

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

**CAMPI MAGNETICI IN ASTROFISICA
DETERMINAZIONE DELL'INTENSITA' MINIMA E MASSIMA
DEL CAMPO MAGNETICO DELLE PULSAR**

Tesi di laurea

Presentata da:
Giovanni Gandolfi

Relatore:
Chiar.mo Prof. Daniele Dallacasa

Indice dei contenuti

1	Introduzione	1
2	Interazione tra teorema del viriale e campo magnetico	1
2.1	Formulazione generale in forma scalare del teorema del viriale	1
2.2	Formulazione in forma scalare del teorema del viriale in presenza di un campo magnetico nel caso statico	2
2.3	Scrittura di una condizione necessaria per la stabilità dinamica di una configurazione all'equilibrio nel caso statico	3
2.4	Condizione per la stabilità dinamica in presenza di rotazione	4
3	Calcolo del valore massimo dell'intensità del campo magnetico per una pulsar	4
3.1	Stima del rapporto tra i calori specifici per una stella di neutroni	5
3.2	Modello del campo magnetico per una pulsar	5
3.3	Modellamento della condizione per la stabilità dinamica per una pulsar	6
4	Calcolo del valore minimo dell'intensità del campo magnetico per una pulsar	7
4.1	Scrittura della potenza emessa da un dipolo rotante inclinato	7
4.2	Calcolo della perdita di energia rotazionale	8
4.3	Calcolo del campo magnetico minimo per una pulsar	8
5	Conclusione: scrittura dei limiti inferiore e superiore per il campo magnetico di una pulsar	9
A		
	Stima dell'appiattimento di una pulsar a causa del campo magnetico	11
B		
	Analisi dimensionale dei risultati	13
C		
	Stima del campo magnetico di una stella di neutroni a partire dal campo magnetico della stella genitrice	14

1 Introduzione

Esistono numerosi ambiti dell'astrofisica nei quali i campi magnetici rivestono un ruolo di primaria importanza. Fra questi, ci concentreremo sullo studio degli oggetti che presentano alcune delle applicazioni più interessanti dei campi magnetici nell'astrofisica: le pulsar. Le pulsar sono stelle di neutroni, ovvero sono ciò che rimane di una stella dopo che questa è esplosa in una supernova di tipo II e la massa iniziale è insufficiente per creare un buco nero. Tra le varie caratteristiche delle pulsar, emerge la loro particolarità di emettere dei segnali molto regolari mentre ruotano a velocità altissime. Inoltre, le pulsar sono gli oggetti astrofisici con il campo magnetico più intenso nell'universo (nei casi più estremi si sono osservate intensità anche dell'ordine di 10^{15} G). Ma quali possono essere i valori massimi e minimi forniti dalla teoria per i campi magnetici delle pulsar?

L'intento del presente elaborato è quello di ricavare i limiti teorici ai quali è soggetta l'intensità del campo magnetico delle pulsar. Troveremo due relazioni: una che esprime il valore massimo dell'intensità del campo magnetico per una pulsar, e una che ne esprime il valore minimo. Combineremo infine i nostri due risultati in una disequazione, nella quale l'intensità del campo magnetico di una pulsar è minorata e maggiorata dai due termini trovati.

Il valore massimo che può assumere l'intensità del campo magnetico di una pulsar verrà derivato dalla condizione di stabilità espressa dal teorema del viriale per un sistema sferico rotante in presenza di un campo magnetico. Enunceremo inizialmente il teorema del viriale nella sua forma generale, dopodiché ne presenteremo l'espressione in un caso statico in presenza di un campo magnetico. Abbandoneremo poi il caso statico per includere l'effetto della rotazione, non trascurabile nel caso delle pulsar. Dopo aver adattato la condizione di stabilità derivante dal teorema del viriale al nostro modello di pulsar, ricaveremo il valore massimo dell'intensità del campo magnetico.

Il valore minimo che può assumere l'intensità del campo magnetico di una pulsar verrà ricavato uguagliando la potenza emessa dalla pulsar mentre ruota (approssimata ad un dipolo rotante) con la perdita di energia rotazionale che si osserva normalmente per questi oggetti.

Otterremo alla fine due termini che delimitano i valori che può assumere l'intensità del campo magnetico per una pulsar. Sostituendo alla relazione trovata i valori di raggio e massa tipici per una pulsar, saremo in grado di riscrivere tale relazione unicamente in funzione del periodo di rotazione della pulsar e della sua derivata rispetto al tempo. Cominciamo quindi col fornire una formulazione per il teorema del viriale in presenza di un campo magnetico.

2 Interazione tra teorema del viriale e campo magnetico

2.1 Formulazione generale in forma scalare del teorema del viriale

Il teorema del viriale è un insieme infinito di identità tensoriali che valgono per un sistema all'equilibrio. Il termine "sistema all'equilibrio" è esattamente un sinonimo di "sistema virializzato", e in questo elaborato i due termini verranno utilizzati in modo

intercambiabile. Per i nostri scopi possiamo considerare la forma più semplice del teorema, ossia quella scalare. Per qualsiasi sistema all'equilibrio e considerando qualsiasi tipo di forza, il teorema afferma che il doppio dell'energia cinetica interna del sistema è uguale a un certo oggetto matematico detto appunto “viriale” (che dimensionalmente è un'energia). Vale quindi in generale che:

$$2\mathcal{T} = -\mathcal{W} \quad (1)$$

Dove \mathcal{T} è l'energia cinetica interna del sistema, e \mathcal{W} è il viriale.

