

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

I WORMHOLES ED IL LORO IMPIEGO PER IL VIAGGIO INTERSTELLARE

Relatore:
Prof. Roberto Casadio

Presentata da:
Luca Pedrelli

Anno Accademico 2015/2016

Sommario

Viaggiare da un punto all'altro dell'universo muovendosi in uno spazio-tempo piatto richiede tempi talmente colossali da risultare impossibile per la nostra razza; pertanto, un viaggio interstellare potrebbe essere realizzato solo per mezzo di topologie relativistiche in grado di accorciare la distanza fra i punti dell'universo. Dopo aver dato una serie di motivazioni per cui i buchi neri ed il ponte di Einstein-Rosen non sono adatti ad essere impiegati viene introdotta una particolare classe di soluzioni, presentata per la prima volta da Michael S. Morris e Kip S. Thorne, delle equazioni di Einstein: essa descrive wormholes i quali, almeno in linea di principio, risultano attraversabili dagli esseri umani in quanto non presentano un orizzonte degli eventi sulla gola. Quest'ultima proprietà, insieme alle equazioni di campo di Einstein, pone dei vincoli piuttosto estremi sul tipo di materiale in grado di dar luogo alla curvatura spazio-temporale del wormhole: nella gola del wormhole la materia deve possedere una tensione radiale τ_0 di enorme intensità, $\tau_0 \sim (\text{pressione al centro della stella di neutroni più massiva}) \cdot (20 \text{ km})^2 / (\text{circonferenza della gola})^2$. Inoltre, questa tensione dev'essere maggiore della densità di energia del materiale, $\rho_0 c^2$. Non si conosce alcun materiale con la proprietà $\tau_0 > \rho_0 c^2$, la quale viola entrambe le "condizioni sull'energia" alla base di teoremi molto importanti e verificati della relatività generale. L'esistenza di questa materia non può essere esclusa a priori, visto che non esiste prova sperimentale o matematica della sua irrealisticità fisica, ma non essendo mai stata osservata è importante assicurarsi di impiegarne il meno possibile nel wormhole: questo ci porterà a mostrare che i wormhole in cui il materiale esotico presenta una densità di energia negativa per gli osservatori statici sono i più adatti al viaggio interstellare.

Indice

1	Introduzione: il viaggio interstellare	3
1.1	I Buchi Neri per il viaggio interstellare	3
1.2	I Wormholes per il viaggio interstellare	5
2	Il modello matematico del wormhole attraversabile	8
2.1	Proprietà dei wormholes attraversabili	8
2.2	Forma della metrica	10
2.3	Equazioni di struttura del wormhole	10
2.3.1	Calcolo delle componenti del tensore di Einstein	11
2.3.2	Considerazioni sul tensore energia-impulso	14
2.3.3	Sostituzione nelle equazioni di campo di Einstein	15
2.3.4	Condizioni al contorno	17
2.4	Geometria spaziale del wormhole	17
2.4.1	Inclusione nello spazio Euclideo tridimensionale: il diagramma di embedding	18
2.4.2	Caratteristiche geometriche del wormhole	19
2.5	Assenza di orizzonti nel wormhole	20
2.6	Attraversamento del wormhole	21
2.6.1	Itinerario del viaggio interstellare	21
2.6.2	Durata del viaggio interstellare	23
2.6.3	Intensità delle forze mareali e di propulsione	24
2.7	Materiale del wormhole attraversabile	28
2.7.1	Vincoli su tensione e densità di massa nella gola	28
2.7.2	Considerazioni sulla realistica della materia esotica	30
2.7.3	Considerazioni sull'effetto della materia sul corpo del viaggiatore	31
3	Esempi di wormholes attraversabili	33
3.1	Soluzione senza forze mareali	33
3.2	Soluzione con materiale esotico confinato entro grande distanza dalla gola	37
3.3	Soluzione con massimo confinamento del materiale esotico	41

Capitolo 1

Introduzione: il viaggio interstellare

Vogliamo innanzitutto capire come poter realizzare in via teorica un viaggio interstellare, vale a dire un viaggio fra diversi sistemi solari, sulla base della relatività ristretta e generale.

1.1 I Buchi Neri per il viaggio interstellare

A causa della vastità dell'universo e del secondo postulato della relatività ristretta, secondo cui nessun oggetto può essere accelerato di modo da raggiungere la velocità della luce $c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$, risulta che un viaggio interstellare è pressoché irrealizzabile in tempi utili semplicemente muovendosi a velocità molto prossime a c in uno spazio-tempo piatto. Per questa ragione capita che Serie TV e film fantascientifici parlino di viaggi interstellari realizzati per mezzo di topologie spazio-temporali; spesso vengono tirati in ballo i buchi neri (sostanzialmente perché molto popolari anche al di fuori dell'ambito scientifico) mostrando che una navicella spaziale che cade all'interno dell'orizzonte degli eventi viene trasportata rapidamente in un'altra distante zona dell'universo, o addirittura in un altro universo, compiendo di fatto un viaggio interstellare. Mentre un comune spettatore potrebbe convincersi che questo punto di vista non sia poi così surreale, un relativista riuscirà facilmente ad individuare almeno¹ tre ragioni per cui questo sistema di viaggio interstellare non può funzionare:

1. *Impossibilità di viaggio in due direzioni.* Un orizzonte degli eventi (che d'ora in avanti chiameremo orizzonte per semplicità) può essere definito come una regione dello spazio-tempo oltre la quale cessa di essere possibile osservare un qualsiasi

¹La metrica di Kerr, che descrive buchi neri rotanti, possiede all'interno percorsi verso altre regioni asintoticamente piatte dello spazio-tempo, il che potrebbe far pensare che questo tipo di oggetto sia adatto per il viaggio interstellare; in realtà si possono fornire diverse motivazioni per cui anche i buchi neri rotanti non sono adatti, motivazioni che si vanno a sommare alle tre indicate per i buchi neri non rotanti.

fenomeno e, pertanto, si comporta come una membrana unidirezionale in cui gli oggetti possono cadere ma nulla può emergere. A ciascun buco nero è associato un orizzonte degli eventi (situato ad una distanza dal suo centro pari al suo raggio di Schwarzschild), quindi se si utilizza questa struttura per effettuare un viaggio interstellare non si potrà mai più ritornare indietro.

2. *Breve durata del passaggio.* L'oggetto dall'altra parte, cioè quello dal quale il viaggiatore emerge dopo aver attraversato l'orizzonte del buco nero, non può essere anch'esso un buco nero per quanto detto nel punto precedente; tutti gli oggetti conosciuti oggi come soluzioni alle equazioni di Einstein che potrebbero esistere dall'altra parte di un buco nero (per esempio un buco bianco) possiedono un antiorizzonte, vale a dire una superficie attraverso la quale gli oggetti possono emergere ma non possono entrare. Gli antiorizzonti sono fortemente instabili rispetto alle piccole perturbazioni: se da qualche parte si dovesse formare un antiorizzonte di massa M e un pacchetto di luce di energia arbitrariamente bassa si muovesse verso di esso (senza mai raggiungerlo) quest'ultimo diverrebbe sempre più energetico (blueshiftato) man mano che cade e, per via dell'energia acquisita, arriverebbe a convertire l'antiorizzonte in un normale orizzonte in un tempo molto breve,² dell'ordine di qualche secondo. In questo modo l'antiorizzonte finirebbe per chiudersi definitivamente impedendo ad un qualsiasi viaggiatore di emergervi e, quindi, di raggiungere la destinazione.
3. *Spaghetizzazione*³. Sull'orizzonte di un buco nero di massa M , le forze gravitazionali mareali (cioè dovute all'inomogeneità della gravità rispetto alla distanza dal centro) producono un'enorme accelerazione relativa fra la testa ed i piedi di un viaggiatore di altezza L , la cui intensità è $\sim L(2GM/c^3)^{-2}$. A meno che il buco nero sia estremamente massivo ($M \geq 10^4$ masse solari), quindi grande, le forze mareali risultano in grado di uccidere il viaggiatore per allungamento già ben prima dell'orizzonte, rendendo così impossibile non solo sopravvivere al viaggio ma addirittura raggiungere il buco nero.

Risulta quindi chiaro come, anche per una civiltà molto più avanzata della nostra, l'idea di impiegare i buchi neri per il viaggio interstellare sia da scartare: esiste un'altra geometria relativistica in grado di trasportarci da un punto all'altro dell'universo in tempi brevi?

²Si tenga presente l'equivalenza fra massa ed energia, dovuta alla ben nota formula $E = mc^2$.

³Con il termine Spaghetizzazione si fa riferimento all'allungamento che gli oggetti subiscono entrando in un buco nero a causa delle elevate forze gravitazionali mareali in esso presenti.

1.2 I Wormholes per il viaggio interstellare

Possiamo definire Wormhole una curvatura dello spazio-tempo in grado di unire due regioni asintoticamente piatte di diversi universi (vedi fig. 1.1(a)) o dello stesso universo (vedi fig. 1.1(b)); questi due tipi di wormholes, essendo distinti solo topologicamente, sono descritti dalla stessa soluzione delle equazioni di Einstein. In termini più pratici, un wormhole è un tunnel spazio-temporale, una scorciatoia verso un'altra regione del nostro universo o una strada verso un altro universo. Il collegamento fra le due zone avviene attraverso la “gola” del wormhole, ovvero la zona dove si ha che la superficie dei diagrammi di fig. 1.1, detta superficie di embedding, è verticale; la circonferenza corrispondente è quella di raggio minore fra quelle centrate sull'asse z di fig. 1.1, rispetto al quale l'embedding del wormhole nello spazio Euclideo è simmetrico.

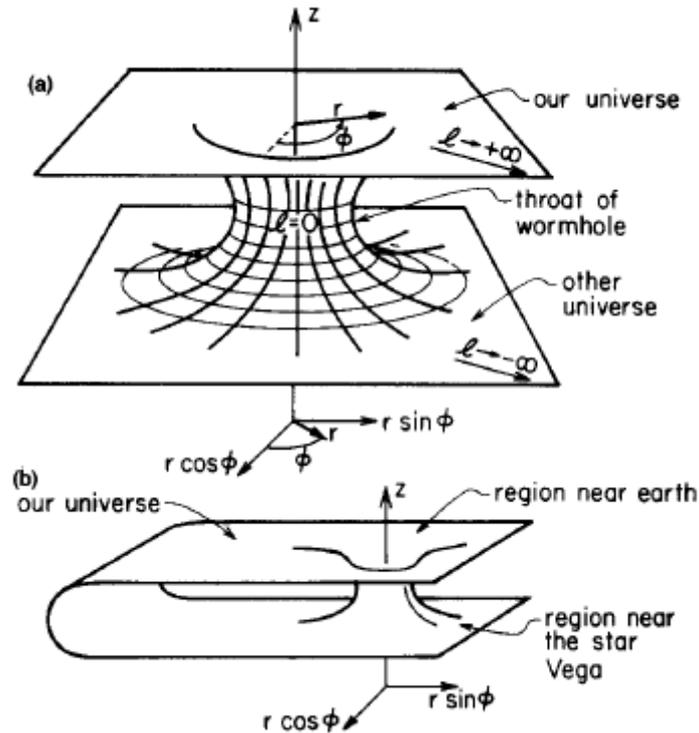


Figura 1.1: (a) Diagramma di embedding di un wormhole che connette due universi distinti. (b) Diagramma di embedding di un wormhole che connette due regioni distanti nel nostro stesso universo. Queste superfici rappresentano la geometria di una fetta equatoriale dello spazio-tempo ($\theta = \pi/2$) ad un certo istante di tempo ($t = \text{costante}$). Nella sez. 2.4.1 viene spiegato in dettaglio il significato di questi diagrammi e come si ottengono.

È importante sottolineare sin da subito come i wormholes, a differenza dei buchi neri, siano un qualcosa di puramente teorico: ad oggi non ne è mai stato osservato uno e non ci sono prove scientifiche che ne suggeriscano l'esistenza. Tuttavia, allo stesso tempo, non vi è alcuna motivazione teorica né tantomeno evidenza sperimentale che questi oggetti non possano esistere (come ribadiremo anche in seguito), pertanto ha senso parlarne e ipotizzare che possano essere impiegati per realizzare viaggi interstellari.

Pochi sanno che nello studio della relatività i wormholes hanno preceduto cronologicamente i buchi neri: entro un anno da quando Einstein formulò la versione finale delle sue equazioni di campo, il fisico viennese Ludwig Flamm riconobbe che la soluzione di Schwarzschild di tali equazioni rappresentava proprio un wormhole (chiamato successivamente wormhole di Schwarzschild per questa ragione). Nei decenni immediatamente successivi (sino agli anni 50) i wormholes di Schwarzschild furono analizzati e studiati diverse volte, anche dallo stesso Einstein insieme al fisico statunitense Nathan Rosen [1] (da qui l'ulteriore nome "ponte di Einstein-Rosen" per questi oggetti). Tuttavia, ogni speranza che i wormholes di Schwarzschild possano essere impiegati dalla nostra specie per il viaggio interstellare è vanificata da una serie di problemi:

1. *Spaghetizzazione.* Le forze gravitazionali mareali nella gola di un Wormhole di Schwarzschild sono della stessa intensità di quelle che si trovano sull'orizzonte di un buco nero di Schwarzschild. Quindi, per quanto detto nella sezione precedente, a meno che la massa del wormhole superi le 10^4 masse solari (il che implica che la circonferenza della gola superi i 10^5 km) qualsiasi essere umano che si avventuri all'interno del wormhole verrebbe ucciso (per allungamento) nell'attraversare la gola.
2. *Restringimento della gola.* Il wormhole di Schwarzschild non è una topologia statica, bensì dinamica: la sua superficie di embedding, col passare del tempo, si espande partendo da una circonferenza alla gola di zero (wormhole chiuso, le due zone sono disconnesse) sino ad arrivare ad una circonferenza massima, per poi ricontrarsi ad una circonferenza di zero. Si può calcolare che questo processo di espansione e seguente contrazione avviene talmente rapidamente da rendere impossibile l'attraversamento dell'intero wormhole prima della chiusura della gola, anche muovendosi a velocità molto prossime a quella della luce.
3. *Antiorizzonte.* Un wormhole di Schwarzschild possiede un antiorizzonte sulla gola, da cui il viaggiatore emerge; come per tutti gli antiorizzonti, anche quest'ultimo è fortemente instabile rispetto a perturbazioni arbitrariamente piccole. Questa instabilità accelera ulteriormente la chiusura della gola, rendendo ancora più difficile attraversare il wormhole.

Questi ostacoli insormontabili hanno distolto l'interesse dei teorici dai wormhole per diverso tempo sino a quando, verso la fine degli anni 80, il fisico teorico Kip S. Thorne

e il suo studente Michael S. Morris pubblicarono un articolo [2] nel quale mostravano di aver trovato una soluzione esatta delle equazioni di Einstein che descriveva una nuova classe di wormholes: questi ultimi, a differenza dei wormholes di Schwarzschild, sono attraversabili.

Questa tesi si pone come obiettivo quello di studiare il wormhole attraversabile di Morris-Thorne per comprendere se e come potrebbe avvenire in un (si spera non troppo) lontano futuro il viaggio interstellare e quali sono i suoi limiti; vedremo infatti che questa soluzione delle equazioni di Einstein non è esente da problemi, legati al fatto che l'attraversabilità pone condizioni molto stringenti sul tipo di materiale che genera la curvatura spaziotemporale del wormhole. Ad oggi comunque non è ben chiaro se le leggi della fisica proibiscano o permettano l'esistenza di un tale materiale (ne discuteremo dettagliatamente nella sez. 2.7), di conseguenza non si può escludere a priori la possibilità che i wormholes di Morris-Thorne possano esistere e/o essere realizzati.

Riassumendo, i wormholes di Schwarzschild sono teoricamente plausibili ma anche se esistessero probabilmente non saranno mai attraversabili, nemmeno da una civiltà molto avanzata, mentre i wormholes di Morris-Thorne sono sicuramente attraversabili e, pertanto, se si riuscissero a trovare prove scientifiche che confermano l'esistenza del materiale che li realizza, una civiltà avanzata potrebbe sfruttarli (o, ancora meglio, costruirli essa stessa) per realizzare viaggi interstellari (e temporali)⁴, coprendo così enormi distanze in tempi brevi.

⁴Morris, Thorne e Yurtsever riuscirono a spiegare come il loro wormhole potesse essere impiegato anche come macchina del tempo; tuttavia l'obiettivo di questa tesi è esclusivamente quello di spiegare come avviene lo spostamento spaziale, pertanto trascureremo questo aspetto.

Capitolo 2

Il modello matematico del wormhole attraversabile

Nelle prossime sezioni ripercorreremo il procedimento seguito da Morris e Thorne per trovare i vincoli matematici da imporre al fine di ottenere la soluzione di wormhole attraversabile delle equazioni di Einstein (detto anche wormhole di Morris-Thorne).

2.1 Proprietà dei wormholes attraversabili

Dopo l'introduzione abbiamo capito che per effettuare un viaggio interstellare potremmo impiegare un wormhole attraversabile, ovvero un wormhole per mezzo del quale il viaggio risulti non solo fattibile ma anche confortevole per un essere umano.

Iniziamo con l'elencare una serie di proprietà che vogliamo che la nostra soluzione posseda, proprietà le quali porranno vincoli matematici ben precisi durante la nostra trattazione.

