

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI  
BOLOGNA

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea in Matematica

**MOLTEPLICITÀ  
DELL'INTERSEZIONE  
DI CURVE ALGEBRICHE PIANE**

Tesi di Laurea in Geometria Algebrica

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
Luca Migliorini

Presentata da:  
Francesco Chiatti

‡ Sessione di Settembre  
Anno Accademico 2015-2016

*Ai miei nonni...*

# Introduzione

La tesi si prefigge di definire la molteplicità dell'intersezione tra due curve algebriche piane. La trattazione sarà sviluppata in termini algebrici, per mezzo dello studio degli anelli locali. In seguito, saranno discusse alcune proprietà e sarà proposto qualche esempio di calcolo.

Nel terzo capitolo, l'interesse volgerà all'intersezione tra una varietà e un'ipersuperficie di uno spazio proiettivo  $n$ -dimensionale. Verrà definita un'ulteriore di molteplicità dell'intersezione, che costituirà una generalizzazione di quella menzionata nei primi due capitoli. A partire da questa definizione, sarà possibile enunciare una versione estesa del Teorema di Bezout.

L'ultimo capitolo focalizza l'attenzione nuovamente sulle curve piane, con l'intento di studiarne la topologia in un intorno di un punto singolare. Si introduce, in particolare, l'importante nozione di *link* di un punto singolare.



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>1 Varietà algebriche affini</b>	<b>1</b>
1.1 Anello delle coordinate . . . . .	2
1.2 Mappe polinomiali . . . . .	3
1.3 Funzioni razionali . . . . .	4
<b>2 Proprietà locali delle curve piane affini</b>	<b>7</b>
2.1 Singolarità e tangenti . . . . .	7
2.2 Molteplicità di una curva in un punto . . . . .	9
2.3 Molteplicità dell'intersezione tra curve piane . . . . .	12
<b>3 Intersezioni nel proiettivo</b>	<b>19</b>
3.1 Polinomio di Hilbert . . . . .	20
3.2 Intersezione tra una varietà e un'ipersuperficie . . . . .	23
<b>4 Topologia del <i>link</i></b>	<b>27</b>
4.1 Rami di una curva nell'origine . . . . .	27
4.2 Anello dei germi . . . . .	28
4.3 Nodi e <i>link</i> di una curva . . . . .	29
4.4 Isotopia . . . . .	31
4.5 Caratteristica di Puiseux . . . . .	31
4.6 Caratteristica di Puiseux dei rami . . . . .	32
<b>Bibliografia</b>	<b>35</b>



# Capitolo 1

## Varietà algebriche affini

Il nostro studio della teoria dell'intersezione riguarderà, almeno in un primo momento, aspetti locali delle curve algebriche immerse in uno spazio affine  $\mathbb{A}^n := \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) := \mathbb{K}^n$ , dove  $\mathbb{K}$  è un campo algebricamente chiuso fissato.

Un insieme algebrico affine  $V \subseteq \mathbb{A}^n$  si dice *riducibile* se esistono due insiemi algebrici  $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{A}^n$  tali che  $V = V_1 \cup V_2$ . In caso contrario, l'insieme algebrico si dice *irriducibile*.

Ecco un primo risultato, che ci permetterà di definire algebricamente l'irriducibilità di un insieme algebrico affine.

### Proposizione 1.0.1.

*Sia  $V$  un insieme algebrico affine. Sia  $I(V)$  l'insieme dei polinomi in  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  che si annullano su  $V$ . Allora  $I(V)$  è un ideale dell'anello  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ .*

*Inoltre, sono equivalenti:*

- (1)  $V$  è irriducibile
- (2)  $I(V)$  è un ideale primo

*Dimostrazione.* Il fatto che  $I(V)$  sia un ideale è un'immediata verifica. Proviamo la seconda parte dell'enunciato.

Supponiamo che  $I(V)$  non sia primo. Siano, dunque,  $F_1, F_2 \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  tali che  $F_1, F_2 \notin I(V)$  e che  $F_1 F_2 \in I(V)$ . Se indichiamo con  $V(F_1)$  e  $V(F_2)$  gli insiemi algebrici generati rispettivamente da  $F_1$  e da  $F_2$  (ovvero l'insieme

dei punti di  $\mathbb{A}^n$  in cui si annullano rispettivamente  $F_1$  e  $F_2$ ), abbiamo che

$$V = V \cap V(F_1 F_2) = V \cap (V(F_1) \cup V(F_2)) = (V \cap V(F_1)) \cup (V \cap V(F_2))$$

Ma  $V \cap V(F_1) \subsetneq V \supsetneq V \cap V(F_2)$ , quindi  $V$  è riducibile.

Viceversa, se  $V = V_1 \cup V_2$ , con  $V_1, V_2 \subsetneq V$ , allora  $I(V_1), I(V_2) \supsetneq I(V)$ . Siano, dunque,  $F_i \in I(V_i) \setminus I(V)$ , con  $i \in \{1, 2\}$ . Allora  $F_1 F_2 \in I(V)$ , quindi  $I(V)$  non è primo.  $\square$

Una curva algebrica affine irriducibile si dice *varietà algebrica affine*.

Nel corso di questo capitolo, per brevità, ci riferiremo alle varietà algebriche affini chiamandole semplicemente *varietà*.

## 1.1 Anello delle coordinate

Nel corso di questo capitolo,  $\mathbb{K}$  sarà un campo algebricamente chiuso fissato. Sia  $V \subseteq \mathbb{A}^n$  una varietà non vuota. Abbiamo visto che  $I(V)$  è necessariamente un ideale primo dell'anello  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ . Quindi

$$\Gamma(V) := \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/I(V)$$

è un dominio di integrità, che chiameremo *anello delle coordinate* di  $V$ . Ricordiamo un noto risultato di algebra:

**Proposizione 1.1.1.** *Sia  $R$  un anello noetheriano,  $I$  un suo ideale. Allora,  $R/I$  è un anello noetheriano.*

*Dimostrazione.* Per una dimostrazione si veda, per esempio, [2], capitolo 12, Proposizione 5.19  $\square$

**Corollario 1.1.2.** *Sia  $V \subseteq \mathbb{A}^n$  una varietà non vuota. Allora, il suo anello delle coordinate  $\Gamma(V)$  è noetheriano*

*Dimostrazione.* La noetherianità di  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  segue dal *Teorema della base di Hilbert*. La proposizione precedente ci permette di concludere.  $\square$



Per ogni insieme non vuoto  $X$ , chiamiamo  $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$  l'insieme delle funzioni da  $X$  a  $\mathbb{K}$ . Esso può essere munito della struttura di anello nel solito modo: se  $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ , poniamo  $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$  e  $(fg)(x) = f(x)g(x) \forall x \in X$ . Osserviamo che  $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$  contiene una copia isomorfa di  $\mathbb{K}$ , identificabile col sottoanello delle funzioni costanti.

Se  $X = V$  è una varietà, una funzione  $f \in \mathcal{F}(V, \mathbb{K})$  si dice una *funzione polinomiale* se esiste un polinomio  $F \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  tale che

$$f(a_1, \dots, a_n) = F(a_1, \dots, a_n) \quad \forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$$

L'insieme delle funzioni polinomiali da  $V$  a  $\mathbb{K}$  forma un sottoanello di  $\mathcal{F}(V, \mathbb{K})$  contenente una copia isomorfa di  $\mathbb{K}$ .

Segue dalle definizioni date che due polinomi  $F, G$  determinano la stessa funzione polinomiale se, e soltanto se,  $F - G \in I(V)$ . Possiamo, quindi, identificare l'anello delle coordinate  $\Gamma(V)$  con il sottoanello di  $\mathcal{F}(V, \mathbb{K})$  costituito dalle funzioni polinomiali da  $V$  a  $\mathbb{K}$ .

## 1.2 Mappe polinomiali

Siano  $V \subseteq \mathbb{A}^n$ ,  $W \subseteq \mathbb{A}^m$  varietà affini. Una mappa  $\varphi : V \rightarrow W$  è detta una *mappa polinomiale* (o *morfismo di varietà algebriche*) se esistono dei polinomi  $T_1, \dots, T_m \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  tali che

$$\varphi(a_1, \dots, a_n) = (T_1(a_1, \dots, a_n), \dots, T_m(a_1, \dots, a_n))$$

Si può verificare che tali polinomi sono univocamente determinati da  $T$ .

Ogni mappa polinomiale  $\varphi : V \rightarrow W$  induce un omomorfismo d'annei  $\bar{\varphi} : \mathcal{F}(W, \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{F}(V, \mathbb{K})$  tale che  $\bar{\varphi}(f) = f \circ \varphi$ . Se  $\varphi$  è una mappa polinomiale, allora  $\bar{\varphi}(\Gamma(W)) \subseteq \Gamma(V)$ , quindi  $\bar{\varphi}$  può essere ristretto ad un omomorfismo (che indicheremo ancora  $\bar{\varphi}$ ) tra gli anelli delle coordinate di  $W$  e di  $V$ .

Il seguente risultato ci suggerisce un modo canonico per interpretare gli omomorfismi tra gli anelli delle coordinate in termini di mappe polinomiali.

**Proposizione 1.2.1.**

Siano  $V \subseteq \mathbb{A}^n$ ,  $W \subseteq \mathbb{A}^m$  varietà affini. Allora vi è una corrispondenza biunivoca naturale tra le mappe polinomiali  $\varphi : V \rightarrow W$  e gli omomorfismi d'anelli  $\bar{\varphi} : \Gamma(W) \rightarrow \Gamma(V)$ .

Inoltre, ogni mappa polinomiale  $\varphi$  è la restrizione di una mappa polinomiale da  $\mathbb{A}^n$  a  $\mathbb{A}^m$ .

*Dimostrazione.* Per una dimostrazione si veda, per esempio, il capitolo 2.2 di [5] □

Diciamo che una mappa polinomiale  $\varphi : V \rightarrow W$  è un *isomorfismo di varietà algebriche* se c'è una mappa polinomiale  $\Psi : W \rightarrow V$  tale che  $\Psi \circ \varphi = Id_V$  e  $\varphi \circ \Psi = Id_W$ . Segue dalla proposizione precedente che due varietà affini sono isomorfe (come varietà algebriche) se e soltanto se i loro anelli delle coordinate lo sono (come  $\mathbb{K}$ -algebre).

Vi è, dunque, un funtore controvariante dalla categoria delle varietà algebriche affini (con, per morfismi, le mappe polinomiali) alla categoria delle  $\mathbb{K}$ -algebre finitamente generate (con, per morfismi, gli omomorfismi d'anelli).

