazione è in grado di rappresentare un singolo qubit? In principio, ci sono infiniti punti della sfera, così che paradossalmente possa immagazzinare l'intera Divina Commedia nell'espansione infinita di  $\theta$ .

Ovviamente queste considerazioni sono inconcludenti a causa del comportamento del qubit se misurato: l'interazione con il sistema per eseguire la misura cambia lo stato stesso del qubit, facendo collassare lo stato coerente di  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  allo stato correlato

---

<sup>5</sup>È importante tenere a mente che la misura di un qubit dà come risultato solamente  $|0\rangle$  o  $|1\rangle$  - probabilisticamente.

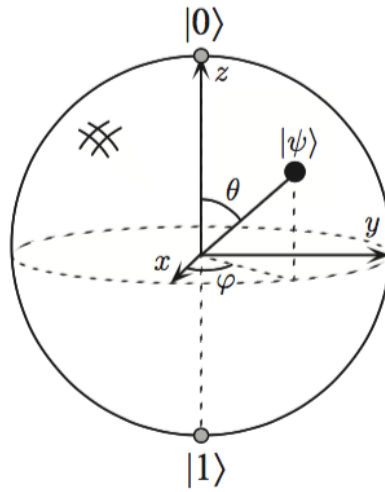


Figura 1.1: Rappresentazione grafica della sferia di Bloch [2]

al risultato della misura. Il perché di questo collasso nessuno lo sa: è una peculiarità intrinseca della meccanica quantistica, ma ciò che a noi interessa è il poter ottenere un singolo bit di informazione da una misura dello stato di un qubit.

### 1.3.1 Sistemi di qubits

*Hilbert space is a big place*  
Carlton Caves

Supponiamo di avere  $n$  oggetti fisici ognuno avente  $k$  stati distinguibili. Se è possibile accedere singolarmente ad ogni oggetto e prepararlo in uno qualunque dei  $k$  stati allora abbiamo a disposizione  $N = k^n$  differenti combinazioni possibili per il nostro sistema. Sia ora  $k = 2$  e identifichiamo i nostri  $n$  oggetti con sistemi a due stati rappresentanti singoli qubit<sup>6</sup>. Ogni collezione di  $n$  qubits può essere preparata in  $N = 2^n$  stati, con l'opportunità di memorizzare  $N$  stringhe, numeri o che dir si voglia.

Una collezione di  $n$  qubits prende il nome di *quantum register* di dimensione  $n$ . Lo stato totale del sistema vive in uno spazio di Hilbert dato dal prodotto tensoriale dei singoli spazi di ogni qubit, e in notazione compatta possiamo scrivere un generico stato come:

$$|a\rangle = |a_{n-1}\rangle \otimes |a_{n-2}\rangle \otimes \dots \otimes |a_1\rangle \otimes |a_0\rangle \quad (1.7)$$

<sup>6</sup>Indichiamo i due stati di un bit fisico con 0 e 1.



dove gli  $a_i \in 0, 1$  e rappresentano un registro quantico preparato con un determinato valore. Di tali stati ce ne sono  $2^n$  e costituiscono un set capace di rappresentare numeri da 0 a  $2^n - 1$ , formando una conveniente base computazionale.

Per  $n = 500$  tale numero è così elevato da superare la stima degli atomi presenti nell'Universo. Provare ad immagazzinare un tale numero di dati sarebbe impossibile in un computer tradizionale: quello di Hilbert è davvero un grande spazio!

In conclusione, da questo enorme potenziale computazionale potremmo trarre un grande vantaggio, ma la domanda resta: come conciliare la meccanica quantistica con la computazione?

## 1.4 Computazione Quantistica

Come ampiamente discusso, il tassello fondamentale della teoria da cui partire sono i qubits e come questi possano essere realizzati fisicamente. Ma per costruire un computer quantistico non solo dobbiamo fornire un'implementazione fisica consistente dei qubits, bensì ideare un sistema in cui si può agire su di essi trasformandoli liberamente a seconda delle necessità, ed in grado di essere preparato con specifiche condizioni iniziali.

La vera sfida nella preparazione dell'apparato sperimentale è riuscire ad incontrare appieno questi requisiti fondamentali, spesso soddisfatti solo parzialmente.

Illustriamo con un esempio che secondo Richard Feynman *“porta dentro di sé il cuore della meccanica quantistica”* come il principio di sovrapposizione si manifesta in un tipico esperimento di diffrazione. Un elettrone - o una qualsiasi altra particella microscopica - si muove verso una barriera con due fenditure, al di là della quale vi è un rivelatore sensibile alla presenza della particella.

Lanciando ripetutamente gli elettroni verso lo schermo si viene a creare una struttura periodica equivalente alle figure di interferenza di un qualsiasi fenomeno ondulatorio.

A detta della meccanica quantistica anche le particelle corpuscolari presentano comportamenti ondulatori, ed in più un singolo elettrone, vivendo in uno stato di sovrapposizione, percorre simultaneamente i due cammini. [8]

Tale sovrapposizione, tuttavia, può essere compromessa se viene introdotto uno strumento in grado di rivelare in quale delle due fenditure sia passato l'elettrone: in questo caso la coerenza tra i due cammini viene meno, e la funzione d'onda collassa in un singolo stato impedendo il fenomeno dell'interferenza.

Il principio discusso vale per qualsiasi sistema quantistico, in particolare per un qubit: una misura effettuata durante l'evoluzione del sistema ne distrugge gli stati coerenti, ovvero si ha una perdita di informazione dal qubit verso l'esterno. È importante ribadire che per misura non si intende solamente un gesto volontario operato da un osservatore, ma anche una qualsiasi interazione con il mondo esterno che provoca ugualmente la perdita di coerenza. Appena questo accade, viene compromessa l'integrità del calcolo quantistico con la conseguente perdita dell'affidabilità del risultato computazionale.

Le conclusioni a cui giungiamo sembrano essere in conflitto: si vuole che un computer quantistico sia ben isolato così da mantenere solide le proprietà quantistiche, ma allo stesso tempo è richiesta la completa accessibilità ai qubits che lo compongono per poter operare una computazione e leggerne il risultato.

Di conseguenza una realizzazione pratica deve mantenere un delicato equilibrio tra questi due vincoli, al punto che il cuore del discorso non è come costruire un computer quantistico, bensì quanto bene può essere costruito.

### 1.4.1 Criteri di Di Vincenzo e Decoerenza

Un concetto chiave per la scelta dei potenziali candidati alla realizzazione di un computer quantistico è la nozione di rumore quantico, spesso chiamato anche *decoerenza*.

Con questo termine si intende la corruzione della desiderata evoluzione del sistema, ovvero il tempo in cui questo può esistere prima di perdere la coerenza degli stati, e si tratta essenzialmente della memoria quantistica del sistema.

Condizione importantissima per la computazione è dunque che il qubit mantenga la coerenza durante tutto il tempo necessario all'esecuzione di un'operazione logica.

Questo vincolo si può esprimere con la disuguaglianza

$$\tau_Q \gg \tau_{op}$$

dove  $\tau_Q$  è l'intervallo temporale durante il quale si ha coerenza quanto-meccanica degli stati, e  $\tau_{op}$  indica il tempo impiegato per un'operazione logica.

Generalmente per la maggior parte dei sistemi questi due tempi sono tra loro correlati, tanto che il rapporto ci fornisce una stima del numero di operazioni possibili prima che il qubit perda il suo set di condizioni iniziali

$$n_{op} = \frac{\tau_Q}{\tau_{op}}$$

grandezza che può variare notevolmente in un intervallo compreso tra  $10^4 \div 10^{14}$  operazioni a seconda del sistema preso in esame.

#### I Criteri

Tornando in dettaglio ai requisiti base richiesti per la computazione quantistica, accanto alla condizione di coerenza troviamo altri criteri per la scelta di un sistema fisico adatto, elencati da Davide di Vincenzo nel 2000. [9] In sintesi, un possibile hardware per un computer quantistico dovrebbe soddisfare almeno questi quattro criteri:

1. Possibilità di identificare qubit ben definiti ed aumentarli in numero. Questo criterio richiede una solida rappresentazione dell'informazione

2. Capacità di inizializzare lo stato del sistema: bisogna preventivamente porre tutti i qubits in uno stato iniziale e, solo dopo, eseguire un calcolo.
3. Esistenza di una classe universale di porte logiche quantistiche per il controllo preciso dei qubits. Matematicamente è richiesta una famiglia universale di trasformazioni unitarie.
4. Effettuare una misurazione per ottenere il risultato del calcolo eseguito e trasmettere l'informazione quantistica.

Non vi è tuttora un procedimento privilegiato per la realizzazione di qubits, in quanto ciascuno di essi presenta delle incompatibilità con i criteri elencati.

Infatti i sistemi microscopici - quali atomi, spin, fotoni - sono sì facilmente isolabili<sup>7</sup> dall'ambiente esterno, ma difficilmente integrabili in un circuito complesso come richiesto per la realizzazione di un computer.

D'altro canto sistemi quantistici macroscopici, basati su strutture<sup>8</sup> superconduttrici, offrono maggiore compatibilità ed integrazione a discapito però delle tempistiche di coerenza, che subiscono un brusco calo a causa del maggior numero di gradi di libertà associati a componenti allo stato solido ed alle loro interazioni.

### 1.4.2 Rappresentazione dell'informazione quantistica

Si è ormai capito che alla base della computazione quantistica troviamo i quantum bits, sistemi a due stati capaci di contenere l'informazione.

A titolo d'esempio portiamo particelle con spin  $1/2$ , che vivono in uno spazio di Hilbert generato dagli stati  $|\uparrow\rangle$  e  $|\downarrow\rangle$ ; gli stati di spin non possono essere nulla che non sia racchiuso in questo spazio duo-dimensionale, e ciò si avvicina molto ad un qubit ideale se ben isolato.

#### Barriere di potenziale

Costituiscono il prototipo di sistema quanto-meccanico in cui l'evoluzione di una particella confinata in un box unidimensionale di lato  $L$  è descritta dall'equazione di Schrödinger.

Come è noto, l'Hamiltoniana di un tale sistema è data da

$$H(x) = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad (1.8)$$

---

<sup>7</sup>Fatto che riduce il tempo di decoerenza.

<sup>8</sup>Giunzioni di Josephson.

dove la funzione potenziale è del tipo

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 < x < L \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1.9)$$

Si trova che gli autostati dell'energia sono espressi come

$$|\psi_n\rangle = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (1.10)$$

e la loro evoluzione temporale è data da

$$|\psi_n(t)\rangle = e^{-iE_n t} |\psi_n\rangle \quad \text{con} \quad E_n = \frac{n^2 \pi^2 m}{2L^2} \quad (1.11)$$

È noto che questi stati hanno uno spettro energetico discreto. In particolare mettiamoci nelle condizioni in cui poter considerare unicamente i primi due livelli energetici, trascurando gli altri eventuali.

Tradotto matematicamente, definiamo un'arbitraria funzione d'onda di interesse come sovrapposizione tra i due stati

$$|\psi\rangle = a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle \quad (1.12)$$

Il che equivale a scrivere

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i(E_1+E_2)t/2} [ae^{-i\omega t}|\psi_1\rangle + be^{i\omega t}|\psi_2\rangle] \quad (1.13)$$

$$\text{dove} \quad \omega = \frac{E_1 - E_2}{2}$$

è quindi lecito trascurare tutto e tenere in mente solamente i numeri complessi  $a$  e  $b$  che definiscono il qubit come il vettore a due componenti

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Questo sistema a due livelli che abbiamo discusso è il nostro prototipo di qubit! Rimane da chiederci: evolve come un qubit? Per operare delle trasformazioni sul sistema, tenendo a mente le teorie perturbative, accendiamo un potenziale addizionale che va a perturbare l'Hamiltoniana effettiva del sistema.

Simili tecniche, che prevedono la manipolazione della funzione potenziale, permettono di ottenere altre operazioni tra qubit. [2]

Questo esempio ci ha mostrato come una buca di potenziale possa rappresentare un sistema a due livelli, e come tale sistema possa operare trasformazioni sul qubit tramite l'aggiunta di termini perturbativi del potenziale.

Tuttavia la perturbazione introduce effetti di ordine maggiore, per giunta nella realtà le barriere non hanno profondità infinita, così che altri livelli energetici possano interagire con il sistema aumentando la decoerenza.

### 1.4.3 Trasformazioni Unitarie

Un esiguo insieme di porte - *AND, OR, NOT* - può essere usato per arbitrarie operazioni tra bit classici. Questo set di porte viene detto universale per la computazione classica. Allo stesso modo, cerchiamo un risultato simile per il caso quanto-meccanico, affermando che: un insieme di porte è detto universale per la computazione quantistica se qualsiasi trasformazione unitaria<sup>9</sup> può essere approssimata da un circuito quantico contenente solamente quelle porte. [10]

Le leggi del mondo quantistico prevedono sostanzialmente due tipi di trasformazioni per un sistema fisico isolato: il collasso della funzione d'onda, nel caso in cui misuriamo un osservabile, e l'evoluzione unitaria, tipicamente di tipo temporale, dettata dall'equazione di Schrödinger.

In assenza di processi di misura imponiamo che all'interno del calcolatore lo stato di un singolo qubit si trasformi nel modo

$$|\psi\rangle \rightarrow U|\psi\rangle \quad (1.15)$$

Dove con  $U$  intendiamo una qualsiasi combinazione lineare di matrici  $2 \times 2$  quali l'operatore identità - la cui azione è banale - e le matrici di Pauli

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

in accordo con il fatto che le proiezioni del momento di spin lungo un asse rappresentano un tipico sistema a due livelli.

Notiamo subito che la matrice di Pauli  $\sigma_x$  agisce su di un qubit esattamente allo stesso modo della porta *NOT* per i bit classici, invertendo gli stati  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ .

Nei processi di informazione quantistica il gate più comune è senza dubbio la *porta di Hadamard*, la cui azione è quella di ruotare un qubit nello spazio della base computazionale

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^x + \sigma^z) \implies H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

Un'applicazione del gate di Hadamard agli stati  $|0\rangle$  o  $|1\rangle$  produce un nuovo stato di superposizione che se osservato avrà eguali probabilità di uscita dei due stati.

$$H|0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \quad (1.18)$$

$$H|1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \quad (1.19)$$

---

<sup>9</sup>Una trasformazione  $U$  unitaria è un isomorfismo tra due spazi di Hilbert  $H_1$  e  $H_2$  tale che:  $\langle Ux|Uy\rangle_{H_2} = \langle x|y\rangle_{H_1} \quad \forall x, y \in H_1$

Tuttavia se la porta di Hadamard viene applicata due volte in successione lo stato finale non cambia, in quanto puri calcoli algebrici mostrano come  $H^2 = \mathbb{1}$ .

Concludiamo l'argomento ricordando che nella realtà dei fatti tutto si complica: in primis è richiesta l'abilità di interagire con il singolo qubit sul quale si vuole lavorare, questione affatto banale. Secondariamente imperfezioni nelle trasformazioni unitarie ed errori sistematici portano alla decoerenza, e dunque alla perdita di informazione.

Per di più il sistema di controllo dell'operazione è esso stesso un sistema quanto-meccanico e come tale tende ad accoppiarsi al computer quantistico creando fenomeni di interferenza non trascurabili.

#### 1.4.4 Preparazione degli inputs e lettura del risultato

*Nessun vento è favorevole  
per il marinaio che non sa dove andare*

Lucio A. Seneca

La preparazione degli stati di input è un notevole problema per la maggior parte dei sistemi fisici.

Anche classicamente, tra i requisiti fondamentali per operare una buona computazione vi è la necessità di preparare solidamente gli stati iniziali.

Con computer elettronici raramente si incontrano difficoltà, ma ciò non è più vero quando si ha a che fare con i qubits: ad esempio, il riuscire a disporre  $n$  spins nello stato  $|00\dots 0\rangle$  è un ottimo risultato, ma non ho assicurazioni su quanto a lungo possa rimanere il sistema in tale stato, a causa dell'energia termica che altera gli equilibri.

A nostro vantaggio abbiamo le trasformazioni unitarie che ci permettono di ottenere un qualsiasi input desiderato. Resta comunque necessaria la preparazione di uno specifico stato con alta fedeltà da cui partire che, in qualche senso operativo, sia "vicino" allo stato di input desiderato. Ad esempio, preparare  $n$  spin nello stato  $|00\dots 0\rangle$  è possibile, ma per energia termica potrebbero non stare lì a lungo e questo si traduce in un problema nella scelta della rappresentazione.

Come spiegato nella sezione 1.3 la differenza principale tra bit e qubit è che mentre il primo "esiste davvero" in uno solo dei due stati della base, il secondo può trovarsi in una sovrapposizione dei due.

Tuttavia una misura di un qubit nella base computazionale darà sempre un solo risultato. Ma cosa implica quella misura? Ovviamente non possiamo ispezionare lo stato di un qubit microscopico.

Ciò che si va a fare è instaurare un meccanismo che ad ogni stato microscopico associ un particolare stato macroscopico dell'apparato di misura, ovvero ci muniamo formalmente

di un'Hamiltoniana che da luogo ad un operatore di evoluzione unitario  $U(t)$  tale che

$$\widehat{U}(\infty)|\uparrow\rangle|X_0\rangle = |\uparrow\rangle|X_\uparrow\rangle \quad (1.20a)$$

$$\widehat{U}(\infty)|\downarrow\rangle|X_0\rangle = |\downarrow\rangle|X_\downarrow\rangle \quad (1.20b)$$

Qui  $|X_0\rangle$  rappresenta lo stato iniziale del dispositivo di misura, mentre  $|X_\uparrow\rangle$  e  $|X_\downarrow\rangle$  sono stati dell'apparato tali da essere non solo mutuamente ortogonali ma anche macroscopicamente distinti. A questo punto possiamo leggere ad occhi chiusi lo stato finale del dispositivo e quindi assegnare - per definizione - un valore misurato al qubit.