Lista delle proprietà dei wormholes attraversabili

1. *Forma semplice della metrica.* Imponiamo che la metrica sia a simmetria sferica e statica (indipendente dal tempo) per semplificare i conti; la staticità della metrica non esclude in alcun modo che il wormhole possa essere instabile rispetto alle perturbazioni, sferiche e non (vedi punto 8), semplicemente ci dice che in assenza di perturbazioni abbiamo una curvatura statica.
2. *Validità della relatività generale.* La soluzione deve obbedire alle equazioni di campo di Einstein in ogni punto.
3. *Geometria spaziale tipica dei wormhole.* Affinché sia davvero un wormhole la soluzione deve avere una geometria bidimensionale tale da dar luogo ad un diagramma di embedding come quello illustrato in Figura 1.1.

4. *Assenza di orizzonti degli eventi.* Avrebbe poco senso pratico costruire una scorciatoia spazio-temporale che possa essere utilizzata in un unico senso, quindi richiediamo che il wormhole consenta il viaggio in entrambe le direzioni; per quanto detto nell'introduzione, questo equivale a richiedere la totale assenza di orizzonti degli eventi.
5. *Bassa intensità delle forze mareali.* Affinché l'attraversamento del wormhole non sia mortale richiediamo che le forze mareali gravitazionali avvertite da un viaggiatore umano abbiano un'intensità tale da poter essere ben tollerate.
6. *Vantaggio temporale.* Tenendo a mente che la ragione per cui ci siamo rivolti ai wormholes per il viaggio interstellare è che vogliamo coprire grandi distanze in tempi ragionevolmente brevi, richiediamo che l'attraversamento avvenga di modo che il tempo trascorso dal viaggiatore nella gola risulti breve, sia per il viaggiatore stesso che per chi lo osserva dall'esterno e lo vede muoversi.
7. *Realisticità della materia costituente.* La materia e i campi che generano la curvatura spaziotemporale del wormhole devono avere un tensore energia-impulso "fisicamente ragionevole" (cioè che descrive un materiale la cui esistenza è fisicamente possibile) dal punto di vista di *tutti* gli osservatori.
8. *Stabilità.* Il wormhole deve essere stabile rispetto alle perturbazioni, o comunque, le sue instabilità devono poter essere monitorate e tenute sotto controllo da una civiltà avanzata.
9. *Possibilità di assemblaggio.* Una civiltà arbitrariamente avanzata rispetto alla nostra dovrebbe poter assemblare il wormhole; questo non solo equivale a richiedere che il materiale per realizzarlo esista nel nostro universo (vedi punto 7), ma anche che ne sia necessario molto meno di quello contenuto nell'intero universo e che il tempo necessario per terminarne l'assemblamento sia molto inferiore all'età dell'universo.

Le proprietà dalla 1 alla 3 sono quelle che rendono la soluzione un wormhole, perciò potremmo indicarle come "Caratteristiche basilari del wormhole"; le proprietà dalla 4 alla 6 sono ciò che permette ad un essere umano di compiere il viaggio interstellare per mezzo del wormhole, pertanto le chiamiamo "Caratteristiche per l'attraversabilità del wormhole". Per la proprietà 7, essa determina se un wormhole che possiede le caratteristiche precedentemente indicate può esistere o meno; dovremo quindi regolare i parametri del wormhole, di modo da rendere il materiale che lo costituisce il più compatibile possibile con quella che è la nostra attuale conoscenza della materia presente nell'universo.

I primi sette punti della lista verranno discussi e approfonditi matematicamente nelle sezioni successive. In particolare vedremo che il settimo punto ci darà non pochi problemi: l'attraversabilità vincola il tensore energia-impulso ad assumere una forma

che si discosta da ciò che solitamente s'intende per "fisicamente ragionevole". Gli ultimi due punti dell'elenco non verranno affrontati: il punto 8 richiederebbe un'analisi del wormhole anche in condizioni in cui la metrica è dipendente dal tempo e sfericamente non simmetrica, il che va oltre lo scopo di questa tesi, mentre il punto 9 non consente un'analisi quantitativa, e quel poco che si potrebbe dire qualitativamente sul processo di costruzione di un wormhole richiede conoscenze di gravità quantistica che questo studente non possiede.

2.2 Forma della metrica

La proprietà 1 della sez. 2.1 richiede che la metrica spaziotemporale del wormhole sia esprimibile in forma statica e sfericamente simmetrica; consideriamo quindi, come punto di partenza, la seguente metrica spazio-temporale:

$$ds^2 = -e^{2\Phi} c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - b/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.1)$$

$\Phi = \Phi(r)$ e $b = b(r)$ sono due funzioni arbitrarie di r ; sulla base delle proprietà numerate introdotte nella sezione precedente, determineremo per queste funzioni una serie piuttosto lunga di vincoli matematici affinché la metrica (2.1) rappresenti effettivamente un wormhole attraversabile. Come ribadiremo più avanti, $b(r)$ determina la forma spaziale del wormhole, ed è pertanto denominata "funzione di forma", mentre $\Phi(r)$ determina il redshift gravitazionale causato dalla curvatura, ed è quindi detta "funzione di redshift". La coordinata r ha il seguente significato geometrico: $2\pi r$ è la circonferenza di un cerchio centrato nella gola del wormhole, pertanto r è detta raggio areale e rappresenta la coordinata radiale nello spazio euclideo in cui è incorporato il wormhole di fig. 1.1; si noti che la lunghezza propria (cioè misurata da un osservatore in un sistema di riferimento proprio) del raggio della circonferenza $2\pi r$ non è r a causa della curvatura spazio-temporale presente (vedi sez. 2.4.2). Come si può vedere dalla fig. 1.1, per un wormhole r decresce da $+\infty$ fino ad un valore minimo b_0 , dove è situata la gola, mentre ci spostiamo nell'universo inferiore verso la gola del wormhole, poi torna a crescere sino a $+\infty$ quando usciamo dalla gola diretti verso l'universo superiore. Le coordinate t , θ e ϕ rappresentano il tempo, l'angolo polare e l'angolo azimutale nello spazio-tempo piatto di Minkowski, vale a dire per un osservatore a distanza $r \gg b_0$ dalla gola.

2.3 Equazioni di struttura del wormhole

Imponendo le equazioni di Einstein in ogni punto dello spazio (sez. 2.1, proprietà 2) otteniamo le equazioni di struttura del wormhole: una volta che $b(r)$ e $\Phi(r)$ sono state scelte di modo da soddisfare le proprietà numerate della sez. 2.1, queste equazioni ci

dicono quali leggi matematiche deve seguire il materiale che genera la curvatura affinché essa possa essere considerata un wormhole. Per ottenere queste equazioni dobbiamo prima capire che forma hanno il tensore di Einstein ed il tensore energia-impulso per la metrica che abbiamo scelto.

Si noti che d'ora in avanti impiegheremo la notazione di Einstein, per la quale gli indici ripetuti che appaiono uno in alto ed uno in basso sono implicitamente sommati per tutti i valori che possono assumere.

2.3.1 Calcolo delle componenti del tensore di Einstein

Iniziamo impostando la metrica scelta (2.1) nella forma:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad x^0 = ct \quad x^1 = r \quad x^2 = \theta \quad x^3 = \phi \quad (2.2)$$

Allora le componenti $g_{\alpha\beta}$ del tensore metrico risultano:

$$g_{00} = -e^{2\Phi} \quad g_{11} = (1 - b/r)^{-1} \quad g_{22} = r^2 \quad g_{33} = r^2 \sin^2 \theta \quad (2.3)$$

Dal tensore metrico calcoliamo i simboli di Christoffel (coefficienti di connessione affine) $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ e quindi le componenti $R_{\beta\gamma\delta}^\alpha$ del tensore di curvatura di Riemann usando le seguenti formule di geometria differenziale:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (g_{\lambda\beta,\gamma} + g_{\lambda\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\lambda}) \quad (2.4)$$

$$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = \Gamma_{\beta\delta,\gamma}^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma,\delta}^\alpha + \Gamma_{\lambda\gamma}^\alpha \Gamma_{\beta\delta}^\lambda - \Gamma_{\lambda\delta}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda \quad (2.5)$$

dove la virgola denota la derivata parziale ($g_{\alpha\beta,\gamma} = \partial g_{\alpha\beta} / \partial x^\gamma$); dalla (2.3) le 24 componenti non nulle del tensore di Riemann risultano:

$$\begin{aligned} R_{rtr}^t &= -R_{rrt}^t \\ &= (1 - b/r)^{-1} e^{-2\Phi} R_{ttr}^r \\ &= -(1 - b/r)^{-1} e^{-2\Phi} R_{trt}^r \\ &= -\Phi'' + (b'r - b)[2r(r - b)]^{-1} \Phi' - (\Phi')^2 \end{aligned} \quad (2.6a)$$

$$\begin{aligned} R_{\theta t\theta}^t &= -R_{\theta\theta t}^t \\ &= r^2 e^{-2\Phi} R_{tt\theta}^\theta \\ &= -r^2 e^{-2\Phi} R_{t\theta t}^\theta \\ &= -r\Phi'(1 - b/r) \end{aligned} \quad (2.6b)$$

$$\begin{aligned}
R_{\phi t \phi}^t &= -R_{\phi \phi t}^t \\
&= r^2 e^{-2\Phi} \sin^2 \theta R_{tt \phi}^\phi \\
&= -r^2 e^{-2\Phi} \sin^2 \theta R_{t \phi t}^\phi \\
&= -r \Phi' (1 - b/r) \sin^2 \theta
\end{aligned} \tag{2.6c}$$

$$\begin{aligned}
R_{\theta r \theta}^r &= -R_{\theta \theta r}^r \\
&= -r^2 (1 - b/r) R_{rr \theta}^\theta \\
&= r^2 (1 - b/r) R_{r \theta r}^\theta \\
&= (b'r - b)/2r
\end{aligned} \tag{2.6d}$$

$$\begin{aligned}
R_{\phi r \phi}^r &= -R_{\phi \phi r}^r \\
&= -r^2 (1 - b/r) \sin^2 \theta R_{rr \phi}^\phi \\
&= r^2 (1 - b/r) \sin^2 \theta R_{r \phi r}^\phi \\
&= (b'r - b) \sin^2 \theta / 2r
\end{aligned} \tag{2.6e}$$

$$\begin{aligned}
R_{\phi \theta \phi}^\theta &= -R_{\phi \phi \theta}^\theta \\
&= \sin^2 \theta R_{\theta \phi \theta}^\phi \\
&= -\sin^2 \theta R_{\theta \theta \phi}^\phi \\
&= (b/r) \sin^2 \theta
\end{aligned} \tag{2.6f}$$

dove il simbolo ' denota la derivazione rispetto ad r . Per il calcolo sono stati impiegati i vettori di base $\{\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi\}$ associati al sistema di coordinate minkowskiane (ct, r, θ, ϕ) , vale a dire quei vettori di base per cui la separazione vettoriale fra due eventi che differiscono di $(\Delta t, \Delta r, \Delta \theta, \Delta \phi)$ è $\Delta \mathbf{s} = c \Delta t \mathbf{e}_t + \Delta r \mathbf{e}_r + \Delta \theta \mathbf{e}_\theta + \Delta \phi \mathbf{e}_\phi$.

Le coordinate appena viste sono, in buona approssimazione, quelle impiegate da un osservatore statico posizionato a grande distanza dalla gola wormhole, dove la geometria dello spazio-tempo può essere considerata pressoché piatta e quindi l'attrazione gravitazionale della gola ha un'intensità bassissima; i conti e le considerazioni fisiche che seguono però vengono semplificati notevolmente se passiamo ad un sistema di riferimento di un osservatore statico situato non troppo lontano dalla gola. Per questo osservatore i vettori di base ortonormali sono:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_{\bar{t}} &= e^{-\Phi} \mathbf{e}_t & \mathbf{e}_{\bar{r}} &= (1 - b/r)^{1/2} \mathbf{e}_r \\
\mathbf{e}_{\bar{\theta}} &= r^{-1} \mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_{\bar{\phi}} &= (r \sin \theta)^{-1} \mathbf{e}_\phi
\end{aligned} \tag{2.7}$$

dove $d\bar{t} = e^\Phi dt$, $d\bar{r} \equiv dl = (1 - b/r)^{-1/2} dr$, $d\bar{\theta} = d\theta$, $d\bar{\phi} = d\phi$ con r , θ e ϕ costanti (vedi fig. 2.1). Un osservatore di questo tipo è abbastanza vicino alla gola da essere soggetto

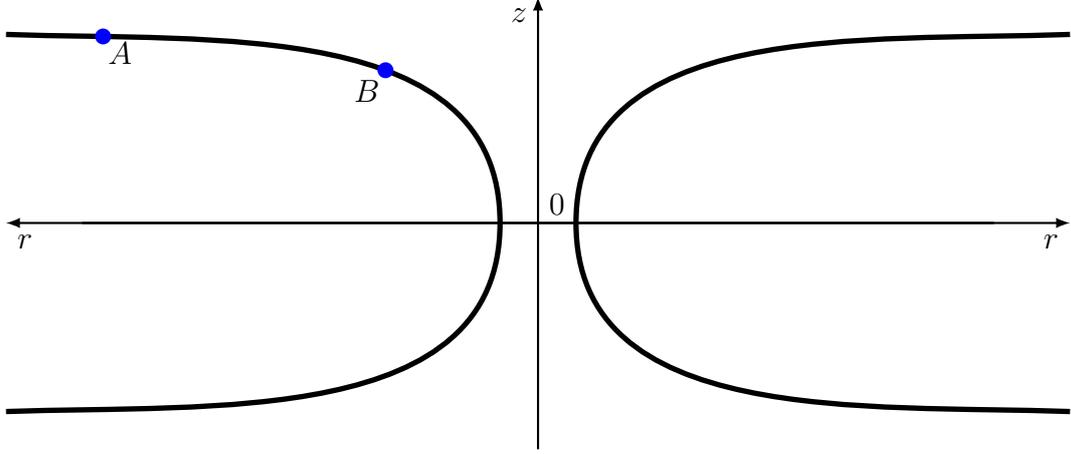


Figura 2.1: Tipico profilo del diagramma di embedding di un wormhole attraversabile. Un osservatore statico situato nel punto A , molto lontano dalla gola del wormhole, avverte un'attrazione gravitazionale estremamente bassa, pertanto le coordinate del suo sistema di riferimento si approssimano come (ct, r, θ, ϕ) . Un osservatore situato in B invece è influenzato dalla curvatura spazio-temporale prodotta dalla gola, quindi le sue coordinate risultano $(c\bar{t}, \bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi})$, dove $d\bar{t} = e^\Phi dt$, $d\bar{r} \equiv dl = (1 - b/r)^{-1/2} dr$, $d\bar{\theta} = d\theta$, $d\bar{\phi} = d\phi$. Per rimanere fermo in B l'osservatore dev'essere dotato di un sistema di propulsione che controbilanci l'attrazione gravitazionale della gola.

alla sua attrazione, quindi per rimanere fermo necessita una navicella spaziale dotata di propulsori in grado di esercitare una forza radiale di intensità uguale all'attrazione gravitazionale della gola ma in verso opposto. In questa nuova base il tensore metrico assume la forma canonica

$$g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \mathbf{e}_{\bar{\alpha}} \cdot \mathbf{e}_{\bar{\beta}} = \eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \equiv \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

e le 24 componenti non nulle del tensore di Riemann si semplificano nel modo seguente:

$$R_{\bar{r}\bar{t}\bar{r}}^{\bar{t}} = -R_{\bar{r}\bar{t}\bar{t}}^{\bar{r}} = R_{\bar{t}\bar{t}\bar{r}}^{\bar{r}} = -R_{\bar{t}\bar{t}\bar{t}}^{\bar{r}} = (1 - b/r)\{-\Phi'' + (b'r - b)[2r(r - b)]^{-1}\Phi' - (\Phi')^2\} \quad (2.9a)$$

$$R_{\bar{\theta}\bar{t}\bar{\theta}}^{\bar{t}} = -R_{\bar{\theta}\bar{t}\bar{t}}^{\bar{\theta}} = R_{\bar{t}\bar{t}\bar{\theta}}^{\bar{\theta}} = -R_{\bar{t}\bar{t}\bar{t}}^{\bar{\theta}} = -(1 - b/r)\Phi'/r \quad (2.9b)$$

$$R_{\bar{\phi}\bar{t}\bar{\phi}}^{\bar{t}} = -R_{\bar{\phi}\bar{t}\bar{t}}^{\bar{\phi}} = R_{\bar{t}\bar{t}\bar{\phi}}^{\bar{\phi}} = -R_{\bar{t}\bar{t}\bar{t}}^{\bar{\phi}} = -(1 - b/r)\Phi'/r \quad (2.9c)$$

$$R_{\bar{\theta}\bar{r}\bar{\theta}}^{\bar{r}} = -R_{\bar{\theta}\bar{r}\bar{r}}^{\bar{\theta}} = R_{\bar{r}\bar{r}\bar{\theta}}^{\bar{\theta}} = -R_{\bar{r}\bar{r}\bar{t}}^{\bar{\theta}} = (b'r - b)/2r^3 \quad (2.9d)$$

$$R_{\bar{\phi}\bar{r}\bar{\phi}}^{\bar{r}} = -R_{\bar{\phi}\bar{r}\bar{r}}^{\bar{\phi}} = R_{\bar{r}\bar{r}\bar{\phi}}^{\bar{\phi}} = -R_{\bar{r}\bar{r}\bar{t}}^{\bar{\phi}} = (b'r - b)/2r^3 \quad (2.9e)$$

$$R_{\bar{\phi}\bar{\theta}\bar{\phi}}^{\bar{\theta}} = -R_{\bar{\phi}\bar{\theta}\bar{t}}^{\bar{\theta}} = R_{\bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\phi}}^{\bar{\phi}} = -R_{\bar{\theta}\bar{\theta}\bar{t}}^{\bar{\phi}} = b/r^3 \quad (2.9f)$$

