

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Fisica

MOND e TeVeS
Teorie alternative all'ipotesi di materia oscura

Relatore:
Prof. Roberto Casadio

Presentata da:
Matteo Broccoli

Sessione II
Anno Accademico 2015/2016

Indice

Sommario	iv
1 Il problema della massa nascosta	1
1.1 Le prime discrepanze	2
1.2 Riga a 21 cm e curve di rotazione estese	3
1.3 L'ipotesi di Ostriker e Peebles	4
1.4 Il modello della sfera isoterma	5
1.5 L'alone NFW	7
1.6 Il modello Λ CDM	10
2 La modifica alla dinamica newtoniana	14
2.1 MOND	14
2.2 Il confronto delle predizioni di Milgrom con le evidenze sperimentali	18
2.2.1 Curve di rotazione e limite di Freeman	18
2.2.2 La relazione barionica di Tully-Fisher	24
2.2.3 Il ruolo unificante di a_0	25
2.3 Ammassi di galassie	26
2.4 L'effetto del campo esterno	28
2.5 AQUAL	29
3 Le modifiche alle equazioni di campo di Einstein	32
3.1 TeVeS: azioni ed equazioni di campo	32
3.2 Il limite relativistico	36
3.2.1 Spaziotempo FRW	36
3.2.2 Sistemi quasistatici localizzati	37
3.2.3 Limite generico	38
3.3 I limiti non relativistici	39
3.3.1 MOND in simmetria sferica	41
3.3.2 Dinamica newtoniana in simmetria sferica	42
3.3.3 Caso generale	43
3.4 Lensing gravitazionale per sistemi simmetrici	44

<i>INDICE</i>	ii
3.5 Riepilogo e considerazioni finali	47
Conclusioni	50
Riferimenti bibliografici	54

Elenco delle figure

1.1	Andamenti qualitativi delle curve di rotazione osservata e attesa secondo la dinamica newtoniana	4
1.2	Composizione dell'Universo secondo il modello Λ CDM	11
2.1	Famiglia di curve $V(s, \xi)$	17
2.2	Curva di rotazione della galassia NGC 6503	19
2.3	Curve di rotazione delle galassie a spirale del gruppo dell'Orsa Maggiore	20
2.4	Rapporto massa-luce delle galassie a spirale del gruppo dell'Orsa Maggiore	21
2.5	Curva di rotazione di una galassia fittizia	21
2.6	Curve di rotazione di galassie LSB	23
2.7	Limite di Freeman	23
2.8	Relazione barionica di Tully-Fisher	24
2.9	Relazione di discrepanza massa-accelerazione nelle galassie a spirale	26
3.1	Spettro angolare di potenza della CMBR	49

Sommario

In questa tesi descriviamo due teorie, la MOND e la TeVeS, che si pongono come alternativa all'ipotesi dell'esistenza della materia oscura.

Seguendo l'ordine storico degli eventi, nel primo capitolo presentiamo i dati sperimentali e le considerazioni teoriche che hanno convinto gli scienziati del '900 che la massa osservata nell'Universo sia minore della massa dinamica inferita dalla fisica newtoniana e dalla Relatività Generale. Il primo tentativo di risolvere questo problema è consistito nell'ipotizzare l'esistenza di una materia non ancora osservata, divenuta nota come "materia oscura". Affrontando le questioni sollevate dalle curve di rotazione delle galassie a spirale, dalla relazione di Tully-Fisher, dalla legge di Freeman e dalle fluttuazioni della radiazione cosmica di fondo, vedremo come questa ipotesi si sia evoluta per tenere conto dei risultati sperimentali, a partire dal modello della sfera isoterma fino al modello Λ CDM, e i problemi che essa non risolve.

Nel secondo capitolo descriviamo la MOND, una modifica della dinamica newtoniana nata con l'obiettivo di ridurre la quantità di materia oscura necessaria per descrivere l'Universo. Il problema della massa nascosta può, infatti, essere dovuto a un'incompleta comprensione delle leggi della fisica e, confrontando la MOND con i dati sperimentali presentati nel primo capitolo, vedremo come essa riesca a descrivere la dinamica su scale galattiche ed extragalattiche. Concluderemo il capitolo mostrando una densità di lagrangiana capace di riprodurre la formula fenomenologica della MOND.

Per affrontare le questioni cosmologiche è necessario disporre di una teoria relativistica che recuperi la MOND nel limite di campo debole. Nel terzo capitolo trattiamo quindi la TeVeS, riportando le azioni che permettono di derivare le equazioni dei campi di tale teoria. Dopo averne studiato i limiti relativistici e non relativistici, accenneremo a come essa permetta di estendere il paradigma MOND in campo cosmologico.

*Quel sentiero nel bosco
siete tu e la signorina
che passeggiate nel bosco e sentite
il profumo degli abeti
L. C.*

Capitolo 1

Il problema della massa nascosta

Non c'è cosa più ardua del trovare un gatto nero in una stanza buia, specialmente se non c'è il gatto.

Antico proverbio cinese

La questione della materia oscura è sollevata a Princeton un mercoledì del 1969. Come tutti i mercoledì, nella prestigiosa università americana professori e studenti sono riuniti assieme per pranzare e discutere dei progetti di tesi, degli ultimi sviluppi della ricerca e di nuove idee. In una di queste occasioni, Jerry Ostriker, un giovane ricercatore esperto di stabilità dei fluidi rotanti, propone un'idea nuova e radicale. Ostriker aveva seguito con interesse le simulazioni al computer dei dischi galattici, che allora stavano diventando molto sofisticate, e si era dedicato alla simulazione della formazione dei dischi. Quello che aveva notato è che un sistema di particelle a simmetria sferica, che contrasta l'attrazione gravitazionale con la sola rotazione, cioè con la sola forza centrifuga, non rimane stabile nel tempo, ma si schiaccia e si scalda: non è più la rotazione a bilanciare la forza di gravità, ma la pressione. Questo significa che se ipotizziamo che le galassie siano sistemi dinamici sostenuti esclusivamente dalla rotazione, come appariva all'epoca delle simulazioni di Ostriker, allora devono essere instabili. L'idea proposta ai professori e agli studenti di Princeton dal giovane assistente, quindi, consiste nel dover includere una nuova componente nella struttura galattica per poterne garantire la stabilità: un alone di materia oscura, non ruotante ma principalmente sostenuto dalla pressione, mai osservato o ipotizzato prima d'allora. La proposta di Ostriker non è accolta con favore e vengono sollevate molte critiche, soprattutto riguardo alla natura di questo alone oscuro: avrebbe dovuto essere composto da materia poco luminosa, come nane rosse o bianche, o da qualcosa di diverso e sconosciuto?

Quando, nel 1973, Ostriker e Jim Peebles, suo collega di Princeton, pubblicano i risultati delle loro simulazioni a N-corpi, la reazione della comunità scientifica è ancora più polemica di quella avuta a Princeton. Per capire la novità di queste idee, consideriamo

i lavori di alcuni scienziati che, molto prima di Ostriker e Peebles, avevano già proposto l'esistenza di una massa nascosta, ma per motivi differenti.

1.1 Le prime discrepanze

Il primo scienziato moderno a suggerire che nell'Universo ci sia della materia non ancora osservata è stato Fritz Zwicky, un astronomo svizzero che ha fornito molti contributi all'astronomia e all'astrofisica, in particolare riguardo alle osservazioni e alle teorie sulle supernove e le stelle di neutroni, allo studio e alla classificazione delle galassie e degli ammassi di galassie. È da molti considerato un genio irriverente e, se alcuni dei suoi lavori non sono stati inizialmente presi in considerazione dai suoi contemporanei, sicuramente in parte è dovuto al suo carattere irascibile e difficile.¹

Nel 1933 Zwicky studia le misure della velocità radiale di numerose galassie dell'ammasso della Chioma e nota che le galassie sembrano muoversi più velocemente di quanto permesso dalla sola materia presente (nel senso di osservata) nell'ammasso. Utilizzando il teorema del viriale e le misure di velocità, Zwicky ottiene che la massa del cluster deve essere di circa $3 \cdot 10^{14} M_{\odot}$, mentre la massa osservata, ricavata sommando le masse delle singole galassie considerando un rapporto massa-luce² unitario, risulta dell'ordine di $10^{12} M_{\odot}$. Zwicky individua due possibili spiegazioni a questo risultato sorprendente: o la legge di gravitazione di Newton non è più valida per grandi distanze, come quelle che separano le galassie dell'ammasso della Chioma, o della *materia oscura* deve essere presente in grande quantità assieme a quella luminosa. È questa la prima apparizione della materia oscura nella letteratura scientifica.

Nel periodo in cui Zwicky studia l'ammasso della Chioma, la materia oscura compie le prime deboli apparizioni anche su scala galattica. Infatti, gli astronomi Jan Oort e Horace Babcock osservano, rispettivamente, la dinamica della materia luminosa della Via Lattea e di Andromeda, riportando in entrambi i casi delle discrepanze tra i valori di velocità attesi e quelli misurati sperimentalmente in base alla quantità di materia luminosa presente nelle due galassie. In particolare, Babcock, dedicandosi allo studio della curva di rotazione (RC) di Andromeda, trova per tale galassia un Υ eccessivamente alto, addirittura $\Upsilon > 20$, mentre di solito per le galassie a spirale si ha $1 < \Upsilon < 2$.

Soffermiamoci sulle RC, dato che avranno un ruolo importante nella nostra trattazione. Con "curva di rotazione" di una galassia si indica il grafico della velocità rotazionale delle stelle o del gas, contenuti all'interno della galassia, in funzione della distanza radiale

¹Zwicky era solito chiamare "bastardi sferici" i colleghi con cui si trovava in disaccordo, perché, diceva, essi erano bastardi da ogni lato li si guardasse.

²Il rapporto massa luce, che indicheremo con M/L o Υ , indica il rapporto tra la massa di un corpo e la sua luminosità; adottiamo la convenzione di esprimere Υ in unità del rapporto massa-luce solare, con $M_{\odot}/L_{\odot} \simeq 5 \cdot 10^3 \text{ kg/W}$. Stelle molto più massive del Sole hanno un'elevata luminosità e $\Upsilon < 0.001$, mentre stelle meno massive del Sole hanno $\Upsilon > 1$. In generale, con le stelle e la materia nota difficilmente si raggiungono valori $\Upsilon > 10$.

dal centro della stessa. Il moto del corpo considerato deve quindi essere circolare e in questo caso la curva di rotazione fornisce una misura della forza radiale e della distribuzione della massa all'interno della galassia, attraverso la seconda legge di Newton. In particolare, costruita una RC, la distribuzione della forza radiale ne determina la forma, ma il fit viene eseguito sul parametro Υ che ne determina invece l'ampiezza e il best fit fornisce la distribuzione della massa all'interno della galassia proprio grazie al rapporto massa-luce così ottenuto.

Il lavoro di Babcock sulla curva di rotazione di Andromeda, seppure risulti sconcertante perché avvalora il risultato di Zwicky ma su scale decisamente differenti, non attira l'attenzione della comunità scientifica. D'altronde, è lo stesso Babcock a suggerire che gli spettri di emissione dei corpi galattici, grazie ai quali si risale alla velocità degli stessi, possano essere sbagliati a causa di meccanismi di assorbimento non ancora conosciuti, invalidando quindi il valore di Υ ottenuto dalla curva di rotazione.

1.2 Riga a 21 cm e curve di rotazione estese

Negli anni '40 comincia a diffondersi la radioastronomia, soprattutto grazie alla scoperta della riga a 21 cm dell'idrogeno neutro. Questa riga è parte dello spettro di struttura fine ed è emessa quando gli spin dell'elettrone e del protone dell'idrogeno passano da uno stato di parallelismo a uno di antiparallelismo. L'idrogeno neutro è diffuso nel mezzo interstellare e costituisce anche la maggior parte della componente gassosa di una galassia a spirale, per cui il suo studio può rivelarsi molto utile per la misura delle curve di rotazione. Infatti, nei lavori di Babcock e altri suoi contemporanei, le RC potevano essere costruite solo fino al limite ottico di una galassia a spirale, ma, con l'analisi della riga a 21 cm, si rende possibile la costruzione di curve di rotazione estese ben oltre tale limite. In questo modo, la differenza tra le RC misurate sperimentalmente e quelle attese secondo la dinamica newtoniana diventa ancora più evidente.

Costruiamo un semplice modello per vedere come dovrebbe qualitativamente essere la curva di rotazione di una galassia a spirale. Supponiamo che la massa della galassia sia concentrata nel bulbo galattico, che assumiamo sferico, e che quella del disco sia quindi trascurabile. Se il bulbo ha un raggio R , una massa $M(r)$ e una densità di massa ρ costante, una particella di prova in moto circolare a una distanza radiale r dal centro del bulbo sentirà una forza gravitazionale data dalla legge di gravitazione di Newton; grazie alla seconda legge della dinamica, possiamo ricavarne la velocità come $v^2 = GM(r)/r$, da cui otteniamo:

$$v = \begin{cases} (4\pi G\rho/3)^{1/2} r & \propto r & \text{se } r < R \\ (4\pi G\rho R^3/3)^{1/2} r^{-1/2} & \propto r^{-1/2} & \text{se } r > R \end{cases} \quad (1.1)$$

dove G è la costante di gravitazione di Newton. La curva di rotazione di una galassia a spirale dovrebbe quindi mostrare un andamento preciso: crescere linearmente con r ,

indicativamente fino al limite del bulbo, per poi decrescere come l'inverso della radice di r . Tuttavia, quando nel 1957 Henk van de Hulst, Ernst Raimond e Hugo van Woerden pubblicano la RC di Andromeda costruita basandosi sulle osservazioni della riga a 21 cm, si nota un trend ben diverso da quello atteso. La RC a 21 cm generalmente coincide con quella ricavata entro il limite ottico, ma poi si discosta significativamente da quella attesa non mostrando un andamento a zero come $r^{-1/2}$, ma rimanendo asintoticamente costante. Mostriamo in Figura 1.1 gli andamenti qualitativi delle curve di rotazione attesa e osservata.

All'epoca non è stato possibile estendere lo studio delle RC a 21 cm ad altre galassie, perché la tecnologia non consentiva di ricevere segnali radio da sorgenti troppo lontane. Di fatti, fino alla fine degli anni '60, la maggior parte degli astronomi non ha ritenuto importanti i segnali di crisi che, a partire dal lavoro di Zwicky, si stavano accumulando. Generalmente gli scienziati confidavano che le discrepanze fossero dovute a difetti sperimentali e che un miglioramento delle tecniche di osservazione avrebbe sicuramente risolto le questioni. La crisi della dinamica newtoniana, infatti, è emersa non dalle osservazioni, ma da alcune considerazioni teoriche.

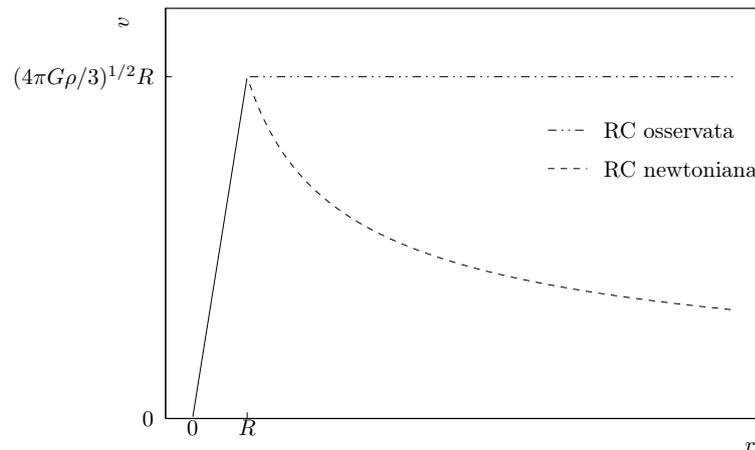


Figura 1.1: Andamenti qualitativi delle curve di rotazione osservata e attesa secondo la dinamica newtoniana. All'interno del bulbo $v \propto r$; all'esterno del bulbo la velocità di rotazione rimane pressoché costante, mentre la dinamica newtoniana prevede che $v \propto r^{-1/2}$. Per un esempio di una RC sperimentale, rimandiamo alla Figura 2.2.

1.3 L'ipotesi di Ostriker e Peebles

Come abbiamo visto, quando Ostriker e Peebles propongono l'esistenza di materia non ancora osservata nelle galassie, l'idea non è del tutto nuova tra gli astronomi, ma sono

questi due ricercatori a mettere in crisi la visione consolidata dell'Universo.

Dalle simulazioni sulla stabilità delle galassie si era scoperto che i sistemi ruotanti sono instabili, perché si scaldano e il moto inizialmente circolare dei corpi diventa un moto casuale. Naturalmente, per cercare di risolvere questo problema nelle simulazioni veniva introdotto un meccanismo di raffreddamento, che riduceva la quantità di energia del sistema di un fattore arbitrario. Nelle galassie questo ruolo è svolto dal gas che, non essendo distribuito uniformemente, forma delle nuvolette che possono collidere dissipando energia. Tuttavia, questo meccanismo non era sufficiente a stabilizzare i dischi. Con la fisica e la materia nota non si riusciva a spiegare come mai una galassia come la nostra fosse effettivamente stabile.

È a questo punto che Ostriker e Peebles compiono il salto logico di introdurre, per motivi puramente teorici, una nuova componente materiale per rendere stabili le galassie. Questa materia deve essere principalmente sostenuta dalla pressione e formare un alone sferoidale intorno alla galassia; in più deve avere un Υ elevato, cioè deve essere *oscura*. Ripensando al problema posto da Zwicky, sembra evidente che la discrepanza tra la massa osservata e quella prevista in base al teorema del viriale possa essere colmata dagli aloni di materia oscura presenti in ogni galassia dell'ammasso della Chioma. In questo senso, dopo il lavoro di Ostriker e Peebles le galassie a spirale non appaiono più come prima. Esse si estendono ben oltre il limite ottico, immerse in un alone di materia invisibile.

1.4 Il modello della sfera isoterma

A partire dagli anni '70, la radioastronomia si perfeziona e diventa più sofisticata, rendendo possibile uno studio accurato delle curve di rotazione con la riga a 21 cm dell'idrogeno neutro. I risultati ottenuti da Babcock, che inizialmente erano considerati come delle imprecisioni sperimentali, sono sempre più confermati dai lavori di Morton Roberts, Robert Whitehurst, David Rogstad, Seth Shostak, Albert Bosma e Vera Rubin, sia nelle lunghezze d'onda radio che nel visibile: a grandi distanze dal centro galattico la velocità di rotazione rimane pressoché costante e non si osserva mai l'andamento a zero newtoniano.

Nel contesto della dinamica newtoniana una curva di rotazione asintoticamente piatta implica che nella regione esterna della galassia Υ debba essere elevato. Infatti, nel 1970 l'astronomo australiano Kenneth Freeman pubblica un'analisi quantitativa della distribuzione della luce nei dischi delle galassie a spirale e osserva che generalmente la luminosità superficiale³ Σ mostra un andamento esponenziale nella forma:

$$\Sigma = \Sigma_0 e^{-r/h}, \quad (1.2)$$

³La luminosità superficiale di un corpo irradiante è il flusso emesso dal corpo direttamente alla sorgente. In questo senso non varia con la distanza alla quale viene misurata ed è una proprietà intrinseca dei corpi. Noto il Υ di un corpo, la luminosità superficiale permette di ricavarne la densità superficiale e viceversa, per cui esse sono spesso usate in modo equivalente.

dove r è la distanza dal centro, h una scala di lunghezza caratteristica che dipende dalla galassia considerata e Σ_0 è la luminosità superficiale centrale, che a differenza di h sembra essere costante per ogni galassia considerata da Freeman. Mentre la luminosità, e quindi la densità di materia luminosa, decresce esponenzialmente e si annulla dopo due o tre distanze caratteristiche, nel disco galattico deve essere presente un tipo di materia non luminosa che permetta alle curve di rotazione di rimanere asintoticamente piatte, perché, richiamando l'andamento delle RC newtoniane in eq. (1.1), per ottenere una velocità costante a grandi distanze è necessario supporre che la distribuzione di massa sia dipendente dal raggio, con $M(r) \propto r$. Questa massa non può però essere luminosa e perciò l'alone oscuro introdotto da Ostriker e Peebles sembra riuscire a risolvere la discrepanza tra le RC attese e quelle sperimentali. L'unica condizione fissata dalle RC è che la densità di massa dell'alone decresca come r^{-2} ($\rho \propto M(r)/r^3$) al di fuori del limite ottico della galassia e questo comportamento è ben rappresentato da un alone sferico che si comporta come una sfera isoterma.⁴ Tuttavia, il modello della sfera isoterma pone due problemi. Dato che la massa dell'alone cresce con r , ciò implicherebbe che essa sia infinita; bisogna dunque supporre che ci sia un limite, molto più esterno del limite ottico della galassia, oltre al quale la massa dell'alone è troncata. Inoltre, la distribuzione di materia oscura non può nemmeno crescere come r^{-2} vicino al centro della galassia e perciò in questa regione la densità di materia oscura è assunta costante, dato che nel bulbo la materia barionica luminosa è sufficiente a spiegare l'andamento delle RC. Con questi accorgimenti, il modello della sfera isoterma riesce a riprodurre l'andamento delle RC osservate: la materia luminosa sembra non essere più l'unica componente di una galassia, ma solo una parte di un sistema molto più articolato. Tuttavia, nonostante l'alone oscuro assieme alla materia luminosa riesca a riprodurre le RC, molti astronomi non ne sono particolarmente stupiti. Infatti, in questo modello ci sono tre parametri liberi: la velocità asintotica dell'alone, le dimensioni del suo nucleo interno a densità costante e il rapporto massa-luce del disco visibile. Non è sorprendente che gli aggiustamenti di questi tre parametri riescano a riprodurre le RC delle galassie.

