Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

IL RUOLO DELLA MATEMATICA NELLA MECCANICA QUANTISTICA IN UN APPROCCIO INTERDISCIPLINARE PER LA SCUOLA SECONDARIA

Tesi di Laurea Magistrale in Didattica della Matematica

Relatore:
Dott.ssa
ALESSIA CATTABRIGA

Presentata da:
GABRIELE TRONCONI

Correlatori:
Prof.ssa
OLIVIA LEVRINI
Dott.ssa
LAURA BRANCHETTI

Prima Sessione
Anno Accademico 2015/2016

Alla mia famiglia.

Indice

Introduzione

Questo lavoro di tesi nasce all'interno del nucleo di ricerca in didattica della fisica dell'Università di Bologna, coordinato dalla professoressa Olivia Levrini e che coinvolge docenti di matematica e fisica dei Licei, assegnisti di ricerca e laureandi. Negli ultimi anni il lavoro del gruppo si è concentrato sullo studio di una possibile risposta all'evidente e pressante difficoltà di certi docenti nell'affrontare gli argomenti di meccanica quantistica che sono stati introdotti nelle indicazioni Nazionali per il Liceo Scientifico, dovuta a cause di vario genere, fra cui l'intrinseca complessità degli argomenti e l'inefficacia di molti libri di testo nel presentarli in modo adeguato. Nel corso degli anni sono stati elaborati e sperimentati materiali didattici all'interno di classi di Liceo e corsi di formazione per docenti. I materiali saranno la base anche per il laboratorio per insegnanti che sarà attivato l'anno prossimo nell'ambito del Piano Lauree Scientifiche. In questo contesto, la presente tesi si pone l'obiettivo di affrontare due problemi specifici di formalizzazione matematica in relazione a due temi previsti dalle Indicazioni Nazionali: il tema della radiazione di corpo nero, che ha portato Max Planck alla prima ipotesi di quantizzazione, e l'indeterminazione di Heisenberg, con il cambiamento di paradigma che ha costituito per l'interpretazione del mondo fisico. Come osserva Drago in "*Storiografia del corpo nero*"[8], è proprio tramite la matematica che si è avuto quel cambiamento radicale di prospettiva che oggi conosciamo come fisica quantistica. Attraverso un confronto diretto con le fonti, si cercherà quindi di proporre un percorso in cui il ruolo del protagonista sarà giocato dagli aspetti matematici delle teorie analizzate e dal modo in cui gli strumenti della matematica hanno contribuito alla loro formazione, mantenendo un costante

legame con le componenti didattiche. Proprio in quest'ottica, ci si accorgerà della forte connessione fra i lavori di Planck e Heisenberg e due aspetti fondamentali della didattica della matematica: l'interdisciplinarietà con la fisica e il concetto di modellizzazione. Il lavoro finale sarà quindi quello di andare ad analizzare, attraverso un confronto con le Indicazioni Nazionali per il Liceo Scientifico e con alcune esigenze emerse dagli insegnanti, le parti e i modi in cui la tesi risponde a queste richieste.
Nel primo capitolo, in particolare, sarà fatta una panoramica sul tema dell'interdisciplinarietà tra matematica e fisica nella letteratura scientifica di didattica della matematica, attraverso l'analisi di tre recenti articoli di Israel, Fabri e Karam. Ciò che ne emerge è una profonda interconnessione tra le due materie, che evidenzia la necessità di valorizzarne i legami (in senso storico, contenutistico e applicativo) ed auspica un rinnovamento della didattica in questa direzione.
Nel capitolo successivo si analizzerà il concetto di modellizzazione matematica, fornendo le principali definizioni ad esso collegate ed evidenziandone l'importanza per lo sviluppo di competenze specifiche. Non si trascurerà un piccola riflessione sulla storia della modellizzazione, utile a comprendere il ruolo didattico che essa oggi ricopre.
Si passerà quindi alla trattazione del problema della radiazione di corpo nero, di primaria importanza per la nascita della fisica quantistica. In un percorso step-by-step saranno illustrati i principali passaggi matematici che portarono Max Planck alla formulazione della legge di emissione e alla prima ipotesi di quantizzazione.
Si discuteranno poi le prime conseguenze storiche del lavoro di Planck, dal modello atomico di Bohr al principio di indeterminazione di Heisenberg. Il focus sarà sull'importanza della modellizzazione matematica, in particolare relativamente alla scelta dei dati da analizzare e dello strumento matematico con cui farlo; nel caso in questione, i primi saranno le quantità osservabili e il secondo il calcolo matriciale.
Nel capitolo 5 si proporrà un'attività fisico-matematica, completa di guida per l'insegnante, pensata per studenti del quinto anno di liceo, che ripercorre le tappe del lavoro di Planck, lasciando spazio allo studente per valutare, formulare ipotesi ed applicare le proprie conoscenze matematiche al fine di rielaborare le principali scoperte del fisico tedesco. Lo scopo sarà quello di promuovere competenze relative alla modellizzazione in fisica e mostrare i "nuovi" ruoli della matematica nella fisica moderna.

In seguito si cercherà di validare il lavoro inquadrandolo all'interno delle direttive delle Indicazioni Nazionali, valutandone i punti di contatto. Saranno individuate in particolare due macro-categorie, corrispondenti al tipo di esigenza soddisfatta: formativa in senso trasversale, o rispetto ai metodi e ai contenuti.
L'ultimo capitolo si compone di due parti: nella prima ci si preoccuperà di mettere in luce i modi in cui questo lavoro di tesi risponde ad alcune esigenze di modellizzazione evidenziate dagli insegnanti; nella seconda si cercherà invece di spiegare perché l'attività sul corpo nero proposta nel capitolo 5 costituisca un tipo di insegnamento che supera una visione di conoscenza come prodotto predefinito ed inerte, per renderla un processo elaborativo e relazionale.