Un'esempio sicuramente tra i più noti di un tale approccio è l'apparato di Stern-Gerlach: qui una particella nello stato  $|\uparrow\rangle$  segue una determinata traiettoria sottoposta ad un campo magnetico non uniforme e accende, per dire, il contatore 1; mentre una seconda particella di stato  $|\downarrow\rangle$  segue una differente traiettoria e accende il contatore 2. Possiamo poi ispezionare quale dei due scintillatori sia stato acceso in una determinata corsa e assegnare quindi un valore misurato alla particella.

Vediamo ora cosa succede se il qubit è descritto non dallo stato  $|\uparrow\rangle$  nè  $|\downarrow\rangle$  ma da una sovrapposizione lineare  $\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$  degli stati.

Il punto cruciale è che nell'ambiente della meccanica quantistica l'operatore unitario  $\widehat{U}(t)$  è strettamente lineare e dunque se applicato ad una sovrapposizione di stati otteniamo

$$\widehat{U}(\infty)\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle|X_0\rangle = \alpha|\uparrow\rangle|X_\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle|X_\downarrow\rangle \quad (1.21)$$

In altre parole, l'effetto del processo di misura è quello di creare uno stato *entangled* tra i microscopicamente distinti stati di un qubit ed i macroscopicamente distinti stati dell'apparato di misura. L'entanglement è un fenomeno privo di analogo classico che ha luogo quando un insieme di particelle generate o interagenti sono descrivibili da uno stato quantico complessivo del sistema, e non in maniera separata per ogni particella.

Le misure di grandezze fisiche compiute su particelle entangled danno luogo a risultati strettamente correlati: ad esempio, se una coppia di particelle è generata in maniera tale da avere spin nullo, ed una particella, se misurata, è trovata con lo spin orientato lungo un certo asse, allora l'altra particella avrà spin sullo stesso asse ma con verso opposto con probabilità pari a 1. Questo comportamento può dar luogo ad effetti paradossali: ogni misura compiuta su di una particella è vista come un'interazione con la particella stessa e ne altererà lo stato; tale misura, nel caso di uno stato entangled, agirà sull'intero sistema: sembra quindi che una particella della coppia "conosca" quale misura sia stata effettuata sull'altra, e con quale risultato, benchè non ci sia alcuna possibilità per le particelle di scambiare informazione, dato che nella fase di misura possono essere separate da grandi distanze, anche superiori a quelle percorribili dalla luce.

Andando a controllare lo stato finale del dispositivo troviamo sempre che questo si trova nello stato  $|X_\uparrow\rangle$  o  $|X_\downarrow\rangle$ , ma mai troveremo un risultato che riflette appieno la sovrapposizione lineare. [11]

Questo è il fondamentale *measurement paradox* della meccanica quantistica: com'è possibile che al termine di un processo di misura di un sistema entangled la visione degli stati macroscopici dia sempre un risultato o l'altro? O nella più esoterica formulazione di John Bell, come trasformare un *and* in un *or*?



# Capitolo 2

## Matrice di densità

Andiamo ora ad introdurre una descrizione più generale degli stati quanto-meccanici, lasciandoci alle spalle il formalismo dei vettori di stato. Procedendo in questo percorso incontriamo la matrice di densità che risponde appieno alle nostre necessità. Il suo uso è richiesto quando andiamo a descrivere un sistema di stati quantici puri o un sottosistema di un *ensemble* più ampio. [6]

### 2.1 Stati quanto-meccanici *puri e misti*

Abbiamo solitamente a che fare con sistemi per i quali non ci è lecito conoscer la massima informazione possibile. Tuttavia, la frase “massima informazione” ha in meccanica quantistica un significato più profondo che nella fisica classica, visto che non è possibile misurare simultaneamente tutti gli osservabili fisici con precisione. Il nostro primo obiettivo è dunque quello di trovare un significato alla frase “massima informazione” nel regno quantistico.

Come ci è noto, una misura simultanea e precisa di due variabili fisiche è possibile se e solo se i due operatori associati commutano tra loro.

Dunque, se due operatori  $Q_1, Q_2$  commutano, è possibile trovare stati in cui sia  $Q_1$  che  $Q_2$  hanno autovalori definiti  $q_1, q_2$ . Similmente, se un terzo operatore  $Q_3$  commuta con gli altri due, allora si possono trovare stati per i quali i tre operatori hanno simultaneamente gli autovalori definiti, e così via, dando una sempre più precisa caratterizzazione del sistema.

Capiamo subito come il più grande set di operatori mutuamente commutanti  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  che può essere trovato dia la più completa descrizione possibile <sup>1</sup>. La misura di un ulteriore variabile relativa ad un operatore che non commuta con il set  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  introduce necessariamente delle incertezze al minimo in una variabile già misurata.

---

<sup>1</sup>Un esempio lampante è la classificazione degli stati in termini di costanti del moto.

Riassumendo, l'esistenza di un tale set di operatori - per i quali i risultati sono predetti con certezza - fornisce una caratterizzazione sufficiente e necessaria per lo stato di "massima conoscenza". [Fano - 1957]

**Definizione 2.1.** Vengono chiamati *puri* gli stati quanto-meccanici di massima conoscenza

Gli stati puri rappresentano l'ultimo limite di precisione permesso dal principio di indeterminazione e sono l'analogo quanto-meccanico di quegli stati classici per cui tutte le posizioni e momenti di ogni particella sono conosciuti. La questione su quando un sistema di operatori che commutano è completo<sup>2</sup> può trovare risposta solo sperimentalmente.

La scelta del set di tali operatori non è unica: consideriamo due insiemi di osservabili  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  con autostati  $|\psi\rangle = |q_1, q_2, \dots, q_n\rangle$  e  $Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_n$  con autostati  $|\phi\rangle = |q'_1, q'_2, \dots, q'_n\rangle$ , dove almeno uno degli operatori  $Q'_i$  non commuta con il primo set. Se un sistema è rappresentato dal vettore di stato  $|\psi\rangle$  può sempre essere scritto come sovrapposizione lineare degli autostati degli operatori  $Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_n$

$$|\psi\rangle = \sum_n a_n |\phi_n\rangle \quad (2.1)$$

dove l'indice  $n$  distingue tra i differenti autostati. Tale equazione è l'espressione matematica del principio di sovrapposizione.

I particolari stati  $|\phi_n\rangle$  usati nell'espansione prendono il nome di "base" e si dice che lo stato  $|\psi\rangle$  è scritto nella rappresentazione  $|\phi_n\rangle$ .

Assumiamo sempre che gli stati siano ortonormali

$$\langle \phi_n | \phi_m \rangle = \delta_{n,m} \quad (2.2)$$

e completi

$$\sum_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n| = 1 \quad (2.3)$$

Come diretta conseguenza otteniamo che

$$a_n = \langle \phi_n | \psi \rangle \quad (2.4a)$$

$$\langle \psi | \psi \rangle = \sum_n |a_n|^2 = 1 \quad (2.4b)$$

Ricordiamo che il modulo quadro  $|a_n|^2$  fornisce la probabilità che una misura trovi il sistema nell'ennesimo stato.

Nella pratica le variabili dinamiche misurate non costituiscono un set completo. Di conseguenza lo stato del sistema non è puro e non può essere rappresentato da un singolo

---

<sup>2</sup>Completo, nel senso detto prima, per non far confusione con la completezza delle basi.

vettore di stato bensì da una certa probabilità  $W_i$  di trovarsi nello stato puro  $|\phi_i\rangle$ .

Nasce quindi l'esigenza di una descrizione statistica.

Come si poteva intuire, affianco agli stati puri che abbiamo appena visto, troviamo gli stati *misti*:

**Definizione 2.2.** Sistemi che non possono essere caratterizzati da un singolo vettore di stato prendono il nome di *statistical mixture*

Se andiamo a misurare un osservabile  $Q$  di uno stato puro  $|\psi\rangle$  che non sia un autostato di tale osservabile e ripetiamo la misura numerose volte quello che otteniamo è una media degli autostati di  $Q$ , che ci è data dal valore di aspettazione  $\langle Q \rangle$ , definito dall'elemento di matrice

$$\langle Q \rangle = \langle \psi | \widehat{Q} | \psi \rangle \quad (2.5)$$

Volendo procedere con un'analogia misura per uno stato misto  $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_n\rangle$  è necessario calcolare il valore di aspettazione  $\langle Q_i \rangle = \langle \psi_i | \widehat{Q} | \psi_i \rangle$  di ognuno degli stati puri, per poi mediare il risultato sommando su tutti gli stati puri con il relativo peso statistico  $W_i$

$$\langle Q \rangle = \sum_i W_i \langle \psi_i | \widehat{Q} | \psi_i \rangle \quad (2.6)$$

Notiamo subito come l'essenza statistica entra in gioco in due modi differenti:

- Nel valore di aspettazione quanto-meccanico di  $\langle Q_i \rangle$
- Nella media del sistema di questi valori con il relativo peso  $W_i$

Mentre il primo punto è connesso con la perturbazione del sistema durante il processo di misura, ed è quindi inerente alla natura della quantizzazione, la seconda considerazione è dovuta alla mancanza di informazione a causa dei numerosi stati puri in cui il sistema può trovarsi. Sono due nozioni statistiche sottilmente e profondamente diverse. Quest'ultima media ricorda da vicino la meccanica statistica classica e può essere efficientemente discussa nei termini della matrice di densità che andremo a discutere nella prossima sezione.

## 2.2 La Matrice di Densità

Supponiamo di avere una collezione di oggetti preparati indipendentemente negli stati quanto-meccanici  $|\psi_n\rangle$  dove  $n = 1, 2, \dots, k$  con un peso statistico  $W_n$ .

L'operatore di densità è quell'oggetto matematico che mi descrive l'ensemble statistico dei numerosi stati quantici, ed è definito come

$$\rho = \sum_n W_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \quad (2.7)$$

dove la somma è estesa a tutti gli stati presenti nel mixing. Per poter esprimere l'operatore in forma matriciale dobbiamo prima scegliere un valido set di stati di basi che sia ortonormale e completo.

Supponiamo che tale base sia, ad esempio, fornita dagli stati  $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \dots, |\phi_k\rangle$ .

Usando il principio di sovrapposizione ricaviamo le due espressioni

$$|\psi_n\rangle = \sum_{m'} a_{m'}^{(n)} |\phi_{m'}\rangle \quad (2.8a)$$

$$\langle\psi_n| = \sum_m a_m^{(n)*} \langle\phi_m| \quad (2.8b)$$

che inserite nella definizione della matrice di densità mi danno

$$\rho = \sum_{m,m',n} W_n a_{m'}^{(n)} a_m^{(n)*} |\phi_{m'}\rangle \langle\phi_m| \quad (2.9)$$

Andando a prendere gli elementi di matrice tra gli stati  $|\phi_j\rangle$  e  $\langle\phi_i|$  ed applicando la condizione di ortonormalità, otteniamo

$$\langle\phi_i|\rho|\phi_j\rangle = \sum_n W_n a_j^{(n)} a_i^{(n)*} \quad (2.10)$$

L'insieme di tutti gli elementi, dove  $i$  e  $j$  corrono su tutti gli stati della base, fornisce una rappresentazione esplicita in forma matriciale dell'operatore di densità. Avendo usato gli stati di base  $|\phi_n\rangle$  diremo che gli elementi di matrice sono dati nella rappresentazione  $|\phi_n\rangle$ .

Lasciamo all'appendice A lo scopo di trattare e generalizzare alcune notevoli proprietà di questa matrice, tra le quali ricordiamo l'importante risultato A.4 ottenuto

$$\langle Q \rangle = \text{tr}(\rho Q)$$

La meccanica quantistica ci indica come tutta l'informazione sul comportamento di un dato sistema possa essere espressa in termini di valori di aspettazione di operatori opportunamente scelti. Dunque il problema si traduce nel calcolo di tali valori di aspettazione. Dato che questi possono essere ottenuti tramite l'uso della relazione A.4 ne segue che *la matrice di densità contiene tutte le informazioni fisicamente rilevanti del sistema in considerazione.* [12]

Andiamo ora a valutare il numero di parametri indipendenti necessari per definire una specifica matrice di densità. Generalmente tale numero è infinito, ma se interessati ad un'unica proprietà del sistema - lo spin, ad esempio - o se lavoriamo in uno spazio di Hilbert finito-dimensionale, si ottiene spesso un risultato finito.

Consideriamo il caso in cui il numero di stati di base è  $N$ . Allora  $\rho$ , matrice complessa ad  $N^2$  elementi, avrà  $N^2$  parametri reali<sup>3</sup>. Inoltre tenendo conto della condizione di normalizzazione che fissa il valore della traccia, ne segue che *una matrice di densità  $N$ -dimensionale è completamente specificata da  $N^2 - 1$  parametri reali*<sup>4</sup>.

Se un dato sistema è in uno stato puro  $|\psi\rangle$  il corrispondente operatore di densità è dato da

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (2.11)$$

La matrice di densità può essere costruita in una rappresentazione in cui  $|\psi\rangle$  è uno degli stati di base.

Ad esempio possiamo scegliere un set di stati ortonormali  $\psi_{\perp} = |\psi\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_k\rangle$  e chiaramente, tutti gli elementi di  $\rho$  sono nulli in tale rappresentazione eccetto quelli nella prima riga e colonna. Risulta quindi evidente come:

$$\text{tr}(\rho^2) = (\text{tr}\rho)^2 \quad (2.12)$$

Per un ulteriore approfondimento in appendice A viene mostrato come il risultato 2.12 costituisca una *condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice di densità descriva uno stato puro*.

## 2.3 Equazione master quantistica

Diversamente dai sistemi chiusi, la dinamica quantistica di un sistema aperto<sup>5</sup> non può, generalmente, essere descritta in termini di evoluzioni temporali unitarie.

Risulta invece particolarmente utile la descrizione tramite un'appropriata equazione del moto per la matrice di densità del sistema, detta *quantum master equation*.

Generalmente si tratta di un insieme di equazioni differenziali al primo ordine che forniscono la probabilità che un dato sistema ha di occupare un set discreto di stati possibili al variare del tempo  $t$ . [13]

Per iniziare, daremo una descrizione generale della dinamica dei sistemi aperti e chiusi. Verranno poi introdotti i processi quantistici di Markov che rappresentano il caso più semplice per la descrizione dinamica dei sistemi aperti. Infine, in analogia con l'equazione di Chapman-Kolmogorov per la teoria probabilistica classica, giungeremo ad un'equazione per l'evoluzione della matrice di densità, meglio nota come quantum Markovian master equation nella forma di Lindblad.

---

<sup>3</sup>La condizione di Hermitianità riduce i  $2N^2$  parametri reali ad  $N^2$  elementi indipendenti.

<sup>4</sup>Tale numero può essere ridotto ulteriormente con l'imposizione di simmetrie per il sistema.

<sup>5</sup>Sistema quanto-meccanico che interagisce con un sistema quantistico esterno, l'*ambiente*.

### 2.3.1 Sistemi quantistici aperti e chiusi

Nel caso di evoluzioni temporali troviamo molto conveniente caratterizzare la dinamica del sistema quanto-meccanico tramite l'utilizzo di un'Hamiltoniana. La dinamica è dunque descritta da un'equazione differenziale alle derivate parziali, meglio nota come equazione di Schrödinger

$$i\frac{\partial|\psi(t)\rangle}{\partial t} = H|\psi(t)\rangle \quad (2.13)$$

In questo paragrafo andiamo a vedere come l'informazione contenuta nella 2.13 possa essere espressa in un'altra utile maniera.

Consideriamo inizialmente un'Hamiltoniana indipendente dal tempo, ed introduciamo la notazione

$$H|\mu_n\rangle = E_n|\mu_n\rangle \quad (2.14)$$

dove indichiamo con  $|\mu_n\rangle$  l'autostato di  $H$  avente energia  $E_n$ .

Supponendo che al tempo  $t = 0$  il sistema si trovi nello stato  $|\mu_n\rangle$  allora al tempo  $t$  troveremo il sistema nello stato

$$|\mu_n(t)\rangle = e^{-iE_n t}|\mu_n\rangle \quad (2.15)$$

Generalizzando il concetto, grazie al principio di sovrapposizione, ogni soluzione della 2.13 può essere espansa in termini del set di autostati  $|\mu_n\rangle$ :

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n C_n|\mu_n(t)\rangle = \sum_n C_n e^{-iE_n t}|\mu_n\rangle \quad (2.16)$$

Nell'appendice B viene mostrato come tale equazione possa essere scritta nella più conveniente forma

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt} \sum_n C_n|\mu_n\rangle = e^{-iHt}|\psi(0)\rangle \quad (2.17)$$

L'operatore  $e^{-iHt}$  contiene tutte le informazioni riguardanti l'evoluzione temporale di ogni stato  $|\psi(t)\rangle$  e dunque anche della dinamica del sistema.

Nelle applicazioni fisiche spesso si ha a che fare con situazioni in cui il sistema sotto considerazione è sottoposto a forze esterne, o campi elettromagnetici esterni ad esempio. Se in un'occasione del genere la dinamica del sistema può ancora essere descritta in termini di un'Hamiltoniana  $H(t)$  dipendente dal tempo il sistema sarà detto *chiuso*, mentre riserveremo il termine *isolato* a sistemi la cui Hamiltoniana è indipendente dal tempo. Considerata la dipendenza temporale, l'equazione di Schrödinger

$$i\frac{\partial|\psi(t)\rangle}{\partial t} = H(t)|\psi(t)\rangle \quad (2.18)$$

non ammette più soluzioni semplici analoghe alla 2.17; tuttavia quest'ultima può essere generalizzata introducendo l'operatore  $\hat{U}(t)$ , l'operatore di evoluzione temporale che agisce come

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(0)\rangle \quad (2.19a)$$

e per lo stato aggiunto

$$\langle\psi(t)| = \langle\psi(0)|\hat{U}(t)^\dagger \quad (2.19b)$$

Per un ulteriore approfondimento su come tale operatore entra in gioco nell'equazione di Schrödinger e per alcune sue proprietà, consultare l'appendice B.