A questo punto possiamo contrarre il tensore di Riemann per ottenere il tensore di Ricci $R_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ e lo scalare di curvatura R per mezzo delle loro definizioni

$$R_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = R_{\bar{\alpha}\bar{\lambda}\bar{\beta}}^{\bar{\lambda}} \quad (2.10)$$

$$R = g^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} R_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \quad (2.11)$$

e da questi possiamo finalmente calcolare il tensore di Einstein $G_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$, membro sinistro delle equazioni di campo di Einstein:

$$G_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = R_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} - \frac{1}{2} R g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \quad (2.12)$$

Impiegando il tensore di Riemann (2.9) i calcoli portano alle seguenti quattro componenti non nulle:

$$G_{\bar{t}\bar{t}} = b'/r^2 \quad (2.13a)$$

$$G_{\bar{r}\bar{r}} = -b/r^3 + 2(1 - b/r)\Phi'/r \quad (2.13b)$$

$$\begin{aligned} G_{\bar{\theta}\bar{\theta}} &= G_{\bar{\phi}\bar{\phi}} \\ &= \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left(\Phi'' - \frac{b'r - b}{2r(r - b)}\Phi' + (\Phi')^2 + \frac{\Phi'}{r} - \frac{b'r - b}{2r^2(r - b)}\right) \end{aligned} \quad (2.13c)$$

2.3.2 Considerazioni sul tensore energia-impulso

Citiamo il seguente

Teorema di Birkhoff. *Qualsiasi soluzione a simmetria sferica delle equazioni di campo di Einstein nel vuoto dev'essere statica ed asintoticamente piatta.*

Questo equivale a dire che se abbiamo una sorgente gravitazionale sferica non rotante attorno alla quale vi è il vuoto (tensore energia-impulso nullo), allora la metrica esterna alla sorgente è la metrica di Schwarzschild. Nel nostro caso la gola del wormhole è la sorgente gravitazionale, quindi se fuori dalla gola abbiamo il vuoto la metrica è quella di Schwarzschild; ma un wormhole la cui gola è circondata dal vuoto è un wormhole di Schwarzschild, wormhole che nell'introduzione abbiamo escluso dal nostro studio del viaggio interstellare per le nostre considerazioni sull'attraversabilità della gola. Concludiamo quindi che la gola di un wormhole attraversabile dev'essere circondata da materia che dà luogo ad un tensore energia-impulso non identicamente nullo; poi, chiaramente, prima o poi questo tensore andrà a zero allontanandoci della gola e lì troveremo la metrica di Schwarzschild, in accordo col teorema di Birkhoff (si veda la fig. 2.2).

Siccome per le equazioni di campo il tensore energia-impulso dev'essere proporzionale al tensore di Einstein, nella nostra base ortonormale il tensore energia-impulso $T_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$

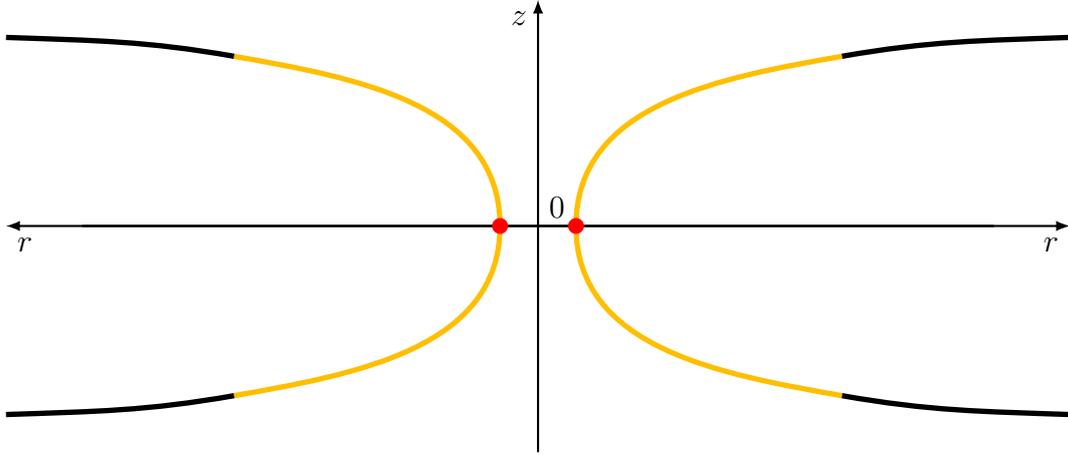


Figura 2.2: Tipico profilo del diagramma di embedding di un wormhole. In un wormhole di Schwarzschild la materia è situata solo sulla gola, vale a dire la sfera di raggio $r = b_0$ nello spazio-tempo del wormhole; essa corrisponde ai 2 punti in rosso qui indicati. In un wormhole attraversabile invece, per il teorema di Birkhoff, la materia deve trovarsi anche in un intorno della gola, per esempio sulla curva colorata in arancione in questo profilo; questa regione corrisponderà ad un guscio sferico di un certo spessore nello spazio-tempo. La zona in nero rappresenta il vuoto.

deve avere la stessa struttura algebrica di $G_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ nelle (2.13): le uniche componenti non nulle devono essere $T_{\bar{t}\bar{t}}, T_{\bar{r}\bar{r}}, T_{\bar{\theta}\bar{\theta}} = T_{\bar{\phi}\bar{\phi}}$. Queste componenti di $T_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ hanno un'interpretazione in termini di misure effettuate da osservatori statici nello spazio-tempo curvato del wormhole, in quanto le coordinate $(\bar{t}, \bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi})$ sono quelle impiegate da tali osservatori.

$$T_{\bar{t}\bar{t}} = \rho(r)c^2, \quad T_{\bar{r}\bar{r}} = -\tau(r), \quad T_{\bar{\theta}\bar{\theta}} = T_{\bar{\phi}\bar{\phi}} = p(r) \quad (2.14)$$

$\rho(r)$ è la densità totale propria di massa/energia, $\tau(r)$ è la tensione propria per unità di area nella direzione radiale (cioè l'opposto della pressione radiale) e $p(r)$ è la pressione propria nelle direzioni ortogonali a quella radiale (cioè lungo la superficie della sfera di raggio r).

2.3.3 Sostituzione nelle equazioni di campo di Einstein

Inserendo nelle equazioni di campo di Einstein

$$G_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 8\pi G c^{-4} T_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \quad (2.15)$$

il tensore di Einstein (2.13) e il tensore energia-impulso (2.14), dopo un po' di manipolazione otteniamo:

$$b' = 8\pi Gc^{-2}r^2\rho \quad (2.16)$$

$$\Phi' = \frac{b - 8\pi Gc^{-4}\tau r^3}{2r(r - b)} \quad (2.17)$$

$$\tau' = (\rho c^2 - \tau)\Phi' - 2\frac{p + \tau}{r} \quad (2.18)$$

Le equazioni di campo (2.16)-(2.18) sono tre equazioni differenziali in cinque funzioni incognite della coordinata r : $b(r)$, $\Phi(r)$, $\rho(r)$, $\tau(r)$ e $p(r)$. Le prime due equazioni rappresentano rispettivamente la parte temporale e radiale di (2.15), mentre l'ultima è la parte laterale ($\bar{\theta}$, $\bar{\phi}$) (Φ'' è stato eliminato per mezzo della derivata radiale dell'eq. (2.17)) e, fisicamente, rappresenta l'equazione di equilibrio idrostatico del materiale che mantiene aperto il wormhole.

Normalmente a questo punto uno avanzerebbe delle ipotesi sulla materia/campo che origina il tensore energia-impulso, di modo da poter avere a disposizione due ulteriori equazioni derivanti dalla fisica del materiale (le "equazioni di stato del materiale" $\tau(\rho)$, $p(\rho)$) e risolvere così il sistema di cinque equazioni in cinque funzioni incognite. Tuttavia non è quello che noi faremo: noi vogliamo una soluzione che soddisfi certe proprietà (vedi sez. 2.1), e per ottenerle dobbiamo essere disposti a lasciare che siano i costruttori del wormhole a sintetizzare/cercare nell'universo i materiali/campi necessari, qualunque sia il tensore energia-impulso imposto dalle proprietà. In termini matematici, noi vogliamo controllare le funzioni $b(r)$ e $\Phi(r)$ di modo da modellare il wormhole sulla base delle prime sei proprietà della sez. 2.1; di conseguenza, le relazioni matematiche fra ρ , τ e p non possono essere fissate direttamente, ma solo dalle equazioni di campo (2.16)-(2.18) tramite la nostra scelta di b e Φ .

Seguendo quindi questa filosofia, conviene riscrivere le equazioni (2.16)-(2.18) come:

$$\rho = \frac{b'}{8\pi Gc^{-2}r^2} \quad (2.19)$$

$$\tau = \frac{b/r - 2(r - b)\Phi'}{8\pi Gc^{-4}r^2} \quad (2.20)$$

$$p = \frac{r}{2} [(\rho c^2 - \tau)\Phi' - \tau'] - \tau \quad (2.21)$$

In questa forma le equazioni di campo sono anche dette "equazioni di struttura" del wormhole, in quanto definiscono le caratteristiche del materiale che realizza il wormhole. Una volta che $b(r)$ e $\Phi(r)$ sono state scelte accuratamente di modo da ottenere un wormhole attraversabile, l'eq. (2.19) insieme alla nostra scelta di $b(r)$ ci dà $\rho(r)$, men-

tre la (2.20) insieme alle nostre scelte di $b(r)$ e $\Phi(r)$ ci dà $\tau(r)$; infine, $p(r)$ si ottiene dalla (2.21) combinata con le altre due.

2.3.4 Condizioni al contorno

In certe situazioni potremmo desiderare che il tensore energia-impulso che genera il wormhole si estenda sino ad un raggio arbitrariamente grande. Altre volte potremmo invece volerlo confinare entro una sfera di raggio $r = R_S$, che equivale a richiedere che ρ , τ e p si annullino per $r > R_S$.¹ In quest'ultimo caso, le equazioni di struttura (2.19)-(2.21) impongono che la tensione radiale τ vada a zero dolcemente nel limite in cui r tende ad R_S dal basso, ma permettono a ρ e p di azzerarsi attraverso una discontinuità a salto in $r = R_S$. Le equazioni (2.16)-(2.18), calcolate nella regione di vuoto al di fuori della sfera $r = R_S$, vincolano la geometria spazio-temporale esterna ad assumere la forma standard di Schwarzschild:

$$b(r) = b(R_S) = \text{cost} \equiv B \text{ at } r > R_S \quad (2.22)$$

$$\Phi(r) = \frac{1}{2} \ln(1 - B/r) \quad \text{at } r > R_S \quad (2.23)$$

infatti sostituendo in (2.1) queste equazioni si trova la metrica di Schwarzschild (B è il raggio di Schwarzschild).

Potremmo anche volere strati di diversi materiali disposti sfericamente uno sopra all'altro, per esempio un primo materiale per $r \in [0, R_1[$, un secondo materiale per $r \in [R_1, R_2[$, e così via... In tal caso le equazioni di campo impongono la continuità di τ , b e Φ fra gli strati, ma permettono a ρ e p di presentare discontinuità a salto.

Ricordiamo infine che anche se non imponiamo alcun raggio limite per il tensore energia-impulso, dobbiamo comunque richiedere che $T_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ vada a zero con la distanza abbastanza rapidamente da rendere lo spazio-tempo asintoticamente piatto (questa richiesta deriva dalla definizione stessa di wormhole, vedi sez. 1.2); questo equivale a chiedere che, nel limite $r \rightarrow \infty$, la metrica (2.1) si riduca alla metrica di Minkowski, pertanto:

$$b/r \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \Phi \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad r \rightarrow \infty \quad (2.24)$$

Si noti inoltre che le equazioni

2.4 Geometria spaziale del wormhole

In questa sezione vedremo prima di tutto cos'è e come si ottiene un diagramma di embedding del wormhole; in seguito, impiegheremo tale diagramma per studiare le caratteristiche geometriche di un generico wormhole.

¹Nonostante la filosofia adottata per risolvere le equazioni di campo del wormhole possa far pensare che questa richiesta non sia lecita, in realtà lo è: richiedere che le tre funzioni si annullino oltre un certo raggio non vuol dire fare ipotesi sul tipo di materiale descritto dal tensore energia-impulso, il vuoto non è un materiale.

2.4.1 Inclusione nello spazio Euclideo tridimensionale: il diagramma di embedding

Per visualizzare e comprendere gli aspetti geometrici del wormhole (ma vale in generale, per qualunque tipo curvatura spazio-temporale) ora costruiremo quello che viene definito diagramma di embedding² del wormhole (esempio in fig. 1.1).

Siccome abbiamo ipotizzato che la metrica (quindi la geometria) del wormhole è statica, il nostro sistema presenterà la stessa curvatura ad ogni istante di tempo (a meno di perturbazioni esterne, che però trascuriamo). Quindi possiamo limitarci a considerare lo spazio-tempo tridimensionale ad un dato istante di tempo t , visto che questo non evolve. Inoltre, sempre per ipotesi, il nostro spazio-tempo è a simmetria sferica: presa una fetta di spazio che passa per il centro $r = 0$ e lo divide in due metà simmetriche (per esempio, la fetta equatoriale $\theta = \pi/2$), essa avrà la stessa geometria bidimensionale di qualsiasi altra fetta passante per il centro. Pertanto possiamo focalizzare la nostra attenzione sulla geometria bidimensionale del sotto-spazio equatoriale del nostro spazio-tempo. L'elemento di linea (cioè la geometria) di tale sotto-spazio si ottiene dall'elemento di linea dello spazio-tempo del wormhole (2.1) ponendo $t = \text{costante}$ e $\theta = \pi/2$:

$$ds^2 = (1 - b/r)^{-1}dr^2 + r^2d\phi^2 \quad (2.25)$$

Questa geometria è bidimensionale in quanto prevede solo due coordinate r, ϕ , è spaziale in quanto nessuna di queste due coordinate rappresenta il tempo ed è curvata in quanto la distanza fra due punti vicini (r, ϕ) e $(r + dr, \phi)$ su una superficie descritta da questa geometria, $ds = \pm(1 - b/r)^{-1/2}dr$, non coincide con la distanza $d\mathbf{r}$ fra i medesimi punti su di una superficie piana (a meno che $b(r) = 0$ ovunque, ma non è il nostro caso).

Ora vogliamo incorporare questa geometria nella geometria piatta di una varietà Euclidea tridimensionale,³ ovvero vogliamo costruire una superficie "di embedding" con elemento di linea dato dalla (2.25) all'interno dello spazio Euclideo. Per farlo, introduciamo le coordinate cilindriche z, r, ϕ nello spazio Euclideo; la metrica Euclidea assume quindi la forma:

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2d\phi^2 \quad (2.26)$$

La superfici di questo spazio che ci interessano sono quelle a simmetria assiale, in quanto dobbiamo rappresentare un oggetto (il wormhole) la cui geometria bidimensionale (2.25) è a simmetria assiale (ϕ non compare nei fattori moltiplicativi dei differenziali); una superficie a simmetria assiale è descritta da una funzione della sola coordinata radiale, $z = z(r)$. L'elemento di linea di una superficie nello spazio Euclideo è:

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \right] dr^2 + r^2d\phi^2 \quad (2.27)$$

²in italiano, di incorporamento/inclusione

³Questa è la vera e propria operazione di embedding.

Questo elemento di linea Euclideo coincide con quello del sotto-spazio equatoriale del wormhole se identifichiamo le coordinate r e ϕ dello spazio-tempo del wormhole con le coordinate r e ϕ dello spazio Euclideo e se richiediamo che la funzione $z(r)$ soddisfi la seguente equazione:

$$\frac{dz}{dr} = \pm \left(\frac{r}{b(r)} - 1 \right)^{-1/2} \quad (2.28)$$

che si ottiene ponendo (2.25) uguale a (2.27) e dove il segno $+$ fa riferimento all'universo superiore mentre il segno $-$ a quello inferiore. Risolvendo (2.28) si ottiene la superficie a simmetria assiale $z = z(r)$ dello spazio Euclideo con elemento di linea dato da (2.25) (è la superficie rappresentata in fig. 1.1(a)); ogni punto di tale superficie rappresenta una sfera nello spazio-tempo del wormhole, mentre i punti che non appartengono ad essa non hanno alcuna rappresentazione fisica (non costituiscono spazio fisico). Tanto più questa superficie è pendente, tanto maggiore è l'attrazione gravitazionale la gola del wormhole esercita su di un qualsiasi corpo in quel punto. $z(r)$ è detta funzione di embedding del wormhole e, poiché dipende da $b(r)$, capiamo finalmente qual è il ruolo di quest'ultima funzione e come definisce la forma del wormhole.