### 1.3 Funzioni razionali

Sia  $V \subseteq \mathbb{A}^n$  una varietà non vuota e  $\Gamma(V)$  il suo anello delle coordinate. Come abbiamo visto,  $\Gamma(V)$  è un dominio di integrità. Possiamo, quindi, costruire il suo campo dei quozienti  $\mathbb{K}(V)$ , che chiameremo *campo delle funzioni razionali* su  $V$ .

Una *funzione razionale*  $f \in \mathbb{K}(V)$  si dice *definita* in  $P \in V$  se esistono  $a, b \in \Gamma(V)$ , con  $b(P) \neq 0$ , tali che  $f = \frac{a}{b}$ .

*Osservazione 1.* Se  $\Gamma(V)$  è un UFD, la scrittura  $f = \frac{a}{b}$  con  $(a, b) = 1$  è essenzialmente unica. In tal caso,  $f$  sarà definita in  $P$  se, e soltanto se,  $b(P) \neq 0$ .

Se  $P \in V$  è un punto fissato, chiamiamo *anello locale* di  $V$  in  $P$  l'insieme  $\mathcal{O}_P(V)$  delle funzioni razionali su  $V$  definite in  $P$ . Osserviamo che  $\mathcal{O}_P(V)$

forma un sottoanello di  $\mathbb{K}(V)$  contenente una copia isomorfa di  $\Gamma(V)$ . In particolare:

**Proposizione 1.3.1.** *Sia  $V \subseteq \mathbb{A}^n$  una varietà non vuota, sia  $P \in V$  fissato. Allora  $\Gamma(V) = \bigcap_{P \in V} \mathcal{O}_P(V)$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $f \in \mathbb{K}(V)$ , e sia  $J_f := \{G \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]; \overline{G}f \in \Gamma(V)\}$ , dove  $\overline{G}$  denota la classe di  $G$  in  $\Gamma(V)$ . Osserviamo che  $V(J_f)$  è esattamente l'insieme dei punti in cui  $f$  non è definita. Se  $f \in \bigcap_{P \in V} \mathcal{O}_P(V)$ , allora  $V(J_f) = \emptyset$ , da cui, per il *Nullstellensatz*,  $J_f = (1)$ . Segue, dunque, che  $1 \in J_f$ , cioè che  $1 \cdot f = f \in \Gamma(V)$ . La tesi segue dall'arbitrarietà della scelta di  $f$ .  $\square$

L'insieme dei punti in cui una funzione razionale  $f$  non è definita è detto l'*insieme dei poli* di  $f$ .

**Proposizione 1.3.2.** *L'insieme dei poli di una funzione razionale  $f \in \mathbb{K}(V)$  è un sottoinsieme algebrico di  $V$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $J_f := \{G \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]; \overline{G}f \in \Gamma(V)\}$ , come nella dimostrazione precedente.  $J_f$  è un ideale di  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  contenente  $I(V)$ , quindi  $V(J_f) \subseteq V(I(V)) = V$ , e  $V(J_f)$  è esattamente l'insieme dei poli di  $f$ .  $\square$

Se  $f = \frac{a}{b} \in \mathcal{O}_P(V)$ , con  $b(P) \neq 0$ , possiamo definire la *valutazione* di  $f$  in  $P$  come  $f(P) := \frac{a(P)}{b(P)}$ . Si può verificare che tale definizione è ben posta e non dipende dalla scelta di  $a$  e  $b$ .

Sia  $\mathfrak{m}_P(V) := \{f \in \mathcal{O}_P(V); f(P) = 0\}$  l'*ideale massimale* di  $V$  in  $P$ . Pensandolo come nucleo del morfismo di valutazione  $f \mapsto f(P)$  da  $\mathcal{O}_P(V)$  a  $\mathbb{K}$ , segue dal *Teorema Fondamentale di Omomorfismo di Anelli* che  $\frac{\mathcal{O}_P(V)}{\mathfrak{m}_P(V)}$  è isomorfo a  $\mathbb{K}$ .

Osserviamo, poi, che  $f \in \mathcal{O}_P(V)$  è invertibile se, e soltanto se,  $f(P) \neq 0$ . Quindi,  $\mathfrak{m}_P(V) = \{\text{non-unità di } \mathcal{O}_P(V)\}$ , da cui segue che  $\mathcal{O}_P(V)$  è un *anello locale* e  $\mathfrak{m}_P(V)$  è l'unico ideale massimale di  $\mathcal{O}_P(V)$  che contenga tutti i suoi ideali propri.

**Proposizione 1.3.3.**  *$\mathcal{O}_P(V)$  è un dominio noetheriano locale.*

*Dimostrazione.* Abbiamo già visto che  $\mathcal{O}_P(V)$  è un anello locale. È un dominio, poiché è un sottoanello di  $\mathbb{K}(V)$ , che lo è. Rimane da provare la noetherianità.

Sia  $I$  un ideale di  $\mathcal{O}_P(V)$ , verifichiamo che è finitamente generato. Siccome  $\Gamma(V)$  è noetheriano, possiamo scegliere dei generatori  $f_1, \dots, f_r$  per l'ideale  $I \cap \Gamma(V)$  di  $\Gamma(V)$ . Preso  $f \in \mathcal{O}_P(V)$ , esiste  $b \in \Gamma(V)$  tale che  $b(P) \neq 0$  e  $bf \in \Gamma(V)$ . Per tale scelta di  $b$ , abbiamo che  $bf \in \Gamma(V) \cap I$ , quindi possiamo scrivere  $bf = \sum_{i=1}^r a_i f_i$ , da cui  $f = \sum_{i=1}^r \frac{a_i}{b} f_i$ .  $\square$

# Capitolo 2

## Proprietà locali delle curve piane affini

In questo capitolo, tratteremo alcuni aspetti locali delle curve piane affini, con l'obiettivo di calcolare la molteplicità dell'intersezione di due curve piane in un punto.

### 2.1 Singolarità e tangenti

Diciamo che due polinomi  $F, G \in \mathbb{K}[X, Y]$  sono equivalenti se esiste  $\lambda \in \mathbb{K}^\times$  tale che  $F = \lambda G$ . Definiamo una *curva piana affine* come una classe di equivalenza di polinomi non costanti secondo questa relazione. Questa definizione è giustificata dal fatto che  $V(F) = V(G)$  quando  $F = \lambda G$ . Confermeremo spesso una curva piana affine  $[F]$  con l'insieme degli zeri di  $F$ , o con l'equazione  $F = 0$ , dato il legame naturale che intercorre fra le tre scritte.

Il *grado* di una curva algebrica piana è il grado (minimo) di un polinomio che la definisce. Chiamiamo *retta* una curva di grado 1.

Se  $F = \prod_{i=1}^r F_i^{a_i}$ , con  $F_i$  fattori irriducibili e distinti tra loro, diciamo che le  $F_i$  sono le componenti di  $F$ , e  $a_i$  la loro *molteplicità*. Una componente  $F_i$  si

dice *semplice* se  $a_i = 1$ , *multipla* altrimenti. Osserviamo che le componenti di  $F$  sono univocamente determinate da  $V(F)$ , ma le loro molteplicità no.

Un punto  $P = (a, b)$  di una curva  $F$  è detto *semplice* se  $(F_X(P), F_Y(P)) \neq (0, 0)$ , dove  $F_X, F_Y$  indicano le derivate di  $F$  rispetto a  $X$  e  $Y$ . In tal caso, la retta  $F_X(P)(X - a) + F_Y(P)(Y - b) = 0$  è detta la retta *tangente* a  $F$  in  $P$ . Nel caso in cui  $F_X(P) = F_Y(P) = 0$ , il punto  $P$  è detto *singolare*. Una curva senza punti singolari è detta *non singolare*.

Se scriviamo  $F = \sum_{i=m}^r F_i$ , dove  $F_i$  è una forma (cioè un polinomio omogeneo) di grado  $i$  e  $F_m \neq 0$ , possiamo definire  $m_O(F) := m$  come la *molteplicità* della curva  $F$  nell'origine. Osserviamo che la curva passa per l'origine se, e soltanto se,  $m_O(F) > 0$ . Inoltre, l'origine è un punto semplice per  $F$  se, e solo se,  $m_O(F) = 1$ . Se  $m_O(F) = 2$ , diremo che l'origine è un *punto doppio*, se  $m_O(F) = 3$ , che è un *punto triplo*, e così via.

Ricordiamo un risultato di algebra:

**Proposizione 2.1.1.** *Sia  $\mathbb{K}$  è un campo algebricamente chiuso,  $F \in \mathbb{K}[X, Y]$  una forma. Allora  $F$  si fattorizza come prodotto di fattori lineari.*

*Dimostrazione.* Per una dimostrazione, si veda, per esempio, il capitolo 2.6 di [5].  $\square$

Possiamo, quindi, scrivere  $F_m = \prod L_i^{e_i}$ , dove le  $L_i$  sono rette distinte, che chiameremo *rette tangenti* a  $F$  nell'origine. Ancora una volta, la retta tangente  $L_i$  si dice *semplice* se  $e_i = 1$ , *doppia* se  $e_i = 2$ , e così via. Una retta per l'origine è detta di molteplicità nulla se non è tangente a  $F$  nell'origine. Diciamo che l'origine è un *punto ordinario* di  $F$  se le sue tangenti sono tutte semplici. Un punto doppio ordinario è detto *nodo*.

Per estendere queste definizioni ad un punto  $P = (a, b)$ , è sufficiente traslare la curva. Se  $T(x, y) = (x + a, y + b)$  è la traslazione di vettore  $(a, b)$ , definiamo  $F^T = F(X + a, Y + b)$  la curva traslata. Scrivendo  $F^T = \sum_{i=m}^r G_i$ , con le  $G_i$  forme di grado  $i$  e  $G_m \neq 0$ , poniamo  $m_P(F) := m_O(F^T) = m$ . Se scriviamo  $G_m = \prod L_i^{e_i}$ , dove le  $L_i = \alpha_i X + \beta_i Y$  sono le rette tangenti a  $F^T$  nell'origine, definiamo  $\alpha_i(X - a) + \beta_i(Y - b) = 0$  le tangenti a  $F$  in  $P$ .

Se  $F$  è irriducibile,  $V(F)$  è una varietà, e scriveremo  $\Gamma(F)$ ,  $\mathbb{K}(F)$  e  $\mathcal{O}_P(F)$  per indicare  $\Gamma(V(F))$ ,  $\mathbb{K}(V(F))$  e  $\mathcal{O}_P(V(F))$ .