Il modello della sfera isoterma presenta alcuni problemi fenomenologici. Mentre la materia luminosa segue una RC che decresce con la distanza dal centro galattico, la quantità di materia oscura cresce linearmente con essa e per ogni galassia questi due andamenti si aggiustano perfettamente per dare una curva di rotazione piatta. Questa combinazione viene spesso indicata come *cospirazione disco-alone*, perché, rimanendo nel contesto newtoniano, non si è in grado di spiegare come mai questi due tipi di materia debbano accoppiarsi in ogni galassia per dare proprio una curva di rotazione asintoticamente piatta. Come se non bastasse, la parte luminosa e quella oscura di una galassia sembrano comunicare tra loro fornendo un'altra relazione, chiamata relazione di Tully-Fisher (TFR), che non trova una chiara spiegazione nel contesto della materia oscura.

⁴Una distribuzione sferica di materia di densità ρ si dice isoterma se la temperatura T è legata alla densità tramite la relazione $T \propto \rho^0$; in questo caso si ottiene $\rho(r) \propto r^{-2}$.

Nel 1977 gli astronomi Brent Tully e Rick Fisher hanno osservato dieci galassie poste a distanze note dalla nostra. Essi hanno stimato la velocità di rotazione caratteristica delle galassie e, essendo nota la loro magnitudine nella banda B, hanno potuto calcolarne la luminosità nella stessa banda.⁵ Tully e Fisher hanno così scoperto che è presente una chiara correlazione tra la luminosità L e la velocità di rotazione v , nella forma $L \propto v^\alpha$. In particolare, questa relazione è con il tempo diventata una delle più stringenti relazioni empiriche dell'astronomia extragalattica ed è utilizzata come valido strumento per risalire alla luminosità di una galassia a partire dall'ampiezza della sua curva di rotazione, che è più semplice da misurare. Ma come spiegare questa relazione in termini di materia oscura? La luminosità è data dalla massa stellare del disco, mentre l'ampiezza della curva di rotazione è data dalla parte oscura del disco. Concludiamo nuovamente che queste due materie devono combinarsi perfettamente per originare una relazione molto stringente.

Per capire come mai possano verificarsi queste due cospirazioni, va ricordato che la materia oscura è stata introdotta da Ostriker e Peebles per stabilizzare i dischi galattici. Quindi, cerchiamo delle risposte nel processo di formazione di una galassia, il cui esito dovrebbe fornire una distribuzione di materia oscura tale da tenere conto degli effetti osservati sperimentalmente.

1.5 L'alone NFW

Essendo la materia oscura necessaria nel processo di formazione delle strutture dell'Universo, appare abbastanza naturale che l'alone di materia oscura presente nelle galassie si formi proprio a causa delle instabilità gravitazionali dell'Universo in espansione. Deve perciò essere possibile verificare il modello della sfera isoterma, ipotizzato per spiegare le RC, seguendo le simulazioni numeriche dei processi di collasso gravitazionale alla base della formazione delle galassie. Solo intorno agli anni '90 diventa disponibile la potenza di calcolo necessaria e nel 1996 Julio Navarro, Carlos Frenk e Simon White pubblicano i risultati delle loro simulazioni. Tutti gli aloni considerati dai tre scienziati, sia per piccole galassie che per grandi ammassi di galassie, sembrano mostrare la stessa distribuzione di massa, una sorta di "legge di densità universale". Tuttavia, questa non corrisponde al modello della sfera isoterma. I loro aloni mostrano una densità $\rho \propto r^{-1}$ vicino al centro della galassia, formando una cuspidine invece di avere una densità costante, e un andamento $\rho \propto r^{-3}$, invece che $\rho \propto r^{-2}$, per grandi distanze. Un alone con questa forma è

⁵La luminosità di un corpo è la potenza elettromagnetica totale emessa dal corpo; fisicamente, è significativa la luminosità per unità di superficie, che assume le dimensioni di un flusso. La magnitudine apparente m , o più semplicemente magnitudine, di un corpo è definita tramite il suo flusso F e la magnitudine m_0 e il flusso F_0 di un corpo di riferimento grazie alla relazione $m - m_0 = -2.5 \log(F/F_0)$ ed è misurata su una specifica banda di colore o lunghezza d'onda, come il blu (B), l'infrarosso (K), o il visibile (V).

chiamato NFW (Navarro-Frenk-White) ed è oggi una caratteristica standard dei modelli di materia oscura (DM).

Anche se diverso dalla sfera isoterma, l'alone NFW dovrebbe essere in grado di descrivere le RC e di fatti, combinando il contributo dell'alone con quello della materia barionica, è possibile interpolarle in modo soddisfacente. Tuttavia, questo non prova che il modello NFW sia corretto. Infatti, ancora una volta in questo tipo di fitting abbiamo tre parametri liberi: il rapporto massa-luce del disco, la massa dell'alone e un parametro di concentrazione. Quest'ultimo è solitamente descritto come la distanza radiale R_{200} , alla quale la densità dell'alone diventa 200 volte inferiore rispetto alla densità critica dell'Universo, divisa per la distanza radiale alla quale si ha il passaggio dall'andamento $\rho \propto r^{-1}$ a $\rho \propto r^{-3}$. Data la semplice forma delle RC, non è sorprendente che un opportuno aggiustamento di questi tre parametri porti a una buona descrizione delle curve di rotazione. Quindi, sebbene sia necessario che il modello riesca a riprodurre le curve, ciò non ne prova la validità. Infatti, anche un alone differente, come quello dato dalla sfera isoterma, è in grado di riprodurre le RC, seppure apparentemente sia più corretto utilizzare l'alone NFW perché descrive la distribuzione che la materia oscura dovrebbe avere in seguito alla formazione della galassia.

L'alone NFW presenta qualche problema nella descrizione dei fenomeni galattici. Negli anni precedenti alle simulazioni di Navarro, Frenk e White, apparve evidente che l'osservazione di Freeman riguardo alla luminosità superficiale centrale Σ_0 delle galassie dovesse essere sbagliata. In particolare, l'idea che Σ_0 potesse assumere un valore costante per ogni galassia è una semplificazione, dovuta a un effetto di selezione: galassie con deboli luminosità potevano non essere osservate o scambiate per stelle. La legge di Freeman è stata quindi rivisitata: essa pone effettivamente un limite superiore alla luminosità superficiale centrale delle galassie, ma non necessariamente un limite inferiore. A conferma di ciò, a partire dagli anni '90 sono state scoperte numerose galassie a bassa luminosità superficiale (LSB), che mostrano caratteristiche differenti rispetto alle galassie ad alta luminosità superficiale (HSB), come furono rinominate le altre già note. Ad esempio, è interessante la differenza tra le RC dei due tipi di galassie: vicino al centro galattico le curve delle LSB crescono molto meno rapidamente rispetto a quelle delle HSB, che in generale mostrano una discrepanza minore tra la massa luminosa e quella dedotta dalla velocità di rotazione rispetto alle LSB. Questo comportamento mette per certi versi alla prova il modello DM, perché nel contesto DM non è chiaro il motivo per cui le LSB abbiano una quantità maggiore di materia oscura rispetto alle HSB e perché questi due tipi di galassie debbano avere delle RC differenti. Rimanendo nelle ipotesi di materia oscura, sarebbe più ragionevole supporre che la discrepanza tra materia luminosa e oscura sia proporzionale alle dimensioni delle galassie, non alla loro luminosità (più grande è una galassia, maggiore dovrebbe essere la quantità di massa oscura necessaria a contrastare la curva di rotazione newtoniana per produrre una velocità asintoticamente piatta). Soprattutto, i fit delle curve delle galassie LSB effettuati con l'alone NFW risultano poco precisi, in particolare nella zona del bulbo galattico: l'interpolazione riesce a essere sod-

disfacente solo se si suppone che la massa luminosa del bulbo sia nulla, perché altrimenti la cuspidè dell'alone NFW causa una salita troppo ripida nella curva di rotazione.

La difficoltà maggiore si ha però nella descrizione della relazione di Tully-Fisher. Quando Tully e Fisher pubblicarono il proprio lavoro, sebbene la correlazione tra la luminosità e la velocità di rotazione fosse evidente, il coefficiente α della relazione $L = v^\alpha$ non era noto con precisione e maggiori osservazioni dovevano essere compiute per poter estendere la relazione ad altre bande oltre a quella considerata dai due scienziati. Verso la fine degli anni '90, grazie ai lavori di Stacy McGaugh, astronomo americano esperto di galassie LSB che si era già occupato del problema della cuspidè nell'alone NFW, si ricava con ottima precisione che $\alpha = 4$. Non solo, ma la TFR appare come una relazione molto più generale di quanto non si pensasse inizialmente. Infatti, McGaugh la estende a un amplissimo range di galassie con velocità di rotazione asintotica $30 \text{ km/s} \lesssim v \lesssim 300 \text{ km/s}$. La TFR, in realtà, non sussiste per tutte le galassie da lui prese in esame, ma, se al posto della luminosità, pensata come indicatore di massa, si considera tutta la massa barionica M e quindi anche la massa del gas presente nel disco, allora la relazione diventa:

$$M \propto v^\alpha, \quad (1.3)$$

che vale per tutta la popolazione scelta e mostra un carattere molto più generale della semplice TFR. McGaugh stesso la chiamò “*Baryonic Tully-Fisher Relation*” (BTFR), per sottolineare il fatto che essa dipende esclusivamente dalla materia barionica presente nel disco. La cospirazione è, quindi, ancora più evidente che nel caso della TFR, perché ora è chiaro che la velocità di rotazione, dipendente principalmente dalla concentrazione di materia oscura nel disco, è correlata alla massa barionica totale della galassia. Il problema, però, è che nel contesto DM non si riesce a spiegare come mai si abbia $\alpha = 4$. Infatti, è possibile trovare una relazione tra la massa M dell'alone di una galassia e un certo raggio caratteristico R_c nella forma $V \propto R_c^3$. Utilizzando il teorema del viriale, otteniamo che $M \propto V^3$, dove V è la dispersione di velocità della materia dell'alone. A questo punto dobbiamo assumere che la massa barionica all'interno dell'alone sia una qualche frazione fissata della massa oscura; nella teoria standard della formazione delle galassie, questa piccola frazione di materia oscura si raffredda e collassa a causa del campo gravitazionale dell'alone. Il collasso si interrompe quando il momento angolare residuo è sufficiente a bilanciare la gravità, portando alla formazione del disco. Quindi dobbiamo ulteriormente assumere che la velocità di rotazione del disco barionico sia proporzionale alla dispersione di velocità dell'alone. In questo modo arriviamo effettivamente a una TFR, ma nella forma $L \propto v^3$, che non corrisponde a quella osservata empiricamente e non conduce alla BTFR.

1.6 Il modello Λ CDM

Alla fine degli anni '70 l'idea che le galassie debbano contenere della materia oscura è largamente accettata dagli astronomi. Tuttavia, essi continuano a pensare a questa nuova materia in termini convenzionali: materia barionica poco luminosa come stelle poco massive, piccoli buchi neri, pianeti giganti e così via. Sono i cosmologi e i fisici delle particelle i primi a ritenere che la materia oscura possa invece essere composta da particelle subatomiche non barioniche. Infatti, all'epoca vi erano sempre più evidenze che la sola materia barionica non fosse sufficiente a rendere piatto l'Universo, come invece sembra essere attualmente. Di che cosa è fatta, quindi, la materia oscura?

Sicuramente una parte di materia oscura è formata dai neutrini. Essi però non possono essere gli unici candidati, perché sono "caldi", cioè si muovono a velocità prossime a quella della luce nel vuoto quando si disaccoppiano dai fotoni del plasma primordiale; se la materia oscura fosse calda, le galassie si formerebbero troppo presto nella storia dell'Universo rispetto a quanto ci dicono invece i dati sperimentali. La materia oscura deve quindi essere "fredda" (CDM). Tuttavia, nessuna delle particelle del modello standard può costituire la CDM. Questa ipotetica particella deve essere elettricamente neutra, altrimenti potrebbe essere individuata facilmente per interazioni elettromagnetiche, e questo esclude l'elettrone e il protone; deve essere stabile e quindi non può essere il neutrone, il tau, il muone, o il bosone di Higgs, W o Z; deve avere una massa non nulla, per cui sono esclusi anche il fotone e il gravitone. Dato che il neutrino è già stato tenuto in considerazione, vediamo che il modello standard non fornisce nessun candidato per la CDM. Per questo, i fisici delle particelle e i cosmologi hanno proposto che la materia oscura sia formata da particelle non barioniche come ad esempio le particelle supersimmetriche. La coincidenza temporale dello sviluppo della Supersimmetria con le evidenze astronomiche sull'esistenza della materia oscura ha fatto sì che alcuni fisici credessero che l'esistenza della materia oscura sia stata predetta come conseguenza inevitabile della Supersimmetria. Questo contraddice però il percorso storico che abbiamo presentato finora e, come scrive Robert Sanders, «nessun fisico ha mai detto agli astronomi di andare a cercare i segnali gravitazionali della materia oscura» (Sanders [15], traduzione mia). Nonostante ci siano molti altri candidati ipotetici, come le particelle massive debolmente interagenti (WIMP) o l'assione, soltanto una rilevazione diretta della materia oscura potrebbe confermarne l'esistenza e chiarirne le caratteristiche.

All'inizio degli anni '90 gli scienziati deducono dagli studi sulla dinamica galattica che la materia dell'Universo è per il 95% composta da materia oscura, mentre soltanto il restante 5% è formato da materia barionica luminosa. Verso la fine degli anni '90, però, le osservazioni compiute su molte supernove di tipo I indicano che il modello CDM non è corretto, perché non è in grado di spiegare l'accelerazione dell'espansione dell'Universo. Gli scienziati introducono quindi un termine repulsivo, la costante cosmologica Λ , che può essere visto come uno speciale fluido omogeneo a pressione negativa, che non si diluisce mentre l'Universo si espande ma mantiene una densità costante. Nasce così il

modello Λ CDM, che prevede che la materia oscura fredda fornisca circa il 25% della materia dell'Universo, mentre il termine cosmologico partecipa con circa il 70% (vedi Figura 1.2).

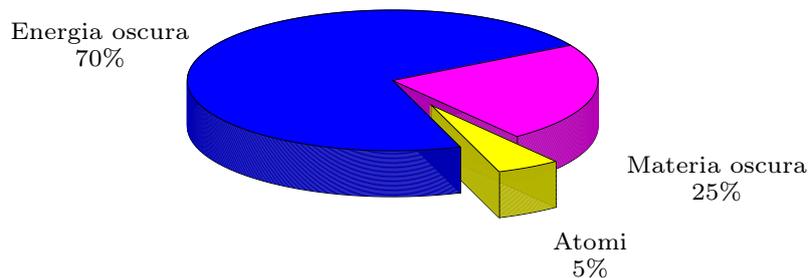


Figura 1.2: Grafico a torta rappresentante l'attuale composizione dell'Universo secondo il modello Λ CDM.

Il successo maggiore del modello Λ CDM consiste nella previsione delle fluttuazioni della radiazione cosmica di fondo (CMBR). Nell'Universo primordiale, quando materia e radiazione erano accoppiate formando un singolo fluido o plasma primordiale, le regioni causalmente connesse erano percorse da fluttuazioni corrispondenti a vere e proprie onde sonore che si propagavano in questo stesso fluido. All'epoca del disaccoppiamento tra materia e radiazione, queste onde sonore sono state congelate nel pattern delle fluttuazioni termiche della CMBR. L'alta omogeneità del plasma primordiale causa un'alta isotropia nella CMBR (una parte su 10^5), che però presenta delle fluttuazioni termiche dovute alle anisotropie comunque presenti nel plasma. Infatti, i barioni del plasma tendono a collassare gravitazionalmente formando come dei grumi, mentre i fotoni tendono a cancellare le anisotropie. Questi due effetti contrapposti causano delle oscillazioni acustiche che formano i caratteristici picchi della CMBR e corrispondono appunto a delle lunghezze d'onda di oscillazione che sono entrate nell'orizzonte in tempi diversi rispetto all'epoca del disaccoppiamento tra materia e radiazione. Questi picchi sono stati calcolati con il modello Λ CDM e successivamente confermati dai dati sperimentali (rimandiamo alla Figura 3.1).

Come abbiamo visto, il modello Λ CDM è il coronamento di un susseguirsi di osservazioni sperimentali e ipotesi teoriche che nasce dall'assunzione che la dinamica newtoniana e la Relatività Generale siano corrette. Di fatti, gli ottimi risultati ottenuti dalla dinamica

newtoniana in campo astronomico sono il motivo per cui Ostriker propose di aggiungere della massa oscura per rendere stabili i dischi galattici. Ma, se ripensiamo alle conclusioni di Zwicky riguardo alle osservazioni compiute sull'ammasso della Chioma, le anomalie osservate nella dinamica galattica ed extragalattica nel corso del '900 potrebbero essere spiegate da una modifica alla dinamica newtoniana. Infatti, gli studi compiuti sulle curve di rotazione e sugli ammassi di galassie sono stati generalmente condotti assumendo che essa fosse valida in regimi nei quali non era mai stata testata prima. In altre parole, nessuno ci garantisce che per distanze galattiche ed extragalattiche la dinamica newtoniana sia valida. Perciò, è lecito ipotizzare che le discrepanze sperimentali osservate nel '900 siano dovute non alla presenza di una massa oscura, ma a una nuova fisica e a una nuova dinamica non ancora conosciute.

Oltretutto, abbiamo visto che la CDM non riesce a spiegare completamente la fenomenologia osservata su scale galattiche; in certi casi ottiene dei risultati corretti, ma non predittivi, e in altri casi non è soddisfacente. In particolare, per riassumerne alcuni, ricordiamo che non una singola curva di rotazione è stata predetta *a priori* dalla CDM, ma la sua distribuzione all'interno delle galassie è sempre stata dedotta con opportuni aggiustamenti sui dati delle RC. Se questo può comunque sembrare ragionevole, data la natura stessa della CDM, sottolineiamo che nemmeno l'alone NFW, che dovrebbe fornire la distribuzione della materia oscura in seguito alla formazione di una galassia, è in grado di interpolare le curve di rotazione senza opportuni aggiustamenti. Sebbene ciò non falsifichi il modello CDM, non lo rende nemmeno particolarmente soddisfacente agli occhi di molti astronomi. Abbiamo visto poi che nelle galassie LSB la situazione è ancora peggiore, perché il modello CDM non riesce a spiegare perché la discrepanza tra la materia luminosa e quella oscura debba essere maggiore che nelle galassie HSB; non si capisce nemmeno perché la luminosità delle galassie sembri presentare un limite superiore, ovvero perché valga la legge di Freeman. Riguardo alla fenomenologia galattica, però, il problema principale è dato dal confronto con la relazione barionica di Tully-Fisher: essa, ricordiamo, in scala logaritmica prevede un coefficiente di proporzionalità $\alpha = 4$ tra la materia barionica e la velocità di rotazione asintotica di una galassia, mentre nel modello CDM si ha $\alpha = 3$. Questo invalida il modello CDM? I suoi sostenitori direbbero di no, perché la BTFR predetta dal modello CDM potrebbe non corrispondere a quella osservata a causa dell'incompleta comprensione che tutt'ora si ha riguardo agli aspetti della formazione delle galassie. Tuttavia, dato che le origini stesse dell'ipotesi di materia oscura sono legate alla stabilità e alla formazione delle galassie, questa incompletezza significa che il modello CDM rimane ipotetico.

L'unica vera e indiscutibile prova dell'esistenza della materia oscura proverrebbe dalla sua rilevazione diretta, ma, dalla formulazione della sua esistenza nel 1969 a Princeton, nessun esperimento è stato in grado di rilevarne direttamente una particella, o di produrre un segnale inequivocabile di una sua rilevazione indiretta. Gli esperimenti coinvolti nella caccia a queste misteriose particelle hanno sviluppato tecnologie sempre più sofisticate e hanno escluso ampi range di massa e sezione d'urto, e ora stanno ponendo dei seri vincoli

sulle loro caratteristiche. In questo contesto, appare sempre più ragionevole e opportuno considerare delle alternative all'ipotesi della materia oscura; dopotutto, le discrepanze scoperte nel '900 tra i dati sperimentali e le teorie fisiche potrebbero essere in parte causate da una nostra incomprendione di queste ultime.

Capitolo 2

La modifica alla dinamica newtoniana

Perciò, la sfida non è tanto vedere ciò che nessuno ha ancora visto, ma pensare quello che nessuno ha ancora pensato di ciò che tutti vedono.

ERWIN SCHRÖDINGER

Dal 1980 al 1982, Mordehai Milgrom, un giovane fisico israeliano dell'Istituto Weizmann, è a Princeton per trascorrere un periodo sabbatico. Milgrom aveva già lavorato in campo astrofisico per vari anni e a Princeton sta contemplando l'ipotesi di spiegare le discrepanze osservate su scala galattica modificando le leggi della fisica, senza assumere l'esistenza di massa nascosta in grandi quantità. Nel 1983 pubblica tre articoli nei quali propone una modifica alla dinamica newtoniana basata su una scala di accelerazione e ne esplora le conseguenze per i sistemi galattici e i sistemi di galassie (vedi [8–10]). La nuova dinamica proposta da Milgrom è divenuta nota con il nome di MOND (da *MODified Newtonian Dynamics*). Ne proponiamo di seguito i tratti essenziali e, osservando alcune predizioni e unificazioni dei dati sperimentali che essa permette di compiere, vedremo come metta alla prova l'ipotesi di materia oscura.