2.4.2 Caratteristiche geometriche del wormhole

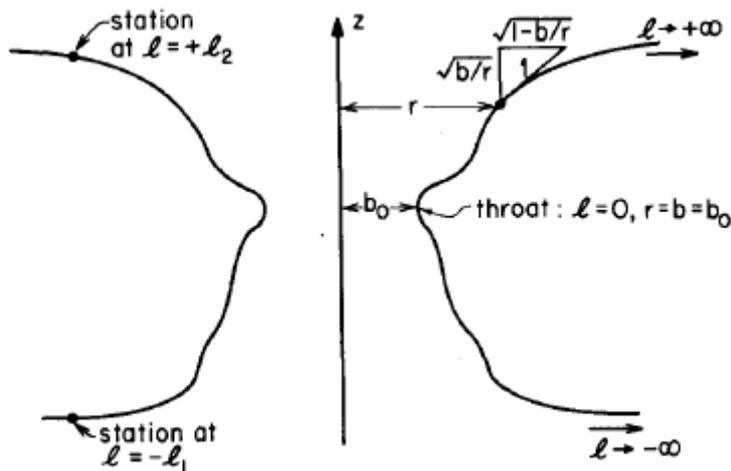


Figura 2.3: Profilo del diagramma di embedding di un generico wormhole attraversabile (vale a dire con $b(r)$ generica ma che soddisfa le proprietà numerate della sez. 2.1); ruotandolo di 360 gradi attorno all'asse z si ottiene il diagramma di embedding completo. In alto a destra, il significato geometrico delle equazioni (2.33).

Avevamo già dato una prima definizione di gola del wormhole nella sez. 1.2, ma grazie al nostro studio sui diagrammi di embedding ora possiamo fornirne una migliore: poichè la gola del wormhole è l'insieme dei punti nei quali la distanza dall'asse è minima e la superficie $z = z(r)$ è verticale, per (2.28) questo avviene quando $b(r) = r$. Denotando come b_0 il valore di r e b nella gola, otteniamo la prima condizione geometrica che i wormhole devono soddisfare

$$\begin{aligned} &\text{In ogni wormhole esiste un raggio minimo } b_0, \text{ denominato gola, per cui} \\ &b(r = b_0) = b_0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

La circonferenza $2\pi b_0$ costituita dai punti in cui $r = b(r)$ è la sezione equatoriale della sfera che costituisce la gola del wormhole nello spazio-tempo. Vista la divergenza di dz/dr nella gola, r non è una buona coordinata da utilizzare nelle sue vicinanze; è molto meglio impiegare la distanza radiale l misurata da osservatori statici in un sistema di riferimento proprio

$$l(r) = \pm \int_{b_0}^r \frac{dr}{[1 - b(r)/r]^{1/2}} \quad (2.30)$$

dove il segno $+$ fa riferimento all'universo superiore, il segno $-$ all'universo inferiore.⁴ Questa coordinata dev'essere ben definita ovunque, quindi dobbiamo richiedere

$$1 - \frac{b}{r} \geq 0 \quad \text{in tutto lo spazio-tempo} \quad (2.31)$$

Allontanandoci dalla gola, verso l'universo superiore o inferiore, lo spazio deve diventare asintoticamente piatto per definizione stessa di wormhole; questo equivale a dire che $dz/dr = \pm(r/b - 1)^{-1/2}$ deve tendere a zero per l che tende a $\pm\infty$, cioè

$$\frac{b}{r} \rightarrow 0 \quad \text{per } l \rightarrow \pm\infty \quad (2.32)$$

Dalle equazioni (2.28) e (2.30) si ottengono anche le seguenti relazioni per la superficie incorporata

$$\frac{dz}{dl} = \pm \sqrt{\frac{b}{r}}; \quad \frac{dr}{dl} = \pm \sqrt{1 - \frac{b}{r}} \quad (2.33)$$

Nella fig. 2.3 è possibile osservare il significato geometrico di queste ultime equazioni.

2.5 Assenza di orizzonti nel wormhole

Preso uno spazio-tempo asintoticamente piatto e a simmetria sferica, come ad esempio quello di un wormhole, definiamo orizzonte degli eventi una superficie non singolare di

⁴Avevamo già definito questa coordinata nella sezione 2.3.1, solo che l'avevamo chiesta \bar{r} per comodità.

raggio B per la quale si ha che

$$\frac{dt}{d\tau_v} \rightarrow \infty \quad \text{per} \quad r \rightarrow B \quad \text{dall'esterno} \quad (2.34)$$

dove dt è l'intervallo di tempo secondo un osservatore statico situato lontano dall'orizzonte (dove la metrica si può approssimare molto bene con quella di Minkowski), $d\tau_v$ è l'intervallo di tempo per il viaggiatore, che si sta dirigendo verso l'orizzonte con la sua navicella ad una certa velocità v e si trova in una regione dove lo spazio-tempo non è piatto, ed r identifica la posizione radiale del viaggiatore. La (2.34) indica che l'osservatore statico vede il viaggiatore avvicinarsi all'orizzonte sempre più lentamente senza mai raggiungerlo, come se ci volesse un tempo infinito per farlo.

L'orizzonte degli eventi può anche essere definito come quella superficie per la quale, avvicinandosi, $g_{00} \equiv -e^{2\Phi} \rightarrow 0$: richiedere quindi che il wormhole non presenti orizzonti (punto 4 sez. 2.1) equivale a richiedere che $g_{00} \neq 0$ ovunque nello spazio-tempo o, analogamente:

$$\Phi(r) \quad \text{dev'essere finita ovunque} \quad (2.35)$$

2.6 Attraversamento del wormhole

In questa sezione ci occuperemo di simulare il viaggio nel wormhole da parte di un avventuriero umano; questo ci permetterà di capire quali vincoli matematici rendono il wormhole confortevole da attraversare e conveniente da utilizzare.

2.6.1 Itinerario del viaggio interstellare

L'esperimento ideale è il seguente: un viaggiatore deve percorrere il wormhole radialmente partendo a riposo da una stazione spaziale nell'universo inferiore, situata ad una distanza propria $l = -l_1$ dalla gola, sino a giungere (sempre a riposo) ad una stazione spaziale nell'universo superiore, collocata ad una distanza propria $l = +l_2$ dalla gola (per una rappresentazione dell'esperimento si guardi il lato sinistro della fig. 2.3).

Denotiamo come $v(r)$ la velocità del viaggiatore lungo la direzione radiale, misurata localmente da un osservatore statico situato nel wormhole alla coordinata radiale r ; allora:

$$v = \frac{dl}{dt} = \frac{dl}{e^\Phi dt} = \mp \frac{dr}{(1 - b/r)^{1/2} e^\Phi dt} \quad (2.36a)$$

$$v\gamma = \frac{v}{[1 - (v/c)^2]^{1/2}} = \frac{dl}{d\tau_v} = \mp \frac{dr}{(1 - b/r)^{1/2} d\tau_v} \quad (2.36b)$$

dove:

- t è la coordinata temporale di Minkowski (tempo coordinato, quello misurato da un osservatore che si trova in una regione piatta dello spazio-tempo).
- \bar{t} è il tempo dell'osservatore statico che misura localmente la velocità del viaggiatore; la metrica (2.1) ci dice che $d\bar{t} = e^{\Phi} dt$.
- $\gamma \equiv [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$ è il ben noto fattore relativistico.
- τ_v è il tempo proprio del viaggiatore, vale a dire il tempo effettivamente impiegato per raggiungere il punto r ; per la relatività ristretta, il tempo \bar{t} risulta dilatato rispetto a quello del viaggiatore in quanto i due sistemi di riferimento sono in moto relativo; la dilatazione vale $d\bar{t} = \gamma \tau_v$, quindi $d\tau_v = \gamma^{-1} d\bar{t}$.

Il segno $-$ nelle formule precedenti fa riferimento alla prima metà del viaggio (universo inferiore), mentre il segno $+$ fa riferimento alla seconda metà (universo superiore); in questo modo, v risulta sempre positiva.⁵ Siccome il viaggio comincia e finisce nelle stazioni, le quali sono a riposo, abbiamo che:

$$\begin{aligned} v = 0 & \quad \text{per} \quad l = -l_1 \quad \text{ed} \quad l = +l_2 \\ v > 0 & \quad \text{per} \quad -l_1 < l < +l_2 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Per mantenere le stazioni immobili ma vicine al wormhole dovremmo dotarle di propulsori che siano costantemente in funzione (e, quindi, costantemente alimentati) di modo da controbilanciare l'attrazione gravitazionale esercitata dalla gola; siccome questo è tutto meno che pratico e conveniente, è necessario richiedere che le due stazioni siano sufficientemente lontane dalla gola da rendere gli effetti gravitazionali del wormhole insignificanti. In particolare:

1. La geometria dello spazio-tempo in prossimità delle distanze proprie $-l_1$ e $+l_2$ dev'essere pressoché piatta, vale a dire $b/r \ll 1$ (vedi eq. (2.32)).
2. Il redshift gravitazionale dei segnali inviati dalla stazione verso l'infinito deve essere piccolo, segno che l'energia spesa dai fotoni per risalire il potenziale gravitazionale è poca e che quindi quest'ultimo è quasi uniforme. Per la legge del redshift energetico (vedi [3], pag. 659) si ha che il redshift è dato da

$$\frac{\Delta(\text{lunghezza d'onda})}{\text{lunghezza d'onda}} = |g_{00}(r)|^{-1/2} - 1 = e^{-\Phi} - 1$$

quindi richiedere che esso sia piccolo equivale a richiedere che $-\Phi \ll 1$, vale a dire $|\Phi| \ll 1$.

⁵ dr , così come dl , è < 0 nell'universo inferiore.

3. L'accelerazione di gravità misurata dalle stazioni $g = -(1 - b/r)^{1/2}\Phi'c^2$, che è $\approx -\Phi'c^2$ per quanto detto nel punto 1, dev'essere minore o al limite dell'ordine di quella avvertita sulla terra $g_{\oplus} = 980 \text{ cm/s}^2$.

Riassumiamo le condizioni matematiche dettate da questi tre punti:

$$b/r \ll 1, \quad |\Phi| \ll 1, \quad \text{e} \quad |\Phi'c^2| \lesssim g_{\oplus} \quad \text{per} \quad l = -l_1 \quad \text{ed} \quad l = +l_2 \quad (2.38)$$

Siccome $|\Phi| \ll 1$ alle stazioni, il tempo segnato da un orologio sulla stazione è approssimabile con il tempo coordinato t ; di conseguenza, per un osservatore fermo alla stazione la velocità con cui il viaggiatore si muove non è v , bensì ve^{Φ} .

Ora che abbiamo capito qual è l'itinerario da seguire per attraversare il wormhole dobbiamo richiedere che questo attraversamento risulti conveniente e non letale per un essere umano.

2.6.2 Durata del viaggio interstellare

Per quanto siano affascinanti, i wormhole attraversabili si rivelerebbero assolutamente inutili a livello pratico se il tempo necessario per attraversarli fosse la metà o anche solo l'1% di quello impiegato per giungere a destinazione senza di essi; vediamo di capire perché.

Prendiamo, per esempio, la stella Vega: essa dista approssimativamente 25 a.l. (anni luce) dal nostro pianeta e pertanto, supponendo di disporre di una navicella estremamente veloce ($v \approx c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$) e supponendo che il wormhole sia in grado di ridurre del 99% la distanza fra i due sistemi, impiegheremmo circa 91 giorni (un quarto dell'anno di 365 giorni) per raggiungerla, quindi altri 91 giorni per ritornare poi sulla terra. Ora cerchiamo di essere un po' più realistici e supponiamo che la nostra navicella viaggi ad una velocità dell'ordine di quella degli oggetti spaziali che si costruiscono oggi, per esempio $v = 16 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ (velocità di crociera della sonda "New Horizon"): allora il tempo necessario per giungere a destinazione impiegando il medesimo wormhole risulterebbe di circa 4'687 anni, che confrontati con gli oltre 488'747 anni necessari senza wormhole sicuramente rappresentano un lasso di tempo molto piccolo, ma di certo non sufficientemente piccolo da rendere il viaggio realizzabile. Sicuramente le tecnologie astrospaziali in futuro miglioreranno, magari sino al punto di consentirci di raggiungere velocità pressoché identiche a c , ma questo non risolve affatto il problema: Vega infatti è una delle stelle più vicine in assoluto al nostro sistema solare, esistono stelle ben più lontane di 25 a.l. da noi (basti pensare che la nostra galassia ha un diametro di 100'000 a.l.), le quali per essere raggiunte richiederebbero tempi colossali anche muovendosi a velocità c per mezzo di un wormhole in grado di accorciare la distanza del 99%.

Tutto questo dovrebbe aver reso chiaro come porre un limite superiore al lasso di tempo necessario per attraversare un wormhole sia una condizione estremamente importante affinché questo possa essere considerato un metodo valido per compiere un viaggio

interstellare. Tuttavia dobbiamo fare un'importante precisazione: la relatività ristretta ci dice che il tempo è relativo, pertanto osservatori in moto l'uno rispetto all'altro misurano intervalli di tempo diversi per un medesimo evento (in questo caso l'attraversamento del wormhole). Se non vogliamo che l'attraversamento del wormhole risulti anche un viaggio nel tempo (in avanti) per chi compie la traversata dobbiamo richiedere che sia il tempo misurato da chi viaggia che il tempo misurato da chi sta fuori dal wormhole e aspetta nelle stazioni risulti minore di un certo limite superiore; assumendo 1 anno come durata massima della traversata, matematicamente questo si traduce in:

$$\Delta\tau_v = \int_{-l_1}^{l_2} \frac{dl}{v\gamma} \lesssim 1 \text{ anno} \quad (2.39)$$

$$\Delta t = \int_{-l_1}^{l_2} \frac{dl}{ve^\Phi} \lesssim 1 \text{ anno} \quad (2.40)$$

2.6.3 Intensità delle forze mareali e di propulsione

Essendo una topologia spazio-temporale non piatta, il wormhole esercita un'attrazione gravitazionale⁶ su qualunque corpo nelle vicinanze. I punti di un corpo esteso sono tutti attratti verso la gola del wormhole ma, essendo l'intensità dell'interazione gravitazionale proporzionale all'inverso della distanza al quadrato, i punti più vicini alla gola subiranno un'accelerazione maggiore rispetto a quelli più lontani: ciò causa un allontanamento dei punti del corpo fra loro che risulta in un allungamento del corpo, noto anche come "spaghetizzazione", che deve essere trascurabile se vogliamo sopravvivere ad un viaggio nel wormhole (vedi punto 5 sez. 2.1). Inoltre, anche l'accelerazione che i motori della navicella spaziale imprimono al viaggiatore non dev'essere eccessivamente grande; procediamo come segue:

- Definiamo \mathbf{a} l'accelerazione del viaggiatore nel suo sistema di riferimento e richiediamo che essa abbia un'intensità non troppo superiore a quella terrestre g_\oplus . Quest'accelerazione è avvertita soltanto a causa dei propulsori della nave: se questi fossero spenti il viaggiatore risulterebbe un osservatore in caduta libera⁷ verso la gola del wormhole e, pertanto, incapace di avvertire l'accelerazione gravitazionale. Visto l'itinerario che abbiamo scelto di adottare in sez. 2.6.1, quest'accelerazione dovrà essere esclusivamente radiale.
- Definiamo $\Delta\mathbf{a}$ l'accelerazione mareale dovuta al gradiente del campo gravitazionale, vale a dire l'accelerazione relativa fra punti diversi del corpo del viaggiatore nel

⁶Rigorosamente bisognerebbe dire che è la materia che tiene aperto il wormhole a dar luogo all'attrazione gravitazionale e non il wormhole stesso, il quale è solo la rappresentazione geometrica dell'intensità del campo gravitazionale, generato dal suddetto materiale nello spazio-tempo.

⁷In relatività generale un oggetto è detto in caduta libera se la gravità è l'unica forza ad agire su di esso.

suo sistema di riferimento;⁸ affinché questa accelerazione non riduca a brandelli il viaggiatore, richiediamo che la sua intensità lungo qualsiasi direzione non ecceda in alcun modo l'accelerazione di gravità terrestre g_{\oplus} .

Visto che le accelerazioni appena introdotte sono misurate dal viaggiatore, introduciamo la base ortonormale del suo sistema di riferimento $\{\mathbf{e}_{\bar{0}'}, \mathbf{e}_{\bar{1}'}, \mathbf{e}_{\bar{2}'}, \mathbf{e}_{\bar{3}'}\}$; questa base può essere espressa in termini di quella ortonormale di un osservatore statico $\{\mathbf{e}_{\bar{t}}, \mathbf{e}_{\bar{r}}, \mathbf{e}_{\bar{\theta}}, \mathbf{e}_{\bar{\phi}}\}$ attraverso le trasformazioni di Lorentz

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_{\bar{0}'} \\ \mathbf{e}_{\bar{1}'} \\ \mathbf{e}_{\bar{2}'} \\ \mathbf{e}_{\bar{3}'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{\bar{t}} \\ \mathbf{e}_{\bar{r}} \\ \mathbf{e}_{\bar{\theta}} \\ \mathbf{e}_{\bar{\phi}} \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{\bar{t}} \\ \mathbf{e}_{\bar{r}} \\ \mathbf{e}_{\bar{\theta}} \\ \mathbf{e}_{\bar{\phi}} \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

($\beta = v/c$) dando quindi luogo alle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\bar{0}'} &= \gamma\mathbf{e}_{\bar{t}} \mp \gamma(v/c)\mathbf{e}_{\bar{r}} \equiv \mathbf{u} & \mathbf{e}_{\bar{1}'} &= \mp \gamma\mathbf{e}_{\bar{r}} + \gamma(v/c)\mathbf{e}_{\bar{t}} \\ \mathbf{e}_{\bar{2}'} &= \mathbf{e}_{\bar{\theta}} & \mathbf{e}_{\bar{3}'} &= \mathbf{e}_{\bar{\phi}} \end{aligned} \quad (2.42)$$

dove \mathbf{u} è la quadri-velocità del viaggiatore;⁹ i segni $-$ fanno riferimento al percorso nell'universo inferiore, dove ci muoviamo nella stessa direzione di $\mathbf{e}_{\bar{r}}$ ma in verso opposto, mentre i segni $+$ sotto di essi fanno riferimento al percorso nell'universo superiore.