Se le forze agenti sul sistema derivano da potenziali che sono funzioni omogenee delle coordinate, allora il viriale \mathcal{W} si riconduce a un'espressione del tipo energia potenziale. Nella formula (1) non si specifica l'esatta natura nè dell'energia potenziale nè di quella cinetica. Possiamo quindi includere nell'espressione del teorema qualsiasi forza complicante che derivi da un potenziale.

2.2 Formulazione in forma scalare del teorema del viriale in presenza di un campo magnetico nel caso statico

Dalla formula generale (1) vogliamo ricavare l'espressione del teorema del viriale sotto l'influenza di un campo magnetico. Consideriamo per il nostro problema una massa M di conducibilità infinita. Tale assunzione riflette la condizione tipica della materia astrofisica, che esibisce spesso una conducibilità molto grande¹. Supponiamo inizialmente che tale massa sia consti in un fluido dalle caratteristiche approssimabili col modello di gas perfetto, e chiamiamo γ il rapporto tra i calori specifici. Supponiamo che tale massa sia inserita all'interno di un campo magnetico $\vec{H}(\vec{x})$. Supponiamo infine che, oltre il contributo magnetico e la pressione del gas, l'unica forza agente sul mezzo sia la sua stessa forza gravitazionale. Se l'oggetto considerato è all'equilibrio, possiamo esprimere tale condizione mediante una relazione che leghi opportunamente i vari contributi della pressione totale interna dell'oggetto. Chiamiamo tali contributi P_{kin} (contributo legato al moto macroscopico della struttura), P_{gas} (contributo legato al moto microscopico di molecole, atomi e particelle), P_{mag} (contributo dovuto al campo magnetico) e P_{grav} (contributo legato alla forza gravitazionale). La relazione di equilibrio è la seguente:

$$P_{\text{kin}} + P_{\text{gas}} + P_{\text{mag}} = P_{\text{grav}} \quad (2)$$

Esprimiamo le proporzionalità dei vari contributi di pressione in funzione delle rispettive energie:

$$P_{\text{kin}} = c_1 \frac{\mathcal{T}}{V} \quad (3)$$

$$P_{\text{gas}} = c_2 \frac{\mathcal{U}}{V} \quad (4)$$

$$P_{\text{mag}} = \frac{H^2}{8\pi} = c_3 \frac{\mathcal{M}}{V} \quad (5)$$

$$P_{\text{grav}} = -c_4 \frac{\Omega}{V} \quad (6)$$

¹L Biermann, Annual Review of Nuclear Science 2 (Stanford: Annual Reviews, Inc., 1953).

Identificando \mathcal{T} come l'energia cinetica del sistema, \mathcal{U} come l'energia di calore del moto molecolare/atomico/particellare, \mathcal{M} come l'energia magnetica, Ω come l'energia potenziale gravitazionale, V come il volume della configurazione e i coefficienti c_i ($i = 1, 2, 3, 4$) come costanti numeriche. Il termine H , invece, rappresenta l'intensità del campo magnetico (ovverosia vale che $|\vec{H}| = H$).

Si può dimostrare ² che sostituendo le espressioni da (3) a (6) nell'equazione del moto di un fluido a viscosità nulla si può ricavare l'espressione del teorema del viriale in presenza di un campo magnetico come segue:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2\mathcal{T} + 3(\gamma - 1)\mathcal{U} + \mathcal{M} + \Omega \quad (7)$$

Ove I è il momento d'inerzia del moto di massa. Questa forma del teorema del viriale differisce dalla forma del teorema del viriale in assenza di un campo magnetico per il fatto che al posto del termine Ω compare il termine $\Omega + \mathcal{M}$.

2.3 Scrittura di una condizione necessaria per la stabilità dinamica di una configurazione all'equilibrio nel caso statico

Se imponiamo sull'equazione (7) la condizione di equilibrio dinamico, il suo *left hand side* si annullerà. Inoltre, in essa consideriamo $\mathcal{T} = 0$ per garantire la condizione di equilibrio. Troviamo pertanto che il teorema del viriale esprime una condizione di equilibrio come segue:

$$3(\gamma - 1)\mathcal{U} + \mathcal{M} + \Omega = 0 \quad (8)$$

Questa relazione deve essere intersecata con la definizione di energia totale del sistema all'equilibrio (quindi con $\mathcal{T} = 0$):

$$\mathcal{E} = \mathcal{U} + \mathcal{M} + \Omega \quad (9)$$

Possiamo eliminare il termine \mathcal{U} dalle due equazioni mediante una sostituzione. Otteniamo così la seguente forma per l'energia totale:

$$\mathcal{E} = -\frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)}(|\Omega| - \mathcal{M}) \quad (10)$$

Dove abbiamo definito $\Omega = -|\Omega|$, poiché utilizziamo la convenzione nella quale l'energia potenziale gravitazionale ha segno sempre negativo (ed al più è nulla).

Dall'equazione (10) segue una condizione necessaria per la stabilità dinamica di una configurazione all'equilibrio. Dato che nel nostro riferimento una struttura è stabile se \mathcal{E} ha solo valori negativi (o è nulla nel caso limite), tale condizione si esprime come:

$$(3\gamma - 4)(|\Omega| - \mathcal{M}) \geq 0 \quad (11)$$

Si vede subito che, in assenza del campo magnetico, tale condizione si esprimerebbe come $(3\gamma - 4)|\Omega| \geq 0$. Dato che la disuguaglianza $|\Omega| \geq 0$ è sempre verificata, la condizione di stabilità in assenza del campo magnetico si riduce a $\gamma \geq \frac{4}{3}$.

Se $\gamma \geq \frac{4}{3}$, otteniamo quindi che un campo magnetico abbastanza forte può indurre un'instabilità dinamica nella configurazione.

