ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

**FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI**
**Corso di Laurea triennale in Matematica**

# TEORIA DELLA RELATIVITA' RISTRETTA

x

**Tesi di Laurea in Fisica Matematica**

**Relatore:**
**Chiar.mo Prof.**
**SANDRO GRAFFI**

**Presentata da:**
**YESICA ESTEVEZ**

A orecchio che non sente...
a cuore che ascolta
a mia madre e a Miscel

# Introduzione

La prima volta che mi hanno parlato della teoria della relativitï¿½ ristretta ï¿½ stata durante l'ultimo anno di liceo. A quel tempo ovviamente non ebbi modo di conoscere a fondo gli aspetti caratterizzanti la teoria, ciononostante mi colpï¿½ in modo particolare: Einstein aveva aperto le porte su un nuovo mondo, quello relativo, in cui le nozioni di spazio e tempo, cosï¿½ come erano conosciuti ed accettati fino alla fine del $XIX$ secolo, perdevano il loro carattere assoluto.
Ho quindi deciso di incentrare il mio elaborato proprio sulla relativitï¿½ ristretta poichï¿½ essa ha costituito una svolta nella maniera di vedere e percepire le cose, modificando il nostro modo di pensare i fenomeni della natura.
Nella mia tesi, che ho articolato in due diversi capitoli, ho seguito la linea interpretativa sviluppata dal fisico Max Born, con particolare attenzione alla sua opera intitolata "Einstein's theory of relativity".
Il primo capitolo tratta della cinematica relativistica: si introduce il concetto di simultaneitï¿½ come relativo, in quanto non puï¿½ essere sperimentalmente verificato; quindi vengono enunciati i postulati che Einstein pose alla base della sua teoria, e vengono determinate le trasformazioni di Lorentz, grazie alle quali si stabilisce la connessione tra due diversi sistemi inerziali, e si descrivono gli effetti di contrazione delle lunghezze e dilatazioni dei tempi; infine si ricava il teorema di addizione delle velocitï¿½.
Il secondo capitolo parla di alcuni aspetti della dinamica di Einstein, in particolare viene sottolineato il carattere relativo della massa, non piï¿½ vista come grandezza caratteristica di ogni corpo, bensï¿½ come entitï¿½ i cui valori dipendono dal sistema di riferimento in cui vengono misurati; si parla anche dell'intima relazione esistente tra massa ed energia. Infine viene trattato l'effetto Doppler relavistico e si introcuce lo spazio-tempo

quadrimensionale di Minkowski.

# Indice

# Capitolo 1

# Cinematica relativistica

## 1.1 Spazio e tempo nella meccanica classica

Le leggi fondamentali della meccanica, la branca della fisica che si occupa dello studio del moto e delle sue cause, vennero stabilite da Isaac Newton, sviluppando le intuizioni ed i risultati di un altro grande scienziato, Galileo Galilei. Alla base della meccanica il fisico inglese pose tre principi: la legge d'inerzia, che afferma che in un sistema inerziale un corpo non soggetto a forze persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, attribuibile a Galileo appunto; la legge fondamentale della dinamica, la quale dice che una forza $F$ che agisce su di un corpo di massa $m$ imprime un'accelerazione $a$, il cui valore ï¿½ dato dalla divisione di $F$ per $m$, ovvero $\frac{F}{m} = a$; ed infine il principio di azione o reazione, secondo il quale se un corpo A agisce esercitando una forza, detta azione, su un corpo B, quest'ultimo reagisce a sua volta su A con una forza, o reazione, uguale e contraria.

Gli enunciati delle leggi newtoniane del moto assumono un autentico rigore fisico e una specifica struttura matematica solo se alla nozione di osservatore si affianca quella di sistema di riferimento. Con questo termine si intende un sistema di coordinate, che definiscono in ogni istante la posizione di un oggetto nello spazio. La scelta che risulta a noi piï¿½ naturale sono le consuete tre coordinate spaziali di larghezza, lunghezza e profonditï¿½, dette coordinate cartesiane.

Newton comprese che la legge di inerzia, che egli aveva elevato a fondamentale principio della dinamica, non ha alcun significato se non si specifica il sistema di riferimento in cui ci si trova; e questo per la semplice ragione che essa non vale sempre: basti pensare al passeggero su un autobus che inchioda, difficilmente rimane in piedi se non si aggrappa ad una maniglia. In definitiva, la legge d'inerzia viene a cadere se ci si trova in un mezzo decelerato o accelerato. Chiamiamo quindi inerziali i sitemi non accelerati, in cui vale la legge d'inerzia, mentre si dicono non inerziali quelli accelerati, in cui tale legge non vale. Questa distinzione si applica, oltre che alla legge d'inerzia, anche a tutte le altre leggi della meccanica newtoniana, che valgono esclusivamente nei sistemi di riferimento inerziali.

Come ben sappiamo la Terra stessa ï¿½ un sistema in cui la velocitï¿½ di ogni punto cambia direzione istante per istante, ciï¿½ nonostante in molti degli esperimenti di meccanica eseguibili sulla Terra non si notano scostamenti apprezzabili dalle leggi newtoniane e quindi la non inerzialitï¿½ dei sistemi terrestri ï¿½ quasi completamente trascurabile. Ma allora: quali sono i sistemi realmente inerziali?

A tali interrogativi Newton rispose introducendo il concetto di *spazio assoluto*, al quale affiancï¿½ quello di *tempo assoluto*. Per utilizzare le stesse parole del fisico inglese diremo[1]: "lo spazio assoluto,per sua stessa natura, rimane sempre uguale ed immobile, senza alcuna relazione ad alcunchï¿½ di esterno". Esso ï¿½ un ente "vero" e "matematico", a differenza dello "spazio relativo", quello percepito e usato comunemente, che, "apparente" e "volgare", ï¿½ solo una "misura o dimensione mobile dello spazio assoluto". In definitiva, lo spazio assoluto puï¿½ essere immaginato come una sorta di enorme stanza che contiene la materia e in cui avvengono i fenomeni fisici, le cui pareti sono identificate dai tre assi del sistema di riferimento assoluto.

Per quanto riguarda invece il tempo assoluto, egli disse: "il tempo assoluto, vero, matematico, in sï¿½ e per sua natura senza relazione ad alcunchï¿½ di esterno, scorre uniformemente"; quello relativo, "apparente e volgare", ï¿½ una misura (esatta o inesatta) sensibile ed esterna che viene comunemente impiegato al posto del vero tempo: tali sono l'ora, il giorno, l'anno. In conclusione, nella meccanica classica lo spazio ed il tempo sono considerati assoluti, in particolare la loro misura non cambia quando si passa da un sistema all'altro.

[1] Tratte dal testo di M. Born, *Einstein's theory of relativity*, New York, Dover, 1962

## 1.2 Il concetto di simultaneitï¿½

Altro pilastro della meccanica classica ï¿½ il cosiddetto principio di relativitï¿½ galileina, secondo il quale le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Ne discende che non esiste un sistema privilegiato, anzi tutti i sistemi di riferimento inerziali sono equivalenti nel descrivere i fenomeni meccanici.
I dubbi sulla veridicitï¿½ di tale principio nacquero quando, nella seconda metï¿½ del $XIX$ secolo, Maxwell presentï¿½ la teoria dell'elettromagnetismo. Le equazioni di Maxwell prevedevano che la velocitï¿½ $c$ della luce dovesse essere di 3.00x$10^8$ $\frac{m}{s}$. Ma in quale sistema di riferimento assume tale valore?
Si dava infatti per scontato, in accordo con la meccanica classica, che la luce, come ogni altro moto, dovesse avere diversi valori per due osservatori in moto uno rispetto all'altro. Invece sperimentalmente si era trovato che la velocitï¿½ della luce ï¿½ indipendente dallo stato di moto dell' osservatore e ha valore costante $c$. Risulta evidente l'incompatibilitï¿½ delle due asserzioni.
In principio si pensï¿½ esistesse uno speciale mezzo di propagazione attraverso il quale la luce si muove a tale velocitï¿½. Tale mezzo, immaginato come trasparente e di densitï¿½ nulla, venne chiamato etere. Per risolvere l'incompatibilitï¿½ di cui sopra, la teoria dell'etere divise la velocitï¿½ della luce in due componenti: la velocitï¿½ dell'etere e la velocitï¿½ della luce rispetto all'etere. In tal modo si risolse solo in parte la questione. In seguito, per mantenere la legge di costanza della velocitï¿½ della luce, Lorentz introdusse speciali misure di lunghezza e tempo per ogni sistema in moto. Ma, con le sue assunzioni, le due affermazioni, prima apparentemente incompatibili, ora apparivano come una 'illusione fisica'.
Nel 1905 Einstein riconobbe che le contrazione e i tempi locali alle quali Lorentz era giunto non erano frutto di artifici matematici o illusioni fisiche, bensï¿½ conducono agli autentici concetti di spazio e tempo. Bisogna sottolineare che la costanza della luce era un fatto fondato sull'esperienza, quindi innegabile, ciï¿½ che doveva essere messo in discussione era la legge della meccanica e perciï¿½ anche le idee di spazio e tempo come fino a quel momento accettate. Ci doveva essere un errore di base. Stesso tipo di discorso poteva esser fatto per quel che riguarda il concetto di simultaneitï¿½, considerato come evidente e palese. Infatti i concetti come istante, simultaneitï¿½, prima, dopo e cosï¿½

via sono considerati avere un senso a priori valido in tutto l'universo. Questo era anche il punto di vista di Newton quando postulï¿½ l'esistenza di un tempo assoluto, che dovesse scorrere uniformemente senza alcuna influenza esterna.
Per poter dire che due eventi, che si verificano in due luoghi distinti, sono simultanei bisogna avere in ogni punto orologi le cui lancette marcino sicuramente con lo stesso ritmo. Seguendo Born, immaginiamo, ad esempio, due orologi nei punti $A$ e $B$, situati ad una distanza $l$ a riposo in un sistema $S$. Esistono due modi per regolare gli orologi, in modo che le loro lancette si muovano in modo sincrono:

- portarli entrambi in uno stesso punto, regolarli in modo che siano unisoni e poi riportarli nei punti $A$ e $B$ rispettivamente;
- usare segnali temporali per confrontare gli orologi.

Il primo metodo risulta debole per il fatto che il piï¿½ piccolo errore nello scorrere delle lancette aumenta continuamente, e anche nel caso ammettessimo l'esistenza di orologi ideali, liberi da simili errori, non si puï¿½ basare la definizione di tempo in sistemi in moto l'uno rispetto all'altro basandosi su simili assunzioni. Di conseguenza, visto che lo scorrere identico delle lancette non puï¿½ essere testato direttamente, bisogna necessariamente servirsi del secondo metodo per lo scopo che ci si era prefissato. Osserviamo che ,in base alla teoria dell'assoluta stazionarietï¿½ dell'etere, un confronto assoluto di tempi puï¿½ essere realizzato in sistemi in movimento solo se si conosce il moto rispetto all'etere. Ma, siccome sperimentalmente non era stato possibile determinare il moto rispetto all'etere con mezzi fisici, ne discende che la simultaneitï¿½ assoluta non puï¿½ essere accertata in nessun modo. Cade cosï¿½ l'idea della simultaneitï¿½ come entitï¿½ assoluta.