## 2.2 Molteplicità di una curva in un punto

Sia  $F$  una curva piana irriducibile,  $P$  un suo punto. In questa sezione, cercheremo di calcolare la molteplicità di  $F$  nel punto  $P$  in maniera del tutto algebrica, in termini dell'anello locale  $\mathcal{O}_P(V(F))$ . Da qui in avanti, per ogni polinomio  $G \in \mathbb{K}[X, Y]$ , indicheremo con  $g$  la sua classe in  $\Gamma(F)$ . Ricordiamo alcuni risultati di algebra commutativa, che serviranno in seguito:

**Teorema 2.2.1** (Secondo Teorema di Isomorfismo di Dedekind-Noether).

*Sia  $M$  un  $R$ -modulo, e siano  $N, P$  due sottomoduli di  $M$ , con  $P \subset N$ . Allora*

$$\frac{M/P}{N/P} \cong M/N$$

*Dimostrazione.* Per una dimostrazione, si veda, per esempio, il capitolo 3.4 di [10].  $\square$

**Corollario 2.2.2.** *Sia  $M$  un  $R$ -modulo, e siano  $N, P$  sottomoduli di  $M$ , con  $P \subset N$ . Allora*

$$0 \rightarrow N/P \rightarrow M/P \rightarrow M/N \rightarrow 0 \quad (2.1)$$

*è una successione esatta.*

*Dimostrazione.* L'inclusione da  $N/P$  a  $M/P$  è iniettiva, la proiezione da  $M/P$  a  $\frac{M/P}{N/P} \cong M/N$  è suriettiva e ha nucleo esattamente  $N/P$ . Questo prova l'esattezza della successione 2.1.  $\square$

**Corollario 2.2.3.** *Sia  $R$  un anello, e siano  $J, I$  ideali di  $R$ , con  $J \subset I$ . Allora, c'è una successione esatta corta di  $R$ -moduli:*

$$0 \rightarrow I/J \rightarrow R/J \rightarrow R/I \rightarrow 0$$

*Dimostrazione.* E' sufficiente considerare  $R, J$  e  $I$  come  $R$ -moduli. La tesi segue dal corollario precedente.  $\square$

**Corollario 2.2.4.** *Sia  $\mathcal{O}$  un anello locale con ideale massimale  $\mathfrak{m}$ . Allora  $\forall n \in \mathbb{N}$  c'è una sequenza esatta di  $R$ -moduli:*

$$0 \rightarrow \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} \rightarrow \mathcal{O}/\mathfrak{m}^{n+1} \rightarrow \mathcal{O}/\mathfrak{m}^n \rightarrow 0 \quad (2.2)$$

**Proposizione 2.2.5.** *Sia  $0 \rightarrow V_1 \rightarrow \dots \rightarrow V_n \rightarrow 0$  una successione esatta di spazi vettoriali su un campo  $\mathbb{K}$ . Allora*

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i \dim_{\mathbb{K}}(V_i) = 0 \quad (2.3)$$

*Dimostrazione.* La tesi segue induttivamente dal *Teorema della dimensione* e dall'esattezza della successione.  $\square$

Possiamo ora dimostrare un teorema che ci permetterà di calcolare la molteplicità di una curva piana  $F$  in un punto  $P$ .

**Teorema 2.2.6.** *Sia  $P$  un punto di una curva irriducibile  $F$ . Allora, esiste  $M \in \mathbb{N}$  tale che*

$$m_P(F) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathfrak{m}_P^n(F)/\mathfrak{m}_P^{n+1}(F)) \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > M \quad (2.4)$$

*In particolare, la molteplicità di  $F$  nel punto  $P$  dipende solo dall'anello locale  $\mathcal{O}_P(F)$ .*

*Dimostrazione.* Dalla 2.2 segue l'esattezza della successione esatta corta:

$$0 \rightarrow \mathfrak{m}_P^n(F)/\mathfrak{m}_P^{n+1}(F) \rightarrow \mathcal{O}_P(F)/\mathfrak{m}_P^{n+1}(F) \rightarrow \mathcal{O}_P(F)/\mathfrak{m}_P^n(F) \rightarrow 0$$

Indichiamo, per brevità,  $\mathcal{O} := \mathcal{O}_P(F)$  e  $\mathfrak{m}^n := \mathfrak{m}_P^n(F)$ . Dalla 2.3 abbiamo l'identità

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^{n+1}) - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Sarà sufficiente provare che esiste  $s \in \mathbb{N}$  tale che  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n) = nm_P(F) + s$   $\forall n \geq m_P(F)$ . Così, infatti, si avrà, per  $M := m_P(F)$ :

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}) = ((n+1)m_P(F) + s) - (nm_P(F) + s) = m_P(F) \quad \forall n \geq M$$



A seguito di un'opportuna traslazione, possiamo assumere  $P = (0, 0)$ . In questo modo, abbiamo che  $\mathfrak{m}^n = I^n \mathcal{O}$  (con questa notazione, intendiamo che  $I^n$  è visto come ideale dell'anello  $\mathcal{O}$ ), dove  $I = (X, Y)$ .

Siccome  $V(I^n) = \{P\}$ , anche  $V(I^n, F) = \{P\}$ , quindi si può verificare che

$$\mathbb{K}[X, Y]/(I^n, F) \cong \mathbb{O}_P(\mathbb{A}^2)/(I^n, F)\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2) \cong \mathbb{O}_P(F)/I^n \mathcal{O}_P(F) = \mathcal{O}/\mathfrak{m}^n$$

Ci siamo, dunque, ricondotti a calcolare  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[X, Y]/(I^n, F))$ .

Sia  $m := m_P(F)$ . Allora,  $FG \in I^n$  quando  $G \in I^{n-m}$ . Sia

$$\varphi : \mathbb{K}[X, Y]/I^n \rightarrow \mathbb{K}[X, Y]/(I^n, F)$$

la proiezione canonica, e

$$\psi : \mathbb{K}[X, Y]/I^{n-m} \rightarrow \mathbb{K}[X, Y]/I^n$$

una mappa  $\mathbb{K}$ -lineare tale che  $\psi(\overline{G}) = \overline{FG}$ . Chiaramente,  $\varphi$  è suriettiva (poiché è una proiezione al quoziente) e  $\psi$  è iniettiva (dato che  $\ker(\psi) = \{\overline{0}\}$ ). Quindi, abbiamo la seguente successione esatta corta:

$$0 \rightarrow \mathbb{K}[X, Y]/I^{n-m} \xrightarrow{\psi} \mathbb{K}[X, Y]/I^n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{K}[X, Y]/(I^n, F) \rightarrow 0$$

Usando di nuovo la 2.3, troviamo che

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[X, Y]/(I^n, F)) &= \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[X, Y]/I^n) - \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[X, Y]/I^{n-m}) = \\ &= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-m)(n-m+1)}{2} = mn - \frac{m(m-1)}{2} \quad \forall n \geq m \end{aligned}$$

Come volevamo. □

La funzione  $\chi(n) := \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)$  è un polinomio di grado  $n$  (per  $n$  grande). Prende il nome di *polinomio di Hilbert-Samuel* dell'anello locale  $\mathcal{O}$ , ed è fondamentale nel moderno studio delle molteplicità degli anelli locali.

Vediamo ora un risultato che ci permetterà di valutare se un punto  $P$  di una curva piana irriducibile  $F$  sia semplice, in termini di anelli a valutazione discreta:

**Teorema 2.2.7.**

Sia  $F$  una curva piana irriducibile,  $P$  un suo punto. Allora,  $P$  è un punto semplice di  $F$  se, e soltanto se,  $\mathcal{O}_P(F)$  è un DVR. In questo caso, se  $L = aX + bY + c$  è una qualunque retta per  $P$  che non sia tangente a  $F$  in  $P$ , allora l'immagine  $l$  di  $L$  in  $\mathcal{O}_P(F)$  è un parametro uniformizzante per  $\mathcal{O}_P(F)$ .

*Dimostrazione.* Se  $\mathcal{O}_P(F)$  è un DVR, si può verificare che

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathfrak{m}_P^n(F)/\mathfrak{m}_P^{n+1}(F)) = 1$$

e la 2.4 ci assicura che  $P$  sia un punto semplice di  $F$ .

Viceversa, se  $P$  è un punto semplice di  $F$ , a meno di un opportuno cambio di coordinate, possiamo supporre che  $P$  sia l'origine, che la tangente in  $P$  sia  $Y = 0$  e che la retta  $L$  sia data dall'equazione  $X = 0$ . Vogliamo, dunque, mostrare che  $x$  (immagine di  $X$  in  $\mathcal{O}_P(F)$ ) genera  $\mathfrak{m}_P(F)$ .

Si può verificare che  $\mathfrak{m}_P(F) = (x, y)$ , indipendentemente dal fatto che  $P$  sia un punto semplice o no. Per quanto detto, nel nuovo sistema di coordinate, possiamo scrivere  $F = Y +$  termini di grado  $\geq 2$ . Raccogliendo  $Y$ , abbiamo che  $F = YG - X^2H$ , dove  $G = 1 +$  termini di grado  $\geq 1$  e  $H \in \mathbb{K}(X)$ . Allora, passando al quoziente, abbiamo che  $yg = x^2h \in \Gamma(F)$ , da cui, siccome  $g(P) \neq 0$ , segue che  $y = x^2hg^{-1} \in (x)$ . Quindi,  $\mathfrak{m}_P(F) = (x, y) = (x)$ , da cui la tesi.  $\square$

## 2.3 Molteplicità dell'intersezione tra curve piane

Siano  $F, G$  curve piane, sia  $P \in \mathbb{A}^2$ . Diciamo che  $F$  e  $G$  si intersecano *propriamente* in  $P$  se non hanno componenti comuni che passino per  $P$ . Diciamo che si intersecano *trasversalmente* in  $P$  se  $P$  è un punto semplice sia di  $F$  sia di  $G$ , e se le rette tangenti a  $F$  e a  $G$  in  $P$  sono distinte.

Vogliamo definire la molteplicità  $I(P, F \cap G)$  dell'intersezione di  $F$  e  $G$  in  $P$ . per farlo, elencheremo le proprietà che vogliamo siano soddisfatte da  $I(P, F \cap G)$ , e verificheremo che c'è una e una sola definizione possibile.