### L'equazione di Liouville - von Neumann

Così come l'equazione di Schrödinger descrive l'evoluzione temporale degli stati puri, allo stesso modo l'equazione di von Neumann descrive come l'operatore di densità evolve nel tempo.

Supponiamo che al tempo  $t=0$  un certo stato misto sia descritto dall'operatore di densità

$$\rho(0) = \sum_n W_n |\psi_n(0)\rangle \langle\psi_n(0)| \quad (2.20)$$

Gli stati  $|\psi_n(0)\rangle$  variano nel tempo secondo le 2.19 se il sistema è chiuso o isolato, e di conseguenza l'operatore di densità diventa esso stesso una funzione del tempo:

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \sum_n W_n |\psi_n(t)\rangle \langle\psi_n(t)| \\ &= \sum_n W_n \hat{U}(t) |\psi_n(0)\rangle \langle\psi_n(0)| \hat{U}(t)^\dagger \end{aligned} \quad (2.21)$$

o, equivalentemente

$$\rho(t) = \hat{U}(t) \rho(0) \hat{U}(t)^\dagger \quad (2.22)$$

Se l'Hamiltoniana è indipendente dal tempo, tale espressione si riduce a

$$\rho(t) = e^{-iHt} \rho(0) e^{iHt} \quad (2.23)$$

Differenziando la 2.22 rispetto al tempo, ed applicando le B.4 che riportiamo per comodità

$$i \frac{\partial U(t)}{\partial t} = H(t) U(t) \quad (2.24a)$$

$$-i \frac{\partial U(t)^\dagger}{\partial t} = U(t)^\dagger H(t) \quad (2.24b)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\rho(t)}{\partial t} &= i\frac{\partial U(t)}{\partial t}\rho(0)U(t)^\dagger + iU(t)\rho(0)\frac{\partial U(t)^\dagger}{\partial t} \\ &= H(t)U(t)\rho(0)U(t)^\dagger - U(t)\rho(0)U(t)^\dagger H(t) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Infine, tenendo conto della 2.22

$$i\frac{\partial\rho(t)}{\partial t} = [H(t), \rho(t)] \quad (2.26)$$

con il commutatore

$$[H(t), \rho(t)] = H(t)\rho(t) - \rho(t)H(t)$$

L'equazione differenziale 2.26 è meglio nota come *l'equazione di Liouville-von Neumann*.

Per sottolineare l'analogia dell'equazione di von Neumann con la corrispondente equazione per la densità di probabilità in meccanica statistica classica, la 2.26 viene spesso scritta in una forma analoga all'equazione di Liouville classica

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \mathcal{L}(t)\rho(t) \quad (2.27)$$

Il termine  $\mathcal{L}$  che compare nell'equazione è *l'operatore lineare di Liouville* definito tramite la condizione

$$\mathcal{L}(t)\rho(t) = -i[H(t), \rho(t)]$$

Più precisamente,  $\mathcal{L}$  viene spesso chiamato *super-operatore* di Liouville, poichè agisce su di un operatore rendendo un altro operatore.

I risultati A.4 e 2.22 costituiscono i cardini della teoria: è la soluzione simultanea di queste equazioni che ci porta allo studio del moto degli osservabili.

### 2.3.2 Dinamica dei sistemi aperti

Avendo brevemente esposto le equazioni fondamentali che descrivono la dinamica di sistemi quantistici chiusi torniamo alla nozione di sistema aperto.

In termini generali, un sistema aperto è un sistema quanto-meccanico  $\mathcal{S}$  accoppiato ad un altro sistema  $\mathcal{E}$  chiamato *ambiente*. Abbiamo quindi a che fare con il sottosistema di un insieme totale  $\mathcal{S} + \mathcal{E}$ , generalmente assunto chiuso. Alla luce di ciò lo stato del sottosistema  $\mathcal{S}$  cambierà a causa della sua dinamica interna e dell'interazione con l'ambiente. Questa interazione conduce ad una correlazione sistema-ambiente tale che il cambiamento degli stati di  $\mathcal{S}$  non può più, in generale, essere descritto in termini di una dinamica Hamiltoniana unitaria solo su  $\mathcal{S}$ .

La dinamica del sottosistema  $\mathcal{S}$  indotta dall'evoluzione Hamiltoniana del sistema complessivo viene indicata come *dinamica del sistema ridotto*, ed  $\mathcal{S}$  viene detto *sistema*



ridotto.

Indicheremo dunque con  $\mathcal{H}_S$  lo spazio di Hilbert del sistema, e con  $\mathcal{H}_E$  lo spazio di Hilbert dell'ambiente; di conseguenza, lo spazio di Hilbert del sistema totale  $\mathcal{S} + \mathcal{E}$  è dato dal prodotto tensoriale dei due spazi

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$$

L'Hamiltoniana totale  $H(t)$  può essere espressa nella forma

$$H(t) = H_S \otimes I_E + I_S \otimes H_E + H_I(t) \quad (2.28)$$

dove  $H_I(t)$  è l'Hamiltoniana descrivente l'interazione tra il sistema e l'ambiente.

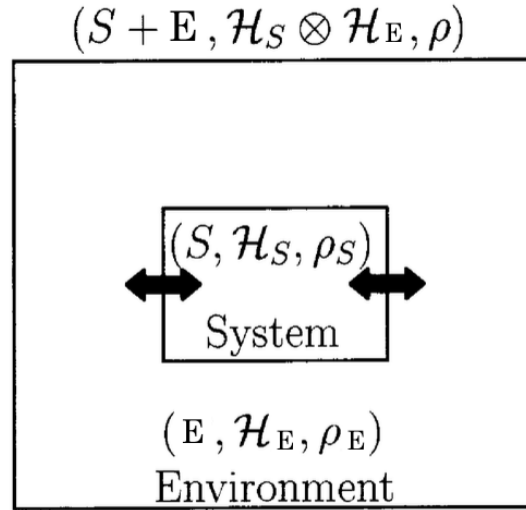


Figura 2.1: Rappresentazione schematica di un sistema quantistico aperto. [14]

In accordo con la sezione 2.2 gli osservabili relativi ad  $\mathcal{S}$  sono della forma  $\hat{A} \otimes I_E$  dove  $\hat{A}$  è un operatore agente sullo spazio  $\mathcal{H}_S$  e  $I_E$  denota l'identità nello spazio  $\mathcal{H}_E$ . Se lo stato del sistema totale è descritto da una matrice di densità  $\rho$ , allora i valori di aspettazione di tutti gli osservabili agenti sullo spazio di Hilbert del sistema aperto sono determinati attraverso la formula

$$\langle A \rangle = \text{tr}_S(A\rho_S) \quad (2.29)$$

dove

$$\rho_S = \text{tr}_E \rho \quad (2.30)$$

è la matrice di densità ridotta del sistema aperto  $\mathcal{S}$ . È chiaro che l'operatore  $\rho_S$  sarà di fondamentale importanza per la descrizione del sistema aperto.

La matrice di densità ridotta  $\rho_S(t)$  al tempo  $t$  è ottenuta dalla matrice  $\rho(t)$  del sistema totale prendendone la traccia parziale sui i gradi di libertà dell'ambiente. Poiché la matrice totale evolve in maniera unitaria, abbiamo

$$\rho_S(t) = \text{tr}_E\{\hat{U}(t, t_0)\rho(t_0)\hat{U}^\dagger(t, t_0)\} \quad (2.31)$$

dove  $\hat{U}(t, t_0)$  è l'operatore di evoluzione temporale del sistema totale.

Analogamente, l'equazione del moto per la matrice di densità ridotta è ottenuta prendendo la traccia parziale sull'ambiente da entrambe le parti dell'equazione di Liouville-von Neumann

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -i\text{tr}_E[H(t), \rho(t)] \quad (2.32)$$

### 2.3.3 Processo quantistico di Markov

Un processo stocastico è detto di Markov se la distribuzione di probabilità degli stati futuri del processo dipende solamente dallo stato attuale e non dalla sequenza di eventi che lo hanno preceduto. La “mancanza di memoria” è ciò che rende un processo di Markov relativamente semplice da descrivere matematicamente. Dunque, la probabilità di transizione al tempo  $t_{n-1}$  da uno stato  $y_{n-1}$  allo stato  $y_n$  al tempo  $t_n$  dipende solamente dal valore di  $y$  al tempo  $t_{n-1}$  e non dalla storia precedente del sistema.

Entrando più in dettaglio incontriamo l'equazione di Chapman-Kolmogorov per la probabilità di transizione, o più brevemente *propagatore*  $T(x, t|x', t')$

$$T(x_3, t_3|x_1, t_1) = \int dx_2 T(x_3, t_3|x_2, t_2)T(x_2, t_2|x_1, t_1) \quad (2.33)$$

che ammette una semplice interpretazione intuitiva: iniziando nel punto  $x_1$  al tempo  $t_1$ , il processo raggiunge il punto  $x_3$  ad un tempo  $t_3 > t_1$ . Ad un qualche tempo intermedio  $t_2$  il processo ha un generico valore  $x_2$ . La probabilità di transizione da  $(x_1, t_1)$  a  $(x_3, t_3)$  è data dal prodotto delle probabilità di transizione  $(x_1, t_1) \rightarrow (x_2, t_2)$  e  $(x_2, t_2) \rightarrow (x_3, t_3)$  e sommando su tutte le possibili posizioni intermedie  $x_2$  come mostrato in figura 2.2.

L'equazione integrale 2.33 è spesso più utile se trattata nell'equivalente forma differenziale,

Supponiamo che il propagatore  $T(x, t|x', t')$  sia differenziabile rispetto al tempo. Differenziando l'equazione 2.33, otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial t}T(x, t|x', t') = \mathcal{A}(t)T(x, t|x', t') \quad (2.34)$$

Qui,  $\mathcal{A}$  è un operatore lineare che genera traslazioni temporali infinitesime. Viene definito tramite la sua azione su di una generica densità  $\rho(x)$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t)\rho(x) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int dx' [T(x, t + \Delta t|x', t) - \delta(x - x')]\rho(x) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[ \int dx' T(x, t + \Delta t|x', t)\rho(x') - \rho(x) \right] \end{aligned} \quad (2.35)$$

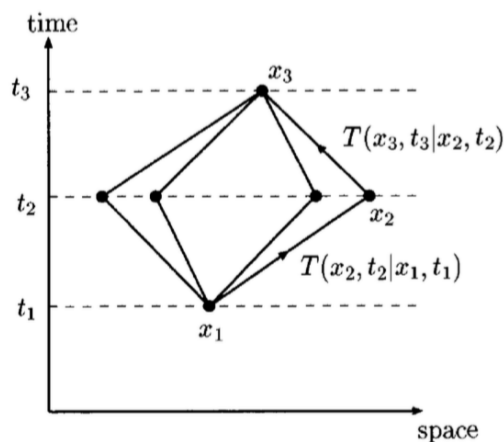


Figura 2.2: Illustrazione dell'equazione di Chapman-Kolmogorov. [14]

Generalmente  $\mathcal{A}$  può dipendere da  $t$ . Tuttavia, per processi di Markov omogenei<sup>6</sup> il propagatore  $T(x, t+\Delta t|x', t)$  non dipende da  $t$  e può essere scritto come  $T_\tau(x|x')$ , dove  $\tau = t - t' \geq 0$  indica la differenza tra i suoi argomenti. L'equazione di Chapman-Kolmogorov può quindi essere scritta nella forma

$$T_{\tau+\tau'}(x|x') = \int dx'' T_\tau(x|x'') T_{\tau'}(x''|x') \quad (2.36)$$

Una volta che ci è dato il generatore  $\mathcal{A}$ , la soluzione per un processo di Markov omogeneo dell'equazione 2.36 è scritta come

$$T_\tau(x|x') = \exp(\tau\mathcal{A})\delta(x - x'), \quad \tau \geq 0 \quad (2.37)$$

Questa relazione esprime il fatto che la famiglia ad un parametro  $\{T_\tau \mid \tau \geq 0\}$  delle probabilità di transizione rappresenta un semi-gruppo dinamico. Il termine *semi*-gruppo sta ad indicare che la famiglia non è un intero gruppo, poiché il parametro  $\tau$  è ristretto a valori non negativi

Da un punto di vista fisico, la proprietà di semi-gruppo è riflessa nella natura irreversibile dei processi stocastici. [14]

L'estensione della proprietà di semi-gruppo al regno quanto-meccanico porta al concetto di processo di Markov quantistico da cui è possibile derivarne una master equation.

In generale, la dinamica del sistema ridotto definita dalle equazioni 2.31 e 2.32 è abbastanza complessa. Tuttavia, con la condizione di brevi tempi di interazione con

---

<sup>6</sup>Un processo di Markov è detto *omogeneo* se il propagatore dipende solamente dalla differenza dei suoi argomenti

l'ambiente, la memoria del sistema può essere trascurata, permettendo di formulare la dinamica del sistema in termini di semi-gruppo quantistico. [15]

In primis introduciamo il concetto di mappa dinamica. Supponiamo di poter preparare al tempo  $t=0$  lo stato del sistema totale  $\mathcal{S} + \mathcal{E}$  come il prodotto di stati non correlati  $\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_E$ , dove  $\rho_S(0)$  è lo stato iniziale del sistema ridotto e  $\rho_E$  rappresenta un qualche riferimento dello stato ambientale, come quello di equilibrio termico, ad esempio. La trasformazione dello stato iniziale del sistema ridotto può essere scritta come

$$\rho_S(0) \rightarrow \rho_S(t) = V(t)\rho_S(0) \equiv \text{tr}_E\{U(t,0)[\rho_S(0) \otimes \rho_E]U^\dagger(t,0)\} \quad (2.38)$$

Fissati lo stato di riferimento  $\rho_E$  ed il tempo  $t$ , questa relazione definisce una mappa dallo spazio  $S(\mathcal{H}_S)$  delle matrici del sistema ridotto in se stesso,

$$V(t) : S(\mathcal{H}_S) \rightarrow S(\mathcal{H}_S) \quad (2.39)$$

Tale mappa descrive il cambiamento dello stato del sistema aperto e prende il nome di *mappa dinamica*.

$$\begin{array}{ccc} \rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_B & \xrightarrow{\text{unitary evolution}} & \rho(t) = U(t,0)[\rho_S(0) \otimes \rho_B]U^\dagger(t,0) \\ \text{tr}_B \downarrow & & \downarrow \text{tr}_B \\ \rho_S(0) & \xrightarrow{\text{dynamical map}} & \rho_S(t) = V(t)\rho_S(0) \end{array}$$

Figura 2.3: Azione di una mappa dinamica  $V(t)$  [14]

Questa è caratterizzata completamente dagli operatori relativi al sistema aperto nello spazio di Hilbert  $\mathcal{H}_S$ . Ricordiamo ora la matrice di densità per l'ambiente

$$\rho_E = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} |\phi_{\alpha}\rangle \langle \phi_{\alpha}| \quad (2.40)$$

dove i  $\phi_{\alpha}$  costituiscono una base ortonormale in  $\mathcal{H}_E$  e i  $\lambda_{\alpha}$  sono numeri reali non negativi tali che  $\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} = 1$ . La definizione 2.38 ci permette di scrivere

$$V(t)\rho_S = \sum_{\alpha,\beta} W_{\alpha\beta}(t)\rho_S W_{\alpha\beta}^\dagger(t) \quad (2.41)$$

dove  $W_{\alpha\beta}$ , essendo operatori in  $\mathcal{H}_S$ , sono definiti da

$$W_{\alpha\beta}(t) = \sqrt{\lambda_{\beta}} \langle \phi_{\alpha} | U(t,0) | \phi_{\beta} \rangle \quad (2.42)$$

inoltre, gli operatori  $W_{\alpha\beta}$  soddisfano la condizione

$$\sum_{\alpha,\beta} W_{\alpha\beta}(t)W_{\alpha\beta}^\dagger(t) = \mathbb{1}_S \quad (2.43)$$

da cui deduciamo

$$\text{tr}_S\{V(t)\rho_S\} = \text{tr}_S\rho_S = 1 \quad (2.44)$$

Concludiamo affermando che una mappa dinamica  $V(t)$  rappresenta un'operazione quantistica completamente positiva e trace-preserving.

Abbiamo introdotto questa mappa per un tempo  $t \geq 0$  fissato. Se ora facciamo variare  $t$  otteniamo una famiglia ad un parametro  $\{V(t) \mid t \geq 0\}$  di mappe dinamiche. Tale famiglia descrive la completa evoluzione temporale futura del sistema. Dunque come nella teoria classica ci aspettiamo un comportamento alla Markov, che nel caso omogeneo può essere formalizzato con l'aiuto della proprietà di semi-gruppo

$$V(t_1)V(t_2) = V(t_1 + t_2), \quad t_1, t_2 \geq 0 \quad (2.45)$$

Tirando le somme, un semi-gruppo quanto-dinamico è una famiglia continua, ad un parametro, di mappe dinamiche che soddisfano la proprietà 2.44.

### 2.3.4 Equazione master quantistica per un processo di Markov

Data come valida l'esistenza di un semi-gruppo dinamico e di una mappa lineare  $\mathcal{L}$  sua generatrice, possiamo rappresentare il semi-gruppo in forma esponenziale

$$V(t) = \exp(\mathcal{L}t) \quad (2.46)$$

Questa rappresentazione conduce immediatamente all'equazione differenziale del primo ordine per la matrice di densità del sistema aperto,

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \mathcal{L}\rho_S(t) \quad (2.47)$$

che prende il nome di *Markovian quantum master equation*. Il generatore  $\mathcal{L}$  del semi-gruppo è in realtà un super operatore, interpretabile come una generalizzazione del super operatore di Liouville incontrato nell'equazione 2.27.