### 1.2.1 Relativitï¿½ della simultaneitï¿½

Consideriamo ora il seguente esempio concettuale[2] per chiarire meglio quest'ultima affermazione. Supponiamo che un treno piuttosto lungo viaggi sulle rotaie con la velocitï¿½ $v$, e si sposti verso la destra del nostro foglio. I passeggeri del treno prenderanno

[2] Tratto dal testo di A. Einstein, *Relativitï¿½: esposizione divulgativa*, Torino, Boringhieri, 1967.

quest'ultimo come sistema di riferimento. Ogni evento, poi, che si verifica lungo la linea ferroviaria ha pure luogo in un determinato punto del treno. Immaginiamo che dalla banchina ferroviaria vengano osservati, come simultanei, due colpi di fulmine nei due punti $A$ e $B$. Cerchiamo di capire che cosa percepiscono i viaggiatori del treno. Dire che i due colpi di fulmine $A$ e $B$ sono simultanei rispetto alla banchina significa che i raggi di luce provenienti dai punti $A$ e $B$ si incontrano l'uno con l'altro nel punto medio dell'intervallo $\overline{AB}$. Sia invece $M'$ il punto medio dello stesso intervallo sul treno in moto. Proprio quando si verificano i fulmini i punti $M$ e $M'$ coincidono, ma il secondo si muove verso destra con la velocitï¿½ $v$ del treno; di conseguenza esso si sposta rapidamente verso il raggio di luce che proviene da $B$, mentre corre avanti al raggio di luce che proviene da $A$. Pertanto un osservatore seduto sul treno nella posizione $M'$ vedrï¿½ il raggio di luce emesso da $B$ prima di vedere quello proveniente da $A$. Possiamo quindi concludere che gli eventi simultanei rispetto alla banchina, non risultano affatto tali rispetto al treno e viceversa.

## 1.3 Cinematica di Einstein e trasformazioni di Lorentz

Introduciamo ora, formalmente, i postulati che Eisntein pose alla base della teoria della relativitï¿½ ristretta o speciale che presentï¿½ nella famosa pubblicazione del 1905, "Saggio sull'elettrodinamica dei corpi in moto". In esso egli propose di disfarsi completamente dell'idea dell'etere e di rigettare quindi completamente l'assunzione di un sistema di riferimento assoluto, in quiete. La sua proposta si puï¿½ riassumere con questi due postulati:

1. **Principio di relativitï¿½**: le leggi della fisica hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

2. **Principio della costanza della velocitï¿½ della luce**: in tutti i sistemi inerziali la velocitï¿½ della luce ha lo stesso valore $c$ pari a 3x$10^8$ $\frac{m}{s}$.

Se il primo non ï¿½ altro che un'estensione del principio di relativitï¿½ galileina, che include non solo le leggi della meccanica, ma anche tutto il resto della fisica, compresi

cioï¿½ l'elettricitï¿½ e il magnetismo; il secondo postulato afferma qualcosa che sembra lontano dalla nostra esperienza quotidiana: infatti dice che la velocitï¿½ della luce ï¿½ sempre la stessa, indipendentemente dalla velocitï¿½ della sorgente o dall'osservatore. Dunque la velocitï¿½ della luce calcolata con le equazioni di Maxwell ï¿½ la velocitï¿½ della luce nel vuoto in qualunque sistema di riferimento.
Il nostro problema a questo punto ï¿½ quello di determinare la relazione che esiste tra lunghezze e tempi nei vari sistemi inerziali. Per far ciï¿½ consideriamo solo i moti paralleli ad una precisa direzione, l'asse $x$. Sempre seguendo la linea di Born, andiamo a considerare i due sistemi $S$ e $S'$ che si muovono con velocitï¿½ relativa $v$. Per ottenere una relazione numerica tra i due sistemi, dobbiamo conoscere le unitï¿½ e le loro relazioni in $S$ e $S'$. Per questo dobbiamo trovare le immagini delle unitï¿½ di misura sul piano $x'$ e $ct'$ del sistema $S'$ su $S$. Per un semplice fatto di semplicitï¿½ useremo $ct$ invece di $t$ come misura del tempo.

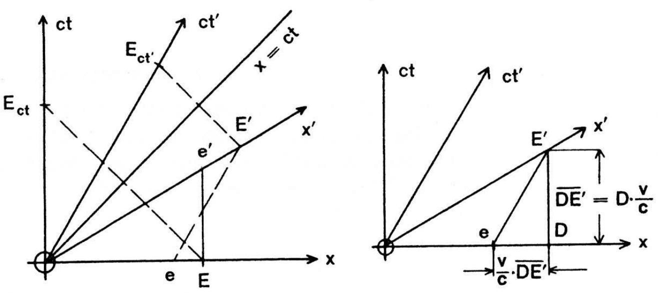


Figura 1.1: Unitï¿½ di spazio e tempo in $S$ e $S'$

Consideriamo il segmento $\overline{OE}$, e supponiamo che rappresenti un'unitï¿½ di lunghezza a riposo in $S$; analogamente il segmento$\overline{OE'}$ ï¿½ l'unitï¿½ di lunghezza nel sistema $S'$. La retta per $E'$ taglia l'asse $x$ in $e$. Per brevitï¿½ useremo $E$, $e$, etc per rappresentare i segmenti $\overline{OE}$, $\overline{Oe}$, etc. Il significato di $e'$ ï¿½ il seguente:un osservatore a riposo in $S'$ che vuole misurare la lunghezza di un'unitï¿½ $(OE)$ a riposo in $S$ troverï¿½ come risultato della sua osservazione simultanea $Oe'$. Poichï¿½ l'unitï¿½ di lunghezza in $S'$ ï¿½ data da $E'$, il risultato della misurazione di $S$ ï¿½ $\frac{e'}{E'}$ parte dell'unitï¿½ di $S'$. Lo stesso ragionamento porta ad avere $\frac{e}{E}$ in $S$.
Ora, per il principio di relativitï¿½, i due sistemi sono equivalenti,i relativi cambiamenti(di

unitï¿½) $\frac{e'}{E'}$ e $\frac{e}{E}$ devono essere uguali:

$$\frac{e'}{E'} = \frac{e}{E} \qquad \Longrightarrow Ee' = E'e \tag{1.1}$$

Questa relazione ci permette di costruire il punto $E'$.
L'unitï¿½ di tempo in $S'$ $E_{ct'}$ puï¿½ essere costruito allo stesso modo da $E_{ct}$, il punto che definisce l'unitï¿½ di tempo in $S$.
In accordo con la figura, otteniamo le seguenti due relazioni[3]

$$e'^2 = E^2\Big(1 + \frac{v^2}{c^2}\Big) \tag{1.2}$$

$$e^2 = E^2\Big(1 - \frac{v^2}{c^2}\Big) \tag{1.3}$$

Ora siamo quindi in grado di trasformare le coordinate $x$ e $t$ di ogni punto $P$ nel sistema $S$ nelle coordinate $x'$ e $t'$ di $P$ in $S'$. Un generico punto $P$ di coordinate $x, \quad ct$ in $S$, ha coordinate $x', \quad ct'$ in $S'$. Si ha

$$x' = \frac{\overline{Ox'}}{E'}$$

Analogamente

$$x = \frac{\overline{Ox}}{E}$$

Da cui

$$(x - vt) = \frac{\overline{O(x - vt)}}{E}$$

[3] La relazione 1.2 ï¿½ il teorema di Pitagora applicato al triangolo $OEe'$ $\big(\overline{Ee'} = E\frac{v}{c}\big)$. La seconda relazione puï¿½ essere provata usando la figura. Dal teorema di Pitagora, otteniamo $E'^2 = D^2\big(1 + \frac{v^2}{c^2}\big)$. Ora $e = D - \overline{De} = D\big(1 - \frac{v2}{c^2}\big)$. Segue

$$E'^2 = e^2 \frac{1 + \frac{v^2}{c^2}}{\big(1 - \frac{v^2}{c^2}\big)^2}.$$

Estraendo la radice dell'ultima equazione e di 1.2,

$$E' = e\frac{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, e' = E\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$

e sostituendola in 1.1:$Ee' = E'e$, abbiamo, semplificando $\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}$, ne risulta1.3.

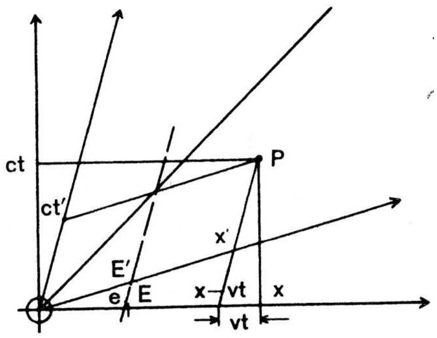


Figura 1.2: Trasformazione delle coordinate di un punto P

Moltiplicando entrambi i membri per $x'$, si ottiene

$$\frac{x'}{x - vt} = \frac{\overline{Ox'}}{\overline{O(x - vt)}} \frac{E}{E'}$$

e

$$\frac{\overline{Ox'}}{\overline{O(x - vt)}} = \frac{E'}{e}.$$

Sostituendo la seconda nella prima e usando 1.3 otteniamo come risultato:

$$\frac{x'}{(x - vt)} = \frac{E}{e} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

La corrispondente relazione per le coordinate temporali ï¿½

$$\frac{ct'}{\left(ct - \frac{v}{c}x\right)} = \frac{E}{e} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Otteniamo le cosiddette *Trasformazioni di Lorentz*, che permettono di calcolare le coordinate di un punto in $S'$ note le sue coordinate in $S$, nella loro forma usuale:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.4}$$

Di particolare interesse ï¿½ il caso in cui la velocitï¿½ $v << c$, cioï¿½ ï¿½ molto piï¿½ piccola di quella della luce, in particolare se $v$ se $\frac{v}{c}$ ï¿½ trascurabile rispetto a 1, dalle trasformazioni di Lorentz otteniamo:

$$x' = x - vt, \qquad y' = y, \qquad z = z', \qquad t' = t$$

ossia le trasformazioni di Galileo. In questo modo si comprende come, nel caso di piccoli valori che $\frac{v}{c}$ assume nell'esperienza comune, la meccanica di Galileo-Newton abbia soddisfatto i requisiti per secoli.