Capitolo 1

Matematica e Fisica: una relazione vicendevolmente costitutiva

Lo scopo di questo capitolo è quello di andare ad indagare il legame che esiste tra due discipline come la matematica e la fisica. Per fare ciò, si andranno ad analizzare tre articoli di letteratura scientifica a riguardo. Il primo è "*Le immagini della matematica come strumento per l'interpretazione della realtà*"[14] di Giorgio Israel (1987); attraverso questo testo sarà analizzato il tema dell'interdisciplinarietà tra matematica e fisica in una prospettiva inizialmente storica, per poi andare ad indagare alcuni nodi tematici fondamentali che riguardano il legame fra le due materie. Si vedrà poi l'articolo di Elio Fabri (2010) "*Matematica e Fisica - un rapporto complesso*"[9], nel quale saranno analizzati un paio di esempi che bene illustrano il doppio filo che lega matematica e fisica, facendo sì che una possa considerare la propria stessa esistenza come dipendente dall'altra, e viceversa. Infine, in "*Introduction of the Thematic Issue on the Interplay of Physics and Mathematics*"[16] di Ricardo Karam (2015), ci si interrogherà sulle difficoltà che un approccio scolastico di tipo interdisciplinare può provocare negli studenti, anche in quelli più preparati, e si cercherà di proporre una via d'uscita a questa problematica.

1.1 Le immagini della matematica

Giorgio Israel, ne "*Le immagini della matematica come strumento per l'interpretazione della realtà*", analizza la questione a partire da un punto di vista storico, interessandosi in particolar modo alla situazione italiana. È proprio nel nostro Paese, sostiene infatti l'autore, che si è manifestato, a livello di ricerca accademica, un legame strettissimo tra analisi e fisica, grazie a scienziati del calibro Vito Volterra, Enrico Betti o Tullio Levi Civita. Ed è ancora in Italia che abbiamo avuto, questa volta a livello didattico, l'insegnamento di una figura come Federigo Enriques, particolarmente attento al problema dei rapporti tra la matematica e tutte le scienze applicate, o di Guido Castelnuovo, in prima linea nel favorire lo sviluppo dell'interesse per il calcolo delle probabilità e le sue applicazioni, in particolare alle scienze attuariali. Ed anche un altro grande scienziato e matematico italiano, Bruno de Finetti, non mancava di manifestare la sua ostilità per ogni approccio astratto e formale nella matematica, polemizzando contro l'obbligo di subire un siffatto insegnamento. Ma è stato forse proprio il predominio incontrastato di questi punti di vista empirici ad avere generato, fin dal secondo dopoguerra, una reazione che ha portato ad un'adesione diffusa e quasi incondizionata all'assiomatica ed al formalismo. Questa visione ha comportato, secondo l'autore, la diffusione di un'immagine della matematica come una sorta di branca della logica, o addirittura una "sintassi del pensiero puro". Il punto di vista più estremo si manifesta, fuori dall'Italia, nell'ideologia del cosiddetto gruppo Bourbaki[1]: a cavallo degli anni '30, tale gruppo predicava la separazione netta tra matematica e scienze e tendeva a spiegare i numerosi punti di contatto come pure casualità delle quali ci si accorgeva a posteriori. Negli stessi anni Albert Einstein, influenzato in parte dal clima culturale in cui era immerso, sosteneva: "*La matematica come tale è incapace di enunciare alcunché, sia circa gli oggetti della rappresentazione intuitiva, sia circa gli oggetti della realtà*", per poi rivedere, negli anni successivi, la propria posizione: "*È d'altra parte certo che la matematica in generale e la geometria in particolare debbono la loro esistenza al nostro bisogno di sapere qualcosa circa il comportamento degli oggetti reali*". Decisamente schierato contro il punto di vista

[1]Nicolas Bourbaki è lo pseudonimo collettivo sotto il quale, dal 1933, lavorò un gruppo di matematici, perlopiù francesi, detti *bourbakisti*. Ricordiamo tra essi: H. Cartan, C. Chevalley, J. Dieudonnè, Ch. Ehresmann ed A. Weil. Temendo la tendenza della matematica a spezzettarsi in tante branche separate l'una dall'altra e parlanti ciascuna un proprio linguaggio, e decisi nel riaffermare l'unitarietà della disciplina, i bourbakisti concepirono un'opera collettiva, intitolata "*Eléments de Mathématiques*", che aveva lo scopo di descrivere, attraverso un'impostazione di tipo assiomatico basata sulla logica, tutte le principali teorie matematiche fino ad allora conosciute. [28]

bourbakista, invece, era l'ungherese John von Neumann, che indicava in questo modo i rischi della separazione tra matematica e applicazioni: "*Vi è il grave pericolo che la corrente* (cioè la matematica), *così lontana dalla sua sorgente, si separi in una moltitudine di rami insignificanti e che la disciplina diventi una massa disorganizzata di dettagli e complessità*".

Nonostante questo ed altri ammonimenti, è prevalso in Italia, come si è detto, un punto di vista più vicino a quello bourbakista, tendente a considerare la matematica come una sorta di dipartimento della logica formale o addirittura come una specie di sintassi del pensiero puro. Secondo Israel, le ragioni di ciò sono strettamente collegate alla riforma Gentile dell'insegnamento: con essa si affermò l'idea che il contenuto del pensiero della scienza appartenesse interamente alla filosofia, e che quindi non la scienza ma soltanto il pensiero filosofico potesse dire qualcosa circa i fenomeni reali. Si è creata così una dicotomia fra insegnamento delle materie scientifiche, ridotto esclusivamente ad addestramento a compiere operazioni tecniche, ed insegnamento della filosofia, volto all'insegnamento dei ragionamenti scientifici. In questa visione, qualsiasi valore concettuale della matematica diventa un colossale manuale di regole operative, di ricette, ed a questo modo di concepirla ed insegnarla l'autore riconduce l'immagine di aridità che la matematica ha per tanto tempo diffuso intorno a sé.