Nell'appendice C vediamo come costruire la forma più generale per il generatore  $\mathcal{L}$  del semi-gruppo che possiamo scrivere come

$$\mathcal{L}\rho_S = -i[H, \rho_S] + \sum_{k=1}^{N^2-1} \gamma_k \left( A_k \rho_S A_k^\dagger - \frac{1}{2} A_k^\dagger A_k \rho_S - \frac{1}{2} \rho_S A_k^\dagger A_k \right) \quad (2.48)$$

Gli operatori  $A_k$ , introdotti nell'appendice C come appropriata combinazione lineare degli operatori di base  $F_i$  dello spazio di Liouville, sono detti operatori di Lindblad e la corrispondente equazione 2.47 per la matrice di densità è conosciuta come *equazione di Lindblad*. [16]

Il primo termine del generatore rappresenta la parte unitaria della dinamica generata dall'Hamiltoniana  $H$ <sup>7</sup>. Gli altri termini descrivono le possibili transizioni cui il sistema può incorrere in seguito all'interazione con l'ambiente. Un esempio lampante di processo non unitario di interazione con l'ambiente è la misura di una grandezza fisica del sistema. La dimostrazione matematica dettagliata che la 2.48 definisce la più generale forma di semi-gruppo quanto-dinamico è stata data da Gorini, Kossakowski e Sudarshan. [33]

---

<sup>7</sup>È infatti riconoscibile, se i termini  $\gamma_k$  sono nulli, l'equazione di Liouville- von Neumann.

## Capitolo 3

# Decoerenza

L'origine quantistica del mondo classico era così difficile da immaginare per i pionieri della meccanica quantistica che spesso si cercò di postularne l'esistenza indipendentemente o addirittura cercare qualcosa di differente e più simile alla concezione comune.

La fonte del problema si trova nel principio di sovrapposizione, il cui effetto è quello di espandere esponenzialmente il set di stati fisici possibili per un dato sistema: la sovrapposizione coerente di stati alla "Schrödinger's cat" ha - nella luce della meccanica quantistica - lo stesso diritto di esistere di una delle due alternative classiche.

È infatti noto come gli stati classici non siano altro che un sottoinsieme dello spazio di Hilbert degli stati possibili, e nasce quindi l'esigenza di spiegare l'origine di un apparente principio di *superselezione* che impedisce agli oggetti fisici di esistere nella maggior parte degli stati di Hilbert.

La decoerenza ed una delle sue principali conseguenze - environment-induced selection o *einselection* - saranno il filo di Arianna che ci condurrà alle risposte cercate.

La decoerenza è causata dall'interazione tra il sistema e l'ambiente. Sotto una varietà di condizioni, particolarmente facili da soddisfare per gli oggetti macroscopici, restringe il numero di stati possibili ad un sottoinsieme dello spazio di Hilbert - *einselection*. L'essenza classica della realtà è dunque una proprietà emergente, indotta nel sistema dalla sua interazione con l'ambiente.

Questa interpretazione della decoerenza è diventata chiara in tempi relativamente recenti; l'idea chiave è semplice: l'ambiente di un sistema quantistico aperto può monitorare i suoi stati attraverso interazioni continue. L'impronta lasciata dal sistema sull'ambiente conterrà informazioni riguardanti gli stati classici stabili.

Un fatto cruciale è la capacità della decoerenza di restituire sempre lo stesso set di stati preferenziali a prescindere dalle condizioni iniziali. [17] È proprio questa stabilità degli stati che li eleva a validi candidati per la controparte quantica del mondo classico.

Il pregiudizio che sembra aver ritardato seri studi sulla decoerenza è il concetto di sistema aperto, classicamente radicato nel modo stesso di pensare l'Universo: la strategia standard per assicurare l'isolamento di un sistema sotto studio era quella di allargare

il sistema, includendo l'ambiente immediatamente circostante. In questa maniera si pensava di poter ridurre qualsiasi insieme aperto in un più grande sistema chiuso.

Strategia sì vincente nella fisica classica, dove l'allargamento aiuta nella conservazione delle grandezze quali energia e momento, ma fallace nel caso quantistico poiché ora è l'informazione a dover essere mantenuta, e ciò è ancora più difficile se si allarga il sistema. In conclusione, l'unico sistema macroscopico realmente isolato è l'Universo, e noi, gli osservatori, non siamo certo nella posizione di studiarlo dall'esterno.

Che intendiamo per stati preferenziali? Una generica sovrapposizione di questi stati tenderà a decadere dopo un certo tempo. D'altro canto, se il sistema nell'istante iniziale è in uno dei possibili stati preferenziali, l'evoluzione temporale avrà il minimo effetto su tale stato. Possiamo quindi pensare alla einselection come un processo che crea dinamicamente un'istanza del sistema nello stato dell'ambiente. È il modo in cui il sistema viene continuamente monitorato dall'ambiente che porta all'emergere di un set naturale di stati preferenziali minimamente affetti dalle interazioni. [18]

### 3.1 Ambiente, misura e sistema

Tre sistemi quantistici - il sistema misurato  $\mathcal{S}$ , l'apparato di misura dell'osservatore  $\mathcal{A}$ , e l'ambiente  $\mathcal{E}$  - e le loro interazioni saranno oggetti di studio di questa sezione.

In un processo di misura quantistico,  $\mathcal{S}$  ed  $\mathcal{A}$  si accoppiano in uno stato entangled (si veda sezione 1.4.4). Tale accoppiamento è convertito in una correlazione classica a seguito dell'interazione tra  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{E}$ . L'analisi di questo sistema a tre livelli è necessaria per comprendere la relazione tra la memoria dell'osservatore (ciò che viene misurato) e lo stato del sistema sottoposto a misura.

Il problema della transizione dal probabilismo quantistico alla certezza classica è illustrato più precisamente con l'esempio di una tipica misura.

Il caso più semplice di decoerenza che possiamo descrivere ha come protagonisti proprio tre sistemi ad un bit, denotati con le lettere  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{S}$  ed  $\mathcal{E}$ , con l'ovvio riferimenti ai loro ruoli. La misura ha inizio con l'interazione apparato-sistema: dati  $|A_0\rangle$  lo stato iniziale dell'apparato, e  $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$  gli stati del bit, abbiamo

$$|\uparrow\rangle|A_0\rangle \rightarrow |\uparrow\rangle|A_1\rangle \quad (3.1a)$$

$$|\downarrow\rangle|A_0\rangle \rightarrow |\downarrow\rangle|A_0\rangle \quad (3.1b)$$

poiché  $|A_1\rangle$  è lo stato dell'apparato cui si associa lo stato  $|\uparrow\rangle$  nell'accoppiamento  $\mathcal{S}-\mathcal{A}$ . Inoltre,  $\langle A_0|A_1\rangle = 0$  e per un generico stato vale

$$(\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle)|A_0\rangle \rightarrow \alpha|\uparrow\rangle|A_1\rangle + \beta|\downarrow\rangle|A_0\rangle = |\phi\rangle \quad (3.2)$$



Questo stato entangled  $|\phi\rangle$  tra l'apparato e il sistema viene spesso detto di *pre-misura*. Il più grande problema con questo stato è l'ambiguità della base, rimovibile con l'aiuto di un terzo sistema,  $\mathcal{E}$ , che opera a sua volta una pre-misura sull'apparato. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} |\psi(0)\rangle_{\mathcal{S}\mathcal{A}\mathcal{E}} &= (\alpha|\uparrow\rangle|A_1\rangle + \beta|\downarrow\rangle|A_0\rangle)|\epsilon_0\rangle \\ &\rightarrow \alpha|\uparrow\rangle|A_1\rangle|\epsilon_1\rangle + \beta|\downarrow\rangle|A_0\rangle|\epsilon_0\rangle = |\psi\rangle \end{aligned} \quad (3.3)$$

Può sembrare che l'ambiguità cui è soggetta la correlazione  $\mathcal{S}$ - $\mathcal{A}$  persista ancora, ma non è così. Una collezione di tre sistemi quantistici correlati non è più soggetta all'ambiguità di base. Ciò è valido a maggior ragione se gli stati dell'ambiente sono correlati con l'apparato nella base in cui la pre-misura è stata effettuata, ovvero se vale

$$\langle\epsilon_0|\epsilon_1\rangle = 0 \quad (3.4)$$

Quando questa condizione è soddisfatta, la descrizione della coppia  $\mathcal{S}$ - $\mathcal{A}$  può essere ottenuta nei termini della matrice di densità ridotta:

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}} &= \text{tr}_{\mathcal{E}}|\psi\rangle\langle\psi| \\ &= |\alpha|^2|\uparrow\rangle\langle\uparrow||A_1\rangle\langle A_1| + |\beta|^2|\downarrow\rangle\langle\downarrow||A_0\rangle\langle A_0| \end{aligned} \quad (3.5)$$

In questo caso la matrice di densità ridotta contiene solamente termini corrispondenti a correlazioni classiche.

Qualora la condizione 3.4 non fosse soddisfatta allora i termini diagonali della matrice  $\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}}$  sarebbero la somma dei prodotti, piuttosto che i semplici prodotti, degli stati di  $\mathcal{S}$  ed  $\mathcal{A}$ . Un esempio è dato dalla matrice di densità dello stato puro in condizioni di pre-decoerenza:

$$\begin{aligned} |\phi\rangle\langle\phi| &= |\alpha|^2|\uparrow\rangle\langle\uparrow||A_1\rangle\langle A_1| + \alpha\beta^*|\uparrow\rangle\langle\downarrow||A_1\rangle\langle A_0| \\ &\quad + \alpha^*\beta|\downarrow\rangle\langle\uparrow||A_0\rangle\langle A_1| + |\beta|^2|\downarrow\rangle\langle\downarrow||A_0\rangle\langle A_0| \end{aligned} \quad (3.6)$$

che contiene termini non diagonali se espressi nella base naturale identificata dal prodotto tensoriale degli stati nei due sottospazi. La loro scomparsa nel calcolo della traccia sull'ambiente riflette la scomparsa dell'ambiguità della base.<sup>1</sup>

La fine della coerenza quantistica in seguito ad un processo di misura è stata verificata sperimentalmente nei neutroni, e più recentemente, nell'interferometria atomica. [19]

Il singolo atto di misura che qui abbiamo descritto deve essere pensato come un'istanza discreta del monitoraggio continuo dell'ambiente sul sistema, richiesto per mettere in evidenza la realtà classica.

---

<sup>1</sup>La 3.5 differisce dalla 3.6 perché la prima è come se fosse di origine puramente classica: assenza di sovrapposizione degli stati  $|\uparrow\rangle$  e  $|\downarrow\rangle$ .

## 3.2 Decoerenza di un singolo qubit

Un altro esempio di decoerenza ci è dato da un apparato a due stati  $\mathcal{A}$  interagente con l'ambiente di  $N$  spin. Identifichiamo i due stati dell'apparato come  $\{|\uparrow\rangle\langle\downarrow|\}$ .

Il caso più semplice si ha quando l'auto-Hamiltoniana dell'apparato si annulla,  $H_{\mathcal{A}} = 0$ , e l'Hamiltoniana di interazione ha la forma

$$H_{\mathcal{AE}} = (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) \otimes \sum_{k=1}^N g_k (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|)_k \quad (3.7)$$

Soggetto a questa Hamiltoniana, lo stato iniziale

$$|\phi(0)\rangle = (a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle) \prod_{k=1}^N (\alpha_k |\uparrow\rangle_k + \beta_k |\downarrow\rangle_k) \quad (3.8)$$

evolve in

$$|\phi(t)\rangle = a|\uparrow\rangle \otimes |\mathcal{E}_{\uparrow}(t)\rangle + b|\downarrow\rangle \otimes |\mathcal{E}_{\downarrow}(t)\rangle \quad (3.9)$$

Dove

$$|\mathcal{E}_{\uparrow}(t)\rangle = \prod_{k=1}^N (\alpha \exp(ig_k t) |\uparrow\rangle_k + \beta_k \exp(-ig_k t) |\downarrow\rangle_k) = |\mathcal{E}_{\downarrow}(-t)\rangle \quad (3.10)$$

La matrice di densità ridotta ha quindi la forma

$$\rho_{\mathcal{A}} = |a|^2 |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + ab^* r(t) |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + a^* b r^*(t) |\downarrow\rangle\langle\uparrow| + |b|^2 |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \quad (3.11)$$

I coefficienti  $r(t)$  determinano la taglia degli elementi non diagonali, e sono dati da

$$r(t) = \langle \mathcal{E}_{\uparrow} | \mathcal{E}_{\downarrow} \rangle = \prod_{k=1}^N [\cos(2g_k t) + i(|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2) \sin(2g_k t)] \quad (3.12)$$

A meno che il  $k$ -esimo spin sia inizialmente in un autostato dell'Hamiltoniana di interazione, il suo contributo alla produttoria sarà minore dell'unità. Di conseguenza, per ambienti costituiti da molti spin e per tempi lunghi, i termini non diagonali sono tipicamente piccoli

$$|r(t)|^2 \simeq 2^{-N} \prod_{k=1}^N [1 + (|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2)^2] \quad (3.13)$$

Questo effetto è meglio comprensibile tenendo a mente la sfera di Bloch. La matrice di densità di un qualsiasi sistema a due stati è rappresentabile da un punto in uno spazio 3-dimensionale.

In termini dei coefficienti  $a, b$  e  $r(t)$  sopra introdotti, le coordinate di tale punto sono:

$$z = (|a|^2 - |b|^2) \quad x = \Re(ab^* r) \quad y = \Im(ab^* r) \quad (3.14)$$

Se lo stato è puro,  $x^2 + y^2 + z^2 = 1^2$ . Quando lo stato è misto, i punti giacciono all'interno della sfera. Ogni evoluzione quantistica - unitaria e non - può essere vista come una trasformazione della superficie degli stati puri in un ellissoide contenuta nella sfera stessa. La deformazione causata dalla decoerenza è un caso speciale di queste generali evoluzioni. Il processo di decoerenza non agisce su  $a$  e  $b$ ; opera anzi lungo un piano costante in  $z$  - nucleo classico della distribuzione di probabilità. Tale taglio lungo la sfera di Bloch mostra il punto rappresentante lo stato ad una frazione  $r(t)$  della sua distanza massima.

Il numero complesso  $r(t)$  può essere espresso come la somma di fattori di fase rotanti con frequenze  $\Delta\omega_j$  date dalla differenza tra gli autovalori dell'energia dell'Hamiltoniana di interazione, pesati con la probabilità di trovare tali stati al tempo  $t = 0$ ,

$$r(t) = \sum_{j=1}^{2^N} p_j \exp(-i\Delta\omega_j t) \quad (3.15)$$

L'indice  $j$  denota gli autostati energetici dell'Hamiltoniana di interazione<sup>3</sup>.

L'evoluzione di  $r(t)$  data dalla 3.14 è una conseguenza della rotazione dei vettori complessi  $p_j \exp(-i\Delta\omega_j t)$  con differenti frequenze. Il numero  $r(t)$  inizierà quindi con ampiezza 1 per poi crollare ad un valore circa uguale a

$$\langle |r(t)|^2 \rangle = \sum_{j=1}^{2^N} p_j^2 \sim 2^{-N} \quad (3.16)$$

Vediamo che l'ampiezza dei termini non diagonali decresce esponenzialmente all'aumentare della taglia fisica  $N$  dell'ambiente. La decoerenza può quindi essere vista nella sfera (vedi figura 1.1) come quel processo che tende a far muovere gli stati verso l'asse verticale e dunque i poli, che, come visto nel primo capitolo, rappresentano il set di stati classici.[20]

### 3.3 Il modello di Jaynes-Cummings

#### Introduzione

Un sistema fisico ampiamente studiato nella letteratura [2] per rappresentare un qubit è senza dubbio l'atomo come sistema a due livelli. Vi è però l'esigenza di far interagire più qubit per poter creare un computer quantistico. In particolare, la *cavity quantum electrodynamics* (CQED) offre una soluzione a questo problema, trovando la giusta risposta nei

---

<sup>2</sup>Gli stati puri giacciono nella superficie della sfera di Bloch

<sup>3</sup>Il prodotto tensoriale tra stati  $|\uparrow\rangle$  e  $|\downarrow\rangle$  degli spin ambientali

fotoni. Trattandosi di particelle prive di carica, i fotoni non interagiscono eccessivamente tra loro o con la materia, proprietà che gli assicura il trasporto per lunghe distanze.

Si può quindi avere interazione tra singoli atomi ben isolati tramite lo scambio di fotoni, senza incorrere in fenomeni di decoerenza troppo significativi.

L'oggetto di questa sezione sarà quindi lo studio dell'interazione controllata fotone-atomo, scenario importante nel mondo della computazione quantistica.

Dalle sue prime apparizioni [21], il modello di Jaynes-Cummings (JC) è stato ampiamente utilizzato per descrivere l'interazione materia-radiazione in contesti come le trappole ioniche o la CQED. Ad esempio, nelle trappole ioniche descrive l'interazione tra un atomo e i suoi modi vibrazionali del centro di massa, mentre nel contesto della CQED descrive l'interazione tramite fotone di un atomo a due livelli e un modo normale quantizzato del campo elettromagnetico.

Concentrandoci nell'ottica della CQED la principale assunzione del modello è che l'intensità dell'interazione di dipolo è molto minore della frequenza di transizione del sistema a due livelli, rendendo lecito operare nell'approssimazione di *rotating wave* (RWA), spiegata in dettaglio più avanti. Il modello di JC è completamente risolvibile ed oggi è stato ampiamente studiato, esteso ed applicato in numerosi esperimenti di profilo pratico e concettuale.

Un singolo atomo nello spazio vuoto può interagire con un continuo di modi del campo elettromagnetico, e la dinamica è completamente caratterizzata dal fenomeno di emissione spontanea. D'altro canto, se l'atomo è posto in una cavità risonante che, date le condizioni al contorno, supporta solo modi discreti del campo la situazione cambia drasticamente.

Quando i modi del campo internamente alla cavità sono trattati, analogamente all'oscillatore armonico quantistico, dagli operatori <sup>4</sup> di distruzione  $\hat{a}$  e di creazione  $\hat{a}^\dagger$ , e l'atomo come un sistema a due livelli (interpretanti gli stati logici del qubit), eccitato  $|e\rangle$  e fondamentale  $|g\rangle$ , la dinamica di questo sistema quantistico interagente è descritta dal modello di Jaynes-Cummings, introdotto nel 1963. Le proprietà più interessanti della dinamica di questo sistema sono meglio apprezzate in condizioni di quasi-risonanza, tra la frequenza del campo nella cavità  $\omega$  e la frequenza delle transizioni atomiche  $\omega_0$  tra i due livelli.