## 1.4 Rappresentazione geometrica della meccanica di Einstein

A questo punto vogliamo determinare la relazione che esiste tra due sistemi inerziali. Seguendo Born, anche in questo caso ometteremo le coordinate $y, z$ che rimangono invariate, e restringiamo la nostra considerazione al piano $x, ct$. Osserviamo che ogni sistema inerziale $S$ ï¿½ rappresentato da un set di assi obliqui nel piano $x, ct$. Il fatto che uno di essi risulti rettangolari deve essere considerato come una circostanza accidentale.
Ogni punto nello spazio puï¿½ essere visto come sorgente di un'onda luminosa che si propaga sfericamente e uniformemente in tutte le direzioni. Nella figura (1.3) sono rap-

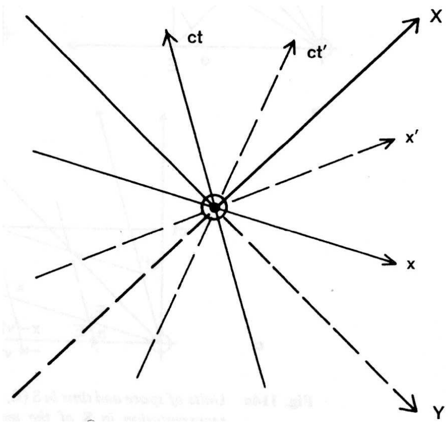


Figura 1.3: Il punto $O$ come sorgente di raggi luminosi

presentati solo due di questi raggi luminosi che tagliano l'asse $x$. Essi corrispondono sul piano a due rette che si intersecano e connettono gli eventi l'uno all'altro, ossia i punti del piano $x, ct$ raggiunti successivamente dal segnale luminoso.
Tracciamo queste linee, mutualmente perpendicolari, passanti per un punto $O$, preso come origine, di tutti i sistemi di coordinate $x, ct$ considerati. Prendiamo questi come gli assi di un $XY$ sistema di coordinate. Il sistema $XY$ ï¿½ univocamente determinato

e fissato; i suoi assi non sono linee nello spazio ma sono formati da punti, ossia quelli che corrispondono a punti dello spazio al tempo in cui vengono raggiunti da un segnale luminoso emesso dall'origine. Tale sistema di coordinate invariante o "assoluto" ï¿½ quindi altamente astratto.

Le curve di calibrazione che tagliano le unitï¿½ di lunghezza e tempo dagli assi di un arbitrario sistema inerziale $x, ct$ devono essere rigidamente connesso a questo sistema di riferimento assoluto $X, Y$. Queste curve devono quindi essere rappresentate da una lagge invariante. I raggi di luce stessi sono invarianti. L'asse $X$ $(Y = 0)$ ï¿½ rappresentato in un sistema $S$ dalla formula $x = ct$, e in un altro sitema $S'$ da $x' = ct'$, queste formule esprimono il fatto che la velocitï¿½ della luce ha lo stesso valore in entrambi i sistemi. Ora dobbiamo esprimere la differenza $x' - ct'$ in termini delle coordinate $x$ per mezzo delle trasformazioni di Lorentz (1.4). Cosï¿½

$$\begin{aligned} x' - ct' &= \tfrac{1}{\alpha}\Big[(x - vt) - c\Big(t - \tfrac{v}{c^2}\Big)x\Big] \\ &= \tfrac{1}{\alpha}\Big[x\Big(1 + \tfrac{v}{c}\Big) - ct\Big(1 + \tfrac{v}{c}\Big)\Big] \\ &= \tfrac{1+\beta}{\alpha}(x - ct). \end{aligned}$$

Poniamo $\beta = \frac{v}{c}$, si vede cosï¿½ che quando $x - ct = 0$, vale anche $x' - ct' = 0$. L'asse $Y$ $(X = 0)$ ï¿½ dato da $x = -ct$ o $x' = ct'$. Se facciamo la corrispondente trasformazione dalle $x'$ e $ct'$ alle $x$ e $ct$, dobbiamo solo cambiare $c$ in $-c$ e $\beta$ in $-\beta$, e otteniamo

$$x' + ct' = \frac{1 - \beta}{\alpha}(x + ct).$$

Da queste formule ricaviamo un espressione invariante. Per $(1+\beta)(1-\beta) = (1-\beta^2 = \alpha^2$; perciï¿½ se moltiplichiamo le due equazioni il fattore costante diventa 1 e troviamo

$$(x' - ct')(x' + ct') = (x - ct)(x + ct)$$

o

$$x'^2 - c^2t'^2 = x^2 - c^2t^2;$$

cioï¿½ l'espressione

$$F = x^2 - c^2t^2 \tag{1.5}$$

ï¿½ un invariante. In primo luogo tale espressione serve a determinare le unitï¿½ di lunghezza e tempo in un arbitrario sistema di riferimento $S$. Osserviamo che $F = 1$ si ha per $x = 1$ e $ct = 0$, e definisce l'unitï¿½ di lunghezza che ï¿½ a riposo in un generico sistema; allo stesso modo $F = -1$ si ha per $x = 0, ct = 1$; qui $t$ rappresenta il tempo che la luce necessita per percorrere l'unitï¿½ di lunghezza.

Ora risulta semplice costruire i punti per cui $F = +1$ o $F = -1$. L'asse $X$ ï¿½ formato

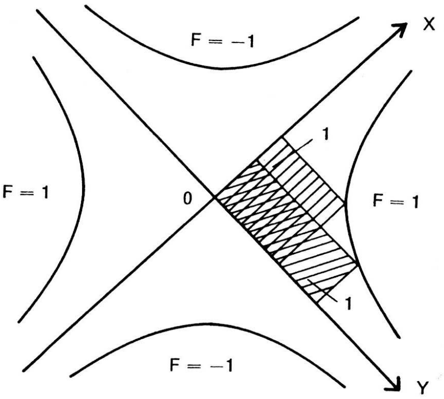


Figura 1.4: Curve di calibrazione F=1 e F=-1.

dai punti per cui $Y = 0$; dall'altra parte gli stessi punti sono caratterizzati in un generico sistema di riferimento$S$ dalla relazione $x = ct$. Perciï¿½ $Y$ deve essere proporzionale a $x - ct$. Scegiendo opportunamente l'unitï¿½ di $Y$, possiamo porre

$$Y = x - ct.$$

Allo stesso modo considerando l'asse $Y$ possiamo scrivere

$$X = x + ct.$$

Poi abbiamo

$$XY = (x - ct)(x + ct) = x^2 - c^2t^2 = F.$$

I punti $X, Y$ per cui $XY = 1$ formano una curva che si avvicina sempre piï¿½ agli assi. Tale curva ï¿½ detta iperbole equilatera. Se $X$ e $Y$ sono negativi, $XY$ ï¿½ positivo. Perciï¿½ la ocstruzione ci dï¿½ il secondo ramo, l'immagine della prima, nel quadrante opposto. Per $F = -1$ la stessa costruzione vale nei quadranti rimanenti dove le coordinate $X$ e $Y$ hanno segno differenti. Le quattro iperboli formano le curve di calibrazione per cui le unitï¿½ di lunghezza e tempo sono fissati in tutti i sistemi di riferimento.

## 1.5 Regoli e orologi in moto

Ci occupiamo ora della misura della lunghezza di uno stesso regolo e della durata di uno stesso intervallo di tempo in sistemi di riferimenti diversi. Prendiamo un regolo di un'unitï¿½ di lunghezza a riposo nel sistema $S(x, ct)$ posizionato lungo l'asse $x$. Ci chiediamo qual ï¿½ la sua lunghezza nel sistema $S'(x', ct')$ che si sta muovendo rispetto a $S$. La retta che contiene il suo punto iniziale ï¿½ l'asse $ct$, e quella che contiene il suo punto finale ï¿½ la retta parallela a questa ad una distanza pari a 1, passante per $P$. Perciï¿½ l'intero regolo ï¿½ rappresentato per tutto il tempo dalla striscia tra queste due rette.

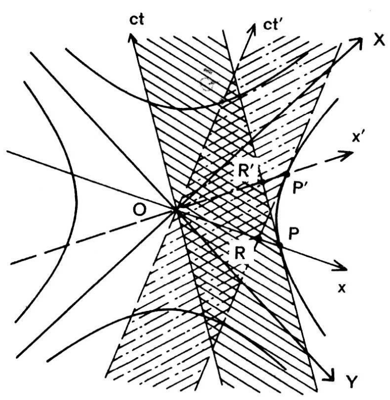


Figura 1.5: Contrazione delle lunghezze

L'asse $ct'$ ï¿½ inclinato rispetto all'asse $ct$. Seguendo Born, troviamo il corrispondente asse $x'$ tracciando la tangente al punto di intersezione $Q'$ dell'asse $ct'$ con la curva di calibrazione e poi tracciando la parallela $\overline{OP'}$ a questa tangente per $O$. La distanza $\overline{OP'}$ ï¿½ l'unitï¿½ di lunghezza sull'asse $x'$. La lunghezza del regolo dell'unitï¿½ di lunghezza a riposo in $S$ misurata in $S'$ ï¿½ data dalla distanza $\overline{OR'}$. Questo ï¿½ evidentemnete piï¿½ corto di $\overline{OP'}$, cosï¿½ $\overline{OR'}$ ï¿½ piï¿½ piccolo di 1, e perciï¿½ il regolo appare piï¿½ corto nel sistema in moto $S'$. Se, viceversa, un regolo a riposo nel sistema $S'$ viene misurato dal sistema $S$, allo stesso modo appare contratto. In questo caso il regolo ï¿½ rappresentato dalla striscia delimitata dall'asse $ct'$ e la retta parallele ad esso per $P'$, e $\overline{OR}$ ï¿½ piï¿½ piccolo di 1. Osserviamo cosï¿½ che la contrazione ï¿½ reciproca.
Sia $l_0$ la lunghezza del regolo nel sistema di riferimento $S'$ in cui ï¿½ a riposo; $l_0$ ï¿½ detta

lunghezza statica o lunghezza propria del regolo. Siano $x'_1$e $x'_2$ i due estremi del regolo, allora $x'_2 - x'_1 = l_0$.
Se il regolo ï¿½ osservato in $S$, otteniamo dalla prima formula di (1.4)

$$x'_1 = \frac{x_1 - ct_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \qquad x'_2 = \frac{x_2 - ct_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

dove $x_1, t_1$ e $x_2, t_2$ sono le coordinate di $x'_1$e$x'_2$ in $S$. Ciï¿½ che vogliamo ï¿½ misurare la lunghezza del regolo in $S$; ciï¿½ significa determinare le coordinate $x_1$ e $x_2$ simultaneamente rispetto a $S$: dobbiamo porre $t_1 = t_2$. Sottraendo poi le due equazioni sopra otteniamo

$$x'_2 - x'_2 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Prendendo $x_2 - x_1 = l$ possiamo scrivere

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{1.6}$$

Questa formula ci dice che la lunghezza del regolo nel sistema $S$ appare contratta di un fattore $\sqrt{1 - \beta^2}$.
Lo stesso tipo di ragionamento possiamo farlo nella determinazione di un intervallo di tempo in due distinti sistemi $S$ e $S'$. Supponiamo di avere orologi le cui lancette si muovono con la stessa ritmo posti ciascuno in un punto del sistema $S$. La posizione $ct_1 = 0$ ï¿½ rappresentato dai punti dell'asse $x$, e la posizione $ct_2 = 0$ dai punti della retta che passa per $Q$ ed ï¿½ parallela all'asse $X$.

