

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Il teletrasporto quantistico: principi quantomeccanici ed esperimenti

Relatore:
Prof. Elisa Ercolessi

Presentata da:
Giulia Callisesi

Anno Accademico 2015/2016

A mio figlio Leonardo.
Possa sempre guardare il mondo con curiosità e stupore.

Abstract

Questo lavoro di tesi si pone l'obiettivo di illustrare i principi fisici che stanno alla base del teletrasporto quantistico, una tecnica importante utilizzata nelle tecnologie dell'informatica quantistica.

In particolare, verranno introdotti i principali concetti della computazione quantistica, come il qubit e le porte logiche quantistiche, intese come trasformazioni unitarie che operano su qubit, e verrà illustrato il protocollo di teletrasporto dello stato quantico di un qubit da un punto ad un altro dello spazio.

In seguito verrà descritto il fenomeno quantistico dell'entanglement e si porrà l'accento su come tale fenomeno possa essere sfruttato nel protocollo di teletrasporto quantistico. Segue, infine, una descrizione delle principali tecniche utilizzate negli esperimenti di verifica dell'entanglement e di teletrasporto quantistico condotti fino ai giorni nostri, con enfasi ai possibili sviluppi futuri.

Indice

Introduzione	1
1 La computazione quantistica	7
1.1 Bit quantistici	7
1.1.1 Qubit singoli	7
1.1.2 Qubit multipli	9
1.2 Porte quantistiche	10
1.2.1 Porte a qubit singoli	10
1.2.2 Porte a qubit multipli	13
1.2.3 Misure in basi diverse dalla computazionale	14
1.3 Circuiti quantistici	15
1.3.1 Proprietà e misura	15
1.3.2 Circuito di copia di un qubit	15
1.3.3 Computazione classica su computer quantistici	16
1.3.4 Gli stati di Bell	18
1.3.5 Teletrasportare lo stato di un qubit	19
1.3.6 Comunicazioni a velocità ultraluminali e teorema del no-cloning .	21
1.3.7 L'esperimento di Stern-Gerlach e il modello a qubit	22
1.3.8 Distinguibilità quantistica e denaro quantistico	24
2 Principi quantomeccanici del teletrasporto quantistico	27
2.1 Sistemi composti ed entanglement	28
2.1.1 Correlazione classica	28
2.1.2 Combinare i sistemi quantistici: due qubit	30
2.1.3 Stati Prodotto	31
2.1.4 Stati entangled	32

2.2	L'operatore densità	33
2.2.1	Ensemble di stati quantistici	34
2.2.2	Proprietà generali dell'operatore densità	34
2.2.3	L'operatore densità ridotto	35
2.2.4	Entanglement e operatore densità ridotto	35
2.2.5	Test di correlazione per l'entanglement	37
2.3	Applicazioni quantomeccaniche dell'entanglement	38
2.3.1	Teletrasporto quantistico e operatore densità ridotto	38
2.3.2	Codifica superdensa	40
2.4	Entanglement e realismo locale	41
2.4.1	Il modello a variabili nascoste	41
2.4.2	Il teorema di Bell	43
2.4.3	La disuguaglianza di Bell	44
3	Esperimenti di teletrasporto quantistico	47
3.1	Esperimenti sull'entanglement	48
3.1.1	Verifica delle disuguaglianze di Bell	48
3.1.2	Le falle dei primi esperimenti	50
3.1.3	Sorgenti di fotoni <i>entangled</i>	52
3.1.4	Esperimenti sull'entanglement di tre particelle	53
3.1.5	Entanglement e <i>imaging quantistico</i>	55
3.2	Primi esperimenti di teletrasporto quantistico	59
3.2.1	L'esperimento di Zeilinger e al. del 1997	59
3.2.2	L'esperimento di De Martini e al. del 1997	64
3.2.3	Teletrasporto di un fotone attraverso il Danubio	64
3.3	Altri esperimenti di teletrasporto quantistico	66
3.3.1	Teletrasporto di stati atomici	66
3.4	Teletrasportare a distanze sempre maggiori	69
3.4.1	Un record per il teletrasporto free space: l'esperimento presso le isole Canarie	70
3.4.2	Teletrasporto e satelliti	74
3.4.3	Record per il teletrasporto lungo fibra ottica	75
3.5	Così viaggeranno informazioni sicure	76
	Conclusioni	79

<i>INDICE</i>	iii
Bibliografia	83
A Appendice A: Postulati della Meccanica Quantistica	89
A.1 Lo spazio degli stati	89
A.2 Evoluzione	90
A.3 Misure quantistiche	91
A.3.1 Distinguibilità degli stati quantistici	93
A.4 Sistemi composti	94

Introduzione

La parola “teletrasporto” richiama alla mente qualcosa di fantascientifico. In molte storie di fantascienza, il teletrasporto prevede la scomparsa di un oggetto da una posizione e la simultanea ricomparsa del medesimo oggetto in un’altra posizione dello spazio, senza dover percorrere noiosi chilometri intermedi e senza l’utilizzo di alcun veicolo. Nonostante tale prospettiva sia decisamente allettante, tutto ciò è lungi dall’essere fisicamente realizzabile nella realtà.

Nella fantascienza la procedura di teletrasporto inizia con una scansione dell’oggetto originale in modo da stabilire con precisione le proprietà, ossia lo stato di ogni singolo atomo, elettrone o particella componente l’oggetto, generando un’informazione. Un trasmettitore trasferisce questa informazione ad una stazione ricevente che la utilizza per ottenere una replica esatta dell’originale. In alcuni casi, alla stazione ricevente, viene trasferita anche la materia che compone l’originale, sotto forma di qualche tipo di energia. In altri casi invece la replica dell’originale usa atomi e molecole già presenti nel luogo di arrivo.

Ma, dalla Meccanica Quantistica, sappiamo che non è possibile conoscere lo stato di ogni singola particella. E se anche volessimo misurarlo, qualunque misura altererebbe lo stato della particella stessa e fornirebbe una conoscenza parziale. Il *Principio di indeterminazione di Heisenberg* ci dice che una simile procedura di teletrasporto, come ci è raccontata ad esempio nella serie fantascientifica “Star Trek”, non può funzionare. Il processo di misura distruggerebbe la maggior parte dell’informazione da teletrasportare. Si racconta che un giorno gli autori della serie siano venuti a conoscenza del principio di indeterminazione e dei limiti che poneva al teletrasporto, probabilmente da uno dei fan all’interno della comunità scientifica. Per risolvere il problema fu inventato il “*compensatore di Heisenberg*”, un attrezzo immaginario che risolveva i problemi legati al principio di indeterminazione. Ma, poichè l’esistenza di un tale strumento era, ed è, impossibile, nessuno si preoccupò di spiegarne il funzionamento. La leggenda vuole che un giorno

un giornalista del “Time” abbia chiesto a Michael Okuda, un consulente tecnico della serie: “Come funziona il compensatore di Heisenberg?”. Al che lui rispose: “Molto bene, grazie!” [1].

In conclusione, la meccanica quantistica pone tantissime limitazioni al sogno del teletrasporto.

La cosa importante, però, è che non è necessario conoscere tutta l’informazione contenuta nel sistema da teletrasportare, quindi non è necessario misurarla, ma è sufficiente trasmetterla. Occorre quindi un canale per la trasmissione da A e B senza che sia necessaria alcuna misura dell’informazione. Questo canale sfrutta l’*entanglement quantistico* o correlazione quantistica, un fenomeno privo di un corrispettivo classico.

L’unica via di uscita, quindi, è rappresentata dal teletrasporto quantistico. Si tratta di una tecnica nell’ambito dell’informatica quantistica che permette, sotto determinate condizioni, di trasferire uno stato quantistico sconosciuto (ossia lo stato di polarizzazione di fotoni, lo stato di spin di elettroni o lo stato di eccitazione di atomi), da un punto ad un altro arbitrariamente lontano e che potrebbe avere molte applicazioni nell’elaborazione dell’informazione nel futuro.

Il termine “entanglement” fu introdotto nel 1935 da Schrodinger il quale diede una descrizione teorica ad un fenomeno precedentemente trattato da Einstein in un articolo che quest’ultimo pubblicò insieme a Podolsky e Rosen, noto anche come “Articolo EPR” [2]. Secondo la Meccanica Quantistica è possibile realizzare un sistema costituito da due particelle e caratterizzato da determinati valori globali di alcune osservabili, in modo che il valore misurato per una particella di una proprietà definita dell’insieme influenzi istantaneamente il corrispondente valore dell’altra, che risulterà tale da mantenere il valore globale iniziale. Il processo di misura della singola particella è soggetto alle regole quantistiche di probabilità.

Si può realizzare un simile sistema ad esempio facendo interagire opportunamente le due particelle o sfruttando un processo naturale che le origini nel medesimo istante, in modo che siano descritte da uno stato quantistico globale definito, pur mantenendo singolarmente carattere indefinito fino all’esecuzione della misura. Ciò rimane vero indipendentemente dalla distanza reciproca delle due particelle.

Per fare un semplice esempio, consideriamo una palla da biliardo che si muove e ne urta una a riposo (quindi interagendo con essa). Dopo l’urto, si allontanano l’una dall’altra. In fisica classica, conoscendo velocità e direzione di una pallina dopo l’urto, possiamo calcolare direzione e velocità dell’altra pallina, per le leggi di conservazione.

Immaginiamo ora due palle da biliardo “quantistiche”. Esse si comportano in maniera più insolita delle palle da biliardo classiche. Anch’esse si allontanano dopo l’urto ma nessuna delle due possiede velocità definita e neppure una direzione specifica. Ma il punto è che non appena osserviamo una delle due, all’istante assumerà una certa velocità e direzione. Nello stesso istante, e non prima, l’altra assumerà velocità e direzione corrispondenti.

Il fenomeno dell’entanglement turbò profondamente Einstein, che lo definì una “misteriosa azione a distanza”, e portò lo stesso Einstein e altri a mettere in discussione i principi della Meccanica Quantistica. Einstein era restio ad accettare molti aspetti controintuitivi e la casualità stessa alla base della Meccanica Quantistica. Egli stesso scrisse “Dio non gioca a dadi!”.

Nell’“articolo EPR” formularono il celebre paradosso EPR, che metteva in evidenza, appunto come paradossale, il fenomeno dell’entanglement. Vedremo nei prossimi Capitoli quali sono i punti chiave di tale articolo.

In ogni caso, la Meccanica Quantistica si è rivelata in grado di produrre corrette previsioni sperimentali fino ad una precisione mai raggiunta prima e le correlazioni associate al fenomeno dell’entanglement quantistico sono state realmente osservate.

All’inizio degli anni ‘80 Alain Aspect e altri [3] hanno svolto una serie di esperimenti accurati che hanno provato che le correlazioni misurate seguono le previsioni della Meccanica Quantistica. Più recentemente (1998) Anton Zeilinger e altri [4] hanno migliorato tali esperimenti confermando di nuovo le previsioni quantomeccaniche. Quindi, a dispetto di ciò che sosteneva Einstein, Dio gioca a dadi, eccome!

Tornando alla questione del teletrasporto quantistico, la soluzione quantomeccanica del problema fu proposta nel 1993 da un gruppo di teorici Bennett, Brassard, Cràpeau, Jozsa, Peres, Wootters [5]. Essi pubblicarono un articolo dal titolo “Teletrasporto di uno stato quantistico ignoto attraverso un doppio canale, classico e di Einstein-Podolsky-Rosen”. Per la prima volta appariva in un articolo scientifico la parola “teletrasporto”, in quanto tale argomento era considerato appannaggio della fantascienza.

Per realizzare il teletrasporto è necessario utilizzare un duplice canale, uno classico e uno quantistico (EPR). Come vedremo più nel dettaglio nei prossimi Capitoli, il primo serve per comunicare informazione classica, il secondo ad effettuare la procedura di teletrasporto vera e proprio.

La Meccanica Quantistica è alla base di molte tecnologie emergenti, come i computer quantistici e la crittografia quantistica, e ha permesso esperimenti relativi al teletraspor-

to quantistico, su cui si basano le speranze di nuove tecnologie. Si possono sfruttare gli stati *entangled* per collegare tra loro i futuri computer quantistici: l'idea è quella di poter teletrasportare l'output di un computer quantistico ad un altro che si trovi anche a grande distanza.

L'idea moderna di computer è dovuta al matematico Alan Turing, il quale nel 1936 ha pubblicato un articolo [6] nel quale ha sviluppato in dettaglio una versione astratta di ciò che noi chiamiamo al giorno d'oggi computer programmabile, un modello per la computazione in grado di eseguire algoritmi chiamato macchina di Turing in suo onore. Egli dimostrò che esiste una macchina di Turing universale, che può essere utilizzata per simulare il comportamento di qualsiasi macchina di Turing.

Da ciò segue che, se vi è un algoritmo che può essere eseguito su un qualsiasi hardware (come può essere, ad esempio, un computer moderno), allora vi è un algoritmo equivalente per una macchina di Turing universale che esegue il medesimo compito. Per comprendere quali sono i vantaggi della computazione quantistica è necessario introdurre il concetto di efficienza di un algoritmo, espresso in termini matematici nella teoria della complessità computazionale [7]. Un algoritmo è efficiente se il tempo di esecuzione è una funzione polinomiale rispetto alla grandezza del problema da risolvere (o lunghezza dell'input); un algoritmo è inefficiente quando il tempo di esecuzione è una funzione che cresce più rapidamente di un polinomio (tipicamente esponenziale).

All'inizio degli anni '60 e '70 la macchina di Turing sembrava essere un modello computazionale potente almeno quanto un qualsiasi altro modello computazionale. In altri termini, un problema che aveva una soluzione efficiente in un qualche modello generico poteva essere risolto efficientemente anche su una macchina di Turing che simulava quel modello. Questa affermazione divenne nota come la tesi di Church-Turing: "Un qualsiasi processo algoritmico può essere simulato efficientemente usando una macchina di Turing".

La potenza degli hardware aumentò ad un ritmo incredibile da allora, grazie allo sviluppo dell'elettronica. Nel 1965 Gordon Moore sintetizzò questa crescita nella celebre legge di Moore: "La complessità di un microcircuito, misurata ad esempio tramite il numero di transistor per chip, raddoppia ogni 18 mesi" [8].

Questa legge, tuttavia, non sarà valida sempre, in quanto la fabbricazione di componenti elettronici sempre più piccoli ha già riscontrato problemi dovuti alla dimensione: man mano che le dimensioni dei componenti diminuiscono gli effetti quantistici interferiscono sempre di più. Ci sarà un punto oltre il quale non sarà possibile trascurarli (per esempio,

l'effetto tunnel quantistico diventerebbe troppo rilevante).

Dalla fine degli anni '70, con il fiorire degli algoritmi probabilistici (ovvero non deterministici, con elementi intrinsecamente casuali), si cominciarono a nutrire dubbi sulla validità della tesi di Church-Turing, in quanto sembrava che alcuni problemi non potessero essere risolti efficientemente solo con una macchina di Turing probabilistica. Cominciò la ricerca di un modello computazionale in grado di simulare efficientemente qualsiasi altro modello computazionale, con certezza.

Nel 1985 David Deutsch [9] ipotizzò che, essendo le leggi della fisica quelle della Meccanica Quantistica, si potesse usare un dispositivo basato su principi quantomeccanici per simulare efficientemente un sistema fisico arbitrario. Questa idea portò alla concezione odierna di computer quantistici.

Rimane tuttavia un problema aperto dei giorni nostri, ossia determinare se un computer quantistico universale sia effettivamente in grado di simulare un sistema fisico arbitrario. Deutsch diede anche un semplice esempio di come un computer quantistico fosse in grado di risolvere efficientemente problemi che non hanno soluzioni efficienti conosciute su computer classici, intesi come macchine di Turing probabilistiche.

I primi passi effettuati da Deutsch culminarono nel 1994 con la dimostrazione di Peter Shor [10] che la ricerca dei fattori primi di un intero molto grande e il calcolo dei logaritmi interi, due problemi fondamentali che si ritiene ancora oggi non abbiano una soluzione efficiente su un computer classico, possono essere risolti efficientemente su un computer quantistico.

Un'altra evidenza della potenza dei computer quantistici si ebbe l'anno successivo quando Lov Grover [11] dimostrò che anche la ricerca in uno spazio non strutturato poteva essere velocizzata su un computer quantistico. Sebbene il guadagno in velocità non fosse comparabile con gli algoritmi di Shor, la vasta applicabilità delle metodologie di ricerca portò molto interesse verso l'algoritmo di Grover.

Questi vantaggi dei computer quantistici sui computer classici sono così rilevanti che molti ricercatori presumono che nessun progresso nel campo della computazione classica, per quanto grande sia, riuscirà a colmare il divario di potenza tra un computer classico e un computer quantistico. Tuttavia, non è affatto semplice sfruttare questo vantaggio. Per poter risolvere in modo più efficiente problemi su computer quantistici, occorre ideare algoritmi quantistici efficienti. Ciò è reso arduo dal fatto che l'intuizione umana è basata sulla concezione classica del mondo e non sugli effetti quantistici, che spesso vanno contro il "senso comune". Inoltre non basta realizzare un algoritmo quantistico, ma esso deve

anche essere migliore di qualsiasi altro algoritmo classico equivalente già esistente.

Nel Capitolo 1 verranno affrontati i concetti fondamentali della computazione quantistica come i qubit e le porte logiche, indispensabili per la descrizione del protocollo di teletrasporto di un qubit da un punto all'altro dello spazio. Si vedrà come tale protocollo non crei una copia perfetta di un qubit, bensì trasferisca lo stato quantistico di un qubit ad un altro, distruggendo il qubit originale. Inoltre vedremo come la realizzazione dello stesso protocollo impedisca comunicazioni ultraluminali.

Nel Capitolo 2 verrà trattato il fenomeno quantomeccanico dell'entanglement, che rende possibile il teletrasporto quantistico. Verranno richiamati brevemente i Postulati della Meccanica Quantistica, con particolare accento al Postulato 4, che riguarda la descrizione di sistemi composti (in particolare ci soffermeremo sui sistemi a due qubit) e permette di introdurre gli stati di Bell, o stati *entangled*. Verranno introdotti i concetti di operatore (matrice) densità, operatore densità ridotto, stati puri e miscela di stati. E vedremo come una descrizione in termini di matrice densità permetta di stabilire il grado di entanglement esistente in un sistema composto e renda rigorosa l'impossibilità di teletrasportare informazione a velocità ultraluminali.

Nel Capitolo 3 verranno passati in rassegna i principali esperimenti di verifica dell'entanglement e quelli di teletrasporto quantistico, illustrando le tecniche principali utilizzate per la realizzazione del protocollo. Vedremo come la tecnica più semplice preveda l'utilizzo di fotoni, per cui è semplice misurare proprietà come la polarizzazione. Ma esistono altre tecniche che utilizzano atomi o ioni intrappolati in regioni confinate in cui sono presenti campi elettrici e magnetici. In particolare vedremo come il successo della procedura di teletrasporto quantistico sia stato confermato a distanze sempre maggiori. Questo rappresenta un enorme passo in avanti verso la possibilità di realizzare una rete mondiale di comunicazione basata sul teletrasporto quantistico e, al contempo, rappresenta una conferma del fatto che l'entanglement funziona per qualsiasi distanza.

Nelle Conclusioni verrà discussa l'importanza dei risultati sperimentali raggiunti fino ai giorni nostri e verranno analizzati alcuni sviluppi futuri del teletrasporto quantistico.

Capitolo 1

La computazione quantistica

In questo Capitolo verrà descritto il protocollo di teletrasporto nel contesto della computazione quantistica, dopo averne introdotto i concetti principali, come il qubit, le porte logiche e i principali circuiti quantistici di interesse.

Verranno introdotti gli stati di Bell, o stati massimamente entangled, per i quali un sistema costituito da due qubit presenta la massima correlazione nelle misure dei singoli qubit.

Questi stati si riveleranno estremamente importanti in quanto costituiscono il canale quantistico attraverso il quale è possibile realizzare una procedura di teletrasporto.

Ma vedremo che tale canale non è sufficiente per portare a termine il protocollo e questo comporta l'impossibilità di trasmettere informazioni a velocità ultraluminali.

1.1 Bit quantistici

1.1.1 Qubit singoli

Così come il bit classico è un concetto fondamentale nella computazione classica, il bit quantistico (in breve *qubit*) è il concetto che sta alla base della computazione quantistica. Per il momento tratteremo i qubit come entità matematiche astratte, in modo da sviluppare una teoria che sia indipendente dal modo con cui, vedremo, verranno fisicamente implementati nella realtà.

Un bit classico può trovarsi soltanto in due stati, o 0 o 1. Un qubit invece può trovarsi in uno stato combinazione lineare (o sovrapposizione) dei due stati fondamentali (detti stati della base computazionale), indicati come $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Questi stati formano una base

ortonormale per lo spazio degli stati, che è uno spazio vettoriale.

Un qubit quindi si troverà in uno stato generico:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (1.1)$$

dove α e β sono due numeri complessi, i cui moduli quadri rappresentano le probabilità di ottenere, in seguito ad una misura, gli stati 0 e 1 rispettivamente. Poichè la somma di suddette probabilità deve essere uguale all'unità, possiamo pensare allo stato del qubit come ad un vettore unitario nello spazio vettoriale complesso bidimensionale degli stati. Consideriamo a titolo d'esempio lo stato $|+\rangle$ definito come:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle. \quad (1.2)$$

Questo stato, in seguito ad una misura, fornisce il risultato 0 con una probabilità pari ad $1/2$ e il risultato 1 con probabilità $1/2$. Poichè vale la condizione di normalizzazione (equivalente alla condizione secondo cui la somma delle probabilità deve essere unitaria), possiamo sempre scrivere lo stato di un qubit nel seguente modo:

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma}(\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle), \quad (1.3)$$

dove i numeri θ , ϕ e γ sono numeri reali. Vedremo che possiamo ignorare il fattore di fase $e^{i\gamma}$, poichè esso non ha effetti osservabili, e possiamo riscrivere lo stato come:

$$|\psi\rangle = (\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle). \quad (1.4)$$

I numeri θ e ϕ individuano un punto nella sfera tridimensionale di raggio unitario, chiamata sfera di Bloch (figura 1.1), un utile mezzo per rappresentare lo stato di un qubit singolo. Molte operazioni sul singolo qubit possono essere viste come trasformazioni sulla sfera di Bloch.

Nonostante lo stato di un singolo qubit possa essere rappresentato da un punto qualsiasi sulla sfera di Bloch, una misura dello stato sulla base computazionale darà sempre o 0 o 1, facendo collassare la sovrapposizione degli stati nel risultato ottenuto. In altri termini, se il risultato della misura sarà 0, il sistema dopo la misura si troverà nello stato $|0\rangle$, altrimenti nello stato $|1\rangle$.

Da una singola misura, dunque, è possibile ottenere solamente un bit di informazione.

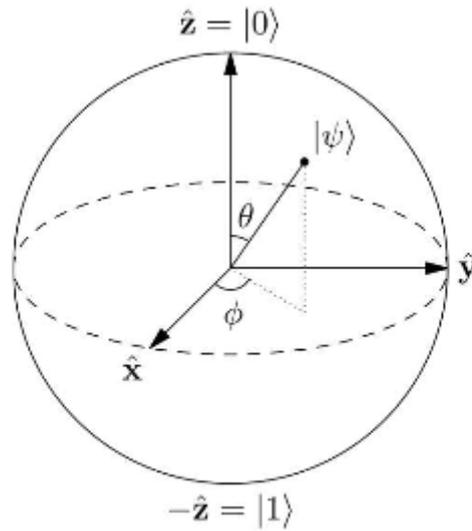


Figura 1.1: Rappresentazione di un qubit sulla sfera di Bloch. Immagine tratta da [12].

Tuttavia vi è una informazione nascosta nelle variabili α e β che viene conservata fintanto che non vengono effettuate misure. Tale informazione cresce esponenzialmente con il numero di qubit che consideriamo, ed è un punto di forza della Meccanica Quantistica come strumento computazionale.

1.1.2 Qubit multipli

Un sistema di due qubit possiede quattro stati fondamentali, esprimibili come $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ e $|11\rangle$, detti stati della base computazionale. In generale lo stato di un sistema di due qubit sarà sovrapposizione di questi quattro stati:

$$|\psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle \quad (1.5)$$

in cui i moduli quadrati delle ampiezze indicano le probabilità di ottenere il corrispondente stato e quindi la loro somma deve essere uguale all'unità.

In un sistema a due qubit possiamo anche misurare lo stato di un singolo qubit. Per esempio, se misuriamo solo il primo qubit otteniamo 0 con probabilità $\alpha_{00}^2 + \alpha_{01}^2$ e 1 con probabilità $\alpha_{10}^2 + \alpha_{11}^2$. Nel caso in cui ottenessimo 0, lo stato del sistema dopo la misura

diventerebbe:

$$|\psi'\rangle = \frac{\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle}{\sqrt{|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2}} \quad (1.6)$$

dove il fattore a denominatore è dovuto alla normalizzazione, in modo che lo stato del sistema sia rappresentato di nuovo da un vettore unitario.

Uno stato particolarmente importante nei sistemi a qubit, che risulterà essere ingrediente fondamentale per il teletrasporto quantistico e la codifica superdensa, è lo *stato di Bell* o *coppia EPR*:

$$\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (1.7)$$

La proprietà interessante di questo stato è che i due qubit sono correlati: se misuriamo il primo qubit si ottiene 0 con probabilità 1/2 e 1 con probabilità 1/2. Nel primo caso lo stato del sistema dopo la misura diventa $|00\rangle$; nel secondo lo stato del sistema collassa nello stato $|11\rangle$. In entrambi i casi, dunque, la misura del secondo qubit restituirà un risultato identico a quella del primo qubit.

Questa correlazione è stata oggetto di intenso interesse dal momento in cui Einstein, Podolsky e Rosen posero l'attenzione sulle strane proprietà di stati come gli stati di Bell. La correlazione tra misure che coinvolgono stati di Bell sono le più forti che possano esistere tra sistemi classici.

Se consideriamo, in generale, un sistema di n qubit, la base computazionale è della forma $|x_1x_2\cdots x_n\rangle$ e uno stato quantico è specificato da 2^n ampiezze. Per $n = 500$ questo numero è più grande del numero stimato degli atomi nell'universo, quindi nessun computer classico potrebbe contenere tutte queste informazioni.

La cosa impressionante è che, sebbene sia un sistema relativamente piccolo di qubit, il numero di variabili in gioco è enorme, e la Natura effettua i suoi calcoli su tutte queste variabili mentre il sistema evolve. Uno degli obiettivi della computazione quantistica è di sfruttare questa enorme potenza di calcolo a nostro vantaggio.