### 3.3.1 Cavità di Fabry-Perot

La principale interazione nella CQED è l'accoppiamento dipolare  $\vec{d} \cdot \vec{E}$  tra il momento di dipolo elettrico  $\vec{d}$  ed il campo elettrico  $\vec{E}$ . Quanto può essere intensa questa interazione?

---

<sup>4</sup>Ricordiamo che questi operatori soddisfano la regola di commutazione  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{1}$

Nella pratica, è complicato lavorare con la taglia di  $\vec{d}$ ; tuttavia  $|\vec{E}|$  è facilmente accessibile sperimentalmente grazie agli specifici strumenti che ora andiamo a studiare.

La più semplice cavità da analizzare è il risonatore di Fabry-Perot, mostrato schematicamente in figura. Componente fondamentale di questa cavità è uno specchio parzialmente argentato, sul quale la luce incidente  $E_a$  ed  $E_b$ , in parte riflette in parte viene trasmessa, dando in output i campi  $E_{a'}$  ed  $E_{b'}$ . Queste quantità sono legate dalla trasformazione unitaria

$$\begin{bmatrix} E_{a'} \\ E_{b'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{R} & \sqrt{1-R} \\ \sqrt{1-R} & \sqrt{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_a \\ E_b \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

dove  $R$  è il coefficiente di riflessione dello specchio.

Una cavità di Fabry-Perot è formata da due specchi piani paralleli di coefficienti  $R_1$  e  $R_2$  sui quali dall'esterno viene mandata luce incidente  $E_{in}$ .

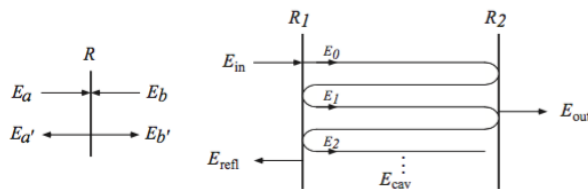


Figura 3.1: Rappresentazione schematica di una cavità di Fabry-Perot [2]

All'interno della cavità la luce rimbalza tra i due specchi in modo che il campo elettrico ad ogni cammino sia soggetto ad uno sfasamento  $e^{i\varphi}$ , con  $\varphi$  funzione della lunghezza del cammino e della frequenza della luce. Servendoci della 3.17, troviamo il campo internamente alla cavità come

$$E_{cav} = \sum_k E_k = \frac{\sqrt{1-R_1} E_{in}}{1 + e^{i\varphi} \sqrt{R_1 R_2}} \quad (3.18)$$

Caratteristica importante della cavità è l'andamento Gaussiano<sup>5</sup> del profilo di intensità del modi del campo.

Nell'approssimazione di campo monocromatico e occupante un singolo modo spaziale [2] semplici calcoli quanto-meccanici ci conducono alla relazione

$$\vec{E}(r) = i\vec{\epsilon} E_0 \left[ \hat{a} e^{ikr} - \hat{a}^\dagger e^{-ikr} \right] \quad (3.19)$$

Dove  $k = \omega/c$ ,  $E_0$  è l'intensità del campo,  $\vec{\epsilon}$  la polarizzazione, e  $r$  la distanza alla quale il campo è desiderato.

<sup>5</sup>Ovviamente centrato nel punto medio tra i due specchi.

L'Hamiltoniana che governa l'evoluzione del campo internamente alla cavità è semplicemente

$$H_{field} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (3.20)$$

consistente con la nozione semi-classica che l'energia è l'integrale di volume di  $|\vec{E}|^2$  all'interno della cavità.

### 3.3.2 Atomo a due livelli

Fino ad ora abbiamo discusso solamente dei fotoni, quanti del campo elettro-magnetico nonché realizzazione fisica del qubit, senza parlare degli atomi all'interno della cavità con i quali il campo è accoppiato. Gli stati elettronici di un atomo possono essere decisamente complicati [22], ma per le nostre necessità un modello riguardante due soli stati è un'eccellente approssimazione, garantita dall'utilizzo di luce monocromatica: in questo caso, infatti, gli unici livelli energetici rilevanti sono quelli la cui differenza di energia eguaglia l'energia dei fotoni incidenti, e per i quali le regole di selezione -le simmetrie- non inibiscono le transizioni.

Nella realtà, la luce incidente emessa da un laser non è mai perfettamente monocromatica a causa di disturbi, rumore di fondo, o altre interazioni; tanto meno l'atomo, accoppiato al mondo esterno, ha autostati ben definiti: piccole perturbazioni quali potenziali elettrici nelle vicinanze o la stessa interazione con il vuoto causano l'allargamento dei livelli energetici.

Ciò nonostante, la scelta appropriata di un atomo con determinate energie di eccitazione unita ad altri accorgimenti, fa sì che l'approssimazione di atomo a due livelli sia superba.

Tenuto conto di quanto appena detto, l'Hamiltoniana dell'atomo stesso, nel sottospazio a due livelli, è semplicemente

$$H_{atom} = \frac{\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z \quad (3.21)$$

dove  $\hat{\sigma}_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$  è l'operatore di Pauli per il sistema a due livelli.

### 3.3.3 Hamiltoniana del Modello

Da quanto appena detto, l'Hamiltoniana del sotto-sistema comprendente la cavità ed i livelli energetici atomici è

$$\begin{aligned} H_0 &= H_{atom} + H_{field} \\ &= \frac{\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} \end{aligned} \quad (3.22)$$

L'interazione tra l'atomo ed il campo quantizzato invece è data dall'accoppiamento di dipolo elettrico ed è descritta dall'Hamiltoniana

$$H_1 = -\hat{d} \cdot \hat{E}(0) = g(\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^\dagger)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (3.23)$$

dove abbiamo l'operatore di dipolo elettrico  $\hat{d} = \vec{d}(\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^\dagger)$ , gli operatori atomici di *raising/lowering*, rispettivamente  $\hat{\sigma}^\dagger = |e\rangle\langle g|$  e  $\hat{\sigma} = |g\rangle\langle e|$  e la costante di accoppiamento  $g$ .

Analizzando i quattro termini nell'Hamiltoniana di interazione 3.23 notiamo che sono correlati a processi di assorbimento ed emissione di fotoni, infatti

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}^\dagger \hat{a} &\longleftrightarrow \text{Transizione } |g\rangle \rightarrow |e\rangle \text{ e } \textit{assorbimento} \text{ di un fotone} \\
\hat{\sigma} \hat{a}^\dagger &\longleftrightarrow \text{Transizione } |e\rangle \rightarrow |g\rangle \text{ ed } \textit{emissione} \text{ di un fotone} \\
\hat{\sigma} \hat{a} &\longleftrightarrow \text{Transizione } |e\rangle \rightarrow |g\rangle \text{ e } \textit{assorbimento} \text{ di un fotone} \\
\hat{\sigma}^\dagger \hat{a}^\dagger &\longleftrightarrow \text{Transizione } |g\rangle \rightarrow |e\rangle \text{ ed } \textit{emissione} \text{ di un fotone}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

I primi due termini sono comunemente identificati come transizioni che conservano l'energia, cosa non vera per gli altri due.

Assumiamo ora la condizione di quasi-risonanza tra le transizioni atomiche di frequenza  $\omega_0$  e i modi della cavità di frequenza  $\omega$ , che equivale ad avere un piccolo parametro di *detuning*  $\delta \equiv \omega - \omega_0$ .

Tramite l'ausilio di alcuni passaggi matematici [23] è possibile affermare che i termini nella 3.24 che non conservano l'energia sono correlati al rapporto  $\frac{g}{\omega + \omega_0}$ , molto piccolo nella condizione di risonanza  $\delta \simeq 0$ , mentre i termini di risonanza sono i rilevanti essendo legati alla quantità  $\frac{g}{\omega - \omega_0}$ . Questo implica che, considerando la dinamica in risonanza di un tale sistema interagente in CQED, ci è lecito trascurare il contributo dei termini di antirisonanza  $\hat{\sigma}^\dagger \hat{a}^\dagger$  e  $\hat{\sigma} \hat{a}$ <sup>6</sup>, e possiamo infine concludere che l'Hamiltoniana totale del sistema in esame è

$$H_{JC} = \frac{\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + g(\hat{\sigma}^\dagger \hat{a} + \hat{\sigma} \hat{a}^\dagger) \tag{3.25}$$

L'equazione 3.25 è comunemente conosciuta nella letteratura come l'Hamiltoniana del modello di JC e la procedura che abbiamo seguito per ottenerla, come anticipatamente detto sopra, è chiamata RWA.

## 3.4 Dinamica aperta di N qubits in una cavità ottica

Con un ulteriore sforzo teorico, uniamo le conoscenze acquisite nel corso del II e III capitolo per descrivere la dinamica di N atomi a due livelli, fortemente influenzati da un campo coerente esterno, ed accoppiati in risonanza in una cavità che può interagire con l'ambiente dissipativo.

Per prima cosa ci occupiamo di derivare l'Hamiltoniana del sistema, nel regime di forte influenza, che come vedremo terrà conto simultaneamente dei termini JC ed anti-JC.

Dato che stiamo trattando con un sistema aperto, la sua dinamica sarà descritta da un'equazione master che ci andremo a ricavare nella forma di Lindblad standard.

---

<sup>6</sup>Meglio noti come *anti-JC*.

### 3.4.1 Hamiltoniana di Interazione

Un campo coerente esterno di frequenza  $\omega_D$  influenza l'atomo durante l'interazione con i modi della cavità di frequenza  $\omega$ . Assumiamo che la frequenza di transizione  $\omega_0$  tra lo stato eccitato e quello fondamentale, rispettivamente  $|e\rangle_j$  e  $|g\rangle_j$  (con  $j = 1, \dots, N$ ) sia la stessa per tutti i qubits. Come di consueto il punto di partenza è l'Hamiltoniana del sistema complessivo, data dalla somma di quattro contributi

$$\begin{aligned} H(t) &= H_{field} + H_{atom} + H_{a-f} + H_D(t) \\ &= H_{JC} + H_D(t) \end{aligned} \quad (3.26)$$

che corrispondono rispettivamente all'energia libera dell'atomo e della cavità, all'interazione tra questi due, ed al campo esterno di guida. Sostituendo i termini, la 3.26 è letta come

$$H(t) = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_{l=1}^N \left[ \frac{\omega_0}{2} \hat{\sigma}_{z,l} + g(\hat{\sigma}_l^\dagger \hat{a} + \hat{\sigma}_l \hat{a}^\dagger) + \Omega(e^{-i\omega_D t} \hat{\sigma}_l^\dagger + e^{i\omega_D t} \hat{\sigma}_l) \right] \quad (3.27)$$

dove  $\Omega$  è la frequenza di Rabi<sup>7</sup> associata con il campo esterno, e gli altri termini hanno l'analoga accezione della sezione precedente.

Applicando una successione di trasformazioni unitarie nel giusto ordine, come mostrato in appendice D, e lavorando in regime di forte accoppiamento atomo-campo esterno [23], ovvero  $\Omega \gg g$ , ci è lecito usare l'approssimazione di RWA, ed otteniamo un'Hamiltoniana effettiva della forma

$$H_{eff} = \frac{g}{2} \sum_{l=1}^N \hat{\sigma}_{x,l} (\hat{a} e^{i\delta t} + \hat{a}^\dagger e^{-i\delta t}) \quad (3.28)$$

dove  $\hat{\sigma}_{x,l} = \hat{\sigma}_l^\dagger + \hat{\sigma}_l$  e  $\delta = \omega - \omega_0$  è il già incontrato parametro di detuning. È evidente a questo punto la presenza dei termini di JC ( $\hat{\sigma}_l^\dagger \hat{a} + \hat{\sigma}_l \hat{a}^\dagger$ ) e di anti-JC ( $\hat{\sigma}_l^\dagger \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_l \hat{a}$ ).

### 3.4.2 Equazione master per il sistema

Nella prospettiva di un'implementazione fisica del modello, teniamo a mente la perdita di energia verso l'ambiente tramite le due possibili strade: dissipazione dei modi della cavità e canali di emissione spontanea dell'atomo.

L'evoluzione temporale del sistema, come si è visto nel capitolo 2, è descritta dall'operatore di densità  $\rho'(t)$  come soluzione della seguente equazione master:

$$\dot{\rho}' = -i[H(t), \rho'] + \hat{\mathcal{L}}_f \rho' + \hat{\mathcal{L}}_a \rho' \quad (3.29)$$

---

<sup>7</sup>La frequenza di Rabi è un parametro di accoppiamento tra il sistema a due livelli ed un campo EM trattato classicamente: conoscendo il suo valore posso sapere quanto tempo deve durare l'interazione campo-atomo per assicurarmi che l'atomo, al termine dell'interazione, si trovi nello stato desiderato.



dove

$$\hat{\mathcal{L}}_f \hat{\rho}' = \frac{k}{2} [2\hat{a}\hat{\rho}'\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}' - \hat{\rho}'\hat{a}^\dagger\hat{a}] \quad (3.30a)$$

$$\hat{\mathcal{L}}_a \hat{\rho}' = \frac{\gamma}{2} \sum_{l=1}^N [2\hat{\sigma}_l \hat{\rho}' \hat{\sigma}_l^\dagger - \hat{\sigma}_l^\dagger \hat{\sigma}_l \hat{\rho}' - \hat{\rho}' \hat{\sigma}_l^\dagger \hat{\sigma}_l] \quad (3.30b)$$

$\hat{\mathcal{L}}_f$  e  $\hat{\mathcal{L}}_a$  sono i super-operatori lineari standard di Liouville che descrivono, rispettivamente, il decadimento dissipativo della cavità ad un tasso  $k$  e dell'atomo eccitato ad un tasso  $\gamma$ .

Come nel paragrafo precedente, anche qui dobbiamo applicare una successione di trasformazioni unitarie, mostrate anch'esse in appendice D, per poter includere la  $H_{eff}$ , che ci portano a scrivere l'equazione per la matrice di densità nella forma

$$\dot{\hat{\rho}} = -i [H_{eff}, \hat{\rho}] + \hat{\mathcal{L}}_f \hat{\rho} + \hat{\mathcal{L}}_a^{eff} \hat{\rho} \quad (3.31)$$

dove

$$\hat{\mathcal{L}}_a^{eff} \hat{\rho} = \frac{\gamma}{4} \sum_{l=1}^N [\hat{\sigma}_{x,l} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{x,l} - \hat{\rho}] \quad (3.32)$$

L'espressione 3.31 è la corretta equazione master per l'Hamiltoniana 3.28 e l'ambiente dissipativo.

Ci offre una completa descrizione del modello fisico alla base di un sistema multi-qubit fortemente influenzato da un campo coerente esterno ed interagente con i modi della cavità, in presenza di un ambiente dissipativo sia per la cavità che per l'atomo a due livelli.

## 3.5 Come combattere la decoerenza: Quantum Error Correcting Codes

*Tutti commettiamo errori.*

*Per questo c'è una gomma in ogni matita.*

Proverbio giapponese

Nelle sezioni precedenti abbiamo capito come la decoerenza svolga un ruolo cruciale nelle transizioni tra il mondo quantistico e quello classico. Nella maggior parte dei casi però i fisici sono interessati alla comprensione delle cause che comportano la decoerenza per evitarla: infatti è proprio questo il fenomeno responsabile della perdita di informazione nella computazione quantistica.

Un modo ovvio di evitare che la decoerenza agisca sugli stati quantici è ridurre l'accoppiamento tra il sistema ed il suo ambiente, ma come sappiamo è impossibile spegnerlo del tutto. Negli ultimi anni, il crescente interesse in questa problematica, ha portato allo sviluppo di innovative tecniche capaci di schermare l'informazione immagazzinata negli stati che vanno sotto il nome di *quantum error correcting codes* (QECC). [24]

Si ritiene quindi interessante dedicare questa ultima parte ad un tema così delicato, presentando qualitativamente i metodi che, in principio, combattono la decoerenza preservando gli stati quantici. [20].

### 3.5.1 Proteggere un bit classico

Per entrare nell'ottica di pensiero della QECC è utile impostare la discussione affrontando, inizialmente, la protezione di un codice classico. Immaginiamo di avere un bit  $s$  fortemente accoppiato con l'ambiente; a causa del rumore vi è una certa probabilità  $p$  che il bit, dopo un certo arco di tempo, cambi stato, inserendo un errore nel codice.

Classicamente, per proteggerci da una situazione del genere, è sufficiente istanziare più bit, mappando quello iniziale in più copie di se stesso -  $s \rightarrow (s, s, \dots s)$ . Operando in questo modo riduciamo il numero di errori semplicemente guardando in termini probabilistici il risultato con maggior numero di eventi favorevoli. Precisamente, supponiamo di codificare il codice mappando il bit in tre sue identiche copie. La probabilità che non ci sia alcun errore è  $P(0) = (1 - p)^3$ , e per le altre vale semplicemente:  $P(1) = 3p(1 - p)^2$ ,  $P(2) = 3p^2(1 - p)$ ,  $P(3) = p^3$ . La probabilità che l'errore abbia luogo è data dalla somma delle probabilità di due o più errori nel codice, cioè  $P(\geq 2) = p^2(3 - 2p)$ . Questo perché, in presenza di un solo errore, lo stato logico del bit rimane determinato dalle altre due copie, rimanendo dunque corretto.

Evidentemente, questa strategia di codifica del codice ha aumentato la probabilità che l'informazione rimanga inalterata da  $1 - p$  a  $1 - 3p^2 + 2p^3 = 1 - \mathcal{O}(p^2)$ ; valore vicino all'unità se  $p$  è sufficientemente piccolo -  $p < 1/2$ .