²La dimostrazione è quella con cui si apre l'articolo "Problems of Gravitational Stability in the Presence of a Magnetic Field", si veda la bibliografia. Noi omettiamo tale dimostrazione per brevità.

2.4 Condizione per la stabilità dinamica in presenza di rotazione

Dato che vogliamo trovare una condizione di stabilità specificatamente per le pulsar, non possiamo trascurare il fatto che la struttura considerata sia in rotazione. Tra le varie caratteristiche delle pulsar, infatti, emerge l'enorme velocità di rotazione attorno al proprio asse.

Si può dimostrare che l'equazione (7) può essere riscritta includendo l'energia rotazionale \mathcal{R} nel seguente modo³:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2(\mathcal{T} + \mathcal{R}) + 3(\gamma - 1)\mathcal{U} + \mathcal{M} + \Omega \quad (12)$$

Imponendo la condizione di equilibrio, otteniamo due relazioni analoghe alle equazioni (8) e (9):

$$2\mathcal{R} + 3(\gamma - 1)\mathcal{U} + \mathcal{M} + \Omega = 0 \quad (13)$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{U} + \mathcal{M} + \Omega + \mathcal{R} \quad (14)$$

Esplicitiamo dalla (14) il termine \mathcal{U} e sostituiamo nella (13), ottenendo così:

$$2\mathcal{R} - 3(\gamma - 1)\mathcal{R} + 3(\gamma - 1)\mathcal{E} - 3(\gamma - 1)\mathcal{M} + \mathcal{M} - 3(\gamma - 1)\Omega + \Omega = 0 \quad (15)$$

Riarrangiando i termini ed esplicitando \mathcal{E} otteniamo la seguente relazione:

$$\mathcal{E} = -\frac{(3\gamma - 4)(|\Omega| - \mathcal{M}) - (3\gamma - 5)\mathcal{R}}{3(\gamma - 1)} \quad (16)$$

Sempre per il motivo che l'energia totale \mathcal{E} deve essere negativa per garantire la stabilità del sistema, possiamo scrivere la seguente condizione di stabilità:

$$\frac{(3\gamma - 4)(|\Omega| - \mathcal{M}) - (3\gamma - 5)\mathcal{R}}{3(\gamma - 1)} \geq 0 \quad (17)$$

In assenza del campo magnetico, la condizione che garantisce la stabilità è $\gamma \geq \frac{5}{3}$ (infatti $|\Omega|$ e \mathcal{R} hanno segno positivo).

3 Calcolo del valore massimo dell'intensità del campo magnetico per una pulsar

Vogliamo scrivere il valore massimo assumibile dall'intensità del campo magnetico per una pulsar. Tale termine coinciderà col valore dell'intensità del campo per il quale la configurazione non sarebbe più all'equilibrio. Prima di ottenere una formula esplicita per tale termine, vogliamo adattare la condizione di stabilità (17) al caso di una pulsar. Compiremo quindi alcune considerazioni preliminari.

³Omettiamo tale dimostrazione per brevità. La dimostrazione completa può essere trovata nel libro "The Virial Theorem in Stellar Astrophysics", pp. 47-56 (vedi bibliografia).

3.1 Stima del rapporto tra i calori specifici per una stella di neutroni

Per adattare la (17) al caso di una pulsar, possiamo chiederci quale sia il valore del rapporto tra i calori specifici γ .

Anche se la ricerca deve ancora determinare un'equazione di stato veramente soddisfacente per le stelle di neutroni, i modelli politropici ne forniscono un'adeguata approssimazione⁴. In questo caso, è possibile esprimere il rapporto γ in funzione dell'indice politropico n come segue:

$$\gamma = \frac{n+1}{n} \quad (18)$$

I modelli costitutivi delle stelle di neutroni individuano l'indice politropico n spaziare tra $n = 0.5$ e $n = 1^5$. Assumiamo quindi $n \approx 0.75 = \frac{3}{4}$, che è il valore intermedio tra i due proposti dai modelli. Abbiamo quindi che per le stelle di neutroni vale mediamente che $\gamma = \frac{7}{3}$ (risultato che per altro soddisfa la condizione di stabilità dinamica in assenza di campo magnetico).

Possiamo quindi riscrivere la condizione di stabilità (17) sostituendo il valore di γ trovato, ottenendo la seguente condizione:

$$3(|\Omega| - \mathcal{M}) - 2\mathcal{R} \geq 0 \quad (19)$$

Ci occuperemo ora di esprimere in funzione delle grandezze caratteristiche della pulsar (quali raggio, massa e periodo) la relazione (19). Prima di procedere, però, dobbiamo fornire un modello che descriva com'è fatto il campo magnetico delle pulsar. Solo dopo aver stabilito ciò saremo in grado di calcolare il termine dell'energia magnetica \mathcal{M} nella condizione (19).

3.2 Modello del campo magnetico per una pulsar

Un modello semplice ma molto diffuso per descrivere il campo magnetico di una pulsar è quello usato da Enrico Fermi e Subrahmanyan Chandrasekhar nell'articolo "Problems of Gravitational Stability in the Presence of a Magnetic Field". In tale articolo, i due scienziati elaborano una descrizione matematica del campo magnetico di una sfera gravitante⁶ composta da un fluido incompressibile. Il campo magnetico di tale oggetto è dato da due contributi: abbiamo un campo magnetico interno, che viene considerato uniforme; e un campo magnetico esterno, che viene considerato come il campo magnetico di un dipolo. Il fatto di considerare essenzialmente una pulsar come un dipolo rotante è una semplificazione che viene usata spesso nella letteratura sull'argomento. Assumiamo quindi che il campo magnetico interno della sfera sia uniforme e che abbia intensità H in un'unica direzione \vec{z} . Mettendoci nelle coordinate sferiche (r, θ, ϕ) , le componenti di H nella direzione radiale r e quella trasversa θ sono:

$$H^{(i)}_r = H\mu \quad (20)$$

⁴Da "Polytropes. Applications in Astrophysics and Related Fields", si veda la bibliografia.