Come rimediare, quindi? Israel sostiene che una delle più grandi rivoluzioni nell'insegnamento della matematica e del suo ruolo applicativo sarebbe innanzitutto quella di evidenziare sempre l'aspetto concettuale di questioni che si presentano sotto una veste che solo in apparenza è esclusivamente tecnica. In secondo luogo, occorrerebbe possedere una buona conoscenza dei contenuti storici e culturali che riguardano i metodi e i concetti che intervengono nell'analisi matematica della realtà. A questo secondo scopo, è utile elencare alcuni nodi tematici fondamentali presenti nell'articolo che riguardano, in particolare, il legame tra matematica e mondo fisico:

- Costruzioni con riga e compasso. È stato uno dei temi centrali della geometria per molti secoli e riflette la limitazione degli strumenti della tecnica per operazioni basate soprattutto sul tracciamento di rette e cerchi.

- Meccanica galileiana, in particolare quella relativa ai moti celesti. È in questo contesto che si assiste per la prima volta alla nascita di un rapporto organico tra matematica e fisica.

- Calcolo infinitesimale. È lo strumento chiave della scienza moderna, basata sull'analisi matematica dei fenomeni; esso è quindi intriso delle concettualizzazioni di tipo meccanico assieme a cui è nato.

- Equazioni differenziali. Costituiscono un nodo cruciale per il problema scientifico-filosofico del determinismo causale: è la teoria dei problemi di Cauchy che ci mostra, per esempio, che è possibile determinare in modo unico la traiettoria di un certo punto materiale se è noto il suo stato iniziale.

- Il concetto di probabilità. Fondamentale nella termodinamica e nello sviluppo della teoria quantistica; in quest'ultimo contesto si riesce a passare da una visione di probabilità come incertezza-errore ad una probabilità come elemento costitutivo e determinante per le proprietà fisiche di una particella.

Infine, un tema di grande importanza è il modo in cui si utilizza la matematica in campi applicativi diversi dalla fisica, fra i quali primeggiano per importanza le scienze biologiche, economiche e sociali. Secondo Israel, lo studio matematico di questi processi reali non è mai qualcosa di immediato, ma necessita al contrario di una precisa metodologia di selezione delle proprietà che si vogliono studiare e del modo in cui si confronta il modello con i dati empirici. Anche questo va insegnato e trasmesso agli studenti.

1.2 Un rapporto complesso

Nella sezione precedente, si è sottolineata l'importanza di tenere conto, nell'educazione matematica, del rapporto tra questa disciplina e il mondo reale. Tale relazione può essere declinata in modi differenti e con diverse implicazioni sulla didattica della matematica nella scuola secondaria. In questa sezione verrà affrontato il tema più specifico della relazione tra matematica e fisica, che è l'aspetto di maggiore rilevanza nell'analisi e nelle proposte presentate in questa tesi. I rapporti tra matematica e fisica non sono infatti unidirezionali ma, al contrario, nel corso della storia e nelle varie fasi dello sviluppo delle teorie scientifiche, si sono mostrati di fondamentale importanza sia il ruolo della matematica nell'elaborazione di modelli fisici, sia quello della fisica nello sviluppo di teorie in ambito matematico.

L'articolo di E. Fabri "*Matematica e fisica, un rapporto complesso*", parte quindi da una celeberrima citazione di Galileo sulle relazioni tra matematica e fisica: "*L'universo è scritto in lingua matematica, e i caratteri sono triangoli, cerchi e altre figure geometriche*". Secondo l'autore, l'interpretazione da dare non è quella per cui la matematica costituisce la vera essenza delle cose, al di là delle apparenze fornite dai fenomeni, ma il fatto che solo la matematica è uno strumento sufficientemente potente e preciso per intendere e decifrare l'universo. Questa posizione, di grande rilievo per il pensiero scientifico occidentale, non è però l'unica possibile. La seguente frase di Einstein può servire come primo confronto con un punto di vista significativamente diverso: "*I principi creativi risiedono nella matematica. In un certo senso, io tengo per vero che il pensiero puro possa afferrare la realtà, come sognavano gli antichi. D'altra parte, il pensiero puramente logico non può darci alcuna conoscenza del mondo empirico*".

È partendo dall'illustrazione di questi due pensieri che Fabri si pone la domanda: quale rapporto sussiste tra matematica e realtà? È forse vera la tesi bourbakista secondo cui la forza della matematica nello spiegare i fenomeni risiede in una pura coincidenza? Per Kelvin, per esempio, la modellizzazione matematica è pura fantasia, quello che conta sono gli osservabili. Secondo Boltzmann, invece, non occorre porsi il problema: l'importante è che dalla teoria sia possibile dedurre previsioni verificabili.
Un'interessante caso su cui riflettere arriva dalla geometria: fino agli inizi del XX secolo, si pensava che il sistema assiomatico di Euclide fosse la teoria matematica più efficace per interpretare la realtà; solo con la formulazione della relatività generale nel 1915, che utilizza la teoria delle varietà riemanniane e le geometrie non euclidee sviluppatesi nel XIX secolo, si è imparato a rinunciare a questo paradigma, che non era più adeguato per la descrizione di una nuova fisica. Questo esempio ci mostra in modo significativo come gli strumenti matematici che supportano l'elaborazione di modelli e teorie fisiche possano cambiare radicalmente, e ci aiuta quindi a mettere in luce non solo le potenzia-

lità, ma anche i limiti di ogni teoria matematica di riferimento. È dunque fondamentale sapere scegliere, a seconda della situazione in cui ci si trova, il modello adatto con il quale confrontarsi.