1.2 Porte quantistiche

1.2.1 Porte a qubit singoli

I computer classici sono realizzati utilizzando porte logiche, che manipolano le informazioni nei circuiti. Esistono soltanto due gate possibili che agiscono sul singolo bit: l'identità (o buffer) che mantiene lo stato del bit, e la porta NOT, che inverte lo stato

del bit.

Come si potrebbe realizzare una porta NOT che agisca, invece che su bit classici, su qubit?

Per esempio, potrebbe certamente scambiare lo stato $|0\rangle$ con lo stato $|1\rangle$ e viceversa, comportandosi in questo caso come il gate classico.

Nel caso di una sovrapposizione degli stati, tutte le porte logiche devono agire linearmente. Questo comportamento lineare è una proprietà generale della Meccanica Quantistica [13]. Un comportamento non lineare potrebbe portare ad apparenti paradossi come viaggi nel tempo, comunicazioni ad una velocità superiore a quella della luce e violazioni del secondo principio della termodinamica.

Lo stato ottenuto applicando il gate NOT allo stato $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, sarà $\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle$.

Un rappresentazione dell'azione delle porte quantistiche che si rivela molto comoda è quella matriciale. Se definiamo la porta NOT come la matrice X :

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

e scriviamo lo stato quantistico $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ come il vettore colonna:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

allora l'azione della porta NOT può essere scritta come:

$$X \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Se pensiamo alle porte quantistiche che agiscono sul singolo qubit come matrici 2x2, viene naturale chiedersi se qualsiasi matrice 2x2 possa rappresentare una porta logica. In realtà, solamente le matrici 2x2 unitarie, a causa della condizione di normalizzazione e del fatto che anche lo stato finale deve essere un vettore unitario, possono essere porte quantistiche. E non vi sono altre restrizioni. Questo significa che, al contrario del caso classico in cui esiste una sola porta logica non banale (il NOT) in grado di modificare lo stato del bit, nel caso quantistico ci sono molte porte a singolo qubit non banali.

Illustriamone brevemente due di notevole importanza, il gate Z e il gate Hadamard (H):

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (1.11)$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (1.12)$$

La porta Z lascia inalterato lo stato $|0\rangle$ e inverte il segno dello stato $|1\rangle$. Per visualizzare invece l'azione del gate H , utilizziamo la sfera di Bloch, come illustrato in figura 1.2. La porta H è rappresentata come una rotazione attorno all'asse \hat{y} di 90° seguita da una rotazione di 180° attorno all'asse \hat{x} . Se applichiamo la porta H allo stato $|0\rangle$ otteniamo lo stato $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$.

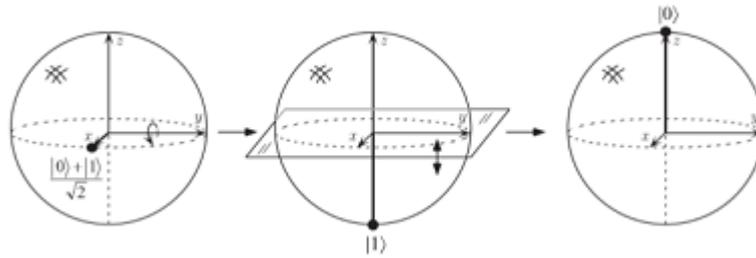


Figura 1.2: Rappresentazione sulla sfera di Bloch dell'azione della porta di Hadamard sullo stato $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$. Immagine tratta da [12].

Applicando un'altra volta la porta H , si riottiene lo stato $|0\rangle$. Se applichiamo la porta H allo stato $|1\rangle$ otteniamo lo stato $(|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$ e, applicandola una seconda volta, di nuovo lo stato $|1\rangle$.

In definitiva possiamo dire che: $H^2 = I$.

Si può verificare, come nel caso del NOT, che la matrice H è unitaria.

In figura 1.3 è illustrata l'azione delle porte X , Z e H , insieme all'azione della porta NOT classica. Sebbene ci siano infinite matrici 2×2 unitarie, è possibile costruire una qualsiasi porta a qubit singolo con un numero finito di porte quantistiche. Infatti, qualsiasi matrice unitaria si può decomporre come:

$$U = e^{i\alpha} \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\beta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\beta}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} & -\sin\frac{\gamma}{2} \\ \sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}, \quad (1.13)$$

con α , β e γ reali. Il primo termine è un fattore di fase, la prima matrice rappresenta una rotazione attorno all'asse \hat{z} e la seconda matrice una rotazione attorno all'asse \hat{y} . Ciò significa che, implementando rotazioni attorno a suddetti assi, è possibile realizzare qualsiasi porta a qubit singolo.

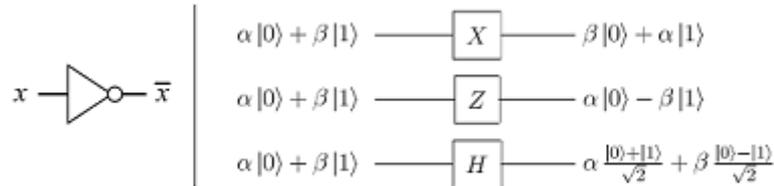


Figura 1.3: Porte a bit singolo (sinistra) e a qubit singolo (destra). Immagine tratta da [12].

1.2.2 Porte a qubit multipli

Nel caso classico, le porte logiche utilizzate sono AND, OR, XOR, NAND e NOR. Qualsiasi funzione su bit può però essere realizzata componendo solo porte di tipo NAND, il quale assume il ruolo di gate universale.

La porta XOR da sola, o combinata con il NOT, non è universale. Questo perché applicando una porta XOR non si modifica la parità totale dei bit, quindi in un circuito con sole porte NOT e XOR se due input x e y hanno la stessa parità, gli output avranno la stessa parità. Ciò restringe la classe di funzioni che possono essere rappresentate.

L'analogo quantistico di una porta universale è il NOT controllato o CNOT. Questa porta ha due qubit in ingresso: uno di controllo e uno bersaglio. Se il qubit di controllo è 0, il qubit bersaglio non viene modificato, altrimenti se il qubit di controllo è 1, il qubit bersaglio viene invertito.

In figura 1.4 è rappresentata l'azione della porta CNOT. Si vede come tale porta generalizza una classica porta XOR, in quanto lo stato iniziale $|A, B\rangle$ diventa lo stato finale $|A, B \oplus A\rangle$, dove \oplus è la somma a modulo 2 e A e B sono qubit.

Dal momento che le trasformazioni unitarie sono invertibili e che le loro inverse sono a loro volta unitarie, tutte le porte quantistiche sono invertibili. Diversamente, le porte logiche classiche XOR e NAND non sono invertibili, poiché non è possibile risalire in modo univoco agli input a partire dall'output.

Questo concetto è legato all'irreversibilità che sottende la cancellazione di un bit di in-

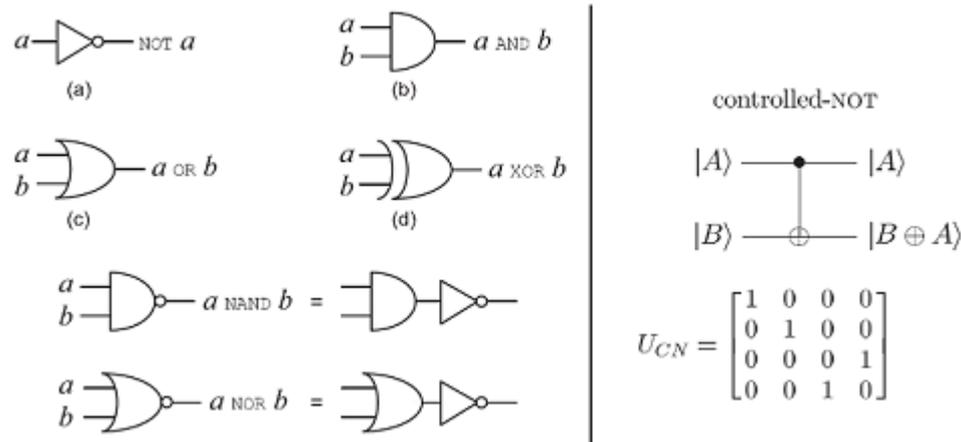


Figura 1.4: Porte logiche standard a singolo bit e a bit multipli (sinistra) e porta quantistica a qubit multiplo, il CNOT (destra). Immagine tratta da [12].

formazione (il che comporta un aumento di entropia).

Non è possibile generalizzare le porte classiche a bit multipli con porte quantistiche a qubit multipli, come invece era possibile nel caso del NOT. Tuttavia, è possibile dimostrare che, così come si può utilizzare una porta universale per i circuiti classici, utilizzando unicamente porte quantistiche CNOT e porte a qubit singoli è possibile ottenere l'equivalente di qualsiasi porta a qubit multipli. Questo fatto rende la porta CNOT la porta quantistica universale [14].

1.2.3 Misure in basi diverse dalla computazionale

Un'altra possibile scelta di basi per rappresentare lo stato di un qubit è $|+\rangle$ e $|-\rangle$. Lo stato di un qubit può essere riscritto in termini degli stati $|+\rangle$ e $|-\rangle$:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \alpha \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}} + \beta \frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (1.14)$$

Misurando rispetto a questa base, il risultato “+” si verificherà con probabilità $(|\alpha + \beta|^2)/2$ e il risultato “-” con probabilità $(|\alpha - \beta|^2)/2$. In generale data una base qualsiasi $|a\rangle$ e $|b\rangle$ per un qubit, è possibile esprimere uno stato arbitrario come combinazione lineare $\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$.

Poichè gli stati sono ortonormali, è possibile effettuare una misura rispetto alla base $|a\rangle$, $|b\rangle$, ottenendo il risultato a con probabilità $|\alpha|^2$ e il risultato b con probabilità $|\beta|^2$.

L'ortonormalità è necessaria affinché $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

1.3 Circuiti quantistici

1.3.1 Proprietà e misura

Analogamente ai circuiti classici, anche i circuiti quantistici sono rappresentati da porte e fili che collegano le varie porte. Tuttavia un filo (o una linea) in un circuito quantistico non corrisponde necessariamente ad un filo fisico reale, ma potrebbe rappresentare lo scorrere del tempo o la posizione di un fotone che si muove nello spazio.

Vi sono alcune cose permesse nei circuiti classici ma vietate nei circuiti quantistici. Primo, i circuiti sono aciclici, cioè non è permesso il feedback da una parte del circuito ad un'altra. Secondo, far convergere più fili in un punto (FANIN) è un'operazione non invertibile e quindi vietata. Terzo, per il *teorema di no-cloning quantistico* [15], secondo cui non è possibile copiare lo stato di un qubit (a meno che esso sia 0 o 1), non è possibile diramare un filo (FANOUT).

L'operazione di misura di un qubit è schematizzata in figura 1.5. Come già visto questa operazione converte un qubit nello stato $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ in un bit classico M (simboleggiato da una doppia linea). Il risultato è 0 con probabilità $|\alpha|^2$ e 1 con probabilità $|\beta|^2$.

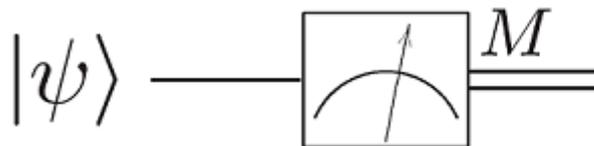


Figura 1.5: Simbolo del circuito quantistico per l'operazione di misura. Immagine tratta da [12].

1.3.2 Circuito di copia di un qubit

Un circuito di copia di un qubit si potrebbe progettare utilizzando una porta CNOT classica che prende il qubit da copiare (in qualche stato conosciuto) e un qubit inizializzato a zero. L'output è rappresentato da due qubit, entrambi nello stato x . Se il qubit da copiare è nello stato $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, lo stato in input al CNOT si può scrivere come:

$$[\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle] |0\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|10\rangle \quad (1.15)$$

Poiché il CNOT flippa il secondo qubit se il primo è 1, l'output sarà $a|00\rangle + b|11\rangle$.

L'azione della porta CNOT in queste condizioni è illustrata in figura 1.6. Abbiamo dunque copiato lo stato $|\psi\rangle$?

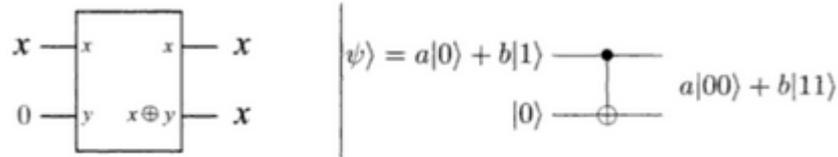


Figura 1.6: Circuiti classico e quantistico per la copia di un bit o qubit il cui stato non è noto. Immagine tratta da [12].

Nel caso in cui sia $|0\rangle$ o $|1\rangle$, in effetti, è ciò che fa. È possibile per un circuito quantistico copiare informazione classica. Ma per uno stato generico $|\psi\rangle$, vediamo che lo stato $|\psi\rangle|\psi\rangle$:

$$|\psi\rangle|\psi\rangle = a^2|00\rangle + ab|01\rangle + ab|10\rangle + b^2|11\rangle \quad (1.16)$$

è diverso dallo stato creato, quindi, a meno che il prodotto ab non sia zero, il circuito di copia non può copiare lo stato di un qubit (*Teorema del no-cloning*).

1.3.3 Computazione classica su computer quantistici

In base a quanto detto finora si potrebbe pensare che non sia possibile fare computazione classica utilizzando un computer quantistico, ma questo non è vero.

Qualsiasi circuito classico può essere rimpiazzato da un circuito equivalente, contenente solo elementi reversibili, attraverso l'utilizzo di un gate detto gate di *Toffoli*. Come illustrato in figura 1.7, il gate di Toffoli presenta tre bit in ingresso e tre bit in uscita. Due bit sono detti *bit di controllo*, e non subiscono alcuna modifica in seguito all'azione del gate. Il terzo bit è detto *bit bersaglio* e risulta flippato se entrambi i bit di controllo sono entrambi a 1, altrimenti risulta inalterato.

Applicando il gate di Toffoli due volte ad un insieme di bit si effettua la trasformazione $(a, b, c) \leftrightarrow (a, b, c \otimes ab)$, e il gate di Toffoli è reversibile, dal momento che esiste il suo inverso, coincidente con il gate stesso.

Il gate di Toffoli può essere utilizzato per simulare porte NAND, come mostrato in figura 1.8, e per fare FANOUT, come mostrato in figura 1.9.

Con queste due operazioni diventa possibile simulare tutti gli altri elementi di un circuito

Inputs			Outputs		
a	b	c	a'	b'	c'
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0

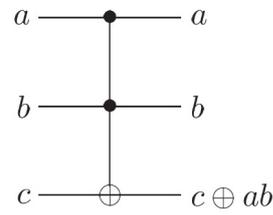


Figura 1.7: Tabella della verità e rappresentazione circuitale del gate di Toffoli. Immagine tratta da [12].

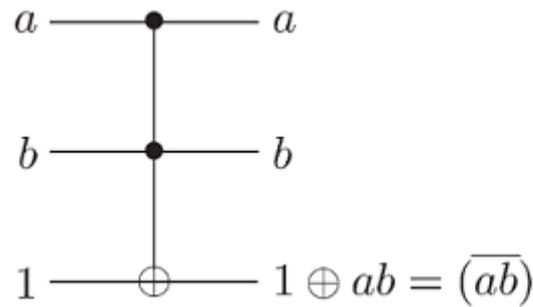


Figura 1.8: Simulazione di un NAND classico utilizzando un gate di Toffoli. I due bit superiori rappresentano gli input del NAND, mentre il terzo bit è preparato nello stato 1, a volte detto stato *ancilla*. L'output del gate è sul terzo bit. Immagine tratta da [12].

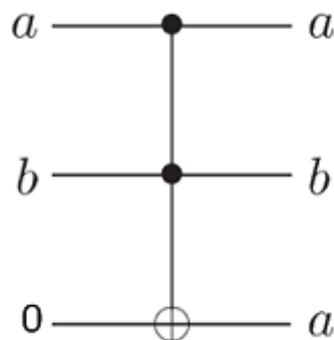


Figura 1.9: FANOUT effettuato con il gate di Toffoli. Immagine tratta da [12].

classico, per cui un circuito classico arbitrario può essere simulato da un equivalente circuito quantistico reversibile.

1.3.4 Gli stati di Bell

Un altro circuito utile è formato da una porta H seguita da una porta CNOT, come mostrato in figura 1.10. Questo circuito trasforma i quattro stati fondamentali del sistema a due qubit negli stati di Bell:

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}; \quad (1.17)$$

$$|\beta_{01}\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}; \quad (1.18)$$

$$|\beta_{10}\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}; \quad (1.19)$$

$$|\beta_{11}\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}; \quad (1.20)$$

Per fare un esempio, consideriamo lo stato $|00\rangle$. La porta H lo trasforma nello stato $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$, ossia porta il primo qubit in una sovrapposizione dei due stati fondamentali. Poi agisce come ingresso di controllo per il CNOT, che inverte il secondo bit solo se il primo è 1.

Il risultato sarà quindi $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$.

In	Out
$ 00\rangle$	$(00\rangle + 11\rangle)/\sqrt{2} \equiv \beta_{00}\rangle$
$ 01\rangle$	$(01\rangle + 10\rangle)/\sqrt{2} \equiv \beta_{01}\rangle$
$ 10\rangle$	$(00\rangle - 11\rangle)/\sqrt{2} \equiv \beta_{10}\rangle$
$ 11\rangle$	$(01\rangle - 10\rangle)/\sqrt{2} \equiv \beta_{11}\rangle$

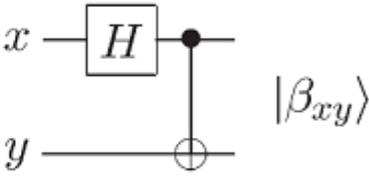


Figura 1.10: Circuito quantistico per creare stati di Bell e tabella della verità input-output. Immagine tratta da [12].

Gli stati di Bell sono molto particolari, in quanto i due qubit si dice che sono *entangled*. Come verrà approfondito nel Capitolo successivo, gli stati *entangled* sono stati in

cui la correlazione quantistica non è nulla. Esistono diversi gradi di entanglement, a seconda che la correlazione sia forte o debole. Gli stati sopra descritti si definiscono stati massimamente *entangled*, ossia di correlazione massima.

1.3.5 Teletrasportare lo stato di un qubit

Per illustrare il protocollo di teletrasporto, immaginiamo due scienziati immaginari, Alice e Bob. L'utilizzo di questi nomi è nato nella comunità di crittografi, dove è importante che un messaggio scambiato non venga intercettato da terzi. All'inizio si indicava con A il mittente e B il destinatario del messaggio, ma un giorno qualcuno pensò fosse meglio chiamarli Alice e Bob.

Un terzo personaggio crea una coppia EPR, che vedremo può essere rappresentata da una coppia di fotoni in uno stato *entangled*, e Alice e Bob ricevono ciascuno un qubit della coppia nel momento in cui vengono separati.

Supponiamo che Alice voglia inviare lo stato quantistico di un terzo qubit, che lei non conosce, a Bob. L'unica cosa che può comunicare è un'informazione classica, attraverso un canale classico, come può essere per esempio una rete telefonica o una comunicazione via radio.

Alice dunque non conosce lo stato del qubit e le leggi della Meccanica Quantistica le impediscono di determinare lo stato avendo a disposizione un singolo qubit.

In linea teorica si potrebbe preparare un numero enorme di qubit tutti nello stesso stato e ripetendo la misura si possono trarre informazioni sulle ampiezze. Ma in questo caso Alice ha a disposizione un solo qubit, il cui stato vuole teletrasportare a Bob. E se anche conoscesse lo stato occorrerebbe un'infinità di informazioni classiche, in quanto lo stato del qubit varia in uno spazio continuo, e impiegherebbe un'eternità a comunicarlo a Bob. Fortunatamente il teletrasporto quantistico utilizza la coppia EPR per mandare lo stato quantico a Bob con un modesto impiego del canale classico di comunicazione tra Alice e Bob.

La procedura è la seguente: Alice fa interagire il suo qubit $|\psi\rangle$ con un qubit della coppia EPR, poi effettua una misura dei qubit in suo possesso (detta misura degli stati di Bell), ottenendo uno dei quattro possibili risultati: 00,01,10,11. E manda questa informazione a Bob, il quale, sulla base del risultato della misura di Alice, effettua una delle quattro operazioni possibili sul suo qubit della coppia EPR e, in tal modo, è in grado di recuperare lo stato originale $|\psi\rangle$. Come è illustrato in figura 1.11, lo stato da teletrasportare è $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, con α e β ampiezze sconosciute.

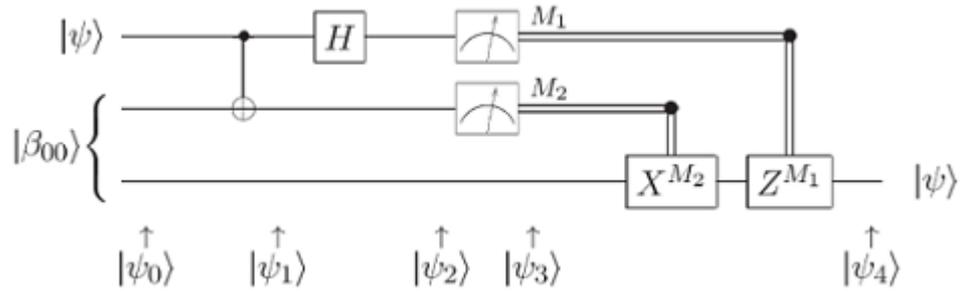


Figura 1.11: Circuito quantistico per il teletrasporto di un qubit. Le prime due linee rappresentano i qubit di Alice, mentre la terza il qubit di Bob. Immagine tratta da [12].

Lo stato in input del circuito è:

$$|\psi_0\rangle = |\psi\rangle|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha|0\rangle (|00\rangle + |11\rangle) + \beta|1\rangle (|00\rangle + |11\rangle)] \quad (1.21)$$

dove, per convenzione, i primi due qubit a sinistra appartengono ad Alice e il terzo appartiene a Bob. Il secondo qubit e il terzo appartengono alla coppia *entangled*. Alice manda il suo qubit alla porta CNOT, ottenendo:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha|0\rangle (|00\rangle + |11\rangle) + \beta|1\rangle (|10\rangle + |01\rangle)]. \quad (1.22)$$

Alice poi manda il suo primo qubit attraverso una porta H , ottenendo:

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2} [\alpha (|0\rangle + |1\rangle) (|00\rangle + |11\rangle) + \beta (|0\rangle - |1\rangle) (|10\rangle + |01\rangle)]. \quad (1.23)$$

Lo stato può essere riscritto nella seguente maniera, semplicemente raggruppando alcuni termini:

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle = \frac{1}{2} [& |00\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |01\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) \\ & + |10\rangle(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) + |11\rangle(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)]. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Il primo termine contiene i qubit di Alice nello stato $|00\rangle$ e il qubit di Bob nello stato $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, che è l'originale.

Dipendentemente dalla misura di Alice, il qubit di Bob si troverà in uno di questi 4 stati

possibili:

$$00 \longrightarrow |\psi_3(00)\rangle \equiv [\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle] \quad (1.25)$$

$$01 \longrightarrow |\psi_3(01)\rangle \equiv [\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle] \quad (1.26)$$

$$10 \longrightarrow |\psi_3(10)\rangle \equiv [\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle] \quad (1.27)$$

$$11 \longrightarrow |\psi_3(11)\rangle \equiv [\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle] \quad (1.28)$$

e per completare il teletrasporto Bob avrà bisogno di conoscere il risultato della misura di Alice. In tal modo potrà applicare una trasformazione appropriata (tramite una porta quantistica) al suo qubit.

Se Alice effettua la misura e ottiene 00, allora Bob non dovrà fare nulla, perché il suo qubit sarà già nello stato giusto. Nel caso in cui, invece, Alice ottenga 01, Bob dovrà applicare la porta X. Se Alice ottiene 10, Bob applicherà il gate Z, infine se il risultato di Alice è 11, Bob applicherà sia X che Z. In sintesi, Bob dovrà applicare la trasformazione $Z^{M_1} X^{M_2}$ al suo qubit e recupererà lo stato $|\psi\rangle$ con successo.

1.3.6 Comunicazioni a velocità ultraluminali e teorema del no-cloning

La teoria della relatività implica che inviare un'informazione ad una velocità superiore a quella della luce potrebbe significare inviare informazioni nel passato.

Fortunatamente, il teletrasporto quantistico non permette tali comunicazioni, in quanto, per completare il teletrasporto, Alice deve comunicare il risultato della sua misura a Bob attraverso un canale classico. Senza di esso, in altri termini, il teletrasporto non comporta alcuna informazione.

Inoltre, il teletrasporto sembra violare il teorema del no-cloning, in quanto uno potrebbe pensare che teletrasportare lo stato quantistico comporti il creare due copie esatte dello stesso qubit. In realtà tale contraddizione è solo apparente, in quanto dopo il teletrasporto solo il qubit target è lasciato nello stato $|\psi\rangle$, mentre, a seguito della misura sugli stati di Bell, il qubit originale perde la sua identità, in quanto diventa *entangled* con il qubit della coppia EPR. In tal modo, lo stato $|\psi\rangle$ viene distrutto nel punto in cui si trova Alice.

1.3.7 L'esperimento di Stern-Gerlach e il modello a qubit

Un esperimento che fornisce un'evidenza dell'esistenza dei qubit è quello che fu effettuato da Stern e Gerlach, negli anni 1921 e 1922 [16].

Un fascio di atomi riscaldati veniva emesso da un forno e condotto all'interno di una regione in cui era presente un campo magnetico non uniforme, che ne causava la deflessione. In seguito veniva registrata la posizione di ciascun atomo.

L'esperimento originale fu realizzato utilizzando atomi di argento, che presentano una struttura atomica complicata. Nel 1927 l'esperimento fu ripetuto con atomi di idrogeno, più semplici in quanto contenenti un solo protone e un elettrone orbitante.

Si può pensare all'elettrone in moto come una corrente elettrica attorno al protone, responsabile della generazione di un campo magnetico. Ogni atomo possiede un momento di dipolo magnetico, quindi è come una piccola barra magnetica con asse corrispondente all'asse attorno a cui si muove l'elettrone.

Se vengono immersi in un campo magnetico, i magneti vengono deflessi. Questo quindi ci aspettiamo in questo esperimento. L'entità della deflessione dipende dal momento di dipolo magnetico degli atomi e dal campo magnetico B . Possiamo causare la deflessione degli atomi di una quantità che dipende dalla componente z del momento di dipolo magnetico, con \hat{z} qualche asse esterno fissato.

Gli atomi, una volta emessi dal forno, possiedono i loro dipoli orientati casualmente in ogni direzione e ci si attendeva una distribuzione continua di atomi in funzione dell'angolo di deflessione.

Ciò che invece emerse dall'esperimento fu un insieme discreto di angoli.

Il momento di dipolo magnetico degli atomi è quantizzato, cioè multiplo discreto di una quantità fondamentale.