2.1 MOND

Milgrom è particolarmente colpito dalle evidenze della piattezza asintotica delle curve di rotazione. Egli nota che la massa nascosta dedotta da questi dati è dovuta alle ipotesi che, nel limite non relativistico giustificato per la dinamica galattica, la forza che governa la dinamica sia la gravità, valga la seconda legge di Newton e la forza gravitazionale dipenda dalla distanza dal centro galattico come r^{-2} , in modo convenzionale. Queste ipotesi si basano su solide prove sperimentali, ma molti parametri dei sistemi galattici, come masse, momenti angolari, distanze e accelerazioni, assumono valori di vari ordini di grandezza diversi rispetto a quelli dei test in laboratorio o nel sistema solare. Milgrom suggerisce perciò una modifica alla legge di inerzia, basata su quattro ipotesi: la

forza di inerzia è ancora proporzionale alla massa; l'accelerazione di un oggetto è ancora dipendente esclusivamente dalla forza nella posizione in cui esso si trova e la forza è dedotta dalla distribuzione delle sorgenti massive; la forza di inerzia è ancora diretta come l'accelerazione; nel limite di piccole accelerazioni l'inerzia diventa quadratica nell'accelerazione così da giustificare la piattezza asintotica delle curve di rotazione delle galassie. Conseguenza inevitabile di quest'ultima ipotesi è l'introduzione di una costante a_0 con le dimensioni di un'accelerazione, che ha un ruolo analogo a quello della velocità della luce nel vuoto in Relatività Ristretta. Partendo da queste assunzioni, Milgrom propone di sostituire la seconda legge di Newton con la seguente relazione:

$$m \mu \left(\frac{a}{a_0} \right) \vec{a} = \vec{F} , \quad (2.1)$$

dove m è la massa gravitazionale di un corpo (che assumiamo equivalente a quella inerziale) che si muove in un campo di forza statico \vec{F} con accelerazione \vec{a} (useremo la notazione $a = |\vec{a}|$), e $\mu(x)$ è la funzione di interpolazione:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \gg 1 \\ x & \text{se } x \ll 1 \end{cases} \quad (2.2)$$

È evidente che per $a \gg a_0$ l'eq. (2.1) si riduce alla solita relazione newtoniana, mentre per $a \ll a_0$ abbiamo una dinamica modificata.

Vediamo come questa semplice modifica ci permetta di avere velocità costanti a grandi distanze dal centro galattico. Dall'eq. (2.1) deduciamo che l'accelerazione di una particella di prova immersa in un campo gravitazionale è data da:

$$\mu \left(\frac{a}{a_0} \right) \vec{a} = \vec{g}_N , \quad (2.3)$$

dove \vec{g}_N è l'accelerazione gravitazionale newtoniana nel punto in cui si trova la particella. Assumiamo che il suo moto sia circolare, con $a = v^2/r$, e che a grandi distanze dal centro galattico la particella sia in regime MONDiano, cioè con $a \ll a_0$. Se il campo gravitazionale è dato da $g_N = MG/r^2$, dove M è la massa della galassia e G la costante gravitazionale di Newton, combinando l'eq. (2.3) con la (2.2), otteniamo che:

$$v_\infty^4 = MG a_0 , \quad (2.4)$$

dove abbiamo aggiunto il pedice ∞ per sottolineare il fatto che si tratta della velocità a grandi distanze dal centro galattico. Osserviamo quindi che l'eq. (2.1) soddisfa parte della quarta ipotesi di Milgrom.

Ma che valore ha a_0 ? Per scoprirlo, dobbiamo non semplicemente richiedere che v_∞ sia costante, ma che la curva di rotazione calcolata con la dinamica di Milgrom sia

asintoticamente piatta, soddisfacendo così interamente alla quarta ipotesi della nuova dinamica. Consideriamo una galassia a spirale composta da un disco piatto di spessore trascurabile e un bulbo sferico, supponendo che all'interno del disco i corpi si muovano di moto puramente circolare. Indichiamo quindi con $g_N(r)$ l'accelerazione gravitazionale radiale nel piano del disco e riscriviamo l'eq. (2.3) come:

$$\left(\frac{v^2(r)}{r}\right) \mu \left(\frac{v^2(r)}{ra_0}\right) = g_N(r). \quad (2.5)$$

La massa totale che governa il moto del corpo di prova è $M = M_b + M_d$, dove M_b e M_d sono rispettivamente la massa del bulbo e quella del disco. Definendo il parametro adimensionale $s = r/h$, con h una qualche lunghezza caratteristica della galassia, possiamo scrivere:

$$g_N(r) = MGr^{-2}\gamma(s, t_1, \dots, t_n) \quad (2.6)$$

per una qualche funzione γ che dipende da s e dalla distribuzione della massa tramite i coefficienti adimensionali t_i , che possono esprimere, ad esempio, la frazione di massa nelle varie componenti della galassia. Chiaramente, $\lim_{s \rightarrow \infty} \gamma = 1$. Introducendo ora le variabili adimensionali $V = V(s) = v(sh)/v_\infty$ e $\xi = (MG/a_0h^2)^{1/2} = v_\infty^2/a_0h$, possiamo riscrivere l'eq. (2.5) in una forma adimensionale:

$$\frac{V^2}{s} \xi \mu \left(\frac{V^2}{s} \xi\right) = \frac{\xi^2}{s^2} \gamma(s, t_1, \dots, t_n). \quad (2.7)$$

Data una distribuzione di massa, cioè una γ , è possibile risolvere l'equazione precedente in V , ottenendo in particolare una famiglia di curve $V(s, \xi)$ generate dal parametro ξ . Notiamo poi che $\lim_{s \rightarrow \infty} V(s) = 1$ per via del comportamento di $\mu(V^2\xi/s)$. Consideriamo ora una galassia caratterizzata da un disco esponenziale, cioè con luminosità superficiale ad andamento esponenziale analogo a quanto indicato nell'equazione di Freeman (1.2), con una scala di lunghezza h_d . Per questa galassia, formata da un disco e un bulbo, possiamo scrivere:

$$\gamma(s) = \alpha_d \gamma_d(s) + (1 - \alpha_d) \gamma_b, \quad (2.8)$$

con $\alpha_d = M_d/M$ e $\gamma_d(s)$ e $\gamma_b(s)$ indicanti, rispettivamente, la distribuzione di massa del disco e del bulbo. Supponendo che la massa della galassia sia tutta concentrata nel disco, abbiamo $\gamma(s) = \gamma_d(s)$ e per un disco esponenziale possiamo esplicitare la distribuzione massiva, come osservato in [6]:

$$\gamma_d(s) = \left(\frac{s^3}{2}\right) \left[I_0\left(\frac{s}{2}\right) K_0\left(\frac{s}{2}\right) - I_1\left(\frac{s}{2}\right) K_1\left(\frac{s}{2}\right) \right], \quad (2.9)$$

con $s = r/h_d$ e I e K le funzioni di Bessel modificate.¹ A questo punto, dobbiamo scegliere un'espressione per $\mu(x)$, che non è specificata a priori ma deve soddisfare le

¹Ricordiamo la definizione, rispettivamente, delle funzioni di Bessel modificate del primo e del secondo tipo, a variabile complessa: $I_\nu(z) = (z/2)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} (z^2/4)^k / (k!(\nu+k)!)$ e $K_\nu(z) \sim (\pi/2z)^{1/2} \exp(-z)$.

condizioni (2.2). Possiamo, ad esempio, scegliere

$$\mu(x) = \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}. \quad (2.10)$$

Infine, risolvendo in V l'eq. (2.7) con le sostituzioni (2.9) e (2.10), ricaviamo una famiglia di curve $V(s, \xi)$, graficate in Figura 2.1 per $\xi = 1, 2, 6$.

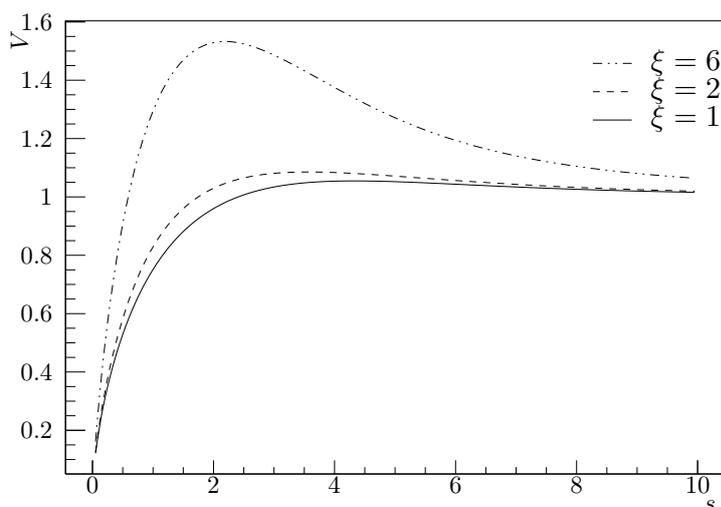


Figura 2.1: Famiglia di curve $V(s, \xi)$ per una galassia con disco esponenziale e massa del bulbo trascurabile, graficate per $\xi = 1, 2, 6$.

Osserviamo che per $1 < \xi < 2$ la curva assume un andamento indicativamente costante già da due o tre scale di lunghezza del disco, mentre per alti valori di ξ la curva si solleva significativamente e raggiunge un valore asintotico molto più lentamente. Considerazioni simili possono essere tratte dalle curve ricavate considerando galassie con massa concentrata nel bulbo o galassie miste. Per soddisfare, quindi, alla richiesta che la dinamica di Milgrom produca curve di rotazione asintoticamente piatte, è necessario considerare $1 < \xi < 2$, che invertita per ricavare a_0 fissa l'ordine di grandezza $a_0 \sim 10^{-10} \text{ m/s}^2$. Notiamo quindi che Milgrom propone una modifica della dinamica newtoniana per accelerazioni di circa undici ordini di grandezza inferiori rispetto all'accelerazione di gravità terrestre. Non è del tutto azzardato supporre che la dinamica newtoniana possa non valere in questi regimi, dove, ricordiamo, non era mai stata testata prima delle osservazioni galattiche compiute nel '900. Il valore oggi comunemente accettato e utilizzato di a_0 è:

$$a_0 \simeq 1.2 \cdot 10^{-10} \text{ m/s}^2. \quad (2.11)$$

Non rimane che confrontare la semplice legge di Milgrom con i dati sperimentali e le osservazioni empiriche viste nel Capitolo 1, per vedere se esse possano essere spiegate senza dover introdurre della materia oscura.

2.2 Il confronto delle predizioni di Milgrom con le evidenze sperimentali

Quando Milgrom propone la MOND, poche delle evidenze incontrate nel capitolo precedente erano note. I lavori sulle curve di rotazione cominciarono appena a dare risultati affidabili, la relazione di Tully-Fisher era, anche se evidente, poco chiara e molto doveva ancora essere scoperto sulle galassie, come ad esempio il vero significato della legge di Freeman e le LSB, che ancora non erano state osservate. I confronti che ci accingiamo a compiere, quindi, sono solo una parte delle predizioni che Milgrom elenca nella serie dei propri articoli del 1983. Infatti, a partire dall'eq. (2.1), egli ricava una lista di conseguenze che devono necessariamente verificarsi se si ammette che la MOND sia corretta. Vediamone alcune, e verifichiamo se una semplice legge possa unificare le osservazioni che nel contesto CDM appaiono come scollegate fra loro.

2.2.1 Curve di rotazione e limite di Freeman

Nelle sezioni 1.4 e 1.5 abbiamo visto che le interpolazioni delle curve di rotazione nel modello CDM coinvolgono tre parametri liberi e non sono molto soddisfacenti perché hanno un ampio margine di aggiustamento. La MOND, invece, ha un unico parametro libero, il rapporto massa-luce, per cui risulta molto più vincolata. In generale, infatti, per interpolare le RC delle galassie a spirale nel paradigma MOND si procede come segue: osservata la distribuzione della materia (visibile), a partire da questa si calcola l'accelerazione di gravità radiale g_N tramite la formula di Poisson classica valida in regime newtoniano; quindi si calcola l'accelerazione effettiva predetta dalla MOND secondo la relazione (2.3) con a_0 fissata e si aggiusta il valore di Υ finché non è raggiunta la miglior interpolazione dei dati.² Il confronto con le curve di rotazione è quindi più stringente per la MOND che per il modello CDM. Proponiamo in Figura 2.2 due fit sulla curva di rotazione della galassia NGC 6503 effettuati nel contesto MOND e CDM. A sinistra è riportato il fit eseguito secondo il modello CDM: i tre parametri liberi in questo caso consistono nella curva di rotazione della componente stellare della galassia, quella gassosa e l'alone oscuro; un'opportuna combinazione di queste tre riesce a riprodurre la RC della galassia. A destra, invece, notiamo il fit nel contesto MOND: l'unico parametro libero è

²Per interpolare le RC è ovviamente necessario scegliere un'espressione per la funzione $\mu(x)$, che tuttora non è fissata da accorgimenti di natura teorici. Il riscontro con i dati sperimentali permette di scartare alcune espressioni, ma in generale $\mu(x)$ diverse producono differenze compatibili entro gli errori sperimentali.

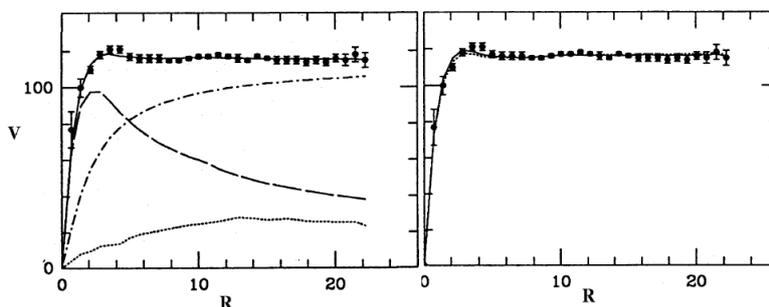


Figura 2.2: Fit della RC della galassia NGC 6503. A sinistra, la curva continua rappresenta il fit con tre parametri liberi del modello CDM: componente stellare (curva punteggiata), componente gassosa (curva tratteggiata), alone oscuro (curva punto-tratteggiata); a destra, il fit nel contesto MOND. I punti con le barre d'errore raffigurano i dati sperimentali; sulle ordinate la velocità è in km/s, sulle ascisse la distanza radiale è in kpc. Da [17].

Υ e aggiustando solo questo è possibile riprodurre perfettamente la curva di rotazione, senza introdurre alcun tipo di materia in più rispetto a quella visibile. È evidente, quindi, come mai i fit ottenuti con la dinamica di Milgrom siano molto più soddisfacenti. Tutte le galassie che sono state analizzate finora hanno sempre fornito ottimi risultati e non hanno mai invalidato la formula MOND. Ne riportiamo solo alcuni in Figura 2.3. A questo punto, dato che i fit restituiscono un valore di Υ , si può verificare se questo coincide con quanto atteso dai modelli di formazione delle popolazioni stellari, che ovviamente non hanno nulla a che vedere con la MOND e sono da essa indipendenti. In generale questi due metodi forniscono due valori di Υ tra loro compatibili; ne riportiamo un esempio in Figura 2.4.

Molti sostenitori del modello DM ribattono dicendo che la MOND è stata costruita apposta per avere curve di rotazione asintoticamente piatte, per cui di per sé le ottime interpolazioni delle RC non rappresentano un vero e proprio test per la dinamica di Milgrom. Non si potrebbe affermare qualcosa di più sbagliato. La MOND è stata sì costruita per avere RC asintoticamente piatte, ma non per interpolare *tutti* i dati che sono stati raccolti *successivamente*. Infatti, come abbiamo visto nella sezione 2.1, la costruzione della MOND prevede solo di fissare la costante a_0 in modo che la forma della curva di rotazione sia qualitativamente analoga a quella che sembravano assumere le galassie al tempo dei lavori di Milgrom. Fissata la forma, il fatto che l'ampiezza della RC, data dal rapporto massa-luce, riesca a interpolare i dati e fornisca valori in accordo con una teoria indipendente, quale la formazione delle popolazioni stellari, costituisce di certo un ottimo risultato per la MOND. Traducendo le parole di Sanders e McGaugh, «ideare una teoria per interpolare dati che non sono ancora stati raccolti si chiama *predizione*» (Sanders e McGaugh [16]).

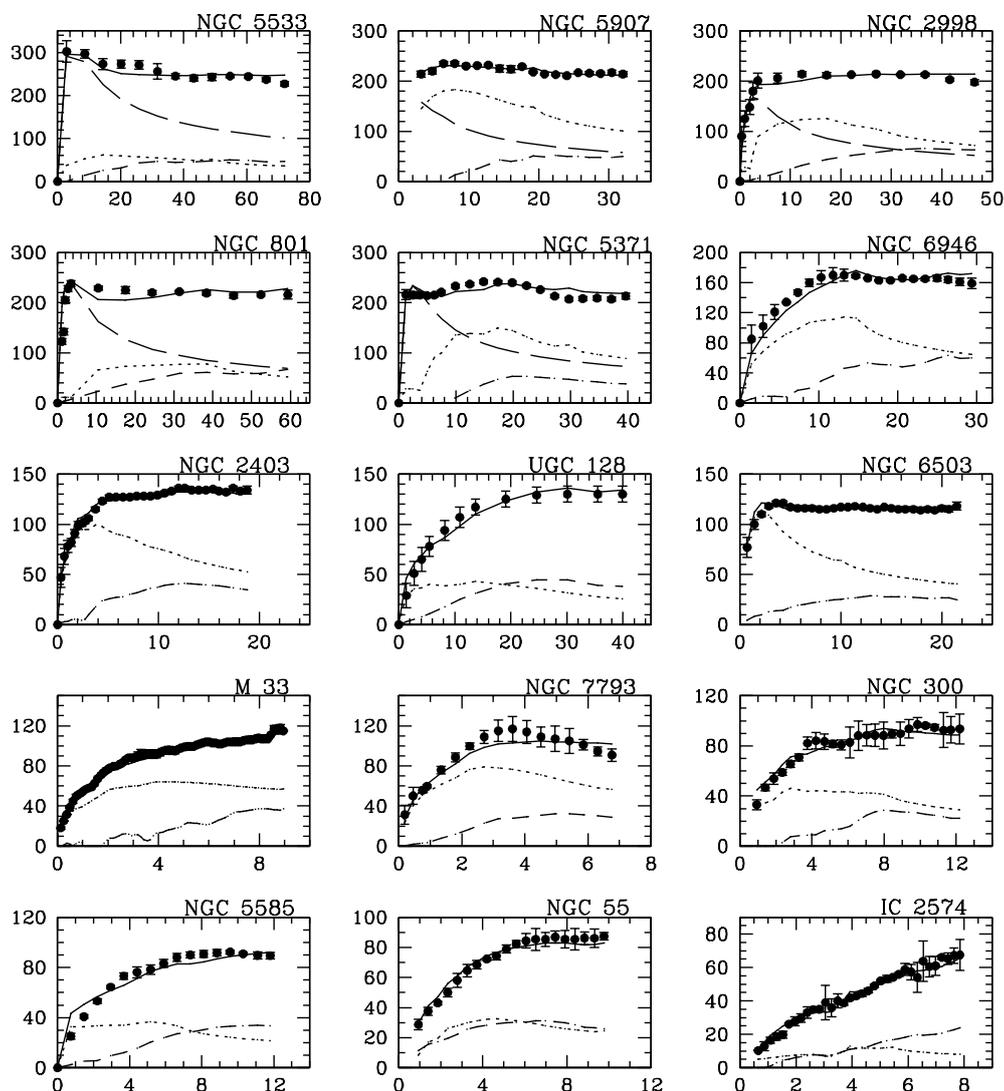


Figura 2.3: RC delle galassie a spirale del gruppo dell'Orsa Maggiore interpolate utilizzando la dinamica di Milgrom (linea continua). I punti mostrano le RC osservate con la riga a 21 cm. Le curve punteggiate e tratteggiate sono le RC attese con la dinamica newtoniana per le componenti luminose e gassose rispettivamente. Gli assi sono come in Fig. 2.2 e i fit sono stati ottenuti con $a_0 = 1.2 \cdot 10^{-10} \text{ m/s}^2$. Da [16].

D'altronde, sebbene la dinamica di Milgrom riesca a spiegare le RC di tutte le galassie esistenti con cui è stata messa alla prova, essa non riesce a interpolare una qualsiasi curva di rotazione. Riccardo Scarpa ha costruito la RC di una galassia ibrida, che riportiamo

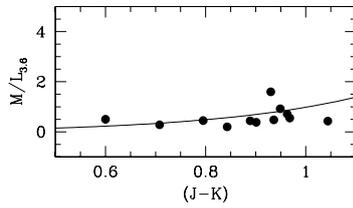


Figura 2.4: Υ ricavato dai fit sulle galassie a spirale del gruppo dell'Orsa Maggiore (punti pieni) nella banda blu rispetto all'indice di colore della banda blu-ottica. La curva continua mostra la predizione dedotta dalla formazione della popolazione stellare. Da [16].

in Figura 2.5, con i dati di velocità di una galassia e la massa visibile di un'altra. Una teoria corretta non dovrebbe riuscire a interpolare tale curva. La MOND non ci riesce, mentre il modello DM non ha problemi ha interpolarla ottimamente. Ciò ovviamente non dimostra che il modello DM sia sbagliato, ma mette in evidenza quanto sia elevato il suo possibile grado di aggiustamento verso qualsiasi tipo di dato, anche non sperimentale. Traducendo l'esempio di Scarpa in termini più concreti, sarebbe come se la dinamica newtoniana ammettesse che sulla Terra un sasso lanciato in aria potesse seguire una traiettoria rettilinea e non solo parabolica (ipotizzando ovviamente che la velocità iniziale del sasso non sia parallela alla forza di gravità).