⁵Valori riportati nel libro "Polytropes. Applications in Astrophysics and Related Fields", si veda la bibliografia.

⁶Si noti che supporre che la forma di una pulsar sia una sfera è un'approssimazione. Nell'Appendice A si dimostra come tale assunzione non costituisca un'eccessiva approssimazione (almeno per quanto riguarda le pulsar ordinarie).

$$H^{(i)}_{\theta} = -H(1 - \mu^2)^{1/2} \quad (21)$$

In tali relazioni consideriamo che $\mu = \cos \theta$.

Il campo esterno alla sfera è invece un campo dipolare le cui componenti sono date da:

$$H^{(e)}_r = H \left(\frac{R}{r} \right)^3 \mu \quad (22)$$

$$H^{(e)}_{\theta} = \frac{1}{2} H \left(\frac{R}{r} \right)^3 (1 - \mu^2)^{1/2} \quad (23)$$

Ove R è il raggio della sfera.

Avendo espresso matematicamente com'è fatto il nostro modello di campo magnetico di una pulsar, possiamo andare a esplicitare i termini di energia nella (19).

3.3 Modellamento della condizione per la stabilità dinamica per una pulsar

Utilizzando i risultati ottenuti nei due precedenti paragrafi, siamo in grado di riscrivere la condizione di stabilità (19) per una pulsar. Oltre a sostituire $\gamma = \frac{7}{3}$ nella formula (17), ci occuperemo di esplicitare le varie componenti di energia in funzione di raggio, massa, campo magnetico, momento d'inerzia e periodo di rotazione della pulsar. Scriviamo ora l'espressione dell'energia magnetica \mathcal{M} , l'energia rotazionale \mathcal{R} e l'energia gravitazionale Ω per una sfera di massa M , raggio R , momento d'inerzia I , intensità del campo magnetico H e periodo di rotazione P :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \frac{1}{8\pi} \iiint H^2 dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{H^2}{8\pi} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) + \\ &\quad \frac{1}{4} H^2 \int_R^{+\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^6 \left[\mu^2 + \frac{1}{4} (1 - \mu^2) \right] r^2 dr d\mu = \frac{1}{4} H^2 R^3 \quad (24) \end{aligned}$$

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{2\pi^2 I}{P^2} \quad (25)$$

$$\Omega = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \quad (26)$$

Dove ω è la velocità angolare di rotazione, che può essere espressa in funzione del periodo grazie alla semplice relazione $\omega = \frac{2\pi}{P}$. La G è la costante gravitazionale, che nel sistema c.g.s. vale $G = 6.67 \cdot 10^{-8} \frac{cm^3}{g \cdot s^2}$.

Sostituendo le relazioni (24), (25) e (26) nella condizione di stabilità (19) otteniamo:

$$\frac{9}{5} \frac{GM^2}{R} - \frac{3}{4} H^2 R^3 - \frac{4\pi^2 I}{P^2} \geq 0 \quad (27)$$

Possiamo ora esplicitare il termine H^2 , farne la radice quadrata e trovare una relazione che ci dica qual è il valore critico dell'intensità del campo magnetico oltre al quale la struttura non è più all'equilibrio (per trovare tale valore risolviamo la (27) sull'uguaglianza):

$$H_{\max} = \sqrt{\frac{4}{3R^3} \left(\frac{9GM^2}{5R} - \frac{4\pi^2 I}{P^2} \right)} \quad (28)$$

Portando all'interno della parentesi i termini raccolti, otteniamo:

$$H_{\max} = \sqrt{\frac{12GM^2}{5R^4} - \frac{16\pi^2 I}{3R^3} \frac{1}{P^2}} \quad (29)$$

Nell'Appendice B abbiamo svolto un'analisi dimensionale della (29) per verificare la correttezza dei risultati. La relazione (29) è il primo passo per ottenere una disequazione che fornirà un range di valori entro il quale ci aspettiamo che sia compreso il valore dell'intensità del campo magnetico di una qualsiasi pulsar.

4 Calcolo del valore minimo dell'intensità del campo magnetico per una pulsar

Abbiamo appena trovato una relazione che maggiora l'intensità del campo magnetico medio di una pulsar. È possibile trovare anche una relazione che minori tale quantità, fornendo quindi il valore minimo che deve avere l'intensità del campo magnetico di una pulsar.

4.1 Scrittura della potenza emessa da un dipolo rotante inclinato

Nella sezione 3.2 ci siamo occupati di descrivere com'è fatto il campo magnetico di una pulsar. Abbiamo assunto che il campo magnetico esterno di questo oggetto fosse quello generato da un dipolo rotante. È possibile che il dipolo che origina il campo non sia allineato con il suo asse di rotazione. Supponiamo quindi che tale dipolo sia inclinato di un angolo $\alpha > 0$ rispetto all'asse di rotazione. La potenza emessa dal dipolo nella sua rotazione è data dalla formula di Larmor, che può essere riscritta in funzione del momento di dipolo ($m = qr$, con q carica e r raggio) come segue:

$$P_{\text{rad}} = \frac{2q^2 a^2}{3c^3} = \frac{2(q\ddot{r} \sin \alpha)^2}{3c^3} = \frac{2(\ddot{m}_{\perp})^2}{3c^3} \quad (30)$$

Con $m_{\perp} = qr \sin \alpha$ componente perpendicolare del momento magnetico di dipolo. Per una sfera di raggio R uniformemente magnetizzata e con un campo magnetico superficiale di intensità H , il momento magnetico di dipolo risulta essere⁷:

$$m = HR^3 \quad (31)$$

Se il dipolo magnetico inclinato ruota con velocità angolare ω , allora varrà che:

$$m = m_0 \exp(-i\omega t) \quad (32)$$

$$\dot{m} = -i\omega m_0 \exp(-i\omega t) \quad (33)$$

$$\ddot{m} = \omega^2 m_0 \exp(-i\omega t) = \omega^2 m \quad (34)$$

⁷Formula tratta dal libro "Classical Electrodynamics", si veda la bibliografia.