1.  $I(P, F \cap G) \in \mathbb{Z}^+$  per ogni  $F, G$  e  $P$  tali che  $F$  e  $G$  si intersechino propriamente in  $P$ .  $I(P, F \cap G) = \infty$  se, e soltanto se,  $F$  e  $G$  non si intersecano propriamente in  $P$ .
2.  $I(P, F \cap G) = 0$  se, e soltanto se,  $P \notin F \cap G$ .  $I(P, F \cap G)$  dipende solo dalle componenti di  $F$  e  $G$  che passano per  $P$ .
3. Se  $T$  è un cambio di coordinate affini su  $\mathbb{A}^2$  e  $T(Q) = P$ , allora  $I(P, F \cap G) = I(Q, F^T \cap G^T)$ .
4.  $I(P, F \cap G) = I(P, G \cap F)$ .
5.  $I(P, F \cap G) = 1$  quando  $F$  e  $G$  si intersecano trasversalmente in  $P$ . Più in generale,  $I(P, F \cap G) \geq m_P(F)m_P(G)$ , con l'eguaglianza se, e solo se,  $F$  e  $G$  non hanno tangenti comuni in  $P$ .
6. La molteplicità si somma quando prendiamo unioni di curve: se  $F = \prod F_i^{r_i}$  e  $G = \prod G_j^{s_j}$ , allora  $I(P, F \cap G) = \sum_{i,j} r_i s_j I(P, F_i \cap G_j)$ .
7. Se  $F$  è irriducibile,  $I(P, F \cap G)$  dipende solo dall'immagine di  $G$  in  $\Gamma(F)$ , ovvero  $I(P, F \cap G) = I(P, F \cap (G + AF)) \forall A \in \mathbb{K}[X, Y]$ .

**Teorema 2.3.1.** *Esiste un unico modo possibile per definire  $I(P, F \cap G)$  in modo che le proprietà 1-7 siano soddisfatte per ogni coppia di curve algebriche piane  $F$  e  $G$  e per ogni punto  $P \in \mathbb{A}^2$ . Esso è dato dalla funzione:*

$$I(P, F \cap G) = \dim_{\mathbb{K}} (\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)/(F, G)) \quad (2.5)$$

*Dimostrazione.* (Unicità)

Daremo un metodo costruttivo per calcolare  $I(P, F \cap G)$ , usando solo le proprietà 1-7 (che è più forte che provare l'unicità). Grazie alla proprietà 3, possiamo applicare un cambio di coordinate affini e supporre  $P = (0, 0)$ ; per la 1, possiamo supporre che  $I(P, F \cap G)$  sia finito. La 2 sistema il caso  $I(P, F \cap G) = 0$ . Procediamo, dunque, con un'induzione: supponiamo che sia possibile calcolare  $I(P, A \cap B)$  ogni volta che  $0 < I(P, A \cap B) < n \in \mathbb{N}$  e verifichiamo che anche  $I(P, F \cap G) = n$  è calcolabile. Considerando  $F(X, 0)$

e  $G(X, 0)$  come polinomi in  $\mathbb{K}[X]$ , definiamo  $r := \max(\deg(F(X, 0)), 0)$  e  $s := \max(\deg(G(X, 0)), 0)$ . Per la 4, possiamo supporre  $r \leq s$ . Distinguiamo due casi:

*Caso 1:* Se  $r = 0$ , significa che  $Y$  divide  $F$ , quindi  $F = YH$  e, per la 6,  $I(P, F \cap G) = I(P, Y \cap G) + I(P, H \cap G)$ . Se scriviamo  $G(X, 0) = X^m G_1(X)$ , con  $X \nmid G_1$ , allora  $I(P, Y \cap G) = I(P, Y \cap G(X, 0)) = I(P, Y \cap X^m) = m$ . Siccome  $P \in F \cap G \subseteq G$ ,  $m > 0$ , quindi  $I(P, H \cap G) < n$ , e si conclude per ipotesi induttiva.

*Caso 1:* Se  $r > 0$ , supponendo che  $F$  e  $G$  siano monici (ricordiamo che sono definiti a meno di costanti moltiplicative non nulle), poniamo  $H := G - X^{s-r}F$ . Allora, per la 7,  $I(P, F \cap G) = I(P, F \cap H)$  e  $\deg(H(X, 0)) =: t < s$ . Iterando questo procedimento (eventualmente scambiando  $F$  e  $H$ , quando  $t < r$ ), in un numero finito di passaggi si rientra nel *Caso 1*.  $\square$

*Dimostrazione.* (Esistenza)

Definiamo la molteplicità dell'intersezione come nella 2.5 e verifichiamo che soddisfa le proprietà 1-7 (è più forte che provare l'esistenza). Le proprietà 2,4,7 sono di immediata verifica. La 3 segue dal fatto che un cambio di coordinate affini induce un isomorfismo di anelli locali. Possiamo, quindi, assumere  $P = (0, 0)$ , e che tutte le componenti di  $F$  e di  $G$  passino per  $P$ . Sia  $\mathcal{O} := \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)$ . Se  $F$  e  $G$  non hanno componenti comuni, allora  $I(P, F \cap G) \in \mathbb{N}$ . Se  $F$  e  $G$  hanno una componente comune  $H$ , allora  $(F, G) \subseteq (H)$ , quindi c'è un omomorfismo suriettivo canonico da  $\mathcal{O}/(F, G)$  a  $\mathcal{O}/(H)$ , da cui  $I(P, F \cap G) \geq \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{O}/(H))$ . Ma  $\mathcal{O}/(H) \cong \mathcal{O}_P(H)$ , e  $\mathcal{O}_P(H) \supseteq \Gamma(H)$ , con  $\dim_{\mathbb{K}}(\Gamma(H)) = \infty$  (segue dal *Nullstellensatz*). Questo prova la 1.

Per provare la 6, sarà sufficiente mostrare che

$$I(P, F \cap GH) = I(P, F \cap G) + I(P, F \cap H)$$

per ogni terna di curve algebriche  $F, G, H$ . Se  $F$  e  $GH$  hanno una componente comune, la tesi è immediata. In caso contrario, sia

$$\varphi : \mathcal{O}/(F, GH) \rightarrow \mathcal{O}/(F, G)$$

l'omomorfismo d'anelli canonico, e sia

$$\psi : \mathcal{O}/(F, H) \rightarrow \mathcal{O}/(F, GH)$$

la mappa  $\mathbb{K}$ -lineare ottenuta ponendo  $\psi(\bar{z}) = \overline{Gz} \forall z \in \mathcal{O}$ . Per la 2.3, è sufficiente provare che che la sequenza

$$0 \rightarrow \mathcal{O}/(F, H) \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}/(F, GH) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}/(F, G) \rightarrow 0 \quad (2.6)$$

è esatta.

Sia  $z \in \mathcal{O}$  tale che  $\psi(\bar{z}) = \bar{0} = \overline{Gz}$ . Allora,  $Gz = uF + vGH$ , con  $u, v \in \mathcal{O}$ . Sia  $S \in \mathbb{K}[X, Y]$  tale che  $S(P) \neq 0$ , e poniamo  $Su =: A$ ,  $Sv =: B$  e  $Sz =: C \in \mathbb{K}[X, Y]$ . Allora,  $G(C - BH) = SGz - SvGH = S(Gz - vGH) = S(uF) = AF \in \mathbb{K}[X, Y]$ . Dal momento che  $F$  e  $G$  non hanno fattori comuni,  $F$  deve dividere  $C - BH$ , quindi esiste  $D \in \mathbb{K}[X, Y]$  tale che  $C - BH = DF$ . Allora,  $Sz = C = BH + DF$ , quindi  $z = (B/S)H + (D/S)H$  e  $\bar{z} = \bar{0}$ . Segue l'iniettività di  $\psi$ . La suriettività di  $\varphi$  e il fatto che  $im(\varphi) = ker(\psi)$  seguono immediatamente dalla costruzione dell'omomorfismo canonico  $\varphi$ . Questo prova l'esattezza della 2.6.

Poniamo  $m := m_P(F)$  e  $n := m_P(G)$ . Sia  $I$  l'ideale di  $\mathbb{K}[X, Y]$  generato da  $X$  e  $Y$ . Consideriamo il seguente diagramma di spazi vettoriali e mappe lineari

$$\begin{array}{ccccccc} k[X, Y]/I^n & \xrightarrow{\psi} & k[X, Y]/I^{m+n} & \xrightarrow{\varphi} & k[X, Y]/(I^{m+n}, F, G) & \longrightarrow & 0 \\ \times k[X, Y]/I^m & & & & \downarrow \alpha & & \\ \mathcal{O}/(F, G) & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{O}/(I^{m+n}, F, G) & \longrightarrow & 0 & & \end{array}$$

dove  $\varphi$ ,  $\pi$  e  $\alpha$  sono gli omomorfismi d'anelli canonici e  $\psi$  è definita ponendo  $\psi(\bar{A}, \bar{B}) = \overline{AF + BG}$ . Segue da come sono definite che  $\varphi$  e  $\pi$  sono suriettive. Inoltre, siccome  $V(I^{m+n}, F, G) \subseteq \{P\}$ ,  $\alpha$  è un isomorfismo. Non è difficile verificare che la successione superiore sia esatta. Segue che

$$dim(\mathbb{K}[X, Y]/I^n) + dim(\mathbb{K}[X, Y]/I^m) \geq dim(ker(\varphi)) \quad (2.7)$$

con l'eguaglianza se e solo se  $\psi$  è iniettiva, e che

$$\dim(\mathbb{K}[X, Y]/(I^{m+n}, F, G)) = \dim(\mathbb{K}[X, Y]/I^{m+n}) - \dim(\ker(\varphi)) \quad (2.8)$$

Unendo la 2.7 e la 2.8, troviamo che

$$\begin{aligned} I(P, F \cap G) &= \dim(\mathcal{O}/(F, G)) \geq \dim(\mathcal{O}/(I^{m+n}, F, G)) = \\ &= \dim(\mathbb{K}[X, Y]/(I^{m+n}, F, G)) \geq \\ &\geq \dim(\mathcal{O}/I^{m+n}) - \dim(\mathcal{O}/I^n) - \dim(\mathcal{O}/I^m) = mn \end{aligned}$$

Questo prova che  $I(P, F \cap G) \geq mn$ , con l'eguaglianza se, e soltanto se, entrambe le sopracitate disequaglianze sono eguaglianze. La prima è un'eguaglianza se e solo se  $\pi$  è un isomorfismo, ovvero se e solo se  $I^{m+n} \subseteq (F, G)\mathcal{O}$ . La seconda lo è se e solo se  $\psi$  è iniettiva. La proprietà 5 segue dal Lemma seguente.