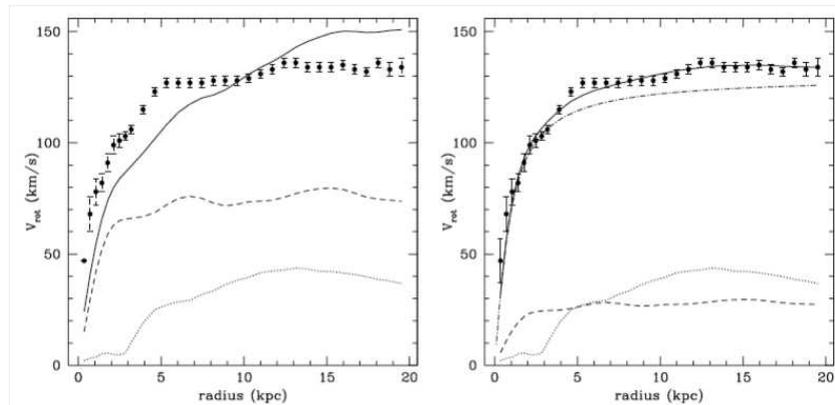


Figura 2.5: Interpolazione (linea continua) della curva di rotazione (punti con barre d'errore) di una galassia fittizia, ottenuta con i dati di velocità della galassia NGC 2403 e la massa visibile della galassia UGC 128. A sinistra, la MOND non riesce a fittare i dati, mentre a destra un alone oscuro isoterma non ha problemi ha interpolarli benissimo. Sono mostrate anche le curve relative alla componente gassosa (linea punteggiata) e al disco stellare (linea tratteggiata). Da [17].

Nella sezione 1.5 abbiamo visto che le galassie LSB pongono dei problemi per l'alone NFW: non è chiaro perché in esse la discrepanza tra la materia osservata e quella oscura debba essere più elevata rispetto alle galassie HSB; la differenza nella forma delle curve di rotazione tra questi due tipi di galassie non ha una spiegazione e le interpolazioni delle RC risultano poco precise perché la cuspidè dell'alone causa una salita troppo ripida

della curva. Tutti questi problemi non si presentano nella dinamica di Milgrom e sono anzi predetti. In uno dei tre articoli del 1983, infatti, egli mostra che a partire da a_0 è possibile definire una luminosità superficiale critica

$$\Sigma_0 = \frac{a_0}{G} \simeq 1.8 \text{ kg/m}^2 \quad (2.12)$$

che funge da spartiacque per comprendere il comportamento di una galassia. Essendo la luminosità superficiale Σ di una generica galassia proporzionale ad a , galassie con $\Sigma > \Sigma_0$ dovrebbero trovarsi in pieno regime newtoniano e non presentare quindi discrepanze tra massa osservata e massa dinamica; viceversa, galassie con $\Sigma \ll \Sigma_0$ dovrebbero essere in pieno regime MONDiano e, se analizzate con il modello DM, dovrebbero presentare un'alta discrepanza tra materia osservata e materia dinamica. Oltretutto, dato che le galassie con $\Sigma \ll \Sigma_0$ non raggiungono mai il regime newtoniano, le loro curve di rotazione dovrebbero salire molto lentamente, mentre quelle di galassie con $\Sigma \lesssim \Sigma_0$ dovrebbero presentare RC che inizialmente crescono molto rapidamente per poi rimanere costanti, essendo tali galassie in regime newtoniano fino al limite ottico e poi in regime MONDiano. Ricordiamo che all'epoca degli articoli di Milgrom galassie a bassa luminosità superficiale non erano note. Esse vennero scoperte solo negli anni '90 e le differenze tra le LSB e le HSB costituiscono quindi una predizione e una caratteristica essenziale per la MOND. In Figura 2.6 riportiamo i grafici delle curve di rotazione di alcune galassie LSB con rispettive interpolazioni eseguite con la MOND, ancora una volta ottime. Confrontando le RC con quelle in Figura 2.3, appare evidente la differenza qualitativa predetta da Milgrom. Notiamo inoltre che la curva di rotazione delle galassie LSB, pur non essendo piatta, è interpolata in modo ottimale dalla MOND: chi ancora credesse che la prova delle curve di rotazione non costituisca un vero test per la MOND, ora dovrebbe essersi convinto del contrario. Queste galassie, in realtà, rappresentano un test ancora più stringente delle galassie HSB. Infatti le LSB sono in pieno regime MONDiano, perciò non è necessario specificare una funzione di interpolazione perché per tutta la curva si ha $\mu(x) \simeq x$. Il fit, quindi, è una prova diretta dell'ipotesi che $a = (a_0 g_N)^{1/2}$ per $a \ll a_0$.

Le galassie LSB giustificano l'interpretazione attuale della legge di Freeman, secondo la quale essa indica un limite superiore alla luminosità superficiale centrale delle galassie ma non uno inferiore. Come mai esiste questo limite? Semplicemente per questioni di stabilità. Dato che la luminosità superficiale rappresenta una densità superficiale, una galassia con una Σ_0 elevata non è stabile. Nel modello CDM la stabilità è garantita dall'alone oscuro che, assieme alla materia barionica, costituisce un sistema scalabile. Non è chiaro perché, in questo contesto, il limite di Freeman debba esistere: per alte densità superficiali di materia barionica basterebbe avere maggiori quantità di materia oscura, però ciò non si verifica. La MOND invece trova una facile spiegazione per il limite di Freeman. Infatti, questo dovrebbe coincidere con la densità superficiale (2.12), dato che all'aumentare di $\Sigma > \Sigma_0$ le galassie diventano instabili secondo la dinamica di Milgrom, non essendoci la materia oscura a porvi un rimedio. Anche questa previsione è elencata

negli articoli di Milgrom e di fatti i dati ottenuti successivamente (vedi Figura 2.7) indicano chiaramente che l'accelerazione caratteristica che origina la luminosità superficiale critica di Freeman è proprio la costante a_0 di Milgrom.

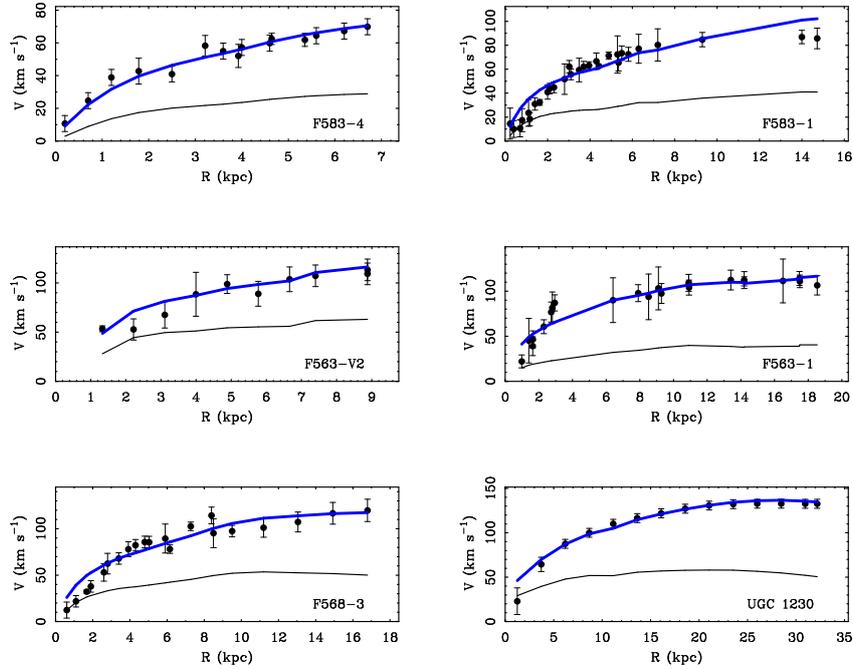


Figura 2.6: Interpolazioni di curve di rotazione di galassie LSB in MOND (linea blu). La linea nera mostra la curva di rotazione attesa secondo la dinamica newtoniana. È evidente la discrepanza tra i due modelli: la MOND riesce sempre però ad aggiungere la forza necessaria a interpolare le RC. Da [5].

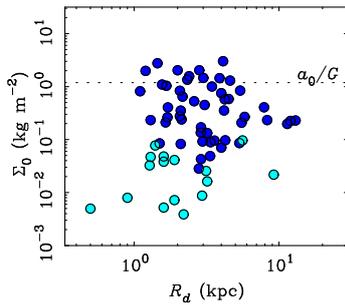


Figura 2.7: Luminosità superficiale centrale in funzione della scala di lunghezza R_d caratteristica del disco per alcune galassie. Appare evidente una soglia di luminosità superficiale oltre la quale i dischi diventano rari (limite di Freeman). Indicando con M_b la massa barionica totale, somma della massa stellare M_* e gassosa M_g , i punti in blu scuro rappresentano galassie con $M_* > M_g$, mentre quelli azzurri hanno $M_* < M_g$. Da [5].

2.2.2 La relazione barionica di Tully-Fisher

Come si comporta la MOND rispetto alla BTFR? Abbiamo detto che, nella sua formulazione attuale, essa prevede una relazione come la (1.3); per intero, la BTFR è scritta come:

$$\log M = \alpha \log v - \log \beta, \quad (2.13)$$

ricordando che M è la massa barionica totale di una galassia, v la sua velocità di rotazione asintotica e α e β sono dei parametri di fitting, in particolare $\alpha = 4$ con ottima precisione. Ricordiamo che l'alone NFW porta a $\alpha = 3$ e non riesce a spiegare la relazione empirica.

Utilizzando la MOND, la BTFR è un risultato praticamente immediato. Basta, infatti, applicare i logaritmi all'eq. (2.4) per ottenere:

$$\log M = 4 \log v_\infty - \log(Ga_0). \quad (2.14)$$

Non solo $\alpha = 4$ è riprodotto identicamente, ma abbiamo anche un valore di riferimento per il parametro di intercetta $\beta = Ga_0$, che è anch'esso pienamente consistente con i dati sperimentali.³ Osserviamo in Figura 2.8 la BTFR e la predizione di DM e MOND. Quest'ultima riproduce fedelmente i dati senza alcun problema di aggiustamento.

Notiamo che negli anni '80 la BTFR non era nota, ma era stata scoperta solamente la relazione di Tully-Fisher, che prevedeva un incerto $2.5 < \alpha < 5$. L'ottimo accordo con la BTFR presentato dalla MOND è quindi ancora una volta una predizione corretta.

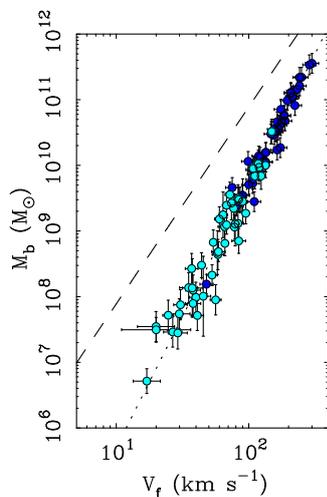


Figura 2.8: Relazione barionica di Tully-Fisher in un grafico in scala logaritmica per galassie rappresentate come in Fig. 2.7. La linea tratteggiata ha pendenza pari a 3 e rappresenta la BTFR attesa secondo il modello CDM, mentre la linea punteggiata è l'eq. (2.14) con $a_0 = 1.2 \cdot 10^{-10} \text{ km/s}^2$. È da sottolineare quanto sia evidente e precisa la correlazione tra la massa barionica e la velocità asintotica. Da [5].

³Per quanto riguarda le curve di rotazione e la BTFR, abbiamo presentato soltanto risultati relativi alle galassie a spirale. Ciò è inevitabile in quanto, ad esempio, le galassie ellittiche non sono sostenute dal moto rotazionale dei corpi al loro interno; esse sono sostenute dalla pressione causata dal moto random degli stessi. Tuttavia, per questo tipo di galassie è possibile costruire un analogo alle curve di rotazione e alla BTFR (che prende il nome di relazione di Faber-Jackson) se invece della velocità di rotazione si considera la dispersione di velocità. In [5] è mostrato che la MOND ottiene buoni risultati anche in queste situazioni.

2.2.3 Il ruolo unificante di a_0

La costante a_0 introdotta da Milgrom riesce a spiegare una serie di fenomeni che nel paradigma della materia oscura non hanno una chiara spiegazione oppure non l'hanno affatto. In particolare, a_0 permette di:

1. ottenere un'ottima descrizione delle curve di rotazione;
2. ricavare il punto zero della relazione barionica di Tully-Fisher;
3. spiegare il limite di Freeman;
4. mettere in relazione la velocità di rotazione delle galassie con la discrepanza tra materia dinamica e visibile.

Non si può sottolineare a sufficienza quanto, in linea di principio, questi ruoli non debbano essere necessariamente collegati tra loro. La BTFR lega la dinamica del solo disco (si tratta, ricordiamo, di v_∞) alla massa barionica, mentre le curve di rotazione, pensando a una galassia HSB, legano la dinamica sia newtoniana che non newtoniana (corrispondente alla zona piatta) alla massa barionica. Non c'è nessuna garanzia, quindi, che le costanti caratteristiche di queste relazioni debbano trovare spiegazione tramite un'unica costante. In altre parole, *a priori* l'accelerazione caratteristica che descrive la BTFR non ha motivo di essere legata a quella che descrive le curve di rotazione. Tuttavia, accettando la MOND è inevitabile ammettere che così debba essere e i dati confermano questa previsione: a_0 si pone come costante unificante le differenti fenomenologie galattiche. In questo senso essa svolge un ruolo analogo alla costante di Planck h in meccanica quantistica: fenomeni differenti come lo spettro di corpo nero, l'effetto fotoelettrico e lo spettro dell'atomo di idrogeno sono accomunati dalla costante di Planck.

La proprietà 4 segue dal modo stesso in cui la dinamica di Milgrom è stata costruita. Essa non è però banale: discutendo delle curve di rotazione analizzate con il modello CDM, abbiamo osservato che ipotizzando l'esistenza di massa nascosta sarebbe più naturale supporre che la discrepanza tra la massa dinamica e quella visibile sia legata al raggio della galassia. I dati ottenuti finora (vedi Figura 2.9) non mostrano una correlazione di questo tipo: essi evidenziano che la discrepanza dipende dall'accelerazione centrifuga dei corpi interni alla galassia. Questa relazione di discrepanza massa-accelerazione non emerge dai modelli galattici del paradigma CDM costruiti a partire dall'alone NFW e avvalorava invece la MOND. I dati mostrano chiaramente che nelle galassie agisce una forza efficace. Con la materia oscura non c'è nessuna ragione di aspettarsi questo comportamento, perché con opportune combinazioni di dischi stellari e gassosi e aloni di materia oscura non barionica è possibile ottenere una grande varietà di forze efficaci. Tuttavia, tra tutte queste la Natura sembra aver scelto proprio quella predetta dalla MOND, con una scala di accelerazione compatibile con a_0 .

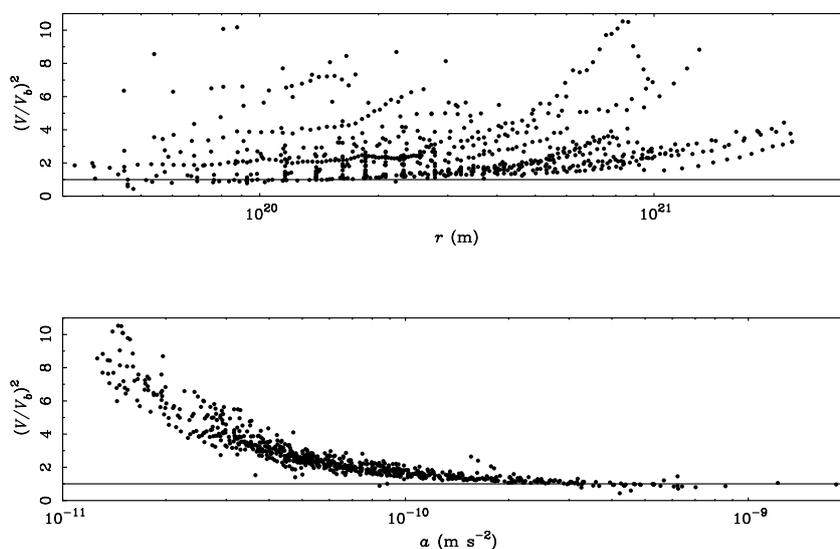


Figura 2.9: Relazione di discrepanza massa-accelerazione nelle galassie a spirale. La discrepanza di massa è mostrata attraverso il rapporto tra la velocità osservata V e V_b , dedotta dalla dinamica newtoniana in base alla materia barionica visibile. La materia oscura è richiesta quando $V > V_b$. In alto, la discrepanza è graficata in funzione della distanza dal centro galattico alla quale è misurata V ; non emerge alcun andamento caratteristico. In basso, la discrepanza è mostrata in funzione dell'accelerazione centripeta a e risulta evidente una correlazione tra le due quantità. L'ampiezza della discrepanza aumenta man mano che le accelerazioni sono più deboli; in particolare, per $a > 10^{-10}$ km/s² la materia oscura non è richiesta, mentre per $a < 10^{-10}$ km/s² la discrepanza è evidente. Da [5].

2.3 Ammassi di galassie

Come aveva già notato Zwicky, gli ammassi di galassie presentano una discrepanza tra la materia dinamica e quella visibile, esattamente come le galassie. In questo caso però la MOND non riesce a spiegare la dinamica dei corpi interni all'ammasso con gli stessi ottimi risultati ottenuti su scala galattica.

Grazie allo sviluppo della radioastronomia, è stato possibile comprendere che all'interno degli ammassi di galassie è presente una grande quantità di gas caldo, che, avendo un'alta energia cinetica, emette raggi X. In realtà, il gas risulta essere la componente di materia barionica maggiormente presente all'interno degli ammassi, anche se da solo non basta, con la dinamica newtoniana, a spiegare i moti delle galassie interne all'ammasso. Anche per questi sistemi è possibile trovare una relazione analoga a quella di Tully-Fisher, che in questo caso lega la massa barionica M dell'ammasso alla temperatura T del gas. In particolare, i dati sperimentali suggeriscono una relazione del tipo $M \propto T^2$. La dinamica di Milgrom riesce a spiegare questa relazione, presentando però

un offset rispetto ai dati sperimentali, nel senso che il valore dell'intercetta previsto dalla MOND non è in accordo con essi. Il modello che si ricava nel contesto DM, al contrario, non ha problemi per l'intercetta ma prevede una pendenza sbagliata, con una relazione $M \propto T^{3/2}$.

La questione interessante consiste nel fatto che l'offset presente in MOND non ne falsifica il modello, perché essa riesce effettivamente a ridurre la quantità di materia nascosta necessaria a spiegare la dinamica, ma, al contrario del caso galattico, non la elimina completamente. Se i dati sperimentali avessero indicato che la forza efficace della MOND, calcolata a partire dalla massa barionica totale degli ammassi, fosse troppo forte e dovesse causarne il collasso, allora la MOND sarebbe stata falsificata. I dati però indicano che la forza è troppo debole e non riesce a spiegare come mai le galassie non si separino. In altre parole, nel paradigma MOND, così come in quello newtoniano, la materia barionica osservata negli ammassi non è sufficiente a descriverne la dinamica ed è necessario introdurre della materia nascosta. La differenza principale con la materia del modello Λ CDM è che quella necessaria alla MOND potrebbe essere costituita da particelle del modello standard (è stato calcolato che basterebbero dei neutrini di massa pari a circa 2 GeV^4 , non in grandi quantità), anche se è stato osservato che la discrepanza sarebbe ugualmente risolta da neutrini sterili con una massa di circa 10 GeV . Questa necessità, sebbene sembri poco coerente con la filosofia generale della teoria di Milgrom, è se non altro consistente con i risultati sulla CMBR, per i quali rimandiamo il lettore alla sezione 3.5.

