

Scuola di Scienze

Dipartimento di Fisica e Astronomia

Corso di Laurea Magistrale in Astrofisica e Cosmologia

Costruzione di un Filtro ottimale per la ricerca di
ammassi di galassie
in survey fotometriche

Tesi di Laurea in Astrofisica e Cosmologia

Presentata da:
Francesco Donati

Relatore:
Chiar.mo Prof. Lauro Moscardini

Co-Relatori:
Dott. Fabio Bellagamba
Dott. Mauro Roncarelli

Sessione I

Anno accademico 2015-2016

Abstract

Gli ammassi di galassie sono le strutture più grandi che possiamo osservare nell'Universo. La loro formazione deriva direttamente dalla crescita delle perturbazioni primordiali di densità e dal loro conseguente collasso gravitazionale indotto appunto dalla gravità. Gli ammassi di galassie sono molto importanti in Astrofisica in quanto possono essere considerati come dei laboratori per lo studio di molti aspetti fisici legati al gas, all'ICM e all'evoluzione delle galassie. Lo studio degli ammassi di galassie è molto importante anche per la Cosmologia in quanto è possibile effettuare delle stime sui parametri cosmologici ed ottenere dei vincoli sulla geometria dell'Universo andando a valutare la loro massa e la loro distribuzione nell'Universo. Diventa quindi fondamentale l'utilizzo di algoritmi che ci permettano di utilizzare i dati ottenuti dalle osservazioni per cercare ed individuare gli ammassi di galassie in modo tale da definire meglio la loro distribuzione nell'Universo. Le più recenti survey di galassie ci forniscono molteplici informazioni a riguardo delle galassie, come ad esempio la loro magnitudine in varie bande osservative, il loro colore, la loro velocità ecc. In questo lavoro abbiamo voluto testare la performance di un algoritmo *Optimal Filtering* nella ricerca degli ammassi di galassie utilizzando prima solo l'informazione della magnitudine delle galassie e successivamente anche l'informazione sul loro colore. Quello che abbiamo voluto fare, quindi, è stato valutare se l'utilizzo combinato della magnitudine delle galassie e del loro colore permette all'algoritmo di individuare più facilmente, e in numero maggiore, gli ammassi di galassie.

Indice

Indice	ii
1 Cenni di Cosmologia	1
1.1 Parametri Cosmologici	1
1.2 Teoria di Jeans	5
1.3 Andamenti delle perturbazioni	9
1.4 Scale di dissipazione	13
1.4.1 Materia non barionica	13
1.4.2 Materia barionica	15
1.5 Spettro di Potenza	16
1.6 Regime Non Lineare	19
1.7 Parametri cosmologici oggi	24
2 Ammassi di Galassie	27
2.1 Proprietà Generali	28
2.1.1 Classificazione	30
2.1.2 Osservare gli Ammassi di Galassie	31
2.2 Relazioni di Scala	32
2.3 Funzione di Massa	37
2.4 Simulazioni Numeriche	41
2.5 Struttura di un catalogo simulato	44
2.6 Costruire un catalogo	46
2.6.1 Aloni di DM	47
2.6.2 Assegnare le galassie	48
2.6.3 Assegnare le velocità	49
2.6.4 Assegnare il colore	49
3 Algoritmi <i>Cluster-Finder</i>	53
3.1 Algoritmi Cluster-Finder	53
3.2 Algoritmo redMaPPer	56
3.3 Algoritmo Bayesian e redGOLD	57

3.4	Algoritmo Optimal Filtering	59
4	Funzioni Filtro e Noise	65
4.1	Catalogo usato	65
4.2	Creazione delle funzioni Filtro e Noise	67
4.2.1	Funzione Noise	69
4.2.2	Filtro	72
4.3	Aggiunta del colore	77
5	Risultati ottenuti	85
5.1	Matching	85
5.2	Purezza e Completezza	93
5.2.1	Grafici Purezza-Completezza in banda Z	96
5.2.2	Grafici Purezza-Completezza in banda Z, R-Z	100
5.3	Problema di rumorosità nella funzione Filtro	106
5.4	Conclusioni	116
	Bibliografia	119

Capitolo 1

Cenni di Cosmologia

Le strutture cosmiche che possiamo osservare nell'Universo si sono formate in seguito al collasso gravitazionale. La materia di cui queste strutture sono formate, a causa della gravità, ha iniziato a collassare, amplificando le sovra-densità presenti. Dopo diverso tempo ed a seguito di molti fenomeni fisici, si sono ottenute le strutture che oggi possiamo osservare.

Prima di analizzare nel dettaglio la fase di crescita delle perturbazioni di densità primordiali che hanno dato il via al collasso gravitazionale, è bene introdurre alcuni concetti generici riguardanti l'Universo. Le equazioni che andremo ad introdurre e le quantità in esse presenti saranno fondamentali per comprendere al meglio la storia della formazione delle strutture cosmiche.

1.1 Parametri Cosmologici

Una caratteristica molto importante dell'Universo, dalla quale dipende la sua evoluzione e quella delle perturbazioni di densità, è la sua geometria. Nella *Relatività Generale* la geometria dell'Universo dipende dalla densità di energia al suo interno. Assumendo il *Principio Cosmologico*, ovvero che su scale sufficientemente grandi l'Universo possa essere considerato omogeneo ed isotropo, possiamo introdurre una metrica spazio-temporale generale, la cosiddetta metrica di *Friedmann-Robinson-Walker*, definita come segue:

$$ds^2 = (cdt)^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2) \right], \quad (1.1)$$

dove la quantità c rappresenta la velocità della luce, $a(t)$ rappresenta il cosiddetto *Fattore di Scala*, mentre r , θ e ϕ sono le coordinate comoventi polari. Il parametro k è il cosiddetto *Parametro di Curvatura*, il quale può assumere tre diversi valori: per $k = 0$

abbiamo che la geometria dello spazio è Euclidea e l'Universo viene considerato piatto; per $k = +1$ la geometria è quella sferica e l'Universo viene considerato chiuso; infine per $k = -1$ si ha una geometria iperbolica ed un Universo aperto.

Conoscere la geometria dell'Universo è estremamente importante sia per comprendere e parametrizzare la sua evoluzione ed il suo futuro, sia per comprendere la distribuzione delle strutture presenti al suo interno.

Lo sviluppo di ogni modello cosmologico teorico è basato sulla Relatività Generale di Einstein, nella fattispecie sulle equazioni di Einstein. Queste equazioni mettono in relazione la metrica dello spazio-tempo, g_{ij} , ed il tensore energia-impulso, T_{ij} , generando un sistema di sedici equazioni, rappresentabili come segue:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{ij}, \quad (1.2)$$

dove $i, j = 0, 1, 2, 3$ (0 rappresenta la coordinata propriamente temporale, mentre le altre si riferiscono alle coordinate propriamente spaziali), R_{ij} rappresenta il tensore di Ricci e R lo scalare di Ricci. Andando a considerare le assunzioni fatte per la metrica *FRW* (equazione 1.1) e assumendo che tale metrica sia valida, è possibile ridurre il sistema descritto nell'equazione precedente a due sole equazioni, le cosiddette equazioni di Friedmann. La prima di queste relazioni rappresenta la componente tempo-tempo:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right)a, \quad (1.3)$$

dove ρ rappresenta la densità e P la pressione, mentre la seconda equazione rappresenta la componente spazio-spazio:

$$\dot{a}^2 + kc^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho a^2. \quad (1.4)$$

Risulta facilmente dimostrabile che le equazioni appena introdotte non sono indipendenti tra di loro. La seconda equazione può, infatti, essere ricavata partendo dalla prima ed assumendo una espansione adiabatica dell'Universo, ovvero considerando la seguente equazione:

$$d(\rho a^3) = -3\frac{P}{c^2}a^2 da. \quad (1.5)$$

Le soluzioni delle equazioni appena introdotte rappresentano i *Modelli di Friedmann* i quali descrivono le proprietà di materia-energia dell'Universo come un fluido, caratterizzato dalla seguente equazione di stato:

$$P = w\rho c^2, \quad (1.6)$$

dove w è chiamato *Parametro di Stato*: esso nella fisica ordinaria può assumere solamente i valori all'interno dell'intervallo di Zel'dovich, $0 \leq w < 1$. Il caso $w = 0$ rappresenta il caso di un Universo di sola materia, mentre il caso $w = 1/3$ corrisponde ad un Universo composto solamente dalla radiazione.

Andiamo adesso ad introdurre i parametri cosmologici fondamentali per la determinazione della geometria dell'Universo. Nei capitoli seguenti mostreremo come sia possibile ottenere delle stime di questi parametri attraverso lo studio delle strutture che possiamo osservare, oggi, nell'Universo. La prima quantità fondamentale che introduciamo è la densità critica dell'Universo, definita in questo modo:

$$\rho_{crit}(t) \equiv \frac{3H(t)^2}{8\pi G}, \quad (1.7)$$

la quale, come possiamo vedere, è una funzione del tempo. In questa equazione è presente un altro parametro cosmologico molto importante, ovvero la *parametro di Hubble*. Tale quantità viene definita con l'inverso del rapporto tra il fattore di scala e la sua derivata temporale, $H \equiv \dot{a}/a$. Utilizzando questa equazione è possibile definire il primo parametro cosmologico, chiamato *Parametro di densità*, definito come segue:

$$\Omega_0 \equiv \frac{\rho_0}{\rho_{0,crit}} = \frac{8\pi G \rho_0}{3H_0^2}, \quad (1.8)$$

dove le quantità con il pedice 0 fanno riferimento ad oggi. Il valore che assumerà il parametro di densità nel corso del tempo sarà diverso a seconda della componente considerata. Utilizzando l'equazione (1.6) è facile vedere come l'utilizzo di una componente o dell'altra porti a forme diverse dell'equazione. Sostituendo l'equazione (1.6) nell'equazione (1.5) è possibile ottenere la seguente relazione

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3(1+w)}, \quad (1.9)$$

la quale mostra l'evoluzione della densità, in funzione del fattore di scala, in un Universo composto da una sola componente avente come parametro di stato w .

Il parametro di densità, ottenuto nell'equazione (1.8), è molto utile anche per discriminare un tipo di geometria dell'Universo rispetto alle altre. Infatti se $\Omega_0 > 1$ avremo $k = +1$ e quindi una geometria sferica; se $\Omega_0 = 1$ avremo $k = 0$ e quindi una geometria piatta (Euclidea); infine se avremo $\Omega_0 < 1$ si avrà $k = -1$ e quindi una geometria iperbolica.

Andando a valutare l'evoluzione del parametro di densità, utilizzando numerose prove osservative, delle quali però parleremo più nel dettaglio nei paragrafi successivi, è possibile affermare che $\Omega_0 = 1$. Possiamo quindi assumere che l'Universo sia piatto e che sia possibile descriverlo attraverso una geometria Euclidea. Prendendo quindi

$\Omega_0 = 1$ possiamo andare a valutare l'evoluzione dei parametri cosmologici, precedentemente introdotti, nel caso di modelli cosmologici dominati da una sola componente. Si ottiene quindi l'evoluzione del fattore di scala con il tempo:

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3(1+w)}}, \quad (1.10)$$

dove ovviamente si ha la dipendenza dal tempo e del parametro di stato, il quale, come già anticipato, assume valori diversi a seconda della componente che stiamo considerando.

Introduciamo adesso l'equazione che descrive l'evoluzione del parametro di Hubble:

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} = H_0(1+z)^{3(1+w)/2}, \quad (1.11)$$

dove, in questo caso, abbiamo espresso la dipendenza dal tempo considerando il redshift z . Anche in questo caso si ha la dipendenza dal parametro di stato. Il redshift è una quantità fondamentale non solo in Cosmologia, ma in tutta l'Astrofisica ed è definito come segue:

$$z \equiv \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e}, \quad (1.12)$$

dove λ_e è la lunghezza d'onda della radiazione emessa dalla sorgente che stiamo osservando, mentre λ_o è la lunghezza d'onda che osserviamo.

Nel momento in cui andiamo a considerare un Universo in espansione, avente come unica componente la materia ($w = 0$), otteniamo il cosiddetto modello cosmologico di *Einstein-De Sitter* (*EdS*). Questo modello descrive molto bene il comportamento dell'Universo durante il periodo in cui domina la materia. Le equazioni (1.10) e (1.11), precedentemente introdotte, sono valide per il modello EdS, dove viene posto $w = 0$ e valgono anche per l'era della radiazione, dove viene posto $w = 1/3$.

Fino ad ora abbiamo ottenuto equazioni valide per un Universo composto da una sola componente. Le soluzioni che descrivono un Universo, la cui evoluzione è influenzata da più di una componenti, non sono ottenibili analiticamente. Prendendo in considerazione sia la materia ($w = 0$) sia la radiazione ($w = 1/3$) e considerando anche la componente della costante cosmologica Λ ($w = -1$), l'equazione (1.10) assume una forma generale espressa in questo modo:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0} \right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_{m,0} \left(\frac{a_0}{a} \right) + \Omega_{r,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 + \Omega_{\Lambda,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^{-2} + (1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{r,0} - \Omega_{\Lambda,0}) \right], \quad (1.13)$$

dove $\Omega_{m,0}$, $\Omega_{r,0}$ e $\Omega_{\Lambda,0}$ sono rispettivamente il parametro di densità relativo alla materia, alla radiazione e alla costante cosmologica, tutti calcolati al tempo di oggi. Come già anticipato in precedenza, la soluzione di questa equazione non può essere calcolata analiticamente; possiamo però considerare trascurabile la componente della radiazione rispetto alle altre due e ottenere una forma dell'equazione (1.13) che è possibile risolvere attraverso metodi numerici.

1.2 Teoria di Jeans

Per valutare l'evoluzione delle perturbazioni di densità le quali, amplificandosi, hanno portato al collasso gravitazionale ed alla conseguente formazione delle strutture, è bene introdurre la teoria di Jeans. Questa trattazione permette, appunto, di spiegare come crescano le piccole perturbazioni di densità in un fluido uniforme. Il sistema di equazioni da cui partiremo è composto dall'equazione di conservazione della massa, dall'equazione di Eulero e dall'equazione di Poisson:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{\vec{\nabla} P}{\rho} - \vec{\nabla} \Phi \\ \nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \end{cases} \quad (1.14)$$

dove ρ , \vec{u} e P sono rispettivamente la densità, la velocità e la pressione dell'elemento del fluido che stiamo considerando, mentre Φ rappresenta il potenziale gravitazionale. Oltre al sistema appena enunciato dobbiamo anche considerare l'equazione della conservazione dell'entropia poiché in questa trattazione trascureremo gli effetti della conduzione termica e della viscosità. L'equazione da aggiungere al sistema è:

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} S = 0, \quad (1.15)$$

dove l'entropia è rappresentata da S . Questa equazione rappresenta l'assunzione di una espansione adiabatica dell'Universo, come già anticipato con l'equazione (1.5). Tale assunzione ci permette di utilizzare un'equazione di stato per il fluido dipendente solamente dalla sua pressione e dalla sua densità e quindi porre $S = \text{cost}$.

Questo sistema di equazioni ammette una soluzione stazionaria. Dal punto di vista cosmologico però questa soluzione non è ammessa, quindi andremo a valutare le soluzioni

corrispondenti all'espansione o contrazione di una distribuzione di materia omogenea ed isotropa. Il sistema quindi assumerà questa forma:

$$\begin{cases} \rho(t) = \left(\frac{a_0}{a(t)}\right)^3 \rho(t_0) \\ \vec{u} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \vec{r} \\ \Phi = \frac{2\pi G \rho r^2}{3} \\ P = P(\rho) \\ S = cost, \end{cases} \quad (1.16)$$

dove tutte le quantità sono espresse in coordinate fisiche e la cosmologia è presente grazie alla presenza del fattore di scala e della sua derivata temporale.

La teoria di Jeans prevede a questo punto l'introduzione di piccole perturbazioni le quali, appunto, perturbano le condizioni iniziali del sistema che stiamo considerando. Trascurando le perturbazioni ad ordini superiore al primo (da cui il nome di teoria lineare) ed inserendo le quantità perturbate nel sistema otteniamo:

$$\begin{cases} \dot{\delta} + 3\frac{\dot{a}}{a}\delta + \frac{\dot{a}}{a}(\vec{r} \cdot \vec{\nabla})\delta + (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = 0 \\ \dot{\vec{v}} + \frac{\dot{a}}{a}\vec{v} + \frac{\dot{a}}{a}(\vec{r} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\nabla dP}{\rho} - \nabla\Phi \\ \nabla^2\Phi - 4\pi G\rho_0\delta = 0 \\ dS = 0, \end{cases} \quad (1.17)$$

dove δ rappresenta il contrasto di densità della perturbazione che stiamo analizzando, $\delta \equiv \delta\rho/\rho = (\rho - \bar{\rho})/\bar{\rho}$. Per andare ad analizzare la soluzione più interessante dal punto di vista cosmologico, dobbiamo introdurre un'altra quantità. Definiamo $k \equiv 2\pi/\lambda = k_0(a_0/a)$ il vettore d'onda corrispondente alla lunghezza d'onda λ che varia con il tempo seguendo l'espansione di Hubble. L'introduzione di questa quantità ci permette di trattare la crescita delle perturbazioni di densità come il propagarsi di onde piane. L'equazione

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (1.18)$$

descrive la propagazione di una perturbazione generica, descritta da una funzione scalare arbitraria $f = f(x, t)$, che si propaga con velocità v lungo la direzione x . Assumendo che l'onda si propaghi nella direzione positiva delle ascisse, e che la fase ad un tem-

po fissato t sia costante in ogni piano perpendicolare alla direzione di propagazione, si ottiene l'espressione dell'onda piana monocromatica, una funzione armonica del tempo:

$$f(x, t) = f_{max} e^{i(kx - \omega t)}, \quad (1.19)$$

dove i è l'unità immaginaria, k il vettore d'onda, ω la frequenza angolare e f_{max} l'ampiezza.

Dal punto di vista cosmologico, è interessante andare ad analizzare la soluzione adiabatica ($dS = 0$) che descrive la materia che cade all'interno della buca di potenziale generata dalla perturbazione di densità, escludendo la vorticità ($\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$). Il sistema (1.17) si semplifica notevolmente ed assume la seguente forma:

$$\begin{cases} \dot{\delta} + 3\frac{\dot{a}}{a}\delta + ikv = 0 \\ \dot{v} + \frac{\dot{a}}{a}v + ik\left(v_s^2 - \frac{4\pi G\rho_0}{k^2}\right)\delta = 0, \end{cases} \quad (1.20)$$

dove i è l'unità immaginaria ottenuta dal considerare le perturbazioni come onde, mentre $v_s^2 \equiv (\partial P/\partial\rho)_S$ è la velocità del suono. Combinando le due equazioni del sistema appena ottenuto è possibile ricavare una relazione fondamentale, la cosiddetta *relazione di dispersione*, espressa nella forma seguente:

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} + (v_s^2 k^2 - 4\pi G\rho_0)\delta = 0. \quad (1.21)$$

Questa relazione è molto importante perché descrive l'evoluzione, in funzione del tempo, del contrasto di densità della perturbazione in esame. Definendo infatti la *lunghezza d'onda di Jeans*,

$$\lambda_J \equiv \frac{2\pi}{k_J} \equiv v_s \left(\frac{\pi}{G\rho_0} \right)^{1/2}, \quad (1.22)$$

è possibile verificare che per perturbazioni con $\lambda < \lambda_J$ domina il termine legato alla pressione nell'equazione (1.21) ed avremo, quindi, soluzioni oscillanti. Nel caso in cui avremo $\lambda > \lambda_J$ dominerà il termine gravitazionale e si avranno soluzioni che porteranno all'instabilità gravitazionale.

Prendendo nuovamente in esame il caso del modello EdS, il quale rappresenta meglio la prima fase in cui avviene la crescita delle perturbazioni, le due soluzioni dell'equazione (1.21) possono essere descritte in questo modo:

$$\delta_-(t) \propto t^{-1} \quad \delta_+(t) \propto t^{2/3}, \quad (1.23)$$

le quali rappresentano, rispettivamente, il modo decrescente e quello crescente del contrasto di densità in funzione del tempo. Il modo decrescente, come facile notare, sparisce con il passare del tempo e, quindi, non è interessante dal nostro punto di vista. Noi vogliamo andare ad analizzare le perturbazioni di densità che con il tempo crescono fino a quando non avrà inizio il collasso gravitazionale. Dal punto di vista cosmologico, quindi, è di maggiore interesse il modo crescente.

Per questa trattazione è conveniente introdurre un'altra quantità, direttamente collegata con l'equazione (1.22), ovvero la *massa di Jeans*:

$$M_J := \frac{4\pi\rho\lambda_J^3}{3}. \quad (1.24)$$

Questa quantità assume lo stesso significato della lunghezza d'onda di Jeans, solamente la rappresenta in termini della massa di una struttura. Per $M < M_J$ non avremo il collasso gravitazionale della struttura in esame, viceversa, per $M > M_J$ lo si avrà.

Nel paragrafo successivo analizzeremo più nel dettaglio la fase della crescita delle perturbazioni, considerando separatamente le perturbazioni della radiazione (δ_{rad}), della materia barionica (δ_b) e di quella oscura (δ_{DM}). Per fare questo è necessario introdurre il *Raggio dell'Orizzonte Cosmologico*,

$$R_H = a(t) \int_0^t \frac{cdt'}{a(t')}. \quad (1.25)$$

Questa quantità è molto importante per l'analisi dell'evoluzione delle perturbazioni, poiché al di fuori di questa scala non si ha connessione causale e quindi l'unica forza in gioco che dobbiamo considerare è la gravità. Al di sotto del raggio dell'orizzonte, invece, è necessario andare a considerare anche tutte le altre interazioni fondamentali che competono con la gravità. Questo comporterà, quindi, un comportamento diverso delle perturbazioni a seconda della componente che stiamo considerando. Un'altra scala da considerare in questo tipo di trattazione è la scala di dissipazione λ_d . Al di sotto di questa scala le perturbazioni subiscono l'effetto della dissipazione dovuta alla propagazione delle onde che le trasportano. Come vedremo nel paragrafo 1.4, la materia barionica e la materia oscura hanno, ovviamente, due scale di dissipazione diverse. Oltre alle scale descritte sopra, si dovrà tenere conto anche di due tempi caratteristici dell'Universo: il tempo dell'equivalenza, t_{eq} , ed il tempo del disaccoppiamento, t_{dec} . Di questi tempi caratteristici parleremo più dettagliatamente nel paragrafo successivo.

Analizzando i vari casi in cui ci possiamo trovare, se dentro l'orizzonte oppure no, se prima dell'equivalenza o dopo, è possibile ricavare, quindi, gli andamenti delle perturbazioni delle varie componenti in gioco. La componente dominante in quel momento

sarà quella che guiderà, oppure no, il collasso gravitazionale.

1.3 Andamenti delle perturbazioni

Come già anticipato nel paragrafo precedente, gli andamenti delle perturbazioni delle varie componenti in gioco saranno diversi. In ogni fase che andremo ad analizzare ci sarà sempre una componente che dominerà sulle altre, influenzando l'evoluzione delle loro perturbazioni. Al fine di determinare la componente dominante in una precisa fase evolutiva dell'Universo utilizzeremo l'equazione (1.9). Tale relazione è possibile riscriverla in funzione del redshift e non più del fattore di scala, utilizzando la relazione che lega queste due quantità, $a_0/a = (1 + z)$. Possiamo quindi ricavarci gli andamenti in funzione di z per la componente della materia inserendo $w = 0$, e per la componente della radiazione, $w = 1/3$. Uguagliando i risultati ottenuti è possibile ricavarci il redshift dell'equivalenza, ovvero il momento in cui le due componenti avevano la stessa densità:

$$\rho_{m,0}(1 + z_{eq})^3 = \rho_{r,0}(1 + z_{eq})^4. \quad (1.26)$$

Il risultato di questa uguaglianza è $z_{eq} \approx 10^4$ il quale significa che prima di z_{eq} la componente dominante era quella della radiazione, dopo z_{eq} la componente dominante sarà quella della materia.

L'altro momento molto importante che dobbiamo considerare è il tempo (redshift) del disaccoppiamento tra materia barionica e radiazione. Partendo dalla condizione di espansione adiabatica espressa nell'equazione (1.5) è possibile ottenere, utilizzando la termodinamica classica del gas, gli andamenti della temperatura della materia barionica e della radiazione in funzione del redshift. Per quanto riguarda la materia barionica si ottiene che

$$T_m = T_{m,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 = T_{m,0} (1 + z)^2, \quad (1.27)$$

mentre, per quanto riguarda la radiazione, l'andamento della sua temperatura è dato da

$$T_{rad} = T_{rad,0} \frac{a_0}{a} = T_{rad,0} (1 + z). \quad (1.28)$$

Per ottenere il redshift relativo al disaccoppiamento tra la materia e la radiazione è necessario andare a valutare il momento in cui gli scatter tra i fotoni ed i barioni

non sono più sufficienti a mantenere in equilibrio le due componenti. Le quantità che dovremo confrontare tra loro sono il tempo di espansione dell'Universo, espresso dalla seguente equazione:

$$t = \frac{1}{H}, \quad (1.29)$$

dove la quantità H rappresenta la costante di Hubble, ed il tempo tra uno scatter e quello successivo, espresso dalla seguente equazione:

$$\tau = \frac{1}{n_e \sigma_T c}, \quad (1.30)$$

dove n_e rappresenta la densità di elettroni, σ_T è la sezione d'urto Thomson e c è la velocità della luce. Otteniamo dal confronto di queste due quantità appena introdotte $z_{dec} \approx 10^3$, dopo tale momento la materia barionica non è più accoppiata con la radiazione. Una volta superato z_{dec} la radiazione e la materia barionica seguiranno due andamenti indipendenti l'uno dall'altra permettendo alle perturbazioni della materia barionica di poter raggiungere l'instabilità gravitazionale ed il conseguente collasso gravitazionale.

Per ricavare gli andamenti delle perturbazioni delle varie componenti utilizzeremo la seguente equazione, valida solamente nel caso in cui ci troviamo fuori dall'orizzonte:

$$\delta(t) = \frac{3c^2}{8\pi G a^2 \rho} \propto a^{-2} \rho^{-1}, \quad (1.31)$$

la quale è derivata risolvendo le equazioni di Friedmann, (1.3) e (1.4), considerando un Universo EdS.

Partiamo con l'analizzare cosa accade per $t < t_{eq}$: fuori dall'orizzonte l'unica forza che agisce sulle componenti in gioco è la gravità. In questo momento però la componente dominante è quella della radiazione quindi tutte le perturbazioni crescono secondo l'andamento dettato dalle perturbazioni della radiazione, $\delta_{rad} \propto \delta_b \propto \delta_{DM} \propto a^2$.

Rimanendo sempre nel periodo antecedente all'equivalenza, possiamo trovare delle scale che in un certo momento, t_{hor} , entrano dentro la scala dell'orizzonte. Subito dopo il Big Bang l'Universo ha iniziato ad espandersi così come la scala dell'orizzonte. Le scale più piccole sono entrate molto presto nell'orizzonte, quelle rimaste fuori invece hanno avuto la possibilità di crescere. Man mano che la scala dell'orizzonte cresce, scale sempre più grandi iniziano ad entrare. Dentro l'orizzonte avremo, quindi, scale con ampiezze diverse e la loro ampiezza dipenderà da quanto tempo hanno passato fuori dall'orizzonte. Le perturbazioni di materia oscura e quelle della radiazione, prima dell'equivalenza e dentro l'orizzonte, hanno una evoluzione diversa: le perturbazioni della radiazione si propagano come onde senza raggiungere l'instabilità gravitazionale,

inoltre a causa della loro alta velocità di propagazione, c , tendono a cancellarsi. Le perturbazioni di materia oscura, invece, che sono entrate dentro l'orizzonte subiscono un effetto di *stagnazione*, rimangono in un certo senso congelate a causa della pressione di radiazione che non permette alle perturbazioni di materia oscura di crescere o, se lo fanno, di crescere al più di fattore molto piccolo,

$$\frac{\delta(t_{eq})}{\delta(t_{hor})} < \frac{5}{2}. \quad (1.32)$$

Questo fenomeno è il cosiddetto *Effetto Meszaros* e si verifica per le perturbazioni di materia oscura che sono entrate dentro l'orizzonte prima dell'equivalenza. Per $t > t_{eq}$ questo effetto non si verifica più. Riassumendo, prima dell'equivalenza e fuori dall'orizzonte, tutte le perturbazioni crescono seguendo l'andamento della componente dominante, cioè la radiazione. Prima dell'equivalenza ma dentro l'orizzonte, le perturbazioni della radiazione non crescono e si propagano come onde, mentre quelle di materia oscura, che sono riuscite ad entrare dentro l'orizzonte, rimangono congelate o al più crescono di un fattore molto piccolo, mentre le perturbazioni dei barioni sono accoppiate alla radiazione e quindi seguono il suo stesso andamento.

Analizziamo adesso il caso $t_{eq} < t < t_{dec}$: ricordando che l'equivalenza rappresenta il momento dopo il quale la componente dominante non è più quella della radiazione ma quella materia, si avrà che fuori dall'orizzonte tutte le perturbazioni continuano a crescere, indipendentemente dalle scale. Essendo però la componente della materia a dominare, l'andamento delle perturbazioni sarà quello dettato dalle perturbazioni della materia oscura, $\delta_{DM} \propto \delta_{rad} \propto \delta_b \propto a$. Ricordiamo che dentro l'orizzonte fino a t_{dec} la componente della materia barionica è ancora accoppiata alla radiazione e quindi l'andamento delle sue perturbazioni seguirà quello della radiazione. Le perturbazioni della radiazione si propagano come onde quindi non crescono; in questa fase le perturbazioni della materia barionica non possono crescere e raggiungere l'instabilità gravitazionale perché la loro crescita è, appunto, bloccata dalla radiazione. Le perturbazioni della materia oscura che erano già entrate nell'orizzonte e che hanno subito l'effetto Meszaros, possono nuovamente iniziare a crescere. Dentro l'orizzonte e dopo l'equivalenza, quindi, avremo perturbazioni di materia oscura con ampiezza diversa, a seconda del loro tempo di ingresso nell'orizzonte, che nuovamente inizieranno a crescere.

In questa fase la scala di Jeans è più piccola della scala dell'orizzonte. Diventa quindi importante andare a definire le cosiddette *scale di dissipazione*, delle quali parleremo più nel dettaglio nel paragrafo successivo. Le perturbazioni con scale inferiori alla scala di Jeans, in questa fase, si propagano come onde. Le perturbazioni che, in un preciso momento finiscono sotto la scala di dissipazione finiscono appunto per cancellarsi. Le scale di dissipazione, quindi, pongono un limite inferiore alla scala che una perturbazione deve avere per evitare di cancellarsi.

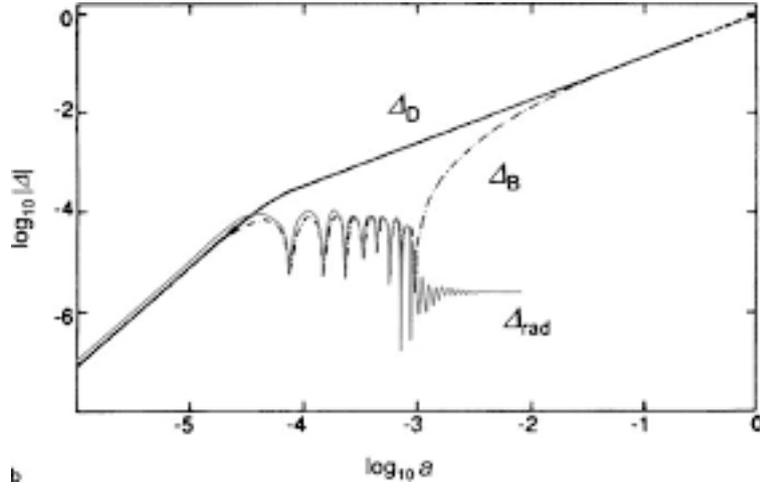


Figura 1.1: Nella figura sono mostrati gli andamenti per le varie componenti, dove Δ_D rappresenta la componente della DM, Δ_B della materia barionica e Δ_{rad} quella della radiazione. Si può notare come, dopo il disaccoppiamento, le perturbazioni della materia barionica subiscano una crescita accelerata. Immagine presa da: www.arcetri.astro.it/marconi/Lezioni/Cosmo14/14_futtuazioniDM.pdf

Andiamo adesso ad analizzare l'ultima fase, quella subito successiva a t_{dec} : come già anticipato in precedenza, nel momento in cui avviene il disaccoppiamento, la materia barionica e la radiazione avranno due storie evolutive indipendenti l'una dall'altra. La componente dominante in questa fase è, ovviamente, sempre la materia: fuori dall'orizzonte tutte le perturbazioni crescono seguendo l'andamento della materia oscura, poiché fuori dall'orizzonte l'unica forza in gioco è la gravità. Tutte le componenti seguiranno quindi $\delta_{DM} \propto \delta_{rad} \propto \delta_b \propto a$. Dentro l'orizzonte, le perturbazioni di materia oscura continuano a crescere con lo stesso andamento del caso precedente; anche le perturbazioni di radiazione avranno lo stesso comportamento del caso precedente, infatti continueranno a propagarsi come onde, oscillando. Molto diverso invece è il comportamento della componente della materia barionica rispetto al caso precedentemente descritto: non essendo più accoppiate alla radiazione, le perturbazioni della materia barionica possono iniziare a crescere. Subito dopo il disaccoppiamento le perturbazioni della materia barionica non si trovano più in un ambiente omogeneo. Le perturbazioni della materia oscura, infatti, hanno avuto la possibilità di crescere anche dopo l'equivalenza. Quando le perturbazioni di materia barionica iniziano a crescere trovano già delle buche di potenziale, generate appunto dalla materia oscura, le quali facilitano la crescita delle perturbazioni della materia barionica. L'andamento della componente barionica risulta infatti, in questa fase, accelerato rispetto a quella della materia oscura,

$$\delta_b \propto \delta_{DM} \left(\frac{1 - a_{dec}}{a} \right). \quad (1.33)$$

Come è possibile vedere nella Figura 1.1, le perturbazioni della materia barionica crescono in maniera accelerata rispetto alle perturbazioni della materia oscura. Questo fenomeno viene chiamato *Baryon Catch-Up*. Grazie alla presenza della materia oscura, quindi, le perturbazioni della materia barionica, seppur iniziando a crescere in ritardo, sono riuscite ad amplificarsi a sufficienza riuscendo a raggiungere un'ampiezza tale da permettere la formazione delle strutture presenti nell'Universo.

1.4 Scale di dissipazione

Come anticipato in precedenza nel paragrafo 1.3, quando si utilizza la teoria di Jeans per analizzare la crescita delle perturbazioni nelle prime fasi di vita dell'Universo è necessario andare a considerare anche le scale di dissipazione. Andremo quindi ad analizzare un po' più nel dettaglio i vari casi su cui precedentemente abbiamo sorvolato, ovvero cosa accade quando si va a considerare scale inferiori alla scala di Jeans, $\lambda < \lambda_J$. Dobbiamo però differenziare i casi che riguardano la materia barionica e quella non barionica: avendo queste proprietà diverse, hanno anche scale dissipative diverse, le quali, di conseguenza, portano a risultati diversi. Il semplice fatto che la materia barionica rimanga accoppiata alla radiazione più a lungo rispetto alla materia oscura, a causa della sua più elevata sezione d'urto, ci conferma che debbano essere trattate distintamente.

1.4.1 Materia non barionica

La materia oscura si disaccoppia prima dalla radiazione rispetto alla materia barionica. Il disaccoppiamento avviene durante l'*Era Radiativa* ma oltre a considerare il momento del disaccoppiamento, dovremo valutare il momento in cui le particelle che compongono la DM perdono le loro proprietà relativistiche.

L'evoluzione delle perturbazioni e la conseguente formazione dei primi aloni di DM cambiano a seconda che si consideri una materia oscura composta da particelle di piccola massa, **HDM** (Hot Dark Matter), o che si utilizzino particelle di grande massa, **CDM** (Cold Dark Matter). La classificazione viene fatta valutando il momento in cui le particelle perdono le loro proprietà relativistiche ed il momento in cui si disaccoppiano dalla radiazione: se avviene prima il disaccoppiamento rispetto alla derelativizzazione si avranno particelle di HDM, viceversa, si otterranno particelle di CDM.

La sostanziale differenza tra i due tipi di particelle è la loro velocità e quindi otterremo due diversi valori per la massa di Jeans, descritta nell'equazione (1.24). Essendo la massa di Jeans il valore limite che deve essere superato per avere il collasso gravitazionale, è chiaro che avere un tipo di DM o l'altro comporta delle differenze sulla massa

delle prime strutture che si formano e, quindi, sul processo di formazione delle strutture su grande scala nell'Universo.

Per quanto riguarda la HDM si ottiene, calcolando il valore della massa al redshift dell'equivalenza

$$M_J(z_{eq}) \approx 10^{16} M_\odot, \quad (1.34)$$

mentre per la CDM, sempre calcolandolo a z_{eq} ,

$$M_J(z_{eq}) \approx 10^{5-6} M_\odot. \quad (1.35)$$

Questa differenza nelle relative masse di Jeans comporta un diverso scenario di formazione delle strutture.

Quando parliamo di materia oscura, viste le sue caratteristiche ed il fatto che è composta da particelle non collisionali, non è propriamente corretto parlare di dissipazione. Parleremo infatti di *free streaming*, in quanto la DM, disaccoppiandosi prima dalla radiazione rispetto alla materia barionica, si propaga liberamente rispondendo solamente al campo gravitazionale medio dell'Universo. La propagazione delle onde tende, quindi, a livellare le eventuali sovra-densità (sotto-densità), cercando di riportare il tutto ad un valore di densità medio.

La scala di free streaming sarà quindi la scala che percorre un'onda che si propaga con velocità v ,

$$\lambda_{FS}(t) = a(t) \int_0^t \frac{v dt'}{a(t')}, \quad (1.36)$$

nella quale l'espansione dell'Universo è tenuta in considerazione utilizzando il fattore di scala. Il valore della scala di free streaming, dipendendo dal tempo, cambierà a seconda che stiamo considerando la fase precedente all'equivalenza, precedente al disaccoppiamento o successivo ad esso.

Tutte le perturbazioni su scale che in un determinato momento saranno più piccole della scala di free streaming, $\lambda < \lambda_{FS}$, verranno cancellate a causa della propagazione libera di queste onde. Solamente le scale maggiori di λ_{FS} possono continuare ad esistere per poi crescere e formare strutture. I valori ottenuti nelle equazioni (1.34) e (1.35) sono il valore massimo che la scala di free streaming può avere, poiché è il fenomeno di oscillazione che determina la propagazione sotto forma di onda e quindi la cancellazione delle perturbazioni, si ha $\lambda_{FS}(z_{eq}) \approx \lambda_J(z_{eq})$. Il valore numerico corrispondente è, ovviamente, molto diverso nel caso in cui si consideri la CDM o la HDM.

La M_{FS} rappresenta, quindi, la massima scala raggiunta dalle onde nella loro propagazione e quest'ultima non decresce ma, dopo l'equivalenza, rimane costante.

1.4.2 Materia barionica

In questo paragrafo analizzeremo la scala di dissipazione relativa alla materia barionica. I passaggi da seguire sono gli stessi di quelli della materia oscura, ma per analizzare questo caso avremo bisogno di tenere conto che la fisica in gioco è molto diversa.

La propagazione delle perturbazioni, sotto forma di onde, sarà soggetta a tutti i fenomeni di dissipazione dovuti alla continua interazione tra barioni e fotoni. A causa della sezione d'urto dei barioni, la sezione d'urto Thomson, si verificano continui urti con i fotoni che tendono a dissipare le perturbazioni. Tutto questo avviene fino al momento del disaccoppiamento; da questo momento in poi la materia barionica e la radiazione non sono più accoppiate e quindi le perturbazioni rimaste possono iniziare a crescere, come abbiamo discusso in precedenza.

Mentre barioni e fotoni sono accoppiati, un fotone prima di essere assorbito da un barione può percorrere una distanza

$$l(t) = c\tau_{coll} = \frac{1}{n_e\sigma_T} \propto \rho_B^{-1} \propto a^3, \quad (1.37)$$

dove σ_T è appunto la sezione d'urto Thomson e $\tau_{coll} = \frac{1}{n_e\sigma_T c}$. Tutte le scale più piccole di $l(t)$ vengono immediatamente cancellate. Soprattutto ad alto redshift, il valore che assume $l(t)$ nell'equazione (1.37) è molto piccolo, infatti il plasma cosmologico prima del disaccoppiamento viene considerato un plasma perfetto, otticamente spesso. Questo è il motivo per cui possiamo osservare lo spettro della CMB solamente dopo il disaccoppiamento, poiché il plasma diventa otticamente sottile e i fotoni riescono ad uscire ed arrivare fino a noi.

Lo spostamento medio di un barione può essere assunto come nullo, poiché i moti di ogni singolo barione sono tutti casuali. Se consideriamo lo spostamento quadratico medio, questo non è più nullo. Lo spostamento finale del barione viene quindi calcolato, in coordinate comoventi, partendo dall'equazione (1.37) come segue:

$$x_{com}^2 = \int_0^t \frac{cd\tau}{a^2}. \quad (1.38)$$

Attraverso il valore ottenuto nell'equazione (1.38), possiamo ricavarci la scala fisica ad esso relativa, chiamata scala di *Silk*

$$\lambda_{SILK} \propto x_{com}a. \quad (1.39)$$

Prima però di calcolare esattamente il valore di λ_{SILK} dobbiamo specificare se ci troviamo prima dell'equivalenza o dopo. Questa ultima considerazione produce un risultato diverso nell'equazione (1.38) e di conseguenza un valore diverso per λ_{SILK} .

Una volta ottenuto tale valore, o più precisamente tale proporzionalità, possiamo ricavarci l'equivalente in massa, $M_{SILK} \propto \lambda_{SILK}^3 \rho_B$.

Come per il caso della materia non barionica andiamo a calcolarci il valore di M_J e di M_{SILK} , questa volta non a $z = z_{eq}$ ma al momento del disaccoppiamento, dove M_{SILK} è massima:

$$M_J(z_{dec}) \approx 10^{16} M_\odot \quad M_{SILK}(z_{dec}) \approx 10^{12} M_\odot. \quad (1.40)$$

Per la materia oscura abbiamo considerato il momento dell'equivalenza, momento dopo il quale la componente della materia inizia a dominare su quella della radiazione. Dopo l'equivalenza la materia oscura ha avuto un'evoluzione indipendente dalle altre componenti in gioco. Lo stesso ragionamento è stato applicato alla materia barionica; il momento dell'equivalenza però non è rilevante per l'evoluzione delle perturbazioni di materia barionica, essendo quest'ultima accoppiata con la radiazione. Il momento cruciale è appunto il disaccoppiamento, dopo il quale la materia barionica ha potuto seguire la sua evoluzione, indipendente da quella della radiazione.

I risultati ottenuti nell'equazione (1.40) devono essere interpretati come segue: tutte le scale più grandi di $M_J(z_{dec})$ crescono sempre; le scale comprese tra la $M_J(z_{dec})$ e la $M_{SILK}(z_{dec})$ inizialmente crescono, poi subiscono un periodo di oscillazione il quale, però, non le distrugge. Dopo il disaccoppiamento iniziano nuovamente a crescere. Infine le scale che si trovano al di sotto di $M_{SILK}(z_{dec})$ inizialmente crescono, quando però iniziano ad oscillare vengono cancellate.