Per prima cosa studiamo l'accelerazione di propulsione \mathbf{a} avvertita dal viaggiatore; le sue componenti si ottengono dalla quadri-velocità come

$$a^{\bar{\alpha}'} = u^{\bar{\alpha}'}_{;\bar{\beta}'} u^{\bar{\beta}'} c^2 \quad (2.43)$$

(“ ; ” indica la derivata covariante rispetto all'indice seguente, vedi (2.45)) ed essa è sempre ortogonale alla quadri-velocità, pertanto $0 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_{\bar{0}'} = a_{\bar{0}'} = -a^{\bar{0}'}$. Siccome nella sez. 2.6.1 abbiamo assunto che chi viaggia nel wormhole lo fa in direzione radiale ed $\mathbf{e}_{\bar{1}'}$ punta lungo tale direzione nel verso di l crescente, allora $a_{\bar{2}'} = a_{\bar{3}'} = 0$ e

$$\mathbf{a} = a \mathbf{e}_{\bar{1}'} \quad (2.44)$$

dove a è l'intensità dell'accelerazione. Per calcolare a , consideriamo \mathbf{u}_{α} come una funzione della posizione radiale r del viaggiatore; impiegando la (2.43) insieme alla seguente formula di geometria differenziale

$$\nabla_{\alpha} u^{\gamma} = u^{\gamma}_{;\alpha} = u^{\gamma}_{,\alpha} + \Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha} u^{\beta} \quad (2.45)$$

che ci dà l'espressione delle componenti della derivata covariante in termini delle derivate parziali e della connessione affine, otteniamo che

$$a_t/c^2 = u_{t;\alpha} u^{\alpha} = u_{t,r} u^r - \Gamma_{\alpha t\beta} u^{\alpha} u^{\beta} \quad (2.46)$$

⁸Quest'accelerazione è avvertita eccome da chi viaggia, indipendentemente dallo stato dei propulsori.

⁹In realtà lo è a meno di un fattore moltiplicativo $1/c$, ma non è importante.

nel sistema di riferimento (ct, r, θ, ϕ) . A questo punto, poiché

$$a_t = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_t = (a\mathbf{e}_{\bar{1}'}) \cdot (\mathbf{e}_t) = -\gamma(v/c)e^\Phi a \quad (2.47)$$

(vedi eq. (2.44), (2.42) e (2.7)), se esprimiamo quest'ultima equazione in termini di a e calcoliamo a_t con la (2.46) otteniamo l'espressione per l'intensità dell'accelerazione radiale misurata dal viaggiatore:

$$a = \mp \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} e^{-\Phi} \frac{d}{dl}(\gamma e^\Phi) c^2 \quad (2.48)$$

Conseguentemente, la richiesta che il viaggiatore non senta un'accelerazione troppo più grande di g_\oplus corrisponde a chiedere che:

$$\left| e^{-\Phi} \frac{d(\gamma e^\Phi)}{dl} \right| \lesssim \frac{g_\oplus}{c^2} \simeq \frac{1}{0.97 \text{ a.l.}} \quad (2.49)$$

Passiamo ora allo studio dell'accelerazione mareale $\Delta \mathbf{a}$ avvertita dal viaggiatore. Denotando con ξ la separazione vettoriale fra due parti del corpo (per esempio, la testa e i piedi), le componenti dell'accelerazione mareale fra queste due parti del corpo del viaggiatore sono date dalla seguente formula di relatività generale

$$\Delta a^{\bar{\alpha}'} = -c^2 R_{\bar{\beta}'\bar{\gamma}'\bar{\delta}'}^{\bar{\alpha}'} u^{\bar{\beta}'} \xi^{\bar{\gamma}'} u^{\bar{\delta}'} \quad (2.50)$$

la quale descrive l'accelerazione relativa (mareale) di due particelle in caduta libera, distanti ξ e con quadri-velocità \mathbf{u} ;¹⁰ il fatto che chi viaggia possa essere accelerato dai motori della navicella sulla quale si trova ($a \neq 0$) non influisce sull'accelerazione relativa che avverte. Siccome nel suo sistema di riferimento il viaggiatore si vede fermo, $u^{\bar{\alpha}'} = \delta^{\bar{\alpha}'}_{\bar{0}'}$ (δ^{α}_{β} è la delta di Kronecker) e ξ gli risulta puramente spaziale, pertanto $\xi \cdot \mathbf{u} = -\xi^{\bar{0}'} = 0$. Inoltre, il tensore di Riemann $R_{\bar{\alpha}'\bar{\beta}'\bar{\gamma}'\bar{\delta}'}$ ha la proprietà di essere antisimmetrico nei primi due indici, il che rende $\Delta a^{\bar{\alpha}'}$ puramente spaziale con componenti

$$\Delta a^{\bar{j}'} = -c^2 R_{\bar{0}'\bar{k}'\bar{0}'}^{\bar{j}'} \xi^{\bar{k}'} = -c^2 R_{\bar{j}'\bar{0}'\bar{k}'\bar{0}'} \xi^{\bar{k}'} \quad (2.51)$$

A questo punto, le componenti del tensore di Riemann nel sistema di riferimento del viaggiatore $\{\mathbf{e}_{\bar{0}'}, \mathbf{e}_{\bar{1}'}, \mathbf{e}_{\bar{2}'}, \mathbf{e}_{\bar{3}'}\}$ si ottengono da quelle mostrate in (2.9) per un osservatore statico $\{\mathbf{e}_{\bar{t}}, \mathbf{e}_{\bar{r}}, \mathbf{e}_{\bar{\theta}}, \mathbf{e}_{\bar{\phi}}\}$ per mezzo delle trasformazioni di Lorentz

$$R_{\bar{\alpha}'\bar{\beta}'\bar{\gamma}'\bar{\delta}'} = \Lambda_{\bar{\alpha}'}^{\bar{\lambda}} \Lambda_{\bar{\beta}'}^{\bar{\mu}} \Lambda_{\bar{\gamma}'}^{\bar{\nu}} \Lambda_{\bar{\delta}'}^{\bar{k}} R_{\bar{\lambda}\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{k}} \quad (2.52)$$

¹⁰Nel senso che, mettendosi nel sistema di riferimento di una delle due, l'altra ha quadri-velocità \mathbf{u} .

Come prevedibile, risultano non nulli solo tre elementi

$$\begin{aligned}
R_{\bar{1}'\bar{0}'\bar{1}'\bar{0}'} &= R_{\bar{r}\bar{t}\bar{r}\bar{t}} \\
&= -\left(1 - \frac{b}{r}\right) \left(-\Phi'' + \frac{b'r - b}{2r(r-b)}\Phi' - (\Phi')^2\right) \\
R_{\bar{2}'\bar{0}'\bar{2}'\bar{0}'} &= \gamma^2 R_{\bar{\theta}\bar{t}\bar{\theta}\bar{t}} + \gamma^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2 R_{\bar{\theta}\bar{r}\bar{\theta}\bar{r}} \\
&= \frac{\gamma^2}{2r^2} \left[\left(\frac{v}{c}\right)^2 \left(b' - \frac{b}{r}\right) + 2(r-b)\Phi'\right] \\
R_{\bar{3}'\bar{0}'\bar{3}'\bar{0}'} &= R_{\bar{2}'\bar{0}'\bar{2}'\bar{0}'} \tag{2.53}
\end{aligned}$$

uno per ogni componente spaziale dell'accelerazione mareale:

$$\begin{aligned}
\Delta a^{\bar{1}'} &= -c^2 R_{\bar{1}'\bar{0}'\bar{1}'\bar{0}'} \xi^{\bar{1}'} & \Delta a^{\bar{2}'} &= -c^2 R_{\bar{2}'\bar{0}'\bar{2}'\bar{0}'} \xi^{\bar{2}'} \\
\Delta a^{\bar{3}'} &= -c^2 R_{\bar{3}'\bar{0}'\bar{3}'\bar{0}'} \xi^{\bar{3}'} \tag{2.54}
\end{aligned}$$

Dobbiamo ora imporre che, per $|\xi| \sim 2\text{m}$ (ordine di grandezza del corpo umano) e ξ orientato in qualsiasi direzione spaziale nel sistema di riferimento del viaggiatore, $|\Delta \mathbf{a}| \lesssim g_{\oplus}$ (accelerazione mareale sopportabile da un essere umano). Combinando le eq. (2.53) e (2.54), i vincoli sull'accelerazione mareale (radiale e laterale) risultano:

$$\begin{aligned}
|R_{\bar{1}'\bar{0}'\bar{1}'\bar{0}'}| &= \left| \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left(-\Phi'' + \frac{b'r - b}{2r(r-b)}\Phi' - (\Phi')^2\right) \right| \\
&\lesssim \frac{g_{\oplus}}{c^2 \cdot 2\text{m}} \cong \frac{1}{(10^{10}\text{cm})^2} \tag{2.55}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|R_{\bar{2}'\bar{0}'\bar{2}'\bar{0}'}| &= \left| \frac{\gamma^2}{2r^2} \left[\left(\frac{v}{c}\right)^2 \left(b' - \frac{b}{r}\right) + 2(r-b)\Phi'\right] \right| \\
&\lesssim \frac{g_{\oplus}}{c^2 \cdot 2\text{m}} \cong \frac{1}{(10^{10}\text{cm})^2} \tag{2.56}
\end{aligned}$$

Possiamo considerare il vincolo mareale radiale (2.55) come un vincolo sulla funzione di redshift $\Phi(r)$;¹¹ il modo più semplice in assoluto per soddisfare questo vincolo è di porre $\Phi' = 0$ ovunque, il che definisce una classe di wormhole attraversabili che vedremo meglio nel prossimo capitolo (vedi sez. 3.1). Possiamo infine considerare i vincoli mareali laterali (2.56) come vincoli sulla velocità v con la quale il viaggiatore attraversa il wormhole secondo un osservatore statico. Nel prossimo capitolo studieremo le implicazioni di entrambi questi vincoli per specifiche tipologie di wormhole (ovvero per specifiche soluzioni delle equazioni di campo (2.19)-(2.21)).

¹¹ $b(r)$ è già fortemente vincolata dalle condizioni poste nella sez. 2.4

2.7 Materiale del wormhole attraversabile

È giunto il momento di affrontare il discorso sul materiale che origina e tiene aperto il wormhole e capire se la settima proprietà della sezione 2.1 è verificata o meno.

2.7.1 Vincoli su tensione e densità di massa nella gola

Nelle scorse sezioni abbiamo esaminato a quali vincoli sono soggette le funzioni $b(r)$ e $\Phi(r)$ del wormhole a causa della geometria, delle condizioni di attraversabilità e dell'assenza di orizzonti. Ora torniamo ad esaminare le equazioni di campo (2.19)-(2.21) per ottenere, a partire dalle restrizioni su b , i vincoli sulla densità di massa ρ , sulla tensione radiale τ e sulla pressione laterale p che generano la curvatura spazio-temporale.

I vincoli più severi occorrono nella gola, la regione più curvata dello spazio-tempo del wormhole: la condizione $r = b = b_0$ unita alla richiesta che $(r - b)\Phi' \rightarrow 0$ nell'avvicinarsi alla gola¹² obbliga la tensione radiale, tramite l'equazione di campo (2.20), ad assumere il valore

$$\begin{aligned} \tau_0 &\equiv (\text{tensione radiale nella gola}) \\ &= \frac{1}{8\pi G c^{-4} b_0^2} \sim 5 \cdot 10^{11} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2} \left(\frac{1 \text{ a.l.}}{b_0} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.57)$$

dove il dyne ($1 \text{ dyn} = 10^{-5} \text{ N}$) è l'unità di misura della forza nel sistema CGS. Questa tensione è a dir poco enorme: per $b_0 \sim 3 \text{ km}$ si ottiene che τ_0 ha lo stesso ordine di grandezza della pressione radiale al centro delle stelle di neutroni più massive ($\sim 10^{37} \text{ dyn/cm}^2$). Anche per gole molto più ampie, per esempio $b_0 = 1 \text{ a.l.}$, τ_0 potrebbe essere prodotta solo da campi magnetici di grande intensità, dell'ordine di 10^6 Gauss.

Quello appena mostrato non è l'unico problema che riguarda la materia che costituisce il wormhole, anzi, è il problema minore! Definiamo la funzione adimensionale

$$\zeta = \frac{\tau - \rho c^2}{|\rho c^2|} = \frac{b/r - b' - 2(r - b)\Phi'}{|b'|} \quad (2.58)$$

dove abbiamo usato le equazioni di campo di Einstein (2.19), (2.20) per rimpiazzare le funzioni τ e ρ con le loro controparti geometriche b e Φ ; tramite questa funzione esamineremo ora un altro aspetto chiave della tensione radiale nella gola del wormhole.

La richiesta, derivante dalla definizione stessa di wormhole, che la gola del sia collegabile ad uno spazio-tempo asintoticamente piatto, comporta che la superficie di embedding debba essere inclinarsi verso l'esterno a partire dalla verticalità nella gola di

¹²Quest'ultima condizione sulla gola non segue direttamente dalla prima, dato che essa non dice nulla su come $b(r)$ debba tendere a b_0 ; segue dalla (2.19) unita alla richiesta che ρ sia finita (quindi b' finita).

modo da risultare sempre più pianeggiante allontanandosi dall'asse di simmetria. Questa necessità di appiattare la superficie introduce un nuovo vincolo matematico sull'inverso della funzione di embedding, $r(z)$, che deve soddisfare $d^2r/dz^2 > 0$ vicino la gola $r = b_0$ e su di essa. Per capire quali sono le conseguenze di questo vincolo, partiamo invertendo la condizione di embedding (2.28)

$$\frac{dr}{dz} = \pm \left(\frac{r}{b(r)} - 1 \right)^{1/2} \quad (2.59)$$

Se ora deriviamo questa equazione rispetto a z e poniamo tale derivata positiva vicino alla gola, otteniamo una prima versione della condizione di appiattimento verso l'esterno:¹³

$$\frac{d^2r}{dz^2} = \frac{b - b'r}{2b^2} > 0 \quad \text{sulla gola o vicino ad essa} \quad (2.60)$$

Una seconda versione di questa condizione può essere ottenuta in termini di ζ combinando le equazioni (2.58) e (2.60)

$$\zeta = \frac{2b^2}{r|b'|} \left(\frac{d^2r}{dz^2} \right) - 2(r - b) \frac{\Phi'}{|b'|} \quad (2.61)$$

Analizziamo quest'ultima equazione vicino alla gola del wormhole: innanzitutto sappiamo che, per l'equazione di campo (2.19), b' è sicuramente finito in quanto ρ lo è, conseguente ζ è finita; $|b'|, b^2$ ed r sono non negativi in qualsiasi punto dello spaziotempo, $(r - b)\Phi'$ va a zero nei pressi della gola e d^2r/dz^2 deve essere positivo nella stessa regione per la condizione di appiattimento verso l'esterno. Allora possiamo dire che, affinché la superficie presenti l'appiattimento verso l'esterno, ζ dev'essere positiva nei pressi della gola

$$\zeta_0 = \frac{\tau_0 - \rho_0 c^2}{|\rho_0 c^2|} > 0 \quad \text{sulla gola o vicino ad essa} \quad (2.62)$$

dove il pedice “0” indica, come visto precedentemente per la tensione radiale, il valore della funzione sulla gola o molto vicino ad essa. Da (2.62) segue immediatamente che la condizione di appiattimento della superficie si traduce in un vincolo per il materiale del wormhole sulla gola:

$$\tau_0 > \rho_0 c^2 \quad (2.63)$$

Come ora vedremo, quest'ultimo vincolo rappresenta il tallone d'Achille del modello di wormhole attraversabile di Morris e Thorne.

Definiamo “esotico” un qualsiasi materiale dotato della proprietà $\tau > \rho c^2 > 0$. Allora, almeno il materiale presente nella gola del wormhole deve essere esotico: se

¹³Nel derivare si faccia attenzione al fatto che b dipende da z tramite r .

così non fosse l'equazione (2.63) sarebbe violata, quindi il wormhole non avrebbe una superficie che si appiattisce di modo da unirsi dolcemente ad un universo asintoticamente piatto, quindi non potremmo attraversarlo.