Si tratta ovviamente del più semplice metodo dedicato alla protezione dell'informazione. Usando questo ingenuo esempio non si fa certo giustizia alla sofisticata teoria classica dell'*error-correcting code*, cui si rimanda per maggiori dettagli ad altri testi. [25]

### 3.5.2 Proteggere un qubit

La prima domanda che attraversa la mente è la possibilità di generalizzare una procedura analoga al caso classico per la protezione dello stato quanto-meccanico. Ma la risposta è negativa, poiché una versione quantistica della banale ripetizione del codice è proibita dal teorema di non-clonabilità degli stati.

**Teorema 3.5.1.** *Dati due generici stati  $|\psi\rangle_A$  e  $|\varphi\rangle_B$  di due differenti sistemi  $A$  e  $B$ , non esiste alcun operatore unitario  $U$  sullo spazio  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  tale che:*

$$U(|\psi\rangle_A|\varphi\rangle_B) = e^{i\alpha(\psi,\varphi)}|\psi\rangle_A|\psi\rangle_B$$

per qualche numero  $\alpha$  dipendente da  $\psi$  e  $\varphi$

Inoltre, il fatto che una misura altera drasticamente lo stato del sistema è un ulteriore indice di difficoltà nello sviluppo di una strategia di QECC.

Consideriamo allora un qubit preparato nel generico stato  $|\psi\rangle_0 = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ .

Ipotizziamo che l'interazione con l'ambiente introduce uno sfasamento con probabilità  $p$ , ed indichiamo con  $1 - p$  la probabilità che lo stato rimanga inalterato.

Lo sfasamento può essere descritto tramite l'azione degli operatori di Pauli  $\hat{\sigma}_{x,y,z}$  sullo stato del sistema. Di conseguenza dato  $|\psi_0\rangle$ , lo stato finale - dopo che il rumore ha avuto luogo - sarà descritto dalla matrice di densità come

$$\rho_{out} = (1 - p)\rho_{in} + p\hat{\sigma}_z\rho_{in}\hat{\sigma}_z \quad (3.33)$$

dove  $\rho_{in} = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ . È facile vedere come l'interazione con l'ambiente si traduca in una perdita della coerenza degli stati. Una misura di tale perdita ci è data dal calcolo della cosiddetta fedeltà  $F$  del processo [20], calcolata come

$$\text{tr}(\rho_{out}\rho_{in}) = 1 - 4p|\alpha\beta|^2 \quad (3.34)$$

Vediamo infatti che la fedeltà è stata ridotta di una quantità lineare rispetto alla probabilità di errore  $p$ .

A questo punto presentiamo una tecnica che permette di operare la QECC anche per il mondo quantistico. Analogamente al caso classico, useremo più portatori per proteggere l'informazione di un singolo qubit, ma l'idea concettuale che vi è alle spalle è differente: quello che vogliamo fare è l'encoding degli stati logici in stati entangled di tre qubit, così che se l'errore ha luogo, gli stati logici sono mappati in altri sottospazi ortogonali [20]. È poi possibile misurare un osservabile che ci dice in quale sottospazio si trovi lo stato; in tal modo veniamo a conoscenza dell'errore senza però ricevere alcuna informazione sullo stato stesso. Utilizziamo la seguente codifica<sup>8</sup>

$$|0\rangle_L = \frac{1}{2}(|000\rangle + |110\rangle + |101\rangle + |011\rangle) \quad (3.35a)$$

$$|1\rangle_L = \frac{1}{2}(|111\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |100\rangle) \quad (3.35b)$$

Il processo di encoding si realizza mappando gli stati fisici dei tre portatori indipendenti nei corrispondenti stati logici entangled. Ciò è rappresentato da un operatore unitario

---

<sup>8</sup>Il pedice  $L$  denota gli stati logici.

$E$  del tipo  $E(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|00\rangle = \alpha|0\rangle_L + \beta|1\rangle_L$ .

Le 3.35 sono un buon esempio di encoding perché, come è possibile verificare analiticamente, quando applichiamo un operatore di errore ad uno dei due stati logici otteniamo stati mutualmente ortogonali.

Si può infatti mostrare che  $|0\rangle_L \perp \hat{\sigma}_{z_i}|0\rangle_L \perp |1\rangle_L \perp \hat{\sigma}_{z_i}|1\rangle_L$ , con  $i = 1, 2, 3$  costituiscono una base dello spazio di Hilbert completo dei tre qubits. Il sottospazio logico  $\mathcal{H}_L$ , generato dai vettori  $\{|0\rangle_L, |1\rangle_L\}$  porta con sé tre errori discendenti, che sono  $\hat{\sigma}_{z_i}\mathcal{H}_L$ . Di conseguenza vi è un osservabile che possiamo misurare per capire in quale dei quattro sottospazi il sistema si trova.

Prestando attenzione alle simmetrie degli stati 3.35 è chiaro come questi stati siano autostati degli operatori  $M_1 = \hat{\sigma}_{x_1}\hat{\sigma}_{x_2}$  e  $M_2 = \hat{\sigma}_{x_2}\hat{\sigma}_{x_3}$  con autovalore  $\pm 1$ <sup>9</sup>.

Inoltre anche i tre errori discendenti del sottospazio logico sono essi stessi autostati degli operatori  $M_i$ . In conclusione, il nostro obiettivo è trovare in quale dei quattro sottospazi 2-dim si trova lo stato, così da recuperare l'errore in cui è incorso - formalmente tradotto nella misura dei due operatori  $M_1$  e  $M_2$ .

Il risultato della misura è sempre presentato da due numeri  $\pm 1$  (i due autovalori di  $M_i$ ) ed ognuna delle quattro possibili alternative identifica unicamente uno dei quattro sottospazi:  $\mathcal{H}_L$  corrisponde ai valori  $(+1, +1)$ ,  $\hat{\sigma}_{z_1}\mathcal{H}_L$  a  $(-1, -1)$ ,  $\hat{\sigma}_{z_2}\mathcal{H}_L$  a  $(-1, +1)$ ,  $\hat{\sigma}_{z_3}\mathcal{H}_L$  a  $(+1, -1)$ .

È importante sottolineare come in questo procedimento dobbiamo misurare esclusivamente gli operatori  $M_i$  e *non* i tre operatori  $\hat{\sigma}_{x_i}$  indipendentemente. Se così facessimo, misureremmo un set completo di osservabili che commutano, e come ben sappiamo, ciò causerebbe il collasso del sistema in un particolare stato. La QECC non deve infatti misurare un set completo di osservabili, ma quanto basta per guadagnare l'informazione riguardo l'errore, senza distruggere la coerenza degli stati.

Se ad esempio misuriamo il secondo e terzo qubit, troviamo informazioni riguardo l'errore che, per essere recuperato, necessita di semplici operazioni sul qubit non misurato - nel nostro caso il primo. È infatti sufficiente resettare il qubit "malato" per poi procedere nuovamente con l'encoding.

Alla luce di quanto detto, immaginiamo di considerare una situazione in cui ogni qubit ha una probabilità  $p$  di incorrere in un errore del tipo  $\hat{\sigma}_z$ . Allora lo stato dei tre qubits *prima* dell'operazione di correzione sarà descritto dalla matrice di densità

$$\begin{aligned} \rho_{out} = & (1-p)^3 \rho_{in} + p(1-p)^2 \sum_i \hat{\sigma}_{z_i} \rho_{in} \hat{\sigma}_{z_i} \\ & + p^2(1-p) \sum_{i \neq j} \hat{\sigma}_{z_i} \hat{\sigma}_{z_j} \rho_{in} \hat{\sigma}_{z_i} \hat{\sigma}_{z_j} + p^3 \hat{\sigma}_{z_1} \hat{\sigma}_{z_2} \hat{\sigma}_{z_3} \rho_{in} \hat{\sigma}_{z_1} \hat{\sigma}_{z_2} \hat{\sigma}_{z_3} \end{aligned} \quad (3.36)$$

---

<sup>9</sup>Vediamo come  $|0\rangle_L$  sia la sovrapposizione di stati con numero pari di "uno", mentre  $|1\rangle_L$  contiene tutti gli stati con numero dispari di "uno"; dunque gli stati logici sono invarianti allo scambio di due stati qualsiasi, che è proprio ciò che fanno gli operatori  $\hat{\sigma}_{x_i}\hat{\sigma}_{x_j}$ .

Se poi applichiamo la procedura correttiva alla matrice di densità, chiaramente i primi due termini saranno semplicemente proporzionali a  $\rho_{in}$ . In questo modo abbiamo eliminato il termine che è lineare con la probabilità di errore  $p$ . A differenza della situazione illustrata nella 3.36, ora lo stato finale differirà da quello ideale solamente per un termine quadratico nella probabilità di errore.

La fedeltà del processo è quindi data da  $F = 1 - \mathcal{O}(p^2)$ .

È proprio qui che risiede la potenza dei metodi QECC, nel portare la dipendenza di  $F$  su  $p$  da un andamento lineare ad uno quadratico<sup>10</sup>.

Infine è bene dire che la procedura fin qui descritta, può essere generalizzata per includere più errori possibili - e non solo del tipo  $\hat{\sigma}_z$ . Se siamo in grado di contrastare efficientemente tre classi di errori indipendenti, possiamo a sua volta eliminare errori arbitrari esprimibili come combinazione lineare dei tre errori di base.

Un codice di questo tipo è stato presentato per primo da Peter Shor [26] e può essere costruito utilizzando il nostro QECC a tre qubits come struttura guida.

---

<sup>10</sup>Ovviamente per il corretto funzionamento della procedura è necessario che  $p$  sia sufficientemente piccolo

## Capitolo 4

# La computazione quantistica al giorno d'oggi

La scoperta di strategie di QECC ha senza dubbio aumentato le prospettive di successo per la computazione quantistica.

Con la codifica dell'informazione, come si è visto nel capitolo precedente, siamo in grado di proteggerci da errori dovuti ad interazioni incontrollate con l'ambiente o dall'implementazione di operazioni logiche imperfette.

Sappiamo già che per operazioni di codifica è necessario aumentare il numero di qubits ed inserire con periodicità passaggi di recupero degli errori; ma proprio per questo aumento della complessità del dispositivo non è ovvio, *a priori*, che i metodi di QECC migliorino la performance. [27]

Durante il nostro percorso, abbiamo compreso la necessità di proteggere la dinamica di un sistema dalla decoerenza generata dall'ambiente. In questo capitolo vedremo che un qubit ideale può essere protetto efficientemente dal mondo esterno grazie al *disaccoppiamento dinamico* (DD) - dynamical decoupling-, una potente e pratica tecnica, su cui poi torneremo, che utilizza veloci inversioni nello stato di un qubit per mitigare l'interazione con l'ambiente - e dunque la decoerenza. [28]

Tuttavia, proteggere la coerenza di un qubit durante un'operazione a multi-qubit è un problema non banale: generalmente, la dinamica interqubit viene meno, entrando in conflitto con l'operazione di gate.

Un punto di svolta per la realizzazione pratica potrebbe scaturire da un certo tipo di impurità presente negli atomi di carbonio del diamante, chiamata *nitrogen-vacancy* (NV) *center*. Lo schema teorico che delinea l'accoppiamento tra più siti NV, basilare per la computazione, è presentato da Alejandro Bermudez e colleghi dell'università di Ulm, Germania. [29]

Stando a questa elegante idea, l'informazione è immagazzinata, ad ogni sito, nello spin

nucleare, mentre spetta allo spin elettronico il compito di mediare la comunicazione tra due centri.

## 4.1 Centri NV

Sono proprio questi difetti i responsabili del particolare colore dei diamanti rosa, ma questo è al di là dei nostri scopi.

La configurazione si forma quando due differenti difetti nel reticolo cristallino del diamante instaurano<sup>1</sup> un legame: un'impurità di azoto ed una lacuna - assenza di un atomo di carbonio nel reticolo.

Questa struttura può catturare<sup>2</sup> un elettrone esterno, diventando nel complesso carica negativamente. Abbiamo quindi 6 elettroni liberi<sup>3</sup> che realizzano un tripletto di spin dalle ottime proprietà di coerenza, nonché controllabile tramite metodi ottici. [30]

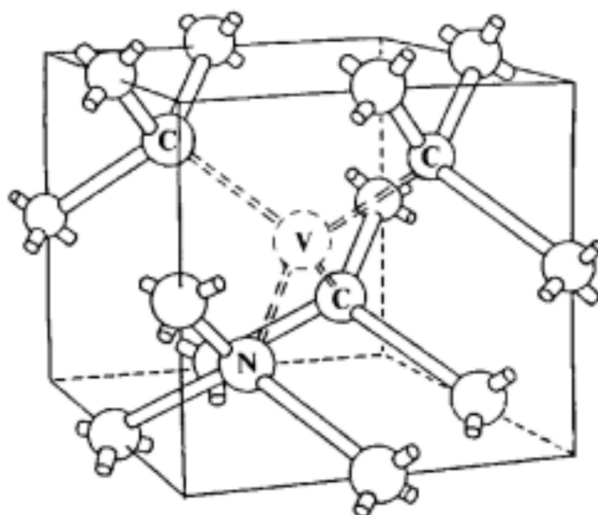


Figura 4.1: Strutturalmente, il centro NV consiste di due difetti nel reticolo del diamante [35].

Inoltre la presenza di un atomo di azoto - con spin nucleare  $I=1$  - fa sì che ogni centro NV abbia spin nucleare non nullo<sup>4</sup>. I nuclei grazie ai lunghi tempi di coerenza sono ottimi per immagazzinare informazione.

<sup>1</sup>Chiaramente è necessario che i due siti difettivi siano adiacenti.

<sup>2</sup>L'atomo di  $^{14}\text{N}$  è trivalente, propenso dunque ad attrarre un elettrone.

<sup>3</sup>Tre dai carboni adiacenti e due dall'azoto, cui si aggiunge quello intrappolato.

<sup>4</sup>L'atomo di  $^{14}\text{N}$  ha un neutrone ed un protone spaiati, da cui lo spin unitario. Discorso non valido per l'atomo di  $^{12}\text{C}$  il cui spin nucleare è nullo.

Già ad un primo impatto è lampante la potenzialità di questi centri, che appaiono eccezionali per la computazione quantistica; vediamo con maggiore dettaglio le principali caratteristiche che li rendono degni di nota.

### 4.1.1 Proprietà generali

Un centro NV costituisce un sistema naturale a due qubit, realizzato dagli spin nucleari ed elettronici accoppiati da interazioni iperfini.

Lo spin elettronico  $S = 1$  è dato dai sei elettroni spaiati localizzati nel centro NV.

Un campo magnetico esterno e costante  $B_0$  separa i livelli di spin  $m_S = 0, \pm 1$ , permettendo di definire il qubit elettronico dai livelli  $m_S = 0$  e  $m_S = -1$ <sup>5</sup>, separati da una frequenza  $\omega_e$ . Questi livelli sono accessibili, e dunque manipolabili, grazie all'azione di un impulso magnetico in risonanza con l'energia di transizione.

Le altre transizioni elettroniche aventi frequenze differenti non possono aver luogo, ed anche il livello  $m_S = 1$  rimane inattivo.

Il secondo qubit trova la sua realizzazione nello spin nucleare ( $I = 1$ ) dell'atomo di azoto. I due stati possibili sono rappresentati dai livelli<sup>6</sup>  $m_I = 0$  e  $m_I = 1$ , separati da una frequenza  $\omega_n$ .

L'accoppiamento iperfine che garantisce l'entanglement tra i due spin ha la forma

$$H_{hf} = A_z S_z I_z \quad (4.1)$$

dove  $S_z$  e  $I_z$  sono le proiezioni lungo l'asse  $z$  delle componenti di spin elettronico e nucleare rispettivamente, mentre  $A_z$  è detto parametro di accoppiamento.

Il principale nemico di questo sistema che porta alla decoerenza è l'accoppiamento dello spin elettronico con altri spin ambientali, che nel nostro caso possono essere gli spin degli adiacenti  $^{12}C$ .

### Decoerenza e tempi di scala

L'obiettivo principale è la realizzazione di un gate quantistico con un'elevata soglia di fedeltà. È quindi d'obbligo sollevare una discussione sui tempi di decoerenza tipici del sistema che stiamo considerando.

Questi tempi, nonché la reattività di risposta ad impulsi esterni, sono dettati dal rapporto giromagnetico dei due spin. Questa grandezza per gli spin elettronici e nucleari varia di un fattore 1000 all'incirca.

Ad esempio, a causa del rapporto giromagnetico più elevato, l'elettrone è fortemente interagente con l'ambiente; caratteristica che assicura sì elevate performance di calcolo (tempo di operazione:  $1 \text{ ns} - 0.1 \text{ } \mu\text{s}$ ), ma anche basse tempistiche di coerenza.

<sup>5</sup>Per semplicità li indicheremo rispettivamente con  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ .

<sup>6</sup>Indicati rispettivamente con  $|\downarrow\rangle$  e  $|\uparrow\rangle$



D'altro canto lo spin nucleare è soggetto ad un accoppiamento molto più debole con l'ambiente, e quindi maggiori tempi di coerenza ( $> 10 \mu s$ ) ma risposte al controllo esterno più lente.

Di conseguenza un gate entangled tra i due qubit (in assenza di protezioni da decoerenza) avrebbe bassa fedeltà, rilevandosi inadatto per la buona riuscita del calcolo.

## 4.2 Disaccoppiamento Dinamico

In questa sezione vogliamo esporre la tecnica sviluppata da Lorenza Viola e colleghi del Massachusetts Institute of Technology per il controllo del fenomeno di decoerenza nei sistemi quantistici.

Mostreremo come un ristretto set di veloci manipolazioni di un sistema aperto permette di implementare una grande classe di evoluzioni dinamiche introducendo o rimuovendo specifiche Hamiltoniane. È questa procedura che ci consente di realizzare controlli universali del sistema insensibili al rumore, mediando a zero l'indesiderato accoppiamento sistema-ambiente; il tutto senza ulteriore apporto alle risorse fisiche del sistema.