Gli atomi di idrogeno hanno momento di dipolo magnetico nullo, quindi ci si aspettava solo un fascio uscente. Invece ne videro due distinti, uno deflesso superiormente e uno inferiormente alla direzione originale del fascio.

La spiegazione di questa fenomenologia è stata fornita introducendo una proprietà quantomeccanica chiamata *spin*, che non possiede un analogo classico. Lo spin non è in alcun modo associabile alla rotazione dell'elettrone attorno al protone, né alla rotazione dell'elettrone su sé stesso, nonostante il termine "spin" indichi il contrario. È come se l'elettrone ruotasse su sé stesso, ma con momento angolare intrinseco "inchiodato", che assume solo valori discreti e non dosabile in alcun modo. Lo spin è una proprietà intrinseca della particella al pari della massa e della carica elettrica e, per l'elettrone, vale $1/2$

in unità di \hbar , mentre la sua terza componente può assumere due valori, $+1/2$ e $-1/2$, sempre in unità di \hbar . Lo spin dell'elettrone fornisce un contributo extra al momento di

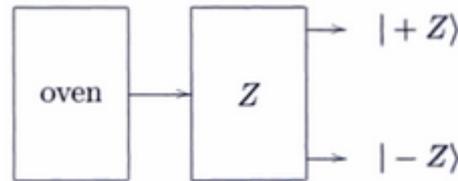


Figura 1.12: Schematizzazione dell'esperimento di Stern-Gerlach. Atomi di idrogeno riscaldati vengono condotti da un forno in una regione in cui è presente un campo magnetico che causa una deflessione in alto ($|+Z\rangle$) o in basso ($|-Z\rangle$) [12].

dipolo magnetico di un atomo di idrogeno. Ipotizziamo che lo spin sia specificato da un singolo bit, che specifichi se l'atomo debba essere deflesso superiormente o inferiormente. Una schematizzazione dell'esperimento originale è rappresentata in figura 1.12. L'output dell'esperimento è rappresentato da due fasci di atomi, che chiamiamo $|+Z\rangle$ e $|-Z\rangle$. Ora ipotizziamo (figura 1.13) di mettere in cascata due apparati di Stern-Gerlach, in modo che il secondo apparato abbia il campo magnetico lungo l'asse \hat{x} . Blocchiamo l'output $|Z\rangle$ dal primo apparato e mandiamo $|+Z\rangle$ al secondo apparato orientato lungo \hat{x} . Mettiamo un rivelatore alla fine per misurare la distribuzione lungo \hat{x} . Un dipolo magnetico classico puntato su $+\hat{z}$ non ha momento magnetico netto lungo la direzione \hat{x} , per cui ci aspetteremmo in output un solo picco centrale. Ciò che comunque si è

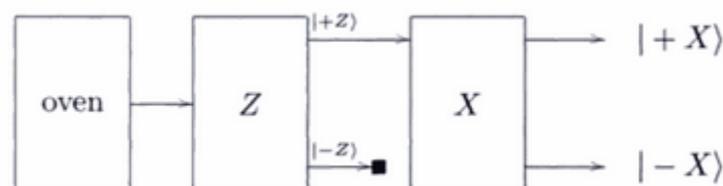


Figura 1.13: Misura con due apparati di Stern-Gerlach in cascata [12].

osservato è la presenza di due picchi di uguale intensità. Questi atomi hanno momenti magnetici definiti lungo ogni asse, indipendentemente. Forse, ogni atomo che passa attraverso il secondo apparato può essere descritto in uno stato che possiamo scrivere come $|+Z\rangle|+X\rangle$ o $|+Z\rangle|-X\rangle$. Possiamo aggiungere un altro apparato in cascata (figura 1.14) di nuovo orientato lungo \hat{z} , a cui mandare soltanto l'output $|+X\rangle$. Ci si aspetta un solo output, $|+Z\rangle$. Ancora, appaiono due picchi di uguale intensità. Quindi

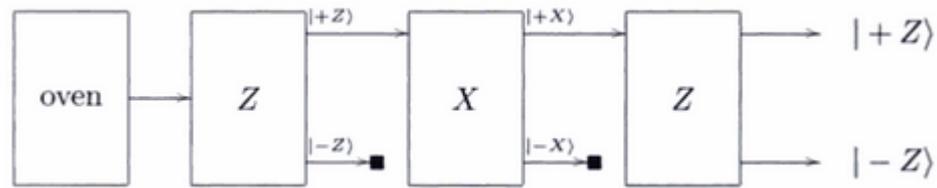


Figura 1.14: Misura con tre apparati di Stern-Gerlach in cascata [12].

la conclusione è che $|+X\rangle$ è un uguale sovrapposizione di $|+Z\rangle$ e $|-Z\rangle$ e che $|+X\rangle$ è un uguale sovrapposizione di $|+Z\rangle$ e $|-Z\rangle$. Otterremmo lo stesso risultato se l'apparato fosse orientato lungo l'asse \hat{y} .

Il modello a qubit fornisce una spiegazione semplice di queste osservazioni sperimentali. Facciamo i seguenti assegnamenti:

$$|+Z\rangle \leftarrow |0\rangle \quad (1.29)$$

$$|-Z\rangle \leftarrow |1\rangle \quad (1.30)$$

$$|+X\rangle \leftarrow (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2} \quad (1.31)$$

$$|-X\rangle \leftarrow (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2} \quad (1.32)$$

L'apparato di Stern-Gerlach lungo \hat{z} misura lo spin (il qubit) nella base computazionale $|0\rangle$ e $|1\rangle$. L'apparato lungo \hat{x} misura lo spin rispetto alla base $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ e $(|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$. Nella cascata \hat{z} - \hat{x} - \hat{z} assumiamo che gli spin siano negli stati $|+Z\rangle = |0\rangle = (|+X\rangle + |-X\rangle)/\sqrt{2}$, dopo essere usciti dal primo apparato.

La probabilità di ottenere nel secondo apparato $|+X\rangle$ è $1/2$ e la probabilità per $|-X\rangle$ è $1/2$. Allo stesso modo la probabilità di ottenere $|+Z\rangle$ all'uscita del terzo apparato è $1/2$.

1.3.8 Distinguibilità quantistica e denaro quantistico

Un problema che si presenta nel caso della computazione quantistica, e non nella computazione classica, è rappresentato dalla distinguibilità degli stati quantistici.

Classicamente, siamo sempre in grado, in linea di principio, di distinguere diversi stati. In Meccanica Quantistica non sempre è possibile distinguere tra stati arbitrari, in quanto non vi è alcun processo ammesso che possa distinguere ad esempio gli stati $|0\rangle$ e

$(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$.

Supponiamo di volere distinguere i due stati misurandoli rispetto alla base computazionale. Se si misura lo stato $|0\rangle$ si otterrà 0 con probabilità 1, se si misura $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ si otterrà o 0 o 1 con probabilità 1/2 ciascuno. Se si ottiene 1 come risultato allora si è sicuri che lo stato di partenza fosse $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$, ma non si può dire nulla sullo stato ottenendo come risultato 0.

Stati non ortogonali sono indistinguibili e questo fatto rappresenta il cuore della teoria dell'informazione e della computazione quantistica. Uno stato quantistico contiene informazioni nascoste, inaccessibili alla misura, e ciò è alla base della crittografia quantistica e di denaro quantistico.

Vediamo come l'indistinguibilità si collega alla possibilità o meno di comunicazioni di informazioni ad una velocità superiore a quella della luce e ad applicazioni al denaro quantistico. Immaginiamo per un momento di poter distinguere tra stati arbitrari quantistici. Ciò implicherebbe la possibilità di comunicazioni ad una velocità ultraluminale, sfruttando l'entanglement.

Supponiamo che Alice e Bob condividano una coppia *entangled* di qubit nello stato $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$. Se Alice misura nella base computazionale, gli stati dopo la misura saranno $|00\rangle$ con probabilità 1/2 e $|11\rangle$ con la stessa probabilità. Così, il sistema di Bob si trova o nello stato $|0\rangle$ con probabilità 1/2 o nello stato $|1\rangle$ con probabilità 1/2.

Supponiamo che Alice abbia misurato, invece, rispetto alla base $|+\rangle, |-\rangle$. Sapendo che $|0\rangle = (|+\rangle + |-\rangle)/\sqrt{2}$ e $|1\rangle = (|+\rangle - |-\rangle)/\sqrt{2}$, lo stato iniziale del sistema Alice+Bob può essere riscritto come $(|++\rangle + |--\rangle)/\sqrt{2}$.

Se Alice misura rispetto alla base $|+\rangle, |-\rangle$, lo stato del sistema di Bob dopo la misura sarà $|+\rangle$ o $|-\rangle$ con probabilità 1/2 ciascuno. Se Bob avesse accesso ad un dispositivo che sapesse distinguere i 4 stati, $|0\rangle, |1\rangle, |+\rangle, |-\rangle$, potrebbe essere in grado di dire se Alice ha misurato nella base computazionale o meno. E avrebbe accesso istantaneamente a quella informazione, nel momento esatto in cui Alice effettuerebbe la sua misura, e ciò rappresenterebbe un modo per Alice e Bob di comunicare ad una velocità superiore a quella della luce. Questa impossibilità di distinguere stati non ortogonali non deve essere vissuto come un limite, ma può essere sfruttato positivamente.

Nel 1970 Wiesner (fu lui stesso ad introdurre il concetto di qubit) maturò l'idea di denaro quantistico [17], un denaro che non può essere contraffatto. Immaginiamo che una banca voglia produrre banconote con sopra impresso un numero di serie (classico) e una sequenza di qubit ognuno nello stato $|0\rangle$ o $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$.

Nessuno, a parte la banca, conosce quale sequenza di questi due stati è realizzata, e la banca mantiene una lista dei numeri di serie. Per falsificare la banconota è necessario leggerne il numero di serie e poi stamparne un'altra con la stessa sequenza. Per leggere la sequenza il falsario deve misurare la sequenza, misurando singolarmente i qubit.

Supponiamo che misuri il primo qubit che si trova nello stato $|0\rangle$, rispetto alla base $|0\rangle$. Fin qui nessun problema. Ma già alla misura del secondo qubit iniziano le complicazioni. Supponiamo che tale qubit si trovi nello stato $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$. Se si continuassero a misurare i qubit nella base computazionale, otterrei 0 o 1 in maniera casuale e non avrei alcuna informazione esatta. Il falsario dovrebbe sapere a priori quale base sia stata usata per codificare ogni qubit, informazione posseduta solo dalla banca. Per tale motivo le banconote sono impossibili da contraffare esattamente, poiché è impossibile determinare con certezza lo stato dei qubit della banconota originaria, senza distruggerla.

Questa codifica di qubit realizzata utilizzando due basi diverse è detta *codifica congiunta*. La realizzazione pratica di una tale banconota è ancora troppo complessa per gli strumenti tecnologici di cui siamo a disposizione.

Capitolo 2

Principi quantomeccanici del teletrasporto quantistico

In questo Capitolo verranno richiamati brevemente i *Postulati della Meccanica Quantistica*, per la cui trattazione più dettagliata si rimanda all'Appendice A, e verrà trattato il fenomeno dell'entanglement, tipicamente quantistico.

Secondo la fisica classica le proprietà fondamentali di un oggetto (energia, posizione e velocità) sono direttamente osservabili. In Meccanica Quantistica queste quantità non sono più fondamentali ma sono sostituite dal vettore di stato (*Postulato 1*), il quale non può essere osservato direttamente. Quindi si può pensare che ci sia un mondo nascosto nella Meccanica Quantistica, a cui possiamo solo accedere indirettamente e in modo imperfetto.

L'evoluzione del vettore di stato di un sistema isolato è descritto dal *Postulato 2*. Spesso, però, siamo interessati a studiare il sistema osservandolo e, quindi, interagendo con esso. Osservare un sistema classico non comporta alcuna modifica allo stato del sistema. Immaginiamo quanto sarebbe complicato giocare a tennis se ogni volta che si guarda la pallina quest'ultima modificasse la sua posizione!

In Meccanica Quantistica, in accordo con il *Postulato 3*, un'osservazione è una procedura invasiva che tipicamente modifica lo stato del sistema.

Infine, il *Postulato 4* tratta la descrizione dei sistemi composti ed è di fondamentale importanza per comprendere i principi del teletrasporto quantistico, in quanto rende conto dell'esistenza di stati *entangled*.

2.1 Sistemi composti ed entanglement

In questo Capitolo verrà trattato un aspetto quantomeccanico talmente distante dalla fisica classica da irritare fisici e filosofi da quasi 80 anni, tra cui Albert Einstein, il quale giunse alla conclusione che mancasse qualcosa di fondamentale alla Meccanica Quantistica.

2.1.1 Correlazione classica

Prima di dedicarci all'entanglement quantistico, discutiamo brevemente quello che potremmo definire entanglement *classico*.

Nel seguente esperimento Alice e Bob riceveranno aiuto da un terzo attore, Charlie. Charlie possiede due monete, una da 1 centesimo e una da 10 centesimi. Le mescola e le consegna una ad Alice e una a Bob. Nessuno guarda le monete e nessuno sa chi ha ricevuto la moneta da 1 centesimo e chi quella da 10 centesimi. A questo punto, Alice sale su una navetta per Alpha Centauri, mentre Bob rimane sulla Terra.

Prima del viaggio, Alice e Bob sincronizzano i loro orologi e si accordano in modo che Alice guardi la sua moneta uno o due secondi prima che Bob guardi la sua.

Nel momento in cui Alice guarda la sua moneta sa esattamente quale moneta ha Bob, anche prima che lui la guardi. Ovviamente Alice e Bob non hanno violato alcun postulato fondamentale della Relatività. Ciò che violerebbe la relatività sarebbe il fatto che l'osservazione di Alice *comunicasse istantaneamente a Bob* ciò che deve aspettarsi di avere in mano. Alice può sapere ciò che Bob vedrà, ma non può in alcun modo dirglielo. Ripetiamo questo esperimento molte volte. Charlie dipinge un “ $\sigma = +1$ ” sulla moneta da 1 centesimo e “ $\sigma = -1$ ” su quella da 10 centesimi. Se ipotizziamo che Charlie agisca in maniera casuale, mescolando di volta in volta le monete prima di assegnarle, in media, sia Alice che Bob riceverebbero lo stesso numero di monete da 1 e da 10 centesimi.

Indicando con σ_A le osservazioni di Alice e con σ_B le osservazioni di Bob, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\langle \sigma_A \rangle &= 0 \\ \langle \sigma_B \rangle &= 0.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Se Alice e Bob registrano le loro osservazioni e si incontrano di nuovo per confrontarle, troveranno una correlazione perfetta. Per ogni esperimento in cui $\sigma_A = +1$, avrà $\sigma_B = -1$

e viceversa. In altre parole, il prodotto $\sigma_A\sigma_B$ è sempre uguale a -1,

$$\langle \sigma_A\sigma_B \rangle = -1. \quad (2.2)$$

Si noti che il valore medio dei prodotti non coincide con il prodotto dei valori medi:

$$\langle \sigma_A \rangle \langle \sigma_B \rangle \neq \langle \sigma_A\sigma_B \rangle. \quad (2.3)$$

Questo indica che le osservazioni di Alice e Bob sono *correlate*. In effetti, la quantità

$$\langle \sigma_A\sigma_B \rangle - \langle \sigma_A \rangle \langle \sigma_B \rangle \quad (2.4)$$

è detta *correlazione statistica* tra le osservazioni di Alice e Bob, anche nel caso in cui sia nulla.

Il motivo di questa correlazione è il fatto che in origine Alice e Bob si trovavano nello stesso posto e Charlie possedeva una sola moneta di ogni tipo. La correlazione rimane quando Alice si trova su Alpha Centauri, semplicemente perchè le monete non sono cambiate durante il viaggio.

Supponiamo di avere una distribuzione di probabilità $P(a, b)$ per due variabili a e b . Se le variabili sono totalmente scorrelate, la loro probabilità si dice che “fattorizza”:

$$P(a, b) = P_A(a)P_B(b) \quad (2.5)$$

dove $P_A(a)$ e $P_B(b)$ sono le singole probabilità per a e b .

Vediamo ora una situazione che porterebbe alla fattorizzazione delle probabilità. Supponiamo di avere due Charlie, Charlie A e Charlie B, e che i due non abbiano modo di comunicare tra di loro. Charlie A mescola le sue monete e ne dà una a caso ad Alice, la stessa cosa fa Bob.

In fisica classica utilizziamo la statistica e la probabilità quando ignoriamo qualcosa che, in linea di principio, potrebbe essere noto. Per esempio, dopo aver mescolato le monete nel primo esperimento, Charlie avrebbe potuto dare una sbirciata e poi consegnare ad Alice e Bob le monete. Questo non avrebbe cambiato i risultati. In Meccanica Classica la distribuzione di probabilità $P(a, b)$ rappresenta il fatto che lo stato del sistema non è completamente specificato.

Un punto importante è che, in fisica classica, la conoscenza completa del sistema implica la conoscenza completa di ogni parte di esso. Non avrebbe senso dire che Charlie co-

nosceva tutto sul sistema delle due monete, ma non aveva l'informazione completa sulle singole monete. Questi concetti classici sono profondamente radicati nel nostro modo di pensare, ma dobbiamo abbandonarli se vogliamo tentare una comprensione del mondo quantistico.

2.1.2 Combinare i sistemi quantistici: due qubit

Consideriamo il nostro sistema composto da due qubit, uno appartenente ad Alice e uno appartenente a Bob. Chiameremo $|\psi_A\rangle$ i vettori di stato del qubit di Alice, $|\psi_B\rangle$ i vettori di stato del qubit di Bob. Il primo vive nello spazio degli stati S_A del sistema di Alice, il secondo nello spazio degli stati S_B del sistema di Bob.

In accordo con il *Postulato 4*, è possibile costruire lo spazio degli stati del sistema composto S_{AB} attraverso il *prodotto tensoriale* degli spazi S_A e S_B :

$$S_{AB} = S_A \otimes S_B \quad (2.6)$$

Per definire S_{AB} è sufficiente specificare i suoi vettori di base.

Ogni membro di una base ortonormale di S_{AB} è etichettato da una coppia di vettori, uno proveniente da S_A e uno proveniente da S_B . Indichiamo con $|a\rangle|b\rangle$ un singolo vettore di base del sistema combinato.

Consideriamo un operatore M che agisce sullo spazio degli stati del sistema composto. Lo possiamo rappresentare tramite una matrice. Gli elementi di matrice si costituiscono mediante il “sandwich” dell'operatore tra i vettori di base:

$$\langle a'b'|M|ab\rangle = M_{a'b',ab} \quad (2.7)$$

Ogni riga della matrice è etichettata con un singolo indice $(a'b')$ del sistema composto, e ogni colonna con (ab) . I vettori $|ab\rangle$ sono ortonormali e possiamo esprimere questo concetto utilizzando la delta di Kronecker:

$$\langle a'b'|ab\rangle = \delta_{aa'}\delta_{bb'}. \quad (2.8)$$

Una volta che conosciamo i vettori di base, qualsiasi loro sovrapposizione è permessa. Dunque, qualsiasi stato del sistema composto può essere sviluppato come

$$|\Psi\rangle = \sum_{a,b} \psi(a,b)|ab\rangle. \quad (2.9)$$

Immaginiamo ora che i due qubit di Alice e Bob si trovano fissi nello spazio in due punti vicini ma differenti. Alice e Bob hanno due apparati sperimentali, denotati con A e B rispettivamente, che possono usare per preparare stati ed effettuare misure sui qubit. Le misure possono essere effettuate rispetto a qualsiasi base. Secondo i principi che abbiamo enunciato in precedenza, lo spazio degli stati di un sistema a due spin è un prodotto tensoriale. Lavoriamo in una base specifica, ad esempio quella computazionale. I vettori di base del sistema congiunto sono

$$|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle, \quad (2.10)$$

dove il primo numero rappresenta lo stato del qubit di Alice e il secondo lo stato del qubit di Bob.

2.1.3 Stati Prodotto

Il più semplice tipo di stato per il sistema composto è chiamato *stato prodotto*. Uno stato prodotto è il risultato di due preparazioni totalmente indipendenti dello stato del qubit da parte di Alice e Bob.

Supponiamo che Alice prepari il suo qubit nello stato

$$\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle \quad (2.11)$$

e che Bob prepari il suo qubit nello stato

$$\beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle \quad (2.12)$$

e supponiamo che gli stati siano normalizzati.

$$\begin{aligned} \alpha_0^* \alpha_0 + \alpha_1^* \alpha_1 &= 1 \\ \beta_0^* \beta_0 + \beta_1^* \beta_1 &= 1. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Il fatto che valga un'equazione di normalizzazione separata per ciascun sottosistema è cruciale: se le due equazioni non valessero indipendentemente, non avremmo uno stato prodotto. Lo stato che descrive il sistema combinato è

$$|\text{stato prodotto}\rangle = (\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle) \otimes (\beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle) \quad (2.14)$$

dove il primo fattore rappresenta lo stato di Alice e il secondo quello di Bob. Il lato destro diventa

$$\alpha_0\beta_0|00\rangle + \alpha_0\beta_1|01\rangle + \alpha_1\beta_0|10\rangle + \alpha_1\beta_1|11\rangle. \quad (2.15)$$

La caratteristica principale di uno stato prodotto è che ogni sottosistema si comporta in modo indipendente dall'altro. Se Bob compie un esperimento sul suo sottosistema, il risultato è esattamente lo stesso che otterrebbe se Alice e il suo sistema non esistessero. Lo stesso vale per Alice.

Consideriamo il numero di parametri necessari a specificare un tale stato prodotto. Ogni fattore richiede due numeri complessi (α_0 e α_1 per Alice, β_0 e β_1 per Bob), dunque quattro numeri complessi in totale. Il che equivale a otto parametri reali. Tuttavia, le condizioni di normalizzazione ne eliminano due. E poichè anche la fase globale di ogni stato non ha significato fisico, il numero totale di parametri reali necessari è quattro. Ciò non ci sorprende: se occorrono due parametri per descrivere un singolo sistema, ne occorrono quattro per descriverne due indipendenti.

2.1.4 Stati entangled

I principi della Meccanica Quantistica ci consentono di sovrapporre i vettori di base nel modo più generale possibile rispetto ad un semplice prodotto.

Il più generale vettore nello spazio degli stati composto è:

$$\psi_{00}|00\rangle + \psi_{01}|01\rangle + \psi_{10}|10\rangle + \psi_{11}|11\rangle \quad (2.16)$$

dove è stato usato il simbolo ψ al posto di α e β per rappresentare i coefficienti complessi, ma stavolta abbiamo solo una condizione di normalizzazione,

$$\psi_{00}^*\psi_{00} + \psi_{01}^*\psi_{01} + \psi_{10}^*\psi_{10} + \psi_{11}^*\psi_{11} = 1 \quad (2.17)$$

e solo una fase globale da ignorare. Il risultato è che lo stato generale per un sistema a due qubit ha sei parametri reali. Evidentemente lo spazio degli stati è più ricco rispetto agli stati prodotto, che possono essere preparati indipendentemente da Alice e Bob.

Ecco che entra in gioco l'*entanglement*. L'*entanglement* non è una proprietà del tipo "tutto o niente": alcuni stati sono più *entangled* ("correlati") di altri. Ecco un esempio di uno stato *massimamente entangled*, detto stato di *singoletto*

$$|sing\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle). \quad (2.18)$$

Lo stato di singoletto non può essere scritto come stato prodotto, e lo stesso vale per gli altri stati massimamente *entangled* detti di *tripletto*

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle). \quad (2.19)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle). \quad (2.20)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle). \quad (2.21)$$

Questi stati dovrebbero essere già familiari. Li abbiamo incontrati nel Capitolo 1, quando abbiamo parlato degli stati di Bell a proposito della computazione quantistica.

Uno stato massimamente *entangled* contiene una descrizione completa del sistema combinato, mentre non si conosce nulla dei singoli sottosistemi. Com'è possibile? Come possiamo sapere *tutto ciò che è possibile sapere* del sistema combinato e non sapere *nulla* sui singoli sistemi? Questo è il mistero dell'*entanglement*.

2.2 L'operatore densità

Finora abbiamo formulato la Meccanica Quantistica utilizzando il linguaggio dei vettori di stato. Una formulazione alternativa è possibile utilizzando uno strumento conosciuto come *operatore densità* o *matrice densità*. Questa formulazione alternativa è matematicamente equivalente all'approccio basato sul vettore di stato, ma fornisce un linguaggio più conveniente per descrivere alcuni scenari che si incontrano comunemente in Meccanica Quantistica.

Il concetto fu introdotto da John von Neumann nel 1927 [18], e indipendentemente da

Lev Landau [19] e Felix Bloch [20] nel 1927 e 1946, rispettivamente. Si può considerare l'analogo quantistico della distribuzione di probabilità nello spazio delle fasi in Meccanica Classica.

2.2.1 Ensemble di stati quantistici

L'operatore densità è un operatore autoaggiunto che rappresenta uno strumento conveniente per la descrizione di sistemi quantistici il cui stato non è completamente determinato. Più precisamente, supponiamo che un sistema quantistico si trovi in una miscela statistica, ossia che si possa trovarsi in uno degli stati $|\psi_i\rangle$, dove i è un indice, con probabilità p_i (tali che $\sum_i p_i = 1$). Chiameremo $(p_i, |\psi_i\rangle)$ un *ensemble di stati puri*. L'operatore densità per il sistema è definito dall'equazione

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|. \quad (2.22)$$

Si tratta quindi della somma, pesata attraverso le probabilità, degli *operatori di proiezione* sugli stati $|\psi_i\rangle$. Se il sistema si trova in uno *stato puro* $|\psi\rangle$, la somma si riduce al proiettore $|\psi\rangle\langle\psi|$.

Uno stato puro rappresenta la massima informazione che Bob può ottenere su un sistema quantistico. Nel caso più generale, l'operatore densità è costituito da diversi proiettori, e dunque diciamo che rappresenta una *miscela*.

L'operatore densità è spesso conosciuto come *matrice densità* e i due termini sono usati in maniera intercambiabile. In realtà, la matrice densità è la matrice che rappresenta l'operatore densità in una certa base ortonormale.

2.2.2 Proprietà generali dell'operatore densità

Gli operatori densità sono caratterizzati dal seguente teorema:

Teorema 3.1: (Caratterizzazione degli operatori densità) Un operatore ρ è l'operatore densità associato all'ensemble $(p_i, |\psi_i\rangle)$ se e solo se soddisfa le condizioni:

(1) **(Condizione di traccia)** ρ ha traccia uguale a 1 (poichè $\sum_i p_i = 1$).

(2) **(Condizione di positività)** ρ è un operatore positivo e ha autovalori non negativi.

In particolare, gli autovalori della matrice densità sono positivi e compresi tra 0 e 1. Ne consegue che se un autovalore è 1, tutti gli altri sono necessariamente 0.