1.5 Spettro di Potenza

In questo paragrafo andremo ad analizzare le proprietà statistiche delle perturbazioni primordiali di densità, delle quali abbiamo già analizzato l'evoluzione nel paragrafo 1.3. Queste perturbazioni primordiali sono il risultato di fluttuazioni quantistiche prodotte nella fase di espansione accelerata dell'Universo primordiale, la cosiddetta *Inflazione*. Le perturbazioni primordiali di densità vengono considerate i *semi* della formazione delle strutture che oggi possiamo osservare nell'Universo.

Per analizzare la distribuzione su grande scala delle perturbazioni di densità utilizzeremo il contrasto di densità, introdotto nel paragrafo 1.2. Da un punto di vista teorico, è preferibile utilizzare la trasformata di Fourier del contrasto di densità,

$$\delta(\vec{k}) \equiv \int \delta(\vec{x}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3\vec{x}. \quad (1.41)$$

La scelta di utilizzare $\delta(\vec{k})$ deriva dal fatto che, come abbiamo visto nella fase lineare,

le perturbazioni crescono in modo indipendente dal vettore d'onda \vec{k} . L'ampiezza di ogni onda, infatti, cresce allo stesso indipendentemente dalla sua lunghezza d'onda. Mediando su di un volume dell'Universo sufficientemente grande, $V \rightarrow \infty$, si ottiene che la densità delle perturbazioni tendono alla densità media dell'Universo e, quindi, avremo che $\delta(\vec{x}) \rightarrow 0$. Anche se il contrasto di densità tende a 0, la sua media quadratica no, come risulta immediato dalla sua definizione

$$\sigma_V^2 \equiv \langle \delta^2(\vec{x}) \rangle_V = \frac{1}{V} \int_V |\delta(\vec{k})|^2 d^3k. \quad (1.42)$$

Sotto l'assunzione già fatta in precedenza, equazione (1.1), ovvero che l'Universo sia omogeneo ed isotropo e che, quindi, non ci sia dipendenza dalla direzione per il vettore d'onda ma solamente sul valore del suo modulo, è possibile sostituire, nella formula (1.42), $\delta^2(\vec{k})$ con $P(k)$, ottenendo

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty P(k) k^2 dk. \quad (1.43)$$

La quantità $P(k)$ viene chiamata *Spettro di Potenza* delle fluttuazioni di densità. Lo spettro di potenza viene utilizzato per studiare la distribuzione delle perturbazioni di densità primordiali in funzione della loro scala k . Generalmente viene assunto che lo spettro di potenza primordiale abbia un andamento a legge di potenza,

$$P(k) \propto Ak^n, \quad (1.44)$$

dove A rappresenta la normalizzazione dello spettro di potenza e n l'indice spettrale. Considerando i problemi di convergenza dell'equazione (1.43) per $k \rightarrow 0$ e per $k \rightarrow \infty$ si ottiene che i possibili valori di n sono $-3 < n < 3$.

I modelli inflazionari, dai quali deriva l'andamento dello spettro di potenza descritto nell'equazione (1.44), non fanno alcuna predizione sul valore della sua normalizzazione. Tale valore può essere derivato utilizzando la varianza del contrasto di densità. Infatti il valore della normalizzazione dello spettro di potenza risulta essere proporzionale alla varianza del contrasto di densità, calcolata su di una opportuna scala. Questa specifica varianza viene solitamente indicata con σ_8^2 ed è definita come segue:

$$\sigma_8^2 \equiv \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty P(k) |W_k(R_8)|^2 k^2 dk, \quad (1.45)$$

dove $R_8 \equiv 8h^{-1} Mpc$ viene scelto perché rappresenta la scala sulla quale si ottiene una varianza unitaria considerando le galassie locali (per maggiori dettagli si veda Davis and Peebles [1983]). W_k è una funzione filtro passa-alto, la quale assume il valore uno

dentro un determinato intervallo e zero al di fuori. Un altro metodo per la determinazione della normalizzazione dello spettro di potenza è quello di andare a studiare lo spettro della CMB.

Le perturbazioni del potenziale gravitazionale prodotte dall'inflazione possono essere interpretate come rumore bianco, ovvero che assumono lo stesso valore quadratico medio per qualunque scala stia considerando. Utilizzando questa assunzione, la quale si riferisce al modello più semplice, è possibile ottenere che le fluttuazioni nel campo potenziale di densità producano $P(k) \propto k^n$ con $n = 1$. Questo caso, il quale come già detto rappresenta il modello più semplice, viene chiamato *Spettro di Zel'dovich*. Tale spettro descrive le perturbazioni di densità nel periodo immediatamente successivo all'inflazione, nel quale le perturbazioni crescono indipendentemente dalla loro scala, fintanto che rimangono fuori dall'orizzonte cosmologico, equazione (1.3). Le scale che, invece, prima dell'equivalenza entrano dentro la scala dell'orizzonte subiscono l'effetto della stagnazione, descritto in precedenza. Quello che si ottiene è che lo spettro di potenza primordiale viene deformato, poiché le perturbazioni di densità avranno andamenti diversi dal momento che entrano dentro l'orizzonte. Lo spettro di Zel'dovich prevede che le scale, non ancora entrate dentro l'orizzonte, crescano tutte in modo autosimilare. Con il passare del tempo scala sempre più grandi entreranno dentro l'orizzonte e subiranno il fenomeno della stagnazione. Una volta raggiunta l'equivalenza avremo scale che non sono ancora entrate nell'orizzonte, mentre altre hanno avuto una crescita differente a seconda del momento in cui sono entrate dentro l'orizzonte. Come detto in precedenza, lo spettro di potenza delle perturbazioni di densità primordiali viene deformato, assumendo questa forma:

$$P(k) \propto \begin{cases} k^n, & \text{per } k \ll k_H \\ k^{n-4}, & \text{per } k \gg k_H, \end{cases} \quad (1.46)$$

dove k_H rappresenta la scala dell'orizzonte al momento dell'equivalenza. Come è possibile vedere per scale $k \ll k_H$, lo spettro di potenza rimane quello primordiale. Lo spettro inoltre ha un massimo, il quale rappresenta la scala più grande che non è mai entrata dentro l'orizzonte, prima dell'equivalenza.

Il risultato ottenuto nell'equazione (1.46) dipende essenzialmente dalla quantità di materia presente nell'Universo. Considerando un Universo con una quantità maggiore di materia, il tempo al momento dell'equivalenza sarebbe anticipato e, di conseguenza, avremmo una scala dell'orizzonte più piccola. Questo comporterebbe sullo spettro di potenza una variazione della posizione del picco, ovvero si sposterebbe più a destra, verso scale più piccole.

La misura della posizione del picco dello spettro di potenza, rappresentato in Figura 1.2, ci permette di ottenere una combinazione di due parametri cosmologici, Ω_m e H_0 . Anche le scale di dissipazione, introdotte nel paragrafo 1.4, influenzano lo spettro di

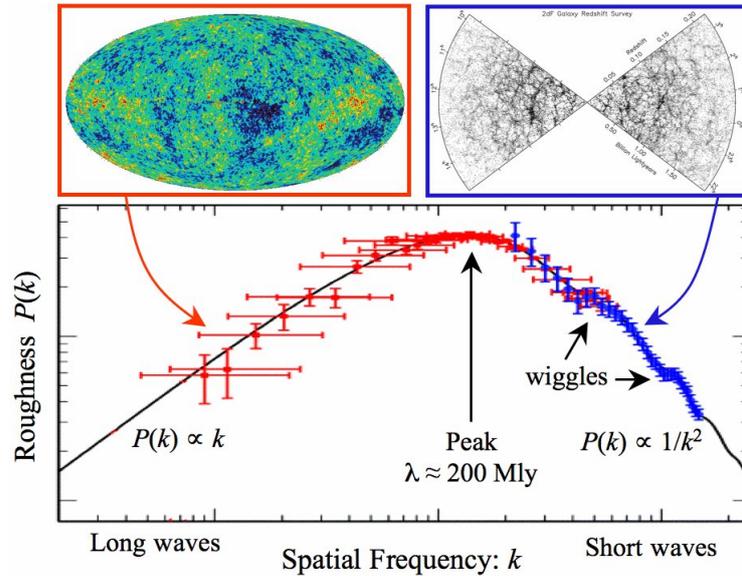


Figura 1.2: Nella figura è mostrato lo spettro di potenza relativo alla materia. I punti in rosso fanno riferimento alla survey WMAP, mentre i punti blu si riferiscono alla survey di redshift delle galassie 2dF. Immagine presa da: [http : //people.virginia.edu/ dmw8f/ast5630/Topic16/t16_ihomonogeneity.html](http://people.virginia.edu/~dmw8f/ast5630/Topic16/t16_ihomonogeneity.html)

potenza. Poiché al di sotto delle scale di dissipazione le perturbazioni vengono tutte cancellate, lo spettro di potenza avrà un taglio per grandi k all'altezza della scala di dissipazione. Ricordando che le scale di dissipazione per la HDM e CDM sono molto diverse, saranno diversi anche i rispettivi spettri di potenza. Infatti, nel caso avessimo solamente CDM il taglio dello spettro di potenza si troverà a k molto più grandi rispetto al caso in cui avessimo solamente HDM. Studiando i casi intermedi tra sola CDM e sola HDM, è possibile ottenere una stima della percentuale in massa dei neutrini, la quale non verrà considerata in questa trattazione.

Lo spettro di potenza di cui abbiamo parlato in questo paragrafo è uno strumento molto utile per fare Cosmologia. Come abbiamo visto infatti, ci permette di ottenere alcuni parametri cosmologici molto importanti al fine di comprendere meglio la geometria e l'evoluzione dell'Universo.

1.6 Regime Non Lineare

La teoria di Jeans, introdotta nel paragrafo 1.2, viene utilizzata per descrivere la crescita e l'evoluzione delle perturbazioni fintanto che esse rimangono in regime lineare, $\delta \ll 1$. Per studiare l'evoluzione delle perturbazioni di densità che hanno portato alle

strutture che oggi possiamo osservare nell'Universo, le quali corrispondono a sovradensità $\delta \gg 1$, è necessaria una trattazione molto più complessa. Nel momento in cui il contrasto di densità delle perturbazioni diventa maggiore di uno, le perturbazioni non possono più essere trattate con la teoria lineare, ma diventa necessaria una trattazione non lineare del problema. In questo paragrafo descriveremo uno dei casi più semplici, ovvero quello di una perturbazione di densità con simmetria sferica che collassa lungo la direzione radiale. Questo caso si basa sul modello del *collasso sferico* per trattare, in modo approssimativo, l'evoluzione non-lineare delle perturbazioni di densità.

Prima di descrivere il modello del collasso sferico è opportuno ricordare che sono necessarie alcune assunzioni sulle condizioni iniziali del sistema che considereremo. La perturbazione, di cui descriveremo l'evoluzione, viene immaginata come un piccolo universo, con simmetria sferica, che si espande insieme all'universo di background con una velocità comovente iniziale pari a $v_i = 0$. Per l'universo di background si suppone per motivi di semplicità che segua l'evoluzione descritta dal modello EdS, ovvero che sia un universo di sola materia ($\Omega_m = 1$), piatto ed in espansione.

Definiamo il parametro di densità relativo alla perturbazione, della quale vogliamo studiare l'evoluzione. Ricordando la definizione del parametro di densità, equazione (1.8), otteniamo:

$$\Omega_p(t_i) := \frac{\rho(t_i)(1 + \delta_p)}{\rho_{crit}(t_i)} \equiv \Omega(t_i)(1 + \delta_p), \quad (1.47)$$

dove ρ e ρ_{crit} corrispondono all'universo di background, mentre le quantità con il pedice p si riferiscono alla perturbazione.

Nel paragrafo 1.2 avevamo ottenuto le soluzioni per la crescita delle perturbazioni in regime lineare (equazione 1.23) considerando il modello EdS. Inizialmente avevamo scartato la soluzione decrescente, poiché con il passare del tempo finisce per cancellarsi. In questo momento però, considerando sia la soluzione crescente che quella decrescente e ricordando l'assunzione fatta sulla velocità comovente iniziale, $v_i = 0$, possiamo ottenere quanto segue:

$$\delta_p(t) = \frac{3}{5} \delta_{p,+}(t_i) \left(\frac{t}{t_i} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (1.48)$$

dalla quale è facile notare che la soluzione crescente rappresenta $\frac{3}{5}$ della perturbazione totale iniziale.

Nel modello del collasso sferico con simmetria sferica la condizione per avere il collasso è $\Omega_p(t_i) > 1$. Questa condizione, se inserita nell'equazione (1.47), ci permette di ottenere la seguente relazione:

$$(1 + \delta_p) > \frac{1}{\Omega(t_i)} - 1. \quad (1.49)$$

Questa equazione ci permette di affermare che per universi di background chiusi o piatti qualunque perturbazione sovradensa ($\delta_p > 0$) porta al collasso; per universi di background aperti, l'equazione (1.49), si traduce in una condizione sull'ampiezza della perturbazione che deve essere superata al fine di avere il collasso. Considerando anche l'equazione (1.48) e ricordando che stiamo considerando universi descritti dal modello di EdS, si ottiene

$$\delta_p > \frac{3}{5} \frac{1 - \Omega}{\Omega(1 + z_i)}, \quad (1.50)$$

dove la dipendenza dal tempo è espressa tramite il redshift. Con il passare del tempo l'universo che descrive la perturbazione e quello di background si espandono, quindi il valore soglia che deve essere superato per avere il collasso cambierà con il tempo.

Dalle equazioni che abbiamo introdotto è possibile notare che i due universi, quello rappresentante la perturbazione e quello di background, si espandono con il passare del tempo. La loro densità, quindi, diminuisce con il passare del tempo ma seguendo andamenti diversi. La densità dell'universo di background ha un andamento proporzionale ad a^{-3} , mentre quella della perturbazione segue un andamento meno ripido. Questo diverso andamento è descritto nell'immagine 1.3, dove è possibile notare anche le fasi successive dell'evoluzione della perturbazione.

Con il diminuire delle densità dei due universi, si ha un aumento del contrasto di densità, a causa appunto dei diversi andamenti. Una volta che il contrasto di densità della perturbazione raggiunge il suo valore massimo, inizierà il collasso. Tale momento è il cosiddetto tempo del *Turn-Around*: raggiunto questo momento la perturbazione inizierà il collasso e, come possiamo notare in Figura 1.3, la densità dell'universo che descrive la perturbazione aumenterà. Possiamo calcolarci il valore della densità, sia per l'universo che descrive la perturbazione sia per l'universo di background, al tempo del turn-around:

$$\rho_p(t_m) = \frac{3\pi}{32G} t_m^{-2} \quad \rho(t_m) = \frac{1}{6\pi G} t_m^{-2}, \quad (1.51)$$

dove t_m rappresenta, appunto, il tempo del turn-around. Utilizzando i risultati ottenuti nell'equazione (1.51), è possibile ottenere il valore del contrasto di densità al t_m . Un'altra quantità che è utile definire è il rapporto tra la densità della perturbazione e la densità del background, calcolando tale rapporto al tempo della massima espansione del fattore di scala. Questa quantità è rappresentata da $\chi(t_m) := \frac{\rho_p(t_m)}{\rho(t_m)}$. Si ottiene

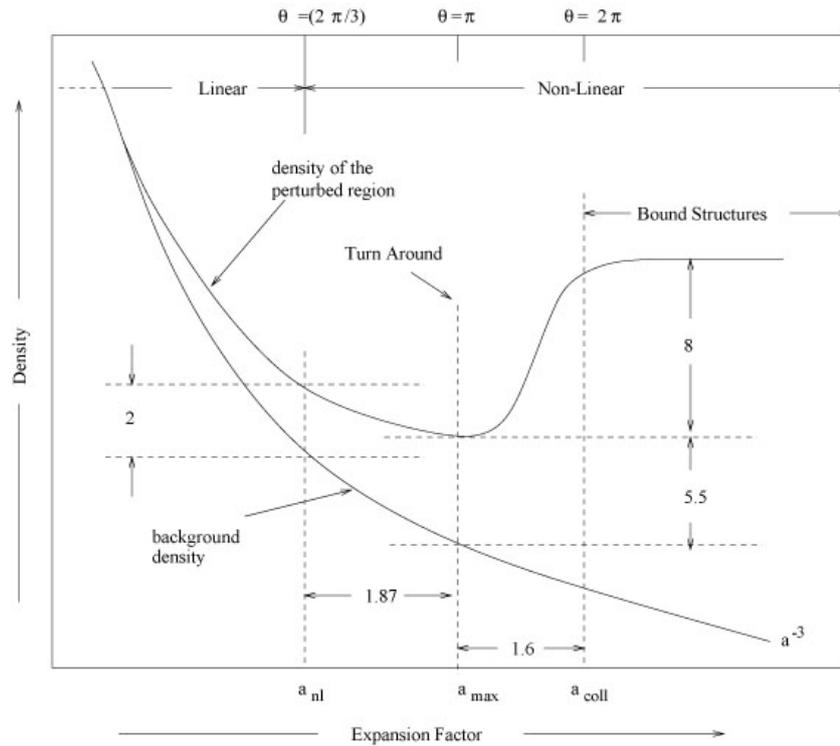


Figura 1.3: Nella figura possiamo notare i diversi andamenti, il primo relativo alla densità delle perturbazioni (curva in alto) e il secondo relativo alla densità del background (curva in basso). Possiamo anche notare come, con il passare del tempo, le densità del background diminuisce, mentre la densità della perturbazione prima diminuisce e poi aumenta. Immagine presa da ned.ipac.caltech.edu/level5/Sept02/Padmanabhan/Pad52.html

quindi un valore pari a $\chi \approx 5.6$, il quale mostra che il valore del contrasto di densità è:

$$\delta(t_m) \equiv \chi - 1 \approx 4.6. \quad (1.52)$$

Come è possibile notare dal risultato appena ottenuto, già al tempo della massima espansione del fattore di scala la perturbazione si trova nel regime non lineare. Utilizzando un processo di estrapolazione possiamo ricavarci il valore, errato, del contrasto di densità che avremmo ottenuto in un regime lineare. Il contrasto di densità, in teoria lineare, ha un andamento proporzionale a $\delta \propto t^{2/3}$, di cui abbiamo parlato precedentemente. Calcolando il valore del contrasto di densità, ottenuto dalla teoria lineare, al tempo del turn-around, si ottiene che già in questo momento la perturbazione è in regime non lineare:

$$\delta(t_m) = \delta(t_i) \left(\frac{t_m}{t_i} \right)^{2/3} \approx 1.07. \quad (1.53)$$

Ricordando che fino al tempo t_m il collasso non è ancora iniziato, possiamo già verificare come i risultati ottenuti considerando il regime non lineare e quello lineare, differiscano già di un fattore 4. Questo risultato mostra come trattare il problema del collasso utilizzando una trattazione lineare porti ad ottenere dei risultati errati. Risulta quindi fondamentale lo sviluppo di una teoria non lineare soddisfacente al fine di descrivere meglio il problema del collasso e di ottenere risultati corretti.

Andiamo adesso a valutare come il valore del contrasto di densità evolva una volta superato il tempo t_m . Una volta iniziato il collasso la perturbazione non finirà con il collassare in un punto. Se la materia che stiamo considerando è quella barionica, e quindi collisionale, man mano che la densità aumenta la materia tende a riscaldarsi aumentando quindi la sua pressione. Il collasso gravitazionale si fermerà una volta che si raggiungerà un equilibrio tra la forza di pressione e quella gravitazionale. Nel caso in cui stessimo considerando la materia oscura, anche se essa è non collisionale, la sua dispersione di velocità tenderà ad aumentare fino a quando non sarà raggiunto un valore di equilibrio che fermerà il collasso gravitazionale.

Le simulazioni numeriche mostrano come il collasso di una perturbazione si arresti una volta raggiunta una dimensione di equilibrio, che chiameremo R_e . Questo valore è approssimativamente raggiunto dopo un tempo di equilibrio, che indicheremo come t_e , che risulta essere pari a $t_e \approx 2t_m$. Una volta raggiunto questo tempo, la perturbazione inizia a stabilizzarsi, oscillando attorno al valore di equilibrio, fino a quando non raggiunge l'equilibrio viriale dopo un tempo chiamato *tempo di virializzazione*, $t_{vir} = 3t_m$. Le caratteristiche della perturbazione rimangono immutate nel passaggio da t_e a t_{vir} . Considerando le perturbazioni che oscillano attorno alla loro posizione di equilibrio è possibile calcolare, utilizzando il *Teorema del Viriale*, la dimensione della struttura nei due tempi sopra descritti, t_e e t_{vir} . Otteniamo $R_e \approx R_{vir} = \frac{1}{2}R_m$, quindi una volta che la struttura collassata raggiunge l'equilibrio avrà una dimensione pari a, approssimativamente, metà della dimensione che aveva al tempo t_m .

Andiamo adesso a calcolare il valore del rapporto tra la densità della perturbazione e della densità del background, successivamente mostreremo i valori del contrasto di densità che avremmo ottenuto se avessimo utilizzato la teoria lineare. Ricordando il valore della χ ottenuto tramite l'equazione (1.52), possiamo calcolare:

$$\frac{\rho_p(t_e)}{\rho(t_e)} = 8 \frac{\rho_p(t_m)}{\rho(t_m)} \left(\frac{t_e}{t_m} \right)^2 = 8\chi \left(\frac{t_e}{t_m} \right)^2 \approx 180, \quad (1.54)$$

che rappresenta il valore del rapporto delle due densità al tempo del raggiungimento dell'equilibrio t_e e successivamente

$$\frac{\rho_p(t_{vir})}{\rho(t_{vir})} = 8 \frac{\rho_p(t_m)}{\rho(t_m)} \left(\frac{t_{vir}}{t_m} \right)^2 = 8\chi \left(\frac{t_{vir}}{t_m} \right)^2 \approx 400, \quad (1.55)$$

il quale, invece, rappresenta il valore del rapporto al tempo t_{vir} . Il fattore 8 inserito nelle due equazioni rappresenta il rapporto tra i volumi della struttura ai tempi che stiamo considerando.

Utilizzando l'equazione (1.53), possiamo andare a calcolarci il valore del contrasto di densità che avremmo ottenuto tramite una trattazione in regime lineare del problema del collasso:

$$\delta(t_e) \approx 1.686 \quad \delta(t_{vir}) \approx 2.2. \quad (1.56)$$

Come è facile notare dal confronto tra i risultati ottenuti nelle equazioni (1.54) e (1.55) e quelli appena ottenuti, i valori ricavati sono molto differenti e questo conferma ancora una volta come sia fondamentale lo sviluppo di una migliore teoria non lineare per la trattazione del collasso. I valori ottenuti nell'equazione (1.56) rappresentano i valori soglia (della teoria lineare) che devono essere superati dal contrasto di densità di una perturbazione al fine di ottenere una struttura legata ed in equilibrio, dopo il collasso. Solo le perturbazioni che riescono a crescere a sufficienza per superare questi valori, dopo il collasso, porteranno alla formazione delle strutture che possiamo osservare oggi.

Nel paragrafo 1.5, abbiamo introdotto lo spettro di potenza, che ci permette di determinare la distribuzione delle fluttuazioni, almeno nelle loro prime fasi di evoluzione. Questo può essere fatto solamente se stiamo considerando la teoria lineare. Gli effetti della teoria non lineare sullo spettro di potenza possono essere valutati solamente con l'utilizzo delle simulazione numeriche, delle quali parleremo successivamente.

1.7 Parametri cosmologici oggi

La stima dei parametri cosmologici, definiti nei paragrafi precedenti, può essere fatta utilizzando diversi metodi. In questo paragrafo riporteremo le loro stime attuali: il parametro di Hubble vale

$$H_0 = 70,8 \pm 1,6 \text{ km}/(\text{sMpc}). \quad (1.57)$$

L'età dell'Universo, oggi, è stimata essere pari a

$$t_0 = 13,7 \pm 0,2 \text{ Gyr}. \quad (1.58)$$

I parametri di densità, introdotti nell'equazione (1.13), oggi assumono i seguenti valori:

$$\begin{cases} \Omega_\Lambda = 0,73 \pm 0,04 \\ \Omega_m = 0,27 \pm 0,04 \\ \Omega_b = 0,044 \pm 0,004, \end{cases} \quad (1.59)$$

dove Ω_Λ si riferisce alla componente della costante cosmologica, Ω_m alla componente della materia, barionica e non, mentre Ω_b rappresenta la componente della sola materia barionica. Il parametro di densità totale, oggi, è:

$$\Omega_{0,tot} = 1,02 \pm 0,02, \quad (1.60)$$

il quale ci permette, come già anticipato in precedenza, di poter considerare l'Universo piatto e descrivibile attraverso l'utilizzo di una geometria Euclidea. I valori odierni dei parametri cosmologici descritti in questo paragrafo sono stati ottenuti dal sito web <http://www.cosmored.it/astrofisica/numeriUniverso.html>.

Capitolo 2

Ammassi di Galassie

Gli ammassi di galassie odierni sono le strutture virializzate più grandi che possiamo trovare nell'Universo. Vengono considerati come dei laboratori dove è possibile ricavare informazioni utili per molteplici studi: vengono utilizzati per ricavare stime dei parametri cosmologici, per studiare il contenuto galattico e l'evoluzione delle galassie, per lo studio del plasma e dell'astrofisica del gas ed anche per lo studio della materia oscura.

In questo capitolo parleremo degli ammassi di galassie, delle loro proprietà e delle relazioni di scala che possiamo misurare. Verranno, inoltre, descritte le varie tecniche utilizzate per l'osservazione e per la stima della massa degli ammassi di galassie.

Come descritto nel paragrafo 1.3, le perturbazioni di materia barionica hanno la possibilità di crescere dal disaccoppiamento in poi. Utilizzando la teoria lineare è possibile notare che queste perturbazioni, in assenza della materia oscura, non avrebbero avuto sufficiente tempo per crescere e formare le strutture che possiamo osservare oggi nell'Universo. Diventa quindi fondamentale la partecipazione della materia oscura, la quale, proprio grazie alle sue caratteristiche, ha reso possibile la formazione delle strutture. Le perturbazioni di materia oscura infatti, hanno avuto la possibilità di crescere anche prima del disaccoppiamento della materia barionica (si veda il paragrafo 1.3). Una volta raggiunta l'equivalenza, le perturbazioni di materia oscura, fuori e dentro l'orizzonte, hanno continuato a crescere fino al collasso, il quale ha portato alla formazione dei primi aloni di materia oscura. Una volta raggiunto il proprio disaccoppiamento, le perturbazioni di materia barionica, disaccoppiate dalla radiazione, hanno avuto la possibilità di crescere. L'Universo circostante però non era più omogeneo essendo già presenti gli aloni di materia oscura, i quali rappresentano delle buche di potenziale per le perturbazioni di materia barionica. Il fenomeno del Baryon Catch-Up, descritto dall'equazione 1.33, è dovuto proprio alla presenza degli aloni di materia oscura, i quali hanno guidato e facilitato la crescita delle perturbazioni di materia barionica fino al collasso.

Come anticipato in precedenza, è importante distinguere tra HDM ed CDM, principal-

mente perché hanno valori diversi per $M_J(z_{eq})$ (si veda 1.4.1). Questo comporta scenari diversi di formazione delle strutture, nella fattispecie di aloni di materia oscura. Il caso in cui avessimo solamente particelle di HDM viene chiamato scenario *Top - Down*. Gli aloni di DM che si formano hanno una massa $M > 10^{16}M_\odot$. In questo caso non è più l'instabilità gravitazionale che interviene per formare strutture più piccole, ma queste ultime si formano a causa del fenomeno della *Frammentazione*: l'alone di grande massa, a causa di fenomeni mareali e di una non perfetta sfericità, tende a frammentarsi in aloni di piccola massa.

Il secondo caso, quello caratterizzato da particelle di CDM, viene chiamato scenario *Bottom - Up*: i primi aloni a formarsi sono quelli di piccola massa, i quali successivamente si aggregano tra di loro grazie alla gravità per formare aloni di massa maggiore. Nel primo caso le prime strutture a formarsi sono direttamente gli ammassi di galassie, mentre nel secondo caso si formano prima le galassie, le quali in seguito si raggruppano in sistemi più densi, gli ammassi di galassie.

Attraverso le osservazioni e le simulazioni numeriche si pensa che lo scenario più accreditato sia il *Bottom - Up*, altrimenti detto scenario *gerarchico*.

2.1 Proprietà Generali

Gli ammassi di galassie più grandi hanno una massa che può superare $10^{15}M_\odot$, possono contenere al loro interno da qualche centinaia fino a qualche migliaio di galassie ed hanno una dimensione tipica di $1 - 5Mpc$. La maggior parte della loro massa è composta dalla materia oscura, circa $80 - 90\%$, mentre il rimanente è composto dalla materia barionica. La maggior parte della materia barionica però si trova sotto forma di gas, il quale compone l'*ICM*, plasma caldo e poco denso che permea l'intero volume dell'ammasso di galassie. Le galassie infine rappresentano solamente una piccola percentuale della massa totale dell'ammasso.

L'*ICM* ha una densità pari a $10^{-3}atomi/cm^3$ ed una temperatura molto alta, $T_X \approx 10^7 - 10^8K$. Queste caratteristiche dell'*ICM* lo rendono osservabile soprattutto in banda X. Un altro metodo per studiare e osservare il gas è quello di sfruttare l'effetto *SZ* (*Sunyaev - Zel'dovich*), il quale genera una distorsione dello spettro della CMB a causa dell'interazione Compton-Inversa tra i fotoni freddi della CMB e gli elettroni, molto più energetici, dell'*ICM*.

All'interno degli ammassi di galassie possiamo trovare sia galassie ellittiche sia galassie a spirale, inoltre le galassie all'interno degli ammassi di galassie hanno una dispersione di velocità di diverse centinaia di Km/s . Utilizzando osservazioni spettroscopiche e fotometriche multi-banda è possibile andare a studiare le caratteristiche delle galassie negli ammassi, come ad esempio la loro evoluzione, il loro tasso di formazione stellare e la loro massa stellare. Utilizzando le misurazioni dell'*HI* si è notato come le galassie

a spirale degli ammassi abbiano un deficit di gas. In particolare, le galassie con una minore quantità di gas sono soprattutto quelle più vicine al centro dell'ammasso. In queste zone molto dense sono molto frequenti fenomeni di merging tra galassie, i quali sono i principali responsabili, insieme alla *RamPressure* $P_{RAM} \sim \rho v^2$, del deficit di gas nelle galassie a spirale.

Gli ammassi di galassie sono caratterizzati da un rapporto $M/L > 100$ che conferma nuovamente la grande quantità di materia oscura al loro interno. La materia oscura, non essendo direttamente osservabile, viene studiata utilizzando il metodo del *Weak Lensing* oppure andando a valutare la dinamica delle galassie.

Dal punto di vista cosmologico, come già anticipato, gli ammassi di galassie sono molto importanti per ottenere vincoli sui parametri cosmologici. Una quantità fondamentale è la funzione di massa per la quale appunto serve la massa degli ammassi, quantità non facilmente ricavabile e che può essere ottenuta attraverso lo studio di diversi osservabili oppure utilizzando le relazioni di scala presenti negli ammassi di galassie, delle quali parleremo nel paragrafo 2.2. Un'altra caratteristica molto importante che ci permette di utilizzare gli ammassi per fare Cosmologia è la loro distribuzione all'interno dell'Universo. Il conoscere la loro distribuzione a diversi redshift ci permette di studiare anche la geometria dell'Universo e, quindi, comprendere la sua evoluzione raggiungendo una maggiore precisione sui parametri cosmologici.



Figura 2.1: L'ammasso di galassie di Abell 1689, osservato dal telescopio spaziale Hubble. Immagine presa da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

2.1.1 Classificazione

Gli ammassi di galassie che possiamo osservare nell'Universo vengono classificati in base al numero e alla distribuzione delle galassie al loro interno. La classificazione di Oemler si basa sul contenuto di galassie all'interno dell'ammasso, considerando il tipo di galassie e la loro distribuzione radiale nell'ammasso. Oemler divide gli ammassi in tre categorie:

cD : sono ammassi che hanno una grande galassia ellittica al centro. Hanno soprattutto galassie ellittiche al loro interno, le quali rappresentano l'80% del numero di galassie, mentre il restante 20% è rappresentato dalle galassie a spirale. In questi ammassi si ha che la densità di galassie aumenta velocemente man mano che ci si avvicina al centro. Al contrario, la densità di galassie a spirale tende a diminuire spostandosi verso il centro dell'ammasso.

Spiral-Rich : sono ammassi che hanno circa lo stesso numero di galassie ellittiche e a spirale. La distribuzione radiale delle galassie rimane più o meno costante spostandosi dalle zone esterne verso il centro dell'ammasso. In questo tipo di ammassi si ha una distribuzione di densità simile per quanto riguarda le galassie a spirale e quelle ellittiche.

Spiral-Poor : le caratteristiche di questo tipo di ammassi sono molto simili a quelle degli ammassi *cD*, fatta eccezione per il fatto che questi ammassi non hanno una galassie ellittica molto grande al centro. Anche in questa tipologia si ha un maggior numero di galassie ellittiche all'interno dell'ammasso e, anche in questo caso, la densità di galassie a spirale tende a diminuire andando verso il centro dell'ammasso.

Un'altra classificazione per gli ammassi è stata proposta da Rood e Sastri, i quali sono andati a classificare gli ammassi basandosi sulla posizione delle 10 galassie più brillanti all'interno dell'ammasso. Anche nella loro classificazione è presente la categoria *cD*, la quale è sempre caratterizzata da una sola grande galassia al centro, ma è anche presente la categoria di ammassi che hanno al centro una coppia di galassie, ad esempio l'ammasso di Coma. Un'altra categoria è quella che rappresenta gli ammassi caratterizzati da un addensamento sferico di galassie al centro molto simile alla categoria degli ammassi cosiddetti *Flattened*, ad esempio l'ammasso *IRAS 09104+4109*, dove le galassie sono sempre concentrate al centro, ma hanno una distribuzione più piatta rispetto alla precedente categoria. L'ammasso Perseus rientra invece nella categoria caratterizzata da un serie di galassie collocate in linea al centro dell'ammasso. L'ultima categoria di questa classificazione è rappresentata dagli ammassi con una distribuzione delle 10 galassie più brillanti irregolare, i quali non hanno quindi una distribuzione caratteristica.

2.1.2 Osservare gli Ammassi di Galassie

In questo paragrafo abbiamo già anticipato che gli ammassi di galassie possono essere osservati tramite osservazioni in banda Radio fino alla banda X. Gli ammassi di galassie possono essere non solo studiati ma anche individuati utilizzando osservazioni multi banda. Utilizzando osservazioni nella banda Ottica e NIR (*Near Infrared*), è possibile individuare gli ammassi di galassie andando a cercare delle sovra-densità di galassie. Questa tecnica permette di coprire grandi aree del cielo ma sono comunque necessarie delle misure più precise sulle singole galassie. Durante l'osservazione di una determinata zona del cielo, infatti, si riceve del segnale sia dalle galassie che compongono l'ammasso sia dalle galassie del campo. Al fine di capire quali sono le galassie che compongono l'ammasso, il primo passo è quello di ricavare il redshift di ogni galassia dal loro spettro di emissione. Questa è una procedura che richiede osservazioni spettroscopiche molto dettagliate, le quali possono essere fatte in modo sistematico per l'Universo vicino. Una volta selezionate le galassie aventi tutte lo stesso redshift si individua la loro velocità, dalla quale è possibile ricavare la dispersione di velocità delle galassie. Le galassie con un valore di velocità molto elevato rispetto alla media saranno quelle che compongono l'ammasso.

Osservando il cielo in banda X, gli ammassi di galassie sono facilmente individuabili, grazie alla alta temperatura del gas che permea il loro intero volume, il quale emette radiazione tramite il fenomeno della *Bremsstrahlung*. Utilizzando le osservazioni in banda X è possibile ottenere una relazione che lega la luminosità X dell'ammasso, nella fattispecie dell'ICM, con la massa dell'ammasso stesso. Grazie alle osservazioni X è possibile infatti ottenere delle informazioni sull'ICM, le quali vengono utilizzate per collegare la massa dell'ammasso con la luminosità X del gas. Purtroppo sono necessarie osservazioni X molto precise e questo limita l'area di cielo che può essere studiata durante un'osservazione. L'accuratezza richiesta alle osservazioni ed il fatto che la luminosità X diminuisca rapidamente all'aumentare del redshift, permettono di utilizzare questa tecnica, in modo efficiente, per la ricerca e per lo studio degli ammassi solamente per $z \leq 1.5$. Grazie alle osservazioni in banda Radio e alla ricerca degli AGN, è possibile andare a cercare ammassi di galassie a redshift molto alti, fino a $z \simeq 4$. Gli ammassi che possiamo trovare a redshift così alti però non sono sistemi perfettamente virializzati, poiché ancora non hanno raggiunto l'equilibrio. Quelli che osserviamo vengono infatti chiamati *Proto-Amassi*, i quali non possono essere utilizzati per descrivere gli ammassi di oggi. Tramite questi oggetti non è possibile ricavare, oggi, i parametri cosmologici necessari per fare Cosmologia.

Un'altra tecnica molto utilizzata è quella della ricerca dell'effetto SZ (*Sunyaev-Zeldovich*). L'effetto SZ si verifica quando i fotoni della CMB vengono scatterati dagli elettroni molto energetici dell'ICM tramite l'interazione di *Inverse Compton*, come già detto in precedenza. Questa interazione provoca una distorsione dello spettro della CMB, il quale subisce un decremento a basse frequenze ed un conseguente incremento alle alte

frequenze. L'effetto SZ è indipendente dalla distanza e quindi può essere utilizzato per la ricerca e l'individuazione di ammassi di galassie anche ad alti redshift.

La tecnica del *Weak Lensing*, infine, sfrutta gli effetti gravitazionali della materia, dominata dalla sua componente oscura. A causa della notevole precisione che le osservazioni in banda Ottica devono avere per studiare questo effetto, questa tecnica risulta efficiente fino a $z \leq 0.8$.

Le tecniche sopra descritte vengono utilizzate non solo per individuare gli ammassi, ma anche per studiare le loro componenti. Per uno studio completo e dettagliato degli ammassi di galassie e delle loro componenti è necessario, appunto, un approccio osservativo multi banda. Per esempio utilizzando le osservazioni nell'Ottico e nell'NIR è possibile andare a studiare la componente barionica, ad esempio le galassie. Utilizzando le osservazioni X e, più recentemente, le osservazioni Radio è possibile analizzare e studiare l'*ICM*, che rappresenta l'ambiente all'interno dell'ammasso di galassie. La materia oscura, non essendo osservabile, può essere studiata attraverso i suoi effetti gravitazionali, ad esempio utilizzando il *Weak Lensing*.

Essendo gli ammassi di galassie tra le più grandi strutture che possono essere trovate nell'Universo ed essendo la loro abbondanza una funzione della loro massa e del redshift, è possibile utilizzarli per ricavare vincoli sui parametri cosmologici. Lo studio della loro distribuzione infatti ci permette di fare delle previsioni sulla geometria dell'Universo e quindi sui parametri cosmologici. Uno strumento molto utile per questo genere di studio sono le simulazioni numeriche combinate con le survey, di cui parleremo più nel dettaglio nei capitoli successivi.

2.2 Relazioni di Scala

Come vedremo, la massa di un ammasso di galassie è una quantità fondamentale al fine di ricavare i parametri necessari per definire il modello cosmologico. La stima della massa di un ammasso, però, non è un compito facile. Attraverso le osservazioni degli ammassi in varie bande, descritte nel paragrafo precedente, è possibile ottenere delle *relazioni di scala*, le quali ci permettono di legare la massa di un ammasso agli osservabili. Spesso in questa trattazione abbiamo parlato degli ammassi di galassie come strutture rilassate ed in equilibrio. Nel caso in cui gli ammassi siano strutture perfettamente virializzate, ci dovremmo aspettare che le galassie ed il gas all'interno dell'ammasso sentano lo stesso potenziale gravitazionale, ovvero che l'energia cinetica delle galassie e quella termica del gas siano correlate. Sotto l'assunzione dell'equilibrio dinamico e che il gas che compone l'*ICM* sia stato perduto dalle galassie, andiamo a confrontare le due energie:

$$E_{kin} \approx M\sigma_v^2 \quad E_{thermal} \approx k_b T, \quad (2.1)$$

dove M è la massa dell'ammasso e σ_v la sua dispersione di velocità, mentre k_b è la costante di Boltzmann e T ovviamente la temperatura del gas. Se le galassie ed il gas sentissero lo stesso potenziale gravitazionale dovremmo poter osservare all'interno degli ammassi di galassie la relazione di scala $\sigma_v \propto T^{1/2}$, si veda Xue and Wu [2000]. Proprio perché questa relazione è osservata negli ammassi di galassie possiamo quindi ritenere che il considerare quest'ultimi come strutture virializzate sia una ragionevole rappresentazione.

Le relazioni di scala che andremo ad introdurre in questo paragrafo vengono utilizzate non solo per studiare le caratteristiche degli ammassi di galassie, ma anche per ottenere delle stime sulla loro massa. Come anticipato in precedenza, la massa degli ammassi di galassie è una quantità fondamentale per ricavare delle stime sui parametri cosmologici. Non essendo possibile ottenere direttamente dalle osservazioni il valore della massa degli ammassi, si cerca di sfruttare le relazioni che la massa ha con altri osservabili, come ad esempio la luminosità in banda X o la temperatura dell'ICM. Per definire le dimensioni fisiche di un ammasso di galassie viene spesso utilizzato il contrasto di densità dell'ammasso rispetto alla densità critica dell'Universo. In base al valore che si sceglie per il contrasto di densità definiamo il raggio (o la massa) entro il quale il contrasto di densità ha il valore scelto. Per esempio R_{200} sarà il raggio entro il quale si ha un contrasto di densità pari a 200 volte la densità critica dell'Universo. Utilizzando questa definizione possiamo introdurre la seguente equazione:

$$M_\delta = \frac{4\pi}{3} \delta \rho_{crit,0} E_z^2 R_\delta^3, \quad (2.2)$$

nella quale δ rappresenta il valore del contrasto di densità assunto (200, 250, 500); E_z rappresenta l'evoluzione del parametro di Hubble (vedi equazione 1.11) in funzione del redshift ed è definita nel modo seguente:

$$E_z \equiv \frac{H(z)}{H_0} = [\Omega_m(1+z)^3 + (1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda)(1+z)^2 + \Omega_\Lambda]^{1/2}. \quad (2.3)$$

Come possiamo notare, la funzione E_z lega al redshift i parametri Ω_m e Ω_Λ . Un ammasso di galassie viene considerato in equilibrio idrostatico quando il gradiente della pressione è bilanciato dalla forza gravitazionale. Se l'equilibrio è verificato allora la temperatura dell'ICM può essere utilizzata come stima della profondità della buca di potenziale dell'ammasso e, quindi, della sua massa viriale. La proporzionalità che otteniamo,

$$T_{gas} \propto \frac{GM}{R} \propto R_{vir}^2, \quad (2.4)$$

se sostituita nell'equazione (2.2), ci permette di ottenere la relazione di scala che collega la massa di un ammasso con la temperatura dell'ICM, $M_\delta \propto T_{gas}^{3/2}$. Da un punto di vista pratico però si preferisce collegare la luminosità X dell'ammasso di galassie con la temperatura del gas, poiché la luminosità è una quantità più facilmente ottenibile tramite le osservazioni. Per trovare la relazione che lega temperatura e luminosità abbiamo bisogno di assumere un meccanismo di emissione: per strutture sufficientemente grandi l'ICM guadagna energia principalmente attraverso meccanismi di shock fino a raggiungere $10^{7-8}K$, ed emette energia essenzialmente per Bremsstrahlung termica, si veda Giodini et al. [2013]. Sotto queste assunzioni è possibile ottenere la relazione $L_X \propto T_{gas}^2$, la quale è stata tra le prime relazioni di scala ad essere stata osservata e studiata. La luminosità X e la temperatura del gas sono entrambe quantità che possono essere ricavate facilmente dalle osservazioni X e generalmente sono indipendenti tra di loro. La luminosità è ricavabile integrando il profilo di brillantezza superficiale dell'ammasso mentre la temperatura attraverso osservazioni spettroscopiche, sempre in banda X. Grazie a queste relazioni è possibile stimare la massa di un ammasso di galassie utilizzando due osservabili facilmente ricavabili.