Rimane però la domanda: perché la matematica riesce a spiegare il mondo reale? Com'è possibile che essa si adatti così mirabilmente agli oggetti della realtà? Fabri cerca di dare una risposta a questa difficile domanda, sostenendo che la matematica è un "epifenomeno", ossia una proprietà emergente dall'evoluzione del pensiero umano. In questo senso essa non è indipendente dall'esperienza, bensì trova in essa la sua origine, e ciò ne spiegherebbe l'adattabilità. Inoltre la matematica presenta un'estrema flessibilità, che le permette, dato un problema o situazione, di poter creare una struttura ad esso adeguata.

Ci sono quindi tutte le premesse necessarie per andare a smentire la visione utilitaristica della matematica secondo la quale essa non è altro che un utile strumento da impiegare quando ve ne sia la necessità, a differenza dalla fisica, che usa altre categorie, altri metodi, altri fondamenti epistemologici. L'autore presenta dunque due esempi che bene illustrano come matematica e fisica siano invece legate da un doppio filo in cui una definisce l'altra, e viceversa:

- Il tempo Newtoniano. Consideriamo l'asserzione classica, a volte addirittura implicita, per cui: "*Il modello matematico del tempo fisico è la retta reale*". Con questa semplice proposizione si fanno in realtà parecchie ipotesi sulla natura fisica del tempo; infatti si sta dicendo che esso è: assoluto, unidimensionale, non ramificato, orientato, non chiuso, infinito in entrambi i sensi, continuo. Alcune delle proprietà enunciate non richiedono particolari commenti: è ben noto che cosa vuol dire che il tempo sia unidimensionale, infinito, orientato. Ma la base sperimentale di tutte queste proprietà non è ovvia; non che ci sia qualcosa da mettere in discussione, ma l'evidenza sperimentale è tutt'altro che diretta (anche se qualcosa viene realmente discusso: il problema del verso del tempo, per esempio, non si può dire che sia definitivamente risolto). Di fatto, comunque, è solo il successo della teoria che si sviluppa su queste basi a garantire che le basi siano ragionevoli. Per esempio, ci sono culture che hanno mantenuto (e forse in qualche caso mantengono ancor oggi) visioni diverse: si pensi alla tradizione dell'"eterno ritorno" nel pensiero greco, e a certe filosofie orientali; è vero che non ci sono prove in favore, ma è altrettanto vero che non ci sono vere e proprie prove in contrario. In definitiva, si può sostenere che la matematizzazione di una certa teoria fisica è inizialmente indotta, suggerita dall'esperienza, ma può anche agire su un piano parzialmente indipendente da essa. È questa la posizione di Einstein, quando afferma: "*L'esperienza può suggerire i concetti matematici appropriati, i quali però non si possono certissimamente dedurre da essa*".

- Lo spazio-tempo di Minkowski[2]. È noto che per capire la relatività occorre fare un'astrazione: lo spazio-tempo, sostiene Fabri, è in un certo senso la vera realtà, ma è una realtà che non si vede, che non è direttamente accessibile ai nostri sensi. Occorre dunque saper vedere quello che c'è dietro i fenomeni, ma a volte ciò può essere visto solo come struttura matematica, come nel caso dello spazio-tempo. Questo è un esempio di matematica come strumento per immaginare e andare oltre l'esperienza: un esempio di matematica come strumento del pensiero.

L'autore propone infine una riflessione di tipo didattico.. Da un lato, l'insegnamento della matematica procede su binari non soltanto astratti, ma volutamente e totalmente svincolati da qualunque richiamo alla realtà concreta, sia quella della fisica o altra. Così facendo, spesso si riduce la matematica a un gioco del tutto formale. Non si fa vedere il processo di astrazione nel suo nascere, e soprattutto non si crea l'abitudine a muoversi sui due piani: quello della realtà fisica da descrivere in termini matematici e quello del modello matematico da interpretare con riferimento a fenomeni. Dall'altro, l'insegnamento della fisica cerca di supplire alle difficoltà degli allievi nell'uso della matematica facendovi ricorso in modo semplicistico e strumentale. Si cerca solamente di aggirare gli

[2]Minkowski ha una visione molto specifica della relazione tra matematica e mondo reale, fondata sulla convinzione dell'esistenza di un'armonia prestabilita fra matematica pura e fisica. Egli, infatti, vede la geometria quadridimensionale come l'ente primario al quale ricondurre la fisica e, con essa, l'insieme dei fenomeni naturali. Nella visione di Minkowski, viene stabilita un'identificazione letterale tra la struttura spazio-temporale matematica e la struttura del mondo naturale; in altre parole, la sua posizione si basa sull'assunto sostanzialista che il mondo reale sia una varietà quadridimensionale, che esiste come oggetto dotato di realtà. In più, tale struttura, in quanto letteralmente identificata con il mondo naturale, non può che essere invariante, indipendente dall'osservatore e quindi assoluta. [18]

ostacoli, correndo il rischio di arrivare ad una fisica senza matematica.

Infine occorre combattere la tendenza, forse spontanea, a vedere le strutture matematiche come realtà. Secondo Fabri, bisogna portare gli allievi a convincersi che si tratta invece di descrizioni o rappresentazioni (tutt'altro che banali, perché fortemente strutturate) che costituiscono il risultato di un lungo lavoro di comprensione teorica della realtà fisica. Ovvio che un tale programma va perseguito con estrema gradualità: si dovrebbe iniziare preparando il terreno nei casi più semplici, per poi passare a quelli più complessi. Diventa inoltre fondamentale avere la possibilità di tornare su argomenti già svolti, in modo da approfondire aspetti che nella prima presentazione non potevano essere discussi.