**Lemma 2.3.2.**

(a) Se  $F$  e  $G$  non hanno tangenti comuni in  $P$ , allora  $I^t \subseteq (F, G)\mathcal{O} \forall t \geq m + n - 1$ .

(b)  $\psi$  è iniettiva se, e soltanto se,  $F$  e  $G$  hanno tangenti distinte in  $P$ .

*Dimostrazione.*

(a) Siano  $L_1, \dots, L_m, M_1, \dots, M_n$  le tangenti rispettivamente a  $F$  e a  $G$  in  $P$ . Poniamo  $L_i := L_m \forall i > m$  e  $M_j := M_n \forall j > n$ . Siano  $A_{ij} := \prod_{h=1}^i L_h \cdot \prod_{k=1}^j M_k \forall (i, j) \neq (0, 0)$ , e  $A_{00} := 1$ . Si può verificare che l'insieme  $\{A_{ij} \mid i + j = t\}$ , opportunamente ordinato, forma una base per lo spazio vettoriale delle forme di grado  $t$  in  $\mathbb{K}[X, Y]$ . Per completare la prova, è sufficiente mostrare che  $A_{ij} \in (F, G)\mathcal{O} \forall i + j \geq m + n - 1$ . Ma, se  $i + j \geq m + n - 1$ , allora necessariamente  $i \geq m \vee j \geq n$ . Supponiamo, senza perdita di generalità, che  $i \geq m$ . Segue che  $A_{ij} = A_{m0}B$ , dove  $B$  è una forma di grado  $t = i + j - m$ . Scriviamo  $F = A_{m0} + F'$ , dove tutti i termini di  $F'$  sono di grado  $\geq m + 1$ . Abbiamo, dunque, che  $A_{ij} = BA_{m0} = BF - BF'$ , dove ogni termine di  $BF'$  ha grado  $\geq i + j + 1$ . Basterà, quindi, mostrare

che esiste  $\Delta \in \mathbb{N}$  tale che  $I^t \subseteq (F, G)\mathcal{O} \forall t \geq \Delta$ .

Se  $V(F, G) = \{P, Q_1, \dots, Q_s\}$  e  $H$  è un polinomio tale che  $H(Q_i) = 0$  e che  $H(P) \neq 0$  [certamente esiste, perché  $I(V(F, G)) \neq I(V(F, G) \setminus \{P\})$ ] allora  $HX, HY \in I(V(F, G))$ , quindi, per il *Nullstellensatz*, esiste  $N \in \mathbb{N}$  tale che  $(HX)^N, (HY)^N \in (F, G) \subseteq \mathbb{K}[X, Y]$ . Siccome  $H^N$  è un'unità di  $\mathcal{O}$ , abbiamo che  $X^N, Y^N \in (F, G)\mathcal{O}$ , quindi  $I^{2N} \subseteq (F, G)\mathcal{O}$ . Ponendo  $\Delta := 2N$ , abbiamo la tesi.

(b) Supponiamo che le tangenti di  $F$  e  $G$  in  $P$  siano distinte, e che  $\psi(\overline{A}, \overline{B}) = \overline{AF + BG} = \overline{0}$ , cioè che  $AF + BG$  abbia tutti i termini di grado  $\geq m+n$ . Siano  $r < m$  e  $s < n$ , e scriviamo  $A = A_r + \text{termini di grado superiore}$  e  $B = B_s + \text{termini di grado superiore}$ . Allora  $AF + BG = A_r F_m + B_s G_n + \text{termini di grado superiore}$ . Quindi,  $r + m = s + n$  e  $A_r F_m = -B_s G_n$ . Ma  $F_m$  e  $G_n$  non hanno fattori comuni, quindi  $F_m | B_s$  e  $G_n | A_r$ . Segue che  $s \geq r$  e  $r \geq n$ , quindi  $(\overline{A}, \overline{B}) = (\overline{0}, \overline{0})$ .

Viceversa, sia  $L$  una tangente comune tra  $F$  e  $G$  in  $P$ , e scriviamo  $F_m = LF'_{m-1}$  e  $G_n = LG'_{n-1}$ . Allora,  $\psi(\overline{G'_{n-1}}, -\overline{F'_{m-1}}) = \overline{0}$ , quindi  $\psi$  non è iniettiva.  $\square$

*Osservazione 2.* Si può verificare che le 7 proprietà sopracitate sono ridondanti. Per esempio, per minorare l'insieme delle proprietà necessarie, è possibile sostituire la 5 con la sola identità  $I((0, 0), X \cap Y) = 1$ .

**Esempio 2.1.** Consideriamo le curve date da  $F = Y$  e  $G = Y - X^n$  in  $P = (0, 0)$ . Per la proprietà 7,

$$I(P, F \cap G) = I(P, F \cap (F - G)) = I(P, Y \cap X^n)$$

e, per la proprietà 6,

$$I(P, Y \cap X^n) = \sum_{i=1}^n I(P, Y \cap X)$$

Siccome l'intersezione tra  $Y$  e  $X$  è un punto semplice ordinario, abbiamo che  $I(P, F \cap G) = n$ , come ci aspettavamo.

**Esempio 2.2.** Studiamo l'intersezione tra  $F = (X^2 + Y^2)^2 + 3X^2Y - Y^3$  e  $G = (X^2 + Y^2)^3 - 4X^2Y^2$  in  $P = (0, 0)$ . Per la proprietà 7,

$$I(P, F \cap G) = I(P, F \cap (G - (X^2 + Y^2 + 3Y)F)) =: I(P, F \cap Y^2H)$$

dove  $H = 5X^2 - 3Y^2 + 4Y^3 + 4X^2Y$ . Per la proprietà 6

$$I(P, F \cap Y^2H) = 2I(P, F \cap Y) + I(P, F \cap H)$$

Usando la 7 e la 4, troviamo che

$$I(P, F \cap Y) = I(P, (F - (X^2Y + Y^3 + 3X^2 - Y^2)Y) \cap Y) = I(P, X^4 \cap Y) = 4$$

Per calcolare  $I(P, F \cap H)$ , osserviamo che le tangenti a  $F$  in  $P$  sono  $\sqrt{3}Y \pm X$  e  $Y$ , mentre le tangenti a  $H$  in  $P$  sono  $\sqrt{5}X \pm \sqrt{3}Y$ . Quindi, per la proprietà 5,

$$I(P, F \cap H) = m_P(F)m_P(G) = 3 \cdot 2 = 6$$

Segue che  $I(P, F \cap G) = 2 \cdot 4 + 6 = 14$ .



# Capitolo 3

## Intersezioni nel proiettivo

In questo capitolo studieremo l'intersezione tra una varietà e un'ipersuperficie in uno spazio proiettivo  $n$ -dimensionale, con l'obiettivo di generalizzare la 2.5. In particolare, cercheremo di legare la molteplicità dell'intersezione tra due curve con il loro ordine, ritrovando il celebre *Teorema di Bezout*.

Come nel caso affine, chiameremo *varietà algebriche proiettive* (o semplicemente *varietà proiettive*) i sottoinsiemi algebrici irriducibili di  $\mathbb{P}^n$ , con la topologia indotta dalla topologia di Zariski su  $\mathbb{P}^n$ .

Se  $Y$  e  $Z$  sono due varietà in  $\mathbb{P}^n$ , la loro intersezione  $Y \cap Z$  può non essere una varietà, ma è certamente un insieme algebrico, e possiamo domandarci quale sia la dimensione delle sue componenti irriducibili.

Ricordiamo che, se  $U$  e  $V$  sono sottospazi di dimensione  $r$  e  $s$  di uno spazio vettoriale  $W$  di dimensione  $n$ , allora  $U \cap V$  sarà un sottospazio di  $W$  di dimensione  $\geq r + s - n$ . Se  $U$  e  $V$  sono in posizione abbastanza generale, allora  $\dim(U \cap V) = \max\{0, r + s - n\}$ . Queste considerazioni valgono anche per le sottovarietà di  $\mathbb{P}^n$ , come mostra il seguente:

**Teorema 3.0.1.** (*Teorema della dimensione proiettiva*)

*Siano  $Y, Z$  varietà algebriche di dimensione rispettivamente  $r$  e  $s$  in  $\mathbb{P}^n$ . Allora, ogni componente irriducibile di  $Y \cap Z$  ha dimensione  $\geq r + s - n$ . Inoltre, se  $r + s - n \geq 0$ , allora  $Y \cap Z \neq \emptyset$ .*

*Dimostrazione.*

Per una dimostrazione si veda, per esempio, il Teorema 7.2, nel capitolo I di [6].  $\square$

Diciamo che le due varietà si intersecano propriamente se  $r + s = n$ . In tal caso, ha senso domandarsi di quanti punti sia composta l'intersezione.

### 3.1 Polinomio di Hilbert

Per poter studiare l'intersezione tra una varietà e un'ipersuperficie, è necessario definire il *polinomio di Hilbert* per una varietà proiettiva. L'idea sarà quella di associare ad ogni varietà proiettiva  $Y \subseteq \mathbb{P}_k^n$  un polinomio  $P_Y \in \mathbb{Q}[z]$ , che ci permetterà di ottenere alcuni utili invarianti per  $Y$ . Per definire  $P_Y$ , partiremo dall'*anello delle coordinate omogenee*  $S(Y) := \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]/I(Y)$ , dove  $\mathbb{K}$  è un campo algebricamente chiuso e  $I(Y) \subseteq \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n] =: S$  è l'ideale omogeneo che definisce  $Y$ . In seguito, saremo in grado di definire il polinomio di Hilbert per ogni  $S$ -modulo graduato.

Diciamo che  $P(z) \in \mathbb{Q}[z]$  è un *polinomio numerico* se esiste  $M \in \mathbb{N}$  tale che  $P(n) \in \mathbb{Z} \forall n \in \mathbb{N}, n > M$ .

#### Proposizione 3.1.1.

(a) Se  $P(z) \in \mathbb{Q}[z]$  è un polinomio numerico, allora esistono degli interi  $c_0, \dots, c_r$  tali che

$$P(z) = c_0 \binom{z}{r} + c_1 \binom{z}{r-1} + \dots + c_r \quad (3.1)$$

In particolare,  $P(n) \in \mathbb{Z} \forall n \in \mathbb{Z}$ .