Consideriamo un orologio per cui $t'_1 = 0$ quando $t_1 = 0$ ï¿½ posizionato nell'origine del sistema $S'$. Ci chiediamo qual ï¿½ la posizione delle lancette di un orologio del sistema $S$ che sta nel punto dove l'orologio a riposo in $S'$ indica esattamente il tempo $ct'_2$. Il vaolore richiesto di $ct_2$ ï¿½ dato dall'intersezione $Q'$ dell'asse $ct'$ con la curva di calibrazione $F = -1$. Il punto$R$ dove l'asse $ct$ ï¿½ intersecato dalla parallela per $Q'$ all'asse ï¿½ simultaneo a $Q'$ in $S$; perciï¿½ $\overline{OR}$ rappresenta $ct_2$. Dalla figura possiamo notare che $\overline{OR} > \overline{OQ}$, o $ct_2$ ï¿½ piï¿½ lungo di $ct_1$=1. Questo significa che un intervallo di tempo nel sistema $S'$ appare allungato se misurato in $S$.
Viceversa, l'unitï¿½ di tempo $\overline{OQ}$ in $S$ appare allungato se misurata in $S'$.

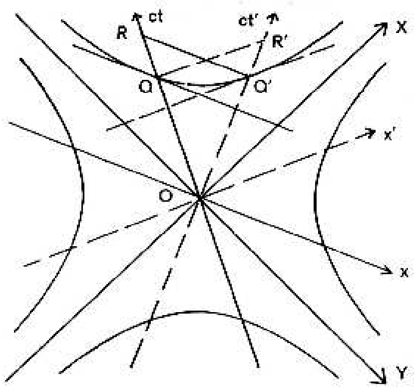


Figura 1.6: Dilatazione dei tempi

Ora consideriamo $T_0$,che esprime la differenza tra il tempo iniziale $t'_1$ e punto finale $t'_2$ come mostrato da un orologio a riposo nel sistema $S'$: $t'_2 - t'_1 = T_0$. Dalla seconda formula di (1.4) abbiamo

$$t'_1 = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad t'_2 = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Misuriamo il tempo $T_0$ nel punto $x'_1 = x'_2$ dell'orologio in $S'$. Dalla prima formula di (1.4) ricaviamo $x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1)$, perciï¿½ l'orologio ha la velocitï¿½ $v$ in $S$. Sottriamo poi $t'_1$ da $t'_2$:

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_2 - t_1 - \frac{v^2}{c^2}(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = (t_2 - t_1)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

La differenza $T = t_2 - t_1$ misurato in $S$ ï¿½ legato alla differenza $T_0$ in $S'$ da

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.7}$$

Viceversa l'unitï¿½ di tempo di un oroglogio a riposo nel sistema $S$ appare incrementato nel sistema $S'$. Visto da un qualsiasi sistema, gli orologi di ogni altro sistema che si muove rispetto ad esso sembra stiano perdendo tempo, cosï¿½ tutti gli eventi in un sistema in moto ritardano rispetto agli eventi corrispondenti nel sistema visto a riposo.
Il tempo letto da un orologio in un sistema di riferimento in cui ï¿½ a riposo ï¿½ chiamato tempo proprio del sistema. Questo ï¿½ identico al tempo locale introdotto da Lorentz,

anche se per quest'ultimo il tempo locale appare come una quantitï¿½ matematica ausiliare in contrapposizione al vero tempo assoluto. Einstein stabilï¿½ che non aveva senso determinare tale tempo assoluto o distinguerlo dall'infinitï¿½ di tempi locali equivalenti dei vari sistemi di riferimento che sono in moto. Il che significa che il tempo assoluto non ha una realtï¿½ fisica. I dati temporali assumono un significato solo se considerati rispetto ad un definito sistema di riferimento.

### 1.5.1 Ciï¿½ che appare e ciï¿½ che ï¿½

Ora che abbiamo introdotto formalmente la contrazione delle lunghezze e la dilatazione dei tempi, vogliamo chiarirne meglio alcuni punti. Quando si parla di contrazione della lunghezza del regolo non si intende che esso varia "realmente" le sue dimensioni, accorciandosi. Dall'esposizione precedente ci si potrebbe chiedere se la contrazione ï¿½ reale o solo apparente. Pensiamo di stare affettando un frutto, ad esempio, le fette che otterremo risulteranno tanto piï¿½ larghe quanto piï¿½ siano state tagliate in modo obliquo. Ma non ha alcun senso chiamare apparenti le fette oblique e reali quelle piï¿½ piccole tagliate perpendicolarmente.
Esattamente allo stesso modo, un regolo nella teoria di Einstein ha varie lunghezze a seconda del punto di vista dell'osservatore. In particolare, la lunghezza propria dell'oggetto considerato assumerï¿½ il valore piï¿½ grande, questo perï¿½ non significa che essa debba essere considerata come piï¿½ reale delle altre lunghezze.
Lo stesso tipo di discorso ï¿½ da farsi nel caso della dilatazione dei tempi. Un orologio ideale ha sempre lo stesso ritmo di battito delle lancette in un sistema nel quale si trovi a riposo. Esso indica quello che abbiamo chiamato il tempo proprio del sistema di riferimento. Tuttavia, visto da un altro sistema di riferimento l'orologio sembra marciare piï¿½ lentamente e il tempo proprio appare piï¿½ lungo. Anche in questo caso non ha senso chiedersi se la durata di un dato evento ï¿½ reale. Possiamo concludere dicendo che la teoria ammette questi effetti come conseguenza della peculiaritï¿½ di $c$ e del moto relativo, quindi del nostro modo di vedere le cose: infatti essi non costituiscono un cambiamneto di una determinata realtï¿½ fisica.

## 1.6 Paradossi relativistici

Numerose deduzioni ricavate dalla teoria di Einstein incontrarono forte opposizione fino a quando i fisici non riuscirono a dimostrarle sperimentalmente. Tra queste quella che piï¿½ colpisce e affascina ï¿½ probabilmente ï¿½ il cosiddetto "paradosso dei gemelli". Consideriamo un osservatore A a riposo nell'origine $O$ di un sistema inerziale $S$. Un secondo osservatore B ï¿½ inizialmente a riposo nello stesso punto, e poi si muove a velocitï¿½ uniforme lungo una retta, per esempio l'asse $x$, fino a raggiungere un punto $C$, dove inverte il senso di marcia e ritorna al punto $O$ viaggiando sempre lungo l'asse $x$ con la stessa velocitï¿½.
Supponiamo inoltre che entrambi gli osservatori possiedano orologi che indicano il loro tempo proprio. Il tempo che B necessita per partire, girare, e rallentare all'arrivo in $O$ puï¿½ essere reso arbitrariamente breve rispetto ai tempi di andata e ritorno a velocitï¿½ uniforme facendoli diventare sufficientemente grandi. Se, poi, l'andamento delle lancette degli orologi venisse in qualche modo influenzato dall'accelerazione, questo effetto sarebbe relativamente piccolo se la durata del viaggio fosse sufficientemente lunga, cosicchï¿½ tale effetto potrebbe essere trascurato.
Sappiamo che, per effetto della dilatazione dei tempi, durante il periodo di moto uniforme di B il tempo proprio resta indietro rispetto al tempo di qualsiasi altro sistema inerziale. Cosï¿½, al momento della inversione del senso di marcia, l'orologio di A sarï¿½ avvantaggiato rispetto a quello di B. Per calcolare a quanto ammonta tale vantaggio si utilizza l'equazione (1.7), in cui $T$ ï¿½ il tempo proprio di A, e $T_0$ rappresenta il tempo misurato nel sistema B.

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

ï¿½ valida per ogni istante del moto dato che il viaggio di andata e ritorno avviene con la stessa velocitï¿½. Perciï¿½ vale, in particolare, per il momento di girata , dove $T$ indica la durata complessiva del viaggio in accordo con il tempo proprio di A, e $T_0$ indica la durata del viaggio in accordo con il tempo proprio di B. Per $v << c$ riscriviamo (1.7) approssimativamente $T = T_0\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)$. Perciï¿½ il vantaggio dell'orologio do A rispetto a quello di B ï¿½

$$T - T_0 = \frac{v^2}{2c^2} \mathrm{x} T_0 \tag{1.8}$$

Il paradosso di questo risultato sta nel fatto che ogni processo interno al sistema B deve avvenire piï¿½ lentamente rispetto al medesimo processo nel sistema A. Tutte le vibrazioni atomiche, infatti, anche il corso della vita stessa, si deve comportare esattamente come gli orologi. Cosï¿½, se A e B fossero due fratelli gemelli allora B deve essere piï¿½ giovane di A alla fine del suo viaggio.
Questa bizzarra deduzione necessita di valori delle velocitï¿½ molto grandi per poter essere confermata sperimentalmente. A tale scopo si possono studiare piccole particelle cosmiche con velocitï¿½ vicine a quella della luce. Fasci di simili particelle provengono dallo spazio e entrano nell'atmosfera terrestre da ogni direzione e collidono con particelle presenti nell'aria. Quando una particella colpisce il nucleo di un atomo atmosferico vengono generate nuove particelle che vengono chiamate mesoni; i quali presentano una massa a metï¿½ strada tra quella dell'elettrone e quella di un protone. Questi mesoni sono instabili e decadono dopo un brevessimo intervallo di tempo in altre particelle. Il tempo di vita proprio di un mesone ï¿½ uguale a $T_0 = 10^{-8}$ sec. Se la velocitï¿½ de dei mesoni cosmici fosse pari a quella della luce, la distanza che percorrono dovrebbe essere solo $c\mathrm{x}T_0 = 3\mathrm{x}10^{10}\mathrm{x}10^{-8} = 300cm$. Ma i mesoni vengono visti muoversi a livello del mare. Pare quindi un paradosso che essi possano percorrere una distanza di circa $h = 30$ km durante la loro vita. Per risolvere la questione basta prendere in considerazione la dilatazione del tempo; la durata della vita sulla terra, $T$, ï¿½ molto piï¿½ lunga di $T_0$. Affinchï¿½ i mesoni possano raggiungere la superficie della terra, allora T (dato dalla formula (1.7)) deve essere piï¿½ grande dell'altezza dell'atmosfera divisa per la velocitï¿½ $v$; la velocitï¿½ minima deve perciï¿½ soddisfare la seguente condizione

$$\frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{h}{v}$$

da cui

$$\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{h}{T_0 c} = \frac{3\mathrm{x}10^6 cm}{10^{-8}\mathrm{x}3\mathrm{x}10^{10} cm} = 10^4$$