1.3 La fatica dell'interdisciplinarietà

L'ultimo articolo analizzato è di Ricardo Karam: "*Introduction of the Thematic Issue on the Interplay of Physics and Mathematics*". In esso si afferma che è facile riscontrare nella didattica della fisica una visione della matematica come mero strumento per descrivere e calcolare, allo stesso modo in cui in un contesto matematico è facile vedere la fisica soltanto come un possibile campo di applicazione dei concetti matematici. Questa dicotomia provoca forti problemi di apprendimento per gli studenti. Anche secondo Karam, l'intricato e ricco rapporto tra matematica e fisica emerge da uno sviluppo storico, e l'analisi dei processi storici è fondamentale per aumentare la nostra comprensione di questa interdisciplinarietà. In particolare, mette in luce come spesso venga evidenziata l'importanza della matematica per la fisica, tralasciando come la maggior parte dei concetti matematici siano derivati dallo studio della natura.

Si pone poi una domanda: perché anche gli studenti più brillanti da un punto di vista matematico faticano ad usare questa disciplina all'interno della fisica? La risposta viene da Joe Redish e Eric Kuo [25]: matematica in matematica e matematica in fisica sono come linguaggi differenti. Infatti, la matematizzazione delle situazioni fisiche è un passaggio per nulla scontato: basti pensare alle difficoltà degli studenti nell'uso dei differenziali (che vengono spesso presentati dall'insegnante di matematica come indicazione della variabile secondo cui si integra) in un contesto fisico.

Anche in questo caso la domanda finale di Karam è di tipo didattico: come possiamo strutturare la nostra didattica se l'obiettivo è quello di insegnare agli studenti ad utilizzare la matematica come un ricco strumento con cui non solo "calcolare", ma pensare ed interpretare il mondo fisico? Una prima risposta potrebbe essere quella di interrogarsi maggiormente sul significato fisico delle formule matematiche; per esempio, nell'equazione della gravitazione universale, come cambia la forza al variare delle masse? Cosa significa la proporzionalità inversa rispetto al quadrato del raggio? Oppure, in riferimento all'accelerazione centripeta: a parità di velocità, come varia l'accelerazione al variare del raggio? Occorre quindi trovare le relazioni tra significato fisico e matematico. Karam generalizza la situazione: bisogna far emergere l'importanza di chiedersi non solamente *come* si presenta una formula, ma anche *perché* la sua forma sia proprio quella. In definitiva, nello studio degli strumenti matematici della fisica, è necessario spostare l'attenzione dal "descrivere e calcolare" al "capire e spiegare", se si vuole ottenere una visione di queste due scienze che sia il più ampia possibile.

Dall'analisi esposta in questo capitolo emerge come la relazione tra matematica e fisica sia in qualche modo vicendevolmente costitutiva. Se da un lato, quindi, sembra essenziale farla emergere in ambito didattico, dall'altro questo tentativo può creare difficoltà nello studente. Riprendendo l'ultimo articolo analizzato, un modo per risolvere questo problema potrebbe essere quello spostare l'attenziane dal "descrivere e calcolare" al "capire e spiegare". In quest'ottica diventa ovviamente importante lavorare a livello didattico su uno dei principali strumenti matematici che consentono di muoversi tra le due discipline: la modellizzazione matematica in fisica, il cui impiego viene auspicato in modo deciso anche nelle Indicazioni Nazionali. Ma cosa si intende per "modellizzazione matematica"? E quali sono le sue peculiarità, quando siamo interessati a studiare fenomeni fisici? Nel prossimo capitolo cercheremo di rispondere a queste domande analizzando alcuni lavori di ricerca sull'argomento.

Capitolo 2

La modellizzazione matematica

Nella ricerca in didattica della matematica, il tema della modellizzazione è solitamente riferito in senso generico alla relazione tra matematica e mondo reale. La modellizzazione matematica è pensata come il processo che consente di selezionare particolari aspetti di una situazione reale, rappresentarli con un determinato linguaggio e stabilirvi relazioni di tipo matematico; nella maggior parte dei lavori di ricerca, tale processo traduce quindi problemi reali in problemi matematici attraverso il raggiungimento di un modello. In questo lavoro, ci si concentrerà sull'aspetto particolare della modellizzazione in fisica, che si pone l'obiettivo specifico di costruire modelli fisici. I problemi di modellizzazione sono complessi, articolati e in continua relazione con la realtà da cui traggono origine, e quindi in costante evoluzione; i campi di applicazione spaziano dalla fisica alla chimica, dalle scienze economiche all'ingegneria moderna. L'approfondimento di questi processi è quindi fondamentale per un'educazione matematica che miri a formare un bagaglio adeguato di competenze. In questo capitolo verranno analizzati i principali aspetti della modellizzazione matematica che sono presentati nella letteratura di ricerca come rilevanti da un punto di vista didattico [6]. Gli approcci presentati, pur validi in generale nella loro struttura, dovranno essere problematizzati dall'insegnante allo scopo di caratterizzare in modo esplicito e funzionale ai fini didattici il ruolo della matematica nel ciclo della modellizzazione relativa ai processi di costruzione dei modelli fisici, in particolare quelli di Planck e Heisenberg. Questi processi, che hanno aperto la strada a due rivoluzioni nell'ambito della fisica, avevano infatti alcune peculiarità: erano finalizzati non tanto alla risoluzione di problemi specifici provenienti dal mondo reale, quanto alla elaborazione di modelli fisici che, partendo dai precedenti, permettessero di superare limiti e incoerenze che stavano via via emergendo all'interno delle teorie fisiche.