Tra gli ammassi di galassie ce n'è uno in particolare che è ormai legato profondamente alla MOND: ci riferiamo al cluster 1E0657-56, detto anche ammasso del Proiettile. Esso è formato da due ammassi che si sono scontrati a un'elevata velocità, maggiore di 3100 km/s . Studiando l'effetto di lensing gravitazionale causato dal Proiettile, si osserva che la luce proveniente dalle galassie sullo sfondo è deflessa attorno a due regioni che non coincidono con quelle in cui si trova il gas. Tuttavia, il modello CDM prevede che, a causa della collisione, in queste regioni si trovi proprio la materia oscura dei due ammassi contenuti nel Proiettile, che assieme alle galassie si sarebbe separata dal gas durante lo scontro. Per questo motivo i sostenitori del modello Λ CDM ritengono che il Proiettile sia la prova evidente che la MOND sia sbagliata, e che esso dimostri che la materia oscura esiste, dato che solo il modello Λ CDM riesce a tenere conto dell'effetto di deflessione gravitazionale. Il Proiettile, per quanto ci si possa girare intorno, pone effettivamente dei problemi alla MOND, ma queste affermazioni non sono corrette. Infatti, esso non dimostra che la dinamica di Milgrom sia sbagliata. Essa non potrebbe essere corretta se le previsioni elencate da Milgrom non si fossero avverate; il Proiettile, al più, mostra che essa è incompleta, come incompleta risulterebbe qualsiasi teoria di gravità modificata di fronte al Proiettile. D'altronde, questo non dimostra nemmeno che il modello Λ CDM sia

⁴Sebbene 2 GeV sia ormai il limite superiore ai valori di massa dei neutrini, notiamo che gli esperimenti ancora non escludono questa possibilità.

corretto, perché non c'è nessuna garanzia che l'eventuale materia provocante il lensing sia la materia oscura del modello Λ CDM. Infatti è stato trovato un altro ammasso, il cluster A520, anch'esso unione di più ammassi, nel quale però la materia oscura pare non essersi separata dal gas, a differenza delle galassie che hanno seguito una dinamica analoga a quella osservata nel Proiettile. Il modello Λ CDM risulta quindi nuovamente contraddittorio.

Per quanto problematico sia l'ammasso del Proiettile, esso non è né la prova definitiva del modello Λ CDM, né la fine della MOND. È perfettamente possibile, anche se poco elegante nel contesto MOND, che nei cluster possa esserci della materia nascosta, e la quantità richiesta nel Proiettile è compatibile con quella richiesta negli altri ammassi. Di fatti, la possibilità che la MOND potesse non riuscire a eliminare il problema della massa mancante negli ammassi era già chiara a Milgrom fin dalla sua prima formulazione. In questi sistemi, infatti, la correzione apportata dalla MOND potrebbe essere parzialmente soppressa a causa dell'effetto del campo esterno.

2.4 L'effetto del campo esterno

Applicando la formula (2.3) abbiamo finora tacitamente assunto che l'accelerazione, dovuta alla presenza di un campo esterno, del sistema in esame non influenzasse la dinamica interna del sistema. Per motivare questa ipotesi, consideriamo un sistema S formato da molti corpi (come una galassia) e un suo sottosistema s (come una stella). Supponiamo che il campo di accelerazione prodotto da S , considerato senza s , sia costante e che g_e sia l'accelerazione prodotta da S nella regione in cui si trova s , la cui accelerazione tipica è g . A seconda che g_e sia maggiore o minore di g e che esse siano maggiori e/o minori di a_0 , la dinamica di s risulterà differente e non basta in generale assumere che $g < a_0$ perché il sottosistema sia in regime MONDiano. Infatti, se $g < a_0 < g_e$ il sottosistema s seguirà la dinamica newtoniana. In generale, affinché un sistema sia in regime MONDiano bisogna richiedere che sia la sua accelerazione tipica che quella della regione di spazio in cui si trova siano minori di a_0 , ad esempio con una gerarchia del tipo $g_e < g < a_0$. La dinamica newtoniana non necessita di queste distinzioni perché è lineare e quindi la dinamica interna di un sistema è disaccoppiata dal campo esterno costante in cui si trova. Nella MOND questo non è più vero. In particolare, se consideriamo il principio di equivalenza forte (SEP)⁵ è evidente che la MOND debba violarlo. Questa semplice considerazione avrà interessanti conseguenze quando mostreremo la teoria relativistica per la MOND.

⁵Il principio di equivalenza forte afferma che il risultato di un qualunque esperimento locale in un laboratorio in caduta libera è indipendente dalla velocità del laboratorio e dalla sua posizione nello spaziotempo.

2.5 AQUAL

Sebbene la modifica alla dinamica newtoniana apportata da Milgrom riesca a descrivere con successo una grande varietà di fenomeni galattici, la formula (2.1) non può essere considerata una teoria fisica vera e propria, perché non è in grado di soddisfare le usuali leggi di conservazione. Infatti, basta ad esempio considerare un sistema isolato formato da due corpi interagenti gravitazionalmente in regime MONDiano. Se essi hanno masse diverse, applicando il secondo principio della dinamica e utilizzando la relazione (2.3), ci si accorge immediatamente che essi sono soggetti a due forze differenti, violando così il terzo principio di Newton e la conservazione del momento. Per non destinare la MOND a essere un semplice seppur efficace algoritmo, è necessario costruire una teoria che rispetti le usuali leggi di conservazione del momento e dell'energia e che sia relativistica. Lasciando la versione relativistica al prossimo capitolo, vediamo ora come formulare una teoria non relativistica che recuperi la MOND per piccole accelerazioni e la dinamica newtoniana per grandi accelerazioni.

La formula (2.1) può essere vista come una modifica alla legge di inerzia o, nella versione (2.3), come una modifica alla legge di gravità di Newton.⁶ Per alcune curiose coincidenze, Milgrom ha sempre pensato che la MOND potesse avere conseguenze interessanti come modifica alla legge di inerzia. Infatti, numericamente risulta che:

$$a_0 \sim cH_0 \sim c^2 \left(\frac{\Lambda}{3} \right)^{1/2}, \quad (2.15)$$

dove H_0 è la costante di Hubble e c la velocità della luce nel vuoto. Queste coincidenze non hanno ancora trovato una spiegazione, ma hanno suggerito a Milgrom che la MOND possa essere interpretata come una modifica all'inerzia causata dall'interazione dei corpi con il vuoto, in un meccanismo analogo a quello di Higgs, oppure generata da una simmetria in uno spaziotempo di deSitter, in cui la relazione tra a_0 e Λ emergerebbe appunto se l'accelerazione dell'espansione dell'Universo è dovuta a una costante cosmologica. Ad ogni modo, la relazione (2.15) è il miglior indizio di un possibile collegamento tra la MOND e la cosmologia, perché indica che potrebbe esserci un legame molto forte tra i parametri che descrivono l'Universo in espansione e la dinamica locale di piccoli sistemi. Tuttavia, queste interpretazioni non hanno portato a chiari risultati e scegliamo perciò di seguire la strada della modifica alla gravità.

Considerando d'ora in poi corpi a massa unitaria, riscriviamo l'eq. (2.3) in termini del potenziale newtoniano Φ_N come:

$$\mu \left(\frac{a}{a_0} \right) \vec{a} = -\vec{\nabla} \Phi_N. \quad (2.16)$$

⁶Notiamo però che, utilizzando la MOND come legge fenomenologica da applicare a delle particelle di prova, i risultati ottenuti fino a questo punto non dipendono da quale delle due interpretazioni si scelga.

Il modo più efficace per inquadrare la MOND in una teoria di gravità modificata che rispetti le leggi di conservazione consiste nel trovare una lagrangiana che non dipenda esplicitamente dalle coordinate e dal tempo e che ammetta l'eq. (2.16) come equazione del moto. Consideriamo la densità di lagrangiana della gravità newtoniana:

$$\mathcal{L} = -\frac{|\vec{\nabla}\Phi_N|^2}{8\pi G} - \rho\Phi_N, \quad (2.17)$$

dove ρ è una certa distribuzione di massa. L'equazione di campo che ne segue è la nota equazione di Poisson:

$$\nabla^2\Phi_N = 4\pi G\rho. \quad (2.18)$$

Modifichiamo ora la densità di lagrangiana (2.17), mantenendone l'invarianza galileiana e rotazionale, ma rilasciando la linearità:

$$\mathcal{L} = -\frac{a_0^2}{8\pi G} f\left(\frac{|\vec{\nabla}\Phi|^2}{a_0^2}\right) - \rho\Phi, \quad (2.19)$$

dove a_0 è una scala di accelerazione inserita per consistenza dimensionale, Φ il potenziale gravitazionale che governa il moto con $\vec{a} = -\vec{\nabla}\Phi$ e f una funzione. Notiamo che scegliendo $f(y) = y$ otteniamo l'eq. (2.17). Ponendo $\mu(\sqrt{y}) = df(y)/dy$ e applicando l'equazione di Eulero-Lagrange generalizzata alla (2.19), otteniamo l'equazione di campo:

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\mu\left(\frac{|\vec{\nabla}\Phi|}{a_0}\right) \vec{\nabla}\Phi \right] = 4\pi G\rho \quad (2.20)$$

che è non lineare in Φ e in generale difficile da risolvere. Tuttavia, per sistemi con simmetrie sferiche si può ricavare una semplice soluzione: sostituendo l'eq. (2.18) nella (2.20) si ottiene:

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\mu\left(\frac{|\vec{\nabla}\Phi|}{a_0}\right) \vec{\nabla}\Phi - \vec{\nabla}\Phi_N \right] = 0 \quad (2.21)$$

dalla quale deduciamo che il termine tra parentesi deve essere un rotore. Vale quindi la seguente relazione:

$$\mu\left(\frac{|\vec{\nabla}\Phi|}{a_0}\right) \vec{\nabla}\Phi = \vec{\nabla}\Phi_N + \vec{\nabla} \times \vec{h} \quad (2.22)$$

dove \vec{h} è un campo vettoriale. Per sistemi a simmetria sferica, applicando il teorema di Gauss all'eq. (2.20) otteniamo che $\vec{\nabla} \times \vec{h}$ deve essere identicamente nullo e perciò, ricordando che $\vec{a} = -\vec{\nabla}\Phi$, riproduciamo direttamente la formula (2.16) della MOND. Per sistemi non simmetrici la formula (2.16) non è più recuperata con esattezza, ma integrazioni numeriche dell'eq. (2.20) mostrano che essa rimane valida con ottima approssimazione.

Poiché l'eq. (2.19) rappresenta una lagrangiana quadratica (*A QUAdratic Lagrangian*), questa teoria è stata chiamata AQUAL e, come anticipato, pur non essendo relativistica riesce a inquadrare la formula della MOND in una teoria che rispetta le usuali leggi di conservazione. Queste sono garantite dalla struttura stessa della densità di lagrangiana (2.19), ma i calcoli espliciti possono essere trovati in [4].

AQUAL permette di compiere simulazioni sulla stabilità delle strutture e studiare il moto su scale galattiche in modo più completo rispetto alla MOND. Sono stati scritti pochi codici che implementano dei risolutori numerici per i problemi a N-corpi in AQUAL, poiché in generale le simulazioni risultano complicate dalla non linearità della teoria. Tuttavia, le simulazioni compiute riguardo alla stabilità e all'unione di galassie producono risultati promettenti. In particolare, l'unione di due galassie nel contesto AQUAL produce la stessa distribuzione stellare che nel contesto newtoniano in presenza di materia oscura, anche se questi processi risultano tendenzialmente più rapidi in AQUAL. La stabilità galattica, che aveva inizialmente motivato l'introduzione della materia oscura, sembra in generale favorita anche nel contesto AQUAL, fornendo anche in questo caso buoni risultati.

Ovviamente, AQUAL non è sufficiente per avere dei riscontri su scale cosmologiche o per studiare il lensing gravitazionale. Rimane quindi da mostrare la teoria più importante che riesce a inserire la MOND in un contesto relativistico.

Capitolo 3

Le modifiche alle equazioni di campo di Einstein

Quand'era caduto a terra, era un debole fanciullo, e ora se ne levava lottatore robusto.

FĚDOR M. DOSTOEVSKIJ

Dalla pubblicazione della AQUAL, il tentativo di renderla relativistica è sempre risultato problematico. Sono state formulate molte teorie, ma esse non erano mai in grado di impedire velocità superluminali, fornire un lensing gravitazionale in accordo con quello osservato e incorporare la MOND contemporaneamente. Si è pensato addirittura che ciò non fosse possibile e che esistesse un teorema matematico che lo impedisse. Tuttavia, non ne è stata trovata una dimostrazione e nel 2004 Jacob Bekenstein, fisico teorico famoso per i propri lavori sui buchi neri e interessato alla teoria di Milgrom già dal suo esordio nel 1983, ha mostrato che infatti una teoria che soddisfa questi tre requisiti esiste ed è stata da lui chiamata TeVeS (vedi [2]).

Nel presente capitolo formuliamo la TeVeS e mostriamo come essa recuperi la Relatività Generale (GR), considerandone noti al lettore i risultati principali, l'AQUAL e la dinamica newtoniana. Concluderemo ricavando il lensing gravitazionale per sistemi simmetrici fornito dalla TeVeS e riportando alcuni risultati in campo cosmologico.

3.1 TeVeS: azioni ed equazioni di campo

La TeVeS è costruita con quattro campi gravitazionali, dei quali tre sono dinamici e uno è statico. I campi dinamici sono: una metrica einsteiniana $g_{\mu\nu}$ con inversa $g^{\mu\nu}$, un campo quadrivettoriale di tipo tempo A_μ e un campo scalare ϕ ; quello statico è un campo scalare σ . A partire da questi, è costruita un'azione che, minimizzata, fornisce le equazioni dei quattro campi. Il nome della teoria deriva proprio dalla sua natura tensoriale, vettoriale e scalare (*Tensor Vector Scalar theory*).

Cominciamo stabilendo alcune relazioni fondamentali tra i campi. Innanzitutto, richiedendo che A_μ sia normalizzato rispetto alla metrica einsteiniana, abbiamo che:

$$g^{\alpha\beta} A_\alpha A_\beta = -1 , \quad (3.1)$$

dove utilizziamo da qui in poi la convenzione di Einstein sugli indici ripetuti. Specificiamo anche che d'ora in poi per A^α intenderemo sempre:

$$A^\alpha = g^{\alpha\beta} A_\beta . \quad (3.2)$$

Costruiamo a questo punto la metrica fisica $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ in TeVeS allungando la metrica di Einstein di un fattore $e^{-2\phi}$ nelle direzioni ortogonali a A^α e riducendola dello stesso fattore nella direzione parallela a A^α :

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\alpha\beta} &= e^{-2\phi}(g_{\alpha\beta} + A_\alpha A_\beta) - e^{2\phi} A_\alpha A_\beta \\ &= e^{-2\phi} g_{\alpha\beta} - 2A_\alpha A_\beta \sinh(2\phi) . \end{aligned} \quad (3.3)$$

Si verifica facilmente, utilizzando la definizione (3.3), che l'inversa della metrica fisica è

$$\tilde{g}^{\alpha\beta} = e^{2\phi} g^{\alpha\beta} + 2A^\alpha A^\beta \sinh(2\phi) . \quad (3.4)$$

Chiamiamo “fisica” la metrica $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ perché è quella rispetto alla quale la materia obbedisce al principio di equivalenza debole; in TeVeS, le geodetiche seguite dalle particelle di prova in caduta libera sono calcolate rispetto a $\tilde{g}_{\alpha\beta}$. Anche la TeVeS, come la MOND, non soddisfa il principio di equivalenza forte (vedi sezione 2.4). In questo caso è ancora più evidente il motivo ed è legato al fatto che vorremmo poter descrivere il lensing gravitazionale senza dover introdurre della materia oscura. Perciò, è necessario che il campo scalare ϕ sia accoppiato alla metrica einsteiniana in modo disforme. Infatti, essendo l'elettromagnetismo di Maxwell invariante per trasformazioni conformi, un accoppiamento conforme produrrebbe in TeVeS lo stesso lensing che si ha in GR senza la materia oscura, e quindi una deflessione non compatibile con i dati sperimentali. In altre parole, con un accoppiamento conforme i fotoni sarebbero insensibili agli effetti del campo ϕ . Il campo vettoriale A_μ serve proprio a rendere disforme l'accoppiamento tra ϕ e $g_{\alpha\beta}$ ed è quindi quello che porta la TeVeS a violare il principio di equivalenza forte.

L'azione S in TeVeS è formata da quattro contributi: $S = S_g + S_s + S_v + S_m$. La parte geometrica S_g è analoga a quella che si ha in GR; indicando con $R_{\alpha\beta}$ il tensore di Ricci Curvatura per la metrica $g_{\alpha\beta}$, abbiamo infatti:

$$S_g = (16\pi G)^{-1} \int g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} (-g)^{-1/2} d^4x , \quad (3.5)$$

dove g indica il determinante di $g_{\alpha\beta}$. L'unica differenza è costituita dalla costante G , che ha le dimensioni della costante di gravitazione universale di Newton, ma per ora ci limiteremo a dire che non coincide con essa; in seguito sarà chiarito questo punto.

Per la parte S_s legata ai campi scalari, introducendo due costanti positive k e ℓ , prendiamo:

$$S_s = -\frac{1}{2} \int [\sigma^2 h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} + \frac{1}{2} G \ell^{-2} \sigma^4 F(kG\sigma^2)] (-g)^{1/2} d^4x, \quad (3.6)$$

dove $h^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - A^\alpha A^\beta$, F è una qualche funzione e da qui in poi intenderemo sempre equivalenti le notazioni $\phi_{,\alpha} = \partial_\alpha \phi$. Dato che ϕ è adimensionale, σ^2 ha le dimensioni di G^{-1} , k è adimensionale e ℓ ha le dimensioni di una lunghezza. Fisicamente, il comportamento di F ci permetterà di recuperare la MOND nel limite non relativistico.

Scriviamo l'azione S_v del quadrivettore nella forma:

$$S_v = -\frac{K}{32\pi G} \int [g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} A_{[\alpha,\mu]} A_{[\beta,\nu]} - 2(\lambda/K)(g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu + 1)] (-g)^{1/2} d^4x, \quad (3.7)$$

dove indichiamo l'antisimmetrizzazione in una coppia di indici con $A_{[\mu} B_{\nu]} = A_\mu B_\nu - A_\nu B_\mu$. λ è un parametro lagrangiano che rafforza il vincolo sulla natura temporale del vettore A_μ e K è una costante adimensionale.

Infine, affinché il principio di equivalenza debole sia valido rispetto alla metrica fisica, prendiamo l'azione materiale S_m nella forma:

$$S_m = \int \mathcal{L}(\tilde{g}_{\mu\nu}, f^\alpha, f^\alpha|_\mu, \dots) (-\tilde{g})^{1/2} d^4x, \quad (3.8)$$

dove f^α sono dei campi generici e con $|$ indichiamo le derivate covarianti fatte rispetto alla metrica fisica $\tilde{g}_{\mu\nu}$. Notiamo che tra i determinanti delle due metriche vale la relazione

$$(-\tilde{g})^{-1/2} = e^{-2\phi} (-g)^{-1/2}, \quad (3.9)$$

che si ricava considerando la contrazione $\tilde{g}^{\mu\nu} g_{\nu\alpha}$, interpretando la stessa come moltiplicazione tra matrici e prendendone il determinante.

Variando l'azione totale S rispetto ai quattro campi, possiamo a questo punto ricavare le equazioni fondamentali della TeVeS. Chiaramente, procedendo con le variazioni bisogna tenere ben presenti le relazioni (3.1)-(3.4) e (3.9).

Variando S rispetto a $g^{\alpha\beta}$, che entra in tutti e quattro i termini costituenti l'azione totale, otteniamo le equazioni di campo di Einstein modificate:

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi G \left[\tilde{T}_{\alpha\beta} + (1 - e^{-4\phi}) A^\mu \tilde{T}_{\mu(\alpha} A_{\beta)} + \tau_{\alpha\beta} \right] + \Theta_{\alpha\beta}, \quad (3.10)$$

dove

$$\tau_{\alpha\beta} = \sigma^2 \left[\phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} g_{\alpha\beta} - A^\mu \phi_{,\mu} \left(A_{(\alpha} \phi_{,\beta)} - \frac{1}{2} A^\nu \phi_{,\nu} g_{\alpha\beta} \right) \right] - \frac{1}{4} G \ell^{-2} \sigma^4 F(kG\sigma^2) g_{\alpha\beta} \quad (3.11)$$

$$\Theta_{\alpha\beta} = K \left(g^{\mu\nu} A_{[\mu,\alpha]} A_{[\nu,\beta]} - \frac{1}{4} g^{\sigma\tau} g^{\mu\nu} A_{[\sigma,\mu]} A_{[\tau,\nu]} g_{\alpha\beta} \right) - \lambda A_\alpha A_\beta. \quad (3.12)$$

Abbiamo indicato con $G_{\alpha\beta}$ il tensore di Einstein della metrica $g_{\alpha\beta}$, con $\tilde{T}_{\alpha\beta}$ il tensore energia-impulso definito come in GR con la metrica fisica sostituita a quella einsteiniana e indichiamo la simmetrizzazione rispetto a una coppia di indici con $A_{(\alpha}B_{\beta)} = A_\alpha B_\beta + A_\beta B_\alpha$.