Da questa possiamo stimare $\frac{v}{c}$ e ottenere

$$v = c(1 - \frac{1}{2}10^{-8}) = 0.999999995c$$

I mesoni illustrano il paradosso dei gemelli; ogni mesone trasporta il proprio orologio che determina il tempo proprio $T_0$ di decadimento. Ma la durata della vita misurata sulla terra ï¿½ molto piï¿½ lungo. In altri termini ï¿½ come se i mesoni vedessero le distanze sulla terra contratte e fossero capaci di percorrere distanze considerevoli a seconda della loro velocitï¿½.
In realtï¿½, gli oppositori della teoria della relativitï¿½ considerarono questi risultati in disaccordo con la consistenza logica della teoria. Infatti, per la teoria della relativitï¿½ due sistemi in moto relativo sono equivalenti. Quindi potremmo vedere B come a riposo, e pensare che sia l'osservatore A a compiere il viaggio prima descritto, ma in direzione opposta. Dobbiamo concludere che al ritorno di A, sarï¿½ l'orologio di B ad essere in vantaggio rispetto a quello di A. In questo modo sembra che le nostre due conclusioni siano in netta contrapposizione, poichï¿½ l'orologio di A non puï¿½ essere avanti rispetto a quello di B e, contemporaneamente, l'orologio di B essere in vantaggio rispetto a quello di A. La contraddizione perï¿½ ï¿½ solo apparente; il principio di relativitï¿½ vale solamente per sistemi di riferimento che si muovono di moto uniforme e rettilineo uno rispetto all'altro. Non puï¿½ essere applicato a sistemi accelerati. Ma il sistema B accelera all'inizio e alla fine del viaggio, ma, soprattutto, quando deve invertire il senso di marcia; allora esso non ï¿½ equivalente ad A. Nessun paradosso dunque: l'orologio di A non puï¿½ essere in vantaggio rispetto a quello di B.

## 1.7 Addizione delle velocitï¿½

Prendiamo di nuovo in considerzione le curve di calibrazione. Seguendo sempre la linea di Born, restringiamo nuovamente i moti sul piano $x, ct$. Le linee luminose che sono caratterizza da $F = x^2 - c2t^2 = 0$ dividono il piano $x, ct$ in quattro quadranti. Ora $F$ assume lo stesso valore in ciascun quadrante, come mostrato in figura. Una retta passante per l'origine $O$ puï¿½ essere scelto come asse $x$ oppure come asse $ct$ a seconda che giacciano nel quadrante $F > 0$ o $F < 0$.

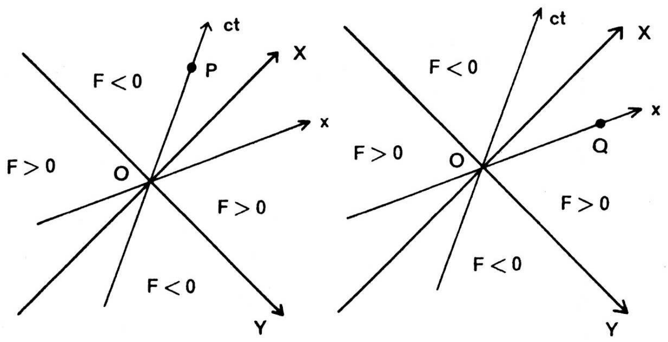


Figura 1.7: Suddivisione del piano in quattro quadranti

In ogni sistema inerziale l'asse $x$ separa i punti del "passato"($t < 0$) da quelli del futuro($t > 0$). Questa separazione ï¿$\frac{1}{2}$ differente per ciascun sistema inerziale, perciï¿$\frac{1}{2}$ per un'altra posizione dei punti dell'asse $x$ che prima erano collocati sopra l'asse $x$, cioï¿$\frac{1}{2}$, nel "futuro", ora giacciono sotto di esso, o nel passato, e viceversa. Solo gli eventi rappresentati dai punti dentro i quadranti $F < 0$ sono unicamente o "passati" o "futuri" per ogni sistema inerziale. Per un simile punto $P$ vale $c^2t^2 > x^2$, cioï¿$\frac{1}{2}$ la distanza temporale dei due eventi $O$ e $P$ ï¿$\frac{1}{2}$ piï¿$\frac{1}{2}$ grande del tempo che la luce impiega per passare da un punto all'altro.
Analogamente in ogni sistema inerziale l'asse $ct$ rappresenta punti di eventi che si verificano nell'origine spaziale sull'asse $x$. Ma per un differente sistema inerziale con un diverso asse $ct$ questa demarcazione sarï¿$\frac{1}{2}$ un'altra. E' determinata unicamente per i punti che giacciono dentro i quadranti $F > 0$, se cadono "avanti" o "dietro" l'origine spaziale. Per un punto di questo tipo $Q$ si ha $c^2t^2 < x^2$, cioï¿$\frac{1}{2}$ l'intervallo temporale tra i due eventi $O$ e $Q$ ï¿$\frac{1}{2}$ piï¿$\frac{1}{2}$ breve del tempo che la luce necessita per arrivare da un punto all'altro.
In ogni sistema di riferimento inerziale $F = 0$ rappresenta i moti che si verificano alla velocitï¿$\frac{1}{2}$ della luce. Di conseguenza ogni retta per $O$ nei quadranti $F < 0$ rappresentano un moto a velocitï¿$\frac{1}{2}$ inferiore a $c$. Per quel che riguarda i moti con velocitï¿$\frac{1}{2}$ superiore a quella della luce, la teoria di Einstein ritiene impossibile simili moti impossibile.
Supponiamo che un sistema $S'$ che si muove a velocitï¿$\frac{1}{2}$ $v$ rispetto ad un'altro sistema $S$. Sia $K$ un corpo in moto rispetto a $S'$ con una velocitï¿$\frac{1}{2}$ $u'$. In accordo con la cinematica

ordinaria, la velocitï¿½ relativa del corpo $K$ rispetto a $S$ ï¿½

$$u = v + u'$$

Se $v$, cosï¿½ come $u'$, ï¿½ maggiore di quella della luce, allora $u = v + u'$ ï¿½ piï¿½ grande di $c$, e questo deve essere impossibile in accordo con la teoria della relativitï¿½.
Tale contaddizione ï¿½ dovuta al fatto che le velocitï¿½ non possono essere semplicemente sommate nella cinematica della teoria della relativitï¿½, dove ogni sistema di riferimento ha le proprie unitï¿½ di lunghezza e tempo.
La necessitï¿½ di prendere in considerazione questo fatto dipende ovviamente dal fatto che per ogni coppiadi sistema in movimento uno rispetto all'altro la velocitï¿½ della luce ï¿½ supposta assumere sempre lo stesso valore. Ricaviamo la reale legge della composizione delle velocitï¿½ possono essere derivate dalle trasformazioni di Lorentz. Consideriamoun un corpo in motonel sistema $S'$. Esso potrebbe muoversi nel piano $x', y'$ e cosï¿½ ha due componenti della velocitï¿½ $u_{x'}$ e $u_{y'}$, e potrebbe iniziare al tempo $t' = 0$. Abbiamo

$$x' = u_{x'} t', \tag{1.9}$$

$$y' = u_{y'} t'. \tag{1.10}$$

Lo stesso moto osservato in $S$ sarï¿½ a sua volta un moto rettilineo con velocitï¿½ costante di componenti $u_x, u_y$. In $S$ si ha

$$x = u_x t, \tag{1.11}$$

$$y = u_y t \tag{1.12}$$

Allo scopo di ottenere una relazione tra le velocitï¿½ in $S$ e in $S'$ introduciamo $x, t, t$ nelle equazioni (1.9) e (1.10) per mezzo delle trasformazioni di Lorentz. Considerando (1.9) abbiamo

$$(x - vt) = u_{x'}\Big(t - \frac{v}{c^2}x\Big) \qquad \Rightarrow \qquad \Big(1 + \frac{u_{x'}v}{c^2}\Big)x = (u_{x'} + v)t$$

Confrontando con (1.11)

$$u_x = \frac{u_{x'} + v}{1 + \frac{u_{x'}v}{c^2}} \tag{1.13}$$

in modo analogo da (1.10)

$$u_y = \frac{u_{y'}\Big(1 - \frac{v}{c^2}u_x\Big)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

e con (1.13)

$$u_y = u_{y'} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u_{x'} v}{c^2}} \tag{1.14}$$

Le equazioni (1.13,1.14) esprimono il teorema di addizione delle velocitï¿½ di Einstein, che prende il posto delle formule della cinematica ordinaria

$$u_x = u_{x'} + v, \qquad u_y = u_{y'}$$

Nel caso volessimo esprimere $u_{x'}, u_{y'}$ in termini delle $u_x, u_y$ otterremmo formule della stessa forma, con la sola differenza di avere $-v$ al posto di $v$.
Se conderiamo un raggio luminoso che viaggia nella direzione del moto del sistema $S'$ rispetto a $S$, allora $u_{x'} = c, u_{y'} = 0$. Dalla formula (1.13) risulta

$$u_x = \frac{v + c}{1 + \frac{v}{c}} = c, \qquad u_y = 0$$

che esprime esattamente ciï¿½ che ci aspettavamo, cioï¿½ la costanza della veolocitï¿½ della luce.
Proviamo, infine, a dividere la formula (1.13) per $c$ otteniamo

$$\frac{u_x}{c} = 1 - \frac{\left(1 - \frac{u_{x'}}{c}\right)\left(1 - \frac{v}{c}\right)}{1 + \frac{u_{x'} v}{c^2}}$$

in cui il secondo addendo del termine a destra dell'uguale risulta sempre piï¿½ piccolo di 1. Osserviamo che questo risultato vale per moti con velocitï¿½ $u_x$ in ogni direzione.
Perciï¿½ la velocitï¿½ della luce ï¿½, cinematicamente, un limite invalicabile in natura.

# Capitolo 2

# Dinamica relativistica

## 2.1 Massa e quantitï¿½ di moto

Abbiamo mostrato che grandezze fondamentali della meccanica, quali lunghezza e spazio, non sono piï¿½ da cosiderarsi assolute, bensï¿½ relative, intendendo con relative che sono quantitï¿½ i cui valori dipendono dal sistema di riferimento in cui vengono misurate. Cerchiamo ora di capire cosa succede ad un'altra grandezza fondamentale, cioï¿½ la massa di un corpo.