2.1 Definizioni teoriche

Che cos'è, quindi, un modello matematico? In [6, pag.55] viene definito come un insieme di tre domini: il primo di tipo extra-matematico (D), il secondo di tipo matematico (M) e l'ultimo costituito dalle relazioni che intercorrono fra i primi due. Graficamente:

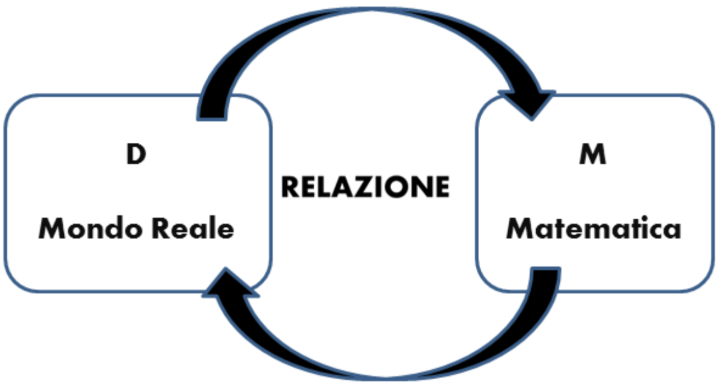

Figura 2.1: Processi di modellizzazione

In particolare, quello che viene definito come *ciclo della modellizzazione* consiste nell'assumere come rilevante un gruppo di elementi in D, ad esempio fenomeni verificati o campioni raccolti, e trasporli nel dominio matematico M. In seguito essi vengono trattati con gli usuali metodi matematici; i risultati ottenuti sono nuovamente trasportati su D per essere interpretati e valutati di modo da constatare se il modello sia soddisfacente. Una delle analisi più complete di questo ciclo è stata introdotta nel 2005 da Blum e Leiss e si articola in sei fasi e sette transizioni [2].

Le fasi sono:

1. *Real Situation*: è il problema da risolvere.

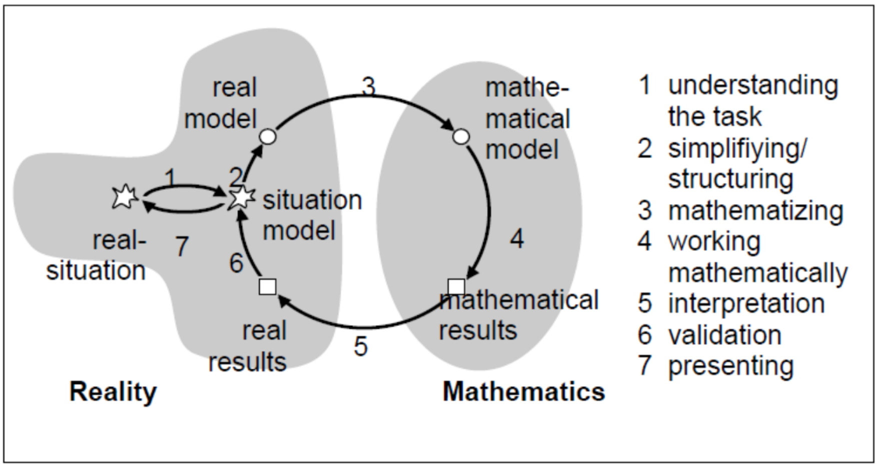

Figura 2.2: Il ciclo della modellizzazione

2. *Situation Model*: è la rappresentazione mentale della situazione data nel problema.

3. *Real Model*: è la rappresentazione del modello reale, strutturato ed epurato da informazioni superflue.

4. *Mathematical Model*: è l'elaborazione del modello matematico che rappresenta il modello reale.

5. *Mathematical Results*: è l'interpretazione dei risultati trovati nella risoluzione.

6. *Real Results*: è la corrispondenza della soluzione trovata al problema proposto.

Il passaggio da ogni fase alla successiva è realizzato attraverso una transizione:

1. *Concettualizzazione*: è l'individuazione della problematica da risolvere, per poi poterla descrivere.

2. *Strutturazione*: è l'identificazione di ciò che deve essere risolto. Per comprendere il problema e successivamente formulare il modello è essenziale rispondere ad alcune domande. Che cosa si desidera trovare? Quali sono i presupposti? È possibile stabilire opportuni collegamenti tra ciò che si conosce e ciò che si desidera conoscere? A questa fase appartiene quindi anche il momento della scelta delle variabili da prendere in considerazione.

3. *Matematizzazione*: è la traduzione di tutte le indicazioni del problema analizzato in un linguaggio matematico, utilizzando strutture e simboli adeguati alle variabili del problema.

4. *Lavoro matematico*: è la risoluzione del problema matematico tramite strategie interne alla disciplina.

5. *Interpretazione*: i risultati ottenuti sulla base del modello sono interpretati per rispondere alle domande nel contesto del problema analizzato inizialmente.

6. *Validazione*: è l'analisi dell'utilità e della funzionalità del modello.

7. *Presentazione*: una volta stabilito che il modello è valido e che la soluzione è accettabile, la si presenta in termini reali, riportandola al linguaggio iniziale.

2.2 Breve storia della modellizzazione matematica

Un'analisi della storia della matematica come attività sociale, prima che come disciplina da insegnare e apprendere all'interno di un'istituzione scolastica, mostra come le applicazioni della matematica abbiano molto spesso accompagnato e dato senso alla matematica stessa, fin dai tempi degli antichi popoli mesopotamici [3]; anche Arabi, Egizi, Cinesi e Indiani hanno spesso affrontato con strumenti matematici problemi vitali come la misurazione della Terra o dei cicli lunari. È quindi evidente come la fisica e le altre scienze fossero in passato studiate assieme alla matematica, cosicché le applicazioni e la modellizzazione erano intrinseche all'insegnamento della matematica stessa, senza le distinzioni che si presentano oggi. Un mutamento di metodo è avvenuto nel corso dell'Ottocento, quando la matematica ha iniziato ad assumere una posizione completamente autonoma e separata dalle altre scienze, mossa da fattori come l'avvento delle geometrie non euclidee o il successivo sviluppo dell'analisi astratta e della matematica pura. È da quel momento che diventa esplicito il riferimento ad un'"applicazione" della matematica e si inizia a segnalare la necessità di studiare sia la matematica pura che quella applicata. Ai giorni nostri è divenuta sempre più rilevante e prioritaria la corrente che predilige l'insegnamento esplicito delle applicazioni della matematica nell'educazione, entrando così nella prassi dell'insegnamento scolastico e nei curricula di diversi paesi come Regno Unito, Australia, Danimarca, Austria e Germania.