(b) Sia  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  una funzione qualsiasi. Se esiste un polinomio numerico  $Q(z)$  tale che  $\Delta(f) := f(n+1) - f(n) = Q(n) \forall n \gg 0$ , allora esiste un polinomio numerico  $P(z)$  tale che  $f(n) = P(n) \forall n \gg 0$ .

*Dimostrazione.*

Per una dimostrazione si veda, per esempio, la Proposizione 7.3, nel capitolo I di [6].  $\square$

Ricordiamo, inoltre, un importante risultato di algebra commutativa sui moduli graduati, che tornerà utile in seguito:

**Proposizione 3.1.2.** *Sia  $M$  un modulo graduato finitamente generato su un anello noetheriano (graduato)  $S$ . Allora esiste una filtrazione di sottomoduli graduati  $0 = M^0 \subseteq M^1 \subseteq \dots \subseteq M^r = M$ , tale che  $\forall i \in \{1, \dots, r\}$ ,*

$$M^i/M^{i-1} \cong (S/\mathfrak{p}_i)(l_i)$$

dove i  $\mathfrak{p}_i$  sono ideali primi omogenei di  $S$  e gli  $l_i \in \mathbb{Z}$  rappresentano lo shift. Per ogni filtrazione siffatta, abbiamo:

(a) se  $\mathfrak{p}$  è un ideale omogeneo primo di  $S$ , allora  $\mathfrak{p} \supseteq \text{Ann}(M)$  se e solo se esiste  $i$  tale che  $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p}_i$ . In particolare, gli elementi minimali dell'insieme  $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r\}$  sono gli ideali primi minimali di  $M$ , cioè gli ideali primi che sono minimali e che contengono  $\text{Ann}(M)$ .

(b) per ogni ideale primo minimale  $\mathfrak{p}$  di  $M$ , il numero di volte che  $\mathfrak{p}$  ricorre nell'insieme  $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r\}$  è uguale alla lunghezza di  $M_{\mathfrak{p}}$  sull'anello locale  $S_{\mathfrak{p}}$  (e, quindi, è indipendente dalla filtrazione).

[Notazione: con  $M_{\mathfrak{p}}$  e  $S_{\mathfrak{p}}$  si intende la localizzazione rispettivamente di  $M$  e di  $S$  in  $\mathfrak{p}$ ].

*Dimostrazione.*

Per una dimostrazione si veda, per esempio, la Proposizione 7.4, nel capitolo I di [6]. □

Sia  $\mathfrak{p}$  un ideale primo minimale di un  $S$ -modulo graduato  $M$ . Definiamo la *molteplicità* di  $M$  in  $\mathfrak{p}$  come la lunghezza di  $M_{\mathfrak{p}}$  su  $S_{\mathfrak{p}}$ :

$$\mu_{\mathfrak{p}}(M) := l_{S_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$$

Definiamo, inoltre, la *funzione di Hilbert*  $\varphi_M$  di  $M$ , come segue:

$$\varphi_M(l) := \dim_{\mathbb{K}}(M_l) \quad \forall l \in \mathbb{Z}$$

Vale il seguente risultato

**Teorema 3.1.3.** (*Hilbert-Serre*)

Sia  $M$  un  $S$ -modulo graduato finitamente generato, dove  $S = \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ . Allora, esiste ed è unico il polinomio  $P_M(z) \in \mathbb{Q}[z]$  tale che  $\varphi_M(l) = P_M(l) \forall l \gg 0$ . Inoltre,  $\deg(P_M(z)) = \dim(V(\text{Ann}(M)))$ , dove  $V$  denota, al solito, l'insieme degli zeri in  $\mathbb{P}^n$  dell'ideale omogeneo.

*Dimostrazione.* Se  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  è una successione esatta corta di moduli finitamente generati, allora, per la 2.3,  $\varphi_M = \varphi_{M'} + \varphi_{M''}$ , e  $V(\text{Ann}(M)) = V(\text{Ann}(M')) \cup V(\text{Ann}(M''))$ . Quindi, se il teorema vale per  $M'$  e  $M''$ , vale anche per  $M$ .

Per la proposizione precedente,  $M$  ammette una filtrazione con quozienti della forma  $(S/\mathfrak{p})(l)$ , dove  $\mathfrak{p}$  è un ideale primo omogeneo e  $l \in \mathbb{Z}$ . Quindi, ci siamo ridotti a considerare  $M \cong (S/\mathfrak{p})(l)$ , dove lo shift di  $l$  corrisponde ad un semplice cambio di variabili  $z \mapsto z + l$ . Possiamo, quindi, supporre  $M \cong S/\mathfrak{p}$ .

Se  $\mathfrak{p} = (X_0, \dots, X_n)$ , allora  $\varphi_M(l) = 0 \forall l > 0$ . Quindi,  $P_M \equiv 0$  è il polinomio corrispondente, e  $\deg(P_M) = \dim(V(\mathfrak{p}))$ , con la convenzione che  $\deg(0) = -1 = \dim(\emptyset)$ .

Se  $\mathfrak{p} \neq (X_0, \dots, X_n)$ , sia  $x_i \notin \mathfrak{p}$ , e consideriamo la successione esatta corta:

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{x_i} M \xrightarrow{\pi} M'' \rightarrow 0$$

dove  $M'' = M/x_i M$  e  $\pi$  è la proiezione canonica. Allora,  $\varphi_{M''}(l) = \varphi_M(l) - \varphi_M(l-1) = (\Delta\varphi_M)(l-1)$ . D'altronde,  $V(\text{Ann}(M'')) = V(\mathfrak{p}) \cap H$ , dove  $H$  è l'iperpiano  $x_i = 0$ , e  $V(\mathfrak{p}) \not\subseteq H$  (per la scelta di  $x_i$ ). Quindi,  $\dim(V(\text{Ann}(M''))) = \dim(V(\mathfrak{p})) - 1$ . Con un'induzione su  $V(\text{Ann}(M))$ , possiamo assumere che  $\varphi_{M''}$  sia una funzione polinomiale, corrispondente ad un polinomio  $P_{M''}$  di grado  $\dim(V(\text{Ann}(M'')))$ . Segue dalla Proposizione 3.1.1 che  $\varphi_M$  è una funzione polinomiale, corrispondente ad un polinomio di grado  $\dim(V(\mathfrak{p}))$ . L'unicità di  $P_M$  è immediata.  $\square$

Il polinomio  $P_M$  del Teorema precedente prende il nome di *polinomio di Hilbert* del modulo  $M$ . Se  $Y \subseteq \mathbb{P}^n$  è un insieme algebrico di dimensione  $r$ ,

definiamo il *polinomio di Hilbert di  $Y$*  come il polinomio di Hilbert  $P_Y$  del suo anello delle coordinate omogenee  $\Gamma(Y)$ . Per il Teorema precedente, esso sarà un polinomio di grado  $r$ . Definiamo il *grado* di  $Y$  come  $r!$  volte il coefficiente direttore di  $P_Y$ .

## 3.2 Intersezione tra una varietà e un'ipersuperficie

Sia  $Y \subseteq \mathbb{P}^n$  una varietà proiettiva di dimensione  $r$ , sia  $H$  un'ipersuperficie di  $\mathbb{P}^n$  che non contenga  $Y$ . Allora, per il *Teorema della Dimensione Proiettiva*, se  $Y$  e  $H$  sono in posizione sufficientemente generale, avremo che  $Y \cap H = Z_1 \cup \dots \cup Z_s$ , dove le  $Z_j$  sono varietà di dimensione  $r + (n - 1) - n = r - 1$ . Siano  $\mathfrak{p}_j := I(Z_j)$  gli ideali primi omogenei associati alle varietà  $Z_j$ . Definiamo la *molteplicità dell'intersezione* di  $Y$  e  $Z$  lungo  $Z_j$  come

$$i(Y, H; Z_j) := \mu_{\mathfrak{p}_j}(S/(I(Y) + I(H))) \quad (3.2)$$

*Osservazione 3.* Il modulo  $M := S/(I(Y) + I(H))$  ha come annullatore  $\text{Ann}(M) = I(Y) + I(H)$ , e  $V(I(Y) + I(H)) = Y \cap H$ . Quindi,  $\mathfrak{p}_j$  è un primo minimale di  $M$ , e  $\mu_{\mathfrak{p}_j}(M)$  è la molteplicità di  $M$  in  $\mathfrak{p}_j$ .

*Osservazione 4.* Si può verificare che, se  $Y$  e  $Z$  sono due curve piane definite, rispettivamente, da  $f = 0$  e  $g = 0$ , e  $P$  è un punto di  $Y \cap Z$ , la definizione di molteplicità coincide con quella data nel Capitolo 2, ovvero

$$I(P, Y \cap Z) = i(Y, Z; P)$$

Vediamo, ora, un importante risultato sulla molteplicità dell'intersezione, che costituisce una generalizzazione del *Teorema di Bezout*:

**Teorema 3.2.1.** *Sia  $Y \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  una varietà di dimensione  $\geq 1$ , dove  $\mathbb{K}$  è un campo algebricamente chiuso, e sia  $H$  un'ipersuperficie algebrica non*

contenente  $Y$ . Siano  $Z_1, \dots, Z_s$  le componenti irriducibili di  $Y \cap H$ . Allora

$$\sum_{j=1}^s i(Y, H; Z_j) \cdot \deg(Z_j) = \deg(Y) \cdot \deg(H) \quad (3.3)$$

*Dimostrazione.* Sia  $f$  il polinomio omogeneo che definisce  $H$ , con  $\deg(f) =: d$ . Siano  $S = \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  e  $M = S/(I(Y) + I(H))$ , come sopra. Consideriamo la successione esatta corta di  $S$ -moduli graduati:

$$0 \rightarrow (S/I(Y))(-d) \xrightarrow{f} S/I(Y) \rightarrow M \rightarrow 0$$

Passando ai relativi polinomi di Hilbert, abbiamo che

$$P_M(z) = P_Y(z) - P_Y(z - d)$$

Supponiamo che  $Y$  abbia dimensione  $r$  e grado  $e$ . Allora, il coefficiente direttore di  $P_Y$  sarà  $\frac{e}{r!}$ . Ricordiamo, inoltre, che  $\deg(P_M(z)) = \dim(V(\text{Ann}(M))) = \dim(Y \cap H) = r - 1$ . Abbiamo, quindi:

$$\frac{de}{(r-1)!} z^{r-1} + \dots = \frac{e}{r!} z^r + \dots - \left( \frac{e}{r!} (z-d)^r + \dots \right) \quad (3.4)$$

Consideriamo, ora, una filtrazione  $0 = M^0 \subseteq \dots \subseteq M^q = M$ , i cui quozienti  $M^i/M^{i-1}$  sono della forma  $(S/\mathfrak{q}_i)/(l_i)$ . Allora,  $P_M = \sum_{i=1}^q P_i$ , dove i  $P_i$  sono i polinomi di Hilbert dei moduli  $(S/\mathfrak{q}_i)/(l_i)$ . Se  $V(\mathfrak{q}_i)$  è una varietà proiettiva di dimensione  $r_i$  e grado  $f_i$ , abbiamo che  $P_i = \frac{f_i}{r_i} z^{r_i} + \dots$  (Osserviamo che lo *shift* di  $l$  non modifica i coefficienti direttori dei  $P_i$ ).