Le ultime relazioni di scala che abbiamo ricavato valgono solamente sotto l'assunzione che ci sia equilibrio idrostatico. Questa risulta essere una forte assunzione, difficilmente verificabile negli ammassi di galassie di piccola massa o nei gruppi. Tutto questo trasforma la relazione trovata precedentemente in una proporzionalità più ripida tra la luminosità X e la temperatura. Per ammassi di galassie sufficientemente grandi è ragionevole utilizzare la proporzionalità precedentemente descritta.

Per ottenere una stima della massa di un ammasso ed una stima del valore della funzione descritta nell'equazione (2.3) è anche possibile utilizzare l'effetto SZ, introdotto nel paragrafo 2.1.2. L'effetto SZ, come già anticipato in precedenza, genera una distorsione dello spettro della CMB a causa dell'interazione Compton-inverso tra i fotoni freddi della CMB e gli elettroni caldi dell'ICM. Il decremento del flusso osservato della CMB nella regione Rayleigh-Jeans dello spettro è direttamente collegato al parametro di *Comptonizzazione*, definito come segue:

$$y \equiv \frac{\sigma_T k_B}{m_e c^2} \int T_e n_e dl, \quad (2.5)$$

dove σ_T è la sezione d'urto Thompson, k_B la costante di Boltzmann, T_e e n_e rappresentano rispettivamente la temperatura e la densità del gas. Il parametro di Comptonizzazione può essere utilizzato per ottenere utili relazioni con la massa totale dell'ammasso, la massa del gas o la sua temperatura. Per ottenere queste relazioni è necessario calcolare l'integrale di y sull'angolo solido, che chiameremo Ω , sotto il quale si osserva

l'ammasso:

$$Y_{SZ} = \int_{\Omega} y d\Omega = \frac{1}{D_A^2} \frac{\sigma_T k_B}{m_e c^2} \int_V T_e n_e dV, \quad (2.6)$$

dove V è il volume fisico dell'ammasso che stiamo considerando e D_A è la distanza angolare dall'ammasso. Assumendo una distribuzione isoterma sia per la materia oscura che per il gas ed assumendo come frazione del gas $f_{gas} \equiv M_{gas}/M_{tot}$, otteniamo

$$Y_{SZ} D_A^2 \propto f_{gas} M_{tot} T_e. \quad (2.7)$$

Oltre alle assunzioni fatte per ottenere l'equazione precedente, se si aggiunge anche la condizione di equilibrio idrostatico, possiamo ottenere la seguente relazione:

$$Y_{SZ} D_A^2 \propto f_{gas} M_{tot}^{5/3} E_z^{2/3}, \quad (2.8)$$

la quale lega il parametro di Comptonizzazione integrato con la massa dell'ammasso e la funzione E_z , la quale ci permette di ricavare i parametri cosmologici.

Una delle qualità dell'effetto SZ è quella di essere indipendente dal redshift. Come è possibile notare nell'equazione (2.5), esso dipende essenzialmente dalla densità e dalla temperatura dell'ICM. L'indipendenza dal redshift dell'effetto SZ ci permette di utilizzarlo per la ricerca e lo studio degli ammassi di galassie anche ad alto z . Inoltre, in contrasto con le osservazioni X e Ottiche, l'effetto SZ non subisce l'effetto della diminuzione della brillantezza superficiale ($\propto (1+z)^{-4}$) essendo essa bilanciata dall'incremento dell'intensità della CMB ($\propto (1+z)^4$). Come già detto in precedenza, l'effetto SZ viene utilizzato non solo per la stima della massa degli ammassi e dei parametri cosmologici, ma anche per la ricerca degli ammassi stessi. Analizzando i dati ottenuti tramite le survey, le quali permettono di coprire grandi aree del cielo, è possibile utilizzare l'effetto SZ per la ricerca degli ammassi di galassie. Utilizzando questo metodo però è necessario far attenzione alle possibili contaminazioni presenti, ovvero a tutte quelle sorgenti che possono alterare il segnale SZ. Le maggiori contaminazioni infatti provengono da sorgenti Radio o IR che possono alterare lo spettro della CMB. Diventa quindi essenziale una buona calibrazione delle relazioni tra la massa dell'ammasso e il flusso del segnale SZ, al fine di utilizzare l'effetto SZ per studi astrofisici e cosmologici. Un altro metodo per stimare la massa di un ammasso di galassie è quello di utilizzare misure spettroscopiche della dispersione di velocità delle galassie che compongono l'ammasso, tramite l'applicazione del teorema del viriale e sotto l'assunzione che il sistema sia in equilibrio dinamico, si veda Zwicky [1933]. Con queste assunzioni e assumendo per semplicità un sistema isoterma e un campo di velocità isotropo, otteniamo che la

dispersione di velocità delle galassie dipende dalla loro distribuzione radiale. Diventa quindi possibile stimare la massa viriale dell'ammasso utilizzando la formula seguente:

$$M_V = \frac{\sigma^2 R_V}{G}, \quad (2.9)$$

dove M_V e R_V sono rispettivamente la massa viriale dell'ammasso ed il suo raggio viriale. Tramite questa formula è possibile collegare la massa di un ammasso alla dispersione di velocità media delle galassie che lo compongono. L'approccio dinamico appena descritto per la stima della massa degli ammassi, oltre alle numerose assunzioni che vengono fatte, richiede anche numerose osservazioni. Per questo motivo vengono preferiti all'approccio dinamico altre procedure meno costose dal punto di vista del tempo di osservazione.

Le relazioni di scala sono, quindi, un utile strumento per ottenere dei collegamenti tra la massa dell'ammasso di galassie e delle quantità più facilmente osservabili. Le relazioni introdotte in questo paragrafo possono essere utilizzate con più efficacia se è valida la condizione di auto-similarità. Questa proprietà, più correttamente chiamata auto-similarità statistica si verifica quando le quantità statistiche sono le stesse sia per il sistema originale sia per quello riscaldato, e solo per determinati intervalli di scale. Questa condizione viene considerata valida per sistemi composti da particelle non collisionali, come ad esempio la materia oscura, poiché l'unica forza che agisce su queste particelle è la gravità, che non ha scale privilegiate. Grazie alle simulazioni numeriche è stato possibile affermare che la condizione di auto-similarità rimane valida anche nel considerare la componente del gas che compone l'ammasso di galassie, anche se si considera il riscaldamento del gas dovuto agli shock.

Un'altra quantità che può essere utilizzata per ricavare la massa di un ammasso di galassie è l'entropia. Questa quantità può essere considerata solamente se il sistema in questione può essere considerato chiuso e se è valida la condizione di equilibrio idrodinamico dell'ICM. Se queste condizioni sono verificate, allora possiamo utilizzare l'entropia, definita nel seguente modo

$$S = \frac{k_b T_{gas}}{(n_e)^{2/3}}, \quad (2.10)$$

ed ottenere quindi la seguente relazione che lega l'entropia con la massa totale dell'ammasso:

$$S \propto T_{gas} \propto M_{tot}^{2/3}. \quad (2.11)$$

La condizione più stringente è quella dell'equilibrio idrodinamico, la quale è verificata solamente per le zone centrali dell'ammasso di galassie. Le zone più interne sono quelle

più evolute, ma anche qui si possono avere dei fenomeni che rompono l'equilibrio idrodinamico, come ad esempio l'attività di AGN. Per le zone più esterne dell'ammasso di galassie è più difficile mantenere l'equilibrio idrodinamico a causa dei molteplici fenomeni fisici che si verificano.

Grazie alle moderne survey multibanda sarà possibile analizzare e studiare le relazioni di scala, di cui abbiamo parlato in questo paragrafo, più facilmente e per un grande insieme di sorgenti. Questo ci permetterà di migliorare nuovamente le tecniche e le procedure in uso per la stima della massa degli ammassi di galassie e dei parametri cosmologici.

2.3 Funzione di Massa

Il metodo per il calcolo della funzione di massa venne introdotto da Press e Schechter nel 1974. Nel loro articolo viene presentata una procedura, basata sulla teoria lineare, per ottenere la distribuzione delle masse degli oggetti collassati. Nella loro analisi considerano, come punto di partenza, dei semi di piccola massa distribuiti secondo la distribuzione di Poisson. Questi semi vengono considerati come i responsabili delle perturbazioni di materia. La distribuzione Poissoniana dei semi delle perturbazioni può essere interpretata come $P(k) \propto k^0$, ovvero come rumore bianco. Successivamente Efstathiou et al. [1979] generalizzarono la procedura introdotta da Press e Schechter, rendendola applicabile ad un modello cosmologico generico (Universo piatto) con uno spettro di potenza iniziale indipendente dalla scala (legge di potenza).

In questo paragrafo descriveremo la procedura per ottenere la funzione di massa e parleremo della sua importanza per la Cosmologia. Consideriamo un Universo EdS riempito da un gas freddo e con una pressione trascurabile, avente una distribuzione Gaussiana iniziale. La condizione di gaussianità è valida fintanto che rimaniamo nel regime lineare; una volta entrati nel regime non lineare l'assunzione di una distribuzione Gaussiana non è più applicabile. Con il passare del tempo il contrasto di densità cresce seguendo la teoria lineare. Il campo di densità, inizialmente gaussiano, rimane tale ma la sua varianza varia tendendo ad allargare la distribuzione. Grazie ad un opportuno filtraggio del contrasto di densità su di una scala R , alla quale è collegata la massa M , è possibile ottenere $\delta_M = \delta(\vec{x}; R)$. Introduciamo adesso la formula che fornisce la probabilità di avere una regione con una certa densità di massa:

$$P(\delta_M)d\delta_M = \frac{1}{(2\pi\sigma_M^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{\delta_M^2}{2\sigma_M^2}\right) d\delta_M, \quad (2.12)$$

nella quale la dipendenza dalla massa è rappresentata dalla quantità δ_M introdotta precedentemente. Nella teoria del collasso sferico, descritta nel paragrafo 1.6, le per-

turbazioni di densità che riescono a collassare e raggiungere l'equilibrio sono quelle che hanno un valore di $\delta \approx 180$, nel regime non lineare e per universi EdS. Tale valore corrisponde, nel caso lineare, al risultato ottenuto nell'equazione (1.56). Press e Schechter assumono che il valore $\delta_c = 1.686$ sia il valore soglia lineare oltre il quale tutta la massa va a finire nelle strutture virializzate che possiamo osservare nell'Universo. Poiché si utilizza la teoria lineare, l'utilizzo della soglia 1.686 è una valida approssimazione. In altre parole tutta la materia collassata è quella che si trova nella zona della gaussiana, che descrive la distribuzione del contrasto di densità, oltre la soglia critica. Andiamo quindi a calcolare la probabilità di avere $\delta > \delta_c$, integrando opportunamente l'equazione (2.12):

$$P_{>\delta_c}(M) = \int_{\delta_c}^{\infty} P(\delta_M) d\delta_M. \quad (2.13)$$

Utilizzando la formula appena trovata possiamo introdurre la formula di Press e Schechter, la quale permette di determinare la probabilità che un oggetto abbia una massa compresa in un determinato intervallo:

$$n(M)M dM = \rho_m [P_{>\delta_c}(M) - P_{>\delta_c}(M + dM)] = \rho_m \left| \frac{dP_{>\delta_c}}{d\sigma_M} \right| \left| \frac{d\sigma_M}{dM} \right| dM. \quad (2.14)$$

Questa formula presenta un problema quando andiamo a considerare il caso $M \rightarrow 0$, ovvero il caso limite in cui si pone come massa minima nelle strutture collassate $M = 0$. In teoria ci si aspetta di ottenere come valore della probabilità il valore massimo, cioè 1. Quello che si ottiene, invece, dall'equazione precedente è $P_{>\delta_c} \rightarrow 1/2$, ovvero solamente la parte positiva della gaussiana, che ricordiamo descrive la distribuzione del contrasto di densità, va a finire nelle strutture collassate. Questo è un effetto che deriva dalla teoria lineare dove solamente le regioni sovra-dense, che costituiscono la metà della massa totale, possono formare strutture. In realtà questo non accade, esiste infatti la probabilità di avere regioni sotto-dense che finiscono comunque all'interno delle strutture collassate. Questo effetto viene solitamente chiamato *Cloud-in-cloud problem*, il quale venne evitato da Press e Schechter introducendo un fattore 2, ad hoc, nella formula (2.14), senza dimostrarne la correttezza.

Quello che abbiamo trovato è una espressione analitica per la funzione di massa nella quale sono presenti varie dipendenza dai parametri cosmologici. Il primo parametro cosmologico che possiamo ricavare dalla funzione di massa è Ω_m dal quale dipende il valore di ρ_m . Le altre dipendenze dei parametri cosmologici sono tutte presenti all'interno di σ_m^2 . Ricordando la sua definizione descritta nell'equazione (1.45), essa è una funzione che dipende dalla massa che stiamo considerando e dal redshift (e dal raggio). Nella fattispecie la dipendenza dal redshift si trova all'interno dello spettro di

potenza, mentre la dipendenza dalla massa è presente all'interno del *raggio* sul quale viene filtrata la funzione di massa.

Durante questa trattazione è stato scelto come valore soglia il risultato ottenuto dalla teoria lineare per un Universo EdS, equazione (1.56). Questo valore è quasi indipendente dal modello cosmologico preso in considerazione, infatti il considerare universi molto aperti o chiusi avrebbe portato ad una piccola variazione del valore utilizzato. Viceversa nel caso non lineare si avrebbe una dipendenza molto più forte dalla Cosmologia utilizzata. Nel paragrafo 2.2 abbiamo introdotto le quantità R_{200} e M_{200} , le quali definiscono rispettivamente il raggio entro il quale abbiamo una densità pari a 200 volte la densità critica dell'Universo oppure la massa corrispondente ad una densità pari a 200 volte quella critica dell'Universo. Il valore 200 è ottenuto da un semplice arrotondamento del risultato ottenuto nell'equazione (1.54), il quale è valido per un Universo EdS. Così facendo si cerca di liberarsi dalla dipendenza della Cosmologia assunta.

Press e Schechter nella loro trattazione hanno considerato come spettro di potenza iniziale un rumore bianco. Come già descritto nel paragrafo 1.5, conosciamo lo spettro di potenza delle perturbazioni primordiali di densità ottenuto dall'inflazione. Andiamo quindi a valutare come si trasforma la funzione di massa ottenuta nell'equazione (2.14) considerando uno spettro di potenza iniziale a legge di potenza, $P(k) \propto k^n$. Cambiando lo spettro di potenza iniziale cambierà anche la varianza di massa, la quale sarà $\sigma_m \propto M^{-\alpha}$ con $\alpha = (n + 3)/6$. Definiamo:

$$M_\star \equiv \left(\frac{2}{\delta_e^2} \right)^{1/2\alpha} M_0, \quad (2.15)$$

la quale verrà utilizzata in seguito. Utilizzando la quantità appena definita ed applicando le modifiche sopra descritte nell'equazione (2.14) otteniamo il seguente risultato:

$$n(M) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\rho_m \alpha}{M_\star^2} \left(\frac{M}{M_\star} \right)^{\alpha-2} \exp \left[- \left(\frac{M}{M_\star} \right)^{2\alpha} \right]. \quad (2.16)$$

Come è possibile notare anche in Figura 2.2, la funzione di massa assume un andamento tipico a legge di potenza con un taglio esponenziale che agisce per masse superiori alla massa definita nell'equazione (2.15). La massa relativa al ginocchio di questa funzione corrisponde alla massa delle strutture che si stanno formando al redshift considerato. L'evoluzione con il redshift della funzione di massa è mostrata in Figura 2.2; si può notare facilmente come con il passare del tempo si formino oggetti di massa sempre maggiore.

La variazione della coda esponenziale è dovuta alla variazione nel tempo della varianza, la quale evolve in teoria lineare $\sigma_m^2(z) = \sigma_m^2(z=0)\delta_+^2$. Utilizzando soprattutto il conteggio degli ammassi di galassie è possibile ottenere dei vincoli su due parametri cosmologici: σ_8 e Ω_m . Tra questi due parametri cosmologici, però, è presenta una

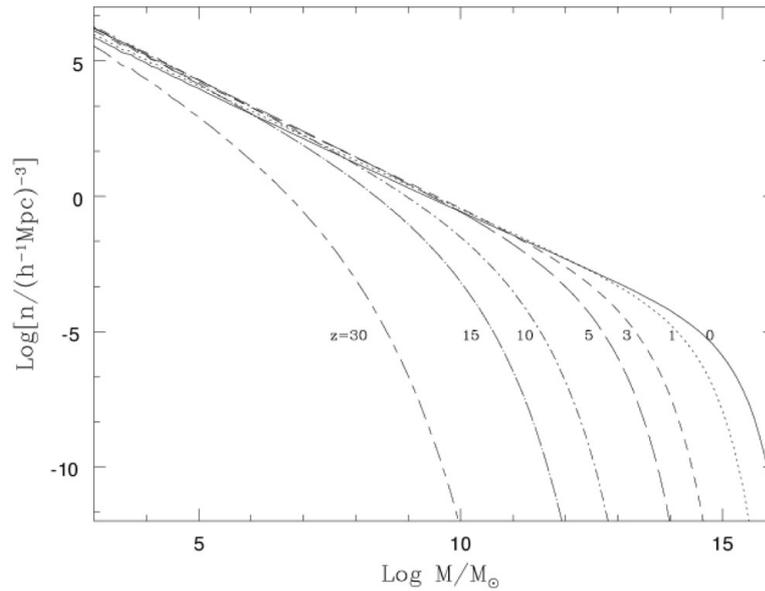


Figura 2.2: Andamento della funzione di massa in funzione del redshift. Con il diminuire del redshift il valore della massa limite aumenta così come il cut-off esponenziale. Un'altra quantità che aumenta con il passare del tempo è quindi la massa degli oggetti che si formano. Immagine presa da <https://ned.ipac.caltech.edu>.

degenerazione che non permette inizialmente una stima efficace dei due parametri. Per spezzare questa degenerazione e per avere una migliore stima di questi parametri cosmologici è necessario contare gli ammassi non solo a $z = 0$ ma a vari redshift, utilizzando le osservazioni X e sfruttando l'effetto S-Z, procedure descritte nel paragrafo 2.1.2.

La funzione di massa introdotta da Press e Schechter inizialmente non ebbe molto successo. Con i primi risultati ottenuti dalle simulazione numeriche a N-corpi si osservò un buono accordo tra la funzione di massa ed i risultati. Questo portò gli studiosi a porre maggiore attenzione sulla funzione di massa, cercando nuove procedure per migliorarla. Sheth and Tormen [1999], considerarono, invece di un collasso sferico, un collasso ellissoidale per la formazione delle strutture. L'assunzione del collasso sferico infatti è abbastanza semplicistica e non del tutto veritiera. I risultati ottenuti da Sheth e Tormen comportano principalmente un aumento di oggetti di grande massa, relativi alla coda esponenziale della funzione di massa. Questi risultati, inoltre, trovano conferme anche dai risultati delle simulazioni numeriche.

2.4 Simulazioni Numeriche

Nel paragrafi precedenti abbiamo descritto l'evoluzione delle perturbazioni di densità e del contrasto di densità, assumendo di rimanere in regime lineare. Nel paragrafo 1.6 abbiamo descritto l'evoluzione del contrasto di densità delle perturbazioni utilizzando l'approssimazione del collasso sferico. Questa procedura analitica ci ha permesso di ottenere dei risultati validi nonostante le forti assunzioni fatte sulle condizioni iniziali del sistema. Nel paragrafo 2.3 abbiamo introdotto la necessità di utilizzare le simulazioni numeriche a N-corpi per descrivere la teoria non lineare. Queste simulazioni ci permettono di risolvere il problema degli N-corpi, il quale consiste nel risolvere le equazioni del moto per un sistema composto da $N > 1$ particelle che interagiscono tra di loro solamente tramite la gravità. Considerando il caso $N = 2$ sono state trovate delle soluzioni analitiche (Teoria di Keplero), mentre per $N > 2$ è stato dimostrato da Poincaré nel 1890 che non esistono soluzioni analitiche, tranne nel caso di assunzioni forti e molto restrittive. Grazie alle simulazioni numeriche siamo in grado di ottenere delle soluzioni soddisfacenti al problema degli N-corpi, le quali vengono confrontate con le osservazioni per ottenere dei vincoli sui fenomeni fisici presi in esame. Le simulazioni numeriche $N - body$ sono molto utili in quanto permettono di valutare l'evoluzione di un sistema composto da particelle di DM sul quale l'unica forza in gioco è la gravità. Al fine di ottenere dei risultati soddisfacenti da una simulazione, il sistema di cui vogliamo studiare l'evoluzione dovrà soddisfare alcune condizioni: le proprietà fisiche del sistema devono poter essere rappresentate da un numero finito di particelle; devono essere note le condizioni iniziali del sistema; devono essere note le forze che concorrono all'evoluzione del sistema; le equazioni che regolano la dinamica del sistema in esame devono essere numericamente risolvibili. Se il sistema in esame soddisfa queste condizioni allora, con l'implementazione di opportuni metodi numerici, potremo ottenere dei risultati affidabili dalla simulazione numerica, i quali potranno essere confrontati in seguito con le osservazioni.

Nel capitolo precedente abbiamo visto come la formazione delle strutture sia basata sull'instabilità gravitazionale. Utilizzando le simulazioni numeriche a N-corpi è possibile ottenere dei risultati soddisfacenti sia per la DM che per la materia barionica, nonostante siano necessarie per quest'ultima alcune assunzioni. Prendendo il caso della DM, la quale risulta più semplice da trattare a causa delle proprietà delle sue particelle, è possibile utilizzando le simulazioni numeriche andare a studiare l'evoluzione di un sistema composto solamente da particelle di DM e dove l'unica forza in gioco è la gravità. In Figura 2.3 è mostrato un dettaglio della *Millennium Run*, simulazione che ha considerato l'evoluzione di più di 10^{10} particelle, in una regione cubica di Universo di lato pari a $\simeq 600Mpc$.

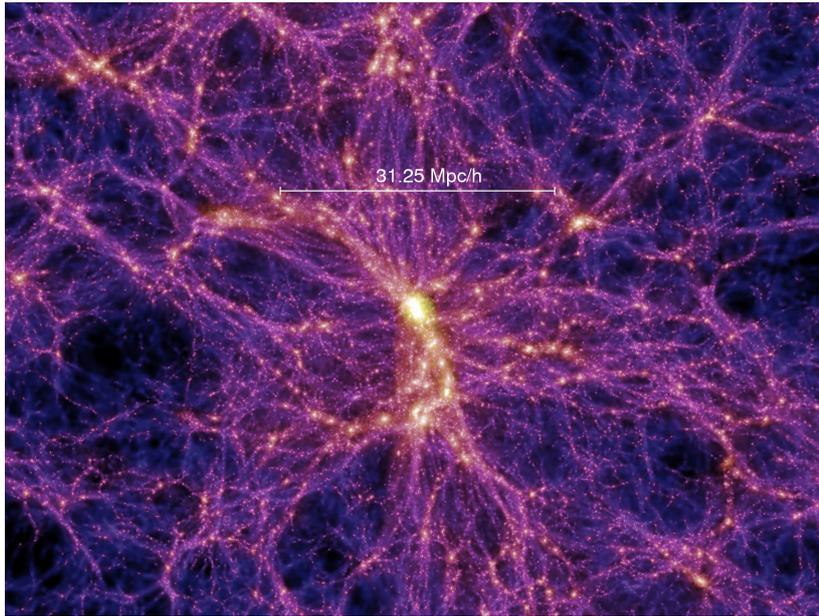


Figura 2.3: Dettaglio della simulazione numerica *Millennium Run*. Immagine presa da <http://wwwmpa.mpa-garching.mpg.de/galform/virgo/millennium/>

Uno dei più grandi problemi di simulazioni numeriche così imponenti è il tempo di calcolo. Quello che si cerca infatti è di implementare metodi numerici efficienti da un punto di vista di velocità di calcolo ma che siano altrettanto precisi e corretti. Introduciamo adesso alcuni metodi numerici utilizzati nelle simulazioni numeriche a N-corpi descrivendo brevemente le loro caratteristiche.

Metodo *Particle-Particle* (PP) : consiste nel calcolare la forza che agisce su ogni singola particella sommando le componenti della forza dovute alle altre particelle della simulazione. Il calcolo della forza attraverso questo metodo è molto accurato ma comporta un tempo di calcolo molto lungo; per questo motivo è consigliabile utilizzare tale metodo per sistemi rappresentabili da un numero limitato di particelle ($< 10^6$).

Metodo *Particle-Mesh* (PM) : sfrutta contemporaneamente un approccio Lagrangiano ed Euleriano. Esso considera sia le particelle presenti nella simulazione sia una griglia, la quale divide l'intero volume in piccole celle associando ad ognuna di esse il rispettivo valore del potenziale gravitazionale e delle altre variabili del campo. Successivamente si va a calcolare la densità del fluido, rappresentato dalle particelle, in ogni cella. Questo metodo ha un tempo di calcolo molto più basso ma anche una accuratezza più bassa dovuta all'introduzione della griglia, la quale genera un limite inferiore alla risoluzione spaziale.

Metodo *Particle-Particle-Particle-Mesh* (P^3M) : è una combinazione dei due metodi precedenti ed è stato sviluppato per avere l'accuratezza del metodo PP e la velocità di calcolo del metodo PM. La forza viene calcolata come somma di due componenti: la prima, relativa a piccole distanze, viene calcolata con il primo metodo mentre la seconda, relativa a distanze grandi, con il secondo metodo. Uno dei problemi di questo metodo è la scelta della distanza limite che separa la breve dalla lunga distanza. L'opportuna scelta di questa distanza ci permette di avere una simulazione più accurata o più veloce.

Codice *Tree* : sviluppato da Barnes and Hut [1986] questo algoritmo sfrutta una classificazione gerarchica ad albero delle particelle per avere una maggiore accuratezza ed una più alta velocità nel calcolo della forza. Il volume della simulazione viene suddiviso in un numero di celle cubiche sempre maggiore, quindi con celle sempre più piccole, fino a quando in ogni cella è presente al massimo una particella. Utilizzando il metodo PP viene calcolata la forza che agisce sulla particella considerando le celle vicine, mentre con il metodo PM si calcola la forza dovuta alle particelle presenti nelle celle distanti. Essendo questo algoritmo un'evoluzione del metodo PM, si avrà lo stesso tempo di calcolo ma con una precisione molto maggiore.

Per avere una simulazione completa sul processo di formazione delle strutture non possiamo utilizzare solamente una simulazione a N-corpi. Una trattazione più completa e dettagliata dell'evoluzione dinamica della formazione delle strutture necessita di metodi numerici, nella fattispecie di simulazioni idrodinamiche quando viene considerata non solo la materia oscura ma anche quella barionica. Grazie alle simulazioni idrodinamiche, infatti, è possibile valutare contemporaneamente sia l'evoluzione delle particelle di DM sia quella della materia barionica, considerando tutti i vari fenomeni fisici che si verificano durante la formazione di una struttura: la dinamica e il raffreddamento del gas, la formazione delle galassie e la loro conseguente dinamica ed evoluzione, la formazione stellare e l'evoluzione delle varie popolazioni stellari, i feedback delle stelle e degli AGN che influenzano la materia circostante. Una buona simulazione idrodinamica quindi dovrà tener conto essenzialmente e contemporaneamente di due fattori: la gravità e l'astrofisica del gas. I metodi numerici che solitamente vengono utilizzati nelle simulazioni idrodinamiche si dividono in due tipologie: i metodi *Lagrangiani* e quelli *Euleriani*. L'approccio Lagrangiano consiste nel suddividere il fluido in esame in un numero discreto di particelle di fissata massa. Successivamente si studia l'evoluzione in funzione del tempo delle proprietà fisiche del fluido che ci interessano seguendo il cambio di posizione dell'elemento del fluido. L'approccio Euleriano invece studia l'evoluzione delle proprietà fisiche del sistema in esame in funzione del tempo fissando però un punto preciso dello spazio, il quale rappresenterà la risoluzione spaziale della simulazione. Le simulazioni idrodinamiche, quindi, sono simulazioni numeriche molto imponenti e complesse, che cercano di descrivere contemporaneamente l'evoluzione

della materia oscura e della materia barionica.

Un altro strumento molto utile per la costruzione di cataloghi di galassie simulati o per lo studio dell'evoluzione delle DM e della materia barionica sono i metodi semi-analitici. Questi metodi sono molto utili perché sfruttano i risultati delle simulazioni a $N - body$ per quanto riguarda l'evoluzione degli aloni di DM, e successivamente, tramite l'inserimento di modelli, cercano di ottenere dei risultati il più vicino possibile alle osservazioni. Un algoritmo che cerca di prevedere o simulare gli effetti della fisica dei barioni nella formazione delle strutture e, di conseguenza, nelle galassie è l'algoritmo *GALFORM* (Merson et al. [2013]). Si tratta di un algoritmo semi-analitico che modella la formazione ed evoluzione stellare all'interno delle galassie e la loro storia dei merger per ottenere molte proprietà delle galassie. Grazie a questo algoritmo è possibile modellare i processi fisici che sono alla base della formazione ed evoluzione delle galassie. Utilizzando questo algoritmo è possibile valutare il collasso ed i merging degli aloni di materia oscura; il raffreddamento ed il riscaldamento del gas, dovuto agli shock, all'interno degli aloni che comporta la formazione del disco galattico; valutare la formazione stellare quiescente all'interno del disco galattico; tenere conto dei fenomeni di feedback dovuti alle supernovae, agli AGN o alla foto-ionizzazione del gas intergalattico (IGM); l'arricchimento chimico delle stelle e del gas della galassia; valutare il fenomeno della frizione dinamica che porta ai merging tra galassie dell'alone di materia oscura o a fenomeni di *starburst*. Merson et al, nel loro lavoro, hanno applicato l'algoritmo *GALFORM* ai risultati della simulazione numerica *Millennium Simulation*, con il fine di costruire dei cataloghi mock di galassie.

Nei paragrafi successivi verranno introdotti brevemente alcuni metodi semi-analitici, come ad esempio i metodi HAM e SHAM, metodi molto utili ed utilizzati per la costruzione dei cataloghi di galassie e per le simulazioni numeriche. Verrà, inoltre, descritta la procedura standard per la creazione di un catalogo simulato di galassie.

2.5 Struttura di un catalogo simulato

Come già anticipato, un catalogo simulato di galassie può essere utilizzato per lo studio di molteplici aspetti. Un catalogo di galassie quindi deve contenere non solo informazioni riguardanti le singole galassie che lo compongono, come ad esempio il redshift o la loro magnitudine in bande osservative diverse, ma deve anche contenere informazioni riguardanti il clustering delle galassie. La possibilità di avere informazioni, non solo sulle galassie, ma anche sugli ammassi di galassie che esse compongono, permette ai cataloghi di galassie di poter essere utilizzati anche per studi legati ad essi. In questo lavoro verranno descritti i cataloghi di galassie simulati, cioè i cataloghi *MOCK*. I cataloghi simulati, di cui parleremo successivamente, ci permettono anche di testare i risultati ottenuti dalle simulazioni numeriche confrontandoli con le osservazioni, in

modo tale da verificare se le condizioni imposte alla simulazione riproducono in modo corretto o meno le distribuzioni osservate.

Come anticipato nel capitolo 2, lo studio degli ammassi di galassie e della loro distribuzione spaziale ci permette di ottenere dei vincoli su alcuni parametri cosmologici fondamentali. Come sappiamo gli ammassi di galassie e le galassie stesse si formano nelle buche di potenziale generate dagli aloni di materia oscura. Diventa quindi opportuno l'utilizzo delle simulazioni numeriche a N-corpi per poter ottenere informazioni sulla distribuzione di questi aloni di DM, in modo da poter creare un catalogo di galassie il più vicino possibile alle osservazioni.

Tutte le informazioni sulle galassie che compongono un catalogo di galassie vengono raccolte tramite le survey. Queste particolari osservazioni sono strutturate per poter osservare grandi porzioni di cielo con una profondità che può variare fino a raggiungere anche redshift elevati. Grazie a queste caratteristiche è quindi possibile osservare grandi campioni di oggetti e di ottenere per ciascuno di essi tutte le informazioni necessarie per una completa caratterizzazione. Grazie alle informazioni ottenute tramite le simulazioni numeriche e le survey risulta quindi possibile costruire un catalogo di galassie o, più precisamente, di ammassi di galassie. Questi cataloghi vengono creati in modo tale da essere il più rappresentativi possibile delle osservazioni, ovvero si cerca di riprodurre al meglio le funzioni di luminosità e i diagrammi colore-magnitudine osservati attraverso l'utilizzo delle survey, ma anche altre proprietà, quali la dipendenza del clustering dalla luminosità e dal colore, nonché quelle direttamente legate agli ammassi di galassie.

La struttura di un catalogo di galassie è essenzialmente semplice, mentre la sua costruzione è un processo ben più complesso del quale parleremo più specificatamente nel paragrafo successivo. Gli ammassi di galassie presenti nel catalogo hanno tutti una galassia centrale ed un alone di DM di appartenenza. Successivamente, in base alla dimensione dell'alone di materia oscura e alle proprietà della galassia centrale, vengono assegnate le cosiddette galassie satellite con tutte le loro proprietà e caratteristiche, quali la loro magnitudine in bande osservative diverse, la loro posizione e la loro velocità. L'assegnazione delle galassie satellite e la costruzione degli ammassi di galassie viene fatta in modo da ottenere una funzione di luminosità degli ammassi di galassie il più vicina possibile a quella delle osservazioni, in modo tale da rendere il catalogo di galassie il più realistico possibile. L'utilizzo delle simulazioni numeriche, per aggiungere le proprietà di clustering delle galassie e più in generale degli ammassi di galassie, dipende chiaramente dal modello cosmologico utilizzato. L'assegnazione delle galassie ai loro rispettivi ammassi di galassie invece viene fatta tramite l'utilizzo di algoritmi generali che possono essere applicati, con piccole ed opportune modifiche, ad ogni modello cosmologico.

Nel paragrafo successivo parleremo della fase di costruzione di un catalogo simulato e dei vari algoritmi che vengono utilizzati, ponendo attenzione anche sulle assunzioni

necessarie al fine di ottenere un catalogo di galassie utilizzabile per molteplici studi.

2.6 Costruire un catalogo

Per costruire un catalogo di galassie il punto di partenza è quello di individuare gli aloni di materia oscura, la loro distribuzione spaziale e di velocità ed individuare le loro proprietà fondamentali, quali la massa, la loro posizione e la velocità del loro centro di massa. Queste caratteristiche vengono successivamente utilizzate come punto di partenza per la collocazione delle galassie al loro interno. Per fare ciò sono disponibili diverse tecniche e diversi algoritmi. Il primo metodo è quello di utilizzare le simulazioni numeriche a N-corpi con l'aggiunta di algoritmi idrodinamici in modo tale da avere non solo informazioni sulla formazione ed evoluzione degli aloni di materia oscura, ma anche delle galassie che li popolano. Questa tecnica però richiede tempi di calcolo molto lunghi e diventa quindi praticamente inutilizzabile per costruire un catalogo utile per fini cosmologici. Questo metodo infatti viene utilizzato quando si considerano regioni dell'Universo abbastanza piccole in modo tale da ridurre il tempo di calcolo. Per la costruzione di un catalogo di galassie simulato utilizzabile anche per la cosmologia si avrebbe bisogno di una simulazione su scale molto grandi e con una buona accuratezza il che, inevitabilmente, allunga i tempi di calcolo in modo smisurato. Un altro metodo è quello dei Modelli Semi Analitici (SAMs) i quali cercano di riprodurre la formazione e l'evoluzione delle galassie utilizzando formule analitiche semplificate applicate sui risultati delle simulazioni N-body di materia oscura. In questo modo si cerca di riprodurre approssimativamente la formazione stellare e tutti i fenomeni di feedback, assumendo una crescita gerarchica delle strutture. I più moderni SAM hanno come input anche la storia dei merging tra aloni di materia oscura, ottenuta dalle moderne simulazioni numeriche a N-corpi. In questo modo si riesce ad avere informazioni sulla distribuzione spaziale e di velocità degli aloni e dei sub-aloni. Un'altra procedura è quella di utilizzare i metodi HAM o SHAM (*Halo Abundance Matching* o *Sub-Halo Abundance Matching*). Questi metodi assumono una relazione monotona tra determinate proprietà delle galassie e la massa, o la dinamica, dell'alone che le ospita. Anche questi metodi sfruttano l'algoritmo HOD (*Halo Occupation Distribution*) per ottenere la probabilità che un alone con una determinata massa contenga al suo interno un numero di galassie di un certo tipo. Al fine di rispettare le osservazioni e per rendere il catalogo di galassie il più realistico possibile è necessario considerare e suddividere le galassie per colore, in modo tale da riuscire a rispettare le relazioni colore-magnitudine osservate negli ammassi di galassie. I metodi HAM/SHAM utilizzano, inoltre, l'algoritmo CLF (*Conditional Luminosity Function*), il quale estende l'approccio dell'algoritmo HOD e fornisce il numero di galassie presenti in un alone con determinata massa in funzione della luminosità. I metodi sopra descritti sono quelli più utilizzati, in particolar modo

i metodi HAM/SHAM che ci permettono, non solo di creare un catalogo che rispetti la distribuzione spaziale degli aloni e il clustering delle galassie e degli ammassi di galassie, ma rispettano anche le proprietà osservative degli ammassi, quali la funzione di luminosità e la relazione colore-magnitudine. Al fine di creare un catalogo di galassie simulato non è sufficiente però l'utilizzo di questi metodi ed algoritmi, ma risultano necessari numerosi passaggi successivi ed assunzioni che brevemente andremo a descrivere. Questi metodi possono essere considerati come il punto di partenza per la creazione di un catalogo di galassie simulato.

2.6.1 Aloni di DM

Come già anticipato in precedenza, il primo passaggio per la costruzione di un catalogo di galassie simulato è quello di identificare, dalle simulazioni numeriche a N-corpi gli aloni di DM e la loro distribuzione spaziale e di velocità. Come già anticipato nel paragrafo 2.5, i moderni cataloghi di galassie vengono costruiti attraverso metodi ed algoritmi del tutto generici, i quali possono essere applicati ad ogni modello cosmologico. Una volta ottenuti i risultati dalla simulazione numerica viene solitamente utilizzato l'algoritmo FoF (*Friends of Friends*), al fine di identificare gli aloni di materia oscura. L'algoritmo FoF semplicemente considera la distanza relativa tra tutte le particelle della simulazione, cercando e selezionando quelle più vicine tra loro. Uno dei parametri che devono essere scelti a priori è proprio la massima distanza tra le particelle, la cosiddetta *linking length* la quale solitamente viene indicata con b . La scelta più comune è quella di prendere $b = 0.2$. Successivamente è necessario scegliere il numero minimo di particelle che compongono un alone, solitamente posto uguale a 10. Viene imposto un numero minimo di particelle che compongono un alone in modo tale da poter riuscire a descrivere le proprietà dell'alone, anche se molto piccolo. Non imponendo un numero minimo di particelle si potrebbe verificare errori di carattere statistico nella descrizione e rappresentazione delle proprietà dell'alone. La scelta del numero di particelle minimo per formare un alone incide anche sulla magnitudine minima che il catalogo di galassie può avere. Decidendo di selezionare aloni di DM piccoli si ha la possibilità di avere un catalogo molto più completo con un intervallo di magnitudini più grande. Una volta ottenuti gli aloni di DM dall'algoritmo FoF vengono calcolate per ciascun alone la massa, successivamente la posizione e la velocità del centro di massa dell'alone stesso. Utilizzando questa procedura si otterrà un catalogo di aloni di DM con tutte le caratteristiche necessarie per il passaggio successivo, ovvero l'assegnazione, a ciascun alone, delle galassie.

2.6.2 Assegnare le galassie

Una volta ottenuto l'insieme di aloni di DM, il passo successivo è quello di popolare tali aloni con le galassie. Solitamente viene utilizzato l'algoritmo HOD, descritto nel paragrafo 2.6. Generalmente viene assunto che ogni alone sia popolato da una galassia centrale e da varie galassie satellite a seconda della massa dell'alone. Il numero di galassie satellite di un alone viene calcolato in funzione della luminosità e del clustering dell'alone, in modo da avere la miglior corrispondenza con le osservazioni. Una volta selezionata la galassia centrale dell'alone viene calcolato il numero di galassie satellite, assumendo che seguano una distribuzione Poissoniana. Tipicamente viene scelto un valore minimo per la massa degli aloni, in modo tale che aloni con massa inferiore a tale valore limite non vengano popolati né dalla galassia centrale né dalle galassie satellite. Il numero di galassie satellite, quindi, dipenderà anche dalla massa dell'alone stesso.

Una volta trovato il numero di galassie presenti in ciascun alone si provvederà all'assegnazione della luminosità per ciascuna galassia. Per quanto riguarda l'assegnazione della luminosità alla galassia centrale viene utilizzata la relazione $M_{halo} - L_{gal}$, la quale mette in relazione la luminosità delle galassie che popolano l'alone con la sua massa. Successivamente, utilizzando la funzione di luminosità, vengono assegnate le luminosità alle varie galassie satellite con la condizione che una galassie satellite non può essere più luminosa di quella centrale. In questo modo si otterrà che la distribuzione globale delle luminosità delle galassie seguirà la funzione di luminosità osservata. Un'altra assunzione che viene fatta è quella di non poter assegnare la stessa luminosità di un campione a più di una galassia satellite all'interno dello stesso alone. Per strutture contenenti un gran numero di galassie satellite può succedere che ad alcune galassie non venga assegnata una luminosità. Questo problema è stato considerato da Carretero et al. [2015], i quali hanno notato che il numero di galassie lasciate senza luminosità rimane comunque molto piccolo. Per non lasciare queste galassie senza una luminosità assegnata loro hanno deciso di contrassegnarle con la luminosità minima del catalogo. Una volta che ogni galassia ha ottenuto la sua luminosità si procede al calcolo ed all'assegnazione della loro posizione all'interno dell'alone. La galassia centrale viene posta nel centro di massa dell'alone, mentre le galassie satellite vengono distribuite in modo da rispettare il profilo NFW. L'assegnazione della posizione delle galassie non è un passaggio semplice a causa di molteplici aspetti, i quali non verranno descritti approfonditamente in questo lavoro. Seguendo il profilo di NFW si ottiene che le galassie satellite tendono a non concentrarsi quanto dovrebbero ed è necessario inserire una correzione al profilo in modo tale da ottenere la giusta concentrazione osservata. Inoltre l'assunzione che gli aloni abbiano una forma sferica genera delle imprecisioni nella distribuzione spaziale delle galassie. Nei moderni cataloghi e anche in Carretero et al. [2015], viene considerata una forma triassiale dell'alone durante la collocazione delle galassie satellite.