2.3 La modellizzazione come forma di competenza

La pratica della modellizzazione è presente in tutte le indicazioni curricolari della scuola superiore di secondo grado: Istituti Tecnici, Professionali e in tutti gli indirizzi dei Licei, con più enfasi nello Scientifico. Le competenze che tale pratica porta con sé sono state definite da Blum et al. (2007) come "la capacità di identificare le domande pertinenti, le variabili, i rapporti e le ipotesi di una determinata situazione reale, di interpretarne e validarne la soluzione in relazione alla situazione data" [3]. In particolare, ogni fase del ciclo della modellizzazione richiede competenze specifiche:

- *Competenze nella comprensione del problema reale e nella costruzione del modello basato sulla realtà*: formulare ipotesi per il problema e semplificare la realtà; riconoscere le grandezze che influenzano la realtà, assegnare loro un nome e identificare le variabili chiave; costruire le possibili relazioni tra le variabili; analizzare le informazioni disponibili e distinguere le informazioni rilevanti da quelle trascurabili.

- *Competenze nella creazione del modello matematico dal modello reale*: matematizzare le quantità rilevanti e le loro relazioni; semplificare queste quantità e ridurne il numero e la complessità; scegliere l'appropriata notazione matematica e rappresentare la situazione graficamente.

- *Competenze nella risoluzione di questioni matematiche all'interno del modello matematico*: utilizzare strategie euristiche come la divisione del problema in sotto parti, l'analogia con problemi simili, la riformulazione del problema, la sua visualizzazione in diverse forme, la verifica delle quantità o dei dati disponibili; utilizzare le conoscenze matematiche per risolvere il problema.

- *Competenze nell'interpretazione dei risultati matematici nella situazione reale*: interpretare i risultati matematici in contesti non matematici; generalizzare soluzioni sviluppate per una particolare situazione.

- *Competenze nella verifica delle soluzioni*: verificare e riflettere criticamente sulle soluzioni trovate; rivedere alcune parti del modello o, se le soluzioni non si adattano alla situazione, rivalutare il processo di modellazione messo in atto; riflettere sulla possibilità di sviluppare il problema diversamente; analizzare la possibilità di cambiare modello.

Come risulta evidente, tali competenze sono declinate con riferimento ai processi di modellizzazione che riguardano situazioni reali. Questo tipo di processi costituisce però solo una delle tante forme di modellizzazione che concorrono allo sviluppo di una competenza interdisciplinare tra matematica e fisica; quello che un insegnante deve saper stimolare in relazione a questo tema ha infatti una complessità molto maggiore, che non si riduce alla sola risoluzione di problemi che prendono spunto da situazioni mutuate dalla quotidianità. Cos'è un processo di modellizzazione in fisica, e in particolare un processo di modellizzazione matematica in fisica, è una domanda a cui sono stati e sono ancora dedicati interi articoli e sessioni di approfondimento nei convegni di didattica della fisica; si tratta di una questione molto articolata, su cui non c'è un'unica posizione a cui poter ricondurre le altre, ma in cui convivono diversi punti di vista spesso incompatibili e complementari.

Una delle fonti più autorevoli a riguardo è il libro *Modelli matematici* [13] di Giorgio Israel (1986), in cui la distinzione tra modellizzazione di situazioni reali volta solo alla risoluzione di problemi e la modellizzazione di fenomeni, tipica della fisica e aspetto meno esplorato a livello didattico, è presentata in modo molto efficace e corredata dall'analisi di un tentativo di definizione del modello matematico in senso generale. Si riportano alcuni passaggi dal libro del matematico italiano che possono aiutare a chiarire quale sia l'aspetto peculiare della didattica interdisciplinare sul tema della modellizzazione matematica in fisica, che la differenzia da altre classi di approcci alla modellizzazione matematica nella scuola secondaria:

"La "modellistica matematica" è la forma in cui si manifesta oggi l'uso della matematica nella descrizione e nella previsione di gran parte dei fenomeni. È quindi facile intuire che essa occupa un campo sterminato. [...] Non è neppure facile dare, fin dall'inizio, una definizione esauriente, semplice e compatta di modello matematico. [...] Cosa potremo fare allora? Dare un'idea introduttiva del campo dei problemi e dei metodi della modellistica matematica. E poiché non potremo seguire né un'impostazione informativa

né tecnica, seguiremo un approccio culturale. Ciò significa che cercheremo di illustrare i principali problemi di ordine concettuale che si pongono nella modellistica matematica contemporanea e la loro collocazione e origine storica. Abbiamo detto illustrare, perché il modo che ci sembra migliore per affrontare questi problemi così complessi e difficili è quello della scelta di pochi esempi significativi e rappresentativi. Esempi, cioè, che racchiudono in sè buona parte dei problemi tipici che si presentano nella costruzione e nella verifica di un modello matematico".