I materiali esotici sono estremamente problematici per via delle implicazioni che portano per le misure fatte su di essi da chi viaggia attraverso la gola; per vederlo calcoliamo la proiezione, sul vettore di base $\mathbf{e}_{\bar{0}'} = \gamma\mathbf{e}_{\bar{t}} \mp \gamma(v/c)\mathbf{e}_{\bar{r}}$, della componente “00” tensore energia-impulso (2.14) nella gola:

$$\begin{aligned} T_{\bar{0}'\bar{0}'} &= \Lambda_{\bar{0}'}^{\bar{\alpha}} \Lambda_{\bar{0}'}^{\bar{\beta}} T_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \\ &= \gamma^2 T_{\bar{t}\bar{t}} \mp 2\gamma^2(v/c)T_{\bar{t}\bar{r}} + \gamma^2(v/c)^2 T_{\bar{r}\bar{r}} \\ &= \gamma^2(\rho_0 c^2 - \tau_0) + \tau_0 \end{aligned} \quad (2.64)$$

Questa è la densità di energia misurata, nella gola, dal viaggiatore: è evidente che se egli si muovesse con una velocità radiale prossima a quella della luce ($\gamma \gg 1$) la densità di energia nella gola gli apparirebbe negativa a causa di (2.63), cioè a causa dell'esoticità del materiale lì presente.

Anziché richiedere l'impiego, nella gola, di un materiale per il quale sia negativa solo la densità di energia misurata da chi viaggia, potremmo semplicemente richiedere che esso abbia densità negativa per ogni osservatore, ovvero $\rho_0 c^2 < 0$;¹⁴ tuttavia, nel caso volessimo minimizzare il grado di esoticità del materiale alla gola, indichiamo il seguente possibile vincolo:

$$\rho c^2 \geq 0 \quad \text{ovunque; un possibile vincolo.} \quad (2.65)$$

Come vedremo nella sez. 3.3, far cadere quest'ultimo vincolo aumenta sì l'esoticità del materiale impiegato, ma consente di ottenere un wormhole eccezionale.

2.7.2 Considerazioni sulla realistica della materia esotica

Sino agli inizi degli anni '70 la stragrande maggioranza dei fisici affermava che nessun osservatore potesse essere in grado di misurare una densità di energia negativa. Questa asserzione prende il nome di “condizione debole dell'energia”; quando viene rinforzata da ulteriori vincoli viene chiamata “condizione forte dell'energia” o “condizione dominante dell'energia”.

Queste condizioni sull'energia sono alla base di molti importanti teoremi di relatività generale come il “teorema di positività della massa”, per il quale oggetti costituiti da materia che soddisfa la condizione dominante dell'energia non possono anti-gravitare (non possono respingere altri corpi per interazione gravitazionale); ma anche una grande varietà di teoremi che descrive la creazione di singolarità per collasso gravitazionale richiede che una delle due condizioni dell'energia sia soddisfatta. Infine, la “seconda

¹⁴Chiaramente anche questo tipo di materiale risulterebbe esotico; possiamo in realtà definire esotico un qualsiasi materiale per il quale almeno un osservatore misura ρ negativa.

legge della meccanica dei buchi neri” fa uso della condizione forte dell’energia, in quanto afferma che la superficie dell’orizzonte degli eventi di un buco nero non possa mai decrescere proprio sfruttando il fatto che esso può essere circondato solo da un tensore energia-impulso positivo o nullo.

Assumendo una di queste condizioni dell’energia, per quanto detto in 2.7.1 non vi sarebbe speranza che i wormhole attraversabili di Morris e Thorne possano esistere; infatti un materiale per cui vale (2.63), necessario almeno nella gola del wormhole attraversabile, violerebbe entrambe queste condizioni (vedi (2.64)).

La domanda che sorge spontanea a questo punto è: tutto quello che abbiamo fatto sino ad ora è da buttare? Non è del tutto detto. La scoperta, da parte di Hawking nel ’74, che i buchi neri non rotanti possono evaporare e, di conseguenza, che le loro superfici possono rimpicciolirsi violando di fatto la seconda legge della meccanica dei buchi neri, costrinse i fisici ad accettare che i campi quantistici possono violare le condizioni dell’energia. Più precisamente, ci sono stati quantici nei quali i valori (rinormalizzati) di aspettazione del tensore energia-impulso violano entrambe le condizioni dell’energia, per esempio quando un qualsiasi osservatore statico si trova appena oltre l’orizzonte di un buco nero di Schwarzschild che sia circondato dal vuoto ed isolato. Un tale osservatore misurerà per la densità di energia un valore di aspettazione negativo e indipendente dal tempo, associato alla creazione di particelle vicino all’orizzonte; queste particelle in seguito evaporeranno e, di conseguenza, un flusso di energia negativa attraverserà l’orizzonte rimpicciolandolo.

Questo esempio fa capire come possa essere errato l’assumere la non esistenza del materiale esotico richiesto nella gola di un wormhole sulla base delle condizioni dell’energia. Potrebbe anche essere che le leggi fondamentali della fisica vietino il materiale esotico sulle scale macroscopiche in cui avviene la costruzione del wormhole; tuttavia nessuno è mai riuscito a dimostrare, tramite gli esperimenti o tramite la teoria, che l’esistenza di materia macroscopica con densità di energia negativa sia vietata, magari questo materiale è semplicemente molto raro o non abbiamo ancora le conoscenze sperimentali per rilevarlo e/o riprodurlo.

2.7.3 Considerazioni sull’effetto della materia sul corpo del viaggiatore

Nonostante l’esoticità sia sicuramente l’aspetto più problematico del materiale nella gola del wormhole attraversabile, non dobbiamo dimenticarci di (2.57): potrebbe essere estremamente spiacevole per un essere umano interagire con un materiale che da luogo ad una tensione radiale così intensa. Ci sono due modi proteggere chi viaggia nel wormhole da tale interazione:

1. Si potrebbe pensare di rompere la simmetria sferica del wormhole facendo passare un tubo a vuoto di diametro $\ll b_0$ lungo di esso: sfruttando il tubo per trattenere la

materia esotica all'esterno, il viaggiatore riuscirebbe ad attraversare il wormhole in maniera confortevole passando dall'interno.¹⁵ Tuttavia, l'unico modo per accertarci che questa tecnica funzioni sarebbe quello di studiare la soluzione non sferica di wormhole attraversabile delle equazioni di Einstein, studio che non verrà svolto in questa tesi.

2. Il materiale esotico che mantiene il wormhole aperto potrebbe essere scelto in maniera tale da interagire debolmente con il corpo umano, come accade ad esempio per i neutrini e le onde gravitazionali nel caso di materia realistica. In questo modo, nonostante la sua elevata tensione e densità, il materiale potrebbe penetrare il corpo del viaggiatore e quindi non esercitare forze rilevanti.

Comunque è evidente che affrontare questo problema non ha senso sino a che non si riuscirà a capire se la materia esotica (e quindi il wormhole attraversabile) può esistere o meno su scale macroscopiche.

¹⁵Nel romanzo di fantascifico "Contact" di Carl Sagan, i protagonisti usano questa tecnica per attraversare un wormhole senza venire uccisi dalla tensione radiale del materiale esotico. Tra l'altro, Thorne e Morris furono stimolati a trovare la loro soluzione di wormhole attraversabile proprio da Sagan, il quale li contattò per chiedergli aiuto nel rendere la fisica gravitazionale del romanzo la più accurata possibile.

Capitolo 3

Esempi di wormholes attraversabili

In questo capitolo verranno presentate tre specifiche soluzioni di wormhole attraversabile. Queste si ottengono risolvendo le equazioni di campo di Einstein (2.19)-(2.21) per una scelta delle funzioni $b(r)$ e $\Phi(r)$ che sia in accordo con tutti i vincoli matematici che abbiamo presentato e discusso nel capitolo 2.

Per quanto detto nella sez. 2.7, non è possibile ottenere un wormhole attraversabile se non si impiega del materiale esotico $\tau > \rho c^2$ sulla gola: pertanto in questo capitolo si assumerà che tale materiale esista e, viste le problematiche che comporta, il suo utilizzo verrà limitato a regioni sempre più piccole attorno alla gola.

3.1 Soluzione senza forze mareali

Iniziamo con il caso più semplice: ponendo $\Phi = \Phi_0 = \text{cost}$ dappertutto si può ottenere una classe di soluzioni nella quale, per (2.55) e (2.56), un osservatore statico non avverte alcun tipo di forza mareale (da qui il nome), mentre chi viaggia radialmente nel wormhole avverte solo le forze mareali laterali. Per studiare una particolare soluzione appartenente a questa classe scegliamo una costante Φ_0 ed una funzione b che soddisfi le condizioni di forma discusse nella sez. 2.4.2, per esempio

$$b(r) = (b_0 r)^{1/2}, \quad \Phi_0 = 0 \quad (3.1)$$

Risolvendo le equazioni di campo (2.19)-(2.21) otteniamo:

$$\rho(r) = \frac{b_0^{1/2}}{16\pi G c^{-2} r^{5/2}} \quad (3.2)$$

$$\tau(r) = \frac{b_0^{1/2}}{8\pi G c^{-4} r^{5/2}} \quad (3.3)$$

$$p(r) = \frac{b_0^{1/2}}{32\pi G c^{-4} r^{5/2}} \quad (3.4)$$

Da cui si ricavano le equazioni di stato del materiale:

$$\tau/2 = 2p = \rho c^2, \quad \rho > 0 \quad (3.5)$$

Come si può notare dalla (3.2), la densità di materia/energia non si annulla mai ma tende a zero rapidamente per r che tende a $+\infty$ (e quindi per l che tende a $\pm\infty$); ciò sta ad indicare che il materiale che dà origine ad un wormhole di questo tipo deve essere distribuito in maniera sfericamente simmetrica, a partire dalla gola, in tutto lo spazio-tempo di modo che la sua densità cali come $r^{5/2}$ (ciò rende il materiale impercettibile a grandi distanze dalla gola, per esempio sul nostro pianeta).¹

La funzione $\zeta(r)$ definita in (2.58) indica il grado di esoticità del materiale che genera il wormhole attraversabile: essa è tanto più positiva quanto più il materiale è esotico ed è tanto più negativa quanto più il materiale è realistico. Calcolandola per la nostra scelta di b e Φ risulta

$$\zeta(r) = \frac{b - b'r}{|b'r|} = 1 \quad \forall r \quad (3.6)$$

che, naturalmente, è positivo. Conseguentemente, per questo tipo di wormhole deve essere impiegata solo materia esotica la quale, per (3.5), deve presentare una densità di energia positiva per un osservatore non in moto.

L'accelerazione (2.48) che il viaggiatore avverte in direzione radiale risulta per questa soluzione

$$a = \mp \left[1 - \left(\frac{b_0}{r} \right)^{1/2} \right]^{1/2} \frac{d\gamma}{dl} c^2 \quad (3.7)$$

Supponiamo che il viaggiatore decida di attraversare il wormhole mantenendo spenti i propulsori della sua astronave; allora egli diventa un osservatore in caduta libera verso la gola, pertanto misura $a = 0$ (non si sente accelerare). Per la (3.7) questo implica che $\gamma = [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$ sia costante, ovvero che la velocità $v = dl/e^\Phi dt = dl/dt$ che un osservatore statico locale misura per la navicella sia costante

$$v = \frac{dl}{dt} = \text{costante} \quad \text{per navicella non alimentata} \quad (3.8)$$

La funzione di embedding $z(r)$ si ottiene integrando (2.28) per la nostra scelta di b

$$z(r) = \pm 4b_0 [(\sqrt{r/b_0} - 1)^{3/2}/3 + (\sqrt{r/b_0} - 1)^{1/2}] \quad (3.9)$$

¹Nei diagrammi di embedding, dove ogni punto della superficie incorporata è una sfera dello spazio-tempo, la materia va pensata situata sulla superficie.

mentre la distanza propria nel wormhole $l(r)$ si determina dalla (2.30) e risulta

$$\begin{aligned}
l(r) = & \pm 4b_0 \left[\left(\frac{r}{b_0} \right)^{3/4} \frac{(\sqrt{r/b_0} - 1)^{1/2}}{4} \right] \\
& \pm 4b_0 \left\{ \frac{3}{8} \left(\frac{r}{b_0} \right)^{1/4} \left(\sqrt{\frac{r}{b_0}} - 1 \right)^{1/2} \right. \\
& \left. + \frac{3}{8} \ln \left[\left(\frac{r}{b_0} \right)^{1/4} + \left(\sqrt{\frac{r}{b_0}} - 1 \right)^{1/2} \right] \right\} \quad (3.10)
\end{aligned}$$

Come abbiamo spiegato in sez. 2.6.1, dobbiamo posizionare entrambe le nostre stazioni spaziali ad una distanza dalla gola tale da poter considerare piatto lo spazio-tempo circostante. Per il vincolo (2.38) questo equivale a richiedere che $(1 - b/r)$ differisca di poco dall'unità, per esempio dell' 1%: poniamo quindi le coordinate radiali delle due stazioni pari a $r_1 = r_2 = 10^4 b_0$, corrispondenti alle distanze proprie $l_1 = l_2 \cong 10^4 b_0$.

Ora calcoleremo quanto velocemente il viaggiatore può attraversare per intero questo wormhole, partendo dalla stazione collocata in $-l_1$ nell'universo inferiore e arrivando a quella posizionata in $+l_2$ nell'universo superiore (vedi fig. 2.3). In prima approssimazione ignoriamo l'accelerazione e la decelerazione nei pressi delle due stazioni dovute alla condizione (2.37); allora il vincolo (2.49) sull'accelerazione radiale del viaggiatore è banalmente soddisfatto in tutto il tragitto, in quanto $\Phi = 0$ e consideriamo $\gamma = \text{costante}$ per tutto il viaggio (i propulsori sono spenti). Come abbiamo specificato all'inizio di questa sezione, l'accelerazione mareale radiale risulta identicamente nulla per questa classe di wormholes, quindi anche il vincolo (2.55) è verificato. Rimane solo il vincolo (2.56), che limita l'accelerazione mareale laterale sopportabile dal viaggiatore; per la nostra particolare soluzione risulta:

$$\frac{\gamma^2}{4r^3} \left(\frac{v}{c} \right)^2 (b_0 r)^{1/2} \lesssim \frac{1}{(10^{10} \text{cm})^2} \quad (3.11)$$

Questo vincolo è tanto più severo quanto più il raggio r è piccolo; per il minimo valore $r = b_0$ (sulla gola) si ottiene

$$\gamma v/c \lesssim 2 \cdot 10^{-7} (b_0/10 \text{ m}) \quad (3.12)$$

che nel limite di moto non relativistico ($\gamma \approx 1$) risulta

$$v \lesssim 60 \text{ m/s} (b_0/10 \text{ m}) \quad \text{sulla gola del wormhole} \quad (3.13)$$

(in realtà il limite vale per ogni r se trascuriamo qualsiasi forma di accelerazione). In questo limite, la durata Δt della traversata secondo un osservatore fermo ad una delle

stazioni è circa la stessa di quella misurata dal viaggiatore $\Delta\tau_v$ e vale

$$\begin{aligned}\Delta t \approx \Delta\tau_v &\approx \int_{-l_1}^{+l_2} \frac{dl}{v} \cong 2 \cdot 10^4 \frac{b_0}{v} \\ &\approx 3 \cdot 10^3 \text{ s } (v/60 \text{ m/s})^{-1}\end{aligned}\quad (3.14)$$

Quindi il tempo necessario per la traversata diverrebbe di circa un'ora per una velocità costante di 180 km/h. Siccome la velocità della navicella è piccola, l'accelerazione all'inizio e la decelerazione alla fine del viaggio non hanno effetti significativi sulle condizioni (3.12)-(3.13), pertanto non le introduciamo nemmeno.

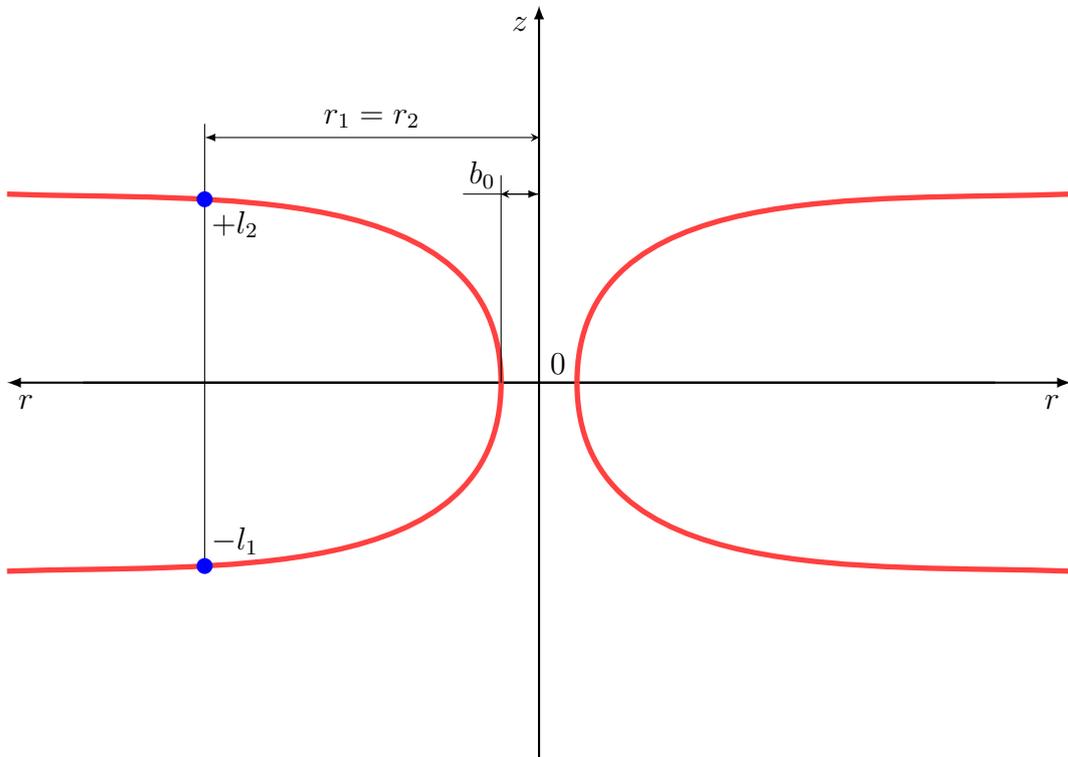


Figura 3.1: Profilo di embedding di un wormhole in cui la materia esotica a densità di energia positiva (rappresentata in rosso) si estende sino all'infinito, come quello di (3.1). Come si può notare, il profilo è ben appiattito già a piccole distanze dalla gola, segno che le stazioni possono essere poste vicino ad essa ed il tempo di attraversamento è piccolo.