L'ultimo passaggio di questa fase della creazione di un catalogo di galassie è quello di verificare se le proprietà delle galassie e degli ammassi di galassie osservati vengono rispettate oppure no.

2.6.3 Assegnare le velocità

Un altro passaggio molto importante per rendere un catalogo di galassie il più vicino alla realtà è quello di assegnare alle galassie una velocità peculiare, in modo da poter riprodurre gli effetti sulla misura del redshift. Essenzialmente ci sono due metodi per l'assegnazione della velocità alle galassie: il primo è quello di assegnare la velocità delle particelle di materia oscura direttamente alle galassie; il secondo invece è quello di seguire un modello che descriva la distribuzione delle velocità delle galassie. Carretero et al. [2015] hanno deciso di seguire il secondo metodo ed hanno assunto che le galassie centrali siano a riposo al centro dell'alone, senza quindi una velocità peculiare. Successivamente hanno assegnato la velocità delle galassie satellite partendo da un vettore di velocità dipendente dalla dispersione di velocità dell'alone. Hanno inoltre assunto che le proiezioni delle componenti di questo vettore lungo i tre assi cartesiani abbiano una distribuzione Gaussiana indipendente. Oltre a trascurare tutti gli effetti che determinano la velocità delle galassie all'interno degli aloni, hanno anche assunto che la velocità delle galassie satellite sia indipendente dalla loro posizione all'interno dell'alone stesso.

L'introduzione delle velocità delle galassie all'interno di un catalogo di galassie permette di riprodurre i più comuni effetti osservativi che si manifestano durante l'osservazione degli ammassi di galassie, ovvero l'effetto *Fingers of God* e l'effetto *Kaiser*. Il primo è dovuto alla dinamica delle galassie all'interno dell'alone, la quale genera un allungamento della distribuzione delle galassie lungo la linea di vista nello spazio del redshift: galassie appartenenti allo stesso alone e alla stessa distanza dall'osservatore, ma con velocità diverse, verranno osservate a redshift diversi. L'effetto Kaiser, invece, diventa evidente su scale molto più grandi: le galassie che stanno cadendo in regioni sovra-dense vengono viste più lontane se si trovano davanti alla zona sovra-densa e più vicine se si trovano dietro tale regione, rispetto, chiaramente, all'osservatore.

Un catalogo simulato di galassie che vuol essere considerato un buon rappresentante delle osservazioni, deve anche riprodurre questi effetti osservativi. Diventa quindi molto importante l'introduzione delle velocità delle galassie.

2.6.4 Assegnare il colore

Come già anticipato in precedenza, nel rispettare le osservazioni, un catalogo di galassie deve anche contenere informazioni a riguardo del colore delle galassie. La procedura di assegnazione del colore alle galassie è molto complicata e non verrà trattata approfonditamente in questo lavoro.

La luminosità delle galassie, in prima approssimazione, ci permette di avere informazioni sul numero di stelle all'interno di una galassia. Per avere informazioni, non solo sul numero di stelle ma anche sul tipo di stelle che formano le galassie, è necessario considerare ed introdurre il colore delle galassie, in quanto riflette la forma della distribuzione spettrale di energia (SED) di una galassia. Al fine di inserire le informazioni sul colore delle galassie all'interno del catalogo, si può utilizzare il diagramma colore-magnitudine.

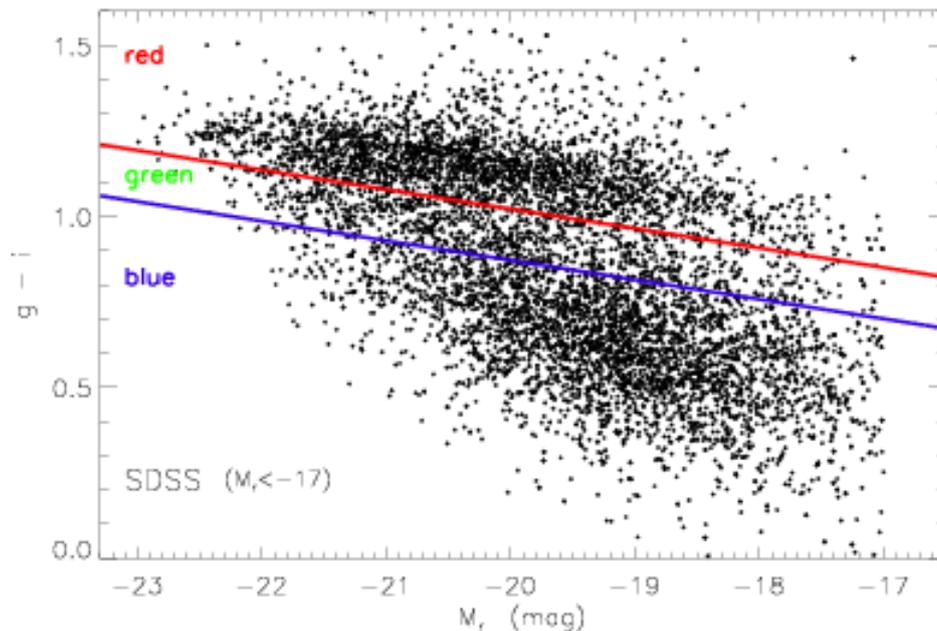


Figura 2.4: Nella figura è mostrato il diagramma colore-magnitudine ottenuto da un campione di galassie della SDSS con magnitudine in banda $r < -17$. Immagine presa da: <http://inspirehep.net/record/1247439/plots>

Come possiamo vedere in Figura 2.4, considerando la magnitudine delle galassie ed il loro colore, le galassie vengono suddivise in due grandi categorie, la sequenza rossa e la *Blue Cloud*, più una zona di transizione chiamata *green valley*. Le informazioni riguardanti il colore delle galassie all'interno del catalogo dovranno conseguentemente rispettare i diagrammi colore-magnitudine presenti all'interno delle osservazioni. Per fare ciò, oltre alle galassie della sequenza rossa e quelle della *Blue Cloud*, è necessario introdurre anche quelle appartenenti alla zona di transizione. Nonostante il loro piccolo numero, la loro mancata introduzione genera, all'interno del catalogo, delle corrispondenze errate con le osservazioni. Per assegnare il colore alle galassie del catalogo viene parametrizzato il diagramma colore-magnitudine con tre popolazioni Gaussiane di colore (una rossa, una blu ed una verde), dove la media e la deviazione standard di queste

popolazioni variano in funzione della luminosità delle galassie. Rykoff et al. [2014] nel loro lavoro hanno utilizzato la seguente procedura per assegnare il colore alle galassie in modo tale che seguissero al meglio la *Red Sequence*: il primo passo è stato quello di effettuare una prima selezione delle galassie considerate, con buona approssimazione, rosse. Successivamente hanno utilizzato queste galassie per effettuare una prima calibrazione della sequenza rossa in funzione del redshift. Il risultato da loro ottenuto può essere considerato una relazione colore-redshift media per le galassie considerate la quale verrà successivamente utilizzata per costruire la relazione colore-redshift globale. Le galassie utilizzate in questa calibrazione vengono considerate come galassie seme e verranno utilizzate nella procedura successiva, la quale consiste nell'utilizzare le informazioni sulla sequenza rossa di queste galassie per assegnare il colore alle altre galassie che compongono l'ammasso di galassie, in modo tale da avere una buona corrispondenza con la sequenza rossa osservata. Per fare questo vengono selezionate le galassie vicine alla galassia seme e vengono assegnati loro i rispettivi colori, utilizzando le informazioni sulla sequenza rossa. La procedura qui descritta è molto complessa e necessita di una trattazione matematica più completa, per la quale si rimanda all'articolo originale.

Capitolo 3

Algoritmi *Cluster-Finder*

Come già anticipato nei paragrafi precedenti, le simulazioni numeriche sono un utile strumento al fine di comprendere meglio l'evoluzione che la materia oscura e la materia barionica hanno avuto nel corso del tempo. L'obiettivo di queste simulazioni, come già anticipato, è quello di ottenere dei risultati il più possibile simili alle osservazioni, in modo tale da poter ottenere vincoli sempre più precisi sui parametri cosmologici che stiamo considerando.

Un altro strumento molto utile per lo studio e la comprensione di tutti gli aspetti che riguardano gli ammassi di galassie sono le survey. Queste ultime sono delle osservazioni che coprono grandi porzioni di cielo e che possono essere più o meno profonde, permettendoci di avere a disposizione informazioni su di un grande numero di oggetti. I risultati ottenuti tramite le survey e tramite le simulazioni numeriche possono essere combinati, in modo opportuno, per poter ottenere dei cataloghi di galassie simulati. Questi cataloghi possono essere utilizzati per molteplici aspetti, sia per programmare e calibrare una ulteriore survey, sia per studiare gli effetti di selezione durante le osservazioni, sia per calibrare e prevedere i possibili errori che possono verificarsi durante le osservazioni. Possono, inoltre, essere utilizzati per testare nuove tecniche per misurare i parametri cosmologici o per calibrare gli algoritmi che cercano gli ammassi di galassie o quelli che stimano i redshift fotometrici.

3.1 Algoritmi Cluster-Finder

I cataloghi di galassie simulati introdotti nei paragrafi precedenti sono in particolare uno strumento molto utile per lo sviluppo ed il miglioramento degli algoritmi *cluster-finder*. Questi algoritmi vengono infatti utilizzati per la ricerca e l'individuazione degli ammassi di galassie partendo, appunto, dalle osservazioni. Gli algoritmi *cluster-finder* possono assumere varie forme ed utilizzare tecniche diverse a seconda delle proprietà

delle galassie o degli ammassi di galassie che si vogliono utilizzare maggiormente. Esiste la possibilità di concentrarsi su di un singolo aspetto dell'ammasso di galassie, come ad esempio focalizzare l'attenzione sulla *Red Sequence* oppure sulle sovra-densità spaziali delle galassie; altri algoritmi, come quello utilizzato in questo lavoro, si basano invece sulle conoscenze generali che abbiamo sugli ammassi di galassie, senza privilegiare nessun aspetto in particolare. Vengono selezionati, quindi, tutti gli aspetti fisici che ci possono permettere di distinguere gli ammassi di galassie rispetto al background. In quest'ultimo caso viene delineato un profilo generale per gli ammassi, basato sulle proprietà e conoscenze che abbiamo sugli ammassi di galassie e, successivamente, si cerca di capire quali sono le caratteristiche principali che ci hanno permesso di identificare quell'ammasso rispetto al background. Gli altri metodi, invece, si basano su di una singola caratteristica degli ammassi di galassie, la quale successivamente viene ricercata applicandola al catalogo di galassie a disposizione.

Uno dei metodi per la ricerca degli ammassi di galassie è quello di andare a ricercare ed individuare le sovra-densità delle galassie rispetto al background. A tale scopo, sono stati sviluppati numerosi metodi che cercano in primo luogo degli addensamenti di galassie e successivamente definiscono il profilo che meglio descrive l'ammasso di galassie trovato. Al fine di ricercare queste sovra-densità esistono vari algoritmi, i quali sfruttano caratteristiche diverse. Ramella et al. [2001], hanno sviluppato un algoritmo per la ricerca delle sovra-densità delle galassie che sfrutta la *Voronoi Tessellation*. Questa tecnica è completamente non-parametrica ed è sensibile sia agli ammassi di galassie simmetrici sia a quegli ellissoidali, permettendo quindi lo studio di strutture che non hanno una simmetria sferica. Per una distribuzione di galassie seme la *Voronoi Tessellation* crea delle celle poligonali che contengono ognuna di essa un solo "*seme*" e racchiudono la regione per la quale il "*seme*" in questione rappresenta il "*seme*" più vicino (Panko and Flin [2004]). L'algoritmo proposto nel loro lavoro valuta la distribuzione bidimensionale delle galassie appartenenti al catalogo e, sfruttando la tecnica della tassellazione di Voronoi, ricerca le zone dove si ha una maggiore densità di oggetti rispetto alla densità media del campo. Una volta individuato un possibile ammasso di galassie, viene parametrizzata la sua forma ed il suo profilo radiale e di luminosità. Una delle qualità positive di questo algoritmo è il breve tempo di calcolo, ma si hanno comunque delle incertezze sugli oggetti identificati. Ad esempio questo algoritmo non riesce ad identificare come ammassi di galassie gli oggetti composti da poche galassie o che hanno una distribuzione molto sparpagliata. Si possono avere anche delle difficoltà a distinguere due ammassi di galassie che si trovano ad una piccola distanza in redshift. Un altro algoritmo che viene utilizzato per la ricerca delle sovra-densità è quello del Friend-of-Friend (FoF), introdotto da Li and Yee [2008]. Il metodo da loro proposto sfrutta, come punto di partenza, l'utilizzo dell'algoritmo FoF, il quale cerca le zone di sovra-densità bidimensionale utilizzando la distanza di separazione relativa tra le galassie. Per rendere il metodo più efficiente e completo è stato introdotto l'utilizzo

dei redshift fotometrici delle galassie. Per delineare meglio un ammasso di galassie ed i membri che lo compongono, viene assegnato ad ogni galassia il proprio redshift fotometrico con la relativa incertezza. Successivamente viene riutilizzato l'algoritmo FoF in modo da aggiungere o togliere nuovi membri all'ammasso di galassie precedentemente identificato. Questo lavoro sfrutta, quindi, l'algoritmo FoF per individuare gli oggetti su di un piano bidimensionale. L'aggiunta dell'informazione del redshift fotometrico delle galassie permette di utilizzarlo in modo tridimensionale ed avere quindi una più completa caratterizzazione dell'ammasso di galassie.

Gli algoritmi che si basano sulla red-sequence delle galassie sfruttano essenzialmente le proprietà e le caratteristiche di queste galassie. Generalmente il centro di ammasso di galassie è popolato da galassie di tipo E/S0. Queste galassie sono tendenzialmente più rosse rispetto alle galassie di campo, fissato il redshift. Gli algoritmi che usufruiscono di questa informazione effettuano un taglio nel diagramma colore-magnitudine e ricercano le zone di sovra-densità di galassie più rosse rispetto al campo. In questo modo permettono di ottenere dei candidati ammassi di galassie. L'algoritmo utilizzato da Koester et al. [2007], si basa essenzialmente sulle informazioni derivate dalla *Red-Sequence*, con l'aggiunta dell'individuazione della galassia più brillante appartenente ad un ammasso di galassie. Per ogni galassia del catalogo da loro utilizzato, l'algoritmo calcola la probabilità della galassia di appartenere alla red-sequence e la probabilità di avere le caratteristiche necessarie per essere considerata una BGC (*Brightest Galaxy Cluster*). Il metodo utilizzato nel nostro lavoro non si sofferma sulla ricerca di uno specifico membro dell'ammasso di galassie, ma valuta il contrasto tra la funzione di luminosità di un ammasso di galassie a fissato redshift con la funzione di luminosità, a quel redshift, del background. Il metodo da noi utilizzato assegnerà un peso statistico maggiore alle galassie molto luminose, le quali vengono comunque utilizzate come indicatori di un ammasso di galassie. L'assegnazione di un peso statistico alle galassie a seconda della loro luminosità permette al nostro metodo di poter individuare sia i grandi ammassi di galassie, sia i gruppi piccoli e poco brillanti.

Come già anticipato in precedenza, gli algoritmi *cluster-finder* si possono basare su di una particolare caratteristica o proprietà di un ammasso di galassie o di una galassia in particolare. Sono stati sviluppati inoltre degli algoritmi che non si focalizzano su di un singolo aspetto, ma che prendono in considerazione una funzione, detta Filtro, che cerca di descrivere in modo generale le caratteristiche principali di un ammasso di galassie. Un algoritmo così strutturato è quello proposto nel lavoro di Postman et al. [1996]. Nel suo lavoro viene creata la funzione Filtro partendo dal profilo radiale e di luminosità degli ammassi di galassie. Per il profilo radiale è stato utilizzato un profilo di NFW (Navarro-Frenk-White), mentre per il profilo di luminosità la funzione di Schechter.

L'algoritmo *Optimal Filtering*, che verrà descritto nel paragrafo 3.4 e che è stato utilizzato in questo lavoro, può essere considerato un'evoluzione di questo tipo di

approccio.

3.2 Algoritmo redMaPPer

Uno degli algoritmi che sfruttano la red-sequence per la ricerca degli ammassi di galassie è il redMaPPer (red-sequence Matched-filter Probabilistic Percolation). Questo algoritmo, sviluppato da Rykoff et al. [2014], utilizza, per la ricerca degli ammassi di galassie, la tecnica della red-sequence. Questo particolare algoritmo può essere diviso in due fasi: la prima è la fase della calibrazione, dove l'algoritmo calibra le proprietà della red-sequence in funzione del redshift; la seconda fase è quella della ricerca degli ammassi di galassie e della stima della loro ricchezza. Il redMaPPer è un algoritmo iterativo, inizialmente viene utilizzata una calibrazione del colore rozza per cercare gli ammassi di galassie. Gli ammassi trovati vengono utilizzati per ottenere una calibrazione della red-sequence migliore. Successivamente viene effettuata un'ulteriore esecuzione dell'algoritmo per ottenere nuovi ammassi di galassie o, semplicemente, per definire meglio gli ammassi di galassie trovati in precedenza. Le informazioni della red-sequence vengono utilizzate dall'algoritmo anche per ottenere ed assegnare ad ogni galassia, e quindi ad ogni ammasso, un proprio redshift fotometrico. La continua riclibrazione della red-sequence permette quindi di ottenere valori sempre più precisi per il redshift dei vari oggetti considerati.

Lo stimatore della ricchezza di un ammasso di galassie nell'algoritmo redMaPPer è descritto dalla quantità λ , la quale rappresenta il numero di galassie appartenenti all'ammasso di galassie. Quando viene trovata una nuova galassia vicino ad un ammasso di galassie, l'algoritmo calcola la probabilità che tale galassia sia effettivamente un membro dell'ammasso. La probabilità è definita come segue:

$$p_{mem} = p(\vec{x}) = \frac{\lambda u(\vec{x}|\lambda)}{\lambda u(\vec{x}|\lambda) + b(\vec{x})}, \quad (3.1)$$

dove il vettore \vec{x} descrive le proprietà osservabili di una galassia (posizione, magnitudine, colore); la quantità $u(\vec{x}|\lambda)$ rappresenta il profilo di densità dell'ammasso di galassie normalizzato a 1, mentre la quantità $b(\vec{x})$ indica il profilo di densità del background. Per ogni galassia trovata, quindi, l'algoritmo calcola la probabilità che essa appartenga ad un ammasso di galassie vicino.

Rykoff et al. nel loro lavoro hanno definito il profilo di densità dell'ammasso di galassie partendo da un profilo radiale e da un profilo di luminosità. Per quanto riguarda il profilo radiale hanno utilizzato un profilo di NFW, mentre per il profilo di luminosità hanno utilizzato una modifica della funzione di Schechter:

$$\phi(m_i) \propto 10^{-0.4(m_i - m_*)(\alpha + 1)} \exp(-10^{-0.4(m_i - m_*)}). \quad (3.2)$$

Nel loro lavoro hanno posto $\alpha = 1$, indipendentemente dal redshift, in modo da ottenere il miglior accordo con i dati. La quantità m_* , detta magnitudine caratteristica, è una quantità che viene calcolata per una popolazione stellare (con correzione k) che evolve con il redshift. Tale quantità quindi, assumerà valori diversi a seconda dell'intervallo di redshift che stiamo considerando.

L'ultimo passaggio dell'algoritmo redMaPPer è quello chiamato *percolation*, il quale consiste nell'assegnare agli ammassi di galassie le proprie galassie e controllare che gli ammassi di galassie trovati vengano contati una sola volta. Le quantità che vengono utilizzate in questa fase sono la ricchezza, λ , ed il redshift fotometrico assegnato ad ogni galassia, z_λ . Per ogni ammasso di galassie viene assegnata una galassia centrale e tutte le galassie satellite a seconda della loro probabilità di appartenere all'ammasso considerato. Successivamente vengono ricalcolate le quantità λ e z_λ relative all'ammasso in questione e vengono scartate tutte le galassie che non fanno parte di quell'ammasso di galassie. Questo procedimento viene ripetuto per tutti gli ammassi di galassie presenti nel catalogo di partenza, fino a quando tutti gli ammassi di galassie trovati non saranno popolati correttamente dalle proprie galassie.

3.3 Algoritmo Bayesian e redGOLD

Introduciamo in questo paragrafo due algoritmi, simili all'algoritmo redMaPPer, ma più recenti. Il primo algoritmo che verrà descritto è il cosiddetto *Bayesian cluster-finder* (Ascaso et al. [2012]): questo metodo è capace di determinare la posizione, il redshift e la ricchezza di un ammasso di galassie partendo dalla luminosità delle galassie, dalla loro densità e dal loro redshift. Queste proprietà delle galassie possono essere combinate con le informazioni riguardanti le relazioni colore-magnitudine e la relazione galassie più brillante dell'ammasso-redshift. Il nome *Bayesian* deriva dal procedimento per cui si inducono le caratteristiche di una popolazione dall'osservazione di una parte di essa, selezionata solitamente mediante un esperimento. Nella fattispecie è un approccio in cui le probabilità non sono interpretate come frequenze, proporzioni o concetti analoghi, ma piuttosto come livelli di fiducia nel verificarsi di un dato evento.

Ascaso et al. [2012], hanno utilizzato nel loro lavoro, come profilo di luminosità delle galassie, la funzione di Schechter classica, mentre, come profilo radiale, hanno utilizzato il profilo di Plummer, utilizzato anche da Postman et al. [1996]:

$$P(r) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1 + (r/r_c)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + (r_{cut}/r_c)^2}}, & \text{per } r < r_{cut} \\ 0, & \text{per } r > r_{cut}, \end{cases} \quad (3.3)$$

dove r_c è il raggio del *core* dell'ammasso, assunto valere $r_c = 0.15 Mpc$. La seconda quantità presente è $r_{cut} = 10r_c$ e rappresenta il raggio massimo dell'ammasso di galassie considerato.

L'algoritmo *Bayesian cluster-finder* opera essenzialmente in questo modo: inizialmente vengono calcolati i livelli di probabilità del background e la loro dispersione, per ogni intervallo di redshift considerato. La probabilità viene calcolata nel modo seguente:

$$p(col_i) = \exp\left(-\frac{(col_i - col(z_c))^2}{2\sigma_{col_i}^2}\right), \quad (3.4)$$

dove col_i si riferisce all'andamento della relazione colore-magnitudine per le galassie all'interno di $1.5 Mpc$ e all'interno di un intervallo di redshift pari a $z_c \pm 0.01(1+z)$, mentre la quantità col_{z_c} è l'andamento aspettato per l'intervallo di redshift z_c che stiamo considerando in quel momento.

Successivamente vengono calcolate le probabilità delle varie galassie presenti all'interno dell'intervallo in redshift considerato e vengono selezionate solamente quelle con una probabilità maggiore di 3σ rispetto al background. Il passo successivo è quello di assegnare ad ogni galassie il redshift relativo alla sua massima probabilità. Dopo questo passaggio vengono create delle mappe di densità delle galassie dalle quali vengono definiti gli ammassi di galassie in corrispondenza dei picchi di densità. Inizialmente viene posto come centro dell'ammasso di galassie il picco di densità, in seguito però ad un processo iterativo viene cercato il vero centro dell'ammasso cercando la galassia più brillante dell'ammasso.

L'algoritmo RedGOLD (*Red-sequence Galaxy Overdensity cLuster Detector*) è un algoritmo che sfrutta osservazioni in banda ottica e NIR e cerca le sovra-densità delle galassie appartenenti alla red-sequence minimizzando la contaminazione delle galassie *star-forming dusty*. Nel loro lavoro, Licitra et al. [2016] hanno utilizzato come profilo radiale il profilo di NFW. Dopo aver diviso il loro campione di galassie in intervalli regolari di redshift, hanno cercato le galassie che appartenevano ad ogni intervallo preso in considerazione. Per fare questo, non solo si sono basati sulla red-sequence delle ETGs (*Early Type Galaxies*) ma anche sui modelli di popolazioni stellari. Seguendo l'evoluzione di queste due quantità con il redshift sono andati a cercare le sovra-densità di ETGs rispetto al background. Inizialmente il centro dell'ammasso di galassie è stato posto in corrispondenza del centro delle sovra-densità trovate e viene assegnato come redshift dell'ammasso trovato il centro dell'intervallo di redshift considerato in quel momento. Il passo successivo, che è anche il più importante, è quello di individuare più precisamente il centro dell'ammasso, ovvero la galassia centrale. Per fare ciò vengono inizialmente selezionate le ETGs più brillanti e viene scelta come galassia centrale quella che si trova nella zona dove sono presenti più ETGs brillanti. Infine, come ultimo passaggio, vengono analizzati i diagrammi colore-magnitudine degli ammassi di galassie

trovati in modo tale da meglio definire gli ammassi trovati ed il loro redshift fotometrico.

3.4 Algoritmo Optimal Filtering

L'algoritmo che andremo ad introdurre in questo paragrafo è stato sviluppato da Bellagamba et al. [2011] ed è anche l'algoritmo *cluster-finder* utilizzato in questo lavoro. Per il loro algoritmo hanno preso come punto di partenza il lavoro proposto da Postman et al. [1996]. Per derivare la funzione Filtro ottimale hanno assunto di avere disponibili le informazioni riguardanti la posizione, la luminosità (almeno in una banda osservativa) e, possibilmente, il redshift fotometrico delle galassie. Per il loro algoritmo hanno inoltre assunto che gli ammassi di galassie possano essere individuati grazie alla distribuzione spaziale delle galassie al loro interno e che la distribuzione spaziale del background sia casuale. Sotto queste assunzioni è stato possibile definire un modello per gli ammassi di galassie che descrive, in funzione del redshift, la loro distribuzione spaziale e di luminosità. Oltre al modello per gli ammassi di galassie è stato definito anche un modello per il background, il quale descrive la distribuzione delle galassie del campo, sempre in funzione del redshift. Il modello che descrive la distribuzione delle galassie osservate risulta quindi essere

$$n_m(\theta, m) = n_f(m) + \Lambda P(\theta - \theta_c)\phi(m), \quad (3.5)$$

dove $\theta = \theta(RA, DEC)$ rappresenta la posizione in cielo e m la magnitudine nella banda osservativa che stiamo considerando. La distribuzione di luminosità delle galassie del campo è rappresentata da $n_f(m)$, la quale è rappresentata in questo lavoro dalla funzione Noise, mentre θ_c rappresenta la posizione del centro dell'ammasso. P e $\phi(m)$ sono rispettivamente il profilo radiale ed il profilo di luminosità dell'ammasso di galassie e Λ rappresenta il parametro di ricchezza dell'ammasso, proporzionale al numero totale di galassie che compongono l'ammasso. Nel loro lavoro, Bellagamba et al. hanno assunto come distribuzione radiale per gli ammassi di galassie un profilo NFW, il quale descrive molto bene la distribuzione radiale degli ammassi di galassie fino a R_{200} , ovvero dove la densità delle galassie è pari a 200 volte la densità critica dell'Universo, come descritto nel lavoro di Hansen et al. [2005]. Per quanto riguarda il profilo di luminosità è stato adottato quello proposto da Schechter [1976], ovvero la funzione di luminosità di Schechter.

La *detection* di un ammasso di galassie, nel loro algoritmo, si basa sul confronto del modello n_m con la distribuzione delle galassie osservate. Nella fattispecie per un fissato ammasso di galassie con centro θ_c viene calcolato il valore di Λ per cui il modello

descrive meglio la distribuzione osservata $n_d(\theta, m)$. La probabilità dei dati osservati n_d rispetto al modello n_m risulta quindi essere

$$\zeta = - \int \frac{[n_d(\theta, m) - n_f(m) - \Lambda n_c(\theta, m)]^2}{n_f(m)} d\Omega dm, \quad (3.6)$$

dove viene assunto che il rumore del background sia Poissoniano e che la densità delle galassie sia sufficientemente alta da permettere di utilizzare l'approssimazione Gaussiana. La quantità $n_c(\theta, m)$ è rappresentata in questo lavoro dalla funzione Filtro. Successivamente è possibile ricavare il valore dell'ampiezza Λ che rende massima la probabilità ζ imponendo

$$\frac{d\zeta}{d\Lambda} = 2 \int \frac{n_c}{n_f} (n_d - n_f) d\Omega dm - 2\Lambda \int \frac{n_c^2}{n_f} d\Omega dm = 0, \quad (3.7)$$

la quale formula ci porta a poter definire l'ampiezza Λ nella seguente forma

$$\Lambda = \int \Phi(\theta - \theta_c, m) n_d(\theta, m) d\Omega dm - B, \quad (3.8)$$

dove Φ è il filtro ottico lineare definito nel modo seguente

$$\Phi(\theta - \theta_c, m) = \left(\int \frac{n_c^2}{n_f} d\Omega dm \right)^{-1} \frac{n_c(\theta, m)}{n_f(m)}, \quad (3.9)$$

mentre B è il contributo delle galassie di background il quale, come possiamo vedere nell'equazione (3.8), viene sottratto in modo da ottenere un rumore medio del campo pari a zero. La quantità B è definita nel seguente modo

$$B = \left(\int \frac{n_c^2}{n_f} d\Omega dm \right)^{-1} \int n_c d\Omega dm. \quad (3.10)$$

Bellagamba et al. nel loro lavoro hanno ritenuto opportuno l'utilizzo del parametro dell'ampiezza Λ invece della probabilità ζ per la ricerca degli ammassi di galassie. Questa scelta è motivata dal fatto che si ha una dipendenza quadratica di ζ su Λ , la quale riflette il fatto che l'approccio del χ^2 fornisce valori alti di probabilità anche per sottodensità di galassie, le quali invece generano un valore negativo di Λ .

L'algoritmo di Bellagamba et al. potrebbe funzionare anche senza avere l'informazione dei redshift fotometrici delle galassie. Qualora tale informazione sia disponibile, si potrà utilizzare una distribuzione di probabilità per il redshift $p_k(z)$ ottenuta dalla k -esima galassia del catalogo e si potrà utilizzarla nell'algoritmo per pesare il contributo di quella galassia nella stima dei vari parametri introdotti precedentemente. Nel

caso ideale in cui tutte le galassie abbiamo la stessa distribuzione di probabilità del redshift, la quale per semplicità viene assunta Gaussiana, centrata sul valore corrispondente al redshift del centro dell'ammasso z_c e con un rms σ_z costante, la funzione $p(z)$ assumerebbe la seguente forma

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp\left(-\frac{(z_c - z)^2}{2\sigma_z^2}\right). \quad (3.11)$$

In questo caso quindi si otterrà una discretizzazione del parametro che rappresenta l'ampiezza, Λ , definita nel seguente modo

$$A_{i,j} = \sum_{k=1}^N \frac{P(r_k)\phi(m_k)p_k(z_c)}{n_f(m_k, z_c)}, \quad (3.12)$$

dove il pedice k si riferisce ad ogni galassia da considerare. In pratica la stima dell'ampiezza Λ verrà effettuata per ogni redshift su una griglia bidimensionale, tramite una somma su tutte le galassie presenti all'interno del catalogo. Questa procedura appena descritta è stata utilizzata come punto di partenza per il lavoro di questa tesi, il quale verrà descritto nel dettaglio nel capitolo successivo.

L'algoritmo che abbiamo appena descritto è stato testato da Bellagamba et al. [2011] utilizzando delle funzioni Filtro e Noise dipendenti da una sola banda osservativa, la quale può essere indifferentemente una magnitudine o un colore. Quello che è abbiamo fatto in questo lavoro è stato quello di andare a definire delle nuove funzioni Filtro e Noise, partendo dal catalogo simulato di galassie che avevamo a disposizione, che dipendessero prima da una sola banda osservativa e successivamente dalla banda osservativa e dal colore delle galassie. Una volta create queste funzioni siamo andati a valutare se l'algoritmo *cluster-finder* riesce ad individuare meglio gli ammassi di galassie utilizzando una sola banda osservativa (magnitudine) oppure utilizzando contemporaneamente la magnitudine ed il colore delle galassie.

L'algoritmo *cluster-finder* utilizzato in questo lavoro è il codice Optimal Filtering, descritto precedentemente e sviluppato da Bellagamba et al. [2011]. Il primo passo, dopo aver creato le funzioni Noise e Filtro, di cui parleremo nel capitolo successivo, è quello di costruire un nuovo catalogo di galassie ridotto, partendo dal catalogo simulato di galassie utilizzato in questo lavoro, dove per ogni galassia selezionata, sono state inserite solo le informazioni necessarie all'algoritmo *cluster-finder*. Sono state inserite quindi la sua posizione in cielo, espressa tramite l'ascensione retta (RA) e la declinazione (DEC), le informazioni riguardanti la sua massa, la sua magnitudine nelle bande considerate ed il redshift. Per quanto riguarda il redshift della galassia, il codice necessita anche dell'informazione riguardante il suo errore. Il catalogo simulato di galassie che abbiamo avuto a disposizione in questo lavoro conteneva per ogni galassia il suo redshift cosmologico, ottenuto direttamente dalla simulazioni numeriche. Al fine di

rendere il catalogo di input dell'algoritmo più realistico e più vicino ai dati osservativi di survey fotometriche, ad esempio Euclid, è stato necessario calcolare ed assegnare ad ogni galassia il proprio redshift fotometrico, con il relativo errore. Dopo aver definito la quantità $\epsilon = 0.05$ la quale rappresenta l'errore che si spera di raggiungere in survey fotometriche future (Euclid), per ogni galassia è stato preso il suo redshift cosmologico, ovvero quello presente all'interno del catalogo simulato iniziale e si è aggiunto un errore estratto da una distribuzione gaussiana ottenendo:

$$z_{new,i} \sim \mathcal{N}[z_i; \epsilon(1 + z_i)], \quad (3.13)$$

dove z_i rappresenta il redshift cosmologico della galassia i -esima e la media della distribuzione, mentre la quantità $\epsilon(1 + z_i)$ rappresenta la *rms* della distribuzione normale. Questa equazione ci permette di ottenere la quantità $z_{new,i}$ la quale rappresenta il redshift fotometrico per la galassia in questione.

Possiamo controllare i risultati ottenuti calcolandoci la probabilità che un valore cada all'interno di un σ , la quale deve risultare essere pari a 68.3%, avendo, come già anticipato, costruito una distribuzione normale.

Per rendere il catalogo di input completo, rimane solamente da aggiungere, per ogni galassia, la propria luminosità nelle varie bande utilizzate (H e Z), ed il proprio colore (J-H, Z-H e R-Z). Abbiamo deciso di costruire il catalogo con tutte le bande di magnitudine utilizzate e tutti i colori per aver un catalogo il più generale possibile, anche se nel passaggio successivo abbiamo deciso di utilizzare solamente la banda osservativa Z ed il colore R-Z.

Una volta costruito il catalogo, possiamo iniziare la procedura di configurazione dell'algoritmo. Il codice *cluster-finder* ha bisogno, oltre ai file di input di cui abbiamo parlato precedentemente, che gli vengano indicate le posizioni, nel catalogo appena costruito, delle quantità necessarie. Le informazioni di cui necessita l'algoritmo sono la posizione delle galassie (RA e DEC), la banda osservativa (e del colore) ed il redshift con i rispettivi errori. Una volta indicate le posizioni delle quantità appena elencate, è necessario indicare le dimensioni dell'area di cielo che stiamo utilizzando. L'algoritmo chiede che gli venga indicato il centro dell'area e la distanza dal centro al bordo dell'area considerata. Un'altra quantità che possiamo impostare è la grandezza dei bin spaziali con i quali il codice dividerà la mappa da considerare. In questo lavoro abbiamo scelto $0.004deg$ come dimensione dei bin. L'ultima quantità da dover impostare è la soglia minima del rapporto S/N delle *detections*, impostata in questo lavoro pari a 3. Questa quantità rappresenta il rapporto tra l'ampiezza, descritta nell'equazione 3.8 e la sua *rms*, la quale viene calcolata dall'algoritmo durante la sua esecuzione. Una volta lanciato il codice, questo genera delle mappe di *Amplitude* confrontando, nei vari intervalli di redshift, le funzioni Noise e Filtro.

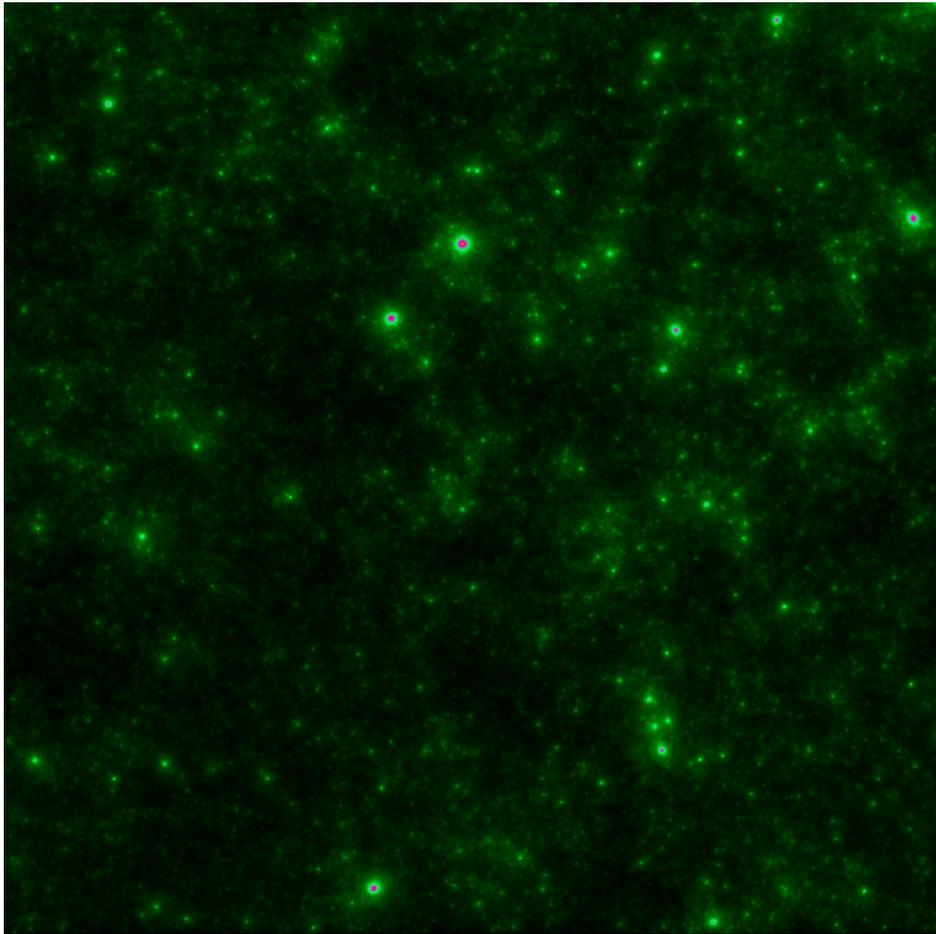


Figura 3.1: Dettaglio della mappa di ampiezza generata dall'algoritmo. La porzione di cielo raffigurata ha ascensione retta $[0,5]$ e declinazione $[35,40]$. Il redshift di questo dettaglio è $z = 0.14$.

Nella Figura 3.1 è mostrato un dettaglio della mappa di ampiezza generata dal codice. Come possiamo notare all'interno della mappa sono presenti molte strutture brillanti, le quali rappresentano addensamenti di galassie, e zone meno brillanti (a volte oscure) che rappresentano zone di sotto-densità. Le strutture più grandi, gli ammassi di galassie, sono rappresentati dalle zone brillanti più estese. L'algoritmo utilizza queste mappe per calcolare il S/N delle singole strutture e, se quest'ultimo sarà maggiore di 3, allora l'ammasso di galassie corrispondente sarà marcato come una *detection*. Può succedere che un ammasso di galassie molto grande sia presente e visibile in più intervalli di redshift. In questo caso l'algoritmo lo identifica come *detection* nell'intervallo di redshift in cui il suo S/N è massimo. Il codice ripete questa operazione per tutti gli intervalli di redshift scelti generando, infine, un catalogo di *detections*. All'interno del catalogo di *detections* vengono collocate dal codice tutti gli ammassi di galassie trovati

con $S/N > 3$, specificando la posizione in cielo (RA e DEC) e la posizione nella mappa, espressa tramite il numero del pixel corrispondente (x,y,z) , del centro della *detection*. Viene inoltre indicato il suo rapporto S/N , la sua amplitudine ed il relativo redshift.

Nei capitoli successivi verranno descritte le funzioni, necessarie all'algoritmo, che abbiamo creato in questo lavoro e la procedura per ottenerle, successivamente verranno mostrati i risultati che abbiamo ottenuto dal confronto tra la performance dell'algoritmo nel caso in cui abbiamo considerato una sola banda osservativa e nel caso in cui abbiamo considerato anche il colore delle galassie.

Capitolo 4

Funzioni Filtro e Noise

Come già anticipato in precedenza, l'algoritmo *cluster-finder*, utilizzato in questo lavoro, per poter funzionare ha bisogno di due file di input, Noise e Filtro. Abbiamo creato queste due funzioni utilizzando lo stesso catalogo che poi è stato utilizzato per la fase di *detection* degli ammassi di galassie. Inizialmente è stato scelto di creare queste funzioni in modo tale che dipendano solamente da una banda osservativa, senza quindi inserire informazioni riguardanti il colore. In questo modo l'algoritmo funziona come nell'implementazione originale di Bellagamba et al. [2011]. Successivamente, la funzione Filtro e la funzione Noise sono state ricreate con l'aggiunta della dipendenza dal colore, per valutare se ciò produce risultati migliori oppure no. Nei paragrafi successivi verranno non solo descritte le procedure utilizzate in questo lavoro per la creazione delle suddette funzioni, ma verrà anche descritto il catalogo utilizzato in questo lavoro.

4.1 Catalogo usato

Il catalogo simulato di galassie che è stato utilizzato durante questo lavoro è un catalogo costruito partendo dalla simulazione numerica MICE (Marenostrum Institut de Ciencias de l'Espai - Grand Challenge) (Fosalba et al. [2015b]). La procedura di costruzione di un catalogo di galassie, descritta nei paragrafi precedenti, è la stessa utilizzata per il catalogo MICE-GC (Carretero et al. [2015] e Fosalba et al. [2015a]). La struttura del catalogo è piuttosto semplice: ad ogni galassia è assegnata la propria magnitudine in diverse bande osservative: banda H, J, Y, VIS, G, R, I e Z. Oltre alle magnitudini, ogni galassia è contrassegnata dalla propria massa, redshift, ascensione retta e declinazione. Per poter individuare le galassie centrali all'interno del catalogo, tutte le galassie sono state contrassegnate con una variabile "*flag*", una variabile che viene posta uguale a 1 per le galassie satellite e uguale a 0 per le galassie centrali. La massa, il redshift, l'ascensione retta e la declinazione delle galassie centrali di questo catalogo non fanno riferimento alle galassie stesse, ma all'alone di appartenenza. Per poter facilmente

individuare tutte le galassie, centrale e non, di un alone, è stato applicato un numero identificativo alle galassie. Tutte le galassie satellite con lo stesso numero identificativo di una galassia centrale fanno parte, quindi, dello stesso alone.

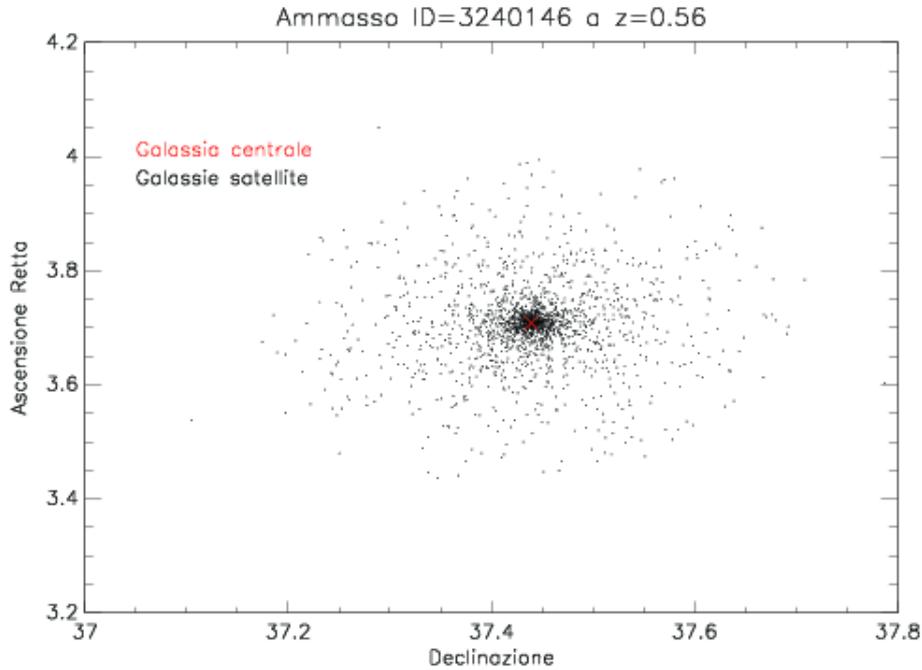


Figura 4.1: Ammasso di galassie del catalogo con codice identificativo 3240146, collocato a $z=0.56$. Con la crocetta rossa viene indicata la galassia centrale dell'ammasso.

Come possiamo vedere in Figura 4.1, selezionando un numero identificativo di una galassia centrale (rappresentata dal quadrato rosso) possiamo subito trovare tutte le galassie (puntini neri) che fanno parte dell'ammasso.

Il catalogo è molto più vasto e contiene molte più informazioni sulle galassie che lo compongono; qui sono state introdotte solamente le quantità che sono state utilizzate in questo lavoro. Il catalogo che è stato utilizzato in questo lavoro copre una porzione di cielo di circa $100deg^2$ con un'ascensione retta che assume valori appartenenti all'intervallo $[30; 40]$ e la declinazione che varia nell'intervallo $[0; 10]$. Il catalogo contiene galassie con $z \leq 1.4$, il che ci ha permesso di lavorare non esclusivamente sull'Universo locale.

Per prima cosa, prima di costruire le funzioni necessarie per utilizzare l'algoritmo *cluster-finder*, è stata effettuata una selezione degli ammassi di galassie da considerare. All'interno del catalogo usato sono presenti aloni con un massa che varia circa da 10^{10} a $10^{14.9}$ masse solari: nell'analisi successive verranno considerati solo oggetti con $M > 10^{13.5} M_{\odot}$.

In Figura 4.2 è mostrata la funzione di massa relativa agli ammassi di galassie presenti

nel catalogo utilizzato. Come possiamo vedere nella figura e come aspettato dall'andamento della funzione di massa, abbiamo che il numero di aloni diminuisce al crescere della massa e quindi abbiamo un numero maggiore di ammassi di piccola massa rispetto a quelli di grande massa. Allo stesso tempo è interessante andare a valutare la ricchezza degli ammassi di galassie, ovvero il numero di galassie, con magnitudine compresa tra $[15; 25]$, presenti in ciascuno di loro in funzione della massa degli aloni.

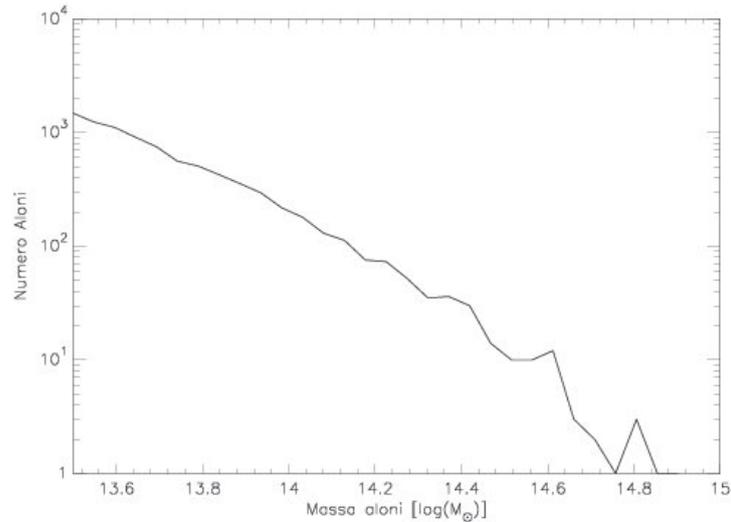


Figura 4.2: Funzione di massa relativa agli ammassi di galassie presenti nel catalogo utilizzato in questo lavoro.

4.2 Creazione delle funzioni Filtro e Noise

Utilizzando le informazioni presenti nel catalogo, che è stato utilizzato in questo lavoro, è stato possibile ricavare la funzione che descrive il background, la funzione Noise (equazione 3.10), e la funzione che riproduce la distribuzione di galassie all'interno degli ammassi di galassie, ovvero la funzione Filtro (equazione 3.9). Il catalogo utilizzato in questo lavoro è descritto nel paragrafo precedente e, appunto, un catalogo simulato. Questo implica che stiamo utilizzando un catalogo che non è stato generato utilizzando dati osservativi ma risultati di simulazioni numeriche. Lo scopo di questo lavoro è quello di testare l'algoritmo utilizzato ed andare a valutare se i risultati ottenuti sono migliori nel caso in cui consideriamo solo la magnitudine delle galassie oppure anche l'informazione sul loro colore. Per fare questo abbiamo creato le funzioni Noise e Filtro in modo tale da porci nella condizione migliore e più favorevole per testare l'algoritmo *cluster-finder*. Nel caso in cui avessimo avuto a disposizione un catalogo di galassie ve-

ro, cioè non derivato da simulazioni numeriche ma dalle osservazioni, avremmo dovuto costruire delle funzioni specifiche per ogni intervallo in massa degli ammassi di galassie considerati. In questo lavoro, invece, abbiamo costruito delle funzioni Filtro e Noise ideali, per ammassi di galassie con $M = 10^{14}M_{\odot}$, valore che abbiamo scelto arbitrariamente ma che comunque è tipico di un ammasso di galassie medio/grande. Durante la costruzione di queste funzioni, che verrà descritta successivamente, e nello specifico della funzione Filtro, ogni galassia appartenente all'ammasso di galassie considerato è stata aggiunta pesandola in base alla massa dell'ammasso ($10^{14}/M_{clus}$), in modo da ottenere una funzione Filtro corretta per qualunque ammasso di galassie, qualunque sia la sua massa.

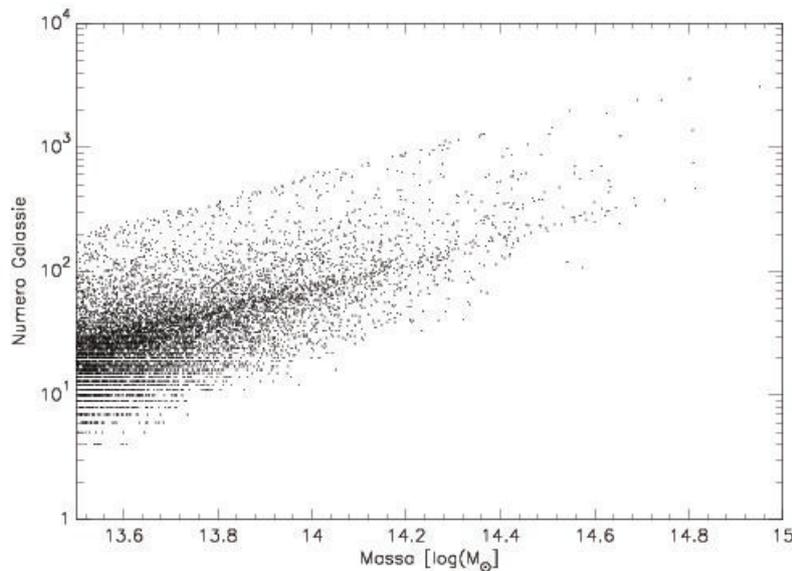


Figura 4.3: In figura viene mostrata la massa ed il numero di galassie contenute all'interno di ogni ammasso di galassie considerato in questo lavoro.

In questo modo la funzione Filtro che otterremo sarà rappresentativa di tutti gli ammassi di galassie, indipendentemente dalla loro massa. Nella figura 4.3 viene mostrata la ricchezza degli ammassi, ovvero il numero di galassie al loro interno rispetto alla loro massa. Come possiamo vedere, e come era lecito attendersi, gli ammassi di galassie di grande massa sono anche quelli che contengono al loro interno un numero maggiore di galassie.

Le funzioni Noise e Filtro sono state create inizialmente per due bande osservative diverse: la banda H e la banda Z. Il primo passaggio è stato quello di scegliere l'intervallo di magnitudine di maggior interesse e considerare, quindi, solamente le galassie con una magnitudine appartenente a tale intervallo. Si è scelto di selezionare solamente le galassie con una magnitudine compresa tra $[15; 25]$, per entrambe le bande osservative scelte. Questa scelta ci ha permesso di selezionare sia le galassie molto brillanti sia di

non considerare quelle troppo deboli. Un'altra scelta importante, che riguarda solamente la funzione Filtro, è quella della dimensione radiale dell'ammasso, fondamentale per poterne costruire il profilo di distribuzione radiale. Come distanza massima dal centro dell'ammasso si è scelto di utilizzare $0.2deg$, corrispondenti $\simeq 4Mpc$ a $z \sim 0$. Il passo successivo è stato quello di determinare il numero, e quindi la grandezza, dei bin con cui dividere l'intervallo delle magnitudini e della distanza. Questa è una scelta molto delicata da prendere, in quanto il numero di bin con cui dividere, ad esempio, l'intervallo delle magnitudine condiziona la risoluzione ed accuratezza delle nostre funzioni e, conseguentemente, la prestazione dell'algoritmo *cluster-finder*. Inizialmente si è scelto di suddividere l'intervallo delle magnitudini in 30 bin, ottenendo quindi $dm = 0.33$. Per quanto riguarda l'intervallo radiale si è scelto di suddividerlo in 101 bin, ottenendo $d\theta = 2 \cdot 10^{-3}deg$. Questa scelta è stata presa tenendo conto della dimensione angolare in cielo degli ammassi di galassie: gli ammassi vicini ($z \simeq 0$) hanno una estensione angolare molto grande quando vengono proiettati in cielo e questa scelta ci permette di avere una buona risoluzione della distribuzione spaziale delle galassie; per ammassi lontani ($z \geq 1$) la risoluzione sarà chiaramente peggiore, essendo molto più piccoli e lontani, ma avere bin radiali così piccoli ci permette comunque di poter apprezzare la distribuzione delle galassie all'interno dell'ammasso.

Un altro passaggio importante è quello di suddividere le galassie che utilizzeremo per creare queste funzioni in intervalli di redshift. In questo lavoro ci siamo concentrati sulle galassie con redshift appartenente all'intervallo $[0.14; 1.4]$ e si è scelto di dividere tale intervallo in 43 bin, in modo da ottenere $dz = 0.03$. Per ogni bin in redshift verranno create una funzione Noise ed un Funzione Filtro, in modo tale da aver maggior controllo sull'evoluzione in redshift di queste due funzioni.

4.2.1 Funzione Noise

La prima funzione che descriveremo nel dettaglio è la funzione del Noise. La procedura che verrà descritta in questo paragrafo è completamente generale ed utilizzabile indifferentemente dalla scelta delle bande delle magnitudini. Il Noise che vogliamo creare può essere visto come una funzione di luminosità relativa all'intero catalogo che stiamo considerando. Le unità di misura di questa funzione sono $[N \cdot Mag_i^{-1} \cdot deg^{-2} \cdot z^{-1}]$, dove N rappresenta il numero di galassie. Il Noise quindi ci fornirà la densità superficiale di galassie per unità di magnitudine e di redshift, come descritto nella seguente equazione:

$$N_{m_i} = \frac{dN}{d\Omega dm_i dz}, \quad (4.1)$$

dove N , al numeratore, rappresenta il numero di galassie; $d\Omega$ è l'area di cielo che stiamo

considerando; dz è l'intervallo di redshift e dm_i rappresenta il dm della magnitudine che stiamo considerando. Quando aggiungeremo anche il colore si dovrà aggiungere all'equazione appena descritta anche la quantità $dm_{i,col}$, che rappresenta il dm del colore utilizzato. L'area su cui viene calcolata questa quantità è espressa in gradi (deg) e, nel caso di questo lavoro, posta pari a $100deg^2$.

Il primo passaggio è quello di andare a selezionare dal catalogo in uso le galassie, per ogni intervallo di redshift, che andremo ad utilizzare per la creazione della funzione Noise. Una volta determinate le galassie da utilizzare si va a valutare la magnitudine di ognuna di esse, in modo da inserirle nel bin di magnitudine corrispondente, il quale viene stabilito nel modo seguente:

$$bin_{m_i} = \frac{m_{i,gal} - m_{i,low}}{N_{bin}}, \quad (4.2)$$

dove $m_{i,gal}$ è la magnitudine della galassia nella banda osservativa che stiamo considerando, $m_{i,low}$ è il limite inferiore dell'intervallo di magnitudini scelto, in questo caso $m_{i,low} = 15$; N_{bin} è il numero di bin con il quale abbiamo diviso l'intervallo, ovvero 30. Una volta terminata questa fase divideremo la funzione ottenuta per dm_i , per l'area del cielo considerato ($100deg^2$) e per l'intervallo in redshift (dz) in modo da ottenere la dimensionalità precedentemente introdotta.

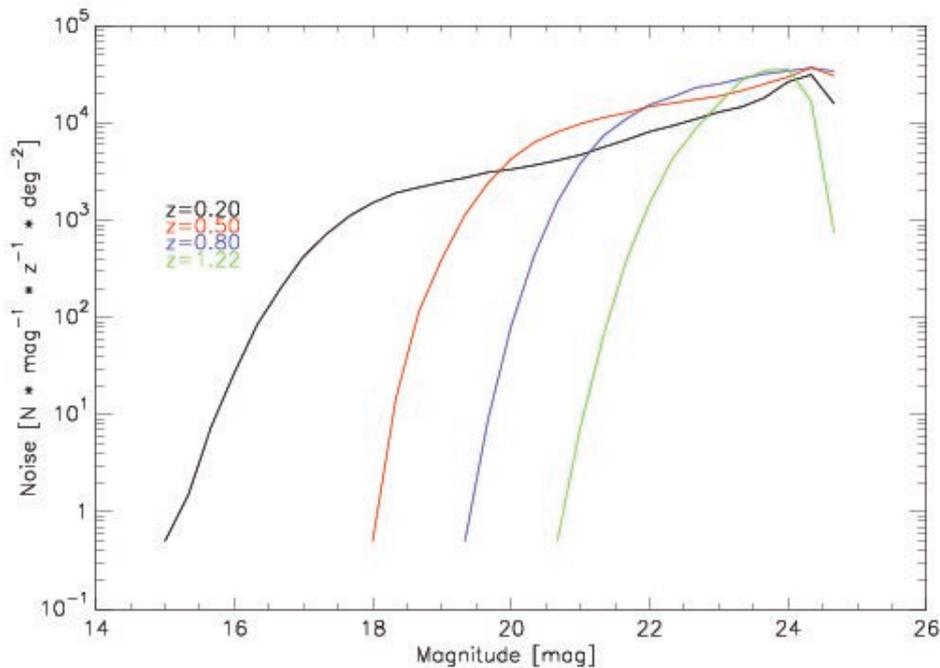


Figura 4.4: Nella figura è mostrata la funzione Noise in banda Z ottenuta per vari redshift. La quantità N rappresenta il numero di galassie considerate.

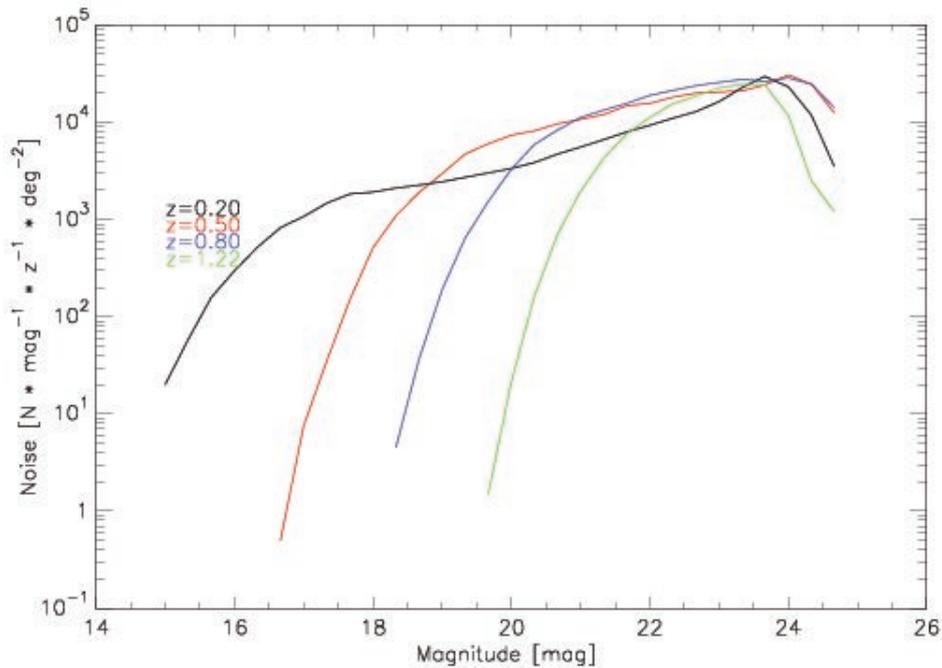


Figura 4.5: Nella figura è mostrata la funzione Noise in banda H ottenuta per vari redshift. La quantità N rappresenta il numero di galassie considerate.

Nella Figura 4.4 è mostrata la funzione Noise in banda Z ottenuta per $z = 0.20$, $z = 0.50$, $z = 0.80$ e $z = 1.22$. Come è facile notare la funzione varia al variare dell'intervallo di redshift che stiamo considerando; inoltre si può notare come, con l'aumentare del redshift, il contributo delle galassie più brillanti diminuisce. Nella Figura 4.5 è mostrata invece la funzione Noise che abbiamo ottenuto per la banda osservativa H, per gli stessi redshift della figura precedente, ovvero $z = 0.20$, $z = 0.50$, $z = 0.80$ e $z = 1.22$. Anche in questo caso possiamo notare come all'aumentare del redshift il contributo delle galassie più brillanti tenda a diminuire.

Per quanto riguarda il Noise non viene applicato nessun taglio in massa sulle galassie da considerare. Infatti essendo la funzione Noise una funzione di luminosità che deve descrivere il background della porzione di cielo considerata, in funzione del redshift, è opportuno considerare tutte le galassie del catalogo.

Abbiamo così ottenuto una funzione Noise che descrive, per ogni intervallo di redshift, la distribuzione di luminosità delle galassie appartenenti al background, per unità di area, magnitudine e redshift. Questa procedura è stata fatta sia per la banda osservativa H sia per la banda osservativa Z, come anticipato in precedenza.

4.2.2 Filtro

Il secondo file di input di cui necessita l'algoritmo *cluster-finder* è quello relativo alla funzione Filtro, o Modello. La funzione Filtro, a differenza della funzione Noise, non solo contiene le informazioni riguardanti la distribuzione di luminosità delle galassie, ma contiene anche le informazioni che riguardano la distribuzione radiale delle galassie all'interno dell'ammasso di galassie. La funzione Filtro che dobbiamo ottenere e che verrà utilizzata all'interno dell'algoritmo *cluster-finder* dovrà descrivere la distribuzione di luminosità e radiale di un ammasso medio per ogni intervallo di redshift considerato, come mostrato nella seguente equazione:

$$F_{m_i} = \frac{dN}{d\Omega dm_i}, \quad (4.3)$$

dove N è il numero di galassie contenute nell'ammasso, $d\Omega$ rappresenta l'area con cui divideremo la funzione Filtro e che descriveremo meglio successivamente; la quantità dm_i rappresenta il bin in magnitudine utilizzato. Quando utilizzeremo anche il colore delle galassie dovremo aggiungere, come per il Noise, al denominatore la quantità $dm_{i,col}$, relativa appunto al colore che stiamo considerando.

Come è stato fatto per la funzione Noise, il primo passo è quello di selezionare le galassie in base all'intervallo di redshift che stiamo considerando ed in base alla loro luminosità. A differenza della funzione Noise, per la funzione Filtro è stato effettuato un ulteriore taglio nella selezione delle galassie. Poiché, come già detto, la funzione Filtro deve rappresentare un ammasso di galassie medio, si è scelto di considerare solo gli ammassi, o più precisamente le galassie centrali, con assegnata una massa superiore alle $10^{13.5}$ masse solari. Questa scelta sicuramente condizionerà, da un punto di vista statistico, la creazione della funzione Filtro, ma ci permette comunque di poter descrivere al meglio gli ammassi di galassie più grandi e più facilmente osservabili.

Una volta selezionate le galassie centrali, e quindi gli ammassi di galassie, che rispettano il limite in massa imposto e l'intervallo in redshift è necessario andare a selezionare, per ogni ammasso, tutte le galassie del catalogo che lo compongono. Questa procedura risulta essere molto semplice anche grazie a come il catalogo simulato in uso è stato strutturato. Come già anticipato nel paragrafo 4.1, ogni galassia centrale, e quindi ogni ammasso, ha un numero identificativo unico assegnato, tale numero è lo stesso per tutte le galassie satellite che compongono tale ammasso. Per individuare, quindi, tutte le galassie, centrale e non, di un ammasso è sufficiente andare a cercare tutte le galassie nel catalogo con lo stesso numero identificativo.

Una volta individuate tutte le galassie di un ammasso possiamo iniziare la costruzione del profilo radiale e del profilo di luminosità dell'ammasso di galassie. La procedura per la costruzione del profilo di luminosità è la stessa che abbiamo utilizzato per la funzione Noise. Vengono prese le magnitudini delle galassie nella banda osservativa che stiamo

utilizzando (H o Z) e ogni galassia viene assegnata al bin di magnitudine corrispondente, utilizzando l'equazione 4.2. Quella che otteniamo è una funzione simile alla funzione Noise, solamente relativa ad un ammasso di galassie medio e non corrispondente al background, per intervallo di redshift, che indicheremo con $G(m_i)$.

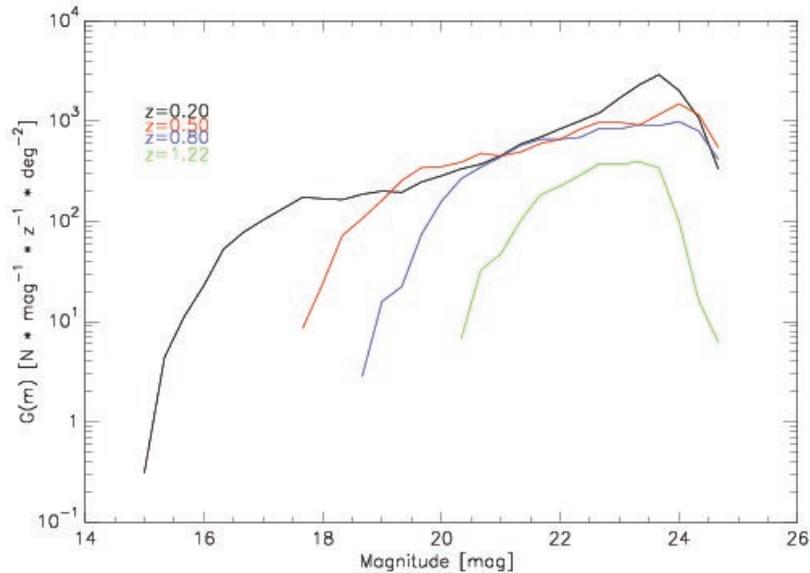


Figura 4.6: L'immagine mostra il profilo di luminosità medio della funzione Filtro, per un ammasso di galassie medio, costruita per la banda osservativa H a vari redshift.

La Figura 4.6 mostra il profilo di luminosità per la banda osservativa H ($G(m_H)$) a $z = 0.20$, $z = 0.50$, $z = 0.80$ e $z = 1.22$ che utilizzeremo per la costruzione della funzione Filtro. Come per la funzione Noise, possiamo notare come, all'aumentare del redshift, il contributo delle galassie più brillanti diminuisca e come diventi importante il contributo delle galassie meno luminose.

La Figura 4.7 mostra invece il profilo di luminosità per la banda osservativa Z, per $z = 0.20$, $z = 0.50$, $z = 0.80$ e $z = 1.22$. Anche in questo caso possiamo notare come all'aumentare del redshift il contributo delle galassie più brillanti diminuisca.

Il passo successivo è quello di costruire il profilo radiale dell'ammasso di galassie. La procedura è leggermente più complessa rispetto a quella per creare il profilo di luminosità e necessita di qualche passaggio in più. Il primo passo è quello di andare a prendere la posizione in cielo di ogni galassia dell'ammasso, espressa in ascensione retta (RA) e declinazione (DEC). Successivamente si dovrà calcolare la distanza tra la galassia satellite in questione e la galassia centrale dell'ammasso. Per motivi di semplicità, è stato scelto di utilizzare come unità di misura di distanza le unità angolari, nella fattispecie i gradi (deg). Una volta trovata la distanza della galassia dal centro dell'ammasso

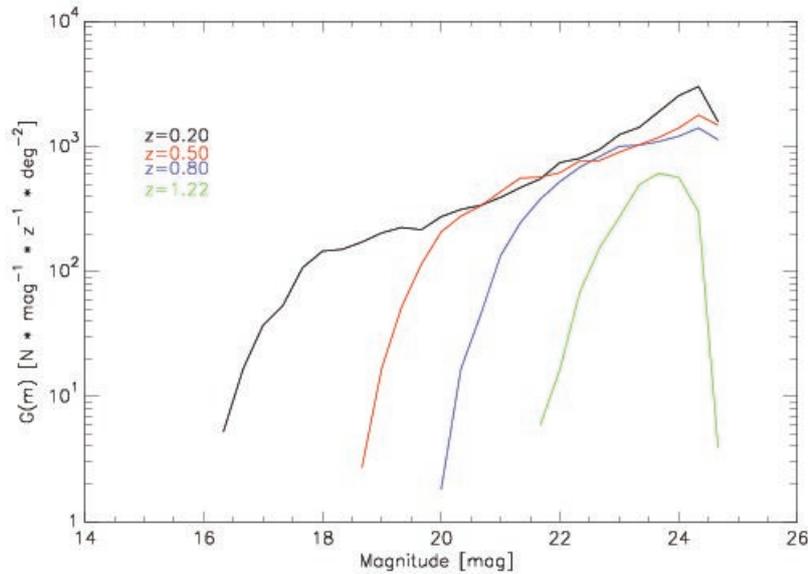


Figura 4.7: L'immagine mostra il profilo di luminosità della funzione Filtro, per un ammasso di galassie medio, costruita per la banda osservativa Z a vari redshift.

dobbiamo individuare il bin radiale in cui collocare la galassia considerata. Per fare ciò utilizziamo una formula simile all'equazione (4.2), definita nel modo seguente:

$$bin_r = \frac{\theta_{sat} - \theta_c}{N_{bin}}, \quad (4.4)$$

dove N_{bin} è il numero di bin con cui abbiamo deciso di dividere l'intervallo radiale scelto ed in questo caso varrà 101; la quantità θ_{sat} rappresenta la posizione in cielo della galassia satellite e θ_c la posizione della galassia centrale. Al numeratore quindi avremo la distanza tra la galassia satellite ed il centro dell'ammasso.

Ripetendo questo passaggio per tutte le galassie dell'ammasso considerato otteniamo il profilo radiale dell'ammasso, che indicheremo con $P(r)$.

La Figura 4.8 mostra il profilo radiale di un ammasso medio a $z = 0.20$, $z = 0.50$, $z = 0.80$ e $z = 1.22$, relativo alla banda osservativa Z. Come possiamo vedere, la scelta di un gran numero di bin ci permette di avere una risoluzione spaziale elevata, al contempo però è possibile avere dei bin radiali vuoti, dove cioè non sono presenti delle galassie. Aumentando la grandezza dei bin e quindi riducendone il numero, possiamo risolvere il problema dei bin vuoti perdendo però in risoluzione. Possiamo notare, inoltre, come all'aumentare del redshift, le zone più popolate dell'ammasso di galassie rimangono quelle centrali, mentre si ha una diminuzione graduale del numero di galassie nelle zone esterne dell'ammasso. Il profilo radiale ottenuto per la banda osservativa H (non mostrato in questo lavoro) è pressoché identico a quello mostrato

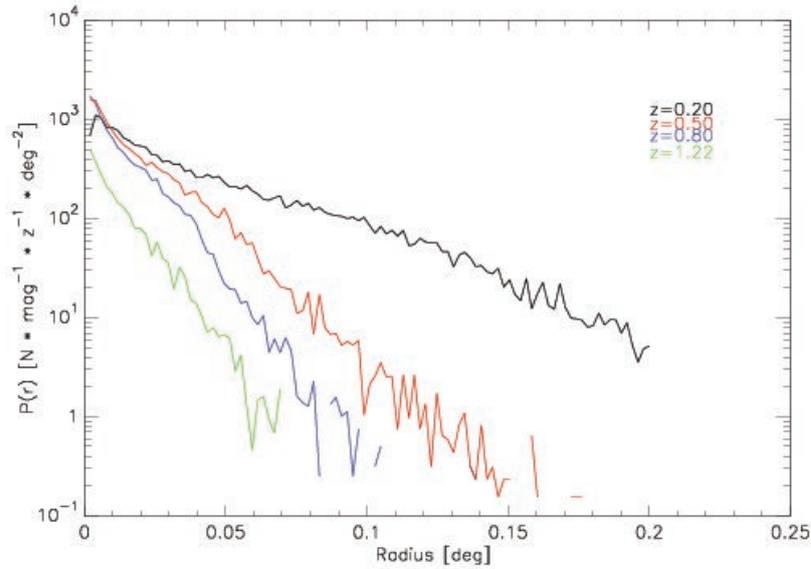


Figura 4.8: In figura sono mostrati i profili radiali della funzione Filtro relativa alla banda Z, ottenuti a vari redshift.

in Figura 4.8.

A questo punto abbiamo costruito il profilo radiale ed il profilo di luminosità di un ammasso di galassie. Questa procedura viene ripetuta per tutti gli ammassi di galassie presenti all'interno dell'intervallo di redshift che stiamo considerando e, successivamente, per tutti gli altri intervalli di redshift.

In questo momento abbiamo a disposizione il profilo radiale ed il profilo di luminosità di un ammasso medio per un intervallo di redshift fissato. L'ultimo passaggio è quello di combinare questi due profili per ottenere la forma finale della funzione Filtro. Per la costruzione della funzione Filtro, o più precisamente per la sua rinormalizzazione, è necessario prima di combinare i due profili $P(r)$ e $G(m_i)$ calcolare una quantità che sarà utile successivamente. La quantità in questione è il numero di galassie totale utilizzato, in ogni intervallo di redshift, per costruire il profilo radiale e di luminosità. Poiché i due profili sono stati costruiti utilizzando le stesse galassie, l'integrazione dei due profili deve portare allo stesso risultato. Scegliamo, ad esempio, di integrare per primo il profilo di luminosità, quello che dovremo fare sarà quindi un integrale

$$N_{gal} = \int_{m_{i,min}}^{m_{i,max}} G(m_i) dm_i, \quad (4.5)$$

dove gli estremi di integrazione sono la magnitudine minima e la magnitudine massima scelta per la banda osservativa in uso. Per l'integrazione del profilo radiale dovremo

calcolare il seguente integrale

$$N_{gal} = \int_{r_{min}}^{r_{max}} P(r) dr, \quad (4.6)$$

dove gli estremi in questo caso sono $r_{min} = 0$ e $r_{max} = 0.2$. Il numero totale di galassie utilizzate (N_{gal}) ottenuto dai due integrali appena descritti deve, chiaramente, essere lo stesso. A questo punto possiamo procedere alla combinazione dei due profili, operando nel seguente modo:

$$K(r, m_i) = P(r) \cdot G(m_i). \quad (4.7)$$

La funzione che otteniamo dipenderà sia dalla magnitudine scelta sia dalla distanza radiale. Nell'equazione (4.7), come per l'equazione (4.5), la quantità m_i rappresenta la magnitudine che come abbiamo già anticipato può essere, in questa fase, o la banda osservativa H o la Z. La funzione appena ottenuta però non può essere ancora utilizzata come Filtro in quanto necessita di essere rinormalizzata. Per farlo è necessario integrare nuovamente la funzione ottenuta nell'equazione 4.7 su tutte le sue componenti. Quello che otteniamo sarà un numero che chiameremo X . Questo valore rappresenta il numero totale, errato, di galassie utilizzate per la creazione dei profili. Questo valore verrà utilizzato per rinormalizzare la funzione Filtro nel seguente modo:

$$M(r, m_i) = \frac{K(r, m_i) \cdot N_{gal}}{X}. \quad (4.8)$$

Dopo questo passaggio è necessario dividere la funzione appena ottenuta per tutte le quantità necessarie al fine di ottenere la dimensionalità corretta. Andremo quindi a dividere la funzione $M(r, m_i)$ per dm_i e per dz . A differenza della funzione Noise, la funzione appena ottenuta non verrà divisa per l'intera area del cielo che stiamo considerando, ma ogni suo bin radiale verrà diviso per la propria area. Successivamente divideremo la funzione Filtro per il numero di ammassi selezionati in ogni intervallo di redshift (N_{halo}). Così facendo otterremo una funzione che descrive il profilo radiale e di luminosità di un ammasso di galassie medio per ogni intervallo di redshfit. La funzione Filtro avrà come dimensionalità $[N \cdot Mag_i^{-1} \cdot z^{-1} \cdot deg^{-2} \cdot N_{halo}^{-1}]$.

Abbiamo così ottenuto la funzione Filtro finale che verrà utilizzata, insieme alla funzione Noise, all'interno dell'algoritmo *cluster-finder*. In questo paragrafo ed in quello precedente, abbiamo descritto la procedura generale, che abbiamo utilizzato in questo lavoro, senza specificare la banda osservativa scelta per la fase di utilizzo dell'algoritmo *cluster-finder*. Sono state infatti create le due funzioni sia per la banda H che per la banda Z, come anticipato in precedenza. Una volta create le due funzioni per entrambe

le bande osservative si è scelto di utilizzare all'interno dell'algoritmo le funzioni relative alla banda osservativa Z . I motivi di questa scelta saranno descritti nel paragrafo successivo (4.3), in quanto dipendono dalla scelta del colore da utilizzare.

4.3 Aggiunta del colore

Nei paragrafi precedenti è stata descritta la procedura per la costruzione delle funzioni Noise e Filtro, utilizzando una sola banda osservativa per le magnitudini (H o Z). In questo paragrafo parleremo di come le funzioni Noise e Filtro si modificano nel caso in cui volessimo aggiungere l'informazione riguardante il colore delle galassie considerate. Le procedure per la creazione delle funzioni Noise e Filtro rimangono completamente le stesse, quello che cambia è sicuramente la dimensionalità delle funzioni finali e le varie dipendenze. Il profilo radiale $P(r)$ è l'unica funzione che rimane completamente identica al caso con la sola magnitudine, in quanto dipende solamente dalla posizione delle galassie dell'ammasso rispetto al suo centro. Lo stesso discorso non può essere fatto per il profilo di luminosità poiché con l'aggiunta del colore non dipenderà più solamente dalla luminosità delle galassie selezionate ma anche dal loro colore. Il profilo di luminosità che otterremo potrà essere descritto da $G(m_i, m_{col})$, dove m_i sarà la magnitudine scelta (H o Z), mentre m_{col} rappresenterà il colore scelto. I colori che sono stati presi in considerazione in questo lavoro sono: J-H, Z-H e R-Z. Le informazioni riguardanti il colore sono presenti all'interno del catalogo, ma non in modo diretto ed esplicito. All'interno del catalogo infatti, come anticipato nel paragrafo 4.1, sono presenti le magnitudini osservate per tutte le galassie del catalogo nelle varie bande osservative. Per ottenere le informazioni necessarie sul colore delle galassie è necessario andare a sottrarre le magnitudini osservate in specifiche bande. In questo lavoro, ad esempio, si è utilizzato il colore R-Z. Per ottenere questa informazione per ogni galassia del catalogo è sufficiente sottrarre la magnitudine Z della galassia in questione alla magnitudine R relativa alla stessa galassia. In questo modo è possibile ottenere l'informazione voluta sul colore della galassia presa in esame. Questa procedura, descritta per il caso R-Z, è la medesima per gli altri colori utilizzati in questo lavoro, J-H e Z-H. Prima di costruire le nuove funzioni è necessario, come fatto per le magnitudini, definire gli intervalli di colore ed il numero di bin con cui andarli a dividere. Per quanto riguarda il colore J-H è stato scelto di andare a selezionare le galassie con un valore del colore appartenente all'intervallo $[-0.5; 1]$. Per quanto riguarda i colori Z-H e R-Z l'intervallo scelto è $[-1; 3]$. Anche per il colore, come per le magnitudini, si è scelto di dividere gli intervalli appena introdotti in 30 bin, ottenendo così $dm_{col} = 0.05$ per il colore J-H e $dm_{col} = 0.13$ per i colori Z-H e R-Z.

Come già anticipato, la procedura per la costruzione delle funzioni rimane la stessa del caso con una sola magnitudine, solamente che, in questo caso, per ogni galassia do-

vremo trovare non solo il suo bin di magnitudine di appartenenza ma anche il suo bin di colore. Per individuare quest'ultimo utilizzeremo l'equazione 4.2 opportunamente modificata per il colore. La costruzione delle funzioni Noise e Filtro a questo punto è la stessa del caso con la sola magnitudine. Per il Noise si andrà ad assegnare ogni galassia al suo bin di magnitudine ed al suo bin di colore, ottenendo una distribuzione di luminosità e di colore di galassie per il background per ogni intervallo di redshift. Ovviamente cambierà la dimensione della funzione, la quale sarà $[N \cdot Mag_i^{-2} \cdot deg^{-2} \cdot z^{-1}]$, in quanto non divideremo la funzione solamente per dm_i ma anche per dm_{col} .

Nelle Figure 4.9, 4.10 e 4.11 sono mostrati i profili di colore della funzione Noise, che abbiamo ottenuto per $z = 0.20$, $z = 0.50$, $z = 0.80$ e $z = 1.22$ e per tutti i colori considerati in questo lavoro (J-H, Z-H e R-Z).

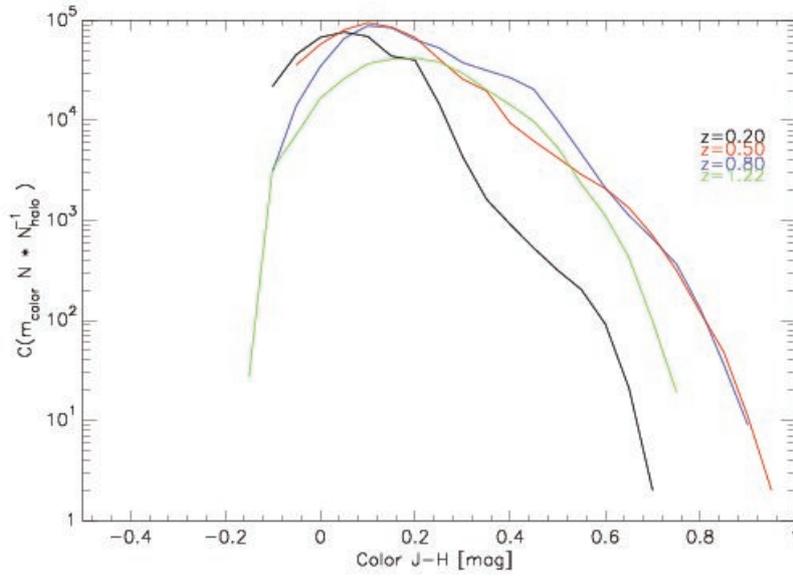


Figura 4.9: In figura sono mostrati i profili di colore della funzione Noise relativa alla banda H ed al colore J-H, ottenuti a vari redshift.

Lo stesso discorso è valido per la funzione Filtro, ovvero anche in questo caso si andrà ad ottenere una distribuzione di luminosità e colore delle galassie che compongono un ammasso di galassie. Anche per il Filtro si avrà una modifica della dimensione della funzione, la quale sarà in questo caso $[N \cdot Mag_i^{-2} \cdot z^{-1} \cdot deg^{-2} \cdot N_{halo}^{-1}]$. La successiva procedura di combinazione del profilo radiale e del profilo di luminosità e colore rimane invariata, come la procedura di rinormalizzazione della funzione. L'unica differenza è che la funzione $G(m_i, m_{col})$ dipenderà sia dalla magnitudine sia dal colore, come la funzione Filtro finale, $M(r, m_i, m_{col})$. Durante la fase di rinormalizzazione descritta in precedenza, è stato necessario calcolare il numero totale di galassie considerate, integrando il profilo di luminosità o il profilo radiale (equazione 4.5). Nel caso in cui consideriamo anche il colore quando andiamo ad integrare il profilo di luminosità e di

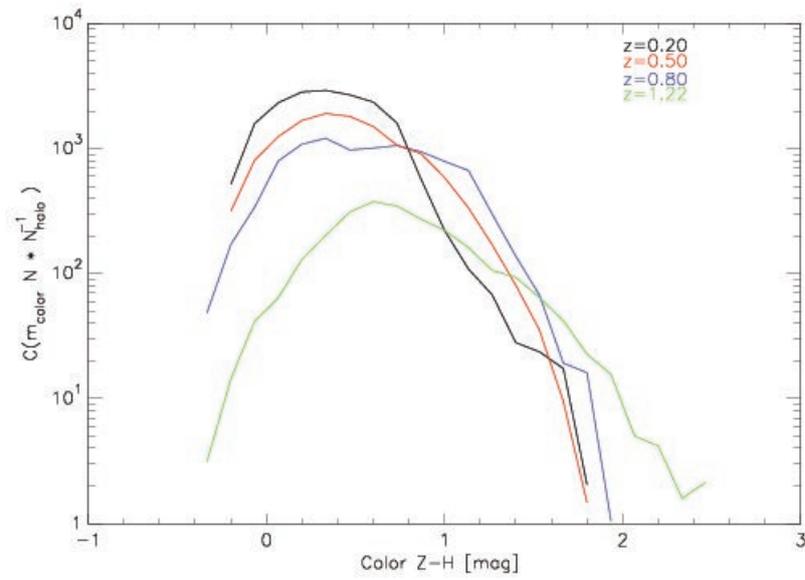


Figura 4.10: In figura sono mostrati i profili di colore della funzione Noise relativa alla banda H ed al colore Z-H, ottenuti a vari redshift.

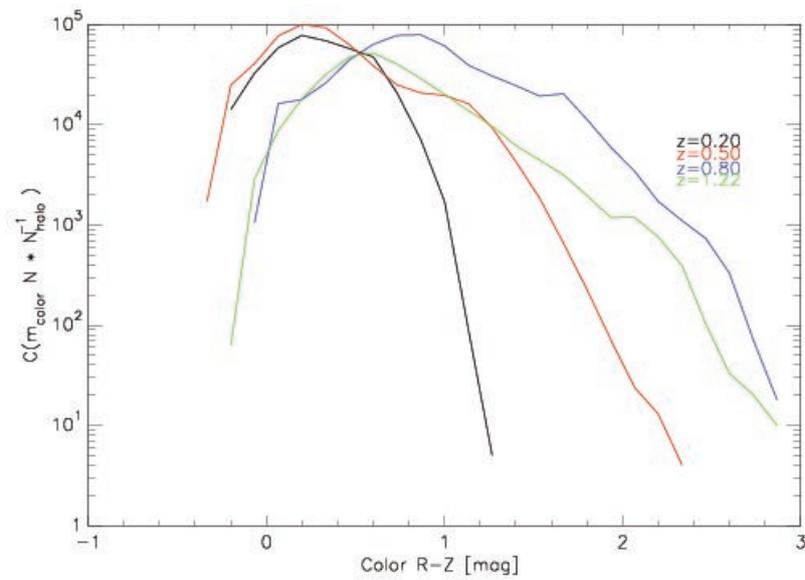


Figura 4.11: In figura sono mostrati i profili di colore della funzione Noise relativa alla banda Z ed al colore R-Z, ottenuti a vari redshift.

colore dovremo effettuare un integrale doppio, a causa appunto dell'informazione sul colore. Dovremo quindi calcolare

$$N_{gal} = \int_{m_{i,min}}^{m_{i,max}} \int_{m_{col,min}}^{m_{col,max}} G(m_i, m_{col}) dm_i dm_{col}, \quad (4.9)$$

dove $m_{i,min}$ e $m_{i,max}$ sono gli estremi dell'intervallo della magnitudine scelta, mentre $m_{col,min}$ e $m_{col,max}$ sono gli estremi dell'intervallo del colore scelto. I passaggi finali che riguardano la combinazione del profilo radiale con il profilo di luminosità e colore sono gli stessi del caso in cui consideriamo solo la magnitudine.

Nelle Figure 4.12, 4.13 e 4.14 vengono mostrati i profili di colore di un ammasso medio, per tutti i colori considerati in questo lavoro, ottenuti attraverso la seguente integrazione:

$$C(m_{col}) = \int_{m_{i,min}}^{m_{i,max}} G(m_i, m_{col}) dm_i. \quad (4.10)$$

Come possiamo vedere all'aumentare del redshift aumenta il contributo delle galassie più rosse (galassie ellittiche), mentre diminuisce il contributo delle galassie blu (galassie a spirale). Possiamo inoltre notare come, all'aumentare del redshift, il contributo di tutte le galassie che compongono l'ammasso diminuisca. Questo è dovuto principalmente al fatto che l'ammasso di galassie è più lontano e quindi si vedono meno galassie.

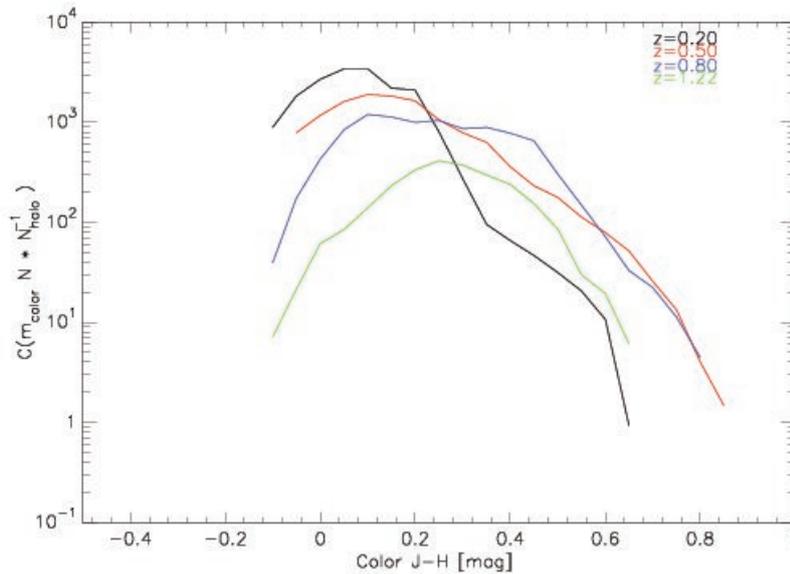


Figura 4.12: In figura sono mostrati i profili di colore della funzione Filtro, per un ammasso di galassie medio, relativi al colore J-H, ottenuti per $z = 0.20$, $z = 0.50$, $z = 0.80$ e $z = 1.22$.

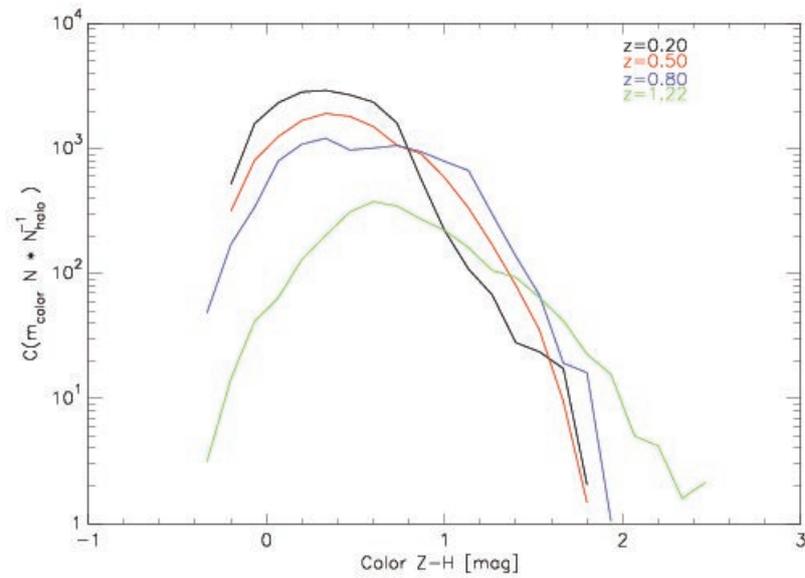


Figura 4.13: In figura sono mostrati i profili di colore della funzione Filtro, per un ammasso di galassie medio, relativi al colore Z-H, ottenuti per $z = 0.20$, $z = 0.50$, $z = 0.80$ e $z = 1.22$.

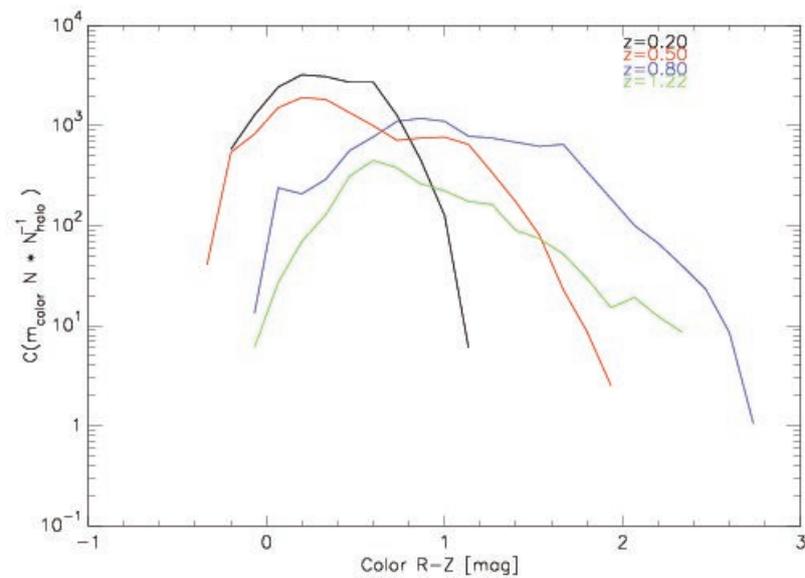


Figura 4.14: In figura sono mostrati i profili di colore della funzione Filtro, per un ammasso di galassie medio, relativi al colore R-Z, ottenuti per $z = 0.20$, $z = 0.50$, $z = 0.80$ e $z = 1.22$.

Come abbiamo anticipato all'inizio di questo paragrafo, in questo lavoro si è scelto di utilizzare i colori J-H, Z-H e R-Z. Per ognuno di questi colori sono state create le relative funzioni Noise e Filtro, seguendo la procedura descritta in precedenza. Una

volta ottenute queste funzioni abbiamo voluto confrontare il Noise ed il Filtro, per ogni colore scelto, in modo da individuare il colore che ci permettesse di ottenere dei risultati migliori dall'algoritmo *cluster-finder*. Per fare questo sono state confrontate le due funzioni in grafici *colore-magnitudine*, in modo tale da apprezzarne le differenze.

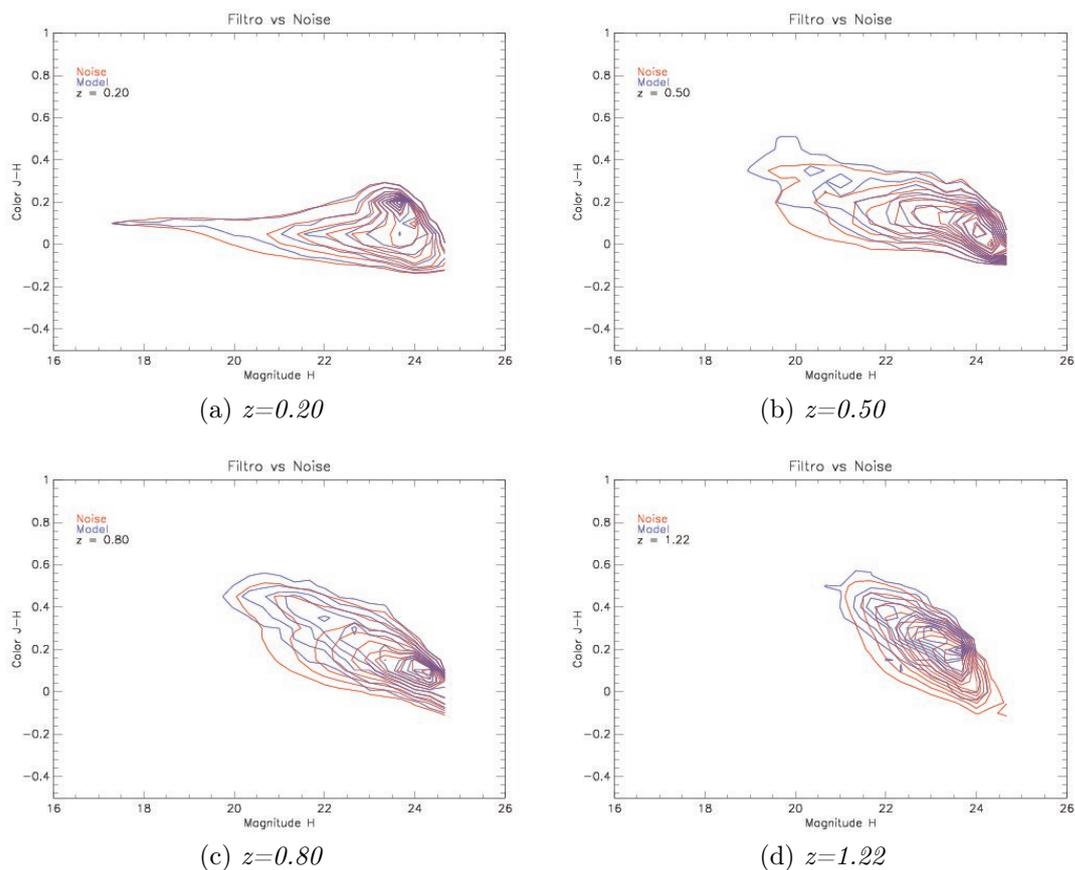


Figura 4.15: Confronti tra Noise e Filtro a vari redshift ottenuti per il colore J-H e la banda osservativa H.

Nelle Figure 4.15, 4.16 e 4.17 sono mostrati i grafici magnitudine-colore utilizzati per confrontare le funzioni Noise e Filtro per i vari colori. Come possiamo notare la differenza maggiore tra le funzioni Noise e Filtro si ha nel caso del colore R-Z, in quanto i contorni delle due funzioni spesso non corrispondono tra loro. Il caso peggiore è stato ottenuto per il colore J-H, dove spesso abbiamo una sovrapposizione dei contorni delle due funzioni. In tutti e tre i casi è comunque possibile apprezzare l'evoluzione delle due funzioni con il redshift. Possiamo notare infatti come, all'aumentare del redshift e per ogni colore, si abbia una diminuzione del contributo delle galassie più brillanti,

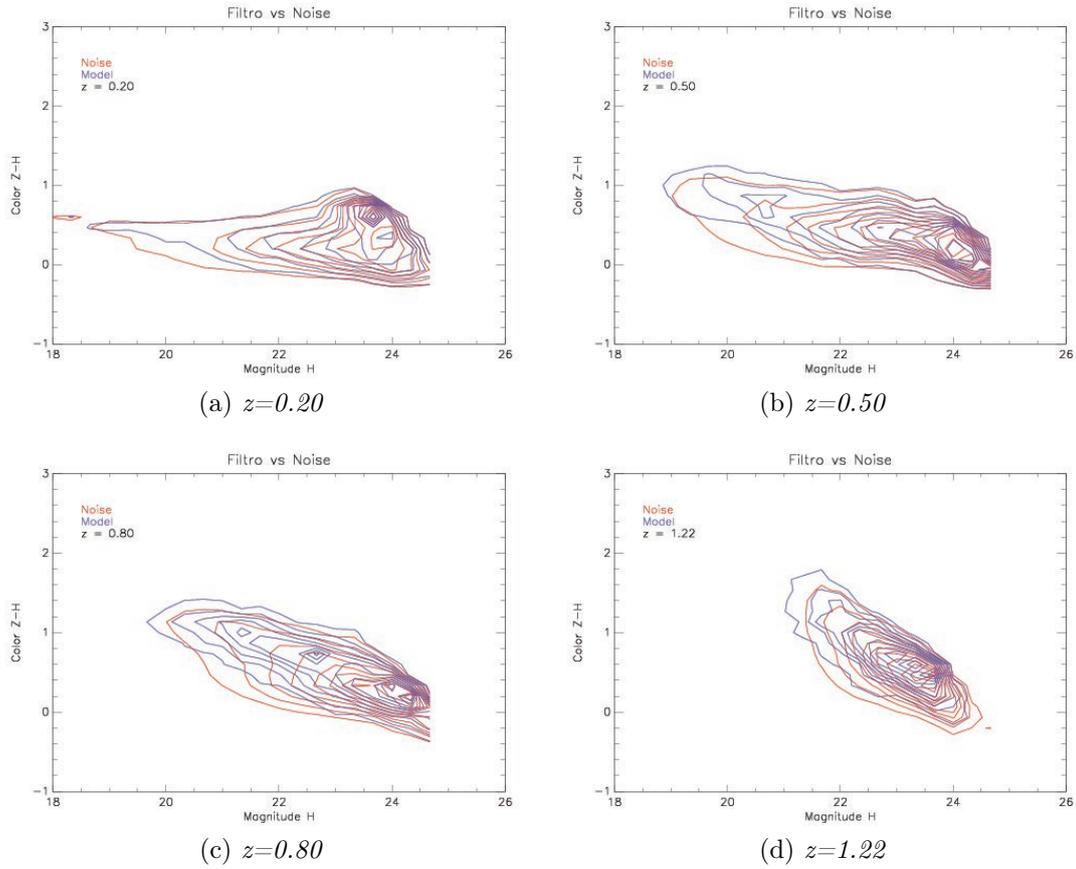


Figura 4.16: Confronti tra Noise e Filtro a vari redshift ottenuti per il colore Z-H e la banda osservativa H.

per entrambe le funzioni, ed un aumento del contributo delle galassie rosse (ellittiche). Questi andamenti erano già stati notati nei profili di luminosità e di colore presentati precedentemente. Come conseguenza di queste valutazioni si è scelto di utilizzare come funzioni di input per l'algoritmo *cluster-finder* le funzioni Noise e Filtro relative alla banda osservativa Z e al colore R-Z. I grafici magnitudine-colore, descritti in precedenza, hanno mostrato che, per il colore R-Z, c'è una maggiore differenza tra la funzione Noise e la funzione Filtro. Questo ci permette di ipotizzare che dall'algoritmo *cluster-finder* possiamo ottenere risultati migliori, come ad esempio un numero di *detections* maggiore o il riuscire ad individuare anche ammassi di galassie di piccola massa.

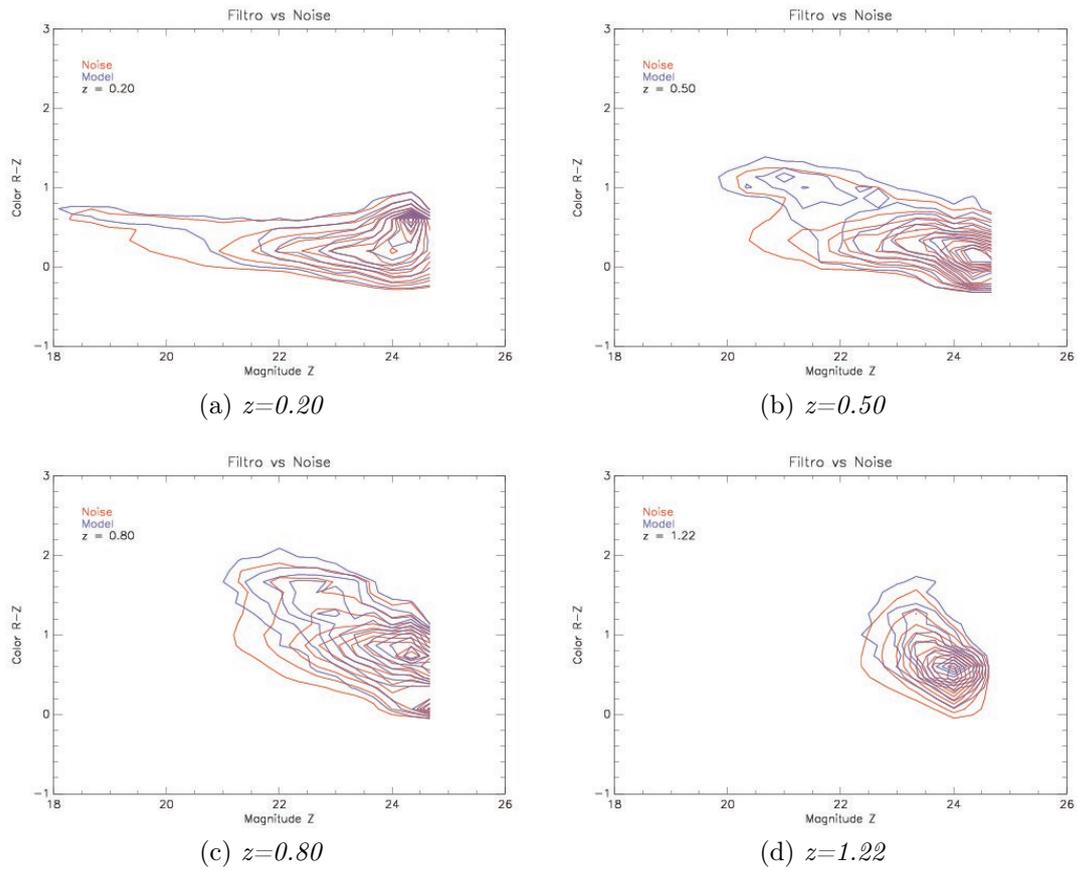


Figura 4.17: Confronti tra Noise e Filtro a vari redshift ottenuti per il colore R-Z e la banda osservativa Z.

Capitolo 5

Risultati ottenuti

In questo capitolo andremo a descrivere e commentare i risultati che abbiamo ottenuto dall'applicazione dell'algoritmo *cluster-finder*. Inizialmente descriveremo la fase di *Matching*, necessaria al fine di collegare ogni *detection* trovata dall'algoritmo con gli ammassi di galassie presenti nel catalogo utilizzato in questo lavoro. Quello che vogliamo valutare è non solo l'efficienza del codice quando utilizzato con le funzioni Noise e Filtro definite per una banda osservativa, ma anche l'efficienza nel caso in cui si aggiunge l'utilizzo del colore. Successivamente confronteremo i risultati di entrambe le esecuzioni del codice per valutare se, quest'ultimo, ci fornisce risultati migliori nel caso di una sola banda osservativa o con l'aggiunta dell'informazione sul colore. Per valutare l'efficienza dell'algoritmo abbiamo utilizzato due quantità, che verranno descritte nel dettaglio nei paragrafi successivi, ovvero la *Purezza* e la *Completezza*. Queste due quantità vengono costruite partendo dal catalogo che abbiamo ottenuto alla fine della fase del *Matching* e ci permettono di costruire dei grafici Purezza-Completezza molto utili per la valutazione della prestazione dell'algoritmo.

5.1 Matching

Nel capitolo precedente abbiamo descritto le procedure eseguite per la costruzione delle funzioni Noise e Filtro. Come già anticipato, queste due funzioni rappresentano i file di input per l'algoritmo *cluster-finder*, il quale applica queste funzioni al catalogo di galassie per generare i file di output, come ad esempio il catalogo di *detections*. Una volta ottenuto il catalogo contenente le varie *detections* dell'algoritmo possiamo iniziare la vera e propria fase di *Matching*. Questa fase consiste nell'andare a verificare che le *detections* ottenute dall'esecuzione dell'algoritmo si riferiscano ad ammassi di galassie presenti realmente all'interno del catalogo. Successivamente parleremo di *true detection* e *fake detection*: le prime saranno quelle *detections* che si riferiscono ad am-

massi di galassie, non solo presenti nel catalogo utilizzato, ma che rispetteranno anche alcune condizioni che descriveremo successivamente; le seconde invece saranno quelle *detections* che si riferiscono ad ammassi di galassie presenti nel catalogo utilizzato ma che non sono stati presi in considerazione a causa del taglio in massa effettuato o semplicemente perché non hanno rispettato le condizioni di cui parleremo successivamente. Il primo passaggio è stato quello di ordinare il catalogo di *detections* in ordine decrescente per il S/N , in modo tale che durante la fase di *Matching* vengano controllate prima le *detections* con S/N più alto, cioè ritenute dall'algoritmo come più affidabili. Gli ammassi di galassie del catalogo sono stati ordinati per valori di massa decrescenti. Questo passaggio è stato eseguito perché ci aspettiamo una correlazione tra il rapporto S/N e la quantità M_{200} degli ammassi di galassie (si veda Figura 5.2). Il passo successivo è quello che riguarda il *Matching* vero e proprio, ovvero il collegare ogni *detection* trovata dall'algoritmo *cluster-finder* con l'ammasso di galassie corrispondente. Le condizioni che abbiamo imposto simultaneamente per poter collegare una *detection* ad un ammasso di galassie sono due: la prima confronta il redshift della *detection* con il redshift dell'ammasso di galassie; la seconda condizione invece confronta la posizione in cielo della *detection* con la posizione del centro dell'ammasso di galassie, o più precisamente con la posizione della galassia centrale dell'ammasso. Ogni singola *detection* viene quindi confrontata con tutti gli ammassi di galassie utilizzati per la costruzione della funzione Filtro. Durante la creazione di questa funzione è stato creato un catalogo contenente tutti gli ammassi di galassie utilizzati. In questo catalogo sono state inserite le posizioni in cielo (RA e DEC) delle galassie centrali degli ammassi, il loro redshift e la loro massa che, ricordiamo, corrisponde alla quantità M_{200} dell'ammasso di galassie. L'ultima quantità che è stata inserita in questo catalogo di ammassi di galassie è R_{200} . Questa quantità rappresenta il raggio entro il quale si ha una densità pari a 200 volte la densità critica dell'Universo. Ci siamo potuti ricavare questa quantità partendo dall'equazione (2.2) e ottenendo la seguente forma:

$$R_{200} = \left(\frac{3M_{200}}{4\pi\delta\rho_{crit,0}E_z^2} \right)^{1/3}, \quad (5.1)$$

dove la quantità δ in questo caso assume il valore di 200. La densità critica dell'Universo $\rho_{crit,0}$ è la stessa quantità descritta nell'equazione 1.7, con l'unica differenza che tutte le quantità sono calcolate a $z = 0$, cioè oggi. La funzione E_z^2 tiene conto dell'evoluzione dei parametri di densità con il redshift. Questa funzione assume la seguente forma, per un Universo piatto Λ CDM:

$$E_z^2 = \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda,0}, \quad (5.2)$$

dove $\Omega_{m,0} = 0.25$ e $\Omega_{\Lambda,0} = 0.75$ sono rispettivamente il parametro di densità della

materia e quello relativo alla costante cosmologica calcolati al tempo presente. Il contributo del parametro di densità della radiazione è stato posto uguale a 0 a causa del valore trascurabile che assume oggi, ovvero $\Omega_{rad,0} = 10^{-5}$. In questo lavoro, come detto in precedenza, si è scelto di utilizzare come unità di misura delle distanze le unità angolari. All'interno del catalogo di ammassi di galassie quindi è stata inserita la quantità θ_{200} , la quale non è altro che R_{200} espressa in gradi (*deg*).

Come già detto in precedenza, durante la fase di *Matching*, viene considerata ogni singola *detection* trovata e confrontata con tutti gli ammassi di galassie del catalogo appena introdotto. Per essere verificata la condizione sul redshift si andrà a valutare se il redshift della *detection* rispetta la seguente richiesta:

$$|z_{det} - z_{clus}| < \kappa, \quad (5.3)$$

dove la tolleranza κ è stata posta uguale all'errore imposto sui redshift fotometrici, $\kappa = \epsilon(1 + z_{clus})$ con $\epsilon = 0.05$; la quantità z_{clus} rappresenta il redshift dell'ammasso che stiamo considerando.

Per quanto riguarda la seconda condizione, quella relativa alla posizione angolare della *detection*, dobbiamo andare a valutare se la distanza angolare della *detection* dal centro dell'ammasso è minore o uguale a θ_{200} . Se la distanza è effettivamente minore di θ_{200} allora anche la seconda condizione è verificata. Ricordiamo che entrambe le condizioni devono essere verificate simultaneamente per lo stesso ammasso di galassie. Una volta che, per un ammasso di galassie, entrambe le condizioni sono verificate, possiamo affermare che quell'ammasso di galassie è *matched* con quella *detection*, che quindi viene considerata come una *true detection*. Questa procedura viene ripetuta per tutte le *detections* presenti nel catalogo prodotto dall'algoritmo *cluster-finder*. Può chiaramente accadere che per una determinata *detection* non vengano rispettate le due condizioni espresse in precedenza per nessun ammasso di galassie del catalogo. In questo caso la *detection* non verrà collegata con nessun ammasso di galassie e verrà considerata una *fake detection*. Ogni *detection* ed ogni ammasso di galassie, che vengono collegati tra loro, vengono marcati con una flag posta uguale a 1, in modo tale da non essere più presi in considerazione durante questa fase. Le *detections* e gli ammassi di galassie che non hanno nessuna corrispondenza rimangono contrassegnati da una flag posta uguale a 0. Questo è dovuto al fatto che una *detection*, al massimo, viene assegnata ad un solo ammasso di galassie e viceversa. Una volta che sono state controllate tutte le *detections* del catalogo possiamo ritenere terminata la fase del *Matching*. Prima di passare alla fase successiva, è stato necessario costruire un nuovo catalogo contenente tutte le informazioni necessarie per l'analisi dei risultati, sia degli ammassi di galassie sia delle *detections*. Sono state quindi inserite le posizioni degli ammassi e delle *detections*, i loro redshift, la massa degli ammassi, il S/N e l'ampiezza delle *detections* e la flag, precedentemente introdotta, la quale ci permetterà facilmente di classificare le

detections in *true detection* e *fake detection*.

L'algoritmo *cluster-finder* è stato utilizzato due volte, la prima utilizzando le funzioni Noise e Filtro costruite utilizzando solo la banda osservativa Z, mentre nella seconda esecuzione sono state utilizzate le funzioni Noise e Filtro relative alla banda osservativa Z ed al colore R-Z. Queste due differenti esecuzioni del codice hanno prodotto non solo due cataloghi di *detections* differenti, ma anche due diverse mappe di ampiezza, oltre a tutti gli altri file di output accennati in precedenza. La procedura appena descritta, relativa al *Matching*, è stata eseguita per entrambi i cataloghi di *detections*.

Mostreremo adesso alcuni grafici che descrivono i risultati ottenuti dalla fase di *Matching*, dove abbiamo considerato gli ammassi di galassie con $M > 10^{13.5} M_{\odot}$. I grafici che verranno mostrati sono stati ottenuti dai risultati ottenuti dall'esecuzione dell'algoritmo utilizzando le funzioni relative alla sola banda osservativa Z.

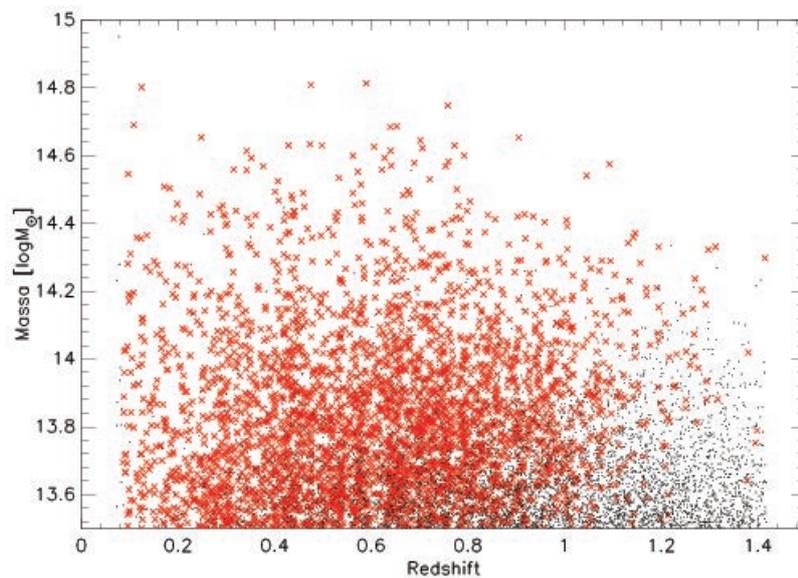


Figura 5.1: In figura viene mostrata la massa ed il redshift degli ammassi di galassie, le crocette rosse si riferiscono ad ammassi di galassie *matched*, mentre i puntini neri rappresentano gli ammassi di galassie che non sono stati *matched*.

La Figura 5.1 mostra tutti gli ammassi di galassie presenti nel catalogo simulato utilizzato, specificando la massa ed il redshift, sia degli ammassi di galassie che sono stati *matched*, sia quelli non *matched*. Come possiamo facilmente notare il numero maggiore di ammassi di galassie *matched* sono quelli di grande massa per $z < 1$. Il numero di ammassi di galassie non *matched* tende ad aumentare con l'aumentare del redshift e comprende soprattutto ammassi di galassie di piccola massa. La procedura di *Matching*, quindi, ci permette già di poter affermare che l'algoritmo *cluster-finder* riesce ad individuare gli ammassi di galassie di grande massa ($M > 10^{14} M_{\odot}$) per $z < 1$, mentre per $z \geq 1$ il numero di ammassi *matched* diminuisce. Questo è dovuto anche

al fatto che per $z \geq 1$ si hanno più ammassi di galassie di piccola massa ed è quindi plausibile che l'algoritmo abbia più difficoltà ad individuarli, soprattutto a redshift elevati.

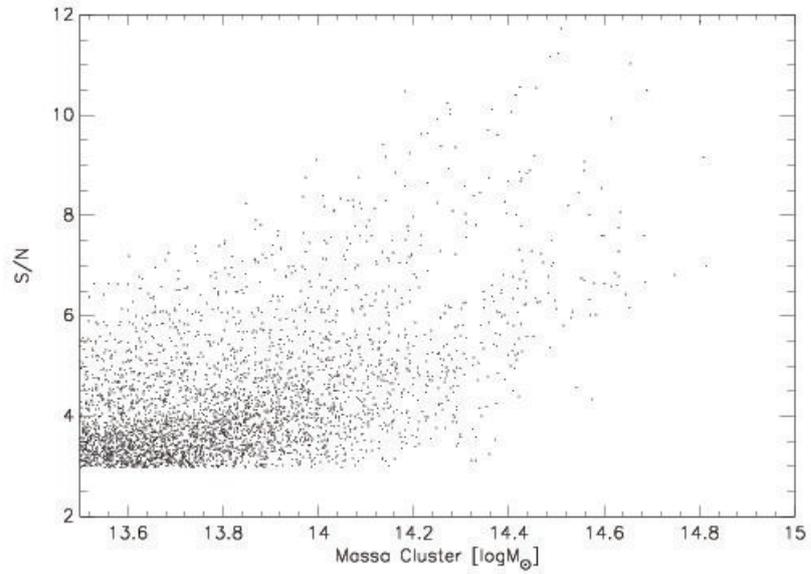


Figura 5.2: La figura mostra la relazione tra la massa degli ammassi di galassie *matched* ed il loro S/N.

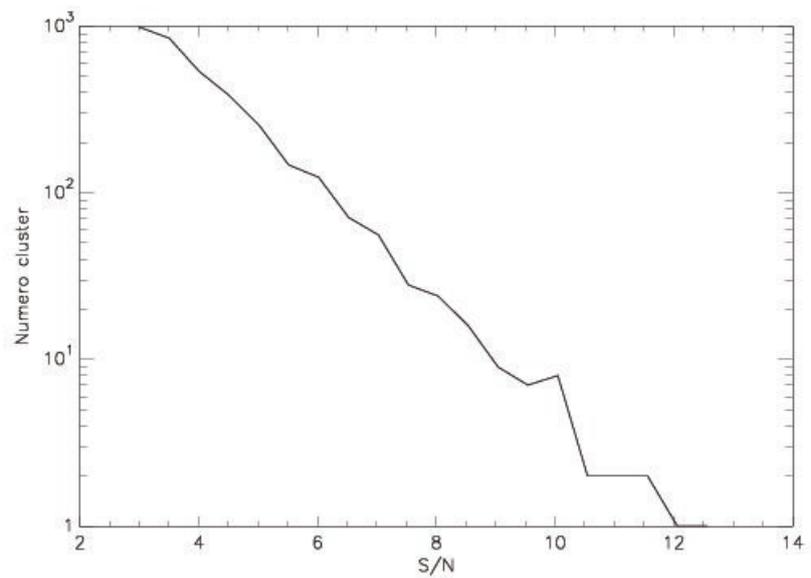


Figura 5.3: La figura mostra il numero di ammassi di galassie *matched* in funzione del rapporto S/N delle *detections* ad essi associate.

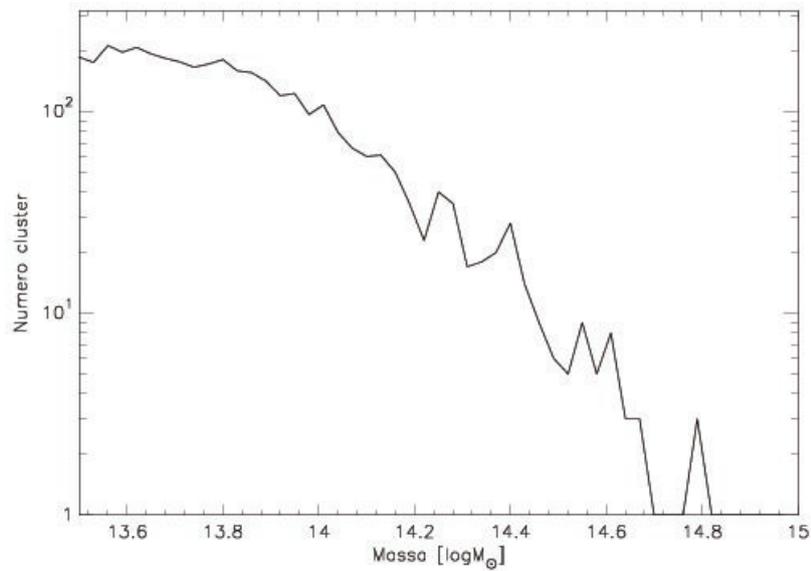


Figura 5.4: La figura mostra il numero di ammassi di galassie *matched* in funzione della loro massa.

Nella Figura 5.2 viene mostrato il valore del S/N per ogni ammasso di galassie *matched*, in relazione alla massa degli ammassi. Possiamo notare come i valori più alti di S/N fanno riferimento ad ammassi di galassie di grande massa, mentre per quanto riguarda gli ammassi di piccola massa il valore del S/N rimane tendenzialmente più basso. Questo conferma la scelta che avevamo fatto con l'ordinamento delle *detections* e degli ammassi di galassie. La Figura 5.3 invece mostra il numero di ammassi *matched* in funzione del S/N delle *detections* ad essi associati. Come possiamo facilmente notare il numero degli ammassi di galassie *matched* diminuisce all'aumentare del S/N. Questa relazione è possibile osservarla anche nella Figura 5.4, dove è facile osservare che si ha un numero maggiore di ammassi di galassie *matched* di piccola massa.

La Figura 5.6 mostra il numero degli ammassi di galassie *matched* in funzione del redshift. Come possiamo notare facilmente il numero di ammassi di galassie *matched* diminuisce all'aumentare del redshift. Questa relazione conferma che gli ammassi di galassie ad alto redshift sono più difficili da osservare. La Figura 5.7 mostra invece un altro confronto effettuato al termine della procedura di *Matching*, nella fattispecie il confronto tra il redshift delle *detections* e la quantità $\Delta z = (z_{det} - z_{clus})$, dove z_{det} rappresenta il redshift della *detection* e z_{clus} il redshift dell'ammasso di galassie *matched* ad essa associato. Nella Figura 5.5 possiamo invece apprezzare come ci sia una relazione tra la massa degli ammassi di galassie *matched* ed il relativo valore di ampiezza. Possiamo infatti notare come all'aumentare della massa degli ammassi di galassie *matched* aumenti anche il valore di ampiezza, in quanto è normale attendersi che ad un ammasso di galassie di grande massa sia associato un valore più elevato di

ampiezza. La correlazione presente tra queste due quantità è maggiore rispetto al caso in cui consideriamo il S/N perché l'ampiezza è una stima della massa dell'ammasso di galassie. Al tempo stesso però possiamo anche vedere in Figura 5.5 che valori alti di ampiezza sono associati anche ad ammassi di galassie di massa più piccola. Questo significa che questi ammassi di galassie in particolare hanno caratteristiche tali da essere identificati dall'algoritmo più facilmente.

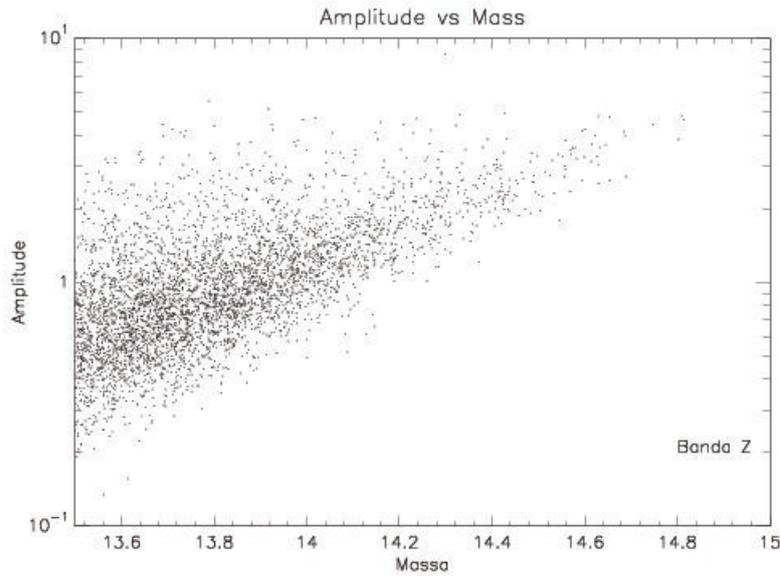


Figura 5.5: La figura mostra la massa degli ammassi di galassie *matched* e la loro relativa ampiezza.

La Figura 5.8 mostra la distanza tra il centro delle *detections* ed il centro degli ammassi di galassie *matched* ad esse associate espresse in *deg*, in funzione del redshift. Come possiamo facilmente notare la maggior parte delle *detections* sono state individuate molto vicine al centro degli ammassi di galassie fatta eccezione per alcuni casi sporadici.

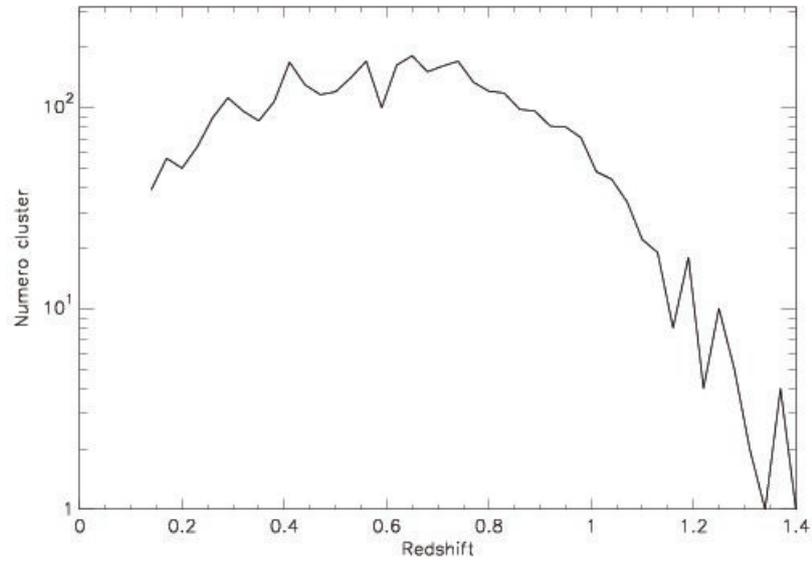


Figura 5.6: In figura viene mostrato il numero di ammassi di galassie *matched* in funzione del redshift.

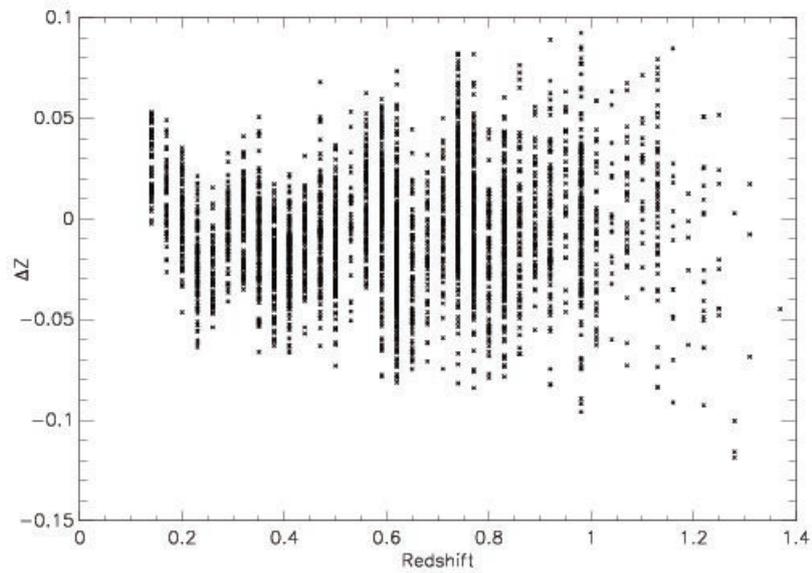


Figura 5.7: In figura vengono mostrati i redshift delle *detections* e la differenza tra i redshift delle *detections* con quegli degli ammassi di galassie *matched*.

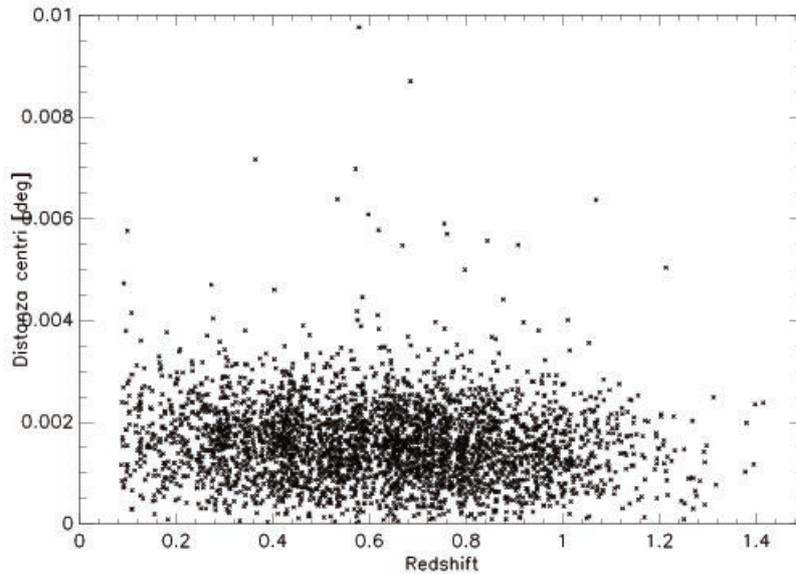


Figura 5.8: In figura vengono mostrate le distanze tra il centro delle *detections* ed il centro degli ammassi di galassie *matched* in funzione del redshift degli ammassi di galassie.

5.2 Purezza e Completezza

In questo paragrafo andremo ad introdurre due quantità che sono state utilizzate in questo lavoro per valutare l'efficienza dell'algorithm *cluster-finder* utilizzato. Le quantità in questione sono, come già anticipato, la *Purezza* e la *Completezza*. Queste due quantità vengono create valutando il numero di ammassi di galassie presenti nel catalogo di partenza ed il numero di *detections*, *matched* e non. Nel paragrafo 5.1 abbiamo parlato della fase di *Matching* delle *detections* e descritto il catalogo contenente tutte le informazioni sugli ammassi di galassie utilizzati e tutte le *detections*, comprese le *fake detection*. Questo catalogo è il punto di partenza per la costruzione della *Purezza* e della *Completezza*. Prima di descrivere la procedura utilizzata per la costruzione di queste due quantità, andiamo a descrivere cosa rappresentano e come sono definite.

La prima quantità di cui parleremo è la *Completezza*, la quale è definita come il rapporto tra le *detections matched* rispetto al numero di ammassi di galassie presenti nel campo. Questa definizione può essere rappresentata nel seguente modo:

$$Completezza = \frac{N_{match}}{N_{clus}}, \quad (5.4)$$

dove N_{clus} rappresenta il numero di ammassi di galassie utilizzati, mentre N_{match} sono le *detections matched* (ovvero contrassegnate dalla flag = 1). In base a questa definizione

possiamo facilmente ottenere l'intervallo di valori che la Completezza può avere:

$$\text{Completezza} \in [0\%; 100\%]. \quad (5.5)$$

Il valore massimo dell'intervallo è raggiunto nel caso in cui tutti gli ammassi di galassie utilizzati siano stati collegati ad una *detection*, viceversa si otterrà il valore minimo dell'intervallo.

La seconda quantità utilizzata è la *Purezza*, la quale è definita come il rapporto tra il numero di *detections matched* ($\text{flag} = 1$) rispetto al numero totale di *detections*. Questa quantità possiamo descriverla in questo modo:

$$\text{Purezza} = \frac{N_{\text{match}}}{N_{\text{det}}} \quad (5.6)$$

dove N_{match} sono le *detections matched*, come per la Completezza, mentre N_{det} rappresenta il numero totale di *detections*. Anche per la Purezza possiamo individuare l'intervallo di valori che essa può assumere, il quale sarà

$$\text{Purezza} \in [0\%; 100\%]. \quad (5.7)$$

Anche in questo caso avremo che il valore massimo dell'intervallo lo si otterrà nel caso in cui tutte le *detections* sono state *matched* con un ammasso di galassie, viceversa avremo il valore minimo dell'intervallo.

Entrambe le quantità appena introdotte dipendono non solo dal numero di ammassi di galassie, ma dipendono anche dal catalogo utilizzato, nello specifico da dove abbiamo deciso di tagliare il catalogo, ovvero dal rapporto S/N minimo che si vuole utilizzare. A seconda del valore minimo impostato per il rapporto S/N , le due quantità cambiano perché cambia il catalogo da cui dipendono e dal quale vengono costruite.

In base a come sono state definite queste due quantità possiamo subito capire per cosa queste due funzioni vengono utilizzate in questo lavoro. La Completezza, in base a come è stata definita, quantifica la percentuale di ammassi di galassie *matched* rispetto al numero totale di ammassi utilizzati; la Purezza, invece, fornisce il numero di *detections matched* rispetto al numero totale di *detections*. Combinare queste due quantità, all'interno dei grafici Purezza-Completezza, ci permette di valutare contemporaneamente sia la performance dell'algoritmo a riguardo delle *detections* sia a riguardo del numero di ammassi individuati. Come già anticipato in precedenza, l'obiettivo di un algoritmo *cluster-finder* è quello di massimizzare le quantità introdotte precedentemente. Un buon algoritmo sarà quello che avrà contemporaneamente un alto valore di Purezza e di Completezza.

In questo lavoro è stato scelto di creare i grafici Purezza-Completezza in due casi particolari: il primo considerando tutti gli ammassi di galassie con $M > 10^{13.5} M_{\odot}$; il secondo

considerando solo gli ammassi con $M > 10^{14}M_{\odot}$. Per entrambi questi casi si è scelto di dividere gli ammassi selezionati in base al redshift, generando poi i grafici per i seguenti intervalli di redshift: $[0.14; 0.6[$, $[0.6; 1.0[$ e $[1.0; 1.4]$. Andremo quindi a descrivere la procedura per la costruzione della Purezza e della Completezza e, successivamente mostreremo i risultati prima per gli ammassi di galassie con $M > 10^{13.5}M_{\odot}$ e poi per $M > 10^{14}M_{\odot}$, in modo tale da valutare la performance dell'algoritmo considerando oggetti e redshift diversi.

Per motivi di comodità e praticità, il taglio in massa degli ammassi di galassie è stato effettuato all'inizio della fase di *Matching*. In questo modo è stato eseguito il *Matching* solamente sugli ammassi selezionati. Il catalogo creato alla fine di questa fase contiene quindi gli ammassi e le *detections* corrispondenti agli ammassi selezionati, per il taglio in massa considerato in quel momento. La costruzione della Purezza e della Completezza è una fase abbastanza semplice ed è stata eseguita per ognuno degli intervalli di redshift voluti. Il primo passo è stato quindi quello di andare a selezionare le *detections* e gli ammassi appartenenti all'intervallo di redshift considerato:

$$z_{det} \in [z_{min}; z_{max}] \quad ; \quad z_{clus} \in [z_{min}; z_{max}], \quad (5.8)$$

dove z_{min} e z_{max} rappresentano rispettivamente il limite inferiore e superiore dell'intervallo di redshift considerato. Nel paragrafo 5.1 abbiamo descritto le condizioni necessarie per poter collegare una *detection* con un ammasso di galassie. La condizione sul redshift, descritta dall'equazione (5.3) ci costringe ad un ulteriore controllo sul redshift delle *detections* e degli ammassi selezionati. Può verificarsi infatti che una *detection*, marcata con la flag uguale a 1, sia collegata con un ammasso di galassie non selezionato per quell'intervallo di redshift, e risulti quindi collegata a nessun ammasso di galassie. In questo lavoro si è scelto, quando si verifica questa situazione, di considerare in modo conservativo la *detection* una *fake detection* (flag = 0). Questa scelta comporta inevitabilmente un aumento delle *fake detections*, ma ci ha permesso di evitare delle complicazioni, come ad esempio l'ottenere per determinati intervalli di redshift un valore di Completezza maggiore di 1, il quale per definizione è errato. Il controllo effettuato sui redshift delle *detections* e sui redshift degli ammassi di galassie ad esse collegati ci ha permesso di evitare proprio questo problema riguardante la Completezza.

Una volta effettuate le selezioni degli ammassi di galassie e delle *detections* in base all'intervallo di redshift che stiamo considerando, e dopo aver effettuato il controllo appena descritto possiamo andare a costruire le quantità Purezza e Completezza. Per fare questo è sufficiente scorrere le *detections* ordinate per S/N selezionate e per ogni *detection* contrassegnata dalla flag uguale a 1 andare a sommare le seguenti quantità

per la Purezza:

$$P(S/N) = \frac{N_{match}(S/N)}{N_{det}(S/N)}, \quad (5.9)$$

e per la Completezza:

$$C(S/N) = \frac{N_{match}(S/N)}{N_{clus}}, \quad (5.10)$$

dove, in entrambi i casi, la quantità N_{match} rappresenta il numero di ammassi *matched* ($flag = 1$) fino alla i -esima *detection*, mentre N_{clus} è il numero totale di ammassi di galassie selezionati; la quantità N_{det} rappresenta il numero della *detection* che stiamo considerando in quell'istante.

Ripetendo questa operazione per ogni intervallo di redshift scelto e per ogni taglio in massa, arriviamo ad avere le quantità necessarie per poterci costruire i grafici Purezza-Completezza, i quali sono stati utilizzati per trarre le conclusioni sulle performance dell'algoritmo *cluster-finder*.

5.2.1 Grafici Purezza-Completezza in banda Z

Nel paragrafo precedente abbiamo introdotto le quantità Purezza e Completezza, le quali verranno utilizzate come metro di giudizio per le performance dell'algoritmo utilizzato. Prese singolarmente possono già darci qualche informazione sui risultati prodotti dal codice *cluster-finder*; è di interesse maggiore però, andare a valutare la loro combinazione, ovvero il loro confronto all'interno dei grafici Purezza-Completezza (P-C). Come già anticipato in precedenza, un buon algoritmo *cluster-finder* è quello che genera dei risultati che riescono a generare degli alti valori sia per la Purezza che per la Completezza. Un valore elevato di Purezza implica che un gran numero di *detections* individuate vengono collegate ad ammassi presenti all'interno del catalogo in uso, e quindi avremo di conseguenza un numero molto piccolo di *fake detection*. Un valore elevato della Completezza, invece, implica che sono stati individuati quasi tutti gli ammassi di galassie presenti nella zona di cielo considerata. Un buon algoritmo sarà quello che non solo riuscirà ad individuare quasi tutti gli ammassi di galassie presenti, ma riuscirà a porre la *detection* nella posizione più vicina all'ammasso, considerando non solo le coordinate del loro centro (della *detection* e dell'ammasso di galassie), ma anche il loro redshift.

Come già detto in precedenza, abbiamo utilizzato, in questo lavoro, l'algoritmo *cluster-finder* sia per le funzioni Noise e Filtro relative alla sola banda osservativa Z sia per la banda osservativa Z ed il colore R-Z. Inizialmente andremo a mostrare i plot P-C

relativi ai risultati ottenuti per la banda Z, successivamente per la banda Z e per il colore R-Z ed infine mostreremo un confronto tra le due performance.

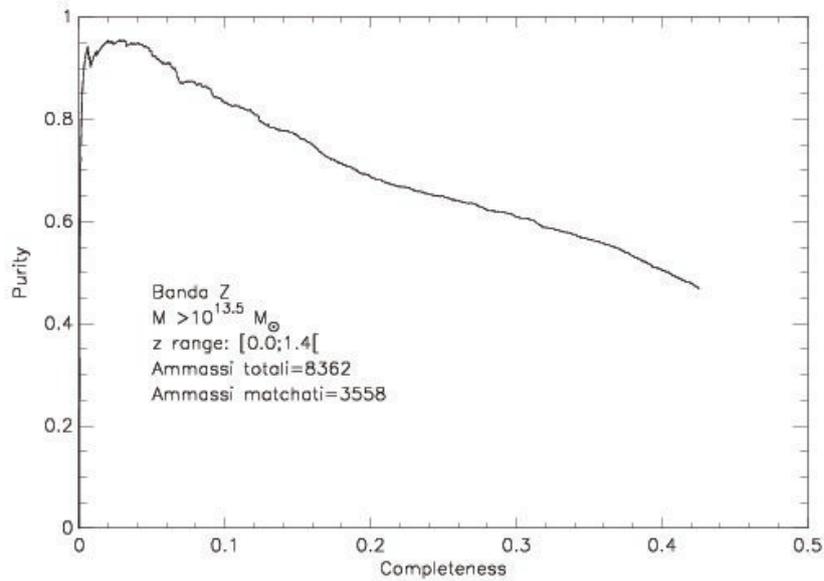
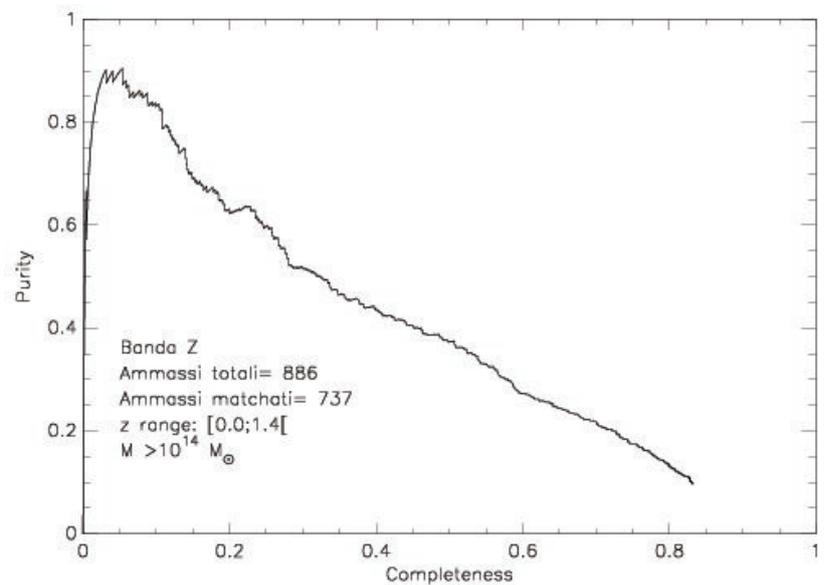
(a) $M > 10^{13.5} M_{\odot}$ (b) $M > 10^{14} M_{\odot}$

Figura 5.9: Grafici P-C riferiti alla sola banda osservativa Z. I grafici mostrati fanno riferimento all'intero intervallo di redshift considerato in questo lavoro. Il grafico (a) considera solamente gli ammassi di galassie con $M > 10^{13.5} M_{\odot}$, mentre il caso (b) gli ammassi con $M > 10^{14} M_{\odot}$.

I grafici mostrati nella figura (5.9) sono un esempio dei grafici P-C. Questi grafici fanno riferimento esclusivamente alla banda osservativa Z e all'intero intervallo di redshift, $[0.0; 1.4[$. Sono stati mostrati i grafici P-C ottenuti per entrambi i tagli in massa effettuati. All'interno dei grafici è, inoltre, riportato il numero di ammassi di galassie considerati per generare sia le quantità Purezza e Completezza sia il grafico stesso. Questo numero rappresenta la quantità N_{clus} utilizzata, ad esempio, nell'equazione (5.10). Il numero di ammassi di galassie *matched*, sempre riportato all'interno dei grafici in figura 5.9, rappresenta la quantità N_{match} utilizzata nelle equazioni (5.9) e (5.10). Osservando i due grafici appena introdotti possiamo subito notare la differenza del numero di ammassi di galassie considerati. Chiaramente questo numero è maggiore nel caso in cui consideriamo ammassi di galassie con $M > 10^{13.5}M_{\odot}$, in quanto viene utilizzato un intervallo di masse per gli ammassi più ampio rispetto al caso $M > 10^{14}M_{\odot}$. Non c'è da sorprendersi se nel secondo caso (b) la Completezza raggiunta è più elevata rispetto al primo caso (a): l'algoritmo *cluster-finder* riesce ad individuare più facilmente gli ammassi di galassie di grande massa.

In Figura (5.10) possiamo vedere i grafici P-C ottenuti considerando la sola banda osservativa Z, considerando ammassi di galassie con $M > 10^{13.5}M_{\odot}$ nei vari intervalli di redshift.

Nei grafici descritti in Figura (5.10) possiamo notare come il valore della Completezza cambi a seconda dell'intervallo di redshift considerato. Questi dati rispettano il fatto che per $z \geq 1$ il numero di ammassi *matched* risulta essere molto minore rispetto agli ammassi di galassie considerati. Come vedremo successivamente, per $z \geq 1$, i valori ottenuti per la Completezza sono sempre inferiori rispetto agli altri intervalli di redshift. Nonostante questo, nella Figura (5.10) possiamo notare che il valore più alto di Purezza è stato raggiunto proprio nell'intervallo di redshift $[1.0; 1.4[$, dove il valore della Purezza rimane sempre $\geq 60\%$. Come già anticipato in precedenza, al fine di valutare la performance dell'algoritmo *cluster-finder* è necessario porre l'attenzione contemporaneamente sia sui valori ottenuti per la Completezza sia sui valori della Purezza. Dipendendo dal rapporto S/N , queste due quantità è bene studiarle contemporaneamente, non soffermandosi sull'ultimo punto della curva, il quale si riferisce alla *detection* con S/N più basso. Avendo ordinato le *detection* per S/N decrescente, avremo che la curva inizialmente sarà costruita utilizzando le *detection* con S/N maggiore e terminerà considerando le *detection* con S/N più basso. Non è importante, quindi, l'ultimo punto della curva, ma tutta la curva in generale in quanto contiene informazioni riguardanti tutte le *detection* considerate. In Figura (5.11) sono mostrati gli stessi grafici appena descritti, solo relativi al secondo taglio in massa per gli ammassi di galassie, ovvero il caso con $M > 10^{14}M_{\odot}$. Come per il caso descritto nella Figura (5.9), possiamo subito notare come i valori ottenuti per la Completezza, in tutti i vari intervalli di redshift, siano maggiori rispetto al caso descritto in Figura (5.10). Come già anticipato in precedenza, questo fatto non deve sorprenderci in quanto è una

naturale conseguenza del differente taglio in massa effettuato sugli ammassi di galassie considerati.

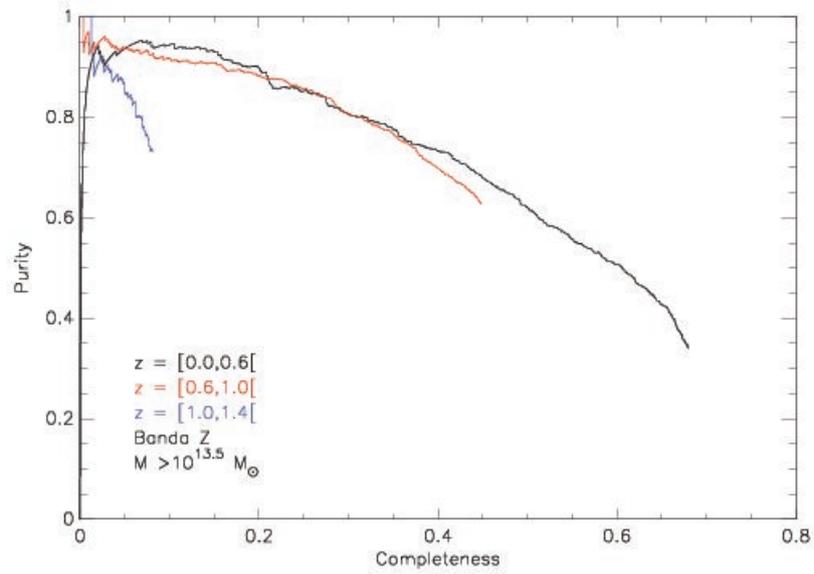


Figura 5.10: Grafici P-C riferiti alla banda osservativa Z per ammassi di galassie con $M > 10^{13.5} M_{\odot}$. I grafici mostrati si riferiscono a tutti gli intervalli di redshift che abbiamo considerato in questo lavoro.

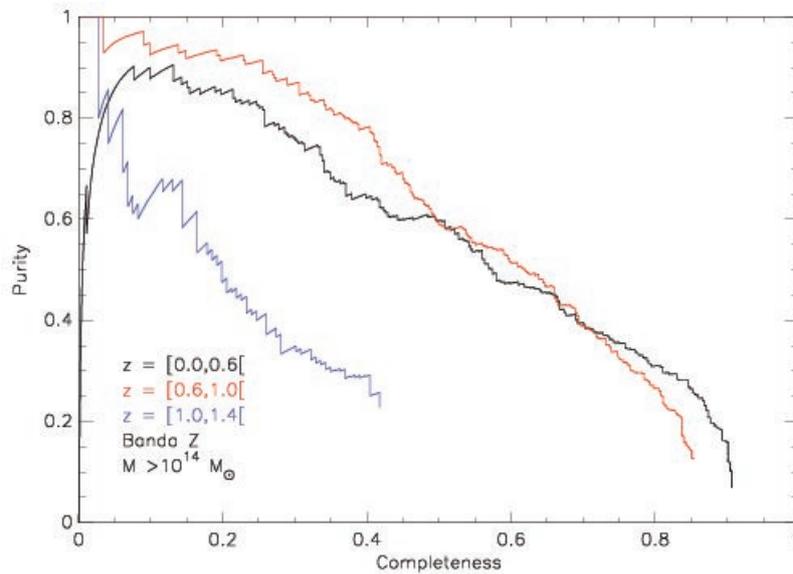


Figura 5.11: Grafici P-C riferiti alla banda osservativa Z per ammassi di galassie con $M > 10^{14} M_{\odot}$. I grafici mostrati si riferiscono a tutti gli intervalli di redshift che abbiamo considerato in questo lavoro.

5.2.2 Grafici Purezza-Completezza in banda Z, R-Z

Andiamo adesso a descrivere i grafici ottenuti considerando non solo la banda osservativa Z ma anche il colore R-Z, introducendo, quindi, gli stessi grafici descritti nelle Figure (5.9), (5.10) e (5.11). Come era normale aspettarsi, la quantità mostrata in Figura (5.12), ovvero il numero di ammassi considerati (N_{clus}), ha lo stesso valore di quella espressa nella Figura (5.9). Questo deriva semplicemente dal fatto che si è utilizzato lo stesso catalogo per la costruzione delle funzioni nei due casi trattati in questo lavoro.

Sia per quanto riguarda la sola banda osservativa Z (Figura 5.9) sia per quanto riguarda la banda osservativa Z ed il colore R-Z (Figura 5.12), possiamo notare come il valore della Purezza tenda a diminuire con l'aumentare della Completezza. Questo è dovuto al modo in cui è stata definita e costruita la quantità Purezza: dato che essa dipende esclusivamente dalla quantità N_{match} è normale aspettarsi che all'aumentare della Completezza si abbiano sempre meno ammassi di galassie *matched*, anche perché sia le *detections* sia gli ammassi di galassie sono stati ordinati rispettivamente per S/N decrescente e per masse decrescenti. A maggior ragione, quindi, è normale aspettarsi che il valore della Purezza tenda a diminuire.

Nel caso precedentemente descritto in Figura (5.9), sono stati ottenuti valori diversi, ma l'andamento globale dei risultati è lo stesso. Anche nella Figura (5.9) si era ottenuto il valore più alto della Completezza nel caso che considera solamente gli ammassi di galassie con $M > 10^{14}M_{\odot}$, mentre si erano ottenuti valori più alti della Purezza per $M > 10^{13.5}M_{\odot}$. In Figura (5.13) sono mostrati i grafici P-C ottenuti considerando non solo la banda osservativa Z ma anche il colore R-Z, per i vari intervalli di redshift considerati e per ammassi di galassie con $M > 10^{13.5}M_{\odot}$.

In Figura (5.14) sono mostrati i grafici P-C relativi ad ammassi di galassie con $M > 10^{14}M_{\odot}$, dove si è considerato sia la banda osservativa Z che il colore R-Z, per ogni intervallo di redshift. Possiamo notare immediatamente, come per la sola banda osservativa Z, che anche in questo caso si ottengono valori di Completezza più elevati rispetto al caso in cui sono stati considerati ammassi di galassie con $M > 10^{13.5}M_{\odot}$ (Figura 5.13). Come già detto in precedenza, questo risultato è una normale conseguenza del taglio in massa effettuato sugli ammassi di galassie.

L'analisi di questi grafici, descritti fino qui, ci permette già di ottenere qualche informazione sulla performance dell'algoritmo *cluster-finder*: possiamo infatti notare come nelle Figure (5.9) e (5.12), per $M > 10^{14}M_{\odot}$, si ottengano valori $\simeq 80\%$ per la Completezza a $S/N = 3$. Questo ci permette di dire che, considerando solo gli ammassi di galassie di grande massa, l'algoritmo riesce ad individuare $\simeq 80\%$ degli ammassi presenti nel catalogo, per $S/N = 3$. Allo stesso tempo però, possiamo anche affermare che i valori più alti di Purezza sono stati ottenuti nel caso relativo agli ammassi di galassie con $M > 10^{13.5}M_{\odot}$, sia nel caso della sola banda osservativa Z sia nel caso con

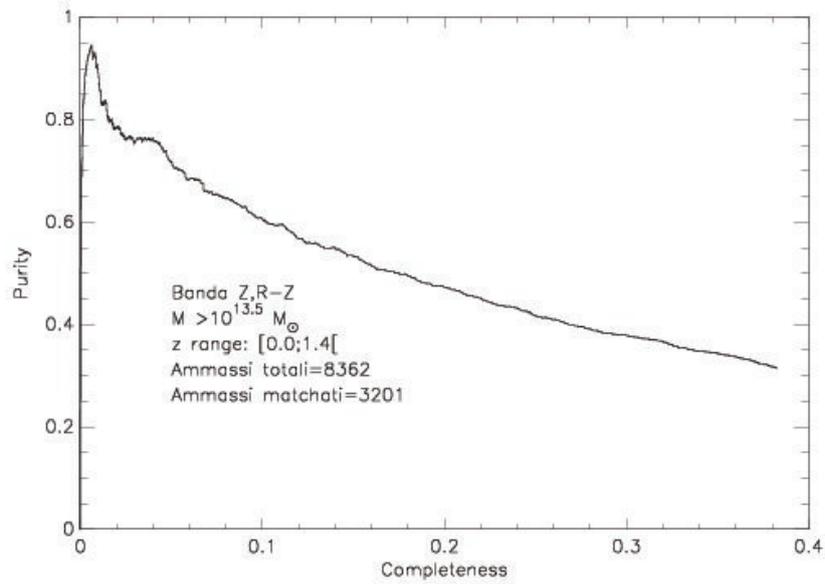
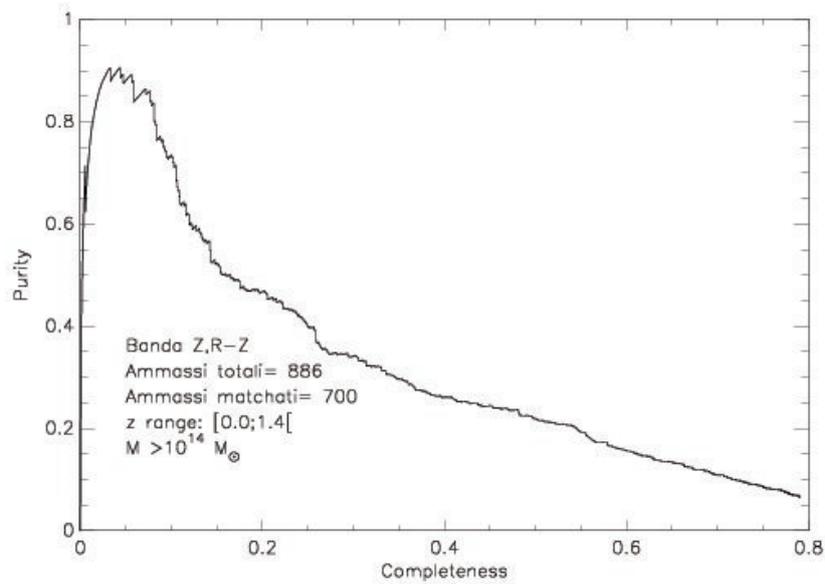
(a) $M > 10^{13.5} M_{\odot}$ (b) $M > 10^{14} M_{\odot}$

Figura 5.12: Grafici P-C riferiti alla banda osservativa Z ed al colore R-Z. I grafici mostrati fanno riferimento all'intero intervallo di redshift considerato in questo lavoro. Il grafico *a* considera solamente gli ammassi di galassie con $M > 10^{13.5} M_{\odot}$, mentre il caso *b* gli ammassi con $M > 10^{14} M_{\odot}$.

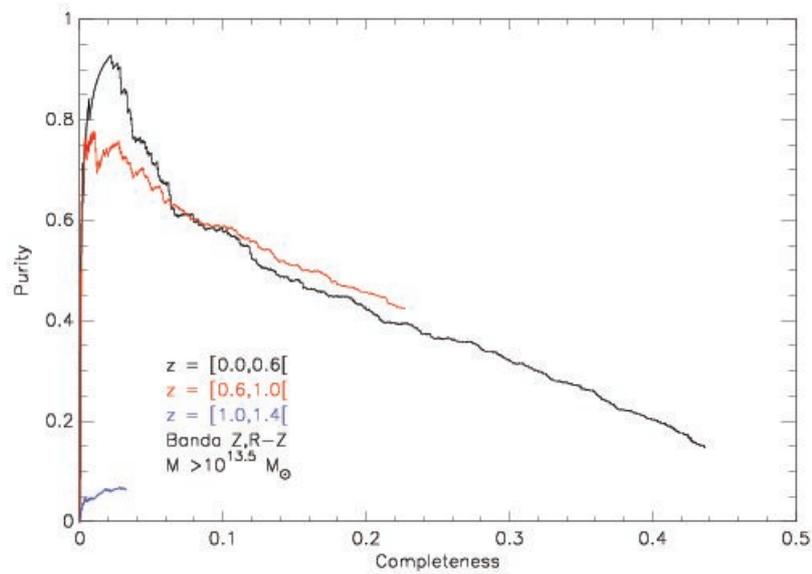


Figura 5.13: Grafici P-C riferiti alla banda osservativa Z ed al colore R-Z per ammassi di galassie con $M > 10^{13.5} M_{\odot}$. I grafici mostrati si riferiscono a tutti gli intervalli di redshift che abbiamo considerato in questo lavoro.

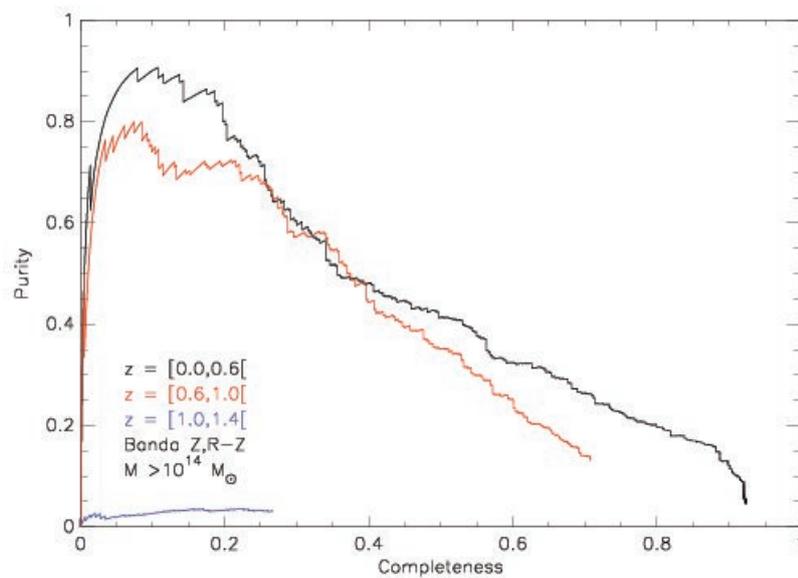


Figura 5.14: Grafici P-C riferiti alla banda osservativa Z ed al colore R-Z per ammassi di galassie con $M > 10^{14} M_{\odot}$. I grafici mostrati si riferiscono a tutti gli intervalli di redshift che abbiamo considerato in questo lavoro.

il colore R-Z.

Per valutare la performance dell'algoritmo *cluster-finder* e determinare quindi se l'al-

goritmo lavora meglio considerando solo la banda osservativa Z o anche il colore R-Z è necessario andare a creare dei grafici P-C che contengano contemporaneamente i risultati dei due casi considerati, in modo tale da apprezzare, per lo stesso intervallo di redshift e per lo stesso taglio in massa, i risultati ottenuti dall'algoritmo. In Figura (5.15) è mostrato il primo confronto tra le due performance dell'algoritmo *cluster-finder*, relative al caso con la sola banda osservativa Z e con l'aggiunta del colore. Possiamo subito notare come i risultati prodotti dall'algoritmo nei due casi considerati siano molto diversi. Considerare anche l'informazione del colore delle galassie non provoca un miglioramento della performance dell'algoritmo. Si ha infatti, in tutti gli intervalli di redshift, una diminuzione sia della Completezza che della Purezza. Mostriamo adesso i grafici P-C relativi al confronto tra le due performance dell'algoritmo nel caso in cui consideriamo solamente gli ammassi di galassie con $M > 10^{14}M_{\odot}$. Possiamo notare grazie alla Figura (5.16) come l'algoritmo fornisca risultati migliori utilizzando solamente la banda osservativa Z senza l'aggiunta dell'informazione sul colore delle galassie. La differenza tra le due performance, considerando solamente gli ammassi di galassie di grande massa, rimane molto marcata.

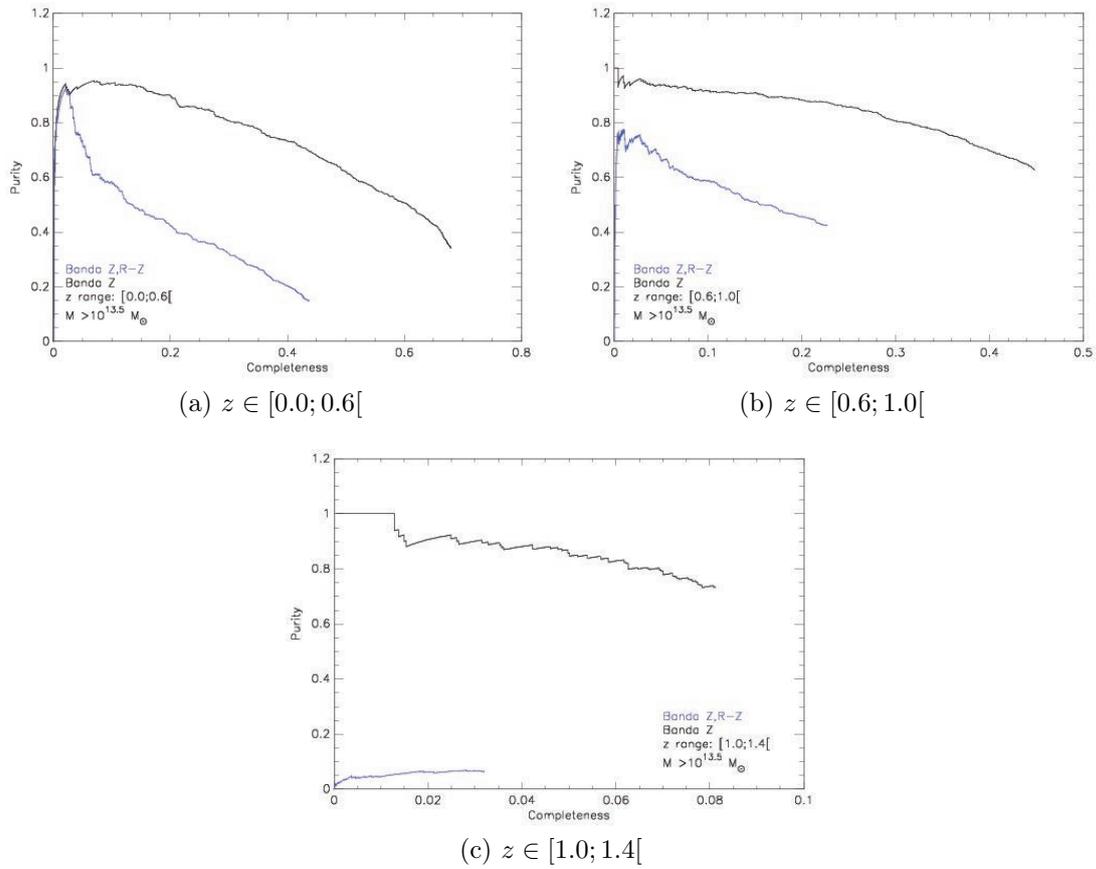


Figura 5.15: Grafici P-C relativi ad ammassi di galassie con $M > 10^{13.5} M_{\odot}$. I grafici mostrati si riferiscono a tutti gli intervalli di redshift che abbiamo considerato in questo lavoro e mostrano il confronto tra una sola banda osservativa (Z) e con l'aggiunta del colore (R-Z).

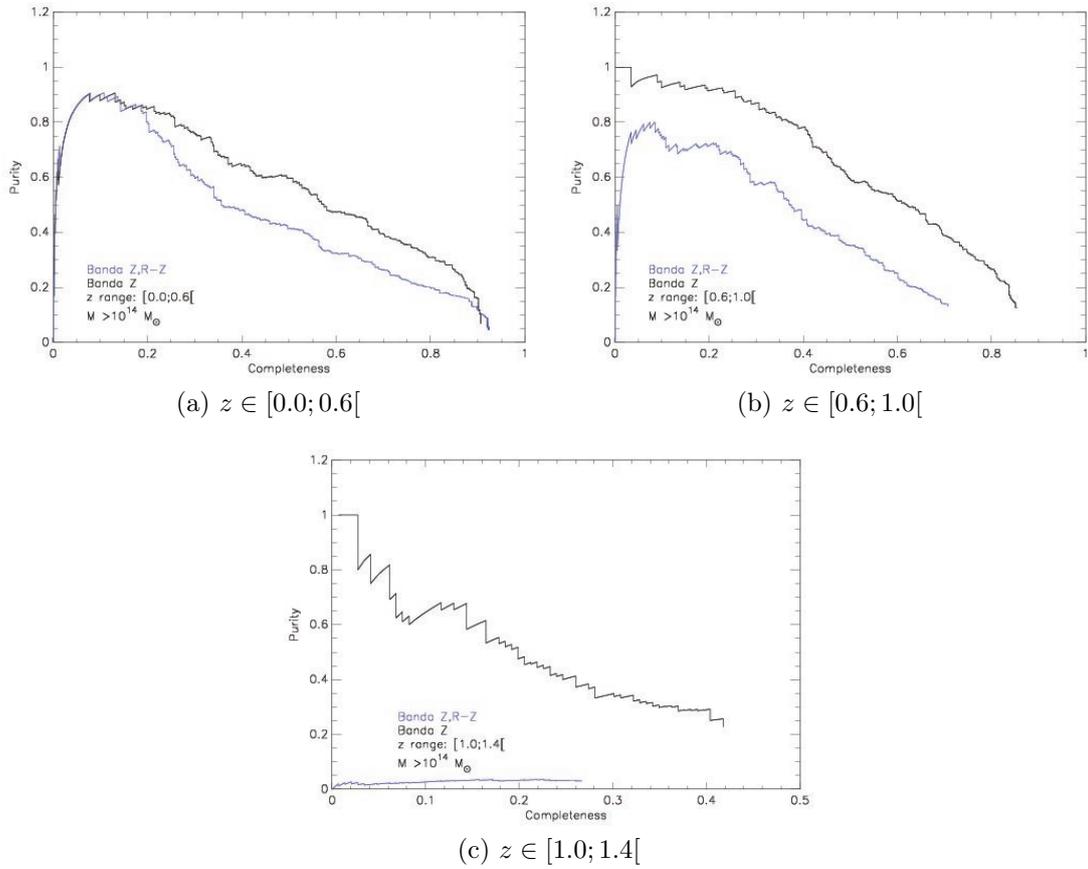


Figura 5.16: Grafici P-C relativi ad ammassi di galassie con $M > 10^{14} M_{\odot}$. I grafici mostrati si riferiscono a tutti gli intervalli di redshift che abbiamo considerato in questo lavoro e mostrano il confronto tra una sola banda osservativa (Z) e con l'aggiunta del colore (R-Z).

5.3 Problema di rumorosità nella funzione Filtro

I risultati mostrati nel paragrafo precedente sono a prima vista sorprendenti, perché in teoria l'aggiunta di una informazione (colore delle galassie) dovrebbe migliorare la performance dell'algoritmo, e non peggiorarla. Ci siamo quindi chiesti se ci fosse qualche problema nella costruzione del Filtro ed abbiamo deciso di investigare la presenza effettiva di questo problema. Siamo andati a valutare la presenza o meno di bin, all'interno del Filtro, contenenti poche galassie. Ci siamo preoccupati nello specifico dei bin che contenevano meno di 5 galassie e, successivamente, di quelle che contenevano meno di 10 galassie. Quando abbiamo costruito la funzione Filtro, abbiamo in pratica stimato la densità di galassie in un bin di magnitudine (e colore) e/o distanza dal centro negli ammassi di una certa massa. Per fare questa stima, abbiamo contato le galassie e diviso per la dimensione del bin. Questa stima, come tutte le misure, ha un errore, che in questo caso è poissoniano. Quindi se la misura è G , dove G è il numero di galassie nel bin, il suo errore è \sqrt{G} . Abbiamo pensato, quindi, di eliminare i bin più rumorosi ovvero quelli con poche galassie. Il rapporto S/N della misura delle galassie nel bin è dato da $G/\sqrt{G} = \sqrt{G}$. In questo lavoro è stato scelto di non considerare nella creazione del Filtro i bin che contenevano meno di 5 galassie e meno di 10 galassie. Questa scelta è dovuta al fatto che avere in un bin $G = 4$ significa avere un S/N nel bin pari a 2. Nell'altro caso, avere $G = 9$ significa avere un S/N nel bin pari a 3. Abbiamo quindi deciso di eliminare quei bin dove la densità di galassie era stata stimata con un rapporto S/N minore uguale a 2 e a 3.

La modifica appena descritta comporta, inevitabilmente, una diminuzione delle galassie utilizzate per la costruzione della funzione Filtro. Diventa quindi necessario andare a stimare il numero di galassie eliminate in modo tale da essere sicuri di poter ancora utilizzare la funzione Filtro come rappresentante degli ammassi di galassie.

Le percentuali di galassie eliminate, sia per i bin con meno di 5 galassie (caso < 5) sia per quelli con meno di 10 galassie (caso < 10), sono rappresentate nella Figura (5.17), dove vengono considerati distintamente il caso della sola banda osservativa Z ed il caso con il colore R-Z.

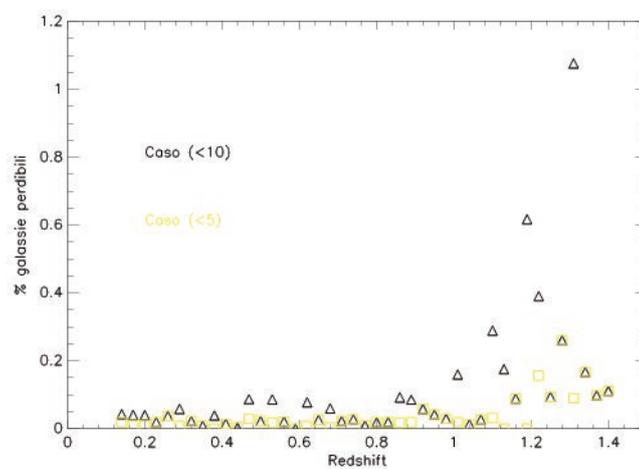
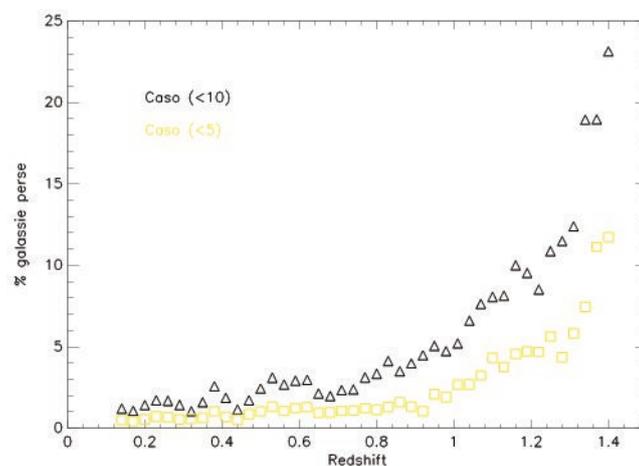
(a) *Banda Z*(b) *Banda Z e R-Z*

Figura 5.17: In figura sono mostrati i valori in percentuale delle galassie eliminate rispetto alle galassie considerate. Vengono mostrati i valori relativi alla sola banda osservativa Z ed al caso con il colore R-Z, sia per il caso ($\langle 5 \rangle$) sia per il caso ($\langle 10 \rangle$).

Come possiamo notare le percentuali di galassie eliminate, nel caso che considera anche l'informazione sul colore, sono $\lesssim 5\%$ per $z < 1$ ed aumentano fino al 22% per $z \simeq 1.4$. Molto diverso è il caso dove consideriamo solamente la banda osservativa Z: in questo caso le percentuali di galassie perse sono molto basse, $\lesssim 0.2\%$ per $z < 1$ fino ad un massimo di $\simeq 1\%$ per $z > 1$. Come già anticipato in precedenza, è normale aspettarsi che sia più probabile trovare dei bin poco popolati nella funzione Filtro contenente l'informazione sul colore, in quanto le galassie considerate non vengono suddivise solo in base alla loro magnitudine e posizione ma anche in base al loro colore. In base ai valori ottenuti e descritti nella Figura (5.17) possiamo quindi costruire le nuove funzioni Filtro, sia per una banda osservativa (Z) sia per il colore (R-Z), in quanto il numero di galassie che verranno eliminate è molto piccolo rispetto al totale delle galassie considerate. Una volta costruite le nuove funzioni, ripetendo tutta la procedura di costruzione dei profili radiali, di luminosità e di colore e la successiva fase di combinazione e rinormalizzazione, abbiamo utilizzato nuovamente l'algoritmo *cluster-finder*. Una volta ottenuto il nuovo catalogo di *detections*, è stata ripetuta la fase di *Matching*, considerando gli stessi intervalli di redshift ed i tagli in massa del caso precedente. Per concludere sono stati generati nuovamente i grafici P-C dove abbiamo messo a confronto la performance iniziale dell'algoritmo con il caso (<5), il quale è risultato essere quello dove si sono ottenuti risultati migliori, rispetto al caso precedentemente descritto.

Nella Figura (5.18) viene mostrato il primo confronto effettuato, ovvero quello relativo alla sola banda osservativa Z e per ammassi di galassie con $M > 10^{13.5} M_{\odot}$, tra la prima performance dell'algoritmo e quella del caso (<5). A causa delle basse percentuali di galassie eliminate nel caso di una sola banda osservativa (Figura 5.17 caso (a)) i risultati ottenuti dalla nuova performance non sono significativamente diversi dalla prima. Possiamo notare però come in tutti gli intervalli di redshift si sia ottenuto un sensibile miglioramento della performance: possiamo notare infatti come la nuova curva stia più in alto, rispetto alla precedente, per ogni S/N . Inoltre, nel caso (a) e nel caso (b), si è ottenuto anche un leggero aumento del valore della Purezza. Questo implica che l'algoritmo è riuscito ad individuare più ammassi di galassie nella seconda performance rispetto alla prima. Andiamo adesso a mostrare i risultati ottenuti nel caso in cui abbiamo considerato solo gli ammassi di galassie con $M > 10^{14} M_{\odot}$, descritti nella Figura (5.19). Anche in questo caso si ha un miglioramento, in tutti gli intervalli di redshift, per quanto riguarda il valore massimo raggiunto per la Completezza. In base a questi risultati ed a quelli descritti nella Figura (5.18) possiamo subito constatare come eliminare quei bin dove la densità di galassie è stata stimata con un rapporto S/N minore uguale a 2 porti subito dei miglioramenti. La funzione Filtro, risultando meno rumorosa, permette all'algoritmo *cluster-finder* di ottenere dei risultati migliori considerando anche la sola banda osservativa Z.

Andiamo adesso a mostrare il confronto tra la prima performance dell'algoritmo e

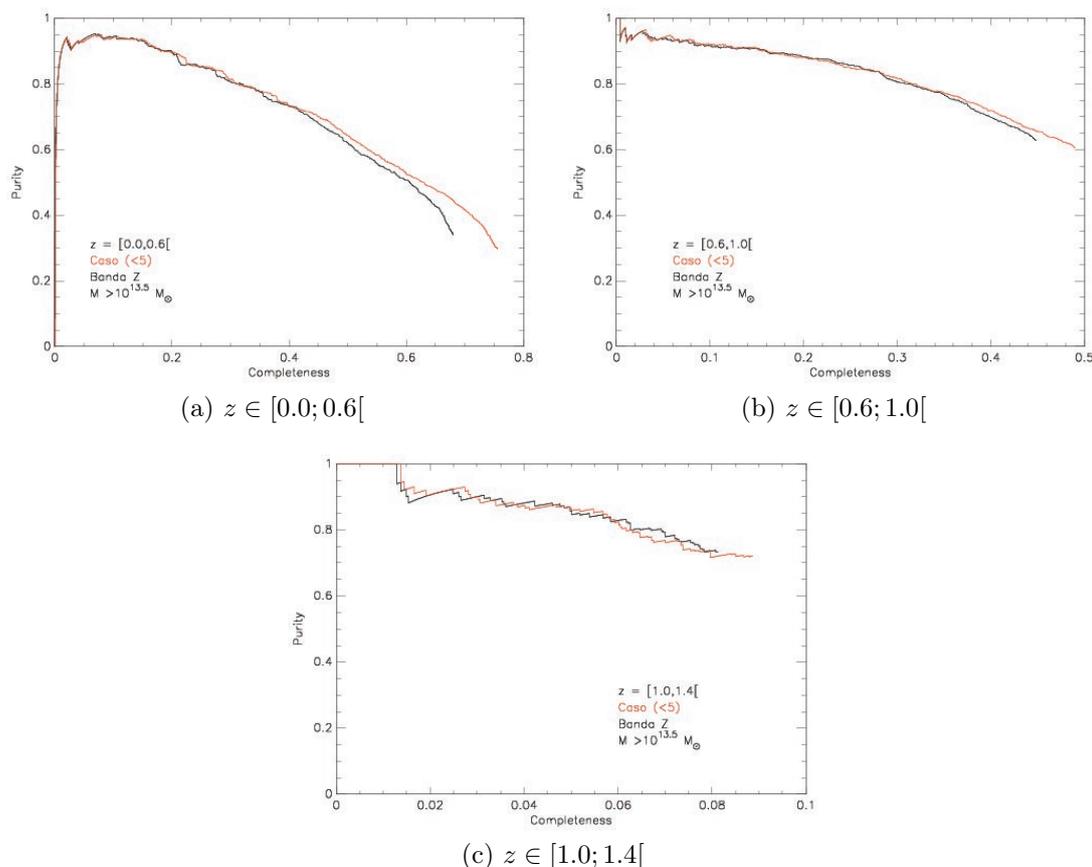


Figura 5.18: Grafici P-C relativi ad ammassi di galassie con $M > 10^{13.5} M_{\odot}$. I grafici mostrati si riferiscono a tutti gli intervalli di redshift che abbiamo considerato in questo lavoro e mostrano il confronto tra la performance dell’algoritmo relativa ad una sola banda osservativa (Z) con quella relativa al caso (<5).

quella relativa al caso (<5), questa volta considerando il caso con l’informazione sul colore (R-Z).

Grazie alla Figura (5.20) possiamo apprezzare il netto miglioramento dei risultati ottenuti nel caso della banda osservativa Z e del colore R-Z. Oltre ad avere un aumento del valore massimo raggiunto per la Completezza, si è ottenuto anche un notevole miglioramento per quanto riguarda la Purezza. Come già anticipato in precedenza, considerare il colore delle galassie rendeva la funzione Filtro molto più rumorosa rispetto al caso con la sola banda osservativa Z. Porre uguale a 0 quei bin con un rapporto $S/N \leq 2$ permette di definire meglio la funzione Filtro, rendendola più rappresentativa degli ammassi di galassie. Il fatto di migliorare la performance eliminando delle galassie è a prima vista paradossale perché significa trascurare un’informazione. In pratica, però, questa informazione che eliminiamo è talmente rumorosa che, in questo caso, è

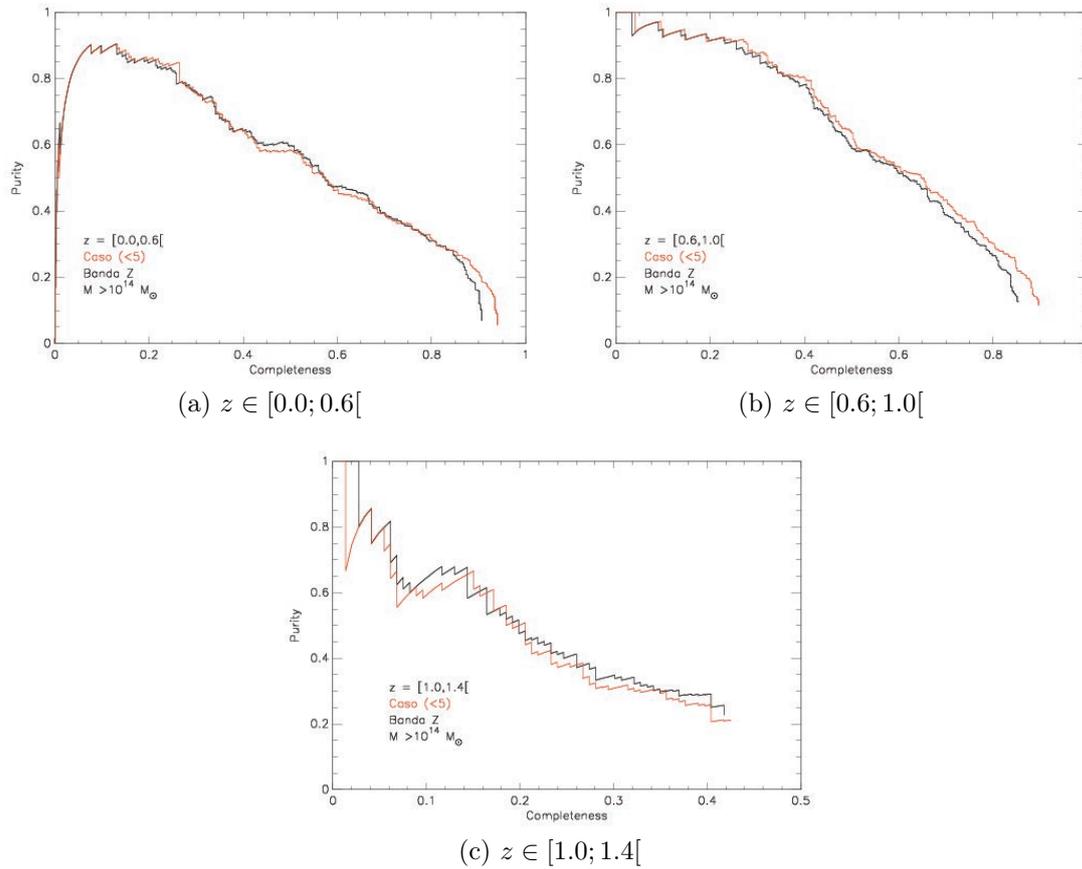


Figura 5.19: Grafici P-C relativi ad ammassi di galassie con $M > 10^{14}M_{\odot}$. I grafici mostrati si riferiscono a tutti gli intervalli di redshift che abbiamo considerato in questo lavoro e mostrano il confronto tra la performance dell'algorithmo relativa ad una sola banda osservativa (Z) con quella relativa al caso (<5).

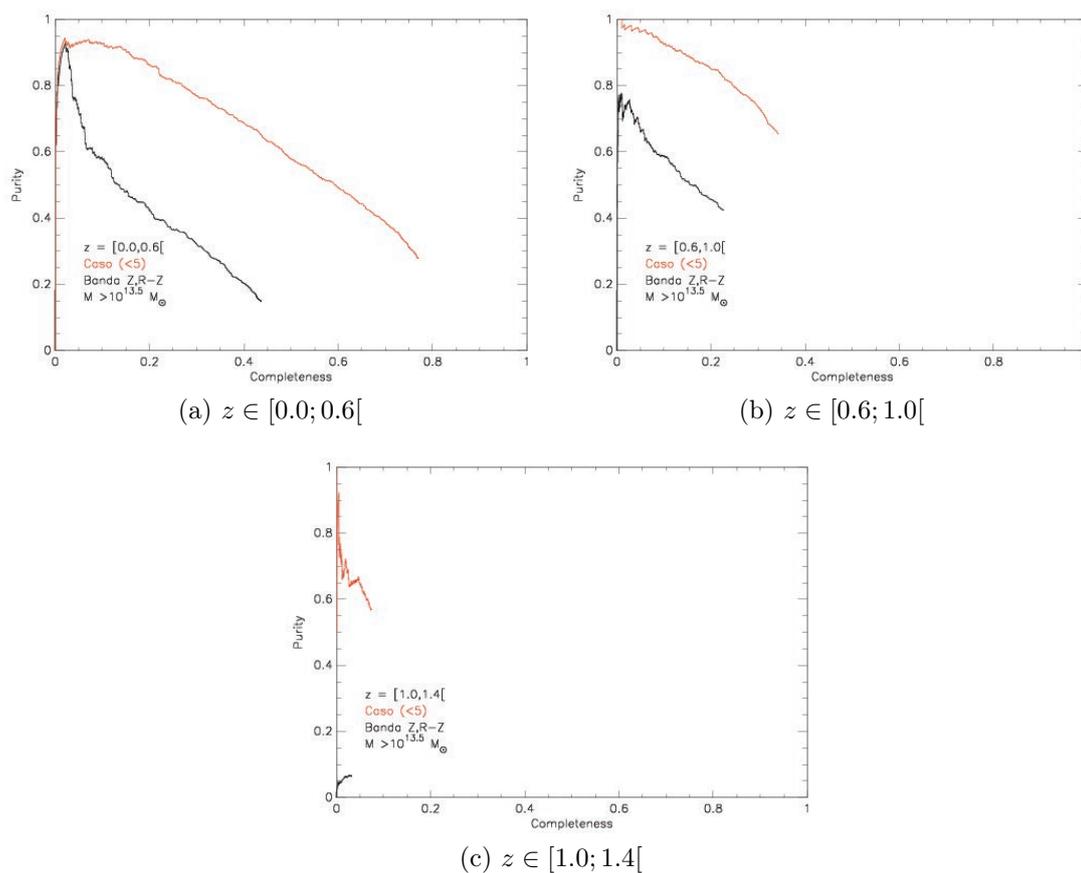


Figura 5.20: Grafici P-C relativi ad ammassi di galassie con $M > 10^{13.5} M_{\odot}$. I grafici mostrati si riferiscono a tutti gli intervalli di redshift che abbiamo considerato in questo lavoro e mostrano il confronto tra la performance dell'algorithm relativa alla banda osservativa (Z) ed il colore (R-Z) con quella relativa al caso (<5).

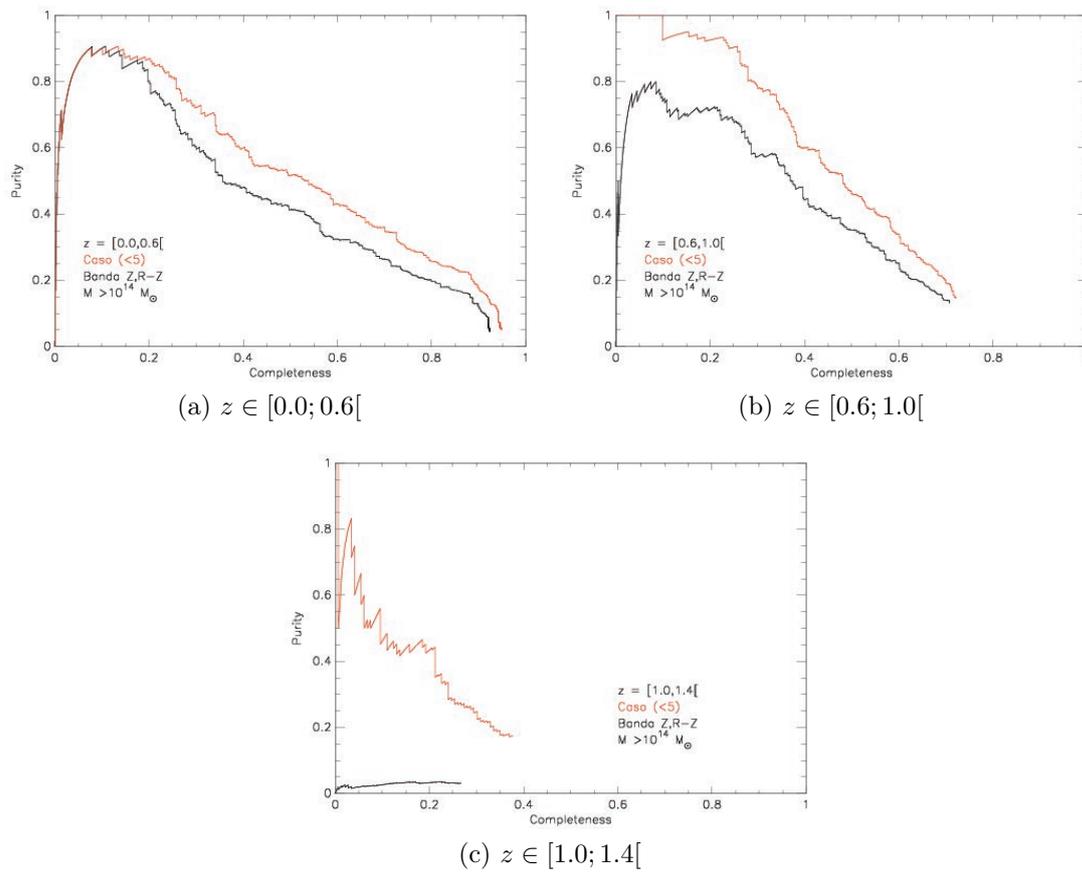


Figura 5.21: Grafici P-C relativi ad ammassi di galassie con $M > 10^{14} M_{\odot}$. I grafici mostrati si riferiscono a tutti gli intervalli di redshift che abbiamo considerato in questo lavoro e mostrano il confronto tra la performance dell'algorithm relativa alla banda osservativa (Z) ed il colore (R-Z) con quella relativa al caso (<5).

meglio non averla. Tutto questo si ripercuote, ovviamente, sulla performance dell'algoritmo generando dei valori di Purezza e Completezza nettamente migliori rispetto alla prima performance. Anche nel caso relativo agli ammassi di galassie con $M > 10^{14}M_{\odot}$ i risultati ottenuti sono nettamente migliori rispetto alla prima performance. Come possiamo vedere nella Figura (5.21), anche in questo caso si ha un netto miglioramento in tutti gli intervalli di redshift considerati. Oltre ad aver ottenuto valori migliori per quanto riguarda la Completezza, il miglioramento maggiore si è avuto per la Purezza. Possiamo infatti notare come il caso (<5) (linea rossa) sia molto al di sopra della prima performance (linea nera), soprattutto nell'intervallo di redshift [1.0; 1.4].

In questo lavoro abbiamo deciso di mostrare solamente i risultati ottenuti per il caso (<5) in quanto è il caso che ha portato il miglioramento maggiore. Possiamo quindi concludere, dopo i confronti effettuati in questo paragrafo, che il non considerare le regioni della funzione Filtro rappresentate da meno di 5 galassie, cioè quei bin con un rapporto $S/N \leq 2$, ha portato sicuramente un globale miglioramento rispetto alla prima performance effettuata. Si sono infatti ottenuti valori più elevati sia di Completezza sia di Purezza, in particolar modo per i risultati relativi al caso che considera anche il colore delle galassie. Di particolare significato è il miglioramento, seppur piccolo, ottenuto anche nel caso in cui abbiamo considerato solamente una banda osservativa. La Figura (5.22) mostra il confronto effettuato tra i risultati della prima performance dell'algoritmo ed i risultati ottenuti nel caso (<5), sia per quanto riguarda la sola banda osservativa Z sia per il colore R-Z, relativi ad ammassi di galassie con $M > 10^{13.5}M_{\odot}$. Come già descritto in precedenza, i risultati del caso (<5) relativo al colore R-Z sono nettamente migliori rispetto ai risultati della prima performance. Come possiamo vedere in Figura (5.22), considerando solamente i risultati ottenuti nel caso (<5), le prestazioni dell'algoritmo sono comunque migliori se consideriamo solamente la banda osservativa Z piuttosto che utilizzare anche l'informazione sul colore. Solamente nel caso (a) della Figura (5.22) si è ottenuto una Completezza maggiore nel caso delle due bande osservative (Z e R-Z), anche se il valore maggiore di Purezza rimane quello relativo al caso di una sola banda osservativa (Z). Per ammassi di galassie con $M > 10^{13.5}M_{\odot}$ possiamo concludere che l'algoritmo *cluster-finder* utilizzato ottiene dei risultati migliori se viene considerata solo la magnitudine delle galassie, senza utilizzare l'informazione del colore delle galassie.

Nella Figura (5.23) vengono mostrati gli stessi confronti effettuati e descritti precedentemente, solo relativi ad ammassi di galassie con $M > 10^{14}M_{\odot}$. Anche in questo caso, come nel caso precedente, possiamo notare come i risultati ottenuti ponendo uguale a 0 i bin della funzione Filtro con un rapporto $S/N \leq 2$ siano migliori, sia per una sola banda osservativa (Z) sia per due (Z e R-Z), rispetto ai risultati della prima performance. Anche in questo caso però i risultati migliori l'algoritmo li ha ottenuti quando ha utilizzato le funzioni Filtro e Noise relative ad una sola banda osservativa.

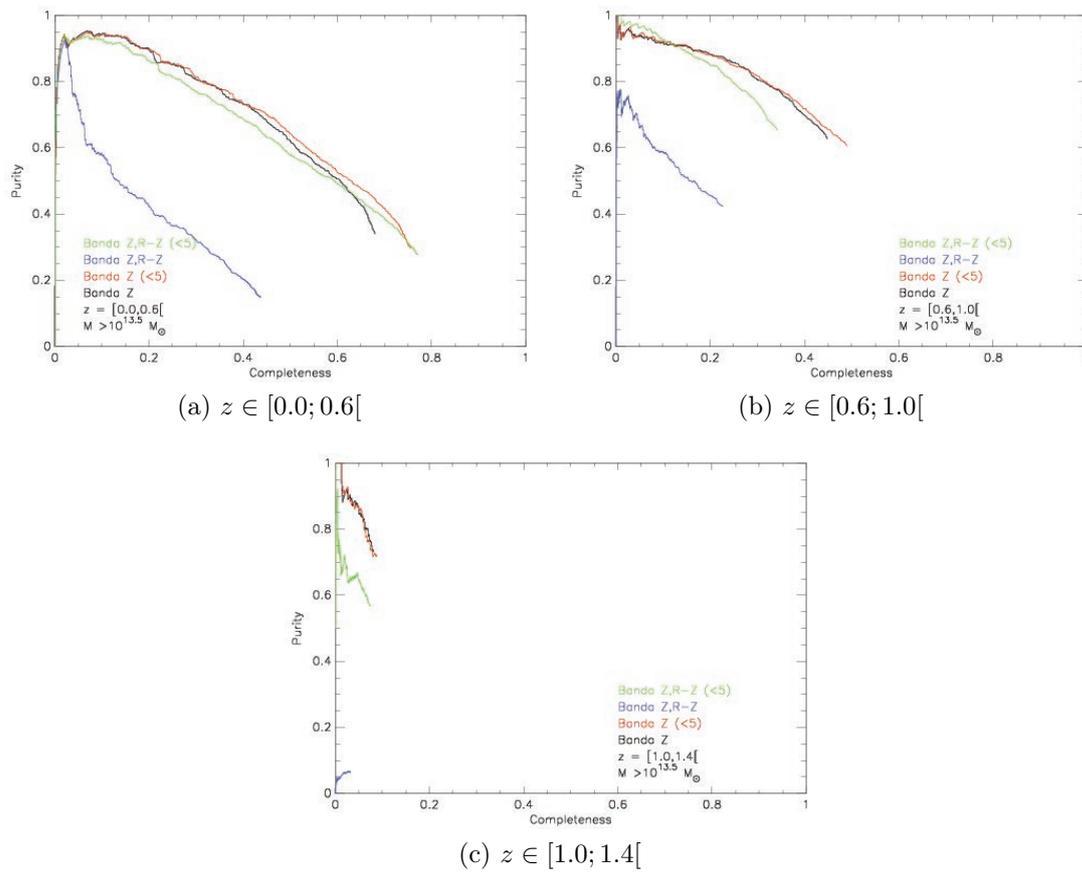


Figura 5.22: Grafici P-C relativi ad ammassi di galassie con $M > 10^{13.5} M_{\odot}$. I grafici mostrati si riferiscono a tutti gli intervalli di redshift che abbiamo considerato in questo lavoro e mostrano il confronto tra la performance dell'algorithm relativa alla banda osservativa (Z) ed al colore (R-Z) e quella relativa al caso (<5) sempre per la banda Z ed il colore R-Z.

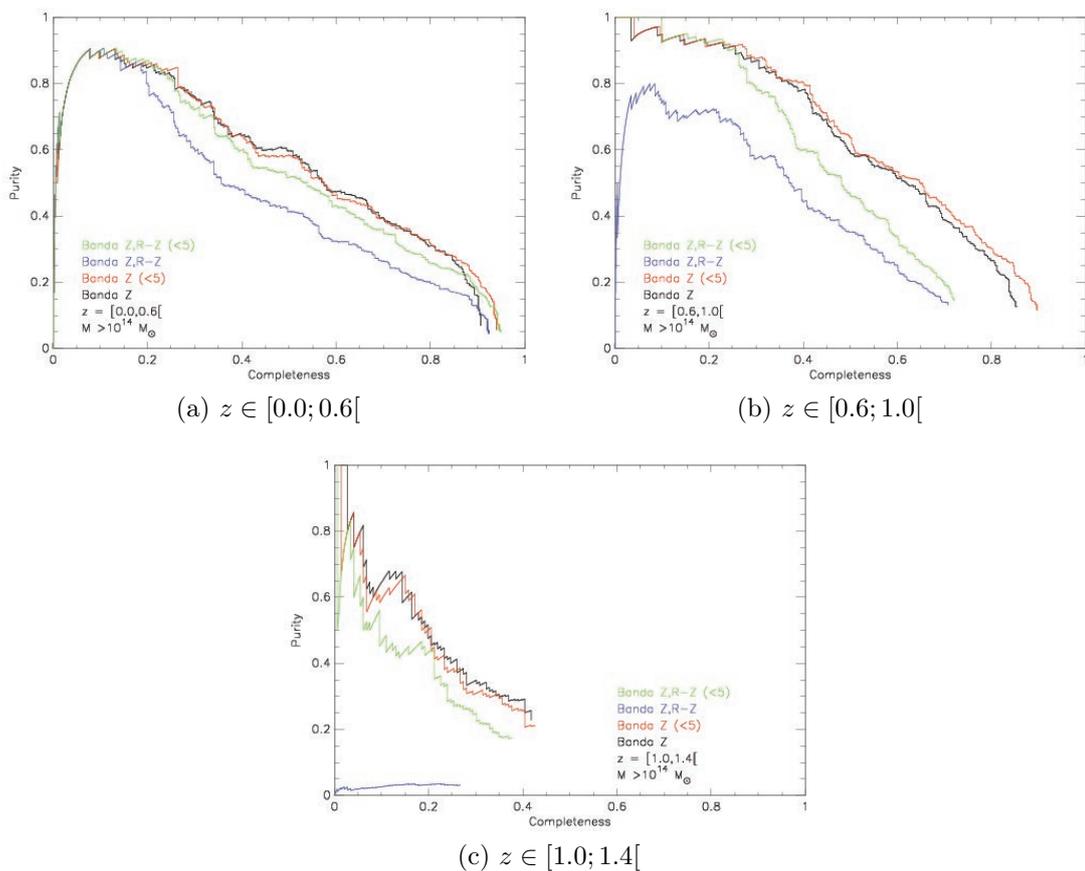


Figura 5.23: Grafici P-C relativi ad ammassi di galassie con $M > 10^{14} M_{\odot}$. I grafici mostrati si riferiscono a tutti gli intervalli di redshift che abbiamo considerato in questo lavoro e mostrano il confronto tra la performance dell'algorithm relativa alla banda osservativa (Z) ed al colore (R-Z) e quella relativa al caso (<5) sempre per la banda Z ed il colore R-Z.

5.4 Conclusioni

Lo scopo di questo lavoro è stato quello di valutare le prestazioni dell'algoritmo *cluster-finder* utilizzato, cercando di capire se l'algoritmo ottiene dei risultati migliori definendo le funzioni Filtro e Noise che dipendano solamente dalla magnitudine delle galassie (e dalla loro distanza dal centro dell'ammasso) o utilizzando funzioni che dipendano anche dal colore delle galassie. Partendo dal catalogo di galassie simulato abbiamo costruito le funzioni Noise e Filtro, la prima utilizzata per descrivere il background dello spazio di cielo considerato, la seconda per descrivere gli ammassi di galassie presenti. Costruite le due funzioni, abbiamo utilizzato l'algoritmo *cluster-finder* per ottenere dei cataloghi di *detections*, i quali sono stati confrontati con il catalogo di ammassi di galassie presenti nella porzione di cielo considerata e nell'intervallo di redshift considerato ($z \in [0.14; 1.4]$). Effettuato il confronto tra i due cataloghi, nella fattispecie la fase di *Matching* delle *detections* con gli ammassi, siamo andati a costruire le quantità necessarie per generare i grafici P-C, ovvero la Completezza e la Purezza. I grafici ottenuti dalla prima performance dell'algoritmo hanno mostrato che i risultati migliori sono stati ottenuti utilizzando le funzioni Noise e Filtro relative alla sola banda osservativa Z. La notevole differenza tra i risultati relativi ad una sola banda osservativa e quelli relativi alle due bande osservative, cioè considerando anche il colore delle galassie, ci ha portato ad investigare su possibili problemi di carattere statistico nella creazione della funzione Filtro. Per creare tale funzione, infatti, abbiamo dovuto suddividere le galassie appartenenti ad un ammasso di galassie in base alla loro magnitudine, distanza dalla galassia centrale e colore. La dipendenza della funzione Filtro da queste tre quantità è la causa della presenza di alcuni bin poco popolati, ovvero contenenti meno di 5-10 galassie. La stima della densità di galassie in questi bin è stata effettuata, durante la creazione della funzione Filtro, con un rapporto $S/N \leq 2 - 3$ che ha portato ad ottenere una funzione Filtro finale molto rumorosa soprattutto in quei bin poco popolati. Durante la creazione delle nuove funzioni Filtro si è scelto di non considerare proprio quei bin poco popolati, partendo inizialmente da quelli con $S/N \leq 2$ e successivamente quelli con $S/N \leq 3$. Utilizzando queste nuove funzioni Filtro l'algoritmo ha generato dei nuovi cataloghi di *detections*, dai quali si sono ottenuti risultati migliori per ogni intervallo di redshift considerato in questo lavoro e per ogni taglio in massa effettuato sugli ammassi di galassie. I nuovi risultati che abbiamo ottenuto sono migliori rispetto ai precedenti sia per il caso di una sola banda osservativa sia per quello che considera anche il colore. Il miglioramento maggiore si è ottenuto proprio in quest'ultimo caso, quello relativo al considerare l'informazione del colore delle galassie. Di particolare rilevanza però è stato l'ottenere dei miglioramenti nella performance dell'algoritmo anche quando abbiamo utilizzato la funzione Filtro che dipendeva sola dalla magnitudine delle galassie, il che indica che il problema della significatività statistica nella definizione del Filtro può influire sulla performance anche in questo caso. Aggiungere una dipendenza in più alla funzione Filtro ha reso sicuramente più probabile la presenza di bin poco

popolati e quindi molto rumorosi. Successivamente siamo andati a confrontare nuovamente i risultati ottenuti dal caso che considera solamente una banda osservativa e da quello che considera anche il colore. La notevole differenza trovata in precedenza non è stata ottenuta, comunque sia i valori migliori di Completezza e di Purezza sono stati ottenuti sempre dalla performance dell'algoritmo relativa alle funzioni che utilizzano una sola banda osservativa. In conclusione, quindi, possiamo affermare che utilizzare contemporaneamente la magnitudine ed il colore delle galassie all'interno dell'algoritmo *cluster-finder* non porta necessariamente ad un miglioramento rispetto al considerare solo una magnitudine a causa della maggiore difficoltà nel definire la funzione Filtro. Una modifica possibile è quella di andare a definire meglio le funzioni che abbiamo utilizzato in questo lavoro, ovvero le funzioni Noise e Filtro. In questo lavoro si è scelto di utilizzare una suddivisione regolare ed uniforme delle funzioni, sia per le magnitudini sia per il colore e la distanza dalla galassia centrale. Come già discusso nel paragrafo 4.2, la scelta di una suddivisione regolare degli intervalli ci permette di avere una buona risoluzione sia per redshift piccoli che per alti redshift. Soprattutto per redshift alti il binnaggio che abbiamo utilizzato in questo lavoro ci porta ad ottenere delle funzioni con molti bin vuoti o poco popolati. Una possibile modifica potrebbe quindi essere quella di creare delle funzioni Noise e Filtro con una griglia di bin diversa a seconda del redshift che stiamo considerando, in modo tale da ottenere la risoluzione massima per ogni intervallo di redshift. Da un punto di vista computazionale questa scelta comporta un notevole aumento del tempo di calcolo ma renderebbe le funzioni ancora più accurate e rappresentative. Un'altra possibilità è quella di utilizzare formule analitiche per costruire le funzioni Noise e Filtro, come ad esempio il profilo *NFW* e la funzione di Schechter, ed utilizzare il catalogo per stimare i parametri dei due profili. In questo modo si avrebbero funzioni più regolari, ma significherebbe fare delle assunzioni forti sul loro andamento.

Bibliografía

- B. Ascaso, D. Wittman, and N. Benítez. Bayesian cluster finder: clusters in the CFHTLS Archive Research Survey. *Monthly Notices of the RAS*, 420:1167–1182, February 2012. doi: 10.1111/j.1365-2966.2011.20107.x.
- J. Barnes and P. Hut. A hierarchical $O(N \log N)$ force-calculation algorithm. *Nature*, 324:446–449, December 1986. doi: 10.1038/324446a0.
- F. Bellagamba, M. Maturi, T. Hamana, M. Meneghetti, S. Miyazaki, and L. Moscardini. Optimal filtering of optical and weak lensing data to search for galaxy clusters: application to the COSMOS field. *Monthly Notices of the RAS*, 413:1145–1157, May 2011. doi: 10.1111/j.1365-2966.2011.18202.x.
- J. Carretero, F. J. Castander, E. Gaztañaga, M. Crocce, and P. Fosalba. An algorithm to build mock galaxy catalogues using MICE simulations. *Monthly Notices of the RAS*, 447:646–670, February 2015. doi: 10.1093/mnras/stu2402.
- M. Crocce, F. J. Castander, E. Gaztañaga, P. Fosalba, and J. Carretero. The MICE Grand Challenge lightcone simulation - II. Halo and galaxy catalogues. *Monthly Notices of the RAS*, 453:1513–1530, October 2015. doi: 10.1093/mnras/stv1708.
- M. Davis and P. J. E. Peebles. A survey of galaxy redshifts. V - The two-point position and velocity correlations. *Astrophysical Journal*, 267:465–482, April 1983. doi: 10.1086/160884.
- G. Efstathiou, S. M. Fall, and C. Hogan. Self-similar gravitational clustering. *Monthly Notices of the RAS*, 189:203–220, October 1979. doi: 10.1093/mnras/189.2.203.
- P. Fosalba, M. Crocce, E. Gaztañaga, and F. J. Castander. The MICE grand challenge lightcone simulation - I. Dark matter clustering. *Monthly Notices of the RAS*, 448:2987–3000, April 2015a. doi: 10.1093/mnras/stv138.
- P. Fosalba, E. Gaztañaga, F. J. Castander, and M. Crocce. The MICE Grand Challenge light-cone simulation - III. Galaxy lensing mocks from all-sky lensing maps. *Monthly Notices of the RAS*, 447:1319–1332, February 2015b. doi: 10.1093/mnras/stu2464.

- S. Giodini, L. Lovisari, E. Pointecouteau, S. Ettori, T. H. Reiprich, and H. Hoekstra. Scaling Relations for Galaxy Clusters: Properties and Evolution. *Space Science Reviews*, 177:247–282, August 2013. doi: 10.1007/s11214-013-9994-5.
- S. M. Hansen, T. A. McKay, R. H. Wechsler, J. Annis, E. S. Sheldon, and A. Kimball. Measurement of Galaxy Cluster Sizes, Radial Profiles, and Luminosity Functions from SDSS Photometric Data. *Astrophysical Journal*, 633:122–137, November 2005. doi: 10.1086/444554.
- B. P. Koester, T. A. McKay, J. Annis, R. H. Wechsler, A. E. Evrard, E. Rozo, L. Bleem, E. S. Sheldon, and D. Johnston. MaxBCG: A Red-Sequence Galaxy Cluster Finder. *Astrophysical Journal*, 660:221–238, May 2007. doi: 10.1086/512092.
- I. H. Li and H. K. C. Yee. Finding Galaxy Groups in Photometric-Redshift Space: The Probability Friends-of-Friends Algorithm. *Astronomical Journal*, 135:809–822, March 2008. doi: 10.1088/0004-6256/135/3/809.
- R. Licitra, S. Mei, A. Raichoor, T. Erben, and H. Hildebrandt. The RedGOLD cluster detection algorithm and its cluster candidate catalogue for the CFHT-LS W1. *Monthly Notices of the RAS*, 455:3020–3041, January 2016. doi: 10.1093/mnras/stv2309.
- L. M. Lubin and M. Postman. The Palomar Distant Cluster Survey. II. The Cluster Profiles. *Astronomical Journal*, 111:1795, May 1996. doi: 10.1086/117917.
- A. I. Merson, C. M. Baugh, J. C. Helly, V. Gonzalez-Perez, S. Cole, R. Bielby, P. Norberg, C. S. Frenk, A. J. Benson, R. G. Bower, C. G. Lacey, and C. d. P. Lagos. Lightcone mock catalogues from semi-analytic models of galaxy formation - I. Construction and application to the BzK colour selection. *Monthly Notices of the RAS*, 429:556–578, February 2013. doi: 10.1093/mnras/sts355.
- P. Monaco. *The Cosmological Mass Function*. PhD thesis, PhD Thesis, 1997, 1997.
- S. More, A. V. Kravtsov, N. Dalal, and S. Gottlöber. The Overdensity and Masses of the Friends-of-friends Halos and Universality of Halo Mass Function. *Astrophysical Journal, Supplement*, 195:4, July 2011. doi: 10.1088/0067-0049/195/1/4.
- J. F. Navarro, C. S. Frenk, and S. D. M. White. A Universal Density Profile from Hierarchical Clustering. *Astrophysical Journal*, 490:493–508, December 1997.
- E. Panko and P. Flin. Application of the Voronoi tessellation technique for galaxy cluster search in the Münster Red Sky Survey. In A. Diaferio, editor, *IAU Colloq. 195: Outskirts of Galaxy Clusters: Intense Life in the Suburbs*, pages 245–247, July 2004. doi: 10.1017/S1743921304000535.

- M. Postman, L. M. Lubin, J. E. Gunn, J. B. Oke, J. G. Hoessel, D. P. Schneider, and J. A. Christensen. The Palomar Distant Clusters Survey. I. The Cluster Catalog. *Astronomical Journal*, 111:615, February 1996. doi: 10.1086/117811.
- M. Ramella, W. Boschin, D. Fadda, and M. Nonino. Finding galaxy clusters using Voronoi tessellations. *Astronomy and Astrophysics*, 368:776–786, March 2001. doi: 10.1051/0004-6361:20010071.
- E. S. Rykoff, E. Rozo, M. T. Busha, C. E. Cunha, A. Finoguenov, A. Evrard, J. Hao, B. P. Koester, A. Leauthaud, B. Nord, M. Pierre, R. Reddick, T. Sadibekova, E. S. Sheldon, and R. H. Wechsler. redMaPPer. I. Algorithm and SDSS DR8 Catalog. *Astrophysical Journal*, 785:104, April 2014. doi: 10.1088/0004-637X/785/2/104.
- P. Schechter. An analytic expression for the luminosity function for galaxies. *Astrophysical Journal*, 203:297–306, January 1976. doi: 10.1086/154079.
- R. K. Sheth and G. Tormen. Large-scale bias and the peak background split. *Monthly Notices of the RAS*, 308:119–126, September 1999. doi: 10.1046/j.1365-8711.1999.02692.x.
- Y.-J. Xue and X.-P. Wu. The L_X -T, L_X - σ , and σ -T Relations for Groups and Clusters of Galaxies. *Astrophysical Journal*, 538:65–71, July 2000. doi: 10.1086/309116.
- F. Zwicky. Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln. *Helvetica Physica Acta*, 6:110–127, 1933.