Risulta utile considerare la legge di conservazione della quantitï¿½ di moto. Essa afferma che quando due corpi collidono la loro quantitï¿½ di moto totale rimane costante indipendentemente dalle loro velocitï¿½. Dunque, l'asserzione riguarda unicamente due corpi che agiscono uno sull'altro, che subiscono un impatto reciproco senza alcuna influenza esterna. Non si fa riferimento ad un terzo corpo o ad un sistema di ccordinate. Di conseguenza, si puï¿½ affermare che questa legge di conservazione rimane valida nella nuova meccanica relativistica.

Ciï¿½ non sarebbe, certamente, possibile se continuassimo a considerare valido l'assioma della meccanica classica che stabilisce che la massa ï¿½ una quantitï¿½ caratteristica di ogni corpo. Iniziamo quindi con l'assumere fin da ora che la massa di un corpo ï¿½ una quantitï¿½ relativa. Osserviamo che la massa rispetto ad un preciso sistema di riferimento puï¿½ dipendere soltanto dalla velocitï¿½ del corpo rispetto a tale sistema, non dalla sua direzione.

Per determinare la dipendenza $m(u)$ della massa $m$ di un corpo dalla sua velocitï¿½ $u$, consideriamo un tipo particolare di collisione, caratterizzata dal fatto che i due corpi rimangono attacati dopo la collisione.
Sempre seguendo Born, supponiamo di avere due sfere, di massa rispettivamente $m_1, m_2$ che prima della collisione si muovono con velocitï¿½, rispettivamente, $u$ e 0; mentre la velocitï¿½ comune dei due corpi immediatamente dopo la collisione la indichiamo con $\overline{u}$.

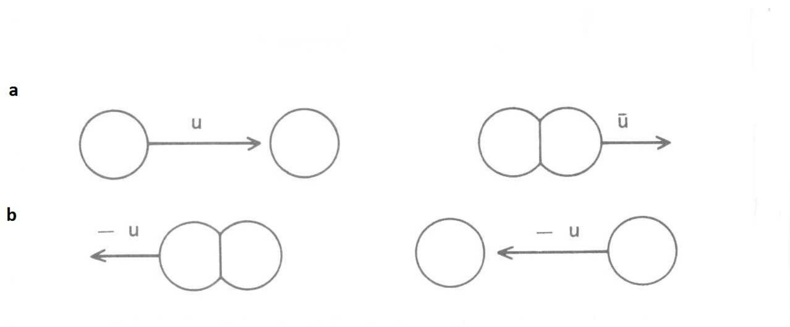


Figura 2.1: **a** Collisione di sfere uguali viste dal sistema S **b** Stessa collisione delle due sfere, ma osservate dal sistema S'

Per la legge di conservazione della quantitï¿½ di moto vale

$$m(u)u = M(\overline{u})\overline{u} \tag{2.1}$$

dove $M(\overline{u})$ rappresentala massa dei due corpi dopo la collisione.
L'equazione sopra si riferisce ad un sistema di riferimento $S$ in cui la sfera sinistra si muone con velocitï¿½ $u$ e la sfera destra ï¿½ a riposo.
Osserviamo poi la stessa collisione da un altro sistema $S'$ che si muove rispetto ad $S$ con velocitï¿½ $+u$. Cosï¿½ in $S'$ la sfera sinistra ï¿½ a riposo e la destra si muove a velocitï¿½ $-u$. La collisione vista in $S$ sembra piuttosto simmetrica rispetto alla stessa osservata in $S'$. Inoltre, si potrebbe concludere che la velocitï¿½ comune dopo l'impatto deve essere $-\overline{u}$. Ma possiamo esprimere questa velocitï¿½ usando la (1.13), ponendo $v = +u, \quad u_x = \overline{u}, \quad u'x = -\overline{u}$. Cosï¿½ abbiamo

$$\overline{u} = \frac{-\overline{u} + u}{1 - \frac{\overline{u}u}{c^2}}$$

da cui ricaviamo $u$,

$$u = \frac{2\overline{u}}{1 + \frac{\overline{u}^2}{c^2}}. \tag{2.2}$$

Quest'ultima equazione mostra che nel caso limite, quello cioï¿½ della meccanica classica, $\left(\frac{\overline{u}}{c} \longrightarrow 0\right)$ otteniamo $\overline{u} = \frac{u}{2}$.
Ora ricaviamo un'altra relazione

$$m(u) + m(0) = M(\overline{u}) \tag{2.3}$$

che puï¿½ essere chiamata legge di conservazione della massa. Per dimostrarla introduciamo un sistema di riferimento $S'$ che si muove nella direzione dell'asse $y$ rispetto al nostro sistema $S$ con velocitï¿½ $v$.

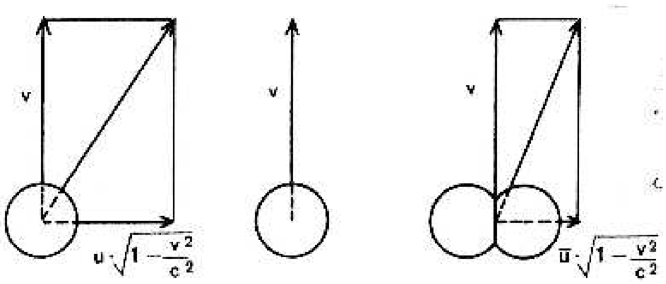


Figura 2.2: Collisione di sfere uguali con velocitï¿½ perpendicolari osservate dal sistema S"

Possiamo applicare le formule (1.13) e (1.14) con l'unica modifica di interscambio delle direzioni degli assi $x$ e $y$:

$$u'_x = u_x \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u_y v}{c^2}}, \qquad u'_y = \frac{u_y + v}{1 + \frac{u_y v}{c^2}}.$$

Poichï¿½ nel sistema $S$ le velocitï¿½ delle sfere che collidono e delle due sfere dopo la collisione sono dirette lungo l'asse $x$, per ognuna di esse si ha $u_y = 0$ e la seconda equazione diventa

$$u'_x = u_x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \qquad u'_y = v$$

Quando i valori delle componenti delle velocitï¿½ nel sistema $S$ sono

| | *Sfera sinistra* | *Sfera destra* | *Sfere unite* |
|---|---|---|---|
| $u_x$ | $u$ | 0 | $\overline{u}$ |
| $u_y$ | 0 | 0 | 0 |

per i tre corpi i loro valori, rispettivamente, in $S'$ sono

| | *Sfera sinistra* | *Sfera destra* | *Sfere unite* |
|---|---|---|---|
| $u_{x'}$ | $u\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ | 0 | $\overline{u}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ |
| $u_{y'}$ | $v$ | $v$ | $v$ |

Le masse dipendono solo dai valori assoluti delle velocitï¿½, cioï¿½ da $\sqrt{{u'_x}^2+{u'_y}^2}$. Perciï¿½ la componente $y$ della legge di conservazione della quantitï¿½ di moto in $S'$ ï¿½ data da

$$m(u')\mathrm{x}v + m(v)\mathrm{x}v = M(\overline{u'})\mathrm{x}v$$

, dove usiamo $u'$ e $\overline{u'}$ per indicare $\sqrt{{u'_x}^2+{u'_y}^2}$, rispettivamente nel caso della sfera sinistra e delle due sfere unite. Dividendo per v si ha

$$m(u') + m(v) = M(\overline{u'}) \tag{2.4}$$

Questa deve valere per ogni valore di $v$. In particolare, per $v = 0$ otteniamo (2.3). L'equazione (2.4) rappresenta la legge di conservazione della massa per velocitï¿½ arbitrarie nella sua forma generale, mentre la (2.3) ï¿½ un caso speciale.
Ora sostituiamo $m(u) + m(0)$ al posto di $M(\overline{u})$ nell'equazione (2.1), otteniamo

$$m(u)u = [m(u) + m(0)]\overline{u}$$

da cui

$$m(u) = m(0)\frac{\overline{u}}{u-\overline{u}}$$

Servendoci dell'equazione (2.2) otteniamo infine[1]

$$m(u) = \frac{m(0)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \tag{2.5}$$

[1]Sostituendo $u$ da (2.2), si ha

$$\frac{\overline{u}}{u-\overline{u}} = \frac{\overline{u}}{\frac{2\overline{u}}{1+\frac{\overline{u}^2}{c^2}}-\overline{u}} = \frac{1}{\frac{2}{1+\frac{\overline{u}^2}{c^2}-1}} = \frac{1+\frac{\overline{u}^2}{c^2}}{2-\left(1+\frac{\overline{u}^2}{c^2}\right)} = \frac{1+\frac{\overline{u}^2}{c^2}}{1-\frac{\overline{u}^2}{c^2}}$$

Quet'ultima equazione esprime la relazione tra massa e velocitï¿½.
La massa $m(0) = m_0$ ï¿½ detta massa a riposo del corpo, ossia la massa misurata in un sistema di riferimento in cui il corpo si trova a riposo.
L'espressione della massa relativistica che ci siamo appena ricavati, ci permette di calcolare la quantitï¿½ di moto $p$ di un corpo che si muove con velocitï¿½ $v$

$$p = mv = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v. \tag{2.6}$$

La formula (2.5) chiarisce meglio l'affermazione fatta alla fine del paragrafo precedente, riguardo alla velocitï¿½ della luce come limite di velocitï¿½ naturale. Infatti, la formula suddetta, mostra che man mano che la velocitï¿½ $v$ del corpo si avvicina a quella della luce, la sua massa cresce via via. Per $v = c$ la massa diventa infinitamente grande. Ne consegue che ï¿½ impossibile far muovere un corpo con una velocitï¿½ superiore a quella della luce.
Quindi, l'assunzione fatta riguardo all'esistenza di una velocitï¿½ limite invalicabile, ï¿½ richiesta dalle stesse leggi fisiche nella loro nuova forma.

## 2.2 Massa ed energia

Vogliamo ora determinare un'altra importante relazione della teoria di Einstein, che esprime la relazione matematica fra massa ed energia.
Prendiamo di nuovo in considerazione la legge di conservazione della massa, nella forma (2.3).