Variando S rispetto al campo scalare σ , che partecipa solo attraverso S_s , otteniamo una relazione tra σ e $\phi_{,\alpha}$:

$$-kG\sigma^2 F(kG\sigma^2) - \frac{1}{2}(kG\sigma^2)^2 F' = k\ell^2 h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} , \quad (3.13)$$

dove abbiamo sottinteso $F' = dF(\zeta)/d\zeta$ e $\zeta = kG\sigma^2$. Per variare S rispetto a ϕ , ricordiamo che ϕ entra nell'azione totale attraverso S_s e S_m , in quest'ultima tramite la metrica fisica. Quindi, integrando per parti e sfruttando la simmetria di $h^{\alpha\beta}$, abbiamo:

$$[\sigma^2 h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha}]_{;\beta} = [g^{\alpha\beta} + (1 + e^{-4\phi})A^\alpha A^\beta] \tilde{T}_{\alpha\beta} , \quad (3.14)$$

dove con $;$ indichiamo la derivata covariante nella metrica einsteiniana. Vista l'eq. (3.13), possiamo pensare alla (3.14) come a un'equazione unicamente per ϕ , con $\tilde{T}_{\alpha\beta}$ come sorgente. Supponendo di definire la funzione $\zeta = \zeta(y)$, con $y = k\ell^2 h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta}$, tramite la relazione:

$$-\zeta F(\zeta) - \frac{1}{2} \zeta^2 F'(\zeta) = y , \quad (3.15)$$

possiamo riscrivere l'eq. (3.14) in questo modo:

$$[\zeta (k\ell^2 h^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu}) h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha}]_{;\beta} = kG [g^{\alpha\beta} + (1 + e^{-4\phi})A^\alpha A^\beta] \tilde{T}_{\alpha\beta} . \quad (3.16)$$

Variando S rispetto ad A_α bisogna ovviamente variare S_v e in piú S_s e S_m , nelle quali il campo vettoriale partecipa attraverso $h^{\alpha\beta}$ e $\tilde{g}^{\alpha\beta}$. Ricaviamo cosí:

$$KA^{[\alpha;\beta]}_{;\beta} + \lambda A^\alpha + 8\pi G\sigma^2 A^\beta \phi_{,\beta} g^{\alpha\gamma} \phi_{,\gamma} = 8\pi G(1 - e^{-4\phi})g^{\alpha\mu} A^\beta \tilde{T}_{\mu\beta} . \quad (3.17)$$

Contraendo quest'ultima equazione con A_α possiamo quindi ricavare il parametro lagrangiano λ ; risostituendolo nella stessa eq. (3.17) otteniamo:

$$\begin{aligned} & K (A^{[\alpha;\beta]}_{;\beta} + A^\alpha A_\gamma A^{[\gamma;\beta]}_{;\beta}) + 8\pi G\sigma^2 [A^\beta \phi_{,\beta} g^{\alpha\gamma} \phi_{,\gamma} + A^\alpha (A^\beta \phi_{,\beta})^2] \\ & = 8\pi G(1 - e^{-4\phi}) [g^{\alpha\mu} A^\beta \tilde{T}_{\mu\beta} + A^\alpha A^\beta A_\gamma \tilde{T}_{\gamma\beta}] . \end{aligned} \quad (3.18)$$

È interessante notare che questa equazione ha solo tre componenti indipendenti, dato che entrambi i membri sono ortogonali a A_α . Di conseguenza, essa determina solo tre componenti del vettore A^α , mentre la quarta è fissata dalla condizione (3.1).

Ora che abbiamo mostrato la struttura portante della TeVeS, consideriamo alcuni casi limite e vediamo quale tipo di fisica recuperiamo.

3.2 Il limite relativistico

Cominciamo analizzando i casi limite in cui TeVeS recupera la Relatività Generale. Bekenstein ha notato che questo succede quando i tre parametri principali, cioè k , ℓ e K , soddisfano le relazioni $k \rightarrow 0$, $\ell \propto k^{-3/2}$ e $K \propto k$; sotto queste condizioni, TeVeS recupera GR in un universo in cui vale la metrica di Friedmann-Robertson-Walker (FRW) e anche in sistemi quasistatici localizzati, come il sistema solare, in cui lo spaziotempo può essere pensato come asintoticamente piatto. Milgrom, invece, ha notato un caso molto più generale: TeVeS recupera GR nei limiti $K \rightarrow 0$ e $\ell \rightarrow \infty$, senza ulteriori condizioni, in particolare indipendentemente dalla metrica $g_{\alpha\beta}$.

Specifichiamo che ogni qualvolta dovremo utilizzare una sostanza materiale, assumeremo che questa sia un fluido ideale. Utilizzeremo quindi un tensore energia-impulso definito come:

$$\tilde{T}_{\alpha\beta} = \tilde{\rho}\tilde{u}_\alpha\tilde{u}_\beta + \tilde{p}(\tilde{g}_{\alpha\beta} + \tilde{u}_\alpha\tilde{u}_\beta) \quad (3.19)$$

dove ovviamente $\tilde{\rho}$ e \tilde{p} sono rispettivamente la densità di energia e la pressione proprie del fluido materiale e \tilde{u}_α la sua quadrivelocità, tutte e tre espresse nella metrica fisica. In tutti i casi in cui, per certe ragioni di simmetria, \tilde{u}_α risulta collineare con A_α , l'espressione (3.16) assume una forma più semplice e interessante. Infatti, richiedendo la normalizzazione $\tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{u}_\alpha\tilde{u}_\beta = -1$, deve valere la relazione $\tilde{u}_\alpha = e^\phi A_\alpha$. Ne segue che:

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} + \tilde{u}_\alpha\tilde{u}_\beta = e^{-2\phi}(g_{\alpha\beta} + A_\alpha A_\beta) - e^{2\phi}A_\alpha A_\beta + e^{2\phi}A_\alpha A_\beta = e^{-2\phi}(g_{\alpha\beta} + A_\alpha A_\beta). \quad (3.20)$$

Sostituendo questa relazione in $\tilde{T}_{\alpha\beta}$, possiamo esplicitare il membro destro dell'espressione (3.16) ottenendo la forma semplificata:

$$[\zeta(k\ell^2 h^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu})h^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}]_{;\beta} = kG(\tilde{\rho} + 3\tilde{p})e^{-2\phi} \quad (3.21)$$

che ci sarà utile sia in nello spaziotempo FRW che nei sistemi quasistatici.

3.2.1 Spaziotempo FRW

Riportiamo la metrica FRW nella forma:

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -dt^2 + a(t)^2[d\chi^2 + f(\chi)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)], \quad (3.22)$$

dove, come noto, abbiamo che $f(\chi) = \sin\chi$, χ , $\sinh\chi$ per universi chiuso, piatto e aperto rispettivamente.

Assumiamo che i campi ϕ , σ e A^α godano delle simmetrie che caratterizzano lo spaziotempo FRW. Supponiamo quindi che questi tre campi dipendano solo dalla coordinata t e in particolare che A^α punti nella direzione temporale, cioè $A^\alpha = \delta_t^\alpha$. In questo caso

quindi vale che $\tilde{u}_\alpha = e^\phi A_\alpha$ e, sviluppando il termine $h^{\alpha\beta}$ e utilizzando la metrica (3.22), l'eq. (3.21) diventa:

$$a^{-3} \partial_t [a^3 \zeta (-2k\ell^2 \dot{\phi}^2) \dot{\phi}] = -\frac{1}{2} k G (\tilde{\rho} + 3\tilde{p}) e^{-2\phi}, \quad (3.23)$$

dove con un punto indichiamo una derivata parziale nella coordinata t . Ricaviamo perciò l'integrale primo:

$$\zeta (-2k\ell^2 \dot{\phi}^2) \dot{\phi} = -\frac{k}{2a^3} \int_0^t G (\tilde{\rho} + 3\tilde{p}) e^{-2\phi} a^3 dt. \quad (3.24)$$

Nel caso in cui $a \rightarrow 0$, il membro destro si comporta come $k(\tilde{\rho} + 3\tilde{p})e^{-2\phi}t$ e osserviamo anche che per $k \rightarrow 0$, $\ell \propto k^{-3/2}$, l'argomento di ζ è costante e $\dot{\phi}$ si comporta come k . Quindi, avendo $\dot{\phi} \sim k$, possiamo supporre che ϕ sia di ordine $\mathcal{O}(k)$. Inoltre, dato che l'argomento di ζ è costante, dobbiamo avere anche che $\zeta = kG\sigma^2 = \text{cost.}$, per cui σ^2 è di ordine $\mathcal{O}(k^{-1})$.

Controlliamo ora che l'ipotesi iniziale $A^\alpha = \delta_t^\alpha$ sia ammissibile, cioè sia soluzione dell'eq. (3.17). Abbiamo che $A^{[\alpha;\beta]} = 0$ e, per $\tilde{u}_\alpha = e^\phi A_\alpha$, risulta $A^\beta \tilde{T}_{\alpha\beta} = -e^{2\phi} \tilde{\rho} A_\alpha$. Quindi le componenti spaziali dell'eq. (3.17) si annullano e rimane solo quella temporale, che fissa il parametro lagrangiano:

$$\lambda = 8\pi G [\sigma^2 \dot{\phi}^2 - 2\tilde{\rho} \sinh(2\phi)]. \quad (3.25)$$

Troviamo quindi che anche λ è di ordine $\mathcal{O}(k)$.

Osservando invece le equazioni di Einstein modificate (3.10)-(3.12), notiamo che nei limiti $k \rightarrow 0$, $\ell \propto k^{-3/2}$, $K \propto k$, i termini $\tau_{\alpha\beta}$ e $\Theta_{\alpha\beta}$ sono di ordine $\mathcal{O}(k)$. Dato che tale è anche la differenza tra $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ e $g_{\alpha\beta}$, abbiamo che:

$$\tilde{G}_{\alpha\beta} = 8\pi G \tilde{T}_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(k), \quad (3.26)$$

di modo che ogni modello cosmologico basato sulle equazioni di TeVeS differisce da quello corrispondente in GR per termini $\mathcal{O}(k)$.

3.2.2 Sistemi quasistatici localizzati

Per sistemi come il nostro sistema solare, possiamo considerare una metrica statica del tipo:

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{tt}(x^k) dt^2 + g_{ij}(x^k) dx^i dx^j. \quad (3.27)$$

Per quasistatico, quindi, intendiamo che possiamo trascurare le derivate temporali rispetto a quelle spaziali; supponiamo inoltre che non ci siano flussi di energia. Cerchiamo una soluzione delle equazioni scalari e vettoriali con le condizioni all'infinito spaziale ricavate dal modello cosmologico in cui è immerso il sistema localizzato; all'infinito spaziale dobbiamo cioè avere $\phi \rightarrow \text{cost.}$ e $A^\alpha \rightarrow \delta_t^\alpha$.

Cominciamo mostrando che $A^\alpha = N\xi^\alpha$ è una soluzione accettabile, dove $\xi^\alpha = \delta_t^\alpha$ è il vettore di Killing associato alla metrica (3.27) e N è una costante di normalizzazione. Consideriamo l'equazione vettoriale (3.18) e in particolare il termine $g^{\alpha\mu}A^\beta\tilde{T}_{\mu\beta} + A^\alpha A^\beta A^\gamma\tilde{T}_{\gamma\beta}$. La componente $\alpha = t$ si annulla identicamente con la scelta fatta di A^α , mentre le componenti spaziali risultano proporzionali a \tilde{T}_{jt} e quindi si annullano anch'esse perché abbiamo supposto di non avere flussi energetici. Passando invece al lato sinistro dell'eq. (3.18), si può mostrare che le componenti spaziali si annullano e che quelle temporali sono nulle per la normalizzazione del vettore A^α .

Considerando ora l'equazione scalare (3.21), per $k \rightarrow 0$ rimane ovviamente che $(\zeta h^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha})_{;\beta} = 0$. Moltiplicando per $\phi(-g)^{-1/2}$, che torna utile per sfruttare le condizioni al contorno effettuando un'integrazione per parti, risulta che:

$$\int \zeta g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}(-g)^{1/2}d^3x = 0. \quad (3.28)$$

Poiché g^{ij} è definito positivo e per definizione anche ζ è positiva, l'equazione precedente vale solo se $\phi = \text{cost.}$ dappertutto. Ma, dato che nella sezione precedente 3.2.1 abbiamo trovato che ϕ è di ordine $\mathcal{O}(k)$, dobbiamo avere che, per $k \rightarrow 0$, $\phi \rightarrow 0$ dappertutto.

Con questi risultati, è possibile quindi ottenere dall'eq. (3.21) che $\phi = \mathcal{O}(k)$ anche per la metrica (3.27). Ricordando i limiti $k \rightarrow 0$, $\ell \propto k^{-3/2}$, $K \propto k$, passando alle equazioni gravitazionali (3.10)-(3.12) si trova che $\tau_{\alpha\beta} = \mathcal{O}(k)$ e $\Theta_{\alpha\beta} = \mathcal{O}(k) + \mathcal{O}(K)$. Dato che la differenza tra $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ e $g_{\alpha\beta}$ è di ordine $\mathcal{O}(k)$, abbiamo che anche per i sistemi quasistatici localizzati TeVeS recupera la Relatività Generale, questa volta a meno di ordini $\mathcal{O}(k)$ e $\mathcal{O}(K)$:

$$\tilde{G}_{\alpha\beta} = 8\pi G\tilde{T}_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(k) + \mathcal{O}(K). \quad (3.29)$$

3.2.3 Limite generico

I casi analizzati precedentemente sono stati proposti da Bekenstein. Milgrom ha notato che esiste un ulteriore caso limite, più generico dei due precedenti, in cui TeVeS recupera GR. Effettuando le sostituzioni $\phi \mapsto \phi_* = \ell\phi$, $\sigma \mapsto \sigma_* = \sigma\sqrt{k}$, $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ e S_s diventano:

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = e^{-2\phi_*/\ell}g_{\alpha\beta} - 2A_\alpha A_\beta \sinh(2\phi_*/\ell) \quad (3.30)$$

$$S_s = -\frac{1}{2k^2\ell^2} \int [k\sigma_*^2 h^{\alpha\beta}\phi_{*,\alpha}\phi_{*,\beta} + \frac{1}{2}G\sigma_*^4 F(G\sigma_*^2)](-g)^{1/2}d^4x. \quad (3.31)$$

Per recuperare GR basta considerare $K \rightarrow 0$, $\ell \rightarrow \infty$. Infatti, per $\ell \rightarrow \infty$ l'azione scalare sparisce e con lei anche ϕ_* . Per $K \rightarrow 0$, invece, nell'azione vettoriale (3.7) rimane solo il termine in λ . L'equazione gravitazionale diventa perciò:

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi G\tilde{T}_{\alpha\beta} - \lambda A_\alpha A_\beta. \quad (3.32)$$

Ma dall'equazione vettoriale (3.17) abbiamo che $\lambda \rightarrow 0$ per $\ell \rightarrow 0$ e poiché le metriche coincidono nel limite considerato:

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = e^{-2\phi_*/\ell}(g_{\alpha\beta} + A_\alpha A_\beta) - e^{2\phi_*/\ell} A_\alpha A_\beta \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} g_{\alpha\beta} , \quad (3.33)$$

recuperiamo esattamente la Relatività Generale:

$$\tilde{G}_{\alpha\beta} = 8\pi G \tilde{T}_{\alpha\beta} . \quad (3.34)$$

3.3 I limiti non relativistici

Per studiare i limiti non relativistici della TeVeS, abbiamo bisogno di espressioni esplicite per le funzioni $F(\zeta)$ e $y(\zeta)$, che sono legate dalla relazione (3.15). Bekenstein, data l'ampia libertà nella scelta di queste funzioni, ha deciso di prendere $y(\zeta)$ nella forma:

$$y = \frac{3}{4} \frac{\zeta^2(\zeta - 2)^2}{1 - \zeta} . \quad (3.35)$$

Ricordando che ζ è positiva, y risulta definita nel semiasse reale positivo e $y \rightarrow +\infty$ per $\zeta \rightarrow 1^-$; è positiva per $\zeta < 1$ e negativa per $\zeta > 1$. Notiamo anche che per piccoli y , all'ordine più basso abbiamo:

$$\zeta(y) \simeq \left(\frac{y}{3}\right)^{1/2} . \quad (3.36)$$

Fissata $y(\zeta)$, risolvendo l'eq. (3.15) otteniamo:

$$F(\zeta) = \frac{3}{8} \frac{\zeta(4 + 2\zeta - 4\zeta^2 + \zeta^3) + 2 \ln(1 - \zeta)^2}{\zeta^2} , \quad (3.37)$$

dove abbiamo trascurato la costante di integrazione.

Con queste scelte di $y(\zeta)$ e $F(\zeta)$, consideriamo nuovamente un sistema quasistatico, interessandoci al suo comportamento in regime di potenziale debole per studiarne il comportamento non relativistico. Assumiamo che la metrica $g_{\alpha\beta}$ sia approssimativamente piatta e che, quindi, come trovato nella sezione 3.2.2, valga $|\phi| \ll 1$.

Indicando con V il potenziale newtoniano generato dal contenuto energetico del membro destro dell'eq. (3.10), la linearizzazione al primo ordine delle equazioni gravitazionali porta al risultato:

$$g_{tt} = -(1 + 2V) . \quad (3.38)$$

Utilizzando la soluzione per A^α già trovata nella sezione 3.2.2, dobbiamo avere che $A_\alpha = g_{\alpha\beta} A^\beta = -(1 + V)\delta_{t\alpha}$. Dalla definizione della metrica fisica (3.3) segue immediatamente che al primo ordine in V e ϕ abbiamo:

$$\tilde{g}_{tt} = -(1 + 2V + 2\phi) . \quad (3.39)$$

Notiamo quindi che in TeVeS il potenziale totale Φ che governa il moto non relativistico è dato da

$$\Phi = V + \phi \quad (3.40)$$

e che nei punti dello spazio in cui $\phi \rightarrow 0$ la metrica fisica corrisponde alla metrica $\eta_{\alpha\beta}$ di Minkowski.

Cerchiamo ora che relazioni sussistano tra Φ , ϕ , e Φ_N , dove con Φ_N indichiamo il potenziale newtoniano generato dalla densità di massa $\tilde{\rho}$ secondo un'equazione di Poisson come la (2.18) ma con G una generica costante di gravitazione. Utilizziamo l'eq. (3.21); per le considerazioni fatte, possiamo trascurare le derivate temporali e approssimare $g_{\alpha\beta}$ con $\eta_{\alpha\beta}$. In più, per le condizioni su ϕ abbiamo che $e^{-2\phi} \rightarrow 1$ e dato che consideriamo un sistema quasistatico possiamo trascurare \tilde{p} in confronto a $\tilde{\rho}$. Ne segue che:

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\zeta \left(k\ell^2 (\vec{\nabla}\phi)^2 \right) \vec{\nabla}\phi \right] = kG\tilde{\rho}, \quad (3.41)$$

che è formalmente analoga all'eq. (2.20) di AQUAL. Dal confronto con l'eq. (2.18) di Poisson abbiamo anche che

$$k^{-1}\zeta|\vec{\nabla}\phi| = \mathcal{O}(|\vec{\nabla}\Phi_N|). \quad (3.42)$$

Siamo in grado adesso di mostrare che $V = C\Phi_N$ con $C = \text{cost.} \sim 1$. Avendo scelto F nella forma data da (3.37), per $0 < \zeta < 1$ risulta che F e la sua derivata prima sono negative; perciò, dalla (3.15) abbiamo che $\zeta|F| < y$. Quindi, ragionando sulle eq. (3.10)-(3.11), è possibile mostrare che in $\tau_{\alpha\beta}$ i termini derivativi in ϕ dominano quelli in F e, dalla eq. (3.42), risultano di ordine $8\pi k\zeta^{-1}(\vec{\nabla}\Phi_N)^2$. Possiamo quindi trascurare $\tau_{\alpha\beta}$ perché siamo interessati ai termini di ordine $\mathcal{O}(\Phi_N)$. Per quanto riguarda $\Theta_{\alpha\beta}$, i termini $A_{[\alpha,\beta]}^2$ risultano proporzionali a $(C\vec{\nabla}\Phi_N)^2$ e possiamo trascurarli. Perciò, in campo debole le componenti spazio-temporali e spaziali-spaziali dell'equazione gravitazionale modificata sono identiche a quelle di Einstein. Questo non è vero invece per la componente temporale-temporale, poiché in questo caso, esplicitando $\tilde{T}_{\alpha\beta}$ nell'eq. (3.17) e considerando le condizioni di quasistaticità, il parametro lagrangiano, che per le altre componenti si annulla, diventa:

$$\lambda = KA_\alpha A^{[\alpha;\beta]}_{;\beta} - 16\pi G\tilde{\rho} \sinh(2\phi). \quad (3.43)$$

In particolare, il primo termine può essere riscritto come $KA_t A^{[t;\beta]}_{;\beta} = -KC\nabla^2\Phi_N + KC^2\mathcal{O}(\vec{\nabla}\Phi_N^2)$. L'equazione di Poisson ci permette di riscrivere il parametro lagrangiano, tralasciando il termine proporzionale a $C^2\mathcal{O}(\vec{\nabla}\Phi_N^2)$, nel seguente modo:

$$\lambda = -8\pi G[KC/2 + 2\sinh(2\phi_c)]\tilde{\rho}, \quad (3.44)$$

dove abbiamo esplicitato la condizione $\phi \rightarrow \phi_c$. Sostituendo λ nell'eq. (3.12), la componente temporale-temporale dell'eq. (3.10) diventa:

$$G_{tt} = 8\pi G \left[e^{-2\phi_c} + \frac{KC}{2} \right] \tilde{\rho}. \quad (3.45)$$

Dunque, dalla linearizzazione della componente G_{tt} delle equazioni gravitazionali modificate troviamo la relazione tra V e Φ_N :

$$V = \left(e^{-2\phi_c} + \frac{KC}{2} \right) \Phi_N, \quad (3.46)$$

che verifica l'ipotesi iniziale $V = C\Phi_N$ per $K \ll 1$. Notiamo anche che $C = (1 - K/2)^{-1}e^{-2\phi_c}$. Sviluppando l'esponenziale al prim'ordine in ϕ_c , sostituiamo d'ora in poi C con $\Xi = 1 + K/2 - 2\phi_c$ e riscriviamo quindi il potenziale (3.40) che governa il moto in campo debole come:

$$\Phi = \Xi\Phi_N + \phi, \quad (3.47)$$

a meno di correzioni di ordine $\mathcal{O}(\Phi_N^2)$.