Per uno stato puro si ha:

$$\rho^2 = \rho \quad (2.23)$$

$$Tr(\rho^2) = 1 \quad (2.24)$$

Per una miscela di stati:

$$\rho^2 \neq \rho \quad (2.25)$$

$$Tr(\rho^2) < 1 \quad (2.26)$$

2.2.3 L'operatore densità ridotto

La più profonda applicazione dell'operatore densità è come strumento descrittivo di sottosistemi facenti parte di sistemi quantistici composti. Una tale descrizione è fornita dall'*Operatore densità ridotto*, concetto introdotto da Paul Dirac nel 1930 [21].

Supponiamo di avere due sistemi A e B , il cui stato è descritto dall'operatore densità ρ^{AB} . L'operatore densità ridotto per il sistema A è definito come

$$\rho^A \equiv Tr_B(\rho^{AB}) \quad (2.27)$$

dove Tr_B è detta *traccia parziale* sul sistema B . La traccia parziale è definita come

$$Tr_B(|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|) \equiv |a_1\rangle\langle a_2| Tr(|b_1\rangle\langle b_2|) \quad (2.28)$$

dove $|a_1\rangle$ e $|a_2\rangle$ sono due vettori qualsiasi nello spazio degli stati di A , e $|b_1\rangle$ e $|b_2\rangle$ sono due vettori qualsiasi nello spazio degli stati di B . L'operazione di traccia che appare sul lato destro è l'usuale operazione di traccia per il sistema B , quindi $Tr(|b_1\rangle\langle b_2|) = \langle b_1|b_2\rangle$.

In generale la traccia parziale è lineare nei suoi input.

L'operatore densità ridotto fornisce le corrette statistiche per misure effettuate sul sistema A .

2.2.4 Entanglement e operatore densità ridotto

Anche la fisica classica utilizza i concetti di stato puro e miscela, ma non vengono chiamati in questo modo. Consideriamo un sistema di due particelle che si muovono su una retta. Secondo le leggi della Meccanica Classica, possiamo calcolarne le orbite conoscen-

do le posizioni (x_1, x_2) e i momenti (p_1, p_2) ad un certo istante temporale. Lo stato del sistema è specificato da quattro numeri: x_1, x_2, p_1 e p_2 . Conoscendo questi quattro numeri abbiamo la descrizione più completa possibile del sistema a due particelle. Possiamo chiamare questo uno stato puro classico. Spesso, invece, non conosciamo lo stato esatto, ma solo qualche informazione di natura probabilistica, che può essere codificata in una densità di probabilità $\rho(x_1, x_2, p_1, p_2)$.

Uno stato puro classico è un caso particolare di una densità di probabilità in cui ρ è diversa da zero solo in un punto. In generale, ρ è *distribuita* su più valori e possiamo parlare di miscela classica.

Una cosa dovrebbe risultare ovvia da questo esempio: se si conosce lo stato puro per il sistema combinato delle due particelle, allora si conosce tutto delle singole particelle. Uno stato puro per le due particelle classiche implica uno stato puro per ciascuna particella. Ma questo è esattamente ciò che *non è vero* in Meccanica Quantistica nel caso di un sistema *entangled*. Lo stato di un sistema composto può essere puro, ma i suoi costituenti devono essere descritti da una miscela.

Il seguente esempio può aiutarci a comprendere l'operatore densità ridotto e il concetto di entanglement.

Supponiamo che un sistema quantistico si trovi in uno stato prodotto $\rho^{AB} = \rho \otimes \sigma$, dove ρ è l'operatore densità per il sistema A e σ è l'operatore densità per il sistema B . Si ha

$$\rho^A = Tr_B(\rho \otimes \sigma) = \rho, \quad (2.29)$$

che è il risultato che intuitivamente ci aspettiamo. Similmente, per quello stato, $\rho^B = \sigma$. Un esempio meno banale è rappresentato dallo stato di Bell $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$. Questo stato ha un operatore densità

$$\rho = \left(\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\langle 00| + \langle 11|}{\sqrt{2}} \right) \quad (2.30)$$

$$= \frac{|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 11|}{2} \quad (2.31)$$

L'operatore densità ridotto per il primo qubit risulta essere

$$\rho^1 = Tr_2(\rho) \quad (2.32)$$

$$= \frac{Tr_2(|00\rangle\langle 00|) + Tr_2(|11\rangle\langle 00|) + Tr_2(|00\rangle\langle 11|) + Tr_2(|11\rangle\langle 11|)}{2} \quad (2.33)$$

$$= \frac{|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|}{2} \quad (2.34)$$

$$= \frac{|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|}{2} \quad (2.35)$$

$$= \frac{I}{2} \quad (2.36)$$

Risulta, quindi, che questo stato rappresenta una miscela, dal momento che $Tr((I/2)^2) = 1/2 < 1$.

Lo stato del sistema composto dai qubit è uno stato puro, cioè noto esattamente, mentre il primo qubit si trova in uno stato miscela, cioè uno stato di cui apparentemente non abbiamo la minima conoscenza.

2.2.5 Test di correlazione per l'entanglement

Supponiamo di conoscere lo stato di un sistema composto da A e B : come è possibile determinare se lo stato corrispondente è *entangled*? Esistono differenti gradi di entanglement? Se sì, come è possibile quantificarli?

L'entanglement è la generalizzazione quantistica della correlazione. In altri termini, indica che Alice può apprendere qualcosa sulla metà di Bob del sistema misurando solo la propria parte.

All'inizio di questo paragrafo abbiamo parlato del concetto di correlazione usando le monete. Se Alice osserva la moneta che Charlie le ha dato, non sa solamente quale moneta possiede, ma sa anche quale moneta possiede Bob. Questa è la parte sperimentale. L'impronta matematica della presenza della correlazione è che la funzione di probabilità $P(a, b)$ non fattorizza. Ipotizziamo che A sia un'osservabile di Alice e B un'osservabile di Bob. La loro correlazione è definita in termini dei valori di aspettazione delle singole osservabili e del loro prodotto. Si definisce correlazione $C(A, B)$ tra A e B la quantità:

$$C(A, B) = \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle. \quad (2.37)$$

Si può dimostrare che date due osservabili, A di Alice e B di Bob, per uno stato prodotto la correlazione è zero.

Se un sistema si trova in uno stato in cui è possibile trovare due osservabili A e B correlate, ovvero per le quali $C(A, B)$ è diversa da zero, allora lo stato è *entangled*.

La correlazione è definita in modo da essere compresa tra -1 e $+1$. I valori estremi rappresentano la massima correlazione, negativa e positiva: maggiore è la correlazione in valore assoluto, maggiore è l'entanglement. Se $C(A, B)$ è zero, non vi è correlazione e, dunque, non vi è entanglement.

Per calcolare le correlazioni bisogna conoscere la parte di Bob, la parte di Alice e la funzione d'onda del sistema completo. Ma esiste un altro test per l'entanglement che richiede la sola conoscenza della matrice densità di Alice (o di Bob).

Se il sistema composto da Alice e Bob si trova in uno stato prodotto, allora la matrice densità di Alice (o di Bob) ha uno e uno solo autovalore uguale a 1, e tutti gli altri uguali a zero. Inoltre, l'autovettore con autovalore diverso da zero è semplicemente la funzione d'onda della metà di Alice del sistema.

In questa situazione il sistema di Alice si trova in uno stato puro. Tutte le osservazioni di Alice sono descritte come se Bob e il suo sistema non esistessero e Alice avesse un sistema isolato descritto dalla funzione d'onda $\psi(a')$.

L'opposto di uno stato puro è uno stato massimamente *entangled*, per i quali nulla è noto dei costituenti, mentre si ha la massima conoscenza sul sistema composto.

Il massimo entanglement implica una totale mancanza di informazione sul sottosistema di Alice per esperimenti che coinvolgano solo quel sottosistema. Ma d'altra parte implica una grande correlazione tra le misure di Alice e di Bob. Per lo stato di singoletto, se Alice misura una qualsiasi componente del suo spin, conosce automaticamente il risultato che Bob otterrebbe dalla misura della stessa componente del proprio spin.

2.3 Applicazioni quantomeccaniche dell'entanglement

2.3.1 Teletrasporto quantistico e operatore densità ridotto

Un'utile applicazione dell'operatore densità è costituito dall'analisi della procedura di teletrasporto quantistico. Tale procedura, come specificato nel Capitolo 1, consiste nell'inviare informazioni sullo stato quantistico da Alice a Bob, sfruttando il fatto che Alice e Bob hanno a disposizione un canale quantistico, rappresentato da una coppia EPR, e un canale classico di comunicazione. A prima vista sembra che il teletrasporto possa

essere utilizzato per effettuare comunicazioni più veloci della luce, in contrasto con i postulati della Relatività. Vediamo come l'operatore densità renda rigorosa l'impossibilità da parte di Alice di effettuare comunicazioni ultraluminali. Richiamiamo lo stato quantistico dei tre qubit prima che Alice effettui la sua misura:

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2} [|00\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |01\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) + |10\rangle(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) + |11\rangle(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)]. \quad (2.38)$$

Misurando nella base computazionale di Alice, lo stato del sistema dopo la misura potrà essere uno dei seguenti:

$$|00\rangle[\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle] \quad (2.39)$$

$$|01\rangle[\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle] \quad (2.40)$$

$$|10\rangle[\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle] \quad (2.41)$$

$$|11\rangle[\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle] \quad (2.42)$$

con la stessa probabilità (1/4). L'operatore densità del sistema è:

$$\rho = \frac{1}{4} [|00\rangle\langle 00|(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\alpha^*\langle 0| + \beta^*\langle 1|) + |01\rangle\langle 01|(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)(\alpha^*\langle 1| + \beta^*\langle 0|) + |10\rangle\langle 10|(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle)(\alpha^*\langle 0| - \beta^*\langle 1|) + |11\rangle\langle 11|(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)(\alpha^*\langle 1| - \beta^*\langle 0|)]. \quad (2.43)$$

L'operatore densità ridotto per il sistema di Bob risulta essere:

$$\rho = \frac{1}{4} [(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\alpha^*\langle 0| + \beta^*\langle 1|) + (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)(\alpha^*\langle 1| + \beta^*\langle 0|) + (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle)(\alpha^*\langle 0| - \beta^*\langle 1|) + (\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)(\alpha^*\langle 1| - \beta^*\langle 0|)] \quad (2.44)$$

$$= \frac{2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)|0\rangle\langle 0| + 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)|1\rangle\langle 1|}{4} \quad (2.45)$$

$$= \frac{|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|}{2} \quad (2.46)$$

$$= \frac{I}{2} \quad (2.47)$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo utilizzato la relazione di completezza.

Lo stato del sistema di Bob dopo che Alice ha effettuato la misura ma prima che Bob conosca il risultato della misura è $I/2$.

Questo stato non ha alcuna dipendenza dallo stato $|\psi\rangle$ teletrasportato e qualsiasi misura effettuata da Bob non contiene alcuna informazione su $|\psi\rangle$. Ciò costituisce una garanzia che Alice non utilizzi la procedura di teletrasporto per trasmettere informazioni a Bob più veloce di quanto viaggerebbe la luce.

2.3.2 Codifica superdensa

Un altro esempio di applicazione sorprendente di Meccanica Quantistica elementare è rappresentato dalla *codifica superdensa*. Consideriamo due sistemi, Alice e Bob, che si trovano ad una certa distanza l'uno dall'altra. Alice desidera trasmettere due bit classici di informazione a Bob, ma le è concesso di inviare un singolo qubit.

Grazie alla codifica superdensa, utilizzando un qubit che fa parte di una coppia *entangled*, è possibile inviare due bit di informazione, più di quanto è in grado di trasportare.

Supponiamo che lo stato di Bell condiviso da Alice e Bob sia il seguente:

$$|\psi\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (2.48)$$

Alice è in possesso del primo qubit, Bob del secondo. Lo schema dell'esperimento è illustrato in figura 2.1. Nel caso in cui Alice volesse inviare la stringa di bit "00" a Bob,

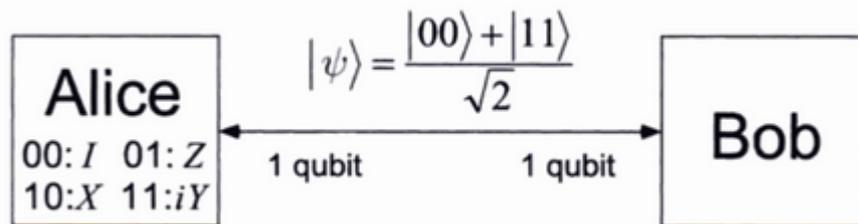


Figura 2.1: Setup iniziale per la codifica superdensa, con Alice e Bob ciascuno in possesso di un qubit di una coppia *entangled*. Immagine tratta da [12].

non dovrà applicare alcuna trasformazione al suo qubit. Se invece volesse mandare la stringa "01", dovrebbe applicare la porta Z che invertirebbe la fase al suo qubit. Nel caso in cui la stringa da inviare fosse "10" applicherebbe la porta $NOTX$ al suo qubit. Infine se la sua intenzione fosse di inviare la stringa "11" dovrebbe applicare la porta iY .

In pratica, giocando con il suo qubit, Alice può modificare lo stato *entangled* congiunto in uno nuovo tra i seguenti:

$$00 : |\psi\rangle \rightarrow \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.49)$$

$$01 : |\psi\rangle \rightarrow \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.50)$$

$$10 : |\psi\rangle \rightarrow \frac{|10\rangle + |01\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.51)$$

$$11 : |\psi\rangle \rightarrow \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.52)$$

Gli stati di Bell formano una base ortonormale e possono quindi essere distinti effettuando una misura. Se Alice manda il suo qubit a Bob, egli potrà misurare nella base di Bell e determinare quale delle possibili stringhe Alice gli ha inviato. In tal modo, Alice, interagendo con un unico qubit, può inviare ben due bit di informazione a Bob. Certo, sono coinvolti due qubit nel protocollo, ma Alice non interagisce mai con il secondo qubit.

2.4 Entanglement e realismo locale

2.4.1 Il modello a variabili nascoste

Nell'Introduzione si è parlato brevemente dell'articolo EPR, pubblicato da Einstein, Podolsky e Rosen nel 1935. Gli autori mostrarono che, secondo la Meccanica Quantistica, due sistemi possono essere correlati in modo così stretto che una misura su uno di essi cambia istantaneamente lo stato dell'altro, indipendentemente dalla loro distanza. Questa "misteriosa azione a distanza" sembra essere in contrasto con la teoria della Relatività.

Tale articolo inizialmente venne citato pochissimo, ma successivamente il numero di citazioni aumentò esponenzialmente, indice della grande importanza delle idee espresse per gli studi fatti verso i giorni nostri.

Una teoria fisica è qualcosa che permette di fare previsioni corrette sui risultati degli esperimenti futuri.

La Meccanica Quantistica può dare una descrizione completa della realtà entro i limiti di applicazione?

Einstein abbracciava una visione in linea con il *Realismo*: esiste una realtà indipendente dal fatto che la si osservi o meno. Quando parliamo di un oggetto, come per esempio un

libro o anche una persona, assumiamo che le proprietà fisiche di quell'oggetto abbiano esistenza indipendente dall'osservazione. Le misure semplicemente rivelano queste proprietà fisiche.

In accordo con la Meccanica Quantistica, sviluppata negli anni '20 e '30, una particella non osservata non possiede proprietà fisiche che esistono indipendentemente dall'osservazione, ma tali proprietà sono conseguenza delle misure effettuate su di essa. Ad esempio, un qubit non possiede proprietà definite di spin lungo l'asse \hat{z} , o lungo \hat{x} .

La Meccanica Quantistica fornisce un insieme di regole che specificano, dato il vettore di stato, le probabilità che si verifichino, in seguito a misura, tutti i possibili risultati quando l'osservabile σ_z (o σ_x) è misurata.

L'essenza dell'argomentazione EPR è la seguente: cosa si intende per "elemento della realtà"? Un elemento della realtà deve essere rappresentato in qualsiasi teoria fisica completa. L'articolo EPR fornisce quindi una *condizione sufficiente* per stabilire l'esistenza di un elemento della realtà fisica: "Se, senza perturbare il sistema, possiamo predire con certezza il valore di una grandezza, allora esiste un elemento della realtà fisica corrispondente a tale grandezza".

Gli autori dell'articolo volevano dimostrare che la Meccanica Quantistica non fosse una teoria completa, identificando elementi della realtà che non vi fossero inclusi.

Consideriamo il seguente esperimento che coinvolge Alice e Bob e il seguente apparato sperimentale: una sorgente che produce particelle correlate e due stazioni di misura A e B , in ciascuna delle quali sono presenti un interruttore la cui posizione specifica quale misura viene effettuata tra tre tipi possibili, che chiameremo "+, 0, +", e due lampadine per la visualizzazione del risultato della misura (accensione della luce "rossa" o "verde"). In realtà ciò che viene emesso dalla sorgente sono, per esempio, fotoni e la proprietà dei fotoni che assume valori diversi è la polarizzazione: ogni fotone può essere polarizzato verticalmente (V) o orizzontalmente (O).

Le diverse posizioni dell'interruttore corrispondono alle diverse orientazioni di un polarizzatore. Lo "0" corrisponde a 0° , il "+" a 30° verso sinistra e il "-" a 30° verso destra. Il polarizzatore in realtà è un separatore con due uscite.

La sorgente emette fotoni con la stessa polarizzazione, ma polarizzati orizzontalmente e verticalmente lungo ogni direzione possibile. Solo alcuni che sono polarizzati entrambi O o V, la maggior parte sono polarizzati in direzione diversa rispetto al polarizzatore.

Analizzando i risultati delle misure, ci si accorge che per ogni impostazione, i risultati "rosso" e "verde" si verificano con uguale probabilità, sia in A che in B e che le misure

di particella singola non hanno uno schema definito.

Concentriamoci ora sulle correlazioni tra le misure di Alice e quelle di Bob, una volta individuate le coincidenze (misure allo stesso istante). Per esempio, consideriamo le coppie in cui entrambi sono polarizzati 0 nel sistema “+”. Se arrivano al polarizzatore impostato su “0”, alcuni faranno accendere la luce “rossa”, altri la “verde”. Se gli interruttori sono nella stessa posizione, una volta conosciuto il risultato di Alice è possibile sapere esattamente il risultato di Bob (definizione EPR di elemento della realtà fisica).

In linea di principio, le correlazioni perfette potrebbero essere dovute a qualche forma di comunicazione sconosciuta tra A e B, ma le ipotesi di lavoro sono che le misure effettuate in una stazione di misura siano indipendenti da quelle effettuate nell'altra (Principio di località EPR).

Una teoria che obbedisce al criterio di realtà e al principio di località EPR è definita *teoria realistica locale*.

A questo punto vediamo come un modello semplice basato sull'idea del realismo locale sia in grado di spiegare le correlazioni perfette di cui si è parlato poco fa. Tale modello si basa su un set di istruzioni che determinano il risultato di ciascuna misura. Le particelle devono possedere un'istruzione specifica per ogni misura che è possibile effettuare su di essa. Per spiegare le correlazioni perfette, le istruzioni di entrambe le particelle devono essere le stesse, se il tipo di misura che viene effettuato è la stessa. Queste proprietà sono dette *variabili nascoste*, poichè non è necessario che siano osservabili direttamente.

2.4.2 Il teorema di Bell

Nel 1964 John Bell esponeva il *teorema di Bell* in un articolo intitolato “Sul paradosso Einstein-Podolsky-Rosen” [22]. Tale teorema afferma, nella forma più immediata, che nessuna teoria fisica locale e realistica a variabili nascoste può riprodurre le predizioni della Meccanica Quantistica.

Considerato come un importante contributo a favore della Meccanica Quantistica, in particolare per il suo carattere controintuitivo nel rifiuto del realismo locale, tale teorema tocca questioni fondamentali per la filosofia della fisica moderna.

Ampliando l'“esperimento” del paradosso EPR, in particolare studiando anche i risultati ottenuti con tutte le possibili posizioni degli interruttori nelle due stazioni di misura, Bell ha dimostrato che la condizione di realismo locale impone alcune restrizioni per le correlazioni previste dalla Meccanica Quantistica, mentre, d'altra parte, previsioni

in completo accordo con la teoria quantistica implicano la rinuncia ad almeno uno fra realismo e località.

2.4.3 La disuguaglianza di Bell

La disuguaglianza di Bell è un esempio di un'essenziale differenza tra fisica classica e fisica quantistica. Consideriamo, per esempio, una coppia EPR di qubit appartenenti ad Alice e Bob:

$$\frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.53)$$

Supponiamo che Alice e Bob siano molto distanti tra loro.

Alice effettua una misura di spin lungo l'asse \vec{v} , cioè misura l'osservabile $\vec{v} \cdot \vec{\sigma} \equiv v_1\sigma_1 + v_2\sigma_2 + v_3\sigma_3$. Supponiamo che Alice ottenga il risultato $+1$. Un semplice calcolo quantomeccanico mostra che possiamo prevedere con certezza che Bob misurerà -1 sul suo qubit, se anch'egli misurerà lo spin lungo l'asse \vec{v} . Similmente, se Alice misurasse -1 , Bob misurerebbe $+1$.

Poichè è sempre possibile per Alice prevedere il valore della misura registrata da Bob lungo la direzione \vec{v} , questa proprietà fisica deve corrispondere ad un elemento della realtà, per il criterio EPR, e deve essere rappresentata in qualsiasi teoria fisica.

Effettuiamo un esperimento mentale, che, in primo luogo, analizzeremo utilizzando il nostro senso comune (in accordo con la visione di Einstein). In seguito faremo un'analisi quantomeccanica che mostrerà la non consistenza con il senso comune.

L'esperimento è il seguente: Charlie prepara due particelle, non importa come ma solo che egli sia in grado di ripetere la procedura sperimentale da lui utilizzata. Manda una particella ad Alice e una a Bob. Una volta che Alice riceve la sua particella effettua una misura su di essa. Immaginiamo che Alice abbia a disposizione due diversi apparati di misura, così che possa scegliere di effettuare due misure diverse. Le misure sono di due proprietà fisiche che chiamiamo P_Q e P_R .

Alice non sa in anticipo quale misura sceglierà, ma al momento della ricezione della particella utilizza un metodo random per decidere quale misura effettuare. Supponiamo che ciascuna misura possa avere come risultato $+1$ o -1 . Supponiamo anche che la particella di Alice abbia un valore Q per la proprietà P_Q . Si assume che Q sia una proprietà oggettiva della particella di Alice, semplicemente rivelata dalla misura. Similmente, sia R il valore rivelato della proprietà P_R .

Allo stesso modo, immaginiamo che Bob sia in grado di misurare una di due proprietà,

P_S e P_T , rivelando un valore oggettivo esistente S o T (ognuno dei quali può valere $+1$ o -1). Egli aspetta di ricevere la particella e, anch'egli con un metodo random, decide che misura effettuare. Bob e Alice misurano nello stesso istante o, nel linguaggio della relatività, in modo causalmente disconnesso, per cui la misura di Alice non può in alcun modo influire sul risultato di Bob e viceversa.

Facendo un po' di algebra con la quantità $QS + RS + RT - QT$, si ottiene:

$$QS + RS + RT - QT = (Q + R)S + (R - Q)T. \quad (2.54)$$

Poichè $R, Q = \pm 1$, si ha che o $(Q + R)S = 0$ oppure $(R - Q)T = 0$. In entrambi i casi si ha che $QS + RS + RT - QT = \pm 2$. Supponiamo che $p(q, r, s, t)$ sia la probabilità che, prima della misura, il sistema sia nello stato dove $Q = q$, $R = r$, $S = s$ e $T = t$. Queste probabilità possono dipendere da come Charlie prepara il sistema, e dal rumore sperimentale. Denotando con $E(\cdot)$ il valore medio di una quantità, si ha che:

$$E(QS + RS + RT - QT) = \sum_{qrst} p(q, r, s, t)(qs + rs + rt - qt) \quad (2.55)$$

$$\leq \sum_{qrst} p(q, r, s, t) \cdot 2 \quad (2.56)$$

$$= 2 \quad (2.57)$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} E(QS + RS + RT - QT) &= \sum_{qrst} p(q, r, s, t)qs + \sum_{qrst} p(q, r, s, t)rs \\ &+ \sum_{qrst} p(q, r, s, t)rt - \sum_{qrst} p(q, r, s, t)qt \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$= E(QS) + E(RS) + E(RT) - E(QT) \quad (2.59)$$

Confrontando la (2.57) con la (2.59),

$$E(QS) + E(RS) + E(RT) - E(QT) \leq 2 \quad (2.60)$$

Quest'ultima disuguaglianza è chiamata *disuguaglianza di CHCH* ed è una particolare *disuguaglianza di Bell*.

Alice e Bob ripetono l'esperimento molte volte e dopo aver raccolto tanti dati li analizzano. Si concentrano su tutti gli esperimenti in cui Alice misura P_Q e Bob misura P_S . Moltiplicando i risultati dei loro esperimenti ottengono un valore di QS , poi ne faranno la media calcolando in tal modo $E(QS)$. Fanno lo stesso con le altre quantità, in modo da verificare se la disuguaglianza è rispettata in un esperimento reale.

Ora immaginiamo di eseguire il seguente esperimento: Charlie prepara un sistema quantistico di due qubit nello stato:

$$|\psi\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.61)$$

e invia il primo bit ad Alice e il secondo a Bob, i quali effettuano misure degli osservabili seguenti:

$$Q = Z_1 \quad S = \frac{-Z_2 - X_2}{\sqrt{2}} \quad (2.62)$$

$$R = X_1 \quad T = \frac{Z_2 - X_2}{\sqrt{2}} \quad (2.63)$$

Un semplice calcolo mostra che i valori medi per questi osservabili sono:

$$\langle QS \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}; \langle RS \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}; \langle RT \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}; \langle QT \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad (2.64)$$

Per cui:

$$\langle QS \rangle + \langle RS \rangle + \langle RT \rangle - \langle QT \rangle = 2\sqrt{2}. \quad (2.65)$$

Come vedremo nel Capitolo successivo, gli esperimenti effettuati, pur non riuscendo ancora a soddisfare pienamente le condizioni previste dal teorema e a fornire risultati del tutto conclusivi, indicano che le disuguaglianze di Bell sono violate, fornendo una prova empirica contro il realismo locale e a favore della Meccanica Quantistica. Più esattamente, provano che la teoria, anche nell'ipotesi dell'esistenza di variabili nascoste, dovrebbe comunque abbandonare il principio di località.

Capitolo 3

Esperimenti di teletrasporto quantistico

In questo Capitolo verranno illustrati i principali esperimenti di teletrasporto quantistico insieme ai più importanti risultati sperimentali a conferma del fenomeno dell'entanglement.