Possiamo quindi riscrivere la relazione (30) sostituendovi la (34):

$$P_{\text{rad}} = \frac{2 m_{\perp}^2 \omega^4}{3 c^3} = \frac{2 m_{\perp}^2}{3 c^3} \left(\frac{2\pi}{P} \right)^4 = \frac{2}{3 c^3} (H R^3 \sin \alpha)^2 \left(\frac{2\pi}{P} \right)^4 \quad (35)$$

4.2 Calcolo della perdita di energia rotazionale

Il leak di energia espresso dalla relazione (35) ha l'effetto di rallentare la rotazione della pulsar, che nel processo emette parte della propria energia cinetica rotazionale. Avremo quindi che la derivata temporale della potenza \dot{P} definita come $\dot{P} = \frac{dP}{dt}$ sarà positiva.

Possiamo calcolare il rate di decrescita dell'energia rotazionale della pulsar come segue:

$$\frac{d\mathcal{R}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I \omega^2 \right) = I \omega \dot{\omega} \quad (36)$$

Con $\omega = \frac{2\pi}{P}$, e conseguentemente $\dot{\omega} = 2\pi(-P^{-2}\dot{P})$. Possiamo quindi riscrivere come segue il rate con cui diminuisce l'energia rotazionale:

$$\frac{d\mathcal{R}}{dt} = -\frac{4\pi^2 I \dot{P}}{P^3} \quad (37)$$

4.3 Calcolo del campo magnetico minimo per una pulsar

Supponendo che $P_{\text{rad}} = -\frac{d\mathcal{R}}{dt}$, possiamo uguagliare la (37) all'espressione per P_{rad} data dalla (35). Da questa uguaglianza potremo ricavare il limite inferiore per il campo magnetico di una pulsar. Stabiliamo quindi l'uguaglianza tra le due espressioni di P_{rad} , ottenendo:

$$\frac{2}{3c^3} (H R^3 \sin \alpha)^2 \left(\frac{2\pi}{P} \right)^4 = \frac{4\pi^2 I \dot{P}}{P^3} \quad (38)$$

Da questa espressione ricaviamo il termine $H^2 \sin^2 \alpha$:

$$H^2 \sin^2 \alpha = \frac{3c^3 I P \dot{P}}{8\pi^2 R^6} \quad (39)$$

Dato che generalmente non conosciamo per le pulsar il valore del rispettivo angolo α , vale che $H \geq H \sin \alpha$. Possiamo quindi scrivere:

$$H \geq \sqrt{\frac{3c^3 I}{8\pi^2 R^6} P \dot{P}} \quad (40)$$

Ne consegue che il valore minimo per il campo magnetico di una pulsar è dato dalla seguente relazione:

$$H_{\text{min}} = \sqrt{\frac{3c^3 I}{8\pi^2 R^6} P \dot{P}} \quad (41)$$

Nell'Appendice B è stata svolta un'analisi dimensionale di questo risultato come verifica di correttezza (si noti che \dot{P} è adimensionale).

La relazione (41) esprime il limite inferiore per l'intensità del campo magnetico di una

pulsar. Per completezza, ricordiamo che il periodo P e la sua derivata temporale \dot{P} possono essere utilizzati anche per stimare l'età caratteristica della pulsar⁸:

$$\tau = \frac{P}{2\dot{P}} \quad (42)$$

Avendo un limite inferiore per l'intensità del campo magnetico di una pulsar, possiamo ora procedere con la scrittura della relazione cercata.

5 Conclusione: scrittura dei limiti inferiore e superiore per il campo magnetico di una pulsar

Grazie ai risultati ottenuti, siamo in grado di minorare e maggiorare l'intensità del campo magnetico di una pulsar con quantità che dipendono dalla sua massa, dal periodo, dalla derivata del periodo e dal raggio. Conoscendo questi dati, siamo in grado di stimare una coppia di valori che racchiuderà l'intensità del campo magnetico di una pulsar, fornendo un range di valori di aspettazione. Il valore che maggiora il campo magnetico è ottenuto come conseguenza del teorema del viriale: per valori più alti del campo magnetico, il sistema non sarebbe più all'equilibrio. Il valore che minora il campo magnetico è stato ottenuto ponendo che la perdita di energia rotazionale osservata nelle pulsar venga irradiata con una potenza esprimibile mediante la formula di Larmor per un dipolo magnetico rotante.

Riscriviamo tale condizione come segue:

$$\sqrt{\frac{3c^3 I}{8\pi^2 R^6} P \dot{P}} \leq H \leq \sqrt{\frac{12 GM^2}{5 R^4} - \frac{16 \pi^2 I}{3 R^3 P^2}} \quad (43)$$

Nella letteratura sull'argomento, è uso comune sostituire a massa e raggio delle pulsar (e quindi anche al momento d'inerzia) dei valori caratteristici. Questa scelta è motivata dal fatto che tali grandezze fluttuano poco attorno a determinati valori di riferimento. L'unica grandezza tra quelle in gioco che esibisce variazioni consistenti di pulsar in pulsar è il periodo di rotazione P (e ciò vale anche per la sua derivata temporale). Esprimeremo quindi la relazione (43) sostituendo a tutte le grandezze tranne P e \dot{P} i rispettivi valori.