Ora che disponiamo di una relazione che quantifica la differenza tra TeVeS e GR in regime non relativistico, possiamo analizzare le situazioni in cui recuperiamo le dinamiche di Milgrom e Newton.

3.3.1 MOND in simmetria sferica

Mettiamoci in condizioni di simmetria sferica, così da poter applicare il teorema di Gauss all'eq. (3.41), considerando $\tilde{\rho}$ come densità di massa generante il potenziale gravitazionale. Ne deduciamo che:

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{k}{4\pi\zeta}\vec{\nabla}\Phi_N. \quad (3.48)$$

Eliminando ϕ tramite l'eq. (3.47):

$$\mu\vec{\nabla}\Phi = \vec{\nabla}\Phi_N, \quad (3.49)$$

dove abbiamo identificato

$$\mu = \left(\Xi + \frac{k}{4\pi\zeta} \right)^{-1}. \quad (3.50)$$

Considerando ora $\zeta \ll 1$, dalla (3.36) abbiamo $\zeta(k\ell^2|\vec{\nabla}\phi|^2) = (k/3)^{1/2}\ell|\vec{\nabla}\phi|$ e, sostituendo

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{k}{4\pi\zeta}[\Xi + (k/4\pi\zeta)]^{-1}\vec{\nabla}\Phi, \quad (3.51)$$

che si ricava dalle (3.48)-(3.49), otteniamo un'equazione quadratica in ζ . Definendo una scala di accelerazione¹

$$a_0 = \frac{(3k)^{1/2}c^2}{4\pi\Xi\ell}, \quad (3.52)$$

¹Solo in questo caso utilizziamo le unità di misura non naturali per rendere esplicita la dimensione di a_0 , indicando con c la velocità della luce nel vuoto.

la soluzione è data da:

$$\zeta = \frac{k}{8\pi\Xi} \left(-1 + \left(1 + 4|\vec{\nabla}\Phi|/a_0 \right)^{1/2} \right) \quad (3.53)$$

e rileggiamo la condizione $\zeta \ll 1$ come $|\vec{\nabla}\Phi| \ll (4\pi/k)^2 a_0$. Sostituendo l'espressione di ζ appena trovata nella (3.50), otteniamo:

$$\mu = \frac{1}{\Xi} \frac{-1 + \left(1 + 4|\vec{\nabla}\Phi|/a_0 \right)^{1/2}}{1 + \left(1 + 4|\vec{\nabla}\Phi|/a_0 \right)^{1/2}}. \quad (3.54)$$

Possiamo identificare questa funzione con la μ della formula della MOND (2.16), poiché, per $|\vec{\nabla}\Phi| \ll a_0$, consistente con le restrizioni già indicate, all'ordine più basso l'eq. (3.54) si approssima come:

$$\mu = \frac{|\vec{\nabla}\Phi|}{a_0}, \quad (3.55)$$

mostrando quindi il comportamento richiesto da Milgrom per la funzione di interpolazione.

In condizioni di simmetria sferica, TeVeS recupera dunque la dinamica modificata di Milgrom e il suo successo a livello galattico ed extragalattico. L'espressione esplicita per μ data dalla (3.54) non è da intendersi come una predizione teorica della funzione di interpolazione. Infatti, come già sottolineato in precedenza, l'espressione precisa di μ non è fondamentale per predire in dettaglio le curve di rotazione; in più, come vedremo a breve, in situazioni senza simmetrie recupereremo la dinamica di Milgrom senza però ottenere μ in modo esplicito come in questo caso. Prima di affrontare questa situazione, rimaniamo in condizione di simmetria sferica e vediamo cosa succede per $|\vec{\nabla}\Phi| \gg a_0$.

3.3.2 Dinamica newtoniana in simmetria sferica

Abbiamo visto che la funzione $y(\zeta)$ scelta da Bekenstein presenta una singolarità in $\zeta = 1$; in particolare, per $\zeta \rightarrow 1^-$, y diverge positivamente. La divergenza di y implica che $|\vec{\nabla}\phi| \rightarrow \infty$ e dalle relazioni (3.48)-(3.50) abbiamo anche che $|\vec{\nabla}\Phi| \rightarrow \infty$ e $\mu \rightarrow (\Xi + k/4\pi)^{-1}$. Dalla relazione (3.49) notiamo quindi che per $|\vec{\nabla}\Phi|/a_0 \gg 1$ il potenziale Φ si riduce a quello newtoniano Φ_N se definiamo la costante di gravitazione di Newton G_N come:

$$G_N = \left(\Xi + \frac{k}{4\pi} \right) G \quad (3.56)$$

e operiamo la sostituzione di G con G_N nella medesima (3.49). In regime non relativistico, quindi, TeVeS recupera la dinamica newtoniana riscaldando la costante di gravitazione di

Newton. Abbiamo ora chiarito perché nelle azioni (3.5)-(3.7) non abbiamo identificato la costante di gravitazione G con quella di Newton.

È interessante notare che possiamo stimare di quanto la dinamica governata dal potenziale Φ si discosti da quella newtoniana per valori grandi ma finiti del rapporto $|\vec{\nabla}\Phi|/a_0$. Infatti, sviluppando l'eq. (3.35) per $\zeta \rightarrow 1^-$ all'ordine più basso, otteniamo:

$$y \simeq \frac{3}{4(1-\zeta)}. \quad (3.57)$$

Utilizzando le relazioni (3.48)-(3.49) troviamo poi che:

$$y \simeq \frac{k^3 \ell^2}{16\pi^2} |\vec{\nabla}\Phi|^2 \quad (3.58)$$

a meno di correzioni di ordine superiore a $k/4\pi$ e approssimando Ξ con l'unità. Dalle due equazioni precedenti ricaviamo una forma approssimata di ζ :

$$\zeta \simeq 1 - \frac{64\pi^4}{k^4} \frac{a_0^2}{|\vec{\nabla}\Phi|^2} \quad (3.59)$$

e rileggiamo il limite $\zeta \rightarrow 1^-$ con la condizione $|\vec{\nabla}\Phi|/a_0 \gg 8\pi^2 k^{-2}$. Utilizzando l'eq. (3.50) e la definizione (3.56) di G_N , troviamo:

$$\mu \simeq \frac{G}{G_N} \left(1 - \frac{16\pi^3}{k^3} \frac{a_0^2}{|\vec{\nabla}\Phi|^2} \right). \quad (3.60)$$

Il termine tra parentesi è quello che misura le correzioni apportate da TeVeS in regime non relativistico alla dinamica newtoniana. Generalmente, all'interno del sistema solare queste sono troppo deboli per essere attualmente apprezzate sperimentalmente. Per l'orbita terrestre, infatti, il rapporto tra il potenziale corretto Φ e quello newtoniano generati dal Sole è dell'ordine di 10^{-9} . Non è escluso però che per regioni più esterne si possano ottenere dei riscontri sperimentali: per Saturno la correzione diventa già più significativa, con un rapporto dell'ordine di 10^{-5} . Questo rende possibile studiare le anomalie riscontrate dalle sonde Pioneer 10 e 11 e mettere quindi alla prova il limite non relativistico di TeVeS. Come abbiamo visto, i risultati ottenuti in questo regime dipendono fortemente dalla scelta delle funzioni $y(\zeta)$ e $F(\zeta)$, per cui in ultima analisi lo studio delle anomalie delle sonde Pioneer può portare informazioni sulla forma di queste funzioni.

3.3.3 Caso generale

Per sistemi in generale non simmetrici, la soluzione dell'eq. (3.41) diventa:

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{k}{4\pi\zeta} (\vec{\nabla}\Phi_N + \vec{\nabla} \times \vec{h}), \quad (3.61)$$

dove \vec{h} è un campo vettoriale determinato dalla condizione $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = 0$. Per il teorema di Gauss, a grandi distanze, ad esempio all'esterno di una galassia, \vec{h} va a zero più rapidamente di r^{-2} e $\vec{\nabla} \times \vec{h}$ più di r^{-3} . A grandi distanze dal centro di una galassia ci aspettiamo quindi che le trattazioni e i risultati delle due sezioni precedenti valgano ancora anche nel caso di galassie a simmetria non sferica. All'interno di queste, invece, $\vec{\nabla} \times \vec{h}$ non può essere trascurato e bisogna risolvere l'eq. (3.61) per via numerica.

Ovviamente, i sistemi di elevata densità materiale sono in pieno regime newtoniano e possono essere descritti senza ricorrere al campo \vec{h} . Le correzioni di Milgrom diventano significative solo a grandi distanze, dove però abbiamo appena visto che \vec{h} diventa trascurabile. In questo caso quindi sia il limite newtoniano che quello di MOND possono essere descritti come nelle situazioni di simmetria sferica.

Abbiamo così verificato che in generale TeVeS recupera nel limite non relativistico sia la dinamica di Newton che quella di Milgrom e fornisce degli ottimi strumenti per verificare i comportamenti non newtoniani di un sistema.

3.4 Lensing gravitazionale per sistemi simmetrici

Ora che disponiamo di una teoria relativistica che racchiude la fenomenologia MOND, affrontiamo la questione del lensing gravitazionale, che abbiamo sfiorato nella sezione 2.3. La differenza tra le deflessioni osservate per certi corpi materiali e quelle attese in base alla distribuzione nota di materia è stata uno dei problemi che ha avvalorato l'ipotesi dell'esistenza di materia oscura. La questione non può essere affrontata correttamente con la MOND e vorremmo quindi che la TeVeS fosse in grado di predire il lensing gravitazionale osservato in regime di basse accelerazioni senza introdurre più materia di quella già osservata. Di seguito analizziamo quindi il caso del lensing gravitazionale, limitandoci a considerare quello prodotto da una distribuzione di massa a simmetria sferica.

Lavorando in coordinate polari, consideriamo una metrica einsteiniana $g_{\alpha\beta}$ a simmetria sferica nella forma:

$$g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = -e^\nu dt^2 + e^\varsigma [d\varrho^2 + \varrho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)] , \quad (3.62)$$

dove sottintendiamo $\nu = \nu(\varrho)$ e $\varsigma = \varsigma(\varrho)$. Dalla stazionarietà della metrica segue che $A^\alpha = N\xi^\alpha$; la condizione (3.1) ci porta alla conclusione che

$$A^\alpha = (e^{-\nu/2}, 0, 0, 0) . \quad (3.63)$$

Di conseguenza, da un calcolo diretto della metrica fisica (3.3) troviamo che questa si ottiene da quella einsteiniana operando le sostituzioni $e^\nu \mapsto e^{\nu+2\phi}$ e $e^\varsigma \mapsto e^{\varsigma-2\phi}$.

Consideriamo ora un raggio luminoso che per semplicità supporremo propagarsi sul piano equatoriale della metrica, cioè con $\theta = \pi/2$ e $d\theta = 0$. Ne segue che la quadrivelocità \dot{x}^α del raggio luminoso soddisfa la relazione:

$$-e^{\nu+2\phi} \dot{t}^2 + e^{\varsigma-2\phi} (\dot{\varrho}^2 + \varrho^2 \dot{\varphi}^2) = 0 . \quad (3.64)$$

È evidente quindi che il moto del raggio luminoso è governato dalle leggi di conservazione $e^{\nu+2\phi}\dot{t} = E$ e $e^{-\varsigma-2\phi}\varrho^2\dot{\phi} = L$, con E, L costanti caratteristiche del raggio. Possiamo quindi utilizzare queste due leggi per eliminare \dot{t} e $\dot{\phi}$ dall'eq. (3.64) e, riscrivendo $\dot{\varrho}$ come $\dot{\varrho} = (d\varrho/d\varphi)\dot{\varphi}$, otteniamo:

$$-e^{-\nu-2\phi} + (b/\varrho)^2 e^{-\varsigma+2\phi} [\varrho^{-2}(d\varrho/d\varphi)^2 + 1] = 0, \quad (3.65)$$

dove abbiamo definito $b = L/E$. Notiamo che b è il parametro d'urto del raggio rispetto al centro della distribuzione di massa (per verificarlo basta andare all'infinito spaziale, dove la metrica (3.62) tende a quella di Minkowski). Risolvendo ora in φ l'eq. (3.65), otteniamo:

$$\varphi = \int_{-\infty}^{\varrho} \left[e^{\varsigma-\nu-4\phi} \left(\frac{\varrho}{b} \right)^2 - 1 \right]^{-1/2} \frac{d\varrho}{\varrho}. \quad (3.66)$$

In assenza di deflessione, avremmo che φ varierebbe tra 0, quando il raggio di luce si trova a $-\infty$, e π , quando si trova a $+\infty$, e il moto avverrebbe quindi su una linea retta. In presenza di deflessione, invece, abbiamo che all'infinito spaziale la traiettoria del raggio luminoso forma un angolo $\Delta\varphi/2$ con la linea retta in assenza di deflessione e possiamo quindi quantificare l'angolo di deflessione totale come:

$$\Delta\varphi = 2 \int_b^{\infty} \left[e^{\varsigma-\nu-4\phi} \left(\frac{\varrho}{b} \right)^2 - 1 \right]^{-1/2} \frac{d\varrho}{\varrho} - \pi. \quad (3.67)$$

Per risolvere questo integrale, sfruttiamo la debolezza del campo extragalattico e supponiamo quindi che $\nu, \varsigma, \phi \ll 1$. Sviluppando l'esponenziale al primo ordine, possiamo quindi riscrivere l'integrale (3.67) come:

$$\Delta\varphi = -4 \frac{\partial}{\partial\alpha} \int_{b\sqrt{\alpha}}^{\infty} \left[(1 + \varsigma - \nu - 4\phi) \left(\frac{\varrho}{b} \right)^2 - \alpha \right]^{1/2} \frac{d\varrho}{\varrho} \Big|_{\alpha=1} - \pi. \quad (3.68)$$

In questo modo possiamo sviluppare con Taylor il termine $[(1 + \varsigma - \nu - 4\phi)\varrho^2/b^2 - \alpha]^{1/2}$ per $\varsigma - \nu - 4\phi \ll 1$ al primo ordine e dividere l'integrale in due termini. Uno si calcola direttamente e il risultato cancella il π in (3.68), mentre l'altro ci permette di riscrivere (3.68) come:

$$\Delta\varphi = -\frac{2}{b} \frac{\partial}{\partial\alpha} \int_{b\sqrt{\alpha}}^{\infty} \frac{(\varsigma - \nu - 4\phi)\varrho d\varrho}{(\varrho^2 - \alpha b^2)^{1/2}} \Big|_{\alpha=1}. \quad (3.69)$$

Integrando per parti, nel limite $\varrho \rightarrow \infty$ il termine integrato diventa indipendente da α e quindi si annulla con la derivazione. Introducendo le coordinate cartesiane, in particolare sostituendo $x = \pm(\varrho^2 - b^2)^{1/2}$, rimane:

$$\Delta\varphi = \frac{b}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu' - \varsigma' + 4\phi'}{\varrho} dx, \quad (3.70)$$

dove con $'$ indichiamo una derivata fatta rispetto a ϱ .

A questo punto, se volessimo calcolare il lensing nel paradigma della Relatività Generale, porremmo $\phi = 0$ e calcoleremmo ν e ζ dalle equazioni di Einstein includendo la materia oscura come sorgente. Al contrario, in TeVeS dobbiamo procedere ovviamente senza eliminare ϕ e calcolare ν e ζ a partire dalla sola materia visibile, ma, come vedremo, otteniamo lo stesso risultato.

Innanzitutto, semplifichiamo l'integrale (3.70) utilizzando l'eq. (3.10). Con la metrica sferica (3.62) e ricordando l'espressione esplicita (3.63) di A^α , la componente $G_{\varrho\varrho}$ dell'eq. (3.10) diventa:

$$\frac{\zeta'^2}{4} + \frac{\zeta'\nu'}{2} + \frac{\zeta' + \nu'}{\varrho} = 8\pi G \left[\tilde{T}_{\varrho\varrho} + \tau_{\varrho\varrho} \right] + \Theta_{\varrho\varrho}. \quad (3.71)$$

Utilizziamo questa relazione, trascurando i termini ζ'^2 e $\zeta'\nu'$ che risultano del secondo ordine rispetto a ζ' e ν' , per eliminare ζ' dalla (3.70), ottenendo:

$$\Delta\varphi = b \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu' + 2\phi'}{\varrho} dx - 4\pi G b \int_{-\infty}^{\infty} \left(\tilde{T}_{\varrho\varrho} + \tau_{\varrho\varrho} + \frac{\Theta_{\varrho\varrho}}{8\pi G} \right) dx. \quad (3.72)$$

Ricordando i risultati (3.38) e (3.40), possiamo riscrivere l'integrale in (3.72) come:

$$\Delta\varphi = 2b \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi'}{\varrho} dx - 4\pi G b \int_{-\infty}^{\infty} \left(\tilde{T}_{\varrho\varrho} + \tau_{\varrho\varrho} + \frac{\Theta_{\varrho\varrho}}{8\pi G} \right) dx. \quad (3.73)$$

Notiamo a questo punto che il secondo integrale è trascurabile rispetto al primo in regime di basse accelerazioni. Infatti, è possibile mostrare che l'integrale del termine $\tilde{T}_{\varrho\varrho}$ risulta proporzionale a $\mu v^2 \Phi' / \varrho$, indicando con v la velocità caratteristica della materia del sistema in esame, e che risulta piccolo dato che $\mu \ll 1$. L'integrale di $\tau_{\varrho\varrho}$ produce un termine non maggiore di quello di $\tilde{T}_{\varrho\varrho}$, perché, ricordando le relazioni (3.48)-(3.49), abbiamo che $4\pi G \tau_{\varrho\varrho} \simeq (k\tilde{\mu}/8\pi\mu)\Phi'\Phi_N'$. Analogamente, per $\Theta_{\varrho\varrho}$ il termine in λ si annulla e rimane $|\Theta_{\varrho\varrho}| \simeq K(\Phi_N')^2/2$ e quindi anche l'integrale di questo termine è trascurabile. Concludiamo che la deflessione dei raggi luminosi in TeVeS è data, per basse accelerazioni, da:

$$\Delta\varphi = 2b \left[1 + \mathcal{O}(\tilde{\mu}v^2) \right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi'}{\varrho} dx. \quad (3.74)$$

Il lensing è quindi unicamente determinato da Φ , il potenziale che governa il moto non relativistico. In GR abbiamo che la formula (3.74) è valida a meno di ordini $\mathcal{O}(v^2)$, dato che in GR $\mu = 1$, e con $\Phi = \Phi_N$ assumendo l'esistenza di materia oscura nel calcolo di Φ_N . In TeVeS, invece, Φ governa il moto non relativistico attraverso la MOND, senza supporre l'esistenza di materia oscura. Il successo predittivo del lensing in TeVeS è quindi legato al successo della dinamica modificata di Milgrom su scale galattiche. Di fatti, seppure in molti casi TeVeS riesca a riprodurre la deflessione osservata, come la

MOND essa presenta dei problemi quando la deflessione è causata da ammassi di galassie e per questi oggetti non elimina la necessità di introdurre della materia nascosta barionica o sotto forma di neutrini per riprodurre i dati sperimentali.

Bekenstein ha poi mostrato che il risultato ottenuto nel caso di sistemi a simmetria sferica è generalizzabile ai sistemi asimmetrici.

3.5 Riepilogo e considerazioni finali

Riassumiamo i risultati ottenuti nelle sezioni 3.2-3.3. Nella sezione 3.2 abbiamo trovato che:

$$\begin{cases} g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -dt^2 + a(t)^2[d\chi^2 + f(\chi)^2 d\Omega^2] \\ k \rightarrow 0 \\ \ell \propto k^{-3/2} \\ K \propto k \\ \forall F(\zeta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^\alpha = \delta_t^\alpha \\ \phi \sim \mathcal{O}(k) \\ \tilde{G}_{\alpha\beta} = 8\pi G \tilde{T}_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{tt}(x^k) + g_{ij}(x^k) dx^i dx^j \\ k \rightarrow 0 \\ \ell \propto k^{-3/2} \\ K \propto k \\ \forall F(\zeta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^\alpha = N \xi^\alpha \\ \phi \sim \mathcal{O}(k) \\ \tilde{G}_{\alpha\beta} = 8\pi G \tilde{T}_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(k) + \mathcal{O}(K) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ell \rightarrow \infty \\ K \rightarrow 0 \\ \forall F(\zeta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \\ \tilde{G}_{\alpha\beta} = 8\pi G \tilde{T}_{\alpha\beta} \end{cases}$$

La scelta della metrica $g_{\alpha\beta}$ ovviamente influenza i risultati. In particolare, la metrica statica ci consente di scegliere un vettore di Killing ξ^α di tipo tempo e A^α risulta ad esso proporzionale; nel caso della metrica FRW, ciò non è possibile perché con tale metrica descriviamo un universo che evolve nel tempo. Il caso generale proposto da Milgrom è invece indifferente al tipo di metrica considerata, perché quella fisica diventa coincidente con quella einsteiniana e GR viene recuperata identicamente. Notiamo anche che nell'universo FRW la condizione $K \propto k$ non è strettamente necessaria per recuperare la Relatività Generale, ma lo è per i sistemi quasistatici, nei quali GR è recuperata a meno di ordini $\mathcal{O}(K)$ oltre che $\mathcal{O}(k)$. Abbiamo evidenziato che il limite relativistico è totalmente indipendente dalla forma della funzione $F(\zeta)$, che, come abbiamo visto, serve a riprodurre le dinamiche di Milgrom e Newton nel limite non relativistico. Infatti, nella sezione 3.3, con $y(\zeta)$ e $F(\zeta)$ date rispettivamente dalle (3.35) e (3.37), abbiamo ottenuto

i seguenti risultati:

$$\begin{cases} |\phi| \ll 1 \\ K \ll 1 \\ \zeta \ll 1 \Rightarrow |\vec{\nabla}\Phi| \ll a_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = \frac{|\vec{\nabla}\Phi|}{a_0} \\ \frac{|\vec{\nabla}\Phi|^2}{a_0} = |\vec{\nabla}\Phi_N| \end{cases}$$

$$\begin{cases} |\phi| \ll 1 \\ K \ll 1 \\ G_N = (\Xi + k/4\pi)G \\ \zeta \rightarrow 1^- \Rightarrow |\vec{\nabla}\Phi| \gg a_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = (\Xi + k/4\pi)^{-1} \\ \Phi = \Phi_N \end{cases}$$

Abbiamo schematizzato solo i casi a simmetria sferica, perché il caso generale o si riconduce a questi o necessita di un'integrazione numerica. È evidente l'importanza delle funzioni $y(\zeta)$ e $F(\zeta)$, che nell'intervallo $0 < \zeta < 1$ permettono di riprodurre le dinamiche di Milgrom e Newton attraverso la funzione $\mu(\zeta)$. In particolare, vicino agli estremi di questo intervallo, il potenziale totale Φ che governa il moto non relativistico in TeVeS in un caso soddisfa l'equazione di MOND e nell'altro coincide con quello newtoniano.