3.2 Soluzione con materiale esotico confinato entro grande distanza dalla gola

Per contenere il materiale esotico entro una superficie sferica di raggio $r = R_S$ richiediamo per prima cosa che, all'interno della sfera, la soluzione sia senza forze mareali (cioé dello stesso tipo di quella illustrata nella sez. 3.1). Quindi:

$$\begin{aligned} b &= b_0(r/b_0)^{1-\eta}, & \text{con } 0 < \eta = \text{costante} < 1 \\ \Phi &= \Phi_0 = \text{costante}, & \text{per } b_0 \leq r < R_S \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ora che abbiamo deciso la forma delle funzioni $b(r)$ e $\Phi(r)$, il tensore energia-impulso interno ad R_S si ottiene da (2.19)-(2.21) come:

$$\rho(r) = \frac{(1-\eta)b(r)}{8\pi Gc^{-2}r^3} \quad (3.16)$$

$$\tau(r) = \frac{\rho c^2}{1-\eta} \quad (3.17)$$

$$p(r) = \frac{\eta\rho c^2}{2(1-\eta)} \quad (3.18)$$

Mentre la funzione di esoticit  (2.58) risulta

$$\zeta(r) = \frac{\eta}{1-\eta} \quad (3.19)$$

Questa parte interna della soluzione soddisfa tutti i vincoli del wormhole attraversabile: vi   una gola in $r = b_0$ (infatti $r = b(r)$ per $r = b_0$), non ci sono orizzonti in quanto Φ   costante ovunque (vedi eq. (2.35)) e il diagramma di embedding si appiattisce verso l'esterno in quanto il materiale   esotico ($0 < \eta < 1$). Forse il lettore si sar  accorto che questa soluzione interna ad R_S altro non   che una versione generale della soluzione presentata nella sezione precedente, dove $\eta = 1/2$ e $\Phi_0 = 0$. Per semplicit  d'ora in avanti considereremo solo il caso $\eta = 1/2$, di modo che le equazioni (3.16)-(3.18) del materiale si riconducano alle (3.2)-(3.4) e la (3.19) si riconduca alla (3.6).

Per quanto detto nella sez. 2.3.4, le equazioni di campo di Einstein permettono discontinuit  in $\rho(r)$ e $p(r)$ ma vincolano $\tau(r)$ ad essere continua. Quindi τ va portata a zero vicino alla superficie di raggio R_S , e per farlo ci conviene introdurre uno strato di transizione fra la regione interna alla superficie e quella esterna di vuoto, da R_S ad $R_S + \Delta R$. Scegliamo, per questo strato di transizione, il seguente materiale

$$\rho(r) = [\tau(R_S)/c^2](R_S/\Delta R), \quad (3.20a)$$

$$\tau(r) = \tau(R_S) - [\tau(R_S)/\Delta R](r - R_S), \quad \text{per } R_S < r < R_S + \Delta R \quad (3.20b)$$

Il materiale di transizione è quindi caratterizzato da una densità costante e da una tensione radiale che, linearmente, va a 0 come richiesto dalle equazioni di campo; inoltre, calcolando $\tau - \rho c^2$ si può notare come questa quantità sia sempre negativa, segno che lo strato è costituito da materiale non esotico. A questo punto, dalle equazioni (2.16), (2.17) e (2.21) si ottiene:

$$b(r) = \frac{8}{3}\pi Gc^{-4}(r^3 - R_S^3)\frac{R_S\tau(R_S)}{\Delta R} + b(R_S) \quad (3.20c)$$

$$\Phi'(r) = -\frac{8\pi Gc^{-4}\tau(r)r^3 - b(r)}{2r[r - b(r)]} \quad (3.20d)$$

$$p(r) = \frac{r}{2}[(\rho c^2 - \tau)\Phi' - \tau'] - \tau \quad (3.20e)$$

Consideriamo, per semplicità, che lo spessore dello strato di transizione sia $\Delta R = b(R_S)$, ed assumiamo inoltre che la regione in cui è racchiusa la materia esotica sia molto grande, $R_S \gg b_0$; segue, da (3.15), che $\Delta R = b(R_S) \ll R_S$. Per le equazioni (3.20) si ha allora che, a meno di errori dell'ordine di $\Delta R/R_S \ll 1$, le funzioni b , Φ' e τ variano linearmente nello strato mentre ρ e p sono costanti:

$$\begin{aligned} b(r) &= b(R_S) + [(r - R_S)/\Delta R]b(R_S), \\ \text{quindi } B &= b(R_S + \Delta R) = 2b(R_S), \end{aligned} \quad (3.21a)$$

$$\begin{aligned} \Phi'(r) &= [(r - R_S)/\Delta R](B/2R_S^2), \\ \text{quindi } \Phi'(R_S + \Delta R) &= B/2R_S^2, \end{aligned} \quad (3.21b)$$

$$\begin{aligned} \tau(r) &= \tau(R_S) - [(r - R_S)/\Delta R]\tau(R_S), \\ \text{quindi } \tau(R_S + \Delta R) &= 0, \end{aligned} \quad (3.21c)$$

$$p(r) = (R_S/2\Delta R)\tau(R_S), \quad (3.21d)$$

$$\rho(r) = (R_S/\Delta R)[\tau(R_S)/c^2]. \quad (3.21e)$$

Le equazioni (3.21a) e (3.21b) garantiscono la compatibilità con la soluzione esterna alla superficie, che altro non è che la soluzione di Schwarzschild nel vuoto data dalle equazioni (2.22)-(2.23). Le equazioni (3.21c) e (3.21d) ci dicono invece che nello strato di transizione vi è una pressione laterale molto intensa ($R_S/\Delta R \gg 1$) per controbilanciare la diminuzione di τ sino a zero. Confrontata con queste due enormi forze interne in

equilibrio, la forza gravitazionale sullo strato è trascurabile. Le equazioni di stato del materiale dello strato risultano:

$$p = \rho c^2/2, \quad \rho \text{ indipendente da } \tau \quad (3.22)$$

Posizioniamo le stazioni spaziali al bordo della regione esterna di Schwarzschild ($r_1 = r_2 = R_S + \Delta R$) e richiediamo che il viaggiatore sia in grado di fermarsi ($v = 0$) presso di esse senza venire schiacciato dalla gravità. Il vincolo (2.49) diventa:

$$|\Phi'(R_S + \Delta R)| = B/2R_S^2 \leq (0.97 \text{ a.l.})^{-1} \cong (9.2 \cdot 10^{15} \text{ m})^{-1} \quad (3.23)$$

per via delle equazioni (2.37) e (3.21b). In virtù di (3.21a) e (3.15) con $\eta = 1/2$, questo corrisponde a richiedere che

$$R_S > 1 \cdot 10^{11} \text{ m } (b_0/10 \text{ m})^{1/3} \cong 0.6 \text{ u.a. } (b_0/10 \text{ m})^{1/3} \quad (3.24)$$

quindi il valore del raggio di confinamento R_S dev'essere quindi molto grande per far sì che l'accelerazione di gravità nelle stazioni sia piccola. Questo grande valore di R_S implica

$$B \equiv b(R_S + \Delta R) = 2b(R_S) \cong 1.9 \cdot 10^6 \text{ m } (b_0/10 \text{ m})^{2/3} \quad (3.25)$$

Ricordando ora che la soluzione di Schwarzschild nel vuoto è

$$b(r) = B \text{ e } \Phi(r) = \frac{1}{2} \ln(1 - B/r) \quad \text{per } r \geq R_S + \Delta R \quad (3.26)$$

se ora integriamo la (3.21b) da $r = R_S$ ad $r = R_S + \Delta R$ otteniamo, a meno di correzioni dell'ordine di $\Delta R/R_S \ll 1$, che il valore costante assunto dalla funzione di redshift entro la superficie risulta esprimibile come

$$\Phi_0 = \frac{1}{2} \ln(1 - B/R_S) \quad (3.27)$$

Da (3.25) e (3.26) notiamo che $e^{2\Phi_0} = (1 - B/R_S)$ differisce dall'unità di poco, quindi nella regione interna ad R_S il tempo misurato da un osservatore statico è approssimativamente uguale alla coordinata temporale Minkowskiana t . Questo ci dice che l'analisi della velocità di attraversamento del wormhole fatta in sez. 3.1 rimane valida, e in particolare $v \lesssim 60 \text{ m/s } (b_0/10 \text{ m})$ nella gola.

Nella scorsa sezione ci siamo potuti permettere di lasciare v piccola per tutta la durata del viaggio, un po' come se il vincolo alla gola fosse da imporre ovunque; questo perché trascuravamo l'accelerazione, vista la vicinanza delle stazioni alla gola. Ora però le stazioni si trovano circa 10^6 volte più lontane di prima dalla gola (se fossero più vicine l'accelerazione di gravità presso di esse non sarebbe sopportabile). Dobbiamo quindi

richiedere a chi viaggia di muoversi ad una velocità variabile che soddisfi il vincolo (2.56) sull'accelerazione mareale laterale, che per $\gamma \approx 1$, $\eta = 1/2$ risulta

$$\frac{v}{c} \leq \left(\frac{2r}{10^8 \text{ m}} \right) \left(\frac{r}{b_0} \right)^{1/4}, \text{ ovvero } v \lesssim (60 \text{ m/s}) \left(\frac{b_0}{10 \text{ m}} \right) \left(\frac{r}{b_0} \right)^{5/4} \quad (3.28)$$

La velocità non è vincolata solo da (2.56), ma anche dalla condizione sull'accelerazione radiale (2.49); poiché $\gamma \approx 1$, $\Phi = \text{cost}^2$ e, per (3.27), $v \approx dl/dt$, il vincolo si traduce in

$$a = \left| \frac{dv}{dt} \right| = \left| \frac{d^2l}{dt^2} \right| \lesssim g_{\oplus} \quad (3.29)$$

Ipotizziamo ora un andamento per l'accelerazione radiale, di modo da poter dare una stima del tempo necessario ad attraversare il wormhole: richiediamo che il viaggiatore acceleri costantemente di $d^2l/dt^2 = +g_{\oplus}$ dalla stazione inferiore sino a $R_S/2$ (\approx a metà strada fra la stazione inferiore e la gola perché $R_S \gg b_0$) ed in seguito decelerati costantemente di $d^2l/dt^2 = -g_{\oplus}$ da $R_S/2$ sino alla gola, giungendovi quindi a riposo; da qui, imponiamo che il viaggiatore acceleri costantemente di $d^2l/dt^2 = +g_{\oplus}$ sino a $R_S/2$ per poi decelerare costantemente di $d^2l/dt^2 = -g_{\oplus}$ da $R_S/2$ sino ad arrivare, a riposo, alla stazione superiore. Seguendo queste direttive di viaggio, la velocità massima raggiunta dalla navicella sarà:

$$v_{max} = \left(\frac{1}{2} g_{\oplus} R_S \right)^{1/2} = 7 \cdot 10^5 \text{ m/s} (R_S/10^{11} \text{ m})^{1/2} \quad (3.30)$$

Questa velocità è non relativistica ($\gamma \approx 1$, come abbiamo assunto sino ad ora) fintanto che

$$R_S \ll 10^{16} \text{ m} \quad (3.31)$$

Il profilo di velocità $v(r)$ soddisfa molto bene il vincolo mareale (3.28) per ogni r ; tenendo a mente che $b_0 \ll R_S$, il tempo necessario per spostarsi dalla prima stazione alla seconda risulta

$$\Delta t \approx \Delta \tau_v \approx (32 R_S/g_{\oplus})^{1/2} \cong (7 \text{ giorni})(R_S/10^{11} \text{ m})^{1/2} \quad (3.32)$$

Quindi anche questa soluzione di wormhole attraversabile potrebbe essere impiegata per il viaggio interstellare se il materiale esotico esistesse.

²In questo tipo di soluzione il viaggio fra le stazioni avviene praticamente solo nella regione interna alla sfera di raggio R_S , dato che lo spessore ΔR dello strato di transizione è $\ll R_S$.

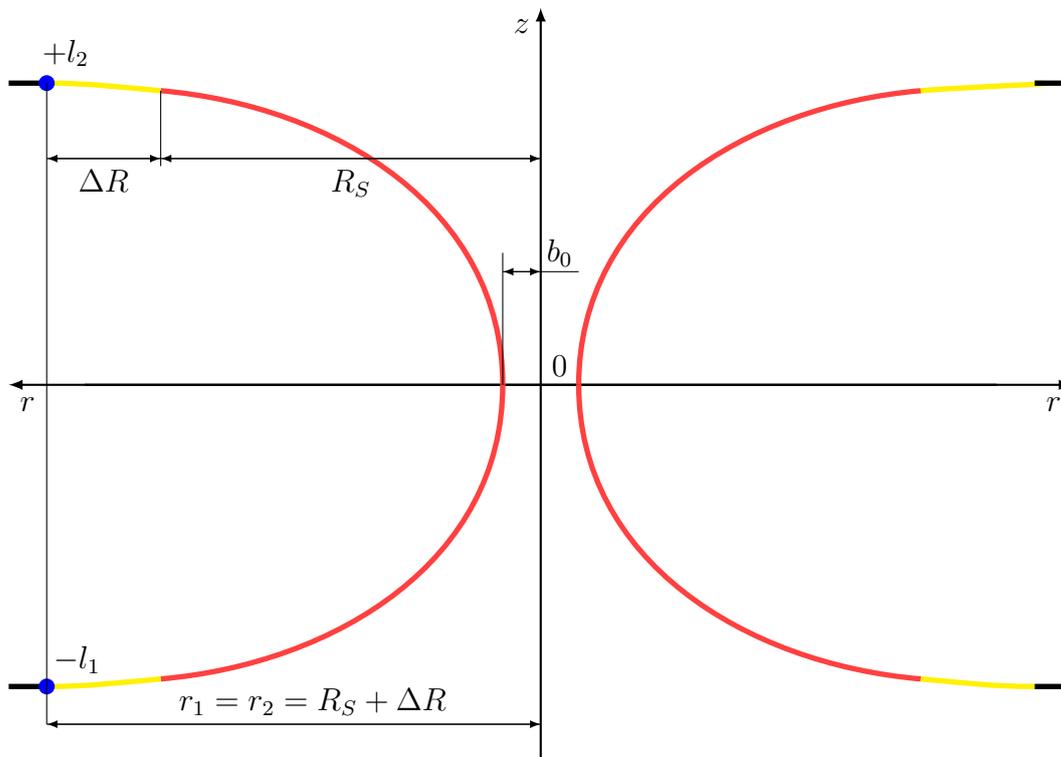


Figura 3.2: Profilo di embedding di un wormhole in cui la materia esotica è a densità di energia positiva (rappresentata in rosso) si estende sino ad una superficie di raggio $R_S \gg b_0$; è presente anche materia non esotica nello strato di transizione ΔR , rappresentato in giallo. Un rapido confronto con la fig. 3.1 ci mostra che, a causa del maggior confinamento della materia esotica, in quest'ultimo caso la superficie si appiattisce più lentamente con la distanza; questo ci costringe a porre le stazioni ad una maggior distanza dalla gola, il che aumenta il tempo necessario per attraversare il wormhole.

3.3 Soluzione con massimo confinamento del materiale esotico

Non potendo garantire l'esistenza del materiale esotico, dovremmo cercare di minimizzarne l'impiego; visto che la gola del wormhole è l'unica zona in cui la presenza di questo materiale è davvero indispensabile, minimizzare l'utilizzo della materia esotica equivale a richiedere che essa sia confinabile in un intorno piccolo di b_0 .