I valori tipici di massa di una pulsar si aggirano attorno alle $1.4M_\odot$. Una pulsar con massa significativamente superiore (ad esempio con massa pari circa a $3M_\odot$) collasserebbe per diventare un buco nero. Il valore di riferimento della massa di una pulsar a $1.4M_\odot$ è il risultato di numerose misure svolte su molte stelle di neutroni con vari gradi di accuratezza. Tutte le misure restituiscono risultati che si discostano poco da tale valore di riferimento.

Il raggio tipo di una pulsar è di 10 km (cioè 10^6 cm). Le pulsar sono infatti oggetti estremamente compatti, e ciò spiega il loro potente campo magnetico⁹.

Utilizzando una massa $M \approx 1.4M_\odot$ e un raggio $R \approx 10^6$ cm possiamo subito calcolare il valore tipico del momento d'inerzia di una pulsar, approssimandolo a quello di una sfera omogenea:

⁸Relazione tratta dal libro "Supernovae and Gamma-Ray Bursts: The Greatest Explosions Since the Big Bang", si veda la bibliografia.

⁹Si veda l'Appendice C per la breve dimostrazione.

$$I = \frac{2}{5}MR^2 = \frac{2 \cdot 1.4 \cdot 2 \cdot 10^{33} \cdot (10^6)^2}{5} \approx 10^{45} g \cdot cm^2 \quad (44)$$

Possiamo ora sostituire i valori di massa, raggio e momento d'inerzia (più tutte le costanti) all'interno della relazione (40), che è la relazione che minora l'intensità del campo magnetico:

$$H \geq \sqrt{\frac{3 \cdot (3 \cdot 10^{10})^3 \cdot 10^{45} P \dot{P}}{8\pi^2 (10^6)^6}} \frac{P \dot{P}}{s} \text{ G} \approx 3.2 \cdot 10^{19} \cdot \left(\frac{P \dot{P}}{s}\right)^{1/2} \text{ G} \quad (45)$$

Sostituiamo i valori di massa, raggio e momento d'inerzia (più tutte le costanti) all'interno della relazione (29), che è la relazione che maggiora l'intensità del campo magnetico:

$$H \leq \sqrt{\frac{12 \cdot 6.67 \cdot 10^{-8} \cdot (1.4 \cdot 2 \cdot 10^{33})^2}{5 \cdot (10^6)^4} - \frac{16 \cdot \pi^2 \cdot 10^{45} \text{ s}^2}{3 \cdot (10^6)^3 P^2}} \text{ G} \approx \sqrt{1.255 \cdot 10^{36} - \frac{5.264 \cdot 10^{28} \text{ s}^2}{P^2}} \text{ G} \quad (46)$$

Possiamo ora riscrivere la relazione (43) avvalendoci delle disequazioni (45) e (46) appena trovate. La relazione che confina l'intensità del campo magnetico di una pulsar è la seguente:

$$3.2 \cdot 10^{19} \cdot \left(\frac{P \dot{P}}{s}\right)^{1/2} \text{ G} \leq H \leq \sqrt{1.255 \cdot 10^{36} - \frac{5.264 \cdot 10^{28} \text{ s}^2}{P^2}} \text{ G} \quad (47)$$

Per avere un'idea del range di valori per H sotteso dalla (47) possiamo sostituire all'interno di essa i valori di P e \dot{P} di una pulsar esistente. Utilizziamo i valori della pulsar del Granchio (PSR B0531+21). Tale pulsar ha un periodo di rotazione $P = 0.033 \text{ s}$ e $\dot{P} = 10^{-12.24}$.

Sostituiamo questi valori all'interno della (47) e otteniamo:

$$3.2 \cdot 10^{19} \cdot (0.033 \cdot 10^{-12.24})^{1/2} \text{ G} < H < \sqrt{1.255 \cdot 10^{36} - \frac{5.264 \cdot 10^{28}}{(0.033)^2}} \text{ G} \quad (48)$$

Sviluppando i calcoli otteniamo:

$$4 \cdot 10^{12} \text{ G} \leq H_{\text{crab}} \leq 10^{18} \text{ G} \quad (49)$$

Abbiamo dunque ricavato una relazione che stabilisce quali siano i limiti teorici per il campo magnetico di una pulsar. Oltre a ciò, abbiamo indirettamente dimostrato come le pulsar siano gli oggetti esistenti con il campo magnetico più intenso.

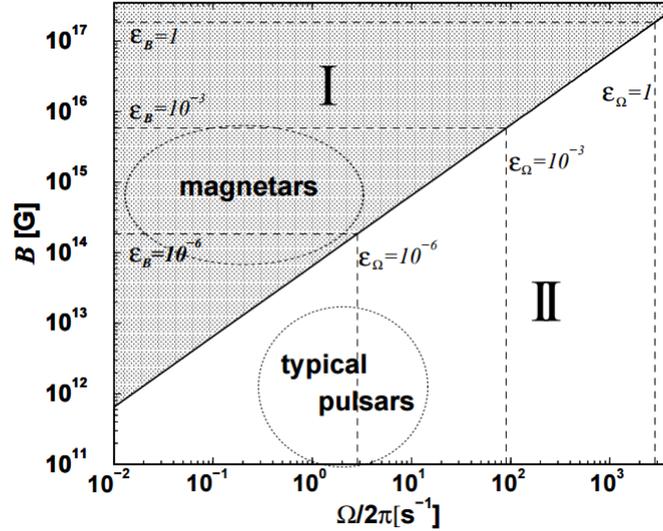
A

Stima dell'appiattimento di una pulsar a causa del campo magnetico

Nell'elaborato presentato abbiamo assunto che le pulsar potessero essere approssimate come oggetti a simmetria sferica. Nel caso reale, vi possono essere dei fattori che rendono le pulsar oblate. Quanto è grande allora l'approssimazione delle pulsar a oggetti sferici?