Il tentativo di inquadrare la fenomenologia della dinamica di Milgrom in una teoria relativistica è quindi riuscito. La sola esistenza di questo risultato è già molto importante in sé: abbiamo notato che la comunità scientifica era scettica riguardo alla possibilità di rendere relativistica la MOND, ma Bekenstein ha dissipato ogni dubbio. La TeVeS, in più, è falsificabile e può essere testata tramite i modelli costruiti a partire da diverse scelte della funzione $F(\zeta)$ e i modelli relativistici. A questo proposito, ricordiamo che le teorie relativistiche precedenti la TeVeS non riuscivano contemporaneamente a impedire propagazioni superluminali dei segnali e a ottenere un lensing gravitazionale in accordo con i dati sperimentali. Bekenstein invece ha mostrato che le propagazioni delle perturbazioni dei campi da lui introdotti non sono superluminali e, come abbiamo visto, il lensing che si ricava in TeVeS è in ottimo accordo con quello basato sulle leggi della Relatività Generale ammettendo l'esistenza della materia oscura, a parte per i casi degli ammassi. La geometria sottesa alla TeVeS è stata poi approfondita in [19], dove gli autori ricavano le equazioni per le geodetiche di tipo tempo e nulle, così da permettere lo studio del moto di particelle prova e del redshift gravitazionale.

Nel Capitolo 1 abbiamo notato che importanti evidenze osservative a supporto della materia oscura provengono dalla cosmologia. La semplice legge fenomenologica di Milgrom non può rispondere a tali questioni, ma con la TeVeS finalmente si possono colmare queste lacune del paradigma MOND. Bekenstein stesso ha notato che i modelli cosmologici costruiti in GR con la materia oscura sono riproducibili in TeVeS, e le ere dell'universo che ne seguono hanno una struttura molto simile. Constantinos Skordis ha approfondito le previsioni cosmologiche studiando il formalismo covariante di TeVeS: in [18] ha ricavato le principali equazioni perturbative lineari con le quali è possibile

studiare la formazione di strutture e le anisotropie della radiazione cosmica di fondo. Questi due aspetti sono stati analizzati con successo in [20], dove gli autori mostrano che è possibile costruire un universo in cui vale la dinamica modificata di Milgrom e che riproduce con buona approssimazione i picchi osservati nello spettro della CMBR (vedi Figura 3.1). Tuttavia, lo spettro previsto è soddisfacente solo se si ammette l'esistenza di neutrini con una massa di circa 2 GeV, coerentemente con quanto osservato riguardo agli ammassi di galassie.

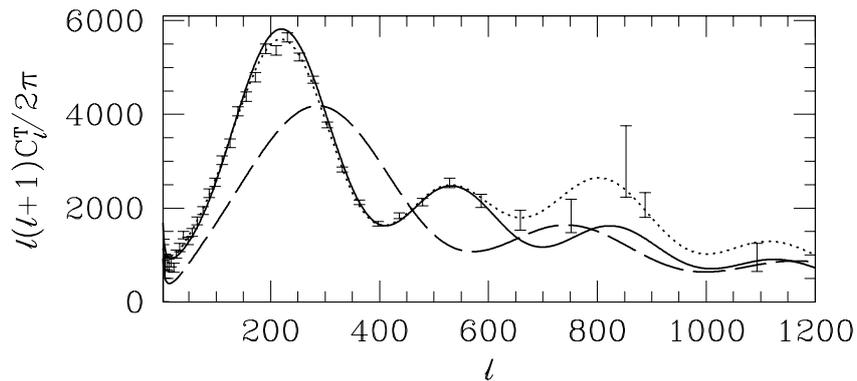


Figura 3.1: Spettro angolare di potenza della CMBR (punti con barre d'errore) e andamento previsto dal modello Λ CDM (linea punteggiata). La linea tratteggiata rappresenta il fit ottenuto con la TeVeS, mentre la linea continua il fit con la TeVeS considerando neutrini di massa 2 GeV. Osserviamo che il problema principale nel considerare una materia nascosta non barionica calda risiede nel terzo picco: con questo tipo di materia l'altezza dei picchi ha un andamento decrescente, mentre i dati sembrano confermare che il terzo sia all'altezza del secondo. Il modello Λ CDM riesce a prevedere questo andamento. Da [20].

Conclusioni

Da quando Newton cominciò a cercare di spiegare il moto dei corpi astrofisici in termini della legge di gravitazione, le discrepanze tra il moto osservato e quello atteso sono servite ad approfondire sempre più la nostra conoscenza delle leggi di gravitazione e della composizione dell'Universo. Ogni anomalia è stata finora spiegata con della massa non ancora osservata o con una modifica alle leggi fisiche. Osservando il moto di Urano, è stata congetturata l'esistenza di Nettuno, trovato poi nel 1846. Ma Vulcano, l'ipotetico pianeta che avrebbe dovuto spiegare le anomalie del moto di Mercurio, non è mai stato osservato e solo l'introduzione della Relatività Generale di Einstein ha risolto le anomalie del moto di questo pianeta. Il problema della materia oscura è, quindi, una versione moderna del problema dei "pianeti oscuri". Abbiamo due teorie, il modello Standard della particelle e la Relatività Generale, e l'unica certezza che abbiamo è che esse non sono sufficienti a descrivere l'Universo che osserviamo. Ma quale delle nostre conoscenze è incompleta? Esiste della materia che ancora non abbiamo rilevato o le leggi di gravitazione attuali sono da modificare?

Come abbiamo visto nel Capitolo 1, la CDM è stata introdotta per spiegare le anomalie osservate nelle galassie, ma paradossalmente è proprio questo l'ambito in cui ottiene i risultati peggiori. Su scala cosmologica le fluttuazioni della CMBR rappresentano il successo maggiore di tale modello, ma a livello galattico la CDM non permette di effettuare delle previsioni ed essa è sempre aggiustata ai dati. L'ampia fenomenologia, che emerge dalle osservazioni su scala galattica, nel contesto CDM appare come un insieme di relazioni scollegate tra loro, nonostante i dati parlino chiaramente di una scala di accelerazione fondamentale nella dinamica delle galassie. Il modello Λ CDM non può trascurare questi punti di debolezza. Il comportamento tipico dei sostenitori dell'esistenza della materia oscura, infatti, è quello di minimizzare gli scarsi risultati ottenuti su scala galattica, perché essi non sarebbero altro che dettagli, minuterie in confronto al più grande disegno cosmologico, perfettamente descritto dal modello Λ CDM. Abbiamo visto, però, che queste minuterie sono relazioni empiriche precise e definite, che *devono* essere comprese e spiegate da un modello cosmologico che si ponga come fondamentale. Sottolineiamo il significato di "comprese e spiegate": a livello galattico, la CDM permette solo di compiere degli esercizi di aggiustamento. Riprodurre una RC o la BTFR in termini di CDM non significa avere compreso e spiegato quel fenomeno, ma solo che si è

stati in grado di inserire nel modello i parametri opportuni in modo da far emergere la relazione in esame.

Sebbene l'ipotesi di CDM sia difficilmente falsificabile, essa è quanto meno confermare. Basterebbe, infatti, la rilevazione delle particelle di materia oscura per confermarne la validità. L'esito negativo di tutti gli esperimenti ad oggi condotti a tal fine dovrebbe porsi come una preoccupazione per chi è davvero convinto che quel 25% di Universo esista realmente (vedi Figura 1.2). È come se Nettuno non fosse ancora stato scoperto dopo anni e anni di osservazioni e in più non si avesse nemmeno un'idea precisa di cosa Nettuno debba propriamente essere. Gli esperimenti sulla sezione d'urto delle particelle di materia oscura stanno ponendo dei seri vincoli e non è escluso che nei prossimi anni questo valore continuerà a scendere, finché eventualmente verrà proposto che le particelle di materia oscura abbiano sezione d'urto nulla. Per quanto ammissibile ciò possa essere, è anche altamente insoddisfacente dal punto di vista scientifico.

Nel Capitolo 2 abbiamo visto che la MOND non presenta i problemi che affliggono il modello Λ CDM. Con un'unica, semplice legge fenomenologica essa permette di comprendere e spiegare le osservazioni e le relazioni empiriche legate alle galassie. Spesso gli oppositori del paradigma MOND ne sminuiscono i successi, sostenendo che essa è stata costruita apposta per riprodurre la fenomenologia galattica. Tuttavia, il percorso storico descritto nel Capitolo 1 dimostra quanto ciò sia sbagliato e che, in realtà, i successi della MOND sono sempre stati delle vere e proprie predizioni.

Nel Capitolo 3 abbiamo presentato la TeVeS e abbiamo visto come la sola esistenza di questa teoria sia un grande risultato. Grazie ad essa è possibile estendere il paradigma MOND su scala cosmologica e mettere veramente alla prova il modello Λ CDM attraverso due teorie falsificabili.

Il modello Λ CDM e la MOND, unitamente alla TeVeS, rappresentano due paradigmi distinti e per certi aspetti in conflitto tra di loro. Tuttavia, dove uno ottiene ottimi risultati, l'altro è più impreciso, rendendo tutto sommato difficile effettuare un vero confronto tra i due. Infatti, sebbene il paradigma MOND abbia grande successo su scala galattica, abbiamo visto come non sia del tutto soddisfacente nel predire le fluttuazioni della CMBR o il lensing gravitazionale di alcuni ammassi di galassie. Questi problemi sarebbero risolti da neutrini non poco massivi o ammettendo, anche nel paradigma MOND, una forma di materia non ancora osservata. La soluzione al problema della discrepanza tra massa luminosa e dinamica potrebbe quindi consistere in una modifica che non sia esclusivamente una modifica del modello Standard o della Relatività Generale, bensì una via di mezzo.

Non poche critiche sono mosse alla TeVeS per la sua eccessiva complessità. Ci permettiamo di distinguere, in questa complessità, due livelli: uno di carattere matematico e uno fisico. Riguardo a quello matematico, la critica è poco consistente. La TeVeS non è di certo la teoria fisica più difficile a essere stata formulata e, se pensiamo che agli inizi del '900 le equazioni fondamentali della fisica potevano essere scritte sulla facciata di un foglio, non possiamo di certo considerare seria questa critica. Quella fisica, invece,

consiste nel fatto che non sarebbero chiari i corrispettivi fisici dei campi introdotti dalla TeVeS: essa appare come una teoria costruita *ad hoc* per permettere di recuperare la fenomenologia della MOND. Questo è vero, essa di fatti è una teoria *ad hoc* necessaria per rendere relativistica la MOND; tuttavia, è molto promettente. La TeVeS è relativamente giovane e, soprattutto, ancora poco studiata. Non vi è dubbio che una sua maggiore comprensione porterebbe anche a una maggiore comprensione della fisica che vi si cela dietro. Recentemente, ad esempio, il fisico olandese Erik Verlinde ha mostrato che le teorie di mondo brana e gravità entropica conducono a una cosmologia simile a quella descritta dalla TeVeS e recuperano la fenomenologia della MOND. Sebbene il modello Λ CDM non possa essere considerato in crisi, esse ne rappresentano effettivamente una forte alternativa, le cui debolezze sono principalmente dovute al fatto che sono poco studiate e approfondite, godendo solo del favore di una minoranza della comunità scientifica. La MOND dimostra però che è possibile unificare la fenomenologia galattica in un modo semplice ed elegante, per cui una teoria che si ponga come fondamentale deve poter fare altrettanto.

Milgrom stesso, d'altronde, ha ipotizzato che i successi della MOND legati alla costante a_0 potrebbero essere come una coincidenza ed essere parte di una teoria più fondamentale che semplicemente al momento ci sfugge. Immaginiamo una situazione simile a quella della caverna di Platone: supponiamo che esista un pianeta in cui gli abitanti sono vincolati a vivere sulla sua superficie, ignari dell'Universo che li circonda a causa, ad esempio, di una nube che copre perennemente il cielo. Chiaramente, nei loro esperimenti emergerebbe una costante dalle dimensioni di un'accelerazione, che chiamiamo g , ed essi scoprirebbero che g è legata ad altri fenomeni che apparentemente, per la loro visione del mondo, nulla hanno a che vedere tra di loro. Essi potrebbero pensare che g sia una costante della Natura e potrebbero perfino scoprire alcune relazioni interessanti, come ad esempio quella che lega g alla velocità di fuga v_f del loro pianeta, di cui per un qualche motivo conoscono il raggio R : $g = v_f^2/2R$. Con le leggi di gravitazione note, però, tutte queste coincidenze hanno un significato e g non appare come una costante fondamentale della natura. Questa semplice parabola potrebbe rappresentare l'attuale comprensione della MOND: la relazione (2.15) potrebbe essere chiarita da una teoria fondamentale, alla luce della quale anche a_0 avrebbe una sua spiegazione. Tuttavia, una teoria che si ponga come fondamentale deve necessariamente incorporare la MOND e recuperarne i risultati, perché essa permette di semplificare e collegare osservazioni che altrimenti appaiono scollegate tra di loro.

Non vogliamo spingerci troppo oltre con le analogie, ma concludiamo ricordando l'opposizione tra geocentrismo ed eliocentrismo, anch'essi due paradigmi diversi tra loro come quello Λ CDM e MOND. Al tempo di Copernico la materia oscura si chiamava deferente ed epiciclo: la quantità di modifiche e aggiustamenti apportati al modello geocentrico per adattarlo alle osservazioni celesti è impressionante. D'altronde, la scienza procede spesso proprio in questo verso. Gli scienziati, come gruppo sociale, tendono a impiegare più sforzi nel rafforzare i paradigmi già esistenti più che a metterli alla prova

e ciò è perfettamente comprensibile. Permette loro, infatti, di non vanificare anni e anni di lavoro spesi su una teoria nata per risolvere problemi precisi e quindi tutto sommato affidabile. Sarebbe controproducente scartare una teoria alla prima difficoltà che essa incontra. Tuttavia, l'artificiosità del sistema geocentrico era stata messa a dura prova dalla più semplice ed elegante idea di Copernico, che inizialmente propose il proprio modello solo come un utile algoritmo per il calcolo astronomico e non come descrittivo della realtà, per paura dell'Inquisizione. Furono proposti addirittura dei modelli ibridi, come quello di Tycho Brahe, che suggerì che il Sole girasse intorno alla Terra, immobile, con i pianeti orbitanti intorno al Sole. Questi modelli ricordano i tentativi attuali di alcuni scienziati che, impressionati dai risultati della MOND ma abituati all'idea della materia oscura, hanno ipotizzato delle combinazioni tali di materia oscura da riprodurre localmente su scale galattiche una legge identica a quella proposta da Milgrom. I tentativi, quindi, allora come oggi, di adattare il paradigma dominante alle sfide costituite dai paradigmi nuovi possono davvero raggiungere livelli di complessità elevata. Molti sostenitori dell'ipotesi CDM, d'altronde, utilizzano la MOND come un algoritmo utile su scale galattiche, per calcolare delle RC o compiere previsioni dinamiche, esattamente come inizialmente il sistema copernicano veniva impiegato esclusivamente come un utile strumento di calcolo, semplice ed elegante. Il progresso scientifico ha poi premiato quest'ultimo rispetto ai sistemi geocentrici, perché la sua semplicità ed eleganza si sono rivelate scelte della Natura.

Bibliografia

- [1] Bekenstein, Jacob D. «Alternatives to dark matter: Modified gravity as an alternative to dark matter». In: *Particle Dark Matter: Observations, Models and Searches*. A cura di Bertone, G. arXiv:1001.3876. Cambridge University Press, 2010. Cap. 6, pp. 95–114.
- [2] Bekenstein, Jacob D. «Relativistic gravitation theory for the modified Newtonian dynamics paradigm». In: *Physical Review D* 70.083509 (2004). DOI:10.1103/PhysRevD.70.083509, arXiv:astro-ph/0403694.
- [3] Bekenstein, Jacob D. «The modified Newtonian dynamics-MOND-and its implications for new physics». In: *Contemporary Physics* 47 (2006). DOI:10.1080/00107510701244055, arXiv:astro-ph/0701848, pp. 387–403.
- [4] Bekenstein, Jacob D. e Milgrom, Mordehai. «Does the missing mass problem signal the breakdown of Newtonian gravity?». In: *Astrophysical Journal* 286 (1984). DOI:10.1086/162570, pp. 7–14.
- [5] Famaey, Benoit e McGaugh, Stacy S. «Modified Newtonian Dynamics (MOND): Observational Phenomenology and Relativistic Extensions». In: *Living Reviews in Relativity* 15.10 (2012). DOI:10.12942/lrr-2012-10, arXiv:1112.3960v2.
- [6] Freeman, Kenneth C. «On the Disks of Spiral and S0 Galaxies». In: *Astrophysical Journal* 160 (1970). DOI:10.1086/150474, pp. 811–830.
- [7] McGaugh, Stacy S. «A Tale of Two Paradigms: the Mutual Incommensurability of LCDM and MOND». In: *Canadian Journal of Physics* 93 (2015). DOI:10.1139/cjp-2014-0203, arXiv:1404.7525, pp. 250–259.
- [8] Milgrom, Mordehai. «A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis». In: *Astrophysical Journal* 270 (1983). DOI:10.1086/161130, pp. 365–370.
- [9] Milgrom, Mordehai. «A modification of the Newtonian dynamics: Implications for galaxies». In: *Astrophysical Journal* 270 (1983). DOI:10.1086/161131, pp. 371–383.
- [10] Milgrom, Mordehai. «A modification of the Newtonian dynamics: Implications for galaxy systems». In: *Astrophysical Journal* 270 (1983). DOI:10.1086/161132, pp. 384–389.

- [11] Milgrom, Mordehai. «MOND as Modified Inertia». In: *Mass Profiles and Shapes of Cosmological Structures*. A cura di Mamon, G. et al. Vol. 20. EAS Publications Series. DOI:10.1051/eas:2006074, arXiv:astro-ph/0510117. 2005, pp. 217–224.
- [12] Milgrom, Mordehai. «MOND-a pedagogical review». In: *Acta Physica Polonia B* 32 (2001). arXiv:astro-ph/0112069, p. 3613.
- [13] Milgrom, Mordehai. «MOND-particularly as modified inertia». In: *Acta Physica Polonica B* 42 (2011). DOI:10.5506/APhysPolB.42.2175, arXiv:1111.1611, pp. 2175–2184.
- [14] Milgrom, Mordehai. «The modified dynamics as a vacuum effect». In: *Physics Letters A* 253 (1999). DOI:10.1016/S0375-9601(99)00077-8, arXiv:astro-ph/9805346, pp. 273–279.
- [15] Sanders, Robert H. *The Dark Matter Problem: A Historical Perspective*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010 (paperback edition 2014). 214 pp. URL: www.cambridge.org/9781107677180.
- [16] Sanders, Robert H. e McGaugh, Stacy S. «Modified Newtonian Dynamics as an Alternative to Dark Matter». In: *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 40 (2002). DOI:10.1146/annurev.astro.40.060401.093923, arXiv:astro-ph/0204521, pp. 263–317.
- [17] Scarpa, Riccardo. «Modified Newtonian Dynamics, an Introductory Review». In: *First Crisis in Cosmology Conference*. A cura di Lerner, E. J. e Almeida, J. B. Vol. 822. American Institute of Physics Conference Series. DOI:10.1063/1.2189141. 2006, pp. 253–265.
- [18] Skordis, Costantinos. «Tensor-vector-scalar cosmology: Covariant formalism for the background evolution and linear perturbation theory». In: *Physical Review D* 74.103513 (2006). DOI:10.1103/PhysRevD.74.103513, arXiv:astro-ph/0511591.
- [19] Skordis, Costantinos e Zlosnik, Tom. «The geometry of modified Newtonian dynamics». In: *Physical Review D* 85.044044 (2012). DOI:10.1103/PhysRevD.85.044044, arXiv:1101.6019.
- [20] Skordis, C. et al. «Large Scale Structure in Bekenstein’s Theory of Relativistic Modified Newtonian Dynamics». In: *Physical Review Letters* 96.011301 (2006). DOI:10.1103/PhysRevLett.96.011301, arXiv:astro-ph/0505519.