Come si possono realizzare sistemi di due o più particelle *entangled*? Come può essere realizzata una procedura di teletrasporto quantistico in sistemi fisici reali?

Su piccola scala, a livello di pochi qubit, esistono moltissimi lavori sperimentali di dispositivi di processamento di informazione quantistica.

La maniera più semplice per realizzarli si basa su tecniche *ottiche*, che sfruttano cioè i fotoni. Come vedremo, dispositivi come specchi e separatori di fascio possono essere utilizzati per effettuare manipolazioni elementari sui fotoni.

Il vantaggio principale è che i fotoni tendono ad essere portatori stabili di informazioni quantistiche, tuttavia è difficile riuscire a produrre singoli fotoni on demand. Ma lo svantaggio maggiore è che i fotoni non interagiscono direttamente tra loro: le interazioni devono essere mediate da qualcos'altro, ad esempio un atomo, che introduce rumore addizionale e complicazioni all'esperimento. Un'interazione tra due fotoni consiste in due step: il primo fotone interagisce con l'atomo, che a sua volta interagisce con il secondo fotone.

Uno schema alternativo è basato su trappole di differenti tipi di atomi: esistono le cosiddette *trappole ioniche* e le *trappole per atomi neutri*, le quali intrappolano atomi carichi o neutri in una regione di spazio confinata.

La radiazione elettromagnetica interviene anche in questo schema ma in maniera diffe-

rente rispetto alle tecniche ottiche: i fotoni sono utilizzati per manipolare l'informazione immagazzinata negli atomi. Porte quantistiche a singolo qubit possono essere implementate applicando impulsi appropriati di radiazione elettromagnetica individualmente agli atomi.

Atomi vicini possono interagire l'un l'altro tramite forze di dipolo che attivano le porte logiche. In più, l'esatta natura dell'interazione tra atomi vicini può essere modificata applicando appropriati impulsi di radiazione elettromagnetica agli atomi.

3.1 Esperimenti sull'entanglement

3.1.1 Verifica delle disuguaglianze di Bell

Nel Capitolo precedente si è discusso il fenomeno dell'entanglement e si è visto come esso implichi la presenza di correlazioni a distanza tra quantità fisiche osservabili dei sistemi coinvolti, determinando il carattere non locale della teoria quantistica. Il fenomeno dell'entanglement viola dunque il "principio di località" per il quale ciò che accade in un luogo NON può influire immediatamente su ciò che accade in un altro.

Un primo test del teorema di Bell fu condotto da Freedman e Clauser nel 1972 [23] e riguardava la verifica della disuguaglianza di Freedman, una variante della disuguaglianza CH74.

La tecnica utilizzata per creare fotoni *entangled* consisteva nell'utilizzare atomi. Questi, una volta eccitati con luce laser, emettono a loro volta luce. Esistono atomi che, se eccitati nella maniera opportuna, emettono due fotoni uno di seguito all'altro e, in alcuni casi, la loro polarizzazione è *entangled*.

I risultati dell'esperimento dimostravano chiaramente che la disuguaglianza di Bell era violata. Ad esso seguì una serie di nuove verifiche sperimentali, grazie alle quali, la violazione della disuguaglianza veniva dimostrata con una precisione via via crescente.

Una serie di esperimenti importanti furono condotti dal gruppo del fisico francese Alain Aspect nel 1981-1982 [3]. Insieme a Jean Dalibard e Gérard Roger, due ricercatori dell'Istituto di Ottica dell'Università di Parigi, Aspect riuscì a verificare con quasi certezza le ipotesi non locali della teoria quantistica, verificando la violazione delle disuguaglianze CH74 e CHSH.

Tali esperimenti rappresentavano la realizzazione del "Gedankenexperiment" di Bohm, ispirato dal famoso "articolo EPR". Aspect misurò la correlazione lineare di fotoni emessi in una cascata atomica radioattiva dell'atomo di calcio ($4p^{21}S_0 - 4s4p^1P_1 - 4s^{21}S_0$),

attraverso l'utilizzo di polarizzatori, con la possibilità di impostare diverse orientazioni e ripetendo l'esperimento modificando la distanza tra sorgente e polarizzatori.

Gli esperimenti di Aspect contenevano tre aspetti importanti.

Primo, egli riuscì a verificare la violazione delle disuguaglianze di Bell con una precisione sperimentale di gran lunga maggiore di quella degli esperimenti precedenti (oltre 13 deviazioni standard), in notevole accordo con le predizioni della Meccanica Quantistica. Secondo, Aspect fu il primo ad utilizzare un separatore di fascio ottico polarizzante e quindi ad osservare entrambe le polarizzazioni di entrambi i fotoni. Nei primi esperimenti venivano usati semplici filtri polarizzatori, con cui era possibile osservare solo la polarizzazione trasmessa.

Terzo, fu eseguito per la prima volta un esperimento in cui le scelte tra le impostazioni su ogni lato vennero fatte mentre i fotoni erano in volo. Vediamo perchè questo aspetto è importante.

Nessun fotone possiede una certa polarizzazione prima che questa venga misurata. Se entrambe le postazioni di misura impostassero la stessa direzione del polarizzatore, il fotone deciderà solo all'ultimo momento e in maniera arbitraria se dare un risultato o l'altro (polarizzazione O o V). A prescindere da quanto si trovi lontano, l'altro fotone assumerà la stessa polarizzazione. Prima che le misure siano eseguite non è possibile fare ipotesi sulla polarizzazione del fotone.

Ma allora il risultato della misura in uno dei due laboratori dovrebbe essere comunicato all'altro a velocità superiore a quella della luce. E questo violerebbe il Postulato della Relatività. In linea di principio, se le due parti modificassero la direzione del polarizzatore lentamente, potrebbe esserci la possibilità che vi sia una sorta di comunicazione tra loro. Quindi occorreva escludere questa possibilità, modificando rapidamente le impostazioni dei polarizzatori mentre i fotoni erano in volo.

L'esperimento decisivo fu eseguito a Innsbruck nel 1997 e i risultati furono pubblicati da Anton Zeilinger, insieme al suo studente Gregor Weihs e altri colleghi, nel 1999 [24].

Gli sperimentatori, una volta sistemato il polarizzatore, posero un cristallo speciale, chiamato *modulatore elettro-ottico*, che in base alla tensione applicata, ruotava di un certo angolo la polarizzazione del fotone. Il fotone attraversava sia il cristallo sia il polarizzatore, e il sistema formato dal cristallo e dal polarizzatore era equivalente ad un polarizzatore ruotato di un angolo a piacere, modificando la tensione applicata al modulatore. La tensione veniva modificata in modo casuale e indipendente in entrambi i laboratori nell'arco di un nanosecondo.

Per scegliere di quanto ruotare la direzione di ciascun polarizzatore si utilizzò un generatore di numeri casuali: una sorgente luminosa debole venne puntata verso un separatore di fascio ottico, che generava numeri casuali molto più velocemente del microsecondo necessario per trasmettere un eventuale segnale da un laboratorio all'altro.

Questo esperimento riuscì a chiudere la questione della cosiddetta *falla sulla presenza di segnali*: dimostrò che, se presente, ogni possibile forma di comunicazione tra le due stazioni di misura avrebbe dovuto avere una velocità dieci volte superiore a quella della luce.

3.1.2 Le falle dei primi esperimenti

I primi esperimenti erano affetti da tre diversi tipi di falle. Abbiamo parlato della falla sulla presenza di segnali e di come l'esperimento di Innsbruck sia riuscito ad escludere la possibilità di una comunicazione tra le due stazioni di misura.

Tuttavia, esiste un'altra falla molto importante e riguarda le scelte individuali che devono essere prese in totale libertà in ciascun laboratorio e non devono essere determinate da alcun evento antecedente.

Si potrebbe anche pensare che nell'istante in cui la coppia di fotoni *entangled* è emessa dalla sorgente, vengano anche generate le informazioni nascoste che influenzano le impostazioni del generatore di numeri casuali. Nemmeno l'esperimento condotto a Innsbruck era al riparo da questa possibilità, perchè i fotoni impiegavano una certa quantità di tempo per viaggiare lungo le fibre ottiche che collegavano la sorgente alle stazioni di misura.

Un esperimento condotto da Thomas Scheidl a Vienna nel 2010 [25] ha escluso questa circostanza. Il gruppo di Vienna decideva quali parametri misurare utilizzando un generatore di numeri casuali che, posto ad una certa distanza dall'esperimento, generava un numero casuale allo stesso istante in cui la coppia di fotoni era creata dalla sorgente. In tal modo, nessun segnale proveniente dalla sorgente avrebbe potuto influenzare il generatore di numeri casuali. In quest'ultimo esperimento furono risolte ben due falle, quella sulla presenza di segnali e la cosiddetta *falla della libera scelta*. Esistono molti altri modi in cui è possibile migliorare questa serie di esperimenti. Uno consiste nell'utilizzare sperimentatori in carne e ossa, posti a grande distanza l'uno dall'altro, che decidano all'ultimo momento lungo quale direzione misurare la polarizzazione dei fotoni.

Secondo la neurofisiologia, l'uomo impiega un decimo di secondo circa per prendere una decisione e, viaggiando alla velocità della luce, questo corrisponderebbe ad una distanza

di 30000 km. Un esperimento del genere dovrebbe essere eseguito mettendo una stazione sulla Terra e l'altra, per esempio, sulla Luna, con la sorgente su un satellite a metà strada. Un'altra possibilità consisterebbe nell'eseguire questo esperimento durante un viaggio spaziale in cui l'equipaggio è diretto verso un altro pianeta. Si utilizzerebbero segnali provenienti da stelle molto lontane (o due quasar), segnali che non possono essere connessi l'uno con l'altro in alcun modo, per azionare i due polarizzatori.

Recentemente un'equipe internazionale guidata da Paolo Villoresi e Franco Barbieri, dell'Università di Padova, ha eseguito un esperimento che va un po' in questa direzione [26]: dimostrare la fattibilità dello scambio di fotoni tra un satellite e una stazione a Terra. Fu utilizzato un telescopio a Matera, in Basilicata, per inviare impulsi laser verso il satellite Ajisai, ricoperto da deflettori a specchio in grado di riflettere una parte della luce inviata verso il telescopio a Terra.

La terza falla è la cosiddetta *falla del rilevamento o dell'efficienza di raccolta*. In tutti gli esperimenti eseguiti gli sperimentatori riuscirono a misurare solo una piccola frazione dei fotoni emessi dalla sorgente, in genere circa il 20%. I dati raccolti violavano le disuguaglianze di Bell.

Tuttavia i difensori del realismo locale hanno immaginato che, insieme, tutti i fotoni emessi dalla sorgente non violino la disuguaglianza di Bell. In altre parole, hanno ipotizzato che sia possibile descrivere tutte le coppie di fotoni per mezzo di una teoria realistica locale e che, per qualche ragione, il sottoinsieme di fotoni rilevati sia selezionato in modo tale da violare la disuguaglianza di Bell [27].

Nel 2001 Mary Rowe e David Wineland all'National Institute of Standards and Technology (NIST) di Boulder [28], in Colorado, condussero un esperimento in cui utilizzarono ioni, in quanto rilevatori di ioni hanno un'efficienza vicina al 100%. Nelle loro prove utilizzarono due ioni di Berillio, intrappolati utilizzando campi elettromagnetici disposti in maniera intelligente. L'alta efficienza con cui è stato possibile misurare lo stato quantistico di questi ioni ha permesso di dimostrare ancora una volta la violazione della disuguaglianza di Bell. Quindi anche la falla del rilevamento è stata chiusa.

In linea di principio, però, il fatto che nessuno di questi esperimenti abbia chiuso le tre falle contemporaneamente offre ai realisti locali un appiglio al quale aggrapparsi. Nonostante ciò è piuttosto improbabile che la Natura sia così malevola da decidere in ogni esperimento di lasciare aperta di volta in volta una delle tre falle e, al momento, non esistono teorie in grado di spiegare in modo ragionevole un comportamento simile.

Gli esperimenti fin qui discussi hanno fornito una verifica sperimentalmente del fenome-

no non locale dell'entanglement, mostrando nel contempo con probabilità estremamente elevata che modelli a variabili nascoste locali non possono riprodurre la statistica della Meccanica Quantistica. Tentativi di introdurre l'ipotesi di variabili nascoste nella Meccanica Quantistica allo scopo di "annullare" il fenomeno dell'entanglement, salvando contemporaneamente il principio di località e gran parte della teoria, non ottengono il risultato voluto.

3.1.3 Sorgenti di fotoni *entangled*

Le sorgenti atomiche utilizzate nei primi esperimenti presentavano un grosso svantaggio: in generale un atomo eccitato può emettere un fotone lungo molte direzioni diverse. Cercando di rilevare fotoni in specifiche stazioni di misura, il risultato è che molte coppie di fotoni *entangled* andavano perdute.

Oggi la migliore sorgente di coppie di fotoni *entangled* in polarizzazione è rappresentato da un particolare processo che avviene all'interno di particolari cristalli, chiamato *fluorescenza parametrica* o *SPDC*. Le leggi che governano tale processo in cristalli di grandi dimensioni equivalgono principalmente alle leggi di conservazione dell'energia e della quantità di moto.

Quando un fascio laser di grande intensità, detto *fascio di pompa*, colpisce uno di questi cristalli può succedere che uno dei fotoni del fascio sia convertito in una coppia di fotoni emessi lungo due superfici coniche (si veda la figura 3.1), un fotone per cono, sempre opposti uno all'altro. Lungo ogni cono ciascun fotone è polarizzato, uno orizzontalmente (O) e l'altro verticalmente (V).

Il sistema è disposto in modo tale per cui le superfici coniche si possano intersecare lungo due linee. I fotoni emessi lungo queste due linee non sanno esattamente quale sia la loro polarizzazione, ma sanno che le loro polarizzazioni devono essere reciprocamente ortogonali. Se la produzione dei fotoni è condotta in modo che i due siano indistinguibili, in uscita dal cristallo si avrà una coppia di fotoni in uno stato *entangled* in polarizzazione.

Questo tipo di sorgente comporta una serie di vantaggi. Innanzitutto, è possibile cambiarne la potenza di emissione semplicemente regolando quella del fascio di pompa. Inoltre, la purezza degli stati *entangled* ottenuti è estremamente alta. Infine, i due fotoni fuoriescono dal cristallo lungo direzioni ben definite ed è piuttosto semplice utilizzarli all'interno di apparati sperimentali complessi che comprendano specchi per rifletterli o farli deviare, oppure inviarli a fibre ottiche e così via.

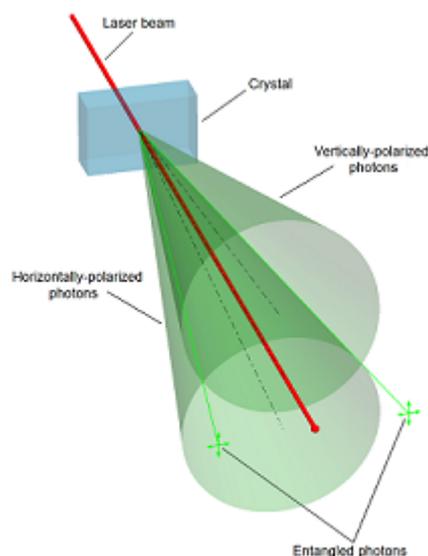


Figura 3.1: Schema del processo di produzione di una coppia di fotoni *entangled* in polarizzazione sfruttando il processo della fluorescenza parametrica. Immagine tratta da [29].

Questo tipo di sorgente è stata ampiamente utilizzata in esperimenti sull'entanglement, in particolare, l'alta qualità di questo tipo di sorgente si è rivelata cruciale per l'esperimento che ha risolto definitivamente la questione della falla sulla presenza di segnali, eseguito nel 1997 ad Innsbruck da Weihs, Weinfurter e Zeilinger.

3.1.4 Esperimenti sull'entanglement di tre particelle

Bennett e altri nel 1993 avevano suggerito l'idea che fosse possibile trasferire lo stato quantico di una particella in un'altra, senza avere alcuna informazione sullo stato teletrasportato, sfruttando il fenomeno dell'entanglement. Da allora si dovette aspettare più di quattro anni prima che fosse eseguito il primo esperimento di teletrasporto, che ebbe luogo all'università di Innsbruck nel 1997. In soli quattro anni si fu in grado di sviluppare la tecnologia necessaria per portare a termine un esperimento di questo tipo, nonostante le sfide di carattere tecnico non fossero poche.

Innanzitutto, occorre individuare la sorgente di particelle *entangled* più utile allo scopo e capire quali fotoni si sarebbero comportati meglio in quel tipo di esperimento.

Nessuno sapeva come effettuare una misura degli stati di Bell o come identificare, sempre attraverso una misura, uno stato *entangled* di due fotoni indipendenti.

Infine, fattore ancora più importante, nessuno prima di allora aveva eseguito esperimenti

che coinvolgessero più di due fotoni o, in generale, più di due particelle *entangled*.

Erano stati effettuati esperimenti volti a verificare la disuguaglianza di Bell ma con soli due fotoni.

In particolare, il gruppo di Zeilinger desiderava condurre esperimenti con tre (o più fotoni) ben prima che l'idea di teletrasporto venisse alla luce. In particolare, nel 1987 Anton Zeilinger e Dan Greenberger [30] iniziarono a lavorare sulla definizione di uno stato *entangled* di quattro fotoni, pensando al decadimento di una particella in due, ciascuna delle quali sarebbe dovuta a sua volta decadere in altre due. Ma si accorsero presto che le previsioni matematiche sulle proprietà degli stati *entangled* di quattro fotoni erano molto complesse, così si concentrarono su un piccolo sottoinsieme di tutte le possibili previsioni teoriche: quelle riguardanti le correlazioni perfette, proprio le stesse utilizzate da Bell per formulare il suo teorema.

Inaspettatamente scoprirono che queste correlazioni perfette erano autocontraddittorie. A quel tempo avevano già notato come la stessa situazione si verificasse anche nel caso dell'entanglement di tre particelle, situazione che avevano deciso di non approfondire poichè non avevano idea di come produrre uno stato *entangled* di tre fotoni. Una volta imparato, immaginarono di disporre di una sorgente che emette uno stato *entangled* di tre fotoni (sorgente GHZ, dalle iniziali dei cognomi Dan Greenberg, Mike Horne e Anton Zeilinger).

Lo stato *entangled* di base è costituito da tre fotoni tutti polarizzati orizzontalmente (OOO) o verticalmente (VVV) lungo una certa direzione. Nessuno dei tre ha un valore di polarizzazione definito prima della misura. Se uno qualsiasi dei tre è misurato con un polarizzatore a due canali orientato in quella direzione, risulterà in modo casuale polarizzato o O o V. In quel caso, gli altri due fotoni si ritroverebbero immediatamente nello stesso stato di polarizzazione.

Si potrebbero effettuare una moltitudine di misure di polarizzazione differenti su questi tre fotoni, misurando la polarizzazione O e V lungo ogni direzione possibile, o anche la polarizzazione circolare.

Per un certo numero di misure si avevano correlazioni perfette. Ciò significa che, mentre i risultati delle misure sui singoli fotoni erano completamente aleatori, se conosciamo i risultati delle misure di due fotoni, e se le orientazioni dei polarizzatori soddisfano certe condizioni, allora è possibile predire con certezza la polarizzazione del terzo fotone. Tuttavia esisteva un insieme di orientazioni dei polarizzatori che dimostravano come il realismo locale fosse in totale contraddizione con la meccanica quantistica.

Supponiamo di conoscere la polarizzazione del primo e del secondo fotone, entrambe ruotate di 45° rispetto a O. Secondo un realista locale la polarizzazione del terzo dovrebbe essere la stessa, mentre per la Meccanica Quantistica dovrebbe essere ortogonale.

Dopo la scoperta di questa contraddizione, lo scopo del gruppo di ricerca di Zeilinger fu quello di verificare sperimentalmente questo tipo di entanglement. Nel 1998 Dirk Bouwmeester, Jian-Wei Pan, Matthew Daniell, Harald Weinfurter, insieme allo stesso Zeilinger [31], riuscirono ad osservare sperimentalmente nel loro laboratorio di Innsbruck l'entanglement di tre particelle, e a confermare così le previsioni della Meccanica Quantistica.

Gli sperimentatori dovettero sviluppare strumenti che si sarebbero rivelati importanti anche nei successivi esperimenti di teletrasporto. Per prima cosa crearono due coppie di fotoni *entangled*, dopodichè si misurava un fotone, ma in modo tale da non sapere nemmeno in linea di principio da quale delle due coppie esso provenisse. In questo modo i fotoni restanti erano *entangled*.

Per l'esperimento svilupparono tecnologie per sincronizzare efficacemente i fotoni, creare le due coppie utilizzando la fluorescenza parametrica e separatori di fascio per la misura di polarizzazione, strumenti che decisero di utilizzare nel primo esperimento di teletrasporto quantistico.

3.1.5 Entanglement e *imaging quantistico*

L'*imaging quantistico* è un settore dell'ottica quantistica che cerca di sfruttare le proprietà quantistiche della luce per ottenere immagini con risoluzione o sensibilità ben al di là di quelle permesse dall'ottica classica.

Utilizzando le correlazioni quantistiche tra coppie di fotoni *entangled* è possibile, per esempio, osservare oggetti di cui si era persa completamente l'informazione spaziale dell'immagine diretta: si chiama *ghost imaging* per evocare il fatto che con questa tecnica le immagini emergono come delle specie di fantasmi.

Una delle applicazioni più interessanti dell'*imaging quantistico* è la possibilità di ottenere l'immagine di oggetti a bassissimo assorbimento, anche se illuminati molto debolmente. Si tratta di immagini cosiddette *sub-shot noise*, cioè immagini sotto la soglia dello *shot noise*, il disturbo che viene creato come conseguenza del fatto che la luce e la corrente elettrica viaggiano a pacchetti: quando il segnale luminoso è molto debole, diciamo per esempio una media di 5 fotoni al secondo, in un certo momento si misureranno 2 fotoni in un altro 10 fotoni, e così via.

di conversione parametrica, può produrre una coppia di fotoni di differenti lunghezze d'onda chiamati fotone segnale (giallo) e fotone idler (rosso). Lo stesso accade con il fascio b sul cristallo NL2.

Il fotone rosso originato in NL1 viene riflesso dallo specchio D1 e attraversa l'oggetto O , poi viene riflesso dallo specchio D2, e si sovrappone al fotone rosso prodotto nel cristallo NL2 in modo che il fotone rosso emergente $|f\rangle_i$ non contenga alcuna informazione riguardo a quale cristallo abbia prodotto la coppia di fotoni. L'interferenza delle ampiezze dei fotoni segnale che provengono dai due cristalli rivela l'immagine dell'oggetto. I fotoni che passano attraverso l'immagine dell'oggetto (fotone rosso dall'NL1) vengono riflessi dallo specchio D3 e non sono mai rivelati, mentre si ottiene un'immagine esclusivamente con i fotoni segnale (da NL1 e NL2), che non hanno mai interagito con l'oggetto.

Lo schema concettuale è stato ampliato e il setup sperimentale è illustrato in figura 3.3.

Un fascio laser continuo a 532 nm (verde) illumina i cristalli NL1 e NL2. Lamine

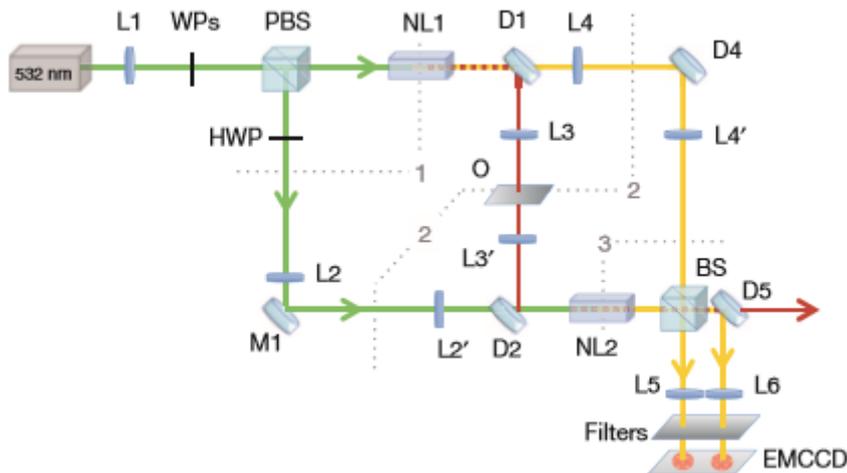


Figura 3.3: Setup sperimentale (Lemos e al. 2014) [32].

d'onda WP agguistano le fasi relative e le intensità dell'output del separatore di fascio polarizzante PB1. Lo specchio D1 separa i fotoni gialli di 810 nm e i fotoni rossi di 1550 nm. I fotoni rossi sono mandati attraverso l'oggetto e al cristallo NL2 dallo specchio D2. I rivelatori sono stati rimpiazzati con fotocamere (EMCCD) sensibili ai singoli fotoni. La correlazione tra fotone segnale e fotone idler sul piano dell'oggetto e un sistema di lenti confocali garantiscono una corrispondenza punto a punto tra il piano dell'oggetto e la superficie della fotocamera.

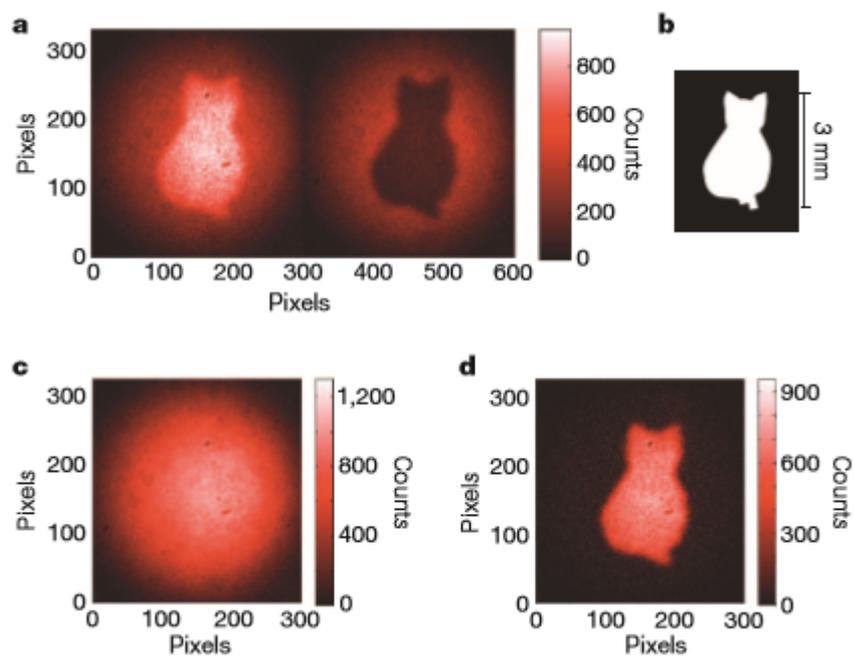


Figura 3.4: Immagini di intensità luminosa. *a.* interferenza costruttiva e distruttiva osservata agli output del BS2 quando viene posto il cartoncino ritagliato riportato in *b.* nel percorso D1-D2. *c.* La somma degli output fornisce il profilo di intensità dei fasci segnale. *d.* La sottrazione dei due segnali all'output porta ad un aumento del contrasto tra l'interferenza costruttiva e l'interferenza distruttiva. Immagine tratta da [32].