---

D'altra parte,

$$\left(1 - \frac{\overline{u}^2}{c^2}\right)^2 = \left(1 + \frac{\overline{u}^2}{c^2}\right)^2 - 4\frac{\overline{u}^2}{c^2},$$

perciï¿½, usando (2.2),

$$\left(\frac{1 - \frac{\overline{u}^2}{c^2}}{1 + \frac{\overline{u}^2}{c^2}}\right)^2 = 1 - \frac{4\frac{\overline{u}^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{\overline{u}^2}{c^2}\right)^2} = 1 - \frac{u^2}{c^2},$$

combinando insieme i due risultati,

$$\frac{\overline{u}}{u - \overline{u}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Prendiamo la massa a riposo delle due sfere unite $M(0) = M_0$. Questo valore di $M$ lo otteniamo in un sistema $S''$ in cui la velociti¿½ di $M$ i¿½ uguale a 0. $S''$ si muove a velociti¿½ $\overline{u}$ rispetto al sistema $S$. Prima della collisione le velociti¿½ delle due sfere sono rispettivamente $\pm\overline{u}$ in $S''$.
La conservazione della massa diventa

$$m(\overline{u}) + m(\overline{-u}) = 2m(\overline{u}) = M(0) = M_0$$

da cui

$$M_0 = 2\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\overline{u}^2}{c^2}}} \tag{2.7}$$

Per valori della velociti¿½ $\overline{u} << c$, vale

$$M_0 = 2m_0\Big(1 + \frac{1}{2}\frac{\overline{u}^2}{c^2}\Big) = 2m_0 + 2\text{x}\frac{1}{c^2}\text{x}\frac{1}{2}m_0\overline{u}^2 \tag{2.8}$$

Come si pui¿½ notare da quest'ultima equazione, la massa a riposo $M_0$ non i¿½ uguale alla massa a riposo delle due sfere $2m_0$, vi i¿½ un altro contributo $2\text{x}\frac{1}{c^2}\text{x}\frac{1}{2}m_0\overline{u}^2 = 2T$, che rappresenta l'energia cinetica delle due sfere divisa per $c^2$. Quando le due sfere collidono, la loro energia cinetica viene convertita in calore $Q$. Cosi¿½ possiamo riscrivere (2.8)

$$M_0 = 2m_0 + \frac{Q}{c^2} \tag{2.9}$$

Questa si interpreta dicendo che l'addizione di una quantiti¿½ di calore $Q$ fa aumentare la massa di un fattore $\frac{Q}{c^2}$. Questo risultato si pui¿½ generalizzare per qualunque altra forma di energia, non solo quella cinetica, dicendo che l'addizione di una quantiti¿½ di energia $e$ ad un corpo incrementa la sua massa di fattore $\frac{e}{c^2}$.
Moltiplicando (2.8) per $c^2$ e usando (2.9), si ha

$$2m_0c^2 + 2T = M_0c^2 = 2m_0c^2 + Q$$

da cui

$$2T = Q$$

Questa equazione rappresenta la legge di conservazione dell'energia: l'energia prima della collisione(quella cinetica) i¿½ uguale all'energia dopo la collisione(il calore).

Quindi, da un punto di vista relativistico, la legge di conservazione della massa non ï¿½ altro che la legge di conservazione dell'energia. Inoltre possiamo asserire che l'energia totale $E$ di un corpo ï¿½ uguale alla sua massa moltiplicata per il quadrato della velocitï¿½ della luce, vale a dire

$$E = mc^2 \tag{2.10}$$

Questa formula lega matematicamnete i concetti di massa ed energia. In sostanza la massa risulta essere una forma di energia; dunque si deve poter trasformare in altre forme di energia, cosï¿½ come le altre forme di energia sono interconvertibili tra loro. Sperimentalmente si sono trovate innumerevoli conferme della possibilitï¿½ di convertire massa in altre forme di energia. Tali conferme di interconversione si possono riscontrare piï¿½ facilmente nella fisica del nucleo, perciï¿½ a livello subatomico. Per esempio[2] e a si puï¿½ osservare il decadimento della particella pione neutro, che ha una massa a riposo pari a $2.4x10^{-28}$ $kg$, in pura radiazione elettromagnetica(fotone). Il pione scompare completamente durante il processo e la quantitï¿½ di energia elettromagnetica prodotta equivale esattamente a quella prevista dalla formula di Einstein. In laboratorio si osserva anche il processo inverso: la radiazione elettromagnetica si puï¿½ trasformare in particelle materiali, come gli elettroni. Su piï¿½ larga scala, l'energia prodotta nelle centrali nucleari ï¿½ il risultato della perdita di massa del combustibile di uranio, a seguito di un determinato processo nucleare detto fissione. Anche l'irraggiamento che riceviamo dal Sole segue la stessa legge . La massa del Sole, man mano che emette energia elettromagnetica , si riduce continuamente.
In realtï¿½, si ritiene che la relazione $E = mc^2$ si applichi a tutti i processi, sebbene le variazioni sono spesso troppo piccole per poterle misurare.

## 2.3 Applicazione della teoria della relativitï¿½ ristretta: Effetto Doppler relativistico

Ora che abbiamo esposto i concetti fondamentali della teoria einsteiniana della relativitï¿½ ristretta, vogliamo trattare una delle sue piï¿½ importanti applicazioni: l'ottica

[2]Dal testo di D. C. Giancoli, *Fisica: principi e applicazioni*, Milano, Ambrosiana, 2000

dei corpi in movimento.
Sappiamo che, in accordo con la teoria della relativitï¿½ ristretta, l'etere non esiste, perciï¿½ i fenomeni ottici osservabili dipendono unicamewnte dai moti relativi dei corpi materiali, e non dal loro moto rispetto all'etere. Di conseguenza i fenomeni ottici che si verificano quando la sorgente di luce e l'osservatore sono a riposo in un sistema inerziale, sono gli stessi in tutti sistemi inerziali. Ci domandiamo ora che cosa succede nel caso in cui sia la sorgente di luce sia l'osservatore sono in moto uno rispetto all'altro.
S eguendo la linea di Born, immaginiamo un onda luminosa in un corpo materiale , il quale si trova a riposo in un sistema di riferimento $S$. Supponiamo che la velocitï¿½ del fascio luminoso sia $c_1 = \frac{c}{n}$ ($n$ rappresenta l'indice di rifrazione), $\nu$ la sua frequenza, e sia l'asse $x$ la sua direzione rispetto al sistema $S$. Cosa nota un osservatore che ï¿½ a riposo in un sistema $S'$ in moto con velocitï¿½ $v$ parallela all'asse $x$, la stessa di $S$? Si trova che

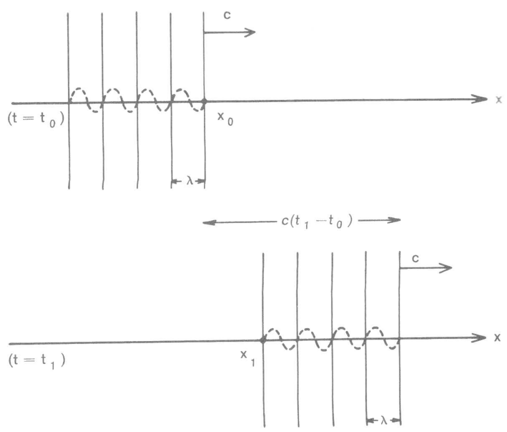


Figura 2.3: Misura del numero delle onde

il numero
$$\nu\Big(t_1 - t_0 - \frac{x_1 - x_0}{c}\Big)$$
ï¿½ un invariante rispetto alle trasformazioni di Galileo, quindi anche rispetto a quelle di Lorentz, che denota il numero di onde che riescono a raggiungere il punto $x_0$ al momento $t_0$ e hanno lasciato il punto $x_1$ dopo l'istante $t_1$. Cosï¿½
$$\nu\Big(t_1 - t_0 - \frac{x_1 - x_0}{c_1}\Big) = \nu'\Big(t_1' - t_0' - \frac{x_1' - x_0'}{c_1'}\Big)$$

dove $\nu, \nu'$ e $c_1, c_1'$ sono le frequenze e le velocitï¿½ dell'onda rispetto ai sistemi $S$ e $S'$. Utilizzando l'espressione di $x'$ e $t'$ date dalle trasformazioni di Lorentz (1.4) otteniamo

$$\nu\Big(t_1 - t_0 - \frac{x_1 - x_0}{c_1}\Big) = \frac{\nu'}{\alpha}\Big[t_1 - t_0 - \frac{v}{c^2}(x_1 - x_0) - \frac{x_1 - x_0 - v(t_1 - t_0)}{c_1'}\Big]$$

dove $\alpha = \sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Supponiamo, per prima cosa, di osservare l'intera onda nello stesso istante $t_1 - t_0 = 0$. Dividiamo per $(x_1 - x_0)$, e abbiamo

$$\frac{\nu}{c_1} = \frac{\nu'}{\alpha}\Big(\frac{v}{c^2} + \frac{1}{c_1'}\Big).$$

A questo punto, pensiamo di vedere l'onda passare per lo stesso punto $x_1 = x_0$. Dividiamo per $(t_1 - t_0)$, e otteniamo

$$\nu = \frac{\nu'}{\alpha}\Big(1 + \frac{v}{c_1'}\Big) \tag{2.11}$$

Dividendo quest'ultima equazione per la precedente, si

$$c_1 = \frac{1 + \frac{v}{c_1'}}{\frac{v}{c^2} + \frac{1}{c_1'}} = \frac{c_1' + v}{1 + \frac{vc_1'}{c^2}}$$

Quest'ultima concorda perfettamente con il teorema di addizione delle velocitï¿½ nella sua forma relativistica. Quindi possiamo osservare che anche la velocitï¿½ luce segue la stessa regola per il calcolo delle velocitï¿½ dei corpi materiali rispetto a diversi sistemi di riferimento.

Se, viceversa, risolviamo l'equazione rispetto a $c_1'$, si ha

$$c_1' = \frac{c_1 - v}{1 - \frac{vc_1}{c^2}}$$

L'equazione (2.11) rappresenta l'effetto Doppler. Essa solitamente viene applicata nel vuoto, perciï¿½ $c_1 = c$; vale anche che $c_1' = c$, per il teorema di addizione delle velocitï¿½. La formula (2.11) diventa

$$\nu' = \nu\frac{\alpha}{1 + \frac{v}{c}} = \nu\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta} \tag{2.12}$$

Ma, siccome, $1 - \beta^2 = (1-\beta)(1+\beta)$; possiamo scrivere

$$\nu' = \nu\frac{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}}{1+\beta} = \nu\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