Siccome siamo interessati solo al coefficiente direttore di  $P_M$ , possiamo concentrarci sui  $P_i$  di grado  $r - 1$ , cioè su quelli per i quali i  $\mathfrak{q}_i$  sono ideali primi minimali di  $M$ , cioè  $\{\mathfrak{q}_i \mid \deg(P_i) = r - 1\} = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s\}$ . Ognuno ricorre  $\mu_{\mathfrak{p}_j}(M)$  volte, quindi

$$\frac{de}{(r-1)!} = cd(P_M(Y)) = \frac{\left( \sum_{j=1}^s i(Y, H; Z_j) \cdot \deg(Z_j) \right)}{(r-1)!} \quad (3.5)$$

Unendo la 3.4 e la 3.5, abbiamo la tesi.  $\square$

**Corollario 3.2.2.** (*Teorema di Bezout*)

Siano  $Y$  e  $Z$  due curve distinte in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ , dove  $\mathbb{K}$  è un campo algebricamente chiuso, di grado rispettivamente  $d$  ed  $e$ . Sia  $Y \cap Z = P_1, \dots, P_s$ . Allora

$$\sum_{j=1}^s i(Y, Z; P_j) = de$$

*Dimostrazione.* È sufficiente osservare che i  $P_j$  sono punti e, in quanto tali, hanno polinomio di Hilbert 1, e grado  $\frac{1}{1!} = 1$ . La tesi segue dal Teorema precedente.  $\square$





# Capitolo 4

## Topologia del *link*

In questo capitolo si darà qualche spunto per una classificazione topologica del *link* di una curva piana attorno ad una singolarità. Per il nostro studio locale, si può supporre che la curva sia affine e, più in generale, potrà essere conveniente prendere curve definite non solo da polinomi, ma anche da serie di potenze convergenti, come vedremo in seguito.

Non di rado scriveremo le curve in forma parametrica, ponendo

$$(x, y) = (\varphi(t), \psi(t))$$

dove  $\varphi$  e  $\psi$  sono serie convergenti (in un intorno dell'origine). Diremo che una parametrizzazione è *buona* (o *primitiva*) se ogni punto della curva corrisponde, localmente, ad un unico valore del parametro  $t$ , cioè se la mappa  $t \mapsto (\varphi(t), \psi(t))$  è iniettiva per  $|t| < \epsilon$ .

### 4.1 Rami di una curva nell'origine

In questa sezione cercheremo di formalizzare l'idea intuitiva di *ramo* di una curva. Per semplicità, studieremo le curve in un intorno dell'origine. Le curve saranno, quindi, tali che  $f(0, 0) = 0$  (o, in forma parametrica, tali che  $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ ). Considereremo come del tutto equivalenti curve  $f, g \in \mathbb{C}\{x, y\}$  tali che  $f = u \cdot g$ , dove  $\mathbb{C}\{x, y\}$  indica l'anello delle serie di potenze convergenti (in un intorno dell'origine) e  $u$  è un'unità di tale anello.

Siccome  $\mathbb{C}\{x, y\}$  è un UFD, possiamo scomporre ogni  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$  in modo essenzialmente unico come prodotto finito  $f = \prod f_i^{a_i}$ . Chiameremo *rami* di  $f$  le curve  $B_i$  date dalle equazioni  $f_i = 0$ . Segue dalla definizione che la curva  $f$ , almeno localmente, è unione dei suoi rami, e scriveremo  $f = \sum a_i B_i$ .  $f$  si dice *ridotta* se  $a_i = 1 \forall i$ .

Osserviamo che, dati due rami  $g_1, g_2$  distinti (cioè non ottenibili l'uno dall'altro attraverso la moltiplicazione per un'unità), esiste un opportuno intorno dell'origine in cui i due rami abbiano come unico punto comune  $O$ .

Dato un ramo  $B$  dato dall'equazione  $f(x, y) = 0$ , si può dimostrare [[9], Lemma 2.3.1] che, se  $f(x, y) \neq x$ , allora esiste, in un opportuno intorno dell'origine, una parametrizzazione primitiva:

$$\begin{cases} x = t^m \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

dove  $\psi$  è una funzione olomorfa.

## 4.2 Anello dei germi

Siano  $U_1, U_2$  due intorni dell'origine in  $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ , siano  $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$ , con  $i \in \{1, 2\}$ , due funzioni a valori complessi. Sia  $U \subseteq U_1 \cap U_2$  un altro intorno dell'origine. Definiamo la relazione di equivalenza  $\sim$  come segue:

$$f \sim g \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x) \quad \forall x \in U \quad (4.1)$$

Chiamiamo *germe* definito da  $f_i$  la classe  $[f_i]$  nell'anello ottenuto quotizzando rispetto alla suddetta relazione d'equivalenza. Diciamo che  $f_1$  e  $f_2$  *definiscono lo stesso germe* se  $[f_1] = [f_2]$ .

Se  $f_1$  e  $f_2$  sono funzioni olomorfe, la condizione 4.1 equivale a richiedere che i loro sviluppi in serie di potenze intorno all'origine coincidano.

*Osservazione 5.*  $\mathbb{C}\{x, y\}/\sim$  è un anello locale. Infatti, gli elementi invertibili sono quei germi  $[f]$  i cui rappresentanti sono funzioni non nulle nell'origine. Al contrario, le non-unità sono quegli elementi rappresentati da serie formali con termine noto nullo. Quindi,  $\{\text{non-unità}\} = (x, y)$ .

L'anello dei germi contiene, quindi, le informazioni locali delle funzioni olomorfe in un intorno dell'origine.

### 4.3 Nodi e *link* di una curva

Chiameremo *nodo* un'immersione liscia  $S^1 \rightarrow S^3$ . Un insieme finito di nodi con immagini disgiunte è detto *link*. Formalmente, possiamo definire il *link* come un'immersione liscia  $A \times S^1 \rightarrow S^3$ , dove  $A$  è un insieme di cardinalità finita.

Dato un germe definito in un intorno  $U$  dell'origine, prendiamo  $\epsilon \in \mathbb{R}_+$  tale che  $D_\epsilon \subset U$ , dove  $D_\epsilon$  è il disco centrato nell'origine di raggio  $\epsilon$ . Se  $S_\epsilon = \partial D_\epsilon$  è la sfera centrata in  $O$  di raggio  $\epsilon$ , si può dimostrare [[9], Lemma 5.2.1] che  $\mathcal{C} \cap S_\epsilon$  è una 1-varietà immersa in  $S_\epsilon$ , e che, se  $B$  è un ramo di  $\mathcal{C}$ , allora  $B \cap S_\epsilon$  è una curva chiusa di  $S_\epsilon$ , omeomorfa ad una circonferenza.

Abbiamo, quindi, un nodo, dato dalla composizione del diffeomorfismo  $S^1 \rightarrow B \cap S_\epsilon$  con l'omotetia  $S_\epsilon \rightarrow S^3$ . Allo stesso modo, possiamo associare al germe, visto come unione dei suoi rami, un *link*, la cui immagine è composta dall'unione disgiunta delle immagini dei nodi di ogni ramo.

**Esempio 4.1.** Sia  $\mathcal{C}$  la curva data dall'equazione  $Y = 0$ . Allora,  $Y \cap S_1 = \{(x, 0) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{C}); |x|^2 = 1\}$  è effettivamente una 1-varietà di  $S_1$  omeomorfa ad una circonferenza.

Parametrizzare l'intersezione tra un ramo  $B$  e la sfera  $S_\epsilon$  può essere, in generale, molto complicato. Risulta utile, in alcuni casi, mappare  $B \cap S_\epsilon$  diffeomorficamente in qualcosa di più facile parametrizzazione. Vediamo come.

Supponiamo, a meno di un opportuno cambio di coordinate affini, che  $B$  sia tangente a  $y = 0$  nell'origine. Sarà, dunque, possibile parametrizzare  $B$  come  $(x, y) = (t^m, \sum_{r=m+1}^{+\infty} a_r t^r)$ . In questa parametrizzazione,  $y/x = t^{-m} y \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ , quindi possiamo scegliere un  $\epsilon \in \mathbb{R}_+$  tale che, se  $|x| < \epsilon$ , allora  $|y| < \epsilon/10$ .

Prendiamo, ora, una varietà  $S'_\epsilon$ , vicina a  $S_\epsilon$ , tale che  $|x| = \epsilon$  nei punti in cui  $|y| < |x|/10$ . Segue da questa costruzione che, prendendo  $t$  tale che  $|t| = \epsilon^{1/m}$ , abbiamo una parametrizzazione del nodo  $B \cap S'_\epsilon$ . Si può verificare [[9], Lemma 5.2.2] che, per  $\epsilon$  abbastanza piccolo, i nodi  $B \cap S_\epsilon$  e  $B \cap S'_\epsilon$  sono omeomorfi.

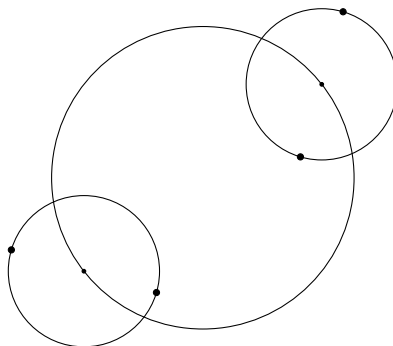
Avere una parametrizzazione di una copia omeomorfa del nodo risulta utile in molti casi concreti, oltre che in alcune dimostrazioni.

**Esempio 4.2.** Studiamo il *link* della curva  $\mathcal{C}$  data dall'equazione  $y = x^{\frac{3}{2}}$ . Fissiamo la parametrizzazione primitiva  $(x, y) = (t^2, t^3)$ . Siccome  $t^{-2}t^3 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ , possiamo scegliere, per esempio,  $\epsilon = 1/100$ . In questo modo, se  $|x| < \epsilon$ ,  $|y| < 1000 = \epsilon/10$ .