Dato un sistema quantistico su di uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ , sia  $H$  la sua Hamiltoniana. Immaginiamo di poter applicare istantaneamente un set di evoluzioni unitarie, cioè di poter accendere delle Hamiltoniane per infinitesimi intervalli di tempo  $\tau$  con arbitraria intensità. [31]

Chiamiamo queste evoluzioni impulsive a piena potenza controlli *bang-bang* (b.b.).

Abbiamo che il set di possibili operazioni b.b. è un sottogruppo  $\mathcal{G}_{b.b.}$  di  $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ , comprendente tutte le operazioni unitarie possibili su  $\mathcal{H}$ .

Un processo di *decoupling* su  $\mathcal{H}$  sottopone il sistema ad un evoluzione temporale ciclica che combina giudiziosamente sequenze di operazioni b.b. con l'evoluzione libera dell'Hamiltoniana naturale  $H$ . [28]

Sia quindi  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_{b.b.}$  un gruppo finito (*decoupling group*) di operazioni e  $T_c$  il tempo di scala (*cycle time*) della durata di un ciclo.

Assunto  $|\mathcal{G}|$  come numero di elementi del gruppo, la sequenza di operazioni esatte  $g_j$  da applicare con distanza temporale  $\Delta t$ , dove  $j = 0, \dots, |\mathcal{G}| - 1$ , è generalmente non nota all'inizio, condizione che nella letteratura prende il nome di *black-box decoupling*.

Per provare ad ottenere l'evoluzione disaccoppiata del sistema è conveniente considerare un generico intervallo di tempo  $\Delta T$  comprendente più cicli

$$\Delta T = NT_c = N|\mathcal{G}|\Delta t \quad (4.2a)$$

e tenere a mente l'espressione dell'evoluzione libera

$$U_0(\Delta t) = \exp(-iH\Delta t) \quad (4.2b)$$

Date queste assunzioni, l'evoluzione del sistema sottoposto al processo di decoupling è dettata da una sequenza di trasformazioni di gruppo  $\{g_j\}$  applicate su un singolo ciclo

$$U(T_c) = \prod_{j=0}^{|\mathcal{G}|-1} g_j^\dagger U_0(\Delta t) g_j \equiv e^{-iH_{eff}T_c} \quad (4.3)$$

dove si è indicato con  $H_{eff}$  l'Hamiltoniana effettiva che deriva dall'aver scritto  $U(T_c)$  come nella 4.3. Nel limite ideale di ciclo infinitamente veloce,  $T_c \rightarrow 0$  con  $N \rightarrow \infty$  così che il loro prodotto rimanga costante, troviamo l'espressione

$$H_{eff} = \frac{1}{|\mathcal{G}|} \sum_{g_j \in |\mathcal{G}|} g_j^\dagger H g_j \equiv \Pi_{\mathcal{G}}(H) \quad (4.4)$$

Fisicamente,  $H_{eff}$  descrive il contributo portante alla Hamiltoniana media descrivente il sistema sottoposto al processo di disaccoppiamento. Mentre da un punto di vista geometrico,  $\Pi_{\mathcal{G}}$  è la proiezione di  $\mathcal{H}$  sul cosiddetto *centralizer*  $\mathcal{Z}(\mathcal{G})$  di  $End(\mathcal{H})$ , definito come

$$\mathcal{Z}(\mathcal{G}) = \{\mathcal{O} \in End(\mathcal{H}) \mid [\mathcal{O}, g_j] = 0 \quad \forall g_j \in \mathcal{G}\} \quad (4.5)$$

dove  $End(\mathcal{H})$  è l'insieme degli endomorfismi di  $\mathcal{H}$  in sè stesso, e  $\mathcal{Z}(\mathcal{G})$  è una sua sottoalgebra. A questo punto l'equazione 4.5 ci apre una diretta interpretazione dell'azione di disaccoppiamento in termini di simmetrie: dato che  $H_{eff} = \Pi_{\mathcal{G}}$ , l'evoluzione del DD è simmetrica per il gruppo  $\mathcal{G}$ , ne segue che tutte le componenti della dinamica generata da  $H$  che non sono invarianti per il gruppo  $\mathcal{G}$  vengono soppresse. [28]

Mentre l'output di un data  $H_{eff}$  di disaccoppiamento è specificato dalle proprietà di simmetria, i tempi di scala ci dicono quanto buono è il disaccoppiamento in uno scenario reale dove sia la durata dell'impulso  $\tau$  che il tempo del ciclo  $T_c$  sono finiti.

Abbiamo mostrato brevemente l'idea chiave alla base di questo complesso metodo, che sembra avere validi riscontri pratici nella battaglia contro la decoerenza degli stati, servendosi solamente di manipolazioni cicliche unitarie sul sistema.

Ora, andiamo a illustrare un pionieristico lavoro di T. van der Sar e colleghi, che sono riusciti ad implementare un gate protetto dalla decoerenza servendosi di centri NV come qubit register e della tecnica di DD.

### 4.3 Esempio di quantum gates protetti

Il metodo DD è particolarmente promettente per architetture ibride in cui differenti tipi di qubit, come gli spin elettronici ed atomici, interagiscono dando luogo ad un gate quantistico.

Tuttavia il connubio tra la realizzazione di un gate e le tecniche di DD presenta generalmente una problematica importante: il disaccoppiamento non distingue l'interazione con l'ambiente dall'accoppiamento tra i due qubit per il passaggio dell'informazione.

Il gruppo di ricercatori pre-menzionato è riuscito a trovare un design che permette di integrare le necessarie protezioni con i gate ad architettura ibrida, raggiungendo una fedeltà di oltre il 90%. [32]

L'idea vincente è adattare gli intervalli di tempo degli impulsi di disaccoppiamento per l'elettrone con la dinamica del nucleo; in tal modo abbiamo una precisa protezione della dinamica elettronica, accompagnata dalla possibilità di operare rotazioni sullo spin nucleare.

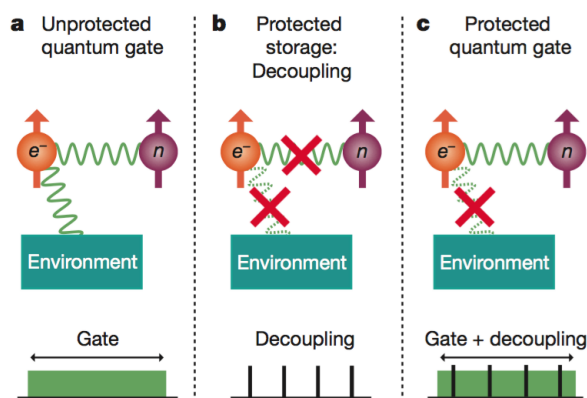


Figura 4.2: **a**, La fedeltà di un'operazione a due qubit è limitata dall'interazione con l'ambiente. **b**, DD applicato allo spin elettronico sopprime la decoerenza, ma distrugge anche l'accoppiamento elettrone-nucleo. A sua volta, DD applicato ad entrambi gli spin è problematico a causa delle diverse tempistiche di coerenza. **c**, La soluzione è applicare il DD durante l'operazione di gate, proteggendolo dalla decoerenza senza compromettere la desiderata interazione elettrone-nucleo. [32]

Entrando più in dettaglio, ricordiamo come un gate entangled tra i due qubit del centro NV sia descritto dall'Hamiltoniana 4.1 a seguito dell'interazione iperfine.

Per risolvere il conflitto tra l'operazione di gate ed il decoupling applichiamo una frequenza di Rabi pari a quella della transizione dello spin nucleare quando lo spin elettronico è nello stato  $|1\rangle$ :

$$|1 \uparrow\rangle \rightarrow |1 \downarrow\rangle$$

Nel sistema rotante, i due spin sono descritti da

$$H = A\hat{I}_z\hat{S}_z + \omega_1\hat{I}_x \quad (4.6)$$

dove  $\omega_1$  è la frequenza di Rabi. Così facendo la dinamica nucleare è condizionata dallo stato elettronico: se lo spin dell'elettrone è  $|1\rangle$ , lo spin nucleare è soggetto a rotazioni attorno l'asse  $x$ , mentre precede attorno l'asse  $z$  se l'elettrone è in  $|0\rangle$ .

Parallelamente si inviano impulsi ad alta frequenza, responsabili del decoupling, che cambiano lo stato dell'elettrone costantemente tra  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ .

Riassumendo, il ciclo di decoupling consiste nel ripetere la sequenza  $\tau - X - 2\tau - Y - \tau$ , dove  $X$  e  $Y$  sono gli impulsi che capovolgono lo spin elettronico lungo gli assi  $x$  e  $y$  rispettivamente, e  $2\tau$  è il ritardo tra due impulsi successivi. Per implementare un gate entangled, è necessario che lo spin nucleare non sia affetto dai repentini cambiamenti dello spin elettronico, ma dipenda solamente dallo stato iniziale dell'elettrone.

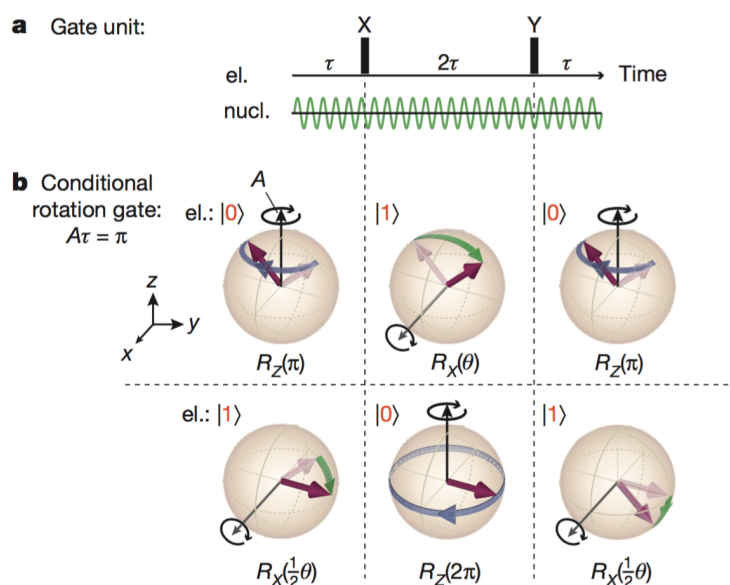


Figura 4.3: **a**, Unità base del gate protetto da decoerenza. **b**, Dinamica dello spin nucleare, condizionata dallo stato elettronico indicato dal ket e rappresentata in sfere di Bloch. [32]

Quando il tempo tra i due impulsi combacia perfettamente (nell'ordine del nanosecondo) con l'accoppiamento iperfine, così che questi (gli impulsi) entrano in risonanza con la rotazione dello spin nucleare, raggiungiamo la situazione ideale: possibilità di accoppiamento selettivo tra il veloce qubit-guida ed il più lento qubit bersaglio, sopprimendo tutti gli altri fenomeni non graditi.

Se la rotazione nucleare raggiunge i  $180^\circ$  il gate corrisponde alla porta CNOT che realizza la seguente operazione: dati due qubit in input (uno di controllo, e l'altro bersaglio), se

il controllo<sup>7</sup> è nello stato  $|0\rangle$  il bersaglio rimane inalterato, altrimenti il suo stato viene invertito. In particolare l'implementazione del CNOT con centri NV in condizioni di DD realizza il gate con una fedeltà  $\sim 83\%$ , dove con fedeltà intendiamo una misura di quanto gli stati elettronici e nucleari siano allineati, in fase.

Sulla base del criterio di Di Vincenzo per l'insieme universale di porte logiche, con questo gate CNOT, siamo quindi in grado di realizzare un set completo di gates per il register a due qubit, che trova realizzazione in un tipico centro NV.

La potenza di questa architettura computazionale è confermata dal successo che gli sviluppatori hanno conquistato implementando l'algoritmo di Grover (vedi I capitolo) per la ricerca di una data entrata da una lista disordinata di elementi, con una fedeltà prossima al 95%. È bene sottolineare che questi risultati sono stati ottenuti in un apparato sperimentale mantenuto a temperatura ambiente, dove i tempi di decoerenza elettronici, senza l'utilizzo di questa procedura, sarebbero nominalmente inferiori ai tempi di esecuzione, impedendo la buona riuscita dell'esecuzione.

---

<sup>7</sup>Nel nostro caso lo spin elettronico.

# Conclusioni

In questo lavoro di tesi abbiamo visto i qubits in azione sotto più sfaccettature, riuscendo via via a rispondere alle domande che ci siamo posti grazie ad una solida impalcatura costruita in itinere.

Abbiamo analizzato differenti configurazioni capaci di implementare un qubit, mostrando di volta in volta vantaggi e svantaggi del design considerato.

Come largamente discusso nell'Introduzione il fenomeno della decoerenza è il principale ostacolo che abbiamo incontrato nel corso del cammino. Abbiamo analizzato la dinamica di un sistema di  $N$  qubits interagenti con una cavità, fortemente influenzati da un campo esterno, in presenza di fenomeni dissipativi sia per i sistemi a due livelli che per la cavità, sottolineando le modalità con cui l'interazione ambiente-sistema comporta perdite di informazione.

In particolare abbiamo compreso come l'informazione posseduta da un arbitrario osservatore non sia un'entità astratta, esoterica. Piuttosto, *l'informazione è fisica*, e non vi è alcuna informazione senza un'adeguata rappresentazione. [34]

In pratica, vuol dire che lo stato dell'osservatore è in parte determinato da ciò che conosciamo del resto dell'universo, punto di vista meglio noto come *interpretazione esistenziale*.

Nel quarto capitolo abbiamo mostrato come ottenere un controllo universale, tollerante al rumore, su sistemi quantistici aperti servendoci puramente di manipolazioni cicliche sul sistema. Dalla prospettiva dell'informazione quantistica, questo si traduce nella possibilità di realizzare operazioni logiche tra qubits senza che siano affette da decoerenza, e senza l'aggiunta di risorse extra.

Possibilità che di certo non si è fatta sfuggire, come ha dimostrato il lavoro di T. van der Sar e colleghi, che sono stati capaci di realizzare un gate tra qubit implementati in gradi di libertà nei centri NV protetto da decoerenza, nonché capace di eseguire l'algoritmo quantistico di ricerca di Grover con altissima fedeltà.

La strada è ancora lunga, si è appena agli inizi, ma noi crediamo di poter vedere un giorno la nostra farfalla volare.

# Appendice A

## Proprietà dell'operatore di densità

Andiamo a scoprire quali proprietà deve soddisfare un generico operatore per ottenere la nomea di matrice di densità.

In primis, dalla definizione degli elementi di matrice (2.12)

$$\langle \phi_i | \rho | \phi_j \rangle = \sum_n W_n a_j^{(n)} a_i^{(n)*}$$

è evidente come  $\rho$  sia Hermitiano, cioè la matrice soddisfa la condizione

- $$\langle \phi_i | \rho | \phi_j \rangle = \langle \phi_j | \rho | \phi_i \rangle^*$$

Secondariamente, dato che la probabilità di trovare il sistema nello stato  $|\psi_n\rangle$  è  $W_n$  e analogamente la probabilità che  $|\psi_n\rangle$  si trovi nello stati  $|\phi_m\rangle$  è  $|a_m^{(n)}|^2$ , allora *la probabilità che il sistema si trovi nello stato  $|\phi_m\rangle$  è data dagli elementi diagonali*

$$\rho_{mm} = \sum_n W_n |a_m^{(n)}|^2 \tag{A.1}$$

Questa importante relazione fornisce un'interpretazione fisica degli elementi diagonali di  $\rho$ .

Essendo inoltre le probabilità dei numeri positivi, giungiamo alla relazione

- $$\rho_{mm} \geq 0$$

Possiamo inoltre provare che la probabilità  $W(\psi)$  di trovare il sistema in un generico stato  $|\psi\rangle$  dopo una misura è data dall'elemento di matrice

$$W(\psi) = \langle \psi | \rho | \psi \rangle \tag{A.2}$$

Questo fatto diventa evidente se inseriamo nella A.2 l'espressione (2.7)

$$W(\psi) = \sum_n W_n |\langle \psi_n | \psi \rangle|^2$$

e i coefficienti  $|\langle \psi_n | \psi \rangle|^2$  sono interpretati in accordo con la (2.4a).

La traccia di  $\rho$  è una costante indipendente dalla rappresentazione scelta. Dalla normalizzazione (2.4b) unita alla condizione

$$\sum_n W_n = 1$$

ne segue che

$$\text{tr} \rho = \sum_i \rho_{ii} = \sum_a W_a \sum_n |a_i^{(n)}|^2 = 1 \quad (\text{A.3})$$

Il valore di aspettazione di un generico operatore  $Q$  è invece dato dalla traccia del prodotto di  $\rho$  e  $Q$

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle &= \sum_{m,m'} W_n a_{m'}^{(n)} a_m^{(n)*} \langle \phi_{m'} | Q | \phi_m \rangle \\ &= \sum_{m,m'} \langle \phi_{m'} | Q | \phi_m \rangle \langle \phi_m | \rho | \phi_{m'} \rangle \\ &= \text{tr}(\rho Q) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

dove abbiamo prima sostituito la (2.8) nella (2.6) e successivamente utilizzato la (2.10). Alla luce dei fatti risulta più conveniente definire la matrice di densità con il risultato appena ottenuto piuttosto che con l'equazione (2.10) utilizzata in partenza: una volta fornito un set di operatori  $Q_i$  e dato il loro valore di aspettazione  $\langle Q_i \rangle$  come condizione iniziale, la relativa matrice di densità può essere determinata risolvendo il sistema di equazioni

$$\text{tr}(\rho Q_i) = \langle Q_i \rangle$$

Una volta determinata  $\rho$  ci è permesso calcolare ogni altro valore di aspettazione applicando la A.4.

## Stati puri

Immaginiamo di voler determinare quando una data matrice di densità descriva o meno uno stato puro. In principio ciò è possibile diagonalizzando la matrice, e se otteniamo che tutti gli elementi si annullano eccetto l' $i$ -esimo elemento diagonale, allora la matrice descrive uno stato puro. Tuttavia la diagonalizzazione è solitamente tediosa e risulta utile sviluppare un metodo più semplice da applicare.