Per le pulsar, esistono due principali effetti che tendono a rendere la configurazione del sistema oblate. Il primo effetto di appiattimento è dovuto alla loro grande velocità di rotazione¹⁰, mentre il secondo effetto è legato al loro intenso campo magnetico.

Come dimostrato in un articolo del 2000 redatto da K. Konno, T. Obata e Y. Kojima¹¹, per una tipica pulsar l'effetto di appiattimento dominante è quello operato dalla rotazione dell'oggetto attorno al proprio asse. Nel loro articolo, Konno et al. riportano un grafico campo magnetico - reciproco del periodo molto utile per capire qual è l'effetto di appiattimento dominante per le pulsar ordinarie:



Dove ϵ_B rappresenta l'appiattimento ad opera del campo magnetico, e ϵ_Ω rappresenta l'appiattimento dovuto alla rotazione. Nell'articolo, inoltre, si indica con Ω la velocità angolare di rotazione delle pulsar. Nella Zona I vi sono le magnetars, stelle di neutroni dal campo magnetico estremamente intenso. Nella Zona II sono contenute le pulsar ordinarie (la zona del grafico che ci interessa esaminare è pertanto la II).

Se l'entità dello schiacciamento rotazionale si rivelerà trascurabile, quindi, potremo subito trascurare l'effetto dello schiacciamento da campo magnetico (almeno per quanto riguarda le pulsar ordinarie). Esaminiamo così l'effetto di appiattimento dovuto alla rotazione della pulsar attorno al suo asse. Supponendo che nella configurazione oblate si abbiano i semiassi a e b (con $a > b$); l'appiattimento rotazionale è quantificato dalla seguente formula:

¹⁰Come riportato da numerosi articoli, tale velocità di rotazione può avere valori pari a frazioni significative della velocità della luce.

¹¹L'articolo in questione è "Flattening Modulus of a Neutron Star by Rotation and Magnetic Field", si veda la bibliografia.

$$\epsilon_{\text{rot}} = \frac{a - b}{R} \propto \frac{R^3 \omega^2}{GM} \propto \frac{4\pi^2 R^3}{GMP^2} \quad (50)$$

Con R raggio medio della configurazione, M massa e ω velocità angolare della pulsar. Il parametro di proporzionalità è un parametro adimensionale che Konno et al. hanno dimostrato variare tra i valori di 0.7 e 1 per un indice politropico n compreso tra 0.5 e 1 (avevamo assunto $n \approx 0.75$ per le stelle di neutroni). Dunque, il valore di tale parametro non modificherà sensibilmente l'ordine di grandezza dell'appiattimento gravitazionale.

Sostituiamo ora i valori tipici di massa e raggio delle pulsar nella (50), esprimendo tale relazione in funzione del periodo di rotazione delle pulsar:

$$\epsilon_{\text{rot}} \propto \frac{4\pi^2 \cdot (10^6)^3}{6.67 \cdot 10^{-8} \cdot 1.4 \cdot 2 \cdot 10^{33}} \frac{1}{P^2} \approx 2.12 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1}{P^2} \quad (51)$$

Per avere una stima di riferimento, sostituiamo ora nella (50) il periodo della pulsar del Granchio:

$$\epsilon_{\text{rot}} \propto 2.12 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1}{0.033^2} \approx 0.019\% \quad (52)$$

Il risultato ottenuto per lo schiacciamento rotazionale è trascurabile, e ciò rende trascurabile anche lo schiacciamento ad opera del campo magnetico (per le pulsar ordinarie). Ne consegue che l'approssimazione in cui consideriamo le pulsar come oggetti a simmetria sferica non è molto lontana dalla realtà. Nel caso delle magnetar, invece, il valore dello schiacciamento magnetico potrebbe aumentare considerevolmente a causa della presenza di campi magnetici fino a 10^{15} G. In casi come questi, l'approssimazione sferica potrebbe rivelarsi insoddisfacente. Dato che questo elaborato tratta fondamentalmente il caso delle pulsar, non discuteremo in dettaglio il caso delle magnetar. Tuttavia, possiamo ipotizzare che il modello di deformazione da considerare in questo caso potrebbe essere quello proposto da Fermi e Chandrasekhar nell'articolo "Problems of Gravitational Stability in the Presence of a Magnetic Field" e discusso nell'articolo di D. Boccaletti sull'argomento¹², ovvero quello per il quale una sfera di fluido incompressibile con un campo magnetico interno uniforme e un campo magnetico esterno dipolare viene deformata secondo una cosiddetta "P₁ - deformazione", la cui equazione costitutiva è la seguente:

$$r(\mu) = R + \epsilon P_1(\mu) \quad (53)$$

Dove $\mu = \cos \theta$, con θ che è l'angolo polare; R che rappresenta il raggio medio della struttura e P_1 rappresenta l' l - esimo polinomio di Legendre. Contando questo tipo di deviazione dalla simmetria sferica e implementando nuovi calcoli, si potrebbe estendere il modello proposto per le pulsar anche alle magnetar (assumendo che i due oggetti abbiamo, come sembra, una struttura identica).