Prendendo una varietà  $S'_\epsilon$  che coincida con  $|x| = \epsilon$  nella regione in cui  $|y| < \frac{|x|}{10}$ , otteniamo una parametrizzazione per  $\mathcal{C} \cap S'_\epsilon$ , ponendo  $t = \epsilon^{\frac{1}{m}} e^{2i\theta}$ : si ha, dunque, la parametrizzazione  $(x, y) = (\epsilon e^{2i\theta}, \epsilon^{\frac{3}{2}} e^{3i\theta})$ .

Vediamo che, ad ogni valore di  $x$ , corrispondono due valori di  $y$ . Al variare di  $\theta$ , nel tempo in cui  $x$  compie un giro sulla circonferenza di raggio  $\epsilon$ ,  $y$  compie  $3/2$  di giro sulla circonferenza di raggio  $\epsilon^{\frac{3}{2}}$ .

**Esempio 4.3.** Sia, ora,  $y = x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{7}{4}}$ . Seguendo la procedura dell'esempio precedente, otteniamo una parametrizzazione  $(x, y) = (\epsilon e^{4i\theta}, \epsilon^{\frac{3}{2}} e^{6i\theta} + \epsilon^{\frac{7}{4}} e^{7i\theta})$ . Questa volta, per ogni valore di  $x$  abbiamo 4 valori di  $y$ . Osserviamo che, per  $\epsilon \ll 1$ ,  $\epsilon^{\frac{7}{4}} \ll \epsilon^{\frac{3}{2}}$ . I 4 valori di  $y$  saranno distribuiti, a coppie, sulle circonferenze di raggio  $\epsilon^{\frac{7}{4}}$  centrate nei due valori di  $y$  trovati nell'esercizio precedente. Quindi, al variare di  $\theta$ , nel tempo in cui  $x$  compie un giro, i 4  $y$



compiono  $7/4$  di giro attorno a due centri, che, a loro volta, compiono  $3/2$  di giro. Il *link* così ottenuto è noto come *carosello*.

## 4.4 Isotopia

Una relazione d'equivalenza naturale molto utilizzata in teoria dei nodi (e non solo) è l'*isotopia*, di cui diamo una definizione.

Siano  $X, Y$  due varietà differenziabili,  $f, g : X \rightarrow Y$  due inclusioni lisce  $C^\infty$ -omotope. Sia  $F : X \times I \rightarrow Y$  l'omotopia da  $f$  a  $g$ . Se, per ogni  $\bar{t} \in I$  fissato, la mappa  $F(x, \bar{t}) : X \rightarrow Y$  è un'inclusione liscia, diciamo che  $F$  è una *isotopia* (liscia) tra  $X$  e  $Y$ . Se esiste una tale isotopia, le mappe  $f, g$  si dicono *isotope*.

Osserviamo che l'isotopia è una condizione molto più forte dell'omotopia. Per esempio, si può dimostrare che le mappe  $f, g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $f(x) = x$  e  $g(x) = -x$  sono omotope, ma non isotope.

È ragionevole utilizzare l'isotopia per studiare i nodi, che sono, per definizione, delle immersioni. L'idea intuitiva, infatti, è che due nodi sono isotopi (o isotopicamente equivalenti) se è possibile deformarne l'immagine con continuità solo attraverso ulteriori nodi, e ottenere l'uno dall'altro.

Nelle prossime sezioni cercheremo di definire un invariante isotopico per i nodi di due rami definiti nell'origine.

## 4.5 Caratteristica di Puiseux

Sia  $B$  un ramo nell'origine di un germe  $\mathcal{C}$ , e supponiamo che  $x = 0$  non sia tangente a  $B$  nell'origine. Allora, abbiamo una parametrizzazione primitiva  $(x, y) = (t^m, \sum_{r=m}^{\infty} a_r t^r)$ . Osserviamo che  $a_m = 0$  se, e soltanto se,  $y = 0$  è tangente a  $B$  nell'origine.

**Lemma 4.5.1.** *Se  $(x, y) = (t^m, \sum_{r=m}^{\infty} a_r t^r)$  è una parametrizzazione primitiva per  $B$ , allora  $MCD(\{r \mid a_r \neq 0\} \cup \{m\}) = 1$ .*

*Dimostrazione.* Supponiamo che esista un primo  $p$  tale che  $p|m$  e che  $p|r \forall r$  t.c.  $a_r \neq 0$ . Esistono, quindi, degli interi  $h, \alpha_1, \alpha_2, \dots$  tali che  $B$  sia parametrizzata da  $(x, y) = ((t^p)^h, \sum_{r=m}^{\infty} a_r (t^p)^{\alpha_r})$ . Siccome  $\mathbb{C}$  è algebricamente chiuso, esistono delle coppie di parametri  $t_1 \neq t_2$  tali che  $t_1^m = t_2^m$ . A tali coppie corrispondono gli stessi punti  $(x, y)$ .  $\square$

Siano, ora,  $\beta_0 := e_0 := m$ , e definiamo ricorsivamente

$$\begin{cases} \beta_{i+1} = \min\{r \mid a_r \neq 0, e_i \nmid r\} \\ e_{i+1} = MCD(e_i, \beta_{i+1}) \end{cases}$$

fermandoci al valore  $q \in \mathbb{Z}$  tale che  $e_q = 1$ , che sappiamo esistere, per il Lemma precedente.

Secondo questa definizione, i  $\beta_i$  sono i minimi esponenti che compaiono nella serie e che non appartengono al gruppo additivo  $\langle m, \beta_1, \dots, \beta_{i-1} \rangle$ .

Chiameremo la successione di interi positivi  $(m; \beta_1, \dots, \beta_q)$  la *caratteristica di Puiseux* di  $B$ . Talvolta ci si riferisce ai  $\beta_i$  come agli *esponenti* della caratteristica di Puiseux. Si può dimostrare che tale definizione è ben posta, cioè che non dipende dalla particolare scelta della parametrizzazione (purché sia primitiva). Due rami con la stessa caratteristica di Puiseux si dicono *equisingolari*.

La caratteristica di Puiseux è un invariante alquanto utile nello studio delle singolarità dei germi. Si vedano i capitoli 3 e 4 di [9] (in particolare, la Proposizione 4.3.8) per uno studio approfondito delle sue proprietà. Nella prossima sezione, accenneremo al fatto che la caratteristica di Puiseux rappresenta un utile invariante (e anche qualcosa di più) per classificare isotopicamente i nodi di due rami di una curva.

## 4.6 Caratteristica di Puiseux dei rami

Sia  $B$  un ramo con la solita parametrizzazione  $(x, y) = (t^m, \sum_{r=n}^{\infty} a_r t^r)$  e con caratteristica di Puiseux  $(m; \beta_1, \dots, \beta_q)$ . Definiamo una successione

di rami  $(B_k)_{k \geq n}$  dati dalla parametrizzazione (non necessariamente primitiva)  $(x, y) = (t^m, \sum_{r=n}^k a_r t^r)$ . Vediamo com'è fatto il nodo  $K_k := B_K \cap S'_\epsilon$  all'aumentare di  $k$ .

Se  $k < \beta_1$ ,  $y$  è un polinomio in  $x$ , quindi ad ogni valore di  $x$  è associato uno e un solo valore di  $y$ , e  $K_k$  è una semplice circonferenza.

Se  $k = \beta_1$ , ad ogni valore di  $x$  corrispondono  $e_0/e_1$  valori di  $y$ , distribuiti uniformemente sulla circonferenza con centro l'origine e raggio  $|a_k| \epsilon^{\frac{\beta_1}{m}}$ .

Se  $\beta_1 < k < \beta_2$ , non ci sono modifiche significative: il nodo  $K_k$  sarà isotopicamente equivalente a  $K_{\beta_1}$ .

Se  $k = \beta_2$ , ad un valore di  $x$  corrisponderanno  $e_1/e_2$  valori di  $y$ , equamente distribuiti su delle circonferenze centrate sugli  $y$  del caso precedente.

Seguendo questo procedimento, è possibile esplicitare una isotopia tra i  $K_k$ , per  $\beta_i \leq k < \beta_{i+1}$ . Infatti, l'idea è che, quando si aumenta di 1 il valore di  $k$ ,  $K_k$  viene modificato con una isotopia, ma, quando  $k$  viene a coincidere con un  $\beta_i$ , ogni punto si spezza in  $e_{q-1}/e_q$  punti che giacciono su una piccola circonferenza attorno ai precedenti.

In generale, vale un risultato molto forte, che lega la caratteristica di Puiseux di un ramo al suo nodo in  $S'_\epsilon$ .

**Teorema 4.6.1.** *Due rami equisingolari determinano, per  $\epsilon \ll 1$ , nodi isotopi in  $S'_\epsilon$ .*

Per una dimostrazione e, più in generale, per una trattazione formale della struttura topologica del *link*, si veda il capitolo 5 di [9].





# Bibliografia

- [1] Atiyah M. F., MacDonald I. G., *Introduction to Commutative Algebra*, Student Economy Edition, Addison-Wesley, Westview Press, 2016
- [2] Artin M., *Algebra*, Bollati Boringhieri, Torino, Italia, settembre 2011
- [3] Fulton W., *Introduction to Intersection Theory in Algebraic Geometry*, American Mathematical Society, USA 1984
- [4] Fulton W., *Intersection Theory*, Second Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1984, 1998, Germany
- [5] Fulton W., *Algebraic Curves - An Introduction to Algebraic Geometry*, 28 gennaio 2008, disponibile al sito <http://www.math.lsa.umich.edu/~wfulton/CurveBook.pdf>
- [6] Hartshorne R., *Algebraic Geometry*, Springer 1977
- [7] Serre J.-P., *Local Algebra - Multiplicities*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2000, Germany, translated by CheeWhye Chin
- [8] Walker R., *Algebraic Curves*, Princeton University Press, Princeton 1950
- [9] Wall C.T.C., *Singular Points of Plane Curves*, London Mathematical Society, Student Texts 63, Cambridge University Press 2004
- [10] Zariski O., Samuel P., *Commutative Algebra - Volume I*, Springer, Graduate Texts in Mathematics 28, D. Van Nostrand Company, USA, February 1958, Reprinted February 1965

- [11] Zariski O., Samuel P., *Commutative Algebra - Volume II*, Springer, Graduate Texts in Mathematics 29, D. Van Nostrand Company, USA, 1960