Prima di tutto, andiamo a dimostrare che la relazione

$$\text{tr}(\rho^2) \leq (\text{tr}\rho)^2 \quad (\text{A.5})$$

sia valida in generale. Consideriamo un'arbitraria matrice di densità in forma diagonale e con elementi  $W_n$ . Allora

$$\text{tr}(\rho^2) = \sum_n W_n^2 \quad (\text{A.6a})$$

e

$$(\text{tr}\rho)^2 = \left( \sum_n W_n \right)^2 \quad (\text{A.6b})$$

Dato che le probabilità  $W_n$  sono numeri positivi, segue immediatamente che A.5 è valida per la rappresentazione diagonale. Inoltre, essendo la traccia invariante per cambi di base, possiamo affermare la validità generale di tale espressione.

Supponiamo ora che nella A.5 valga l'uguaglianza, da cui in base alla A.6

$$\sum_n W_n^2 = \left( \sum_n W_n \right)^2 \quad (\text{A.7})$$

Ma tale condizione può essere soddisfatta se e solo se tutti gli elementi  $W_n$  svaniscono tranne uno. Di conseguenza,  $\rho$  contiene solo un elemento diagonale non nullo nella rappresentazione diagonale, ed il sistema si trova in uno stato puro.

Resta quindi provata la validità del risultato (2.12) come condizione necessaria e sufficiente per la descrizione di stati puri.

# Appendice B

## Equazione di Schrödinger: considerazioni generali

### Indipendente dal tempo

Consideriamo un sistema chiuso ed isolato, la cui Hamiltoniana è indipendente dal tempo. Andiamo a mostrare come l'equazione (2.16), qui riportata per comodità

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n C_n |\mu_n(t)\rangle = \sum_n C_n e^{-iE_n t} |\mu_n\rangle$$

possa essere scritta nella più conveniente forma (2.17).

Considerato l'operatore esponenziale definito da

$$e^{-iHt} = 1 - iHt - \frac{1}{2}H^2t^2 - \dots \quad (\text{B.1})$$

e applicandolo al set di stati  $|\mu_n\rangle$  tenendo conto della relazione (2.14) otteniamo

$$e^{-iE_n t} |\mu_n\rangle = e^{-iHt} |\mu_n\rangle \quad (\text{B.2})$$

che, sostituita nella (2.16), dà luogo alla (2.17) come voluto:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt} \sum_n C_n |\mu_n\rangle = e^{-iHt} |\psi(0)\rangle$$

### Dipendente dal tempo

Sostituendo le (2.19) nell'equazione (2.18) otteniamo

$$i \frac{\partial U(t)}{\partial t} |\psi(0)\rangle = H(t)U(t) |\psi(0)\rangle \quad (\text{B.3a})$$

$$-i\frac{\partial U(t)^\dagger}{\partial t}\langle\psi(0)| = U(t)^\dagger H(t)\langle\psi(0)| \quad (\text{B.3b})$$

Dovendo queste essere valide per un arbitrario stato  $|\psi(0)\rangle$ , le possiamo scrivere come equazioni agli operatori

$$i\frac{\partial U(t)}{\partial t} = H(t)U(t) \quad (\text{B.4a})$$

$$-i\frac{\partial U(t)^\dagger}{\partial t} = U(t)^\dagger H(t) \quad (\text{B.4b})$$

Per assicurare che il sistema sia nello stato  $|\psi(0)\rangle$  al tempo  $t=0$  è necessario imporre la condizione iniziale

$$U(0) = \mathbb{1} \quad (\text{B.5})$$

Agendo con l'operatore  $U^\dagger$  sulla B.4a, con l'operatore  $U$  sulla B.4b e sottraendo le due equazioni, otteniamo

$$i\left(U^\dagger\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^\dagger}{\partial t}U\right) = i\frac{\partial(U^\dagger U)}{\partial t} = 0 \quad (\text{B.6})$$

Da cui segue che l'operatore  $U^\dagger U$  deve essere costante, e poiché soddisfa la condizione iniziale B.5 deve anche essere unitario:

$$U^\dagger U = \mathbb{1} \quad (\text{B.7})$$

# Appendice C

## Forma generale del generatore $\mathcal{L}$

Per questo fine, consideriamo il caso di uno spazio di Hilbert finito dimensionale  $\mathcal{H}_S$ ,  $\dim \mathcal{H}_S = N$ . Il corrispondente spazio di Liouville degli operatori sar   $N^2$  dimensionale, e scegliamo una base completa ortonormale di operatori  $F_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N^2$  tale che i prodotti scalari soddisfano

$$(F_i, F_j) \equiv \text{tr}_S \{ F_i^\dagger F_j \} = \delta_{ij} \quad (\text{C.1})$$

Per convenienza uno degli operatori di base   scelto proporzionale all'identit , ovvero  $F_{N^2} = (1/N)^{1/2} I_S$ , cos  che gli altri operatori siano senza traccia:  $\text{tr} F_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N^2 - 1$ . Applicando la relazione di completezza ad operatore  $W_{\alpha\beta}(t)$  definiti nella 2.41, abbiamo

$$W_{\alpha\beta}(t) = \sum_{i=1}^{N^2} F_i (F_i, W_{\alpha\beta}(t)) \quad (\text{C.2})$$

Tenendo in conto la 2.40 possiamo scrivere l'azione della mappa dinamica  $V(t)$  come

$$V(t)\rho_S = \sum_{i,j=1}^{N^2} c_{ij}(t) F_i \rho_S F_j^\dagger \quad (\text{C.3})$$

dove

$$c_{ij}(t) \equiv \sum_{\alpha\beta} (F_i, W_{\alpha\beta}(t)) (F_j, W_{\alpha\beta}(t))^* \quad (\text{C.4})$$

I coefficienti della matrice  $c = (c_{ij})$  sono Hermitiani e positivi; infatti per ogni vettore  $v$  complesso  $N^2 - \dim$  abbiamo

$$\sum_{ij} c_{ij} v_i^* v_j = \sum_{\alpha\beta} \left| \left( \sum_i v_i F_i, W_{\alpha\beta}(t) \right) \right|^2 \geq 0 \quad (\text{C.5})$$

da cui  $c > 0$

La definizione 2.45 del generatore  $\mathcal{L}$  mi da, in virtù della C.3

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\rho_S &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{V(\epsilon)\rho_S - \rho_S\}/\epsilon \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{N} \frac{c_{N^2N^2}(\epsilon) - N}{\epsilon} \rho_S + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N^2-1} \left( \frac{c_{iN^2}(\epsilon)}{\epsilon} F_i \rho_S + \frac{c_{N^2i}(\epsilon)}{\epsilon} \rho_S F_i^\dagger \right) + \right. \\ &\quad \left. \sum_{i,j=1}^{N^2-1} \frac{c_{ij}(\epsilon)}{\epsilon} F_i \rho_S F_j^\dagger \right\} \end{aligned} \quad (C.6)$$

Ora, definiamo in coefficienti  $a_{ij}$  con le relazioni

$$a_{N^2N^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{c_{N^2N^2}(\epsilon) - N}{\epsilon} \quad (C.7a)$$

$$a_{iN^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{c_{iN^2}(\epsilon)}{\epsilon}, \quad i = 1, \dots, N^2 - 1 \quad (C.7b)$$

$$a_{ij} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{c_{ij}(\epsilon)}{\epsilon}, \quad i, j = 1, \dots, N^2 - 1 \quad (C.7c)$$

ed introduciamo le quantità

$$F = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N^2-1} a_{iN^2} F_i \quad (C.8a)$$

$$G = \frac{1}{2N} a_{N^2N^2} I_S + \frac{1}{2} (F^\dagger + F) \quad (C.8b)$$

e l'operatore Hermitiano

$$H = \frac{1}{2i} (F^\dagger - F) \quad (C.9)$$

Notiamo che la matrice definita dai coefficienti  $a_{ij}$  è Hermitiana e positiva. Con l'aiuto di queste definizioni possiamo scrivere il generatore come

$$\mathcal{L}\rho_S = -i[H, \rho_S] + \{G, \rho_S\} + \sum_{i,j=1}^{N^2-1} a_{ij} F_i \rho_S F_j^\dagger \quad (C.10)$$

Dato che il semi-gruppo preserva la traccia<sup>1</sup> abbiamo, per tutte le matrici di densità  $\rho_S$

$$0 = \text{tr}_S \{\mathcal{L}\rho_S\} = \text{tr}_S \left\{ \left( 2G + \sum_{i,j=1}^{N^2-1} a_{ij} F_j^\dagger F_i \right) \rho_S \right\} \quad (C.11)$$

---

<sup>1</sup>Risultato mostrato nella 2.43

da cui deduciamo che

$$G = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N^2-1} a_{ij} F_j^\dagger F_i \quad (\text{C.12})$$

Quindi, dalla C.10 otteniamo la *prima forma standard* del generatore

$$\mathcal{L}\rho_S = -i[H, \rho_S] + \sum_{i,j=1}^{N^2-1} a_{ij} \left( F_i \rho_S F_j^\dagger - \frac{1}{2} \{F_j^\dagger F_i, \rho_S\} \right) \quad (\text{C.13})$$

Poiché i coefficienti della matrice  $a = (a_{ij})$  sono positivi, la possiamo diagonalizzare con l'aiuto di un'appropriata trasformazione unitaria  $u$ ,

$$uau^\dagger = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_{N^2-1} \end{bmatrix} \quad (\text{C.14})$$

dove gli autovalori  $\gamma_i$  sono positivi. Introducendo un nuovo set di operatori  $A_k$  per cui

$$F_i = \sum_{k=1}^{N^2-1} u_{ki} A_k \quad (\text{C.15})$$

siamo condotti alla forma *diagonale* del generatore in equazione 2.47

$$\mathcal{L}\rho_S = -i[H, \rho_S] + \sum_{k=1}^{N^2-1} \gamma_k \left( A_k \rho_S A_k^\dagger - \frac{1}{2} A_k^\dagger A_k \rho_S - \frac{1}{2} \rho_S A_k^\dagger A_k \right)$$

## Appendice D

# Calcolo dell'equazione master per un sistema di $N$ spin interagente con l'ambiente

Per rimuovere la dipendenza temporale dalla Hamiltoniana 3.26, aggiungendo e sottraendo il termine  $\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a}$  otteniamo

$$H(t) = \omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \delta \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_{l=1}^N \left[ \frac{\omega_0}{2} \hat{\sigma}_{z,l} + g(\hat{\sigma}_l^\dagger \hat{a} + \hat{\sigma}_l \hat{a}^\dagger) + \Omega(e^{-i\omega_D t} \hat{\sigma}_l^\dagger + e^{i\omega_D t} \hat{\sigma}_l) \right] \quad (\text{D.1})$$

Ora definiamo

$$H_0 = \omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_{l=1}^N \frac{\omega_0}{2} \hat{\sigma}_{z,l} \quad (\text{D.2a})$$

$$H_1 = \delta \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_{l=1}^N \left[ g(\hat{\sigma}_l^\dagger \hat{a} + \hat{\sigma}_l \hat{a}^\dagger) + \Omega(e^{-i\omega_D t} \hat{\sigma}_l^\dagger + e^{i\omega_D t} \hat{\sigma}_l) \right] \quad (\text{D.2b})$$

ed operiamo la trasformazione unitaria  $H^I = \hat{U}_1 H_1 \hat{U}_1^\dagger$  in condizione di risonanza  $\omega_0 = \omega_D$ , dove  $\hat{U}_1 = e^{iH_0 t}$ . In questo modo gli operatori di Pauli diventano  $\hat{\sigma}_l \rightarrow \hat{\sigma}_l e^{-i\omega_0 t}$  mentre gli operatori della cavità  $\hat{a} \rightarrow \hat{a} e^{-i\omega_0 t}$  ed otteniamo una nuova Hamiltoniana

$$H^I = \delta \hat{a}^\dagger \hat{a} + g \sum_{l=1}^N \left[ (\hat{\sigma}_l^\dagger \hat{a} + \hat{\sigma}_l \hat{a}^\dagger) + \Omega(\hat{\sigma}_l^\dagger + \hat{\sigma}_l) \right] \quad (\text{D.3})$$

Una seconda trasformazione unitaria [23] applicata alla D.3 nella condizione di RWA mi permette infine di ottenere l'espressione 3.28:

$$H_{eff} = \frac{g}{2} \sum_{l=1}^N \hat{\sigma}_{x,l} (\hat{a} e^{i\delta t} + \hat{a}^\dagger e^{-i\delta t})$$

---

Data l'equazione master 3.29 dobbiamo anche qui operare trasformazioni unitarie per includere l'Hamiltoniana effettiva 3.28. Si tratta esattamente delle stesse trasformazioni descritte poco fa: utilizzando l'operatore  $\hat{U}_1 = e^{iH_0 t}$ , e visto che gli operatori di Liouville sono invarianti per questa trasformazione, ottengo l'equazione master per il nuovo operatore di densità  $\hat{\rho}^I = \hat{U}_1 \hat{\rho} \hat{U}_1^\dagger$ :

$$\dot{\hat{\rho}}^I = -i [H^I, \hat{\rho}^I] + \hat{\mathcal{L}}_f \hat{\rho}^I + \hat{\mathcal{L}}_a \hat{\rho}^I \quad (\text{D.4})$$

Una seconda trasformazione unitaria applicata alla D.4, con la solita approssimazione di RWA mi porta a scrivere la 3.32: [23]

$$\hat{\mathcal{L}}_a^{eff} \hat{\rho} = \frac{\gamma}{4} \sum_{l=1}^N [\hat{\sigma}_{x,l} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{x,l} - \hat{\rho}]$$

da cui ottengo l'espressione finale per l'evoluzione dell'operatore di densità

$$\dot{\hat{\rho}} = -i [H_{eff}, \hat{\rho}] + \hat{\mathcal{L}}_f \hat{\rho} + \hat{\mathcal{L}}_a^{eff} \hat{\rho} \quad (\text{D.5})$$



# Bibliografia

- [1] A. Turing, *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, Proc. London Math. Soc. (1936)
- [2] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press (2010)
- [3] J.E. Hopcroft, J.D. Ullman, *Introduction to automata theory, languages and computation*, Addison-Wesley (1979)
- [4] M.R. Garey, D.S. Johnson, *Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness*, W.H. Freeman (1979)
- [5] P.A. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, 4th ed. Oxford University Press. (1958)
- [6] J.A. Bergou, M. Hillery, *Introduction to the Theory of Quantum Information Processing*, Springer (2013)
- [7] A.Steane, *Quantum Computing*, University of Oxford (1997)
- [8] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, volume 3, Addison-Wesley, Reading, MA.(1965)
- [9] D. Loss, D. P. DiVincenzo, *Quantum computation with quantum dots*, Phys. Rev. A 57, 120 (1998)
- [10] John Preskill, *Lecture notes for physics 229: Quantum information and computation* (1998)
- [11] A.J. Legget, *Qubits, Cbits, Decoherence, Quantum Measurement and Environment* University of Illinois (2002)
- [12] K. Blum, *Density Matrix Theory and Applications*, 3rd ed. Springer (2012)
- [13] P.Cappellaro, *Quantum theory of radiation interaction*, MIT (2012)

- [14] H.P. Breuer, F. Petruccione, *The theory of open quantum system*, Oxford University Press (2006)
- [15] G. Lindblad, *On the generators of quantum dynamical semigroups*, Springer (1975)
- [16] C. A. Brasil, F.F. Fanchini, R. J. Napolitano, *A simple derivation of the Lindblad equation* (2012)
- [17] W. H. Zurek, *Phys. Rev. Lett.* D 24, 1516-1524 (1981)
- [18] W. H. Zurek, *Phys. Rev. Lett.* D 26, 1862-1880 (1982)
- [19] M. S. Chapman, et al., *Phys. Rev. Lett.* 75, 3783 (1995)
- [20] J. P. Paz, W. H. Zurek, *Environment-Induced Decoherence and the Transition from Quantum to Classical*, Dieter Heiss (Ed.): LNP 587, pp. 77-148, (2002)
- [21] E.T. Jaynes and F.W. Cummings *Proc. IEEE* 51, 89, ( 1963)
- [22] B.H. Bransden, C.J. Joachain, *Physics of atoms and molecules*, Longman Scientific & Technical, (1983)
- [23] M. Bina, *Open Quantum System Dynamics within and beyond the Jaynes-Cummings Model*, Università degli studi di Milano, (2010)
- [24] A. Steane, *Proc. Roy. Soc. Lond.* A452, 2551, (1996)
- [25] Mc Williams, Sloane, *Theory of Error Correcting Codes*, Elsevier, Amsterdam, (1977)
- [26] P. Shor, *Phys. Rev.*, A 52, 2493 (1995)
- [27] J. Preskill, *Fault-Tolerant Quantum Computation*, California Institute of Technology, Pasadena, CA 91125, USA (1997)
- [28] L. Viola, S. Lloyd, E. Knill, *Universal control of decoupled quantum systems*, *Phys. Rev. Lett.* 83, 4888 (1999)
- [29] A. Bermudez, F. Jelezko, M.B. Plenio, A. Retzker, *Electron-mediated nuclear-spin interactions between distant NV centers*, *Phys. Rev. Lett.* 107, 150503 (2011)
- [30] S.C. Benjamin, J.M. Smith, *Driving a Hard Bargain with Diamond Qubits*, *Physics* 4,78 (2011)
- [31] L. Viola, S. Lloyd, *Phys. Rev. A* 58, 2733 (1998)

- [32] T. van der Sar, Z.H. Wang et al. *Decoherence-protected quantum gates for a hybrid solid-state spin register*, Nature, vol 484, (2012)
- [33] V. Gorini, A. Kossakowski, E.C.G. Sudarshan, *Completely positive dynamical semigroups of  $N$  level systems*, J. Math. Phys. 17 (1976).
- [34] H. Feng and B.-L. Hu, *Proc. of the Drexel-4 Symposium on Quantum Nonintegrability: Quantum-Classical Correspondence*, World Scientific, Singapore (1998)
- [35] J.E. Field, *The properties of diamond*, Academic Press, London New York (1979)