Sono state ottenute immagini rilevando fotoni a 810 nm con una fotocamera, mentre l'oggetto è stato illuminato da fotoni della lunghezza d'onda di 1550 nm, per i quali la fotocamera non ha alcuna sensibilità.

La figura 3.4a mostra l'output del BS2 quando un cartoncino ritagliato (della forma illustrata in figura 3.4b) è inserito nel percorso D1-D2. Si nota interferenza costruttiva in corrispondenza di uno dei due output del BS2 e interferenza distruttiva in corrispondenza dell'altro.

La somma e la differenza delle immagini complementari sono mostrate in figura 3.4c e 3.4d, rispettivamente. La somma dei due segnali all'uscita del BS2 fornisce un profilo di intensità senza forma del fascio segnale, il che dimostra che nonostante tale fascio trasporti l'informazione esso non è assorbito dall'oggetto. La sottrazione dei due segnali porta ad un aumento del contrasto tra l'interferenza costruttiva e l'interferenza distruttiva.

Ciò che contraddistingue questo esperimento dai precedenti di imaging quantistico è il fatto che i fotoni che hanno attraversato l'oggetto non devono essere rivelati e ciò lascia una certa libertà di scelta della lunghezza d'onda per tali fotoni.

3.2 Primi esperimenti di teletrasporto quantistico

I primi esperimenti di teletrasporto quantistico furono effettuati tra il 1993 ed il 1997, da due gruppi di ricerca internazionali, diretti rispettivamente da Anton Zeilinger dell'Università di Innsbruck [33] e da Francesco De Martini dell'Università La Sapienza di Roma [34]. Entrambi i gruppi utilizzarono fotoni.

3.2.1 L'esperimento di Zeilinger e al. del 1997

In figura 3.5a è illustrato lo schema concettuale del protocollo di teletrasporto implementato da Zeilinger e al. nel 1997.

Alice possiede un fotone (fotone 1), in uno stato iniziale che vuole teletrasportare a Bob, che chiamiamo

$$|\psi\rangle_1 = \alpha|\leftrightarrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle, \quad (3.1)$$

dove $|\leftrightarrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$ rappresentano stati di polarizzazione O e V, rispettivamente. Alice e Bob condividono una coppia di fotoni (particella 2 e 3) emesse da una sorgente EPR nel

seguinte stato *entangled*:

$$|\psi^-\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\leftrightarrow\rangle_2|\uparrow\rangle_3 - |\uparrow\rangle_2|\leftrightarrow\rangle_3). \quad (3.2)$$

Tale stato non contiene alcuna informazione sui singoli fotoni, indica solo che non appena misuriamo il primo fotone e lo stato di quel fotone verrà proiettato ad esempio sullo stato $|\leftrightarrow\rangle$, lo stato dell'altro fotone dovrà essere $|\uparrow\rangle$. Alice effettua una misura sugli stati di Bell (BSM) sul fotone 1 e un fotone della coppia EPR (il fotone 2), quello in suo possesso, proiettandoli in uno stato degli stati di Bell:

$$|\psi^-\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\leftrightarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2 - |\uparrow\rangle_1|\leftrightarrow\rangle_2). \quad (3.3)$$

Questo stato è antisimmetrico si distingue dagli altri tre possibili stati massimamente *entangled*, in quanto cambia segno scambiando la particella 1 con la 2. Dopo aver comunicato, via canale di comunicazione classico, il risultato della misura a Bob, quest'ultimo può applicare una trasformazione unitaria sul suo fotone della coppia EPR, ottenendo lo stato della particella originaria.

In realtà, una volta proiettati i fotoni 1 e 2 nello stato $|\psi\rangle_{12}$, il fotone 3 istantaneamente sarà proiettato sullo stato originario del fotone 1 e Bob non dovrà compiere alcuna trasformazione unitaria.

Il setup sperimentale sviluppato nell'esperimento è illustrato in figura 3.5b.

Un impulso di radiazione ultravioletta attraversa un cristallo non lineare e, sfruttando la conversione parametrica, crea la coppia *entangled* di fotoni 2 e 3 (non esistendo la possibilità sperimentale di creare tutti e quattro gli stati di Bell, la coppia può essere proiettata solo su due di tali stati).

Ponendo uno specchio di vetro oltre il cristallo, il fascio di pompa viene riflesso all'indietro e attraversa una seconda volta il cristallo, generando una seconda coppia *entangled* di fotoni, uno dei quali sarà preparato nello stato iniziale del fotone 1 da teletrasportare, l'altro servirà solo da trigger, indicando che il fotone 1 è stato emesso e che il teletrasporto è in corso.

Per proiettare il fotone 1 e il fotone 2 in uno stato di Bell è necessario renderli indistinguibili, facendoli entrare in un separatore di fascio. Se incidono ciascuno dalla propria parte, potrebbero riemergere di nuovo ognuno dalla propria parte solo se venissero entrambi riflessi o trasmessi. Dobbiamo sovrapporre le ampiezze di queste due possibilità. L'unitarietà implica che l'ampiezza per la riflessione di entrambi ottiene un segno meno

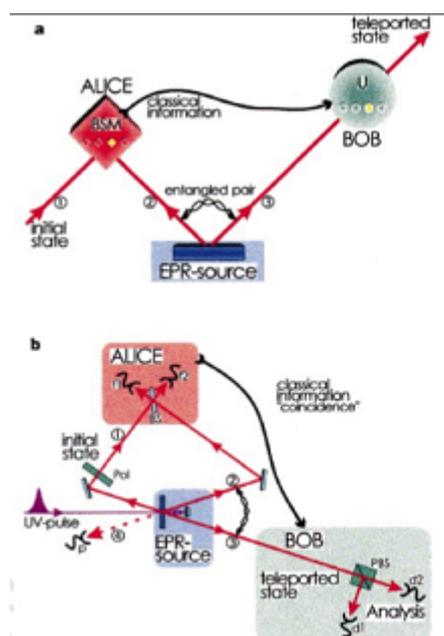


Figura 3.5: Schema del protocollo di teletrasporto (a) e setup (b) per l'esperimento di teletrasporto quantistico effettuato da Zeilinger e al. nel 1997 a Innsbruck [33].

addizionale. Quindi sembra che i due processi si cancellino a vicenda.

Questo è vero solo per uno stato in input simmetrico. Per uno stato antisimmetrico, le due possibilità interferiscono costruttivamente. È sufficiente, per proiettare i fotoni 1 e 2 in uno stato antisimmetrico $|\psi^-\rangle_{12}$, collocare rivelatori in ciascuna delle uscite del separatore di fascio e registrare coincidenze.

Per essere sicuri che i fotoni 1 e 2 non possano essere distinti in base al tempo di arrivo, vengono generati utilizzando un fascio di pompa pulsato e inviati in un filtro a banda stretta che produce un tempo di coerenza più lungo rispetto al periodo degli impulsi del fascio di pompa.

In teoria non era necessario dimostrare il successo del teletrasporto per ogni stato quantistico immaginabile, ma d'altro canto non era sufficiente verificarlo solo per gli stati di polarizzazione O e V, poichè in questo modo non era possibile escludere che l'apparato funzionasse in maniera diversa lavorando con una base diversa e che preferisse una base rispetto ad un'altra.

Nell'esperimento era necessario riuscire anche a teletrasportare uno stato che fosse la sovrapposizione quantistica dei due stati della base e gli autori scelsero gli stati di polarizzazione lineare a -45° e $+45^\circ$, che sono una sovrapposizione di quelle O e V. Gli sperimentatori riuscirono nel loro intento e, infine, portarono a termine la procedura di

teletrasporto anche per uno stato di polarizzazione circolare.

Nel primo esperimento, il fotone 1 era polarizzato a $+45^\circ$. Il teletrasporto avrebbe dovuto funzionare ogni volta che i fotoni 1 e 2 venivano rilevati nello stato $|\psi^-\rangle_{12}$, che accade il 25% di tutti i possibili casi. Lo stato $|\psi^-\rangle_{12}$ veniva rilevato registrando una coincidenza tra due rilevatori, f_1 e f_2 , posti in corrispondenza del separatore di fascio.

Nel caso venisse rilevata una coincidenza, il fotone 3 allora avrebbe dovuto essere polarizzato a $+45^\circ$. Tale polarizzazione veniva verificata facendo passare il fotone 3 attraverso un separatore di fascio, selezionando le polarizzazioni $+45^\circ$ e -45° . Solo il rivelatore d_2 all'output $+45^\circ$ del separatore di fascio avrebbe dovuto scattare, una volta rilevata una coincidenza $f_1 - f_2$. Il rivelatore d_1 all'uscita -45° non avrebbe dovuto scattare.

Rilevare per tre volte una coincidenza $d_2 - f_1 - f_2$ insieme all'assenza di coincidenza $d_1 - f_1 - f_2$ avrebbe rappresentato una prova che il teletrasporto sarebbe avvenuto correttamente.

Gli sperimentatori modificarono per piccoli step il tempo di arrivo del fotone 2, cambiando il ritardo tra la prima e la seconda fluorescenza parametrica, effettuando in tal modo una scanning della regione di sovrapposizione temporale dei fotoni 1 e 2 al separatore di fascio, per la quale il teletrasporto può verificarsi. Al di fuori della regione di teletrasporto, il fotone 1 e 2 entrano al separatore di fascio ognuno indipendentemente dall'altro. La probabilità di avere una coincidenza $f_1 - f_2$ è circa del 5%, il doppio di quella che si ha nella regione di teletrasporto. Il fotone 3 non dovrebbe avere polarizzazione definita, poiché è parte di una coppia *entangled*.

I rivelatori d_1 e d_2 hanno entrambi il 50% di probabilità di rilevare il fotone 3. Questo indica una probabilità del 25% sia per l'analisi a -45° (coincidenza $d_1 - f_1 - f_2$) che per l'analisi a $+45^\circ$ (coincidenza $d_2 - f_1 - f_2$).

Il successo del teletrasporto di uno stato $+45^\circ$ avrebbe comportato una diminuzione a zero dell'analisi a -45° e un valore costante per l'analisi a $+45^\circ$ (figura 3.6).

In figura 3.7 sono rappresentati valori delle frequenze di misure di triple coincidenze del tipo $d_1 - f_1 - f_2$ (-45°) e $d_2 - f_1 - f_2$ ($+45^\circ$), nei casi in cui lo stato del fotone da teletrasportare era polarizzato a $+45^\circ$ (a e b) e -45° (c e d). Il numero di triple coincidenze è graficato in funzione del ritardo di arrivo al separatore di fascio di Alice dei fotoni 1 e 2, sottraendo il segnale dovuto a contributi spuri. Questi dati, confrontati con la curva teorica di figura 3.6, confermano il successo della procedura di teletrasporto di uno stato arbitrario.

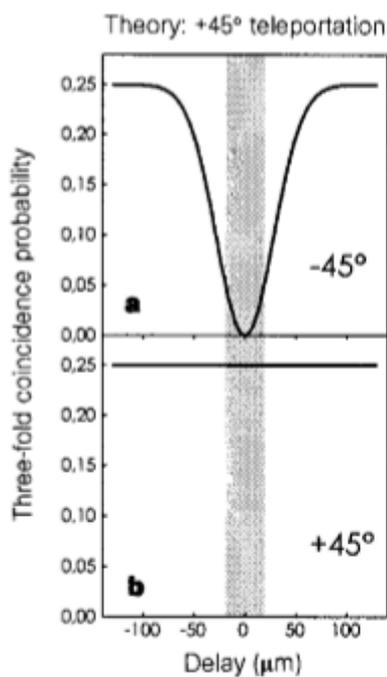


Figura 3.6: Predizione teorica per le triple coincidenze tra i due rivelatori di stati di Bell (f_1 , f_2) e uno dei rivelatori che analizzano lo stato teletrasportato, al variare del ritardo temporale tra i tempi di arrivo dei fotoni 1 e 2 al separatore di fascio. Immagine tratta da [33].

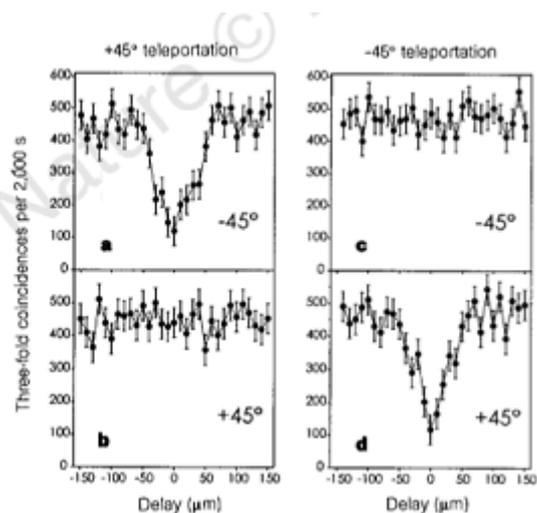


Figura 3.7: Risultati sperimentali dell'esperimento di Zeilinger e al. del 1997 [33].

3.2.2 L'esperimento di De Martini e al. del 1997

Nel 1994 Sandu Popescu [35], a quel tempo all'Università di Cambridge e oggi a Bristol, propose un esperimento matematicamente equivalente al teletrasporto, ma con un diverso significato fisico: egli suggerì di “montare” lo stato da teletrasportare su uno dei due fotoni *entangled*.

Tale idea fu realizzata nel 1997 all'Università La Sapienza di Roma dal gruppo di Francesco De Martini utilizzando solamente una coppia di fotoni in uno stato *entangled* in quantità di moto e i gradi di libertà di polarizzazione di uno dei fotoni furono impiegati per preparare lo stato da teletrasportare. Questo evitò le difficoltà di avere tre fotoni e rese la misura sugli stati di Bell più semplice. Lo stato da teletrasportare, uno stato puro non noto, è stato “impresso” direttamente sullo stato di Alice utilizzando polarizzatori e strumenti in grado di ruotare la polarizzazione.

Lo schema proposto dagli autori realizzava aspetti non locali del protocollo originario ed era equivalente ad esso a meno di operazioni locali. Questo genere di esperimento sfruttava solamente lo stato *entangled* di due fotoni e non consentiva il teletrasporto di un fotone esterno. Per raggiungere lo scopo, occorreva effettuare una operazione locale, ossia trasferire lo stato di polarizzazione di un terzo fotone indipendente dal fotone della coppia *entangled* in mano ad Alice (operazione equivalente ad eseguire una misura sugli stati di Bell dei due fotoni).

Questo esperimento fu piuttosto interessante in quanto probabilmente la parola più giusta per descriverlo sarebbe *telepreparazione*: ciò che venne trasportato al fotone di Bob è la preparazione eseguita sul fotone di Alice.

3.2.3 Teletrasporto di un fotone attraverso il Danubio

Nell'esperimento di teletrasporto effettuato ad Innsbruck nel 1997 la distanza del teletrasporto era di appena un metro. Nell'esperimento condotto nei pressi del Danubio da Rupert Ursin e dallo stesso Zeilinger nel 2004 [36], lo stato quantistico venne teletrasportato ad una distanza di 600 metri, con l'efficienza ottimale che poteva essere raggiunta utilizzando fibre ottiche.

Questo risultato rappresentò un passo ulteriore verso la realizzazione di ripetitori quantistici, in grado permettere la condivisione dell'entanglement tra punti molto distanti tra loro.

In figura 3.8 è illustrato lo schema dell'esperimento. Il canale quantistico dell'esperi-

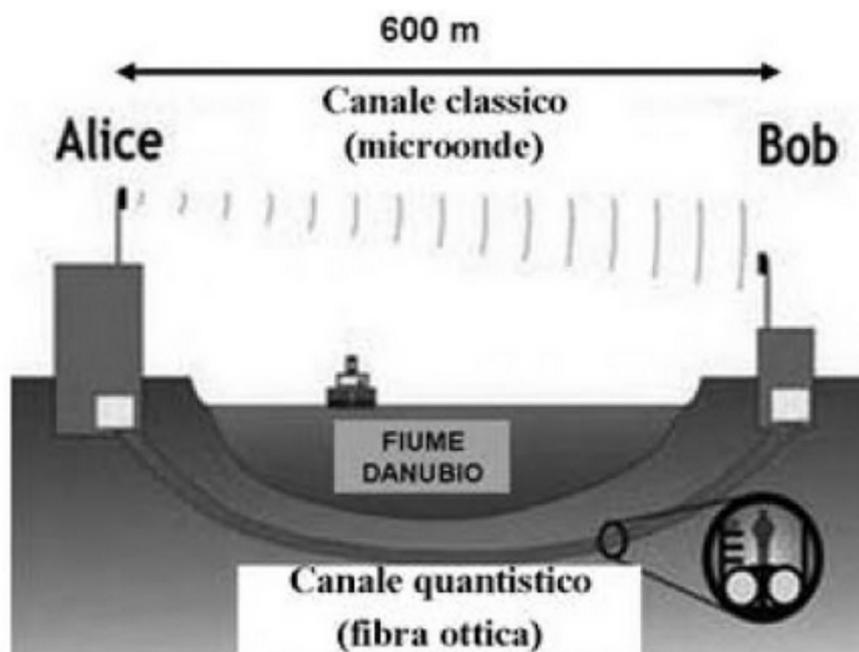


Figura 3.8: Teletrasporto quantistico attraverso il fiume Danubio a Vienna (Ursin e Zeilinger, 2004 [36]).

mento fu realizzato utilizzando coppie di fotoni EPR che viaggiavano lungo cavi in fibra ottica lunghi 800 metri installati nei pressi del sistema fognario pubblico della città di Vienna in un tunnel che attraversava in fiume Danubio, dove era esposto a fluttuazioni di temperatura e ad altri fattori ambientali.

Il canale classico, che permetteva la comunicazione del risultato della misura di Alice a Bob, era rappresentato da una connessione a microonde sopra il livello del fiume.

Come sorgente di fotoni *entangled* si utilizzò un sistema laser che produceva una sequenza di impulsi di luce laser in rapida successione (della durata di circa 150 fs), alla frequenza di 80 MHz. Il tempo che intercorreva tra un impulso e successivo era circa 100000 volte maggiore della durata del singolo impulso e il motivo aveva a che fare con l'indistinguibilità quantistica. L'impulso singolo passava attraverso un cristallo speciale spesso solo 2 mm, da cui emergevano fotoni *entangled* le cui direzioni di propagazione formavano tra loro un certo angolo definito.

La misura degli stati di Bell era effettuata tramite un *accoppiatore per fibra ottica*, costituito da due fibre ottiche che passavano una accanto all'altra. I centri delle fibre erano molto vicini uno all'altro e una parte della luce passava da una all'altra. Se ciò avveniva in modo corretto, l'accoppiatore agiva da separatore di fascio ottico 50/50.

La soluzione adottata in questo esperimento, con l'utilizzo di fibre ottiche e dell'accoppiatore, risultò più stabile di quella caratterizzata dall'utilizzo di semplici specchi e separatori di fascio.

Un modulatore elettro-ottico (EOM) permetteva a Bob di effettuare la trasformazione unitaria sul proprio fotone per ottenere un'esatta replica del fotone originario di Alice. Nello specifico, qualora Alice misurasse lo stesso stato di Bell dei fotoni della coppia EPR allora Bob avrebbe posseduto lo stato originale nel proprio fotone. Se invece Alice avesse osservato uno stato diverso, Bob avrebbe dovuto applicare un impulso di tensione all'EOM, per ruotare lo stato di polarizzazione del proprio fotone.

Per identificare tale stato se ne misurava la polarizzazione con un separatore di fascio.

Per poter terminare con successo l'operazione, Bob doveva regolare l'EOM correttamente prima dell'arrivo del fotone. A causa della ridotta velocità della luce nel canale quantistico a fibre ottiche (i due terzi della velocità della luce nel vuoto e attraverso l'aria), il segnale classico raggiungeva l'altro laboratorio 1.5 microsecondi prima dell'arrivo del fotone.

Il successo del teletrasporto è stato confermato, nonostante le fluttuazioni ambientali, per tre stati distinti di polarizzazione: lineare a 45° , circolare sinistrorsa e orizzontale.

I valori di accuratezza raggiunti, che indicano quanto bene lo stato quantistico che appare nel fotone di Bob corrisponda allo stato del fotone originale, superavano il limite classico di $2/3$ per tutti gli stati in input, provando il corretto funzionamento del sistema. Tale limite rappresenta il livello di accuratezza che può essere raggiunto senza entanglement quantistico, ossia misurando lo stato quantistico originale e ricreando il nuovo stato quantistico utilizzando l'informazione classica proveniente dalla misura.

3.3 Altri esperimenti di teletrasporto quantistico

3.3.1 Teletrasporto di stati atomici

Negli esperimenti di teletrasporto discussi finora la proprietà trasferita è una cosiddetta *proprietà discreta* della particella. Questo significa che il fotone ha due possibili stati di polarizzazione, O e V, definiti dall'orientazione del polarizzatore. Tuttavia il fotone ha anche altre proprietà non discrete, bensì continue, come, per esempio, la frequenza o l'energia. Possiamo descrivere la luce come la sovrapposizione di diversi modi di oscillazione del campo elettromagnetico e, per via della natura quantistica del campo elettromagnetico, ogni modo di oscillazione ha associata un'indeterminazione quanto-

meccanica, quindi del rumore, che in linea di principio può essere ridotto. Tuttavia, per il principio di indeterminazione, esiste sempre una grandezza complementare la cui indeterminazione aumenta, ossia aumenta il rumore associato a qualche altro modo di oscillazione.

Gli stati il cui rumore associato a qualche modo di oscillazione è stato ridotto si chiamano *stati compressi* o *squeezed*. La luce compressa è stata impiegata anche negli esperimenti di teletrasporto.

Nel 1998 un gruppo di ricercatori coordinati da Jeff Kimble, del California Institute of Technology [37], è riuscito a teletrasportare con successo la "compressione" da un fascio di luce ad un altro. Il loro esperimento segue essenzialmente le linee guida dei primi esperimenti di teletrasporto, traducendole però nel linguaggio degli stati di luce compressi.

Nel 2001 il gruppo guidato da Eugene Polzik, allora all'università di Aarhus in Danimarca, e ora a Copenaghen, è riuscito a gemellare quantisticamente lo stato compresso di spin congiunto di un certo numero di atomi di cesio in una nube atomica con lo stato di spin in un'altra nube atomica [38]; in entrambi i casi si trattava di una nube ultrafredda composta da atomi intrappolati in una determinata configurazione di campi elettrici e magnetici. Gli spin di una serie di atomi in questa configurazione possono essere allineati l'uno all'altro fino ad un certo grado, e lo stato di spin congiunto di questi atomi sarà tanto più compresso quanto più forte sarà l'allineamento degli spin.

Nel 2004 il gruppo di Polzik è riuscito a teletrasportare il "livello di compressione" da una nube atomica ad un'altra [39].

Nel 2006 lo stesso gruppo di scienziati è riuscito ad eseguire con successo esperimenti di teletrasporto di uno stato quantistico da impulsi di luce su un insieme di atomi, realizzando per la prima volta una procedura di teletrasporto tra due oggetti di diversa natura [40].

Questo risultato rappresenta un passo in avanti verso l'utilizzo di insiemi di atomi come nodi di memoria stabile per la comunicazione quantistica. In questo approccio, stati di spin di atomi alcalini sono stati utilizzati per immagazzinare stati quantistici, mentre i fotoni rappresentavano il mezzo di comunicazione. I nodi di memoria sono connessi al canale di comunicazione utilizzando interazioni luce-materia controllate utilizzando tecniche di spettroscopia laser ad alta risoluzione. Quando un impulso luminoso interagisce con molti atomi, tipicamente gli stati quantistici fotonici sono immagazzinati nelle eccitazioni di spin collettivo dell'ensemble di atomi.

I risultati sperimentali indicano che anche in questo caso l'accuratezza del teletrasporto supera il limite classico di $2/3$.

Un altro importante passo avanti è stato compiuto nel 2004 da due gruppi, uno guidato da Rainer Blatt dell'università di Innsbruck [41] e l'altro guidato da David Wineland nel National Institute of Standards and Technology (NIST) [42] di Boulder, in Colorado, i quali hanno realizzato, indipendentemente l'uno dall'altro, il teletrasporto di stati atomici.

In entrambi gli esperimenti sono state realizzate trappole di ioni utilizzando campi elettrici e magnetici disposti in maniera opportuna. In linea di principio è possibile trattenere i singoli ioni in questo genere di trappole elettromagnetiche per un tempo indeterminato: in tal modo i loro stati quantistici sono ben protetti dall'influenza dell'ambiente esterno.

Lo schema del protocollo, suggerito da Bennett e al nel 1993 e realizzato nei due esperimenti sopracitati, è illustrato in figura 3.9. Innanzitutto viene creato uno stato *entangled* per gli ioni A e B (step 1). In seguito viene generato uno stato da teletrasportare, una sovrapposizione coerente di stati interni, su un terzo ione P (step 2). Viene poi eseguita una misura congiunta di P ed A, il cui risultato viene poi inviato verso lo ione B (step 3). L'informazione della misura viene poi utilizzata per trasformare lo stato dello ione B (step 4). In questi esperimenti le trappole ioniche sono poste le une vicine alle altre,

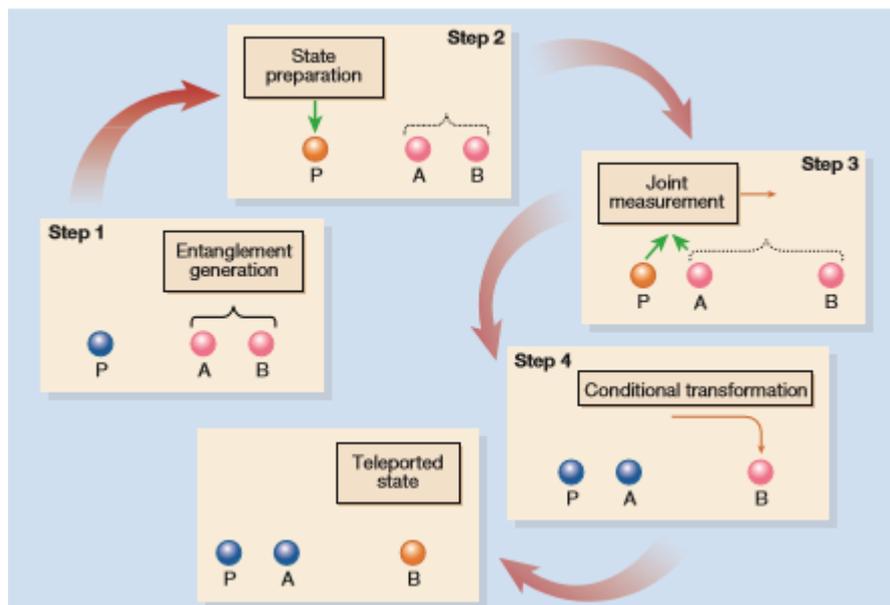


Figura 3.9: Schema della procedura di teletrasporto quantistico utilizzando trappole ioniche. Immagine tratta da [42]

quindi il teletrasporto avviene su distanze molto brevi, inferiori al millimetro.