In questo modo la formula rigorosa per l'effetto Doppler assume la forma

$$\nu'\sqrt{1+\frac{v}{c}}=\nu\sqrt{1-\frac{v}{c}} \tag{2.13}$$

che mostra l'equivalenza tra i due sistemi di riferimento $S$ e $S'$.
Osserviamo, inoltre, che per piccoli valori di $\beta=\frac{v}{c}$ si ottiene la formula ordinaria per l'effetto Doppler

$$\nu\Big(1-\frac{v}{c}\Big)=\nu' \tag{2.14}$$

trascurando nell'equazione (2.12) il fattore $\beta^2$.
Per valori delle velocitï¿½ abbastanza grandi la formula relativistica dell'effetto Doppler (2.13) differisce da quella classica (2.14). Tale differenza appare piï¿½ marcata nel caso in cui siano distinte la direzione della propagazione della velocitï¿½ della luce e la velocitï¿½ $v$, in particolare se esse risultano perpendicolari. In accordo con la teoria classica, in tal caso non si dovrebbe verificare affatto l'effetto Doppler, mentre nel caso relativistico c'ï¿½. In questo caso si parla di un nuovo effetto relativistico, detto effetto Doppler trasversale. Vediamo anche in questo caso di determinare la formula che lo caratterizza. Seguiamo lo stesso tipo di ragionamento seguito nel caso longitudinale.
Consideriamo i due sistemi $S$ e $S'$ che si muovono con velocitï¿½ $v$ nella direzione dei rispettivi assi $x$ e $x'$, che coincidono, ma questa volta supponiamo che la direzione di propagazione della luce sia perpendicolare a tale direzione, diciamo parallela all'asse $y'$. Mentre la distanza tra il punto di inizio dell'onda al tempo $t_0'$ e il suo punto finale al tempo $t_1'$ come osservato in $S'$ ï¿½ $y_1'-y_0'$, in $S$ non sarï¿½ semplicemente $y_1-y_0$ ma dipenderï¿½ anche da $x_1-x_0$, diciamo $a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)$.
L'invariante visto precedentemente, diventa

$$\nu\Big(t_1-t_0-\frac{a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)}{c_1}\Big)=\nu'\Big(t_1'-t_0'-\frac{y_1'-y_0'}{c_1'}\Big)$$

Ora dobbiamo applicare le equazioni di Lorentz (1.4). Poniamo $x_1=x_0, y_1=y_0$, otteniamo

$$\nu=\frac{\nu'}{\alpha}$$

Un osservatore che si muove rispetto ad $S$ con velocitï¿½ $v$, guardando perpendicolarmente alla sorgente di luce in $S$ che emette una frequenza $\nu$, misura una frequenza modificata

$$\nu' = \alpha\nu = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\nu$$

che ï¿½ piï¿½ piccola di $\nu$. Questo ï¿½ l'effetto Doppler trasversale.

## 2.4 Spazio-tempo di Minkowski

La teoria della relativitï¿½ ristretta, della quale abbiamo esposto qui gli aspetti peculiari e piï¿½ affascinanti, impone di rinunciare al carattere assoluto non solo dello spazio, ma soprattutto del tempo e della simultaneitï¿½. Si riconosce in questo modo il carattere quadridimensionale dello spazio-tempo. "Nï¿½ il punto nello spazio nï¿½ l'istante nel tempo in cui qualcosa accade hanno una realtï¿½ fisica, ma soltanto l'evento in se stesso. Non vi ï¿½ quindi nessuna relazione spaziale assoluta , ossia indipendente dallo spazio di riferimento, e neppure una relazione temporale assoluta tra due eventi, ma vi ï¿½ una relazione assoluta nello spazio e nel tempo, cioï¿½ indipendente dallo spazio di riferimento"[3]. Di conseguenza l'essenza della nuova cinematica si basa sulla inseparabilitï¿½ dello spazio e del tempo. Il matematico tedesco Hermann Minkowski espresse questo idea dicendo[4]: "D'ora in poi lo spazio di per se stesso o il tempo di per se stesso sono condannati a svanire in pure ombre, e solo una specie di unione tra i due concetti conserverï¿½ una realtï¿½ indipendente". Seguendo questa linea di pensiero, egli sviluppï¿½ la cinematica come geometria quadridimensionale. Sempre seguendo Born, abbiamo fatto uso del suo metodo di descrizione lungo tutta la nostra trattazione, omettendo gli assi $y, z$ solo per semplicitï¿½ e lavorando sul piano $x, t$. Se focalizziamo la nostra attenzione sulla geometria del piano $x, t$, ci rendiamo conto che non si tratta della geometria euclidea ordinaria. In quest'ultima tutte le linee rette passanti per l'origine sono equivalenti , le unitï¿½ di lunghezza su di esse sono le medesime, e la curva di calibrazione ï¿½ un cerchio. Ma nel piano $x, t$ le linee rette di tipo spazio(spacelike) e di tipo tempo(timelike) non sono equivalenti. C'ï¿½ una differente unitï¿½ di lunghezza su di essa, e la curva di

[3]Tratto dal libro di A. Einstein, *Il significato della relativitï¿½*, Torino, Einaudi, 1950

[4]Dal libro di M. Born, *Einstein's theory of relativity*, New York, Dover, 1962

calibrazione ï¿½ una iperbole

$$F = x^2 - c^2t^2 = \pm 1.$$

Nella geometria euclidea possiamo costruire una infinitï¿½ di sistemi di coordinate cartesiani con la stessa origine $O$, ciascuno dei quali puï¿½ essere trasformato nell'altro mediante rotazione. Analogamente nel piano $x, t$ ci sono una infinitï¿½ di sistemi equivalenti, per ciascuno dei quali si puï¿½ scegliere arbitrariamente uno degli assi entro una certa regione.
Nella geometria euclidea la distanza $s$ tra un punto $P$, di coordinate $x, y$ e l'origine costituisce rispetto alle rotazioni del sistema di coordinate un invariante, sul quale si puï¿½ basare l'intera geometria. Tale distanza in un dato sistema $x, y$ ï¿½ data da

$$s^2 = x^2 + y^2$$

In ogni altro sistema $x', y'$ essa sarï¿½ data da $s^2 = x'^2 + y^2$. La curva di calibrazione, il cerchio di raggio unitario, ï¿½ rappresentato da $s = 1$. Perciï¿½ $s$ (o $s^2$) puï¿½ essere visto come l'invariante fondamentale della geometria.
Invece nel piano $x, t$ l'invariante fondamentale ï¿½

$$F = x^2 - c^2t^2$$

e la curva di calibrazione

$$F = \pm 1$$

A questo punto Minkowski osservï¿½ che se poniamo $-c^2t^2 = u^2$, si ottiene

$$F = x^2 + u^2$$

e questo puï¿½ essere considerato come l'invariante fondamentale $s^2$ della geometria euclidea avente il sistema di coordinate ortogonali $x, u$.
Seguendo questo ragionamento, risultava che il numero $u$ era la radice quadrata di una quantitï¿½ negativa $-c^2t^2$; perciï¿½ $u$ non poteva essere un semplice numero reale. Bisognava muoversi nel campo complesso. Infatti, considerando che si assume $\sqrt{-1} = i$, si puï¿½ poi scrivere

$$u = ict.$$

La geometria non euclidea del piano $x, t$ risulta cosï¿½ formalmente identica a quella euclidea nel piano $x, u$ se i valori immaginari di $u$ sono fatti corrispondere ai tempi reali $t$. In questo modo possiamo applicare le leggi che conosciamo dalla geometria euclidea, e applicarle al mondo quadridimensionale. Minkowski sostituï¿½

$$x, y, z, ict$$

con

$$x, y, z, u$$

e poi operï¿½ con queste quattro coordinate in modo del tutto equivalente. Cosï¿½ l'invariante fondamentale divenne

$$F = s^2 = x^2 + y^2 + z^2 + u^2.$$

Nei risultati finali bisognava solo sostituire $u$ con $ict$, in tal modo solo questa equazioni avevano un significato fisico.
Nel piano $x, t$ $t$ e $x$ non sono interscambiabili. I segnali luminosi $X$ e $Y$ costituiscono barriere insuperabili tra linee di tipo spazio e linee di tempo tempo. Quindi la trasformazione di Minkowski $u = ict$ deve essere visto colo come un artificio matematico, che mette in luce le analogie tra coordinate spaziali e temporali, senza perï¿½ permettere loro di scambiarsi. In particolare

$$s = \sqrt{F} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + u^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2}$$

ï¿½ la distanza nello spazio-tempo quadridimensionale, ma bosogna ricordare che tale espressione ï¿½ usata in maniera simbolica.

# Conclusioni

In questo mio elaborato sono partita dalle nozioni di spazio e tempo cosï¿½ come erano accetati nella meccanica classica, in particolar riportando le parole dello stesso Newton, per poter meglio comprendere in che cosa si differenziano dall'idea di spazio e di tempo introdotti da Einstein. I concetti di spazio e tempo sono ora considerati come entitï¿½ non piï¿½ assolute, ma bensï¿½ relative, cioï¿½ i cui valori dipendono dal sistema di riferimento in cui vengono misurate; inoltre sono profondamente legati e considerati inseparabili nello spazio-tempo quadrimensionale introdotto da Minkowski, in cui non bastano piï¿½ le sole tre coordinate spaziali, ma ï¿½ necessario aggiungere una quarta coordinata, quella temporale. Probabilmente il merito di Einstein sta nel fatto di aver cambiato radicalmente la nostra concezione del mondo, e di aver fornito con la sua teoria della relativitï¿½ ristretta un'accurato mezzo per la descrizione della natura.

# Bibliografia


[1] M. Born, *Einstein's theory of relativity*, New York, Dover, (1962).

[2] D. C. Giancoli, *Fisica: principi e applicazioni*, ed. italiana a cura di P. Cavatorta e L. Cicala, Milano, Ambrosiana, (2000).

[3] A. Einstein, *Il significato della relativitï¿½*, Torino, Einaudi, (1950).

[4] A. Einstein, *Relativitï¿½: esposizione divulgativa*, Torino, Boringhieri, (1967).

# Ringraziamenti

In primo luogo vorrei ringraziare il professor Sandro Graffi per la grande disponiblitï¿½ e il contagioso entusiasmo con cui mi ha seguito durante la preparazione della tesi.
Ringrazio mia madre, penso di averla scoperta durante i miei studi universitari: ho potuto contemplare la sua tenacia e l'immensa forza di volontï¿½; ovviamente Miscel, il quale non ha mai mancato di appoggiarmi e credere nelle mie possibilitï¿½.
Vorrei rivolgere un grazie speciale a quelle che sono state le mie compagne in questo tortuoso viaggio nella matematica, con particolare riferimento a Maria Giulia, ï¿½ grazie alla sua determinazione se in quel settembre non molto lontano ho potuto sostenere Geometria quattro e tornare cosï¿½ sui giusti binari; Nirka, in compagnia della quale le trofie al pesto a pranzo erano d'obbligo; Alessandra, che ho conosciuto ultimamente, e che,con la sua ironia, ha spesso riacceso la speranza di poter arrivare alla meta. Ringrazio Francesca, per la sua disponibilitï¿½ e pazienza, e per i suoi appunti, chiaramente. Poi un grazie va alla mia amica Allegra, la quale mi ha sostenuto emotivamente, cercando di comprendermi senza gettare mai la spugna.
Inoltre vorrei ringraziare le mie professoresse Carla Para e Silvana Vesi, che con i loro insegnamenti mi hanno fatto scoprire la matematica.
Ultime ma non meno importanti, le mie coinquiline Claudia e Lucia, insieme alle quali ho scoperto il significato della parola amicizia; Viola e infine Carlotta, aperta e solare, mi ha fatto compagnia in giorni ansiosi.