Sappiamo che, affinché un wormhole possa essere considerato attraversabile, la sua funzione di embedding $z(r)$ deve appiattirsi man mano che $r \rightarrow \infty$; tanto più è rapido questo appiattimento, tanto più il wormhole è adatto al viaggio interstellare (vedi figure 3.1, 3.2). Assumiamo che la materia esotica sia racchiusa entro un raggio $r_c = b_0 + \Delta r$

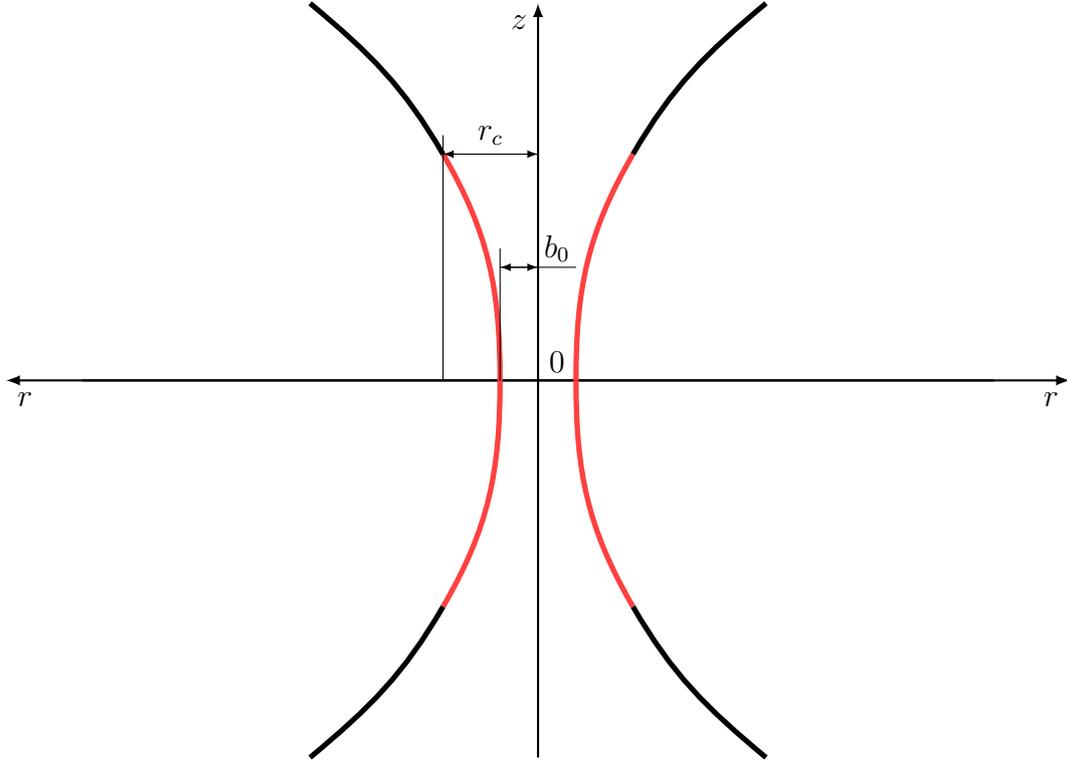


Figura 3.3: Profilo di embedding di un wormhole ottenuto confinando materia esotica a densità positiva (rappresentata in rosso) entro un raggio piccolo $r_c \approx b_0$ dalla gola. Come si può vedere, l'appiattimento si ottiene molto lentamente con r , e per questa ragione le stazioni sono talmente lontane dalla gola da non essere rappresentabili.

e sia sufficiente a piegare la superficie di embedding sensibilmente in tale punto, ad esempio $dz(r_c)/dr = 1$; per (2.28), questo equivale a richiedere che:

$$\frac{r_c}{b(r_c)} = \frac{b_0 + \Delta r}{b(b_0 + \Delta r)} = 2 \quad (3.33)$$

Se Δr fosse molto piccolo, di modo che $\Delta r \ll b_0$ e conseguentemente $r_c \approx b_0$, significherebbe che la superficie di embedding si starebbe appiattendo notevolmente già a breve distanza dalla gola, dando luogo ad un buon wormhole; ma la (3.33) in questa approssimazione può essere riscritta come

$$2 = \frac{b_0 + \Delta r}{b(b_0 + \Delta r)} \approx \frac{b_0 + \Delta r}{b_0 + \Delta r b'(b_0)} \cong \frac{1 + \Delta r/b_0}{1 + (\Delta r/b_0)b'} \approx 1 + \frac{\Delta r}{b_0}(1 - b') \quad (3.34)$$

che risulta verificata solo per $b' < 0$, vale a dire per $\rho < 0$ (vedi (2.19)). Questo significa che quando ρc^2 è vincolata ad essere positiva, la materia esotica non può essere confinata

in una regione piccola (confrontabile con b_0) attorno alla gola e contemporaneamente dar luogo ad un buon appiattimento della superficie di embedding, richiesto per l'attraversamento del wormhole in tempi utili (vedi fig. 3.3).

Nelle sezioni precedenti abbiamo ottenuto dei tempi di viaggio buoni per le nostre soluzioni, le quali erano entrambe originate da materia esotica con $\rho > 0$; tuttavia questo è avvenuto perché nel caso della soluzione senza forze mareali di sez. 3.1 il confinamento non è proprio stato richiesto, mentre nel caso di sez. 3.2 il confinamento avveniva per un raggio $R_S \gg b_0$, decisamente non confrontabile con le dimensioni della gola (si veda (3.24)). Impiegando invece materia la cui densità di energia risulta negativa anche per un osservatore statico, $\rho c^2 < 0$, è possibile confinare tale materiale esotico in una regione piccola a piacere attorno alla gola ed ottenere comunque un wormhole incredibilmente appiattito ed efficace, molto più di quelli precedentemente analizzati con $\rho > 0$ (vedi fig. 3.4). Scegliamo ad esempio:

$$b(r) = \begin{cases} b_0 \left(1 - \frac{r-b_0}{a_0}\right)^2 & \text{per } b_0 \leq r \leq b_0 + a_0, \\ 0 & \text{per } r > b_0 + a_0. \end{cases} \quad (3.35a)$$

$$\Phi(r) = 0 \text{ per } r \geq b_0 \quad (3.35b)$$

Applicando le equazioni di campo di Einstein (2.19)-(2.21) troviamo le caratteristiche che deve avere il nostro materiale per produrre il wormhole descritto sopra:

$$\rho(r) = - \left(\frac{b_0}{4\pi G c^{-2} r^2 a_0} \right) \left(1 - \frac{r-b_0}{a_0} \right), < 0 \quad (3.35c)$$

$$\tau(r) = \left(\frac{b_0}{8\pi G c^{-4} r^3} \right) \left(1 - \frac{r-b_0}{a_0} \right)^2 \quad (3.35d)$$

$$p(r) = \frac{b - b'r}{16\pi G c^{-4} r^3} = \frac{\tau - \rho c^2}{2} \quad (3.35e)$$

per $b_0 \leq r < b_0 + a_0$ (cioè intorno alla gola), mentre

$$\rho(r) = \tau(r) = p(r) = 0 \quad (3.35f)$$

per $r \geq b_0 + a_0$. Risulta quindi che il nostro materiale esotico è confinato entro a_0 dalla gola (fuori abbiamo il vuoto per (3.35f)) ed ha densità negativa. Inoltre, questa soluzione appartiene alla classe delle soluzioni senza forze mareali in quanto $\Phi = \text{cost} = 0$ ovunque: un viaggiatore che si muove nel wormhole a velocità $v = \text{cost}$ non avverte forze che lo accelerano, mentre avverte forze mareali laterali che sono sopportabili fintanto che il vincolo (2.56) è soddisfatto. Sostituendo le (3.35) nella (2.56) con $\gamma \approx 1$ e $a_0 \ll b_0$ (nulla ce lo vieta a patto che $a_0 \neq 0$) otteniamo il vincolo sulla velocità per questa soluzione delle equazioni di campo

$$(v/c)^2 \lesssim a_0 b_0 / (10^8 \text{ m})^2 \quad \text{per } b_0 \leq r \leq b_0 + a_0 \quad (3.36)$$

Supponiamo ora che le due stazioni si trovino in $r_1 = r_2 \approx b_0 + a_0$, quindi nei pressi del confine con la regione di vuoto;³ approssimando la distanza propria Δl fra di esse come la semicirconferenza πa_0 centrata in $b_0 + a_0$, il tempo necessario a viaggiare dalla stazione inferiore a quella superiore, muovendosi a velocità costante e di modo da soddisfare (3.36), è

$$\Delta t \approx \Delta \tau_v \approx \pi a_0 / v \gtrsim 1 \text{ sec } \sqrt{a_0 / b_0} \quad (3.37)$$

Quest'ultima equazione ci dice che, indipendentemente dal valore di b_0 , scegliendo una distanza radiale a_0 arbitrariamente piccola entro la quale confinare il materiale esotico il tempo di percorrenza del wormhole può essere reso piccolo a piacere; conseguentemente, anche la distanza propria Δl fra le stazioni viene resa arbitrariamente piccola e, poiché esse devono essere poste in regioni dello spazio-tempo pressoché piatte (sennò verrebbero accelerate verso il wormhole), se Δl diminuisce al diminuire di a_0 significa che la superficie di embedding del wormhole si appiattisce ad una distanza sempre più piccola da b_0 .

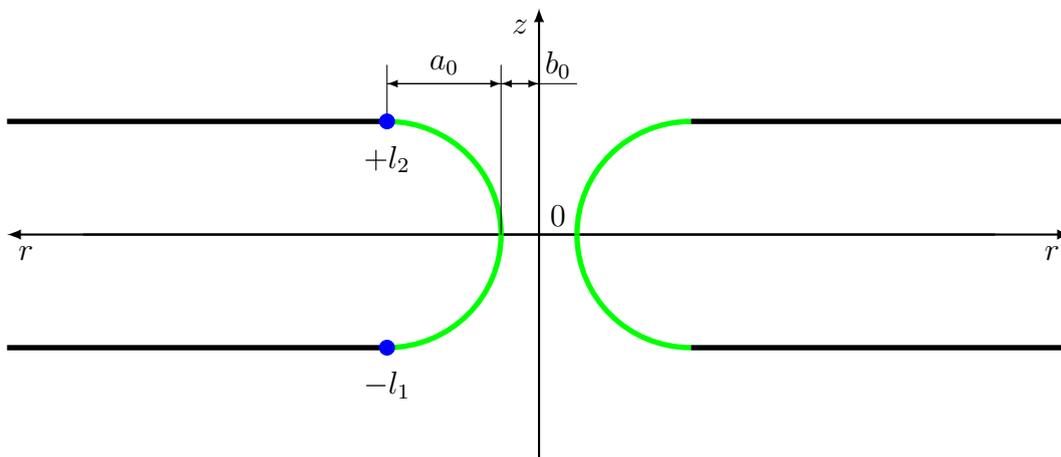


Figura 3.4: Profilo di embedding di un wormhole in cui la materia esotica a densità di energia *negativa* (rappresentata in verde per distinguerla da quella a densità positiva) si estende sino ad una distanza a_0 piccola a piacere dalla gola. Se la densità di energia della materia esotica è negativa, più essa viene confinata tanto migliore è il wormhole che si ottiene.

³Nonostante $a_0 \ll b_0$, le stazioni possono essere poste in $b_0 + a_0$ o nelle immediate vicinanze senza violare (2.38) perché per $\rho < 0$ si ottiene un appiattimento della superficie talmente importante che questa risulta già piuttosto piana anche per distanze molto piccole da b_0 .

Capitolo 4

Conclusioni

Abbiamo aperto questa tesi domandandoci se sia possibile realizzare un viaggio interstellare per mezzo di topologie spazio-temporali non piatte; dopo aver escluso oggetti come i buchi neri e i wormholes di Schwarzschild siamo finiti a trattare estensivamente i wormholes di Morris-Thorne, prima in maniera generale (Cap. 2), poi presentando delle soluzioni specifiche (Cap. 3). La ragione per cui ci siamo rivolti a queste soluzioni è che esse, a differenza delle altre sopra citate, sono state cercate proprio con l'obiettivo di rendere possibile il viaggio interstellare per gli esseri umani; la loro esattezza e semplicità sorpresero molto i teorici del tempo,¹ riaccendendo l'interesse nei wormholes (praticamente ignorati dai tempi di Einstein e Rosen) e nel viaggio interstellare.

Tuttavia, come purtroppo abbiamo potuto constatare nella sez. 2.7, i wormholes attraversabili di Morris e Thorne soffrono di diversi problemi; il più pesante, che non ha niente a che vedere con la loro attraversabilità ma piuttosto con la loro realistica, è che questi wormholes possono essere generati e tenuti aperti solo da una distribuzione sferica di energia che presenti, *almeno* sulla gola della curvatura, la proprietà $\tau > \rho c^2$. Quest'ultima proprietà dei materiali, come ribadito più volte nel corso della tesi, non è vietata da alcuna legge fisica, ma sino ad oggi non è mai stato osservato nemmeno un solo caso in cui essa sia verificata. Inoltre un materiale con questa proprietà, chiamato "esotico", violerebbe entrambe le condizioni dell'energia in quanto presenterebbe una densità ρ negativa per un osservatore in moto a velocità prossime a quelle della luce; queste condizioni sono alla base di molti teoremi verificati di relatività generale, e ciò non fa ben sperare per quanto riguarda la realistica della materia esotica. Ogni speranza che la materia esotica possa esistere si basa sulla teoria quantistica dei campi, teoria che in alcuni casi non rispetta le condizioni sull'energia; la futura scoperta di un campo esotico o di stati quantici esotici, cioè stati quantici di campi già noti ma che acquisiscono la proprietà $\tau > \rho c^2$ su scale di lunghezza macroscopiche, potrebbe cambiare le carte in tavola e rendere il wormhole di Morris-Thorne un oggetto un po' meno fantascientifico.

¹Tanto che i due autori decisero di intitolare l'articolo in cui presentavano la loro soluzione "Wormholes in spacetime and their use for interstellare travel: a tool for teaching general relativity".

Anche ammettendo che la materia esotica esista, i wormholes che stiamo trattando presentano comunque problemi non da poco, per esempio l'enorme intensità $\tau_0 \sim 5 \cdot 10^{41} \text{ dyn/cm}^2 (10 \text{ m}/b_0)^2$ della tensione radiale esercitata dalla materia esotica nella gola: a meno di impiegare materia o campi esotici in grado di interagire debolmente con il corpo umano, come ad esempio i neutrini o le onde gravitazionali nel caso della materia/energia tradizionale, non ci sarebbe speranza per qualcuno della nostra specie di sopravvivere ad una tensione del genere (che è dell'ordine di quella che si trova nel centro delle stelle di neutroni più massive mai osservate).

Un altro problema potrebbe essere legato alla stabilità del wormhole di Morris-Thorne rispetto alle perturbazioni, che abbiamo solo accennato in sez. 2.1 in quanto richiede un'analisi non statica della soluzione (lunga e superflua sino a che non si determinerà se la materia esotica è realistica o meno). La gola del wormhole infatti potrebbe non riuscire a mantenersi stabile durante il passaggio della navicella, restringendosi fino a chiudersi ed impedendoci così di raggiungere l'altra bocca del tunnel. Se, in qualche modo, una civiltà molto più avanzata della nostra riuscisse a monitorare e a tenere sotto controllo le eventuali instabilità queste non rappresenterebbero un grosso problema, servirebbe solo qualche accorgimento in più; ovviamente però, non possiamo garantire che queste ipotetiche instabilità siano fisicamente gestibili, potrebbero essere troppo violente o agire troppo rapidamente.

Altre problematiche potrebbero risiedere nel fatto che cambio di topologia richiesto per la formazione del wormhole non sia quantisticamente permesso (a livello quantistico la gravità non è ancora ben compresa), oppure la materia esotica presente in tutto l'universo potrebbe non essere sufficiente a formare anche un solo di questi wormhole, o magari essa è sufficiente ma potrebbe essere sparpagliata un po' ovunque, rendendo il tempo necessario per accumularla praticamente infinito se non esistono wormhole già naturalmente formati nell'universo.

Per concludere, riassumiamo breve i risultati ottenuti dalle soluzioni mostrate nel terzo capitolo. Si vede piuttosto chiaramente dalle sezioni 3.1 e 3.2 che, se la densità della materia esotica è positiva per gli osservatori statici, man mano che rimpiccioliamo la regione di confinamento dell'esoticità il wormhole peggiora rapidamente; per attraversarlo a velocità non relativistiche, si passa da un tempo dell'ordine di un'ora se la materia esotica si estende indefinitivamente nello spazio-tempo, ad un tempo dell'ordine di 7 giorni se essa si estende per distanze dell'ordine dell'unità astronomica. Occorrerebbe quindi una quantità davvero notevole di materia esotica per avere un wormhole efficace se la densità ρ fosse vincolata ad essere positiva. Se ammettiamo che la materia esotica possa presentare densità negativa anche per gli osservatori statici, aumentando quindi il grado di esoticità della stessa, si potrebbero ottenere wormholes incredibilmente efficienti (con tempi di percorrenza dell'ordine dei secondi!) con quantità davvero piccole di materiale (si veda la sezione 3.3); ovviamente, aumentare il grado di esoticità corrisponde a peggiorare notevolmente la realistica del materiale, la cui esistenza diventa ancora più improbabile.

Il lettore potrebbe sentirsi piuttosto avvilito nel notare con quanti problemi e quante questioni in sospeso questa tesi sta per concludersi ma si tenga presente che, nonostante il successo solo parziale della soluzione di Morris e Thorne, essa è stata così importante che ancora oggi rappresenta, ad ormai 30 anni di distanza, un punto di riferimento per qualunque fisico teorico che voglia affrontare il problema del viaggio interstellare, sia tramite la teoria delle stringhe che in maniera più classica.

Bibliografia

- [1] A. Einstein and N. Rosen, *Phys. Rev.* 48, 73 (1935)
- [2] M. S. Morris and K. S. Thorne, *Am. J. Phys.* 56, 395 (1988)
- [3] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, San Francisco, 1973)