Il gruppo di Innsbruck utilizzava gli stati fondamentale e metastabile di ioni calcio intrappolati come qubit, mentre il gruppo del NIST impiegava due stati fondamentali della struttura iperfine di ioni berillio.

I due gruppi hanno sfruttato tecniche differenti ottenendo entrambi un valore attorno a 0.75 di accuratezza per il teletrasporto, superiore al limite classico di $2/3$.

Nel 2012 un gruppo di ricercatori riuscì a teletrasportare l'informazione relativa ad un complesso sistema di circa 100 milioni di atomi di rubidio che aveva una grandezza di circa un millimetro [43]. Lo studio fu condotto da Jian-Wei Pan dell'Hefei National Laboratory for Physical Sciences at the Microscale, a cui collaborò un gruppo di ricercatori della University of Science and Technology in China e dell'Università di Heidelberg.

Per il teletrasporto gli sperimentatori prepararono in laboratorio una coppia *entangled* di granelli di rubidio, posti a circa mezzo metro di distanza, e i due sistemi furono poi messi in collegamento da una fibra ottica, lunga circa 150 metri ed arrotolata su sé stessa. Prima del processo di teletrasporto quantistico, gli scienziati mapparono lo stato di eccitazione degli atomi di rubidio in un fotone che doveva viaggiare lungo la fibra ottica. Fu possibile realizzare il teletrasporto facendo interagire il fotone "messaggero" con un secondo fotone e con il secondo sistema di atomi.

Nel 2013 un gruppo di fisici del centro di ricerca Quantop al Niels Bohr Institute della University of Copenhagen è riuscito a teletrasportare informazioni tra due nubi di atomi di gas di cesio poste ad una distanza di mezzo metro [44]. Il teletrasporto di informazioni da una nube all'altra è avvenuto per mezzo di luce laser, ciascuna nube è stata posta in un contenitore di vetro ed i due contenitori non sono stati in alcun modo collegati.

3.4 Teletrasportare a distanze sempre maggiori

Nel 2010 in Cina i ricercatori dell'Hefei National Laboratory for Physical Sciences erano riusciti a raggiungere una distanza di 16 km per il teletrasporto di fotoni senza l'aiuto di fibre ottiche [45]. Nel 2012 il team di ricercatori della University of Science and Technology of China di Shanghai, è riuscito a teletrasportare più di 1100 fotoni in 4 ore, ricoprendo una distanza di 97 Km nello spazio libero (*free space*) [46], superando la distanza di 16 km raggiunta nel precedente esperimento.

3.4.1 Un record per il teletrasporto free space: l'esperimento presso le isole Canarie

Nel 2012 presso l'Optical Ground Station (OGS) dell'Agenzia Spaziale Europea (ESA) alle isole Canarie si è stabilito un nuovo record mondiale di distanza nel teletrasporto quantistico free-space, riproducendo le caratteristiche di una particella di luce alla distanza di 143km, tra il Jacobus Kapteyn Telescope di La Palma e la Stazione ottica dell'ESA di Tenerife [47]. L'esperimento ha visto la collaborazione internazionale tra gruppi di ricerca delle università di Monaco, Padova, Bristol e Vienna.

L'esperimento ha impiegato due collegamenti ottici, uno quantistico e uno classico, tra due parti, Alice e Bob (figura 3.10). Il canale quantistico era rappresentato dalla coppia

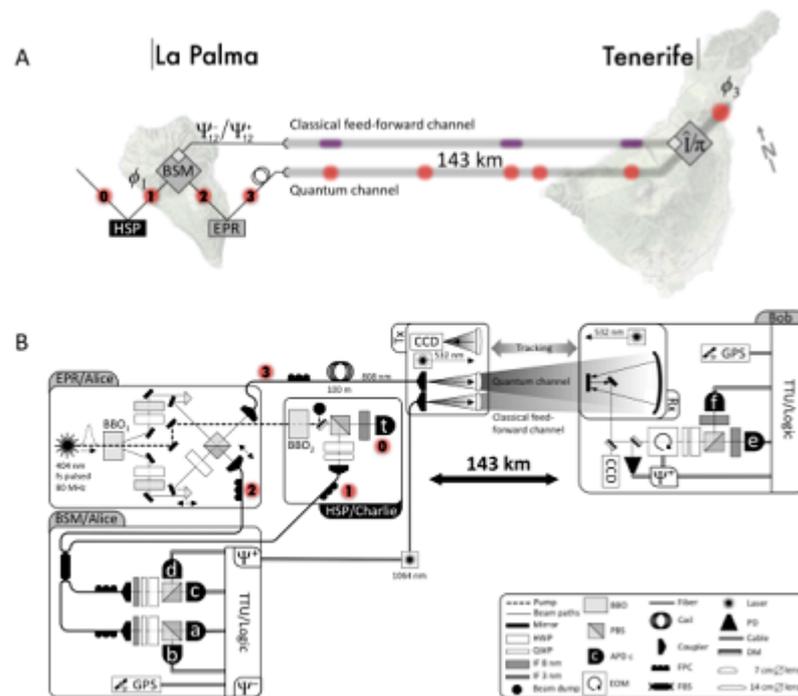


Figura 3.10: Teletrasporto quantistico tra le isole Canarie La Palma e Tenerife tramite doppio canale, classico e quantistico: schema (A) e set-up sperimentale (B). Immagine tratta da [47].

di fotoni (2 e 3) nello stato

$$|\psi^-\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_2|V\rangle_3 - |V\rangle_2|H\rangle_3), \quad (3.4)$$

che è uno dei quattro stati di Bell:

$$|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle|V\rangle \pm |V\rangle|H\rangle), \quad (3.5)$$

e

$$|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle|H\rangle \pm |V\rangle|V\rangle), \quad (3.6)$$

dove $|H\rangle_j$ e $|V\rangle_j$ denotano la polarizzazione O e V del fotone j -esimo. Il fotone 2 viene consegnato ad Alice e il fotone 3 a Bob. Charlie fornisce ad Alice il fotone 1, il cui stato generico dovrà essere trasportato nel fotone 3:

$$|\phi\rangle_1 = \alpha|H\rangle_1 + \beta|V\rangle_1, \quad (3.7)$$

dove α e β sono numeri complessi soddisfacenti la condizione di normalizzazione e sconosciuti sia ad Alice che a Bob. Alice effettua la misura degli stati di Bell, proiettando i fotoni 1 e 2 su uno dei quattro stati di Bell, ciascuno dei quali ha probabilità del 25% di verificarsi. Di conseguenza, il fotone 3 è proiettato sullo stato del fotone 1, a meno di una trasformazione unitaria (U) da applicare, che dipenderà dal risultato della misura che Alice comunica a Bob via canale classico.

Se il risultato è lo stato $|\psi^-\rangle_{12}$, U corrisponde alla trasformazione identità, se invece il risultato è $|\psi^+\rangle_{12}$ Bob dovrà applicare uno shift di fase di π tra la componente orizzontale e verticale del suo fotone. Presso La Palma, impulsi vicino all'infrarosso (lunghezza d'onda centrale di 808 nm) venivano emessi da un laser ed erano convertiti in impulsi blu (di lunghezza d'onda centrale di 404 nm), con una frequenza di ripetizione di 80 MHz.

Questi impulsi venivano impiegati per la generazione di due coppie *entangled* attraverso la conversione parametrica di tipo II in due cristalli non lineari BBO (β -barium borate) piazzati in sequenza: il primo per produrre la coppia 2 e 3, il secondo per disporre del fotone 1 e di un fotone di controllo. Per realizzare la misura degli stati di Bell, il fotone 2 era sovrapposto su un separatore di fascio a fibra (FBS) con il fotone 1 da teletrasportare, la cui polarizzazione era preparata in modo arbitrario da Charlie utilizzando lamine di ritardo a mezz'onda e a quarto d'onda.

In ciascuna porta di uscita dell'FBS un separatore di fascio polarizzante proietta i fotoni sulla polarizzazione O o V. Un controllore di polarizzazione della fibra (FPC) compensava la rotazione di polarizzazione indesiderata introdotta dalla fibra.

Quando il fotone 1 e 2 emergono dal FBS da diverse uscite (o dalla stessa) e mostrano

polarizzazione ortogonale, Alice proietta i fotoni 1 e 2 nello stato $|\psi^-\rangle_{12}$ (o $|\psi^+\rangle_{12}$). Tutti i fotoni sono rivelati utilizzando fotodiodi in silicio a singolo fotone (Si-APDs). Come in esperimenti precedenti, la misura degli stati di Bell si basava su una rilevazione di triple coincidenze tra fotone 0,1 e 2 originate dallo stesso impulso. Questa implementazione permetteva di identificare lo stato $|\psi^-\rangle_{12}$ con una tripla coincidenza tra i rivelatori $t - a - d$ o $t - b - c$ e lo stato $|\psi^+\rangle_{12}$ con la tripla coincidenza tra i rivelatori $t - a - b$ o $t - c - d$.

Si è variato per piccoli step il ritardo tra l'arrivo dei fotoni 1 e 2 al separatore di fascio, per eliminare la distinguibilità temporale tra i due fotoni.

Gli altri due stati di Bell non potevano essere identificati separatamente e non sono stati considerati in questo protocollo di teletrasporto.

Mentre Alice esegue la misura sugli stati di Bell, il fotone 3 è guidato verso un telescopio trasmettitore con apertura di 7 cm attraverso una fibra lunga 100 m e poi mandato attraverso un canale quantistico free-space lungo 143 km verso Bob a Tenerife.

A Tenerife veniva raccolto da un telescopio OGS di apertura 1 m, e mandato a Bob.

Nella prima parte dell'esperimento erano stati considerati solo i casi in cui Alice misurava $|\psi^-\rangle_{12}$, il che significava che il fotone 3 si trovava già nello stesso stato in input del fotone 1. Si è verificato il successo dell'operazione analizzando lo stato di polarizzazione del fotone 3 attraverso una lamina a quarto d'onda e una a mezz'onda consisting e due Si-APD localizzato ad ogni uscita del separatore di fascio polarizzante.

Nella seconda parte si sono studiati i casi in cui Alice otteneva dalla misura di Bell lo stato $|\psi^+\rangle_{12}$ e inviava l'informazione classica a Bob, il quale applicava uno shift di fase di π tra le componenti O e V della polarizzazione del fotone 3 per ottenere lo stato originale. Il risultato corrispondente allo stato $|\psi^+\rangle_{12}$ è stato codificato in impulsi di un laser a 1064 nm e inviato a Bob attraverso il canale classico free-space di 143 km utilizzando un'apertura separata di trasmissione.

A Tenerife, questi impulsi "classici", proprio come il segnale quantistico, vengono mandati all'apertura di 1 m del telescopio OGS. Bob in seguito utilizza uno specchio dicroico (DM) per separare gli impulsi laser a 1064 nm dal segnale quantistico (fotone 3) e rileva gli impulsi classici con un fotodetector (PD). L'output del PD veniva convertito in un segnale logico TTL, che portava il risultato della misura di Bell codificato, da usare come trigger per un modulatore elettro-ottico (EOM), in grado di applicare l'operazione di fase richiesta. Infine, Bob utilizzava un circuito logico extra per identificare le coincidenze tra i contatori del fotone 3 e quelli del risultato della misura di Bell.

La fibra lunga 100 m era usata per ritardare il fotone 3 a La Palma prima che viaggiasse per Tenerife, dando a Bob abbastanza tempo per settare il modulatore EOM ed effettuare lo shift di fase.

Gli eventi rilevanti nei laboratori di Alice e Bob erano registrati con unità separate di tracciamento temporale, ciascuno regolato da segnale GPS. Prima, Alice a La Palma identificava eventi di tripla coincidenza corrispondenti agli stati $|\psi^\pm\rangle_{12}$ risultanti dalla misura di Bell, attraverso un circuito logico a coincidenza con due segnali in uscita separati (TTL). Questi impulsi venivano mandati in un'unità di tracciamento temporale che registrava il tempo esatto e il risultato della misura di Bell in un file binario. Similmente, Bob mandava il segnale di entrambi i rivelatori (prima parte, senza dover applicare la trasformazione unitaria) o la coincidenza tra questi segnali e i risultati delle misure di Bell inviati tramite laser 1064 nm nell'unità di tracciamento temporale. Dopo il completamento della misura, entrambi i file di dati di tracciamento temporali vengono confrontati.

I risultati di accuratezza dell'esperimento, sia nel caso di applicazione dello shift di fase da parte di Bob, sia senza l'applicazione di tale shift, e considerando solo lo stato di Bell $|\psi^-\rangle_{12}$, sono rappresentati in figura 3.11. È stato teletrasportato un insieme di quattro stati in input: $|H\rangle_i, |V\rangle_i, |P\rangle_i = (|H\rangle_i + |V\rangle_i)/\sqrt{2}$, $|L\rangle_i = (|H\rangle_i - i|V\rangle_i)/\sqrt{2}$, e la precisione media osservata per il teletrasporto realizzato nell'esperimento era oltre il limite classico di $2/3$.

Catturare singoli fotoni ad una distanza così grande si rivelò estremamente complicato. La ragione risiede nel fatto che l'atmosfera non è stabile. Ci si può accorgere di ciò anche semplicemente osservando le stelle di notte: le luci non sono ferme ma scintillano e sembrano oscillare.

Per le particelle di luce dell'esperimento ciò significava che un fotone partito da La Palma non sempre arrivava alla stazione di ricezione a Tenerife. Il successo dell'esperimento è stato, in parte, dovuto ad un meccanismo attivo di correzione costruito appositamente per ovviare a questo inconveniente.

All'OGS, un faro laser inviava luce verso La Palma e analogamente ve n'era uno che lavorava in direzione opposta. Sia la stazione di invio a La Palma, sia il telescopio ricevente a Tenerife erano costantemente ricalibrati al fine di massimizzare l'intensità del segnale. Si è dimostrato che, dopo aver percorso una distanza così lunga, i fotoni erano ancora *entangled* ed era possibile anche effettuare esperimenti di crittografia quantistica.

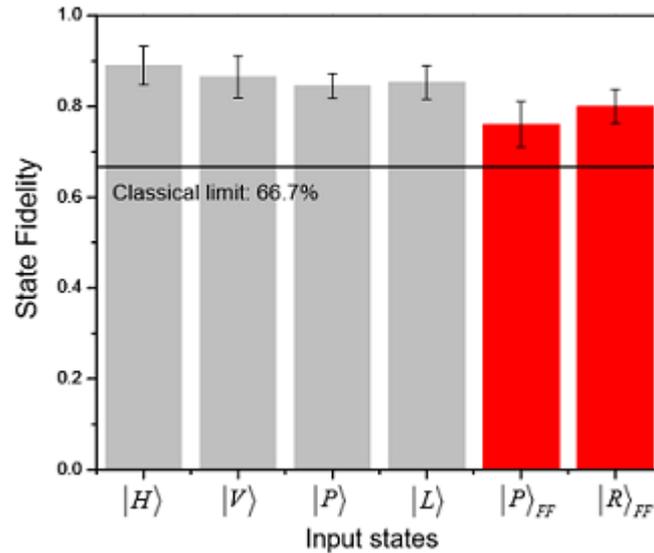


Figura 3.11: Sommario dei risultati di accuratezza dello stato teletrasportato allo stato originario con (barre rosse) e senza (barre grigie) la necessità dell'applicazione della trasformazione unitaria da parte di Bob. Immagine tratta da [47].

3.4.2 Teletrasporto e satelliti

L'esperimento di teletrasporto effettuato tra gli osservatori di La Palma e Tenerife ha dimostrato la maturità e l'applicabilità delle tecnologie in scenari più ampi, a livello mondiale, e si è rivelato importante anche per il seguente motivo.

L'esperimento alle Canarie faceva parte di un progetto tecnico e scientifico in un campo sviluppatosi di recente: il satellite Artemis era stato mandato in orbita dall'ESA allo scopo di testare tecniche di comunicazione ottica le comunicazioni ottiche tra i satelliti e le stazioni sulla Terra, nonché tra satellite e satellite.

Di solito per comunicare con i satelliti si utilizzano segnali radio: da un lato questi sono necessari per inviare ordini al satellite dalla Terra, dall'altro il satellite li usa per inviare le informazioni raccolte dai suoi strumenti. In particolare, quando il satellite deve inviare sulla Terra immagini, la quantità di dati da trasmettere è molto grande: in questi casi sarebbe utile disporre di un mezzo di comunicazione che permetta di inviare una quantità di informazioni maggiore di quella trasportata da un segnale radio. A questo scopo si rivelavano utili connessioni ottiche, su cui già si basavano sulla Terra le moderne tecniche di telecomunicazione per trasmettere grandi quantità di dati (come, per esempio, fibre ottiche).

Il satellite Artemis disponeva di un piccolo laser in grado di inviare un segnale luminoso (nello specifico, infrarosso) da una distanza di 35000 km fino al telescopio. Questa tecnologia si è rivelata utile negli esperimenti sull'entanglement e sul teletrasporto quantistico. L'idea è quella di lanciare in orbita un successore quantistico di Artemis, contenente una sorgente di fotoni *entangled*. La sfida quantistica è quella di teletrasportare lo stato quantistico di un fotone da un satellite fino a Terra, e viceversa. L'atmosfera è spessa qualche km e, almeno in linea di principio, ciò dovrebbe essere possibile: dopo essersi lasciato l'atmosfera alle spalle, un fotone in viaggio dalla Terra verso un satellite si muove essenzialmente nel vuoto, senza che questo abbia conseguenze particolari sul suo moto. Nonostante ciò, esperimenti di questo tipo risultano piuttosto impegnativi, per via della difficoltà di catturare un singolo fotone inviato da un satellite verso la Terra o dalla Terra ad un satellite. Tuttavia non esistono ragioni particolari per cui questo in un futuro non possa essere possibile.

Un esperimento in questa direzione si sta svolgendo a Matera, in Basilicata: un debole impulso laser viene inviato verso il satellite giapponese Ajisai, parzialmente coperto da deflettori a specchio che rimandano la luce sulla Terra. Si è riusciti a rendere il fascio laser emesso verso il satellite così debole che, per ogni impulso inviato, solo un fotone riusciva a tornare indietro.

Un'altra difficoltà di esperimenti che coinvolgono satelliti consiste nel fatto che gli strumenti a bordo dovranno essere estremamente efficienti e non guastarsi in alcun caso. Quando qualcosa si rompe in un laboratorio a Terra è sufficiente recarsi sul posto e aggiustarlo. Su un satellite sarebbe impossibile.

3.4.3 Record per il teletrasporto lungo fibra ottica

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che la comunicazione quantistica per grandi distanze nello spazio libero si è rivelata possibile.

Nonostante ciò, realizzare il teletrasporto quantistico attraverso fibre ottiche rappresenta una sfida difficile, principalmente a causa del fatto che la rilevazione di fotoni che accompagna esperimenti di teletrasporto quantistico è molto difficile a causa della bassa efficienza dei rivelatori di singolo fotone che lavorano nella tipica banda delle telecomunicazioni.

Nel 2015 alcuni ricercatori guidati da Hiroki Takesue del the National Institute of Standards and Technology (NIST) sono riusciti a teletrasportare informazione quantistica mediata da fotoni per ben 100 km attraverso fibra ottica con una accuratezza media

dell' $83.7 \pm 2.0\%$ [48]. Questo risultato è stato reso possibile dall'utilizzo di rivelatori di singolo fotone ad alta efficienza composti da nanofili di superconduttore (SNSPDs), progettati e realizzati presso lo stesso NIST. Solamente l'1% dei fotoni, infatti, riusciva ad attraversare i 100 km di fibra e i rivelatori dovevano rivelare segnali estremamente deboli.

L'esperimento conferma che la comunicazione quantistica è realizzabile per grandi distanze anche in fibra ottica. Quest'ultima possibilità offre più flessibilità a livello di design di rete. La nuova tecnica di teletrasporto potrebbe, infatti, essere utilizzata per realizzare ripetitori quantistici, in grado di ritrasmettere i dati periodicamente in modo da estendere la rete e creare un "internet quantistico".

3.5 Così viaggeranno informazioni sicure

Nel 2014 un team di ricercatori del Delft University of Technology, guidati da Ronald Hanson hanno realizzato un sistema deterministico per teletrasportare informazioni quantistiche tra atomi e dispositivi a stato solido che si comportano come veri hard disk [49].

Il metodo realizzato è perfettamente efficiente e replicabile ed è stato testato su una distanza di ben tre metri, ben oltre il mezzo metro iniziale e l'88 per cento di probabilità di successo raggiunto da Jen-Wei Pan nel 2012. Il margine di fallimento risulta pari a zero e la qualità dei dati trasmessa si aggira intorno al 77 per cento.

Questo studio ha dimostrato che questo tipo di teletrasporto è possibile con il 100% di efficienza. Perciò, mentre fino ad ora sono state realizzate dimostrazioni probabilistiche, cioè schemi che funzionano una frazione delle volte, in questo caso il metodo funziona sempre. Il nuovo risultato rappresenta un passo in avanti verso la costruzione di nuovi dispositivi di comunicazione e computazione basati sui bit quantistici.

Il team ha utilizzato due chip composti da diamanti e raggi laser. In particolare, si sono utilizzati gli stessi difetti che caratterizzano la colorazione del diamante, dove uno degli atomi di carbonio è mancante e un altro è sostituito da un atomo di azoto. Il primo passo è stato creare l'entanglement tra due singoli elettroni nei due chip conservati in due criostati contenenti elio liquido, usati per mantenere la temperatura a circa -270° . Una volta preparati i nodi della rete quantistica e il canale grazie ad una complessa sequenza di impulsi laser, microonde e radiofrequenza, lo stato quantistico del nucleo di azoto contenuto in un diamante è stato teletrasportato nel singolo elettrone presente

nell'altro diamante, posto a tre metri di distanza.

Trasferire lo stesso procedimento a chip molto più distanti è solo una questione di tipo ingegneristico. Saranno collegati da un chilometro e mezzo di fibra ottica, ma il principio di base sarà lo stesso.

Il modo più immediato in cui è possibile sfruttare questo nuovo risultato sarà la creazione di una rete quantistica. In tali reti l'informazione sarà codificata su singoli fotoni e memorizzata in nodi locali costituiti, per esempio, da singoli elettroni e nuclei nel diamante. Il vantaggio è che sono strutture fundamentalmente sicure per il principio di indeterminazione di Heisenberg: non è possibile conoscere contemporaneamente due caratteristiche di un oggetto quantistico. Perciò ogni tentativo di spionaggio introdurrebbe delle cosiddette perturbazioni e sarebbe facilmente rilevabile.

Il protocollo di teletrasporto, dimostrato a Delft, consente appunto di trasferire l'informazione quantistica da un nodo all'altro della rete, mantenendo la capacità di rilevare l'intrusione di spie nel canale.

Ma la creazione di un quantum network è ancora lontana. Si tratta ancora di una fase di sperimentazione fisica e non si è affatto vicini, ancora, a realizzare un apparecchio vendibile. Il metodo di teletrasporto funziona deterministicamente, ma solo ogni volta che il canale è nello stato *entangled*.

Proprio la preparazione dell'entanglement è il collo di bottiglia del sistema: per ora si riesce a realizzare circa una volta ogni minuto. Certo, è migliorabile: al momento i ricercatori stanno lavorando su cavità ottiche che dovrebbero rendere più facile l'accoppiamento tra elettroni nel diamante e fotoni, consentendoci quindi di raggiungere una velocità più elevate.

Conclusioni

Qual è il futuro del teletrasporto quantistico?

Entro pochi anni gli esperimenti copriranno distanze ancora maggiori. Si è visto che molti gruppi di ricerca stanno lavorando al progetto di teletrasportare lo stato quantico di un fotone da una stazione sulla Terra ad un'altra su un satellite e viceversa.

Il valore di tali esperimenti non si limita unicamente a dimostrare come funziona il teletrasporto a grandi distanze, ma, aspetto ancora più importante, essi confermerebbero le predizioni della Meccanica Quantistica su una scala completamente nuova: due particelle in uno stato *entangled* devono rimanere correlate quantisticamente l'una con l'altra a prescindere dalla distanza che le separa.

Tale affermazione è valida anche su scala cosmica? È possibile che esistano sistemi di molti fotoni, o sistemi anche più complessi, *entangled* sin dall'inizio dell'universo?

Sarebbe interessante pensare che compiere una misura su un fotone sulla Terra, giunto a noi da un passato molto lontano, possa influenzare lo stato quantistico di un altro fotone molto distante, magari oltre la nostra galassia. Ma è difficile immaginare come un simile esperimento possa essere realizzato in un tempo ragionevole.

Un'idea interessante sarebbe immaginare la realizzazione di un esperimento simile tra la Terra e una nave spaziale, per esempio, in viaggio verso Marte. Gli astronauti in volo potrebbero, per i 260 giorni della durata del viaggio, compiere esperimenti sull'entanglement e sul teletrasporto quantistico, testando la correlazione quantistica a decine di milioni di chilometri.

Un'altra linea di ricerca riguarda lo studio degli stati di sistemi più complessi, per esempio atomi o molecole. Il livello di sfida cresce proporzionalmente al numero di particelle che compongono il sistema in esame: da un lato occorre creare uno stato *entangled* di un sistema complicato e, dall'altro, trovare una generalizzazione della misura sugli stati di Bell tale da renderla applicabile ad una situazione così complessa.

Un obiettivo al di fuori della nostra portata invece è quello di osservare fenomeni quan-

tistici e, quindi, applicare il teletrasporto quantistico a livello degli esseri viventi.

Per poter teletrasportare, per esempio, una persona occorrerebbero i seguenti presupposti [50].

Innanzitutto, la persona da teletrasportare si dovrebbe trovare in uno stato quantistico che può essere raggiunto solamente quando il sistema da teletrasportare è completamente isolato dall'ambiente esterno. La maggior parte delle interazioni con l'ambiente esterno distruggerebbe lo stato quantistico del nostro sistema umano e ne impedirebbe il teletrasporto. Questo è ciò che accade, per esempio, nell'esperimento della doppia fenditura: ogni azione sulla particella che ci permetterebbe di scoprire quale fenditura essa attraversi distruggerebbe l'interferenza quantistica. Tale fenomeno è detto *decoerenza quantistica*.