¹²Tale articolo è "From Magnetohydrodynamics to Magnetars. Comments on papers: S. Chandrasekhar and E. Fermi "Magnetic Fields in Spiral Arms" and "Problems of Gravitational Stability in the Presence of a Magnetic Field", si veda la bibliografia.

B

Analisi dimensionale dei risultati

Per fare un controllo di correttezza sulla (29), svolgiamo una breve analisi dimensionale (ricordando che $1 \text{ G} = 1 \frac{\text{g}^{1/2}}{\text{cm}^{1/2} \cdot \text{s}}$).

$$\left(\frac{\text{cm}^3 \cdot \text{g}^2}{\text{g} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{cm}^4} - \frac{\text{g} \cdot \text{cm}^2}{\text{cm}^3 \cdot \text{s}^2} \right)^{1/2} = \frac{\text{g}^{1/2}}{\text{cm}^{1/2} \cdot \text{s}} = \text{G} \quad (54)$$

Per quanto riguarda l'equazione (41) abbiamo invece che:

$$\left(\frac{\text{cm}^3 \cdot \text{g} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{s}}{\text{s}^3 \cdot \text{cm}^6} \right)^{1/2} = \frac{\text{g}^{1/2}}{\text{cm}^{1/2} \cdot \text{s}} = \text{G} \quad (55)$$

Le equazioni che descrivono i limiti teorici dell'intensità del campo magnetico per una pulsar trovate in questo articolo sono pertanto corrette dal punto di vista dimensionale.

C

Stima del campo magnetico di una stella di neutroni a partire dal campo magnetico della stella genitrice

È immediato verificare che le stelle di neutroni sono tra gli oggetti con il campo magnetico più alto nell'universo. Conoscendo il campo magnetico della stella genitrice, il suo raggio e il raggio finale della stella di neutroni, possiamo ricavare il valore del campo magnetico finale ottenuto alla fine del collasso della struttura. Durante la contrazione da stella genitrice a stella di neutroni, infatti, si deve conservare il flusso magnetico. L'equazione di conservazione è la seguente:

$$H_i R_i^2 = H_f R_f^2 \quad (56)$$

Esplicitando H_f otteniamo quindi:

$$H_f = \frac{H_i R_i^2}{R_f^2} \quad (57)$$

Dove assumiamo $H_i \approx 100$ G (cioè un'intensità del campo magnetico iniziale simile a quella del Sole), $R_i \approx 10^{11}$ cm (un raggio paragonabile a quello del Sole) e $R_f \approx 10$ km = 10^6 cm (raggio tipico di una stella di neutroni). Sostituendo i valori assunti, otteniamo:

$$H_f = \frac{10^2 \cdot (10^{11})^2}{(10^6)^2} = 10^{12} \text{ G} \quad (58)$$

Dalla (58) emerge che, per una stella genitrice simile al Sole in termini di raggio e intensità del campo magnetico, la pulsar risultante avrà un campo magnetico di intensità estremamente elevata se paragonata all'intensità del campo magnetico di altri oggetti astrofisici di dimensioni stellari.

Sperimentalmente, il campo magnetico delle stelle di neutroni si spinge sperimentalmente fino ai valori estremi di 10^{15} G (come per la magnetar SGR 1806-20): tale è il valore del campo magnetico più intenso conosciuto dall'uomo.

Bibliografia

Beskin V. S., Gurevich A. V., Istomin Ya. N. – *Physics of the Pulsar Magnetosphere* – Cambridge University Press (1993)

Biermann L. – *Annual Review of Nuclear Science*, 2 – Stanford: Annual Reviews, Inc. (1953)

Boccaletti D. – *From Magnetohydrodynamics to Magnetars. Comments on papers: S. Chandrasekhar and E. Fermi "Magnetic Fields in Spiral Arms" and "Problems of Gravitational Stability in the Presence of a Magnetic Field"* – Il Nuovo Cimento, vol. 117 B, N. 9-11, p. 1009 (2002)

Chandrasekhar S. – *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* – Dover Publications (printed in 1981, original work from 1961)

Chandrasekhar S. – *The Virial Theorem in Hydromagnetics* – Journal of Mathematical analysis and applications, vol. 1, p. 240 (1960)

Chandrasekhar S., Fermi E. – *Problems of Gravitational Stability in the Presence of a Magnetic Field* – Astrophysical Journal, vol. 118, p.116 (1953)

Collins G. W. II – *The Virial Theorem in Stellar Astrophysics* – Pachart Publishing House (1978)

Hordet G. P. – *Polytropes. Applications in Astrophysics and Related Fields* – Kluwer Academic Publishers (2004)

Jackson, J. D. – *Classical Electrodynamics* – Wiley (1998)

Konno K., Obata T., Kojima Y. – *Flattening Modulus of a Neutron star by Rotation and Magnetic Field* – Astronomy and Astrophysics n. 356 (2000)

Lipunov V. M. – *Astrophysics of Neutron Stars* – Springer-Verlag (1992)

Manchester R. N., Hobbs G. B. – *A. Teoh and M. Hobbs, The ATNF Pulsar Catalogue* (2004)

Mestel L. – *Stellar Magnetism* – Oxford Science Publications (1999)

Sono stati utilizzati gli appunti dei seguenti corsi: Processi di Radiazione e Magnetoidrodinamica (Prof. Daniele Dallacasa, anno del corso 2015), Meccanica dei Continui (Prof.ssa Franca Franchi, anno del corso 2016), Astrofisica Extragalattica (Prof. Luca Ciotti, anno del corso 2016).