L'autore riprende a questo punto la definizione di E. Malinvaud nel libro *Méthodes statistiques de l'économetrie* [20]: "*Un modello matematico è la rappresentazione formale di idee o conoscenze relative a un fenomeno*" e procede in questo modo: "*Questa definizione contiene una descrizione completa delle caratteristiche di un modello matematico, che possono essere raccolte in tre punti fondamentali, non separabili l'uno dall'altro. Precisamente:*

1. *un modello matematico è la rappresentazione di un fenomeno;*
2. *tale rappresentazione non è discorsiva o a parole, ma formale, espressa cioè in linguaggio matematico;*
3. *non esiste una via diretta dalla realtà alla matematica. Il fenomeno specifico studiato, in altri termini, non determina la "sua" rappresentazione matematica; quello che invece si fa è tradurre in formule idee e conoscenze relative al fenomeno.*

Discutiamo meglio questi tre punti. Sul primo non c'è molto da dire: esso non fa altro che individuare il campo di cui ci stiamo occupando, cioè l'analisi scientifica dei processi reali. Un modello matematico è, per l'appunto, la rappresentazione (o descrizione) di un fenomeno. Non si tratta però di una semplice descrizione verbale. Il modello matematico è una descrizione che mette in luce determinati aspetti caratteristici di un fenomeno in termini formali: è la logica del processo che viene analizzata. Ed ecco il secondo punto. La descrizione che offre il modello non è infatti una descrizione contenutistica, ma è una descrizione che utilizza il linguaggio formale e astratto per eccellenza: il linguaggio della matematica. Insistiamo su questa contrapposizione fra descrizione a parole o di contenuto e descrizione in linguaggio formale e quindi matematico. Arriviamo così al *terzo punto, che è il più delicato e importante di tutti. Perché Malinvaud dice che un modello matematico è la rappresentazione formale di "idee o conoscenze relative a un fenomeno"? Perché non dice semplicemente che è la rappresentazione formale di un fenomeno? L'esame di un aspetto della realtà non suggerisce in alcun modo come esso debba essere descritto matematicamente. In modo più sintetico e rozzo, ma abbastanza suggestivo, potremmo dire che non esiste una via diretta, una sorta di autostrada, che porta dalla realtà alla "sua" descrizione matematica, in modo univoco*".

I contenuti sui temi dell'interdisciplinarietà e della modellizzazione di cui si è discusso in questi due capitoli torneranno utili nel seguito, come punti di contatto con l'argomento che si sta per introdurre: la nascita della fisica quantistica e i suoi primi sviluppi. La scelta di tale tema deriva da una problematica che si è evidenziata in ambito scolastico, legata alla difficoltà di molti docenti, soprattutto se laureati in matematica, nell'affrontare gli argomenti di meccanica quantistica che sono stati introdotti nelle Indicazioni Nazionali per i Licei Scientifici. Tale difficoltà viene inoltre aggravata dalla frequente inefficacia dei libri di testo nel trattare questo tema. Sul problema della radiazione di corpo nero, in particolare, c'è una diffusa sensazione di non significativà della questione, nonostante da essa sia scaturita una rivoluzione culturale quale quella portata dalla fisica quantistica. Pertanto, nel prossimo capitolo, si introdurrà questo argomento, che si pone alla base della prima ipotesi di quantizzazione, in un approccio che possa essere didatticamente significativo.

Capitolo 3

Planck e la radiazione di corpo nero

If one could prove the hypothesis, it would no longer be a hypothesis, and one did not have to formulate it at all. (M.Planck) [15, pag.43]

In questo capitolo si analizzeranno i principali passaggi che hanno portato Max Planck alla formulazione della legge di emissione del corpo nero e alla prima ipotesi di quantizzazione. La trattazione segue fedelmente l'articolo [15] di Planck del 1900 ed utilizza come punto di vista privilegiato quello matematico, con ovvi e necessari collegamenti ai contenuti fisici. Inizialmente si spiegherà l'origine e l'essenza del problema, per poi analizzare alcuni dei principali risultati riguardanti la questione. Si ripercorrerà quindi il lavoro del fisico tedesco, con particolare attenzione agli strumenti matematici utilizzati: essi saranno a mano a mano evidenziati in grassetto, al fine di poter essere sfruttati in un approccio di tipo didattico[1]. Infine, si studierà il modello interpretativo proposto da Planck, nel quale compare la prima ipotesi di quantizzazione.

3.1 Il problema

La nascita della fisica quantistica è indissolubilmente legata al cosiddetto *problema dello spettro del corpo nero*. Di cosa si tratta?

Per parlarne, occorre ricordare che tutti i corpi emettono energia sotto forma di radiazione. Se si considera un corpo di volume unitario, l'energia emessa alla frequenza ν e alla

[1]Il capitolo 5 di questa tesi costituirà un esempio di questo tipo di utilizzo.

temperatura T è associata ad una funzione $u(\nu, T)$, detta *densità spettrale di energia.* La relazione che lega l'energia totale E a tale funzione è la seguente:

$$E = \int_0^\infty u(\nu, T) \cdot \mathrm{d}\nu \tag{3.1}$$

Se tale densità di energia, anziché essere valutata per unità di volume, viene valutata per unità di tempo, superficie ed angolo solido, si ottiene una grandezza chiamata *potere emissivo specifico.* Si definisce invece *potere assorbente* la frazione dell'energia alla frequenza ν incidente ad un corpo alla temperatura T da esso assorbita [19, pag.7].

A questo punto, si può definire un *corpo nero* come un oggetto fisico ideale in grado di assorbire tutta la radiazione elettromagnetica incidente, di qualsivoglia frequenza, senza rifletterne alcuna parte; il suo potere assorbente sarà dunque uguale a 1. Un importante risultato di fisica classica [17][22, p.328], dovuto a Kirchhoff, afferma che, in condizioni di equilibrio, il rapporto tra il potere emissivo specifico di un corpo e il suo potere assorbente è *universale*, cioè non dipende né dal tipo di corpo, né dalla sua composizione chimica, ma soltanto dalla sua temperatura T e dalla frequenza ν considerata. Nel caso del corpo nero, poiché