Il punto essenziale è che per trovarsi in uno stato quantico un essere umano dovrebbe trovarsi in una sovrapposizione di stati, ma non è chiaro che cosa questo significhi per un essere vivente. Inoltre, una persona possiede una mente, una coscienza, attraverso le quali osserverebbe il suo stesso ambiente, cosa fatale per la sovrapposizione quantomeccanica di stati in cui si troverebbe.

Se anche riuscissimo a mettere una persona in uno stato quantico, secondo il protocollo di teletrasporto quantistico il passo successivo consisterebbe nel produrre una coppia di persone *entangled*: nessuno dei due sistemi *entangled* dovrebbe possedere caratteristiche proprie prima che esse vengano misurate (ad esempio, nessuno dei due gemelli quantistici dovrebbe avere un determinato colore degli occhi, dei capelli o altre caratteristiche). Le persone *entangled* dovrebbero essere perfettamente correlate, quindi quando ne osserviamo una, l'altra dovrebbe mostrare caratteristiche ben precise, e ciò dovrebbe avvenire per tutti gli attributi fisici. Un siffatto entanglement ovviamente solleverebbe anche problemi di natura etica.

Tuttavia, procedendo oltre e immaginando di poter produrre una coppia di persone *entangled*, occorrerebbe proiettare la persona da teletrasportare e una della coppia di gemelli quantistici in uno stato *entangled*. Nessuno ha la minima idea di come questa procedura possa essere realizzata. In conclusione, il teletrasporto di esseri viventi rimane un sogno limitato alla fantascienza.

La possibilità di utilizzare il teletrasporto quantistico per trasferire informazioni tra due computer quantistici è, invece, una questione completamente differente. Infatti, possiamo considerare l'insieme di tutti gli esperimenti di teletrasporto come parte di un programma di ricerca più vasto volto a realizzare computer quantistici.

Una delle caratteristiche più interessanti dei computer quantistici consiste nella rappresentazione dell'informazione in termini di qubit. Per esempio, lo spin di un atomo potrebbe essere il vettore dell'informazione in un ipotetico computer quantistico. Se due spin fossero *entangled*, lo sarebbe anche l'informazione ad essi associata, e l'informazione in un computer quantistico non solo sarebbe *entangled* ma potrebbe esistere come sovrapposizione di diverse possibilità.

Un computer quantistico sarebbe in grado di risolvere problemi per i quali un computer convenzionale avrebbe bisogno di un tempo superiore all'età dell'Universo.

Il teletrasporto giocherebbe un ruolo fondamentale perchè sarebbe il metodo ideale per trasferire l'informazione quantistica dall'uscita di un computer all'ingresso di un altro e potrebbe essere utilizzato anche per processare tale informazione all'interno di un singolo calcolatore quantistico. Nel 1999, infatti, Michael Nielsen e Isaac Chuang hanno proposto un algoritmo di calcolo quantistico in cui il teletrasporto si rivelava fondamentale all'interno dello stesso computer [12].

Abbiamo visto che il teletrasporto quantistico funziona particolarmente bene per i fotoni. Nel 2001 Emanuel Knill e Raymond Laflamme, del Los Alamos National Laboratory, e Gerard Milburn, dell'università del Queensland, hanno dimostrato come la realizzazione di computer quantistici che utilizzano solo fotoni come vettori dell'informazione sia davvero possibile [51]. Da allora si è cercato di costruire diversi componenti elementari per tali computer quantistici puramente ottici basati su fotoni.

Tali computer funzionano secondo principi stocastici e solo occasionalmente mostrano il risultato del calcolo eseguito. Una prima dimostrazione del funzionamento di un tale *computer quantistico a senso unico* è stata compiuta nel 2005 all'università di Vienna [52]: esso è molto più veloce di qualsiasi altro computer quantistico attualmente ipotizzato.

È ovviamente affascinante pensare alla possibilità che esista in futuro una rete internet quantistica, una rete modiale di computer quantistici che si scambiano informazioni attraverso il teletrasporto e che sarebbe semplice rendere sicura contro azioni di spionaggio attraverso tecniche di crittografia quantistica.

Bibliografia

- [1] *Reconfigure the Modulators!*, Time Magazine, November 28, 1994.
- [2] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen. *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?*, Physical Review, vol. 47, n°10, 15 maggio 1935, pp. 777-80, DOI:10.1103, PhysRev.47.777.
- [3] A. Aspect, P. Grangier, G. Roger. *Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem*, Physical Review Letters, vol. 47, 1981, p. 460.
- [4] J.-W. Pan, D. Bouwmeester, H. Weinfurter, A. Zeilinger. *Experimental entanglement swapping: Entangling photons that never interacted*, Phys. Rev. Lett. 80 (18), 3891-3894, 1998.
- [5] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, W. K. Wootters. *Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels*, Phys. Rev. Lett. 70, 1895, Published 29 March 1993.
- [6] A. Turing. *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, Proc. London Math. Soc., 42:230-265, 1936.
- [7] M. J. Atallah. *Algorithms and Theory of Computation Handbook*, CRC Press, 1999.
- [8] G. Moore. *Cramming more components onto integrated circuits*, Electronics Magazine, 1965.
- [9] D. Deutsch. *Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer*, Proceedings of the Royal Society, London, 400: 97-117.
- [10] P. Shor. *Algorithms for quantum computation: Discrete log and factoring*, Proceedings of the 35th Annual Symposium on the Foundations of Computer Science, 1994.

- [11] L. K. Grover. *A fast quantum mechanical algorithm for database search*, Proceedings, 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, 1996.
- [12] M. A. Nielsen, I. L. Chuang. *Quantum computation and quantum information* (New ed., 10th anniversary ed.), Cambridge University Press, ISBN 978-1-107-00217-3, 1968-(2010).
- [13] P. Dirac. *I principi della meccanica quantistica*, Bollati Boringhieri, 1971.
- [14] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, W. M. Itano, D. J. Wineland. *Demonstration of a fundamental quantum logic gate*, Physical review letters 75(25):4714-4717, 1995.
- [15] W. K. Wootters, W. H. Zurek. *A single quantum cannot be cloned*, Nature, 299, 1982.
- [16] W. Gerlach, O. Stern. *Das magnetische Moment des Silberatoms*, Zeitschrift für Physik 9, 353-355 (1922).
- [17] S. Wiesner. *Conjugate coding*, Newsletter ACM SIGACT News - A special issue on cryptography, Volume 15 Issue 1, Winter-Spring 1983, Pages 78-88.
- [18] J. von Neumann. *Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik*, Göttinger Nachrichten, vol. 1, 1927, p. 245-272.
- [19] M. Schlüter, L. J. Sham. *Density functional theory*, Physics Today, vol. 35, n° 2, 1982, p. 36.
- [20] U. Fano, *Density matrices as polarization vectors*, Rendiconti Lincei, vol. 6, n° 2, 1995, p. 123-130.
- [21] P. A. M. Dirac. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 26, 2008.
- [22] J. S. Bell. *On the Einstein Podolsky Rosen Paradox*, Physics 1, 195-200 (1964).
- [23] S. J. Freedman, J. F. Clauser. *Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories*, Phys. Rev. Lett. 28, 938, published 3 April 1972
- [24] G. Weihs, T. Jennewein, C. Simon, H. Weinfurter, A. Zeilinger. *Violation of Bell's Inequality under Strict Einstein Locality Conditions*, Phys. Rev. Lett. 81, 5039 published 7 December 1998.

- [25] T. Scheidl, R. Ursin, J. Kofler, A. Zeilinger. *Violation of local realism with freedom of choice*, Proceedings of the National Academy of Sciences 107(46):19708-13 · November 2010.
- [26] P. Villoresi, T. Jennewein, F. Tamburini, M. Aspelmeyer, C. Bonato, R. Ursin, C. Pernechele, V. Luceri, G. Bianco, A. Zeilinger, C. Barbieri. *Experimental verification of the feasibility of a quantum channel between Space and Earth*, New Journal of Physics 10, 033038 (2008).
- [27] J. Bell. *Locality in quantum mechanics: reply to critics*, Epistemological Letters, Nov. 1975, 2-6. Reprinted in Bell (1987), pp. 63-66 (1975b).
- [28] M. A. Rowe, D. Kielpinski, V. Meyer, C. A. Sackett, W. M. Itano, C. Monroe, D. J. Wineland. *Experimental violation of a Bell's inequality with efficient detection*, Nature 409, 791-794 (15 February 2001).
- [29] https://en.wikipedia.org/wiki/Spontaneous_parametric_down-conversion.
- [30] D. M. Greenberg, M. A. Horne, A. Zeilinger. *Bell's Theorem, Quantum Theory and Conceptions of the Universe*, Dordrecht: Kluwer Academics 1989, pp 73-76, Am j. Phys., 58, 1990, pp. 1131.
- [31] D. Bouwmeester, J.-W. Pan, M. Daniell, H. Weinfurter, A. Zeilinger. *Observation of Three-Photon Greenberger-Horne-Zeilinger Entanglement*, Phys. Rev. Lett. 82, 1345, published 15 February 1999.
- [32] G. B. Lemos, V. Borish, G. D. Cole, S. Ramelow, R. Lapkiewicz, A. Zeilinger *Quantum Imaging with Undetected Photons*, Nature 512, 409-412 (2014).
- [33] D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, A. Zeilinger. *Experimental quantum teleportation*, Nature 390, 575-579 (11 December 1997).
- [34] D. Boschi, S. Branca, F. De Martini, L. Hardy, S. Popescu. *Experimental Realization of Teleporting an Unknown Pure Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels*, Phys. Rev. Lett. 80, 1121, published 9 February 1998.
- [35] S. Popescu. *Bell's inequalities versus teleportation: What is nonlocality?*, Phys. Rev. Lett. 72, 797, published 7 February 1994.

- [36] R. Ursin, T. Jennewein, M. Aspelmeyer, R. Kaltenbaek, M. Lindenthal, P. Walther, A. Zeilinger. *Communications: Quantum teleportation across the Danube*, Nature 430, 849 (19 August 2004).
- [37] S. L. Braunstein, H. J. Kimble. *Teleportation of Continuous Quantum Variables*, Physical Review Letters - PHYS REV LETT , vol. 80, pp. 869-872, 1998.
- [38] B. Julsgaard, A. Kozhekin, E. S. Polzik. *Experimental long-lived entanglement of two macroscopic objects*, Nature. 2001 Sep 27; 413(6854): 400-3.
- [39] K. W. Goh, C.-W. Chou, T. Zhang, P. Lodahl, H. J. Kimble. *Teleportation of continuous quantum variables using squeezed-state entanglement*, Proc. SPIE 5161, Quantum Communications and Quantum Imaging, 37 (February 3, 2004); doi:10.1117/12.508566.
- [40] J. F. Sherson, H. Krauter, R. K. Olsson, B. Julsgaard, K. Hammerer, I. Cirac, E. S. Polzik. *Quantum teleportation between light and matter*, Nature 443, 557-560 (5 October 2006).
- [41] M. Riebe, H. Häffner, C. F. Roos, W. Hänsel, J. Benhelm, G. P. T. Lancaster, T. W. Körber, C. Becher, F. Schmidt-Kaler, D. F. V. James, R. Blatt. *Deterministic quantum teleportation with atoms*, Nature 429, 734-737 (17 June 2004).
- [42] M. D. Barrett, J. Chiaverini, T. Schaetz, J. Britton, W. M. Itano, J. D. Jost, E. Knill, C. Langer, D. Leibfried, R. Ozeri, D. J. Wineland. *Deterministic quantum teleportation of atomic qubits*, Nature 429, 737-739 (17 June 2004).
- [43] X.-H. Bao, X.-F. Xu, C.-M. Li, Z.-S. Yuan, C.-Y. Lu, J.-W. Pan. *Quantum teleportation between remote atomic-ensemble quantum memories*, 10.1073/pnas.1207329109 (2012).
- [44] H. Krauter, D. Salart, C. A. Muschik, J. M. Petersen, Heng Shen, T. Fernholz, E. S. Polzik. *Deterministic quantum teleportation between distant atomic objects*, Nature Physics 9, 400-404 (2013).
- [45] X.-M. Jin, J.-G. Ren, B. Yang, Z.-H. Yi, F. Zhou, X.-F. Xu, S.-K. Wang, D. Yang, Y.-F. Hu, S. Jiang, T. Yang, H. Yin, K. Chen, C.-Z. Peng, J.-W. Pan. *Experimental free-space quantum teleportation*, Nature Photonics 4, 376 - 381 (2010).

- [46] J. Yin, H. Lu, J.-G. Ren, Y. Cao, H.-L. Yong, Y.-P. Wu, C. Liu, S.-K. Liao, Y. Jiang, X.-D. Cai, P. Xu, G.-S. Pan, J.-Y. Wang, Y.-A. Chen, C.-Z. Peng, J.-W. Pan. *Teleporting independent qubits through a 97 km free-space channel*, arXiv:1205.2024v1.
- [47] X.-S. Ma, T. Herbst, T. Scheidl, D. Wang, S. Kropatschek, W. Naylor, B. Wittmann, A. Mech, Johannes Kofler, E. Anisimova, V. Makarov, T. Jennewein, R. Ursin, A. Zeilinger *Quantum teleportation over 143 kilometres using active feed-forward*, Nature 489, 269-273 (13 September 2012).
- [48] H. Takesue, S. D. Dyer, M. J. Stevens, V. Verma, R. P. Mirin, S. W. Nam. *Quantum teleportation over 100 km of fiber using highly efficient superconducting nanowire single-photon detectors*, Optica Vol. 2, Issue 10, page 832, 2015.
- [49] W. Pfaff, B. Hensen, H. Bernien, S. B. van Dam, M. S. Blok, T. H. Taminiau, M. J. Tiggelman, R. N., Schouten, M. Markham, D. J. Twitchen, R. Hanson. *Unconditional quantum teleportation between distant solid-state qubits*, Science, published online May 29, 2014.
- [50] A. Zeilinger. *Dance of the Photons. From Einstein to Quantum Teleportation*, Le Scienze, Codice Edizioni, 2010.
- [51] E. Knill, R. Laflamme, G. Milburn. *A scheme for efficient quantum computation with linear optics*, Nature, 409: 46-52, 2001.
- [52] P. Walther, K. J. Resch, T. Rudolph, E. Schenck, H. Weinfurter, V. Vedral, M. Aspelmeyer, A. Zeilinger. *Experimental one-way quantum computing*, Nature 434, 169-176 (10 March 2005).

Appendice A

Postulati della Meccanica Quantistica

La meccanica quantistica fornisce una struttura matematica e concettuale per lo sviluppo delle leggi cui un sistema fisico deve obbedire. La connessione tra il mondo fisico e il formalismo matematico della meccanica quantistica è garantito da una serie postulati.

A.1 Lo spazio degli stati

Il primo postulato descrive l'ambiente in cui la meccanica quantistica agisce, ossia lo spazio di Hilbert.

Postulato 1: Associato ad un sistema fisico isolato vi è uno spazio vettoriale complesso in cui è definito un prodotto interno (cioè uno spazio di Hilbert), conosciuto come spazio degli stati del sistema. Il sistema è completamente descritto dal suo vettore di stato, che è un vettore unitario nello spazio degli stati del sistema.

La meccanica quantistica non ci dice, dato un sistema fisico, quale sia il suo stato, nè quale sia il suo vettore di stato. Il sistema quantomeccanico più semplice, trattato nel Capitolo 1, è rappresentato dal qubit. Un qubit ha uno spazio degli stati complesso bidimensionale. Supponiamo che $|0\rangle$ e $|1\rangle$ formino una base ortonormale per tale spazio degli stati. Allora qualunque vettore di stato arbitrario appartenente a tale spazio può essere scritto come combinazione lineare dei vettori di tale base:

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \tag{A.1}$$

con a e b numeri complessi. La condizione per cui $|\psi\rangle$ deve essere un vettore unitario, $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, è chiamata condizione di normalizzazione ed è equivalente alla condizione $a^2 + b^2 = 1$. L'unitarietà del vettore di stato non toglie l'arbitrarietà della descrizione, in quanto permane un fattore di fase che può essere scelto a piacere, non possedendo significato fisico. La matrice densità, trattata nel Capitolo 2, non contiene questo fattore di fase, pertanto descrive in maniera univoca uno stato.

A.2 Evoluzione

Come evolve nel tempo lo stato $|\psi\rangle$ di un sistema quantomeccanico?

Il seguente postulato descrive l'evoluzione dello stato.

Postulato 2: L'evoluzione di un sistema quantomeccanico chiuso è descritta da una trasformazione unitaria. Cioè, lo stato $|\psi\rangle$ del sistema al tempo t_1 è legato allo stato $|\psi'\rangle$ al tempo t_2 da un operatore unitario U che dipende soltanto dagli istanti di tempo t_1 e t_2 ,

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle \quad (\text{A.2})$$

Nel caso di un qubit singolo qualsiasi operatore unitario può essere realizzato in un sistema fisico realistico. Abbiamo visto alcuni esempi di operatori unitari nel capitolo 2, le porte quantistiche.

Condizione necessaria affinché valga il Postulato 2 è che il sistema debba essere chiuso e non interagire con altri sistemi. Nella realtà tutti i sistemi (eccetto l'Universo nel suo insieme) interagiscono con qualche altro sistema, però vi sono alcuni sistemi di interesse che possono essere descritti con buona approssimazione come sistemi chiusi.

Il Postulato 2 descrive la relazione tra gli stati quantici di un sistema quantistico chiuso a due diversi istanti di tempo. Può essere data una versione differente del Postulato 2, che descriva l'evoluzione di tale sistema in un tempo continuo.

Postulato 2': L'evoluzione dello stato di un sistema quantistico chiuso è descritta dall'equazione di Schrodinger,

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H|\psi\rangle. \quad (\text{A.3})$$

In questa equazione, \hbar è la costante fisica nota come costante di Planck il cui valore è

determinato sperimentalmente. H è un operatore hermitiano noto come *Hamiltoniana* del sistema chiuso. Se conosciamo l'Hamiltoniana di un sistema possiamo comprendere la sua dinamica completamente, in linea di principio.

Poichè le quantità osservabili o misurabili in meccanica quantistica sono rappresentate da operatori lineari hermitiani, H essendo hermitiano rappresenta un'osservabile e possiede un insieme completo di autovettori ortonormali e autovalori e una *decomposizione spettrale*

$$H = \sum_E E |E\rangle \langle E| \quad (\text{A.4})$$

dove E sono gli autovalori e $|E\rangle$ i corrispondenti autovettori normalizzati.

Gli stati $|E\rangle$ sono chiamati autostati dell'energia o, a volte, stati stazionari, ed E è l'energia dello stato $|E\rangle$. L'energia inferiore corrisponde all'energia dello stato fondamentale del sistema, e il corrispondente autostato è detto stato fondamentale. La ragione per cui sono chiamati stati stazionari è dovuta al fatto che l'unico modo per modificarli nel tempo consiste nell'applicare un fattore numerico nella forma

$$|E\rangle \rightarrow \exp(-iEt/\hbar)|E\rangle. \quad (\text{A.5})$$

Qual è la connessione tra le due versioni del Postulato 2? Se scriviamo la soluzione dell'equazione di Schrodinger è facile verificare che

$$|\psi(t_2)\rangle = \exp\left[\frac{-iH(t_2 - t_1)}{\hbar}\right]|\psi(t_1)\rangle = U(t_1, t_2)|\psi(t_1)\rangle, \quad (\text{A.6})$$

dove abbiamo definito

$$U(t_1, t_2) \equiv \exp\left[\frac{-iH(t_2 - t_1)}{\hbar}\right] \quad (\text{A.7})$$

Qualunque operatore unitario U può essere realizzato nella forma $U = \exp(iK)$ per qualche operatore Hermitiano K . C'è quindi una corrispondenza biunivoca tra la descrizione tempo-discreto della dinamica utilizzando operatori e la descrizione tempo-continuo utilizzando l'Hamiltoniana.

A.3 Misure quantistiche

Benchè un sistema possa evolvere senza interagire con il resto dell'Universo, un agente esterno può volere interagire con il sistema in esame, per esempio per osservarlo. L'in-

terazione renderebbe il sistema non più chiuso e, di conseguenza, non più soggetto ad un'evoluzione unitaria. Gli effetti prodotti da un'operazione di misura su un sistema quantistico sono descritti dal terzo postulato.

Postulato 3: Misure quantistiche sono descritte da una collezione di operatori di misura (M_m). Sono operatori che agiscono sullo spazio degli stati del sistema da sottoporre a misura. L'indice m si riferisce ai risultati della misura che possono verificarsi nell'esperimento. Se lo stato di un sistema quantistico immediatamente prima della misura è $|\psi\rangle$, la probabilità di ottenere il risultato m è data da

$$p(m) = \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle, \quad (\text{A.8})$$

e lo stato del sistema dopo la misura sarà

$$\frac{M_m |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle}}. \quad (\text{A.9})$$

Gli operatori di misura soddisfano l'equazione di completezza

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I. \quad (\text{A.10})$$

che esprime il fatto che la somma delle probabilità di tutti i possibili risultati deve essere pari a 1.

Un esempio importante è dato dalla misura di un qubit rispetto alla base computazionale, ossia una misura di un singolo qubit con due possibili risultati definiti da due operatori di misura $M_0 = |0\rangle\langle 0|$ e $M_1 = |1\rangle\langle 1|$. Ciascun operatore è hermitiano e $M_0^2 = M_0$ e $M_1^2 = M_1$. La relazione di completezza è rispettata $I = M_0^2 + M_1^2 = M_0 + M_1$.

Supponiamo che lo stato da misurare sia $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$. La probabilità di ottenere 0 è

$$p(0) = \langle \psi | M_0^\dagger M_0 | \psi \rangle = \langle \psi | M_0 | \psi \rangle = |a|^2 \quad (\text{A.11})$$

e similmente la probabilità di trovare 1 è

$$p(1) = \langle \psi | M_1^\dagger M_1 | \psi \rangle = \langle \psi | M_1 | \psi \rangle = |b|^2. \quad (\text{A.12})$$

Gli stati dopo la misura saranno

$$\frac{M_0|\psi\rangle}{|a|} = \frac{a}{|a|}|0\rangle, \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{M_1|\psi\rangle}{|b|} = \frac{b}{|b|}|1\rangle. \quad (\text{A.14})$$

Fattori moltiplicativi di modulo unitario come $a/|a|$ possono essere ignorati, quindi i due stati dopo la misura saranno $|0\rangle$ o $|1\rangle$, come descritto nel Capitolo 1.

A.3.1 Distinguibilità degli stati quantistici

Un'importante applicazione del Postulato 3 riguarda il problema della distinguibilità di stati quantistici.

Nel mondo classico, stati distinti di un oggetto sono solitamente distinguibili, in linea di principio. Per esempio, possiamo sempre identificare se una moneta è atterrata esibendo testa o croce. In meccanica quantistica la situazione è più complicata.

Nel Capitolo 1 è stata data una spiegazione plausibile della non distinguibilità di stati non ortogonali. Il Postulato 3 fornisce una dimostrazione più profonda di questo fatto.

La distinguibilità può essere compresa più facilmente utilizzando, come metafora, un gioco che coinvolge due parti, Alice e Bob. Alice sceglie lo stato $|\psi_i\rangle$ ($1 < i < n$) da un qualche insieme fissato di stati conosciuti da entrambe le parti. Alice manda lo stato a Bob il cui compito è di identificare l'indice i dello stato ricevuto da Alice.

Supponiamo che gli stati siano ortonormali. Bob può effettuare una misura quantistica per distinguere questi stati, tramite la seguente procedura. Definisce gli operatori di misura $M_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, uno per ciascun indice i , e un operatore di misura addizionale M_0 , definito come la radice quadrata positiva dell'operatore positivo $I - \sum_{i \neq 0} |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$.

Questi operatori soddisfano la relazione di completezza e se lo stato preparato è $|\psi_i\rangle$ si ha che $p(i) = \langle\psi_i|M_i|\psi_i\rangle = 1$, quindi il risultato i si verifica con certezza.

È quindi possibile distinguere tra loro stati ortonormali $|\psi_i\rangle$.

Al contrario, se gli stati non sono ortonormali non vi è alcuna misura quantistica capace di distinguerli. Bob effettuerà una misura descritta dagli operatori M_j , con risultato j . Dipendentemente dal risultato della misura Bob cerca di risalire all'indice i utilizzando una qualche regola del tipo $i = f(j)$.

La chiave per capire perchè Bob non possa distinguere due stati non ortogonali $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ risiede nel fatto che $|\psi_2\rangle$ può essere decomposto in una componente non nulla

parallela a $|\psi_1\rangle$ e una componente ortogonale a $|\psi_1\rangle$.

Supponiamo che j sia il risultato della misura tale che $f(j) = 1$. Bob ipotizza che lo stato fosse $|\psi_1\rangle$ quando osserva j . Ma a causa della componente di $|\psi_2\rangle$ parallela a $|\psi_1\rangle$, vi è una probabilità non nulla di ottenere il risultato j quando è preparato lo stato $|\psi_2\rangle$. Alcune volte, quindi, Bob commetterà un errore di identificazione dello stato.

A.4 Sistemi composti

Spesso siamo interessati a sistemi quantistici composti, costituiti da due o più sistemi fisici distinti. Il quarto postulato illustra come vengono descritti gli stati del sistema composto.

Postulato 4: Lo spazio degli stati di un sistema fisico composto è il prodotto tensoriale degli spazi degli stati dei sistemi componenti. Inoltre, se si numerano i sistemi da 1 a n , e ciascun i -esimo sistema è preparato nello stato $|\psi_i\rangle$, lo stato del sistema congiunto sarà $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\psi_n\rangle$.

Il Postulato 4 ci permette di definire una delle idee più interessanti associate a sistemi composti, l'*entanglement*. Consideriamo il seguente stato di un sistema di due qubit:

$$|\psi\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (\text{A.15})$$

Questo stato ha la proprietà che non esistono stati a singoli bit $|a\rangle$ e $|b\rangle$ tali che $|\psi\rangle = |a\rangle|b\rangle$. Lo stato di un sistema composto che presenta questa proprietà (che, cioè, non può essere scritto come un prodotto di stati dei suoi sistemi componenti) è uno stato *entangled*.

Ringraziamenti

Ringrazio la mia famiglia, in particolare mio figlio, il quale mi ha dato la forza di rimettermi in gioco e di affrontare questa nuova sfida, mio marito, i miei genitori, i miei amici e parenti e tutte le persone che mi hanno sempre sostenuta e hanno sempre creduto in me.

Desidero ringraziare, inoltre, la professoressa Elisa Ercolessi per avermi concesso l'opportunità di trattare in questo lavoro di tesi un argomento che mi ha sempre appassionata e stimolata.

Rivolgo un sentito grazie al mio professore di fisica del liceo, Oscar Brandolini, per avermi trasmesso la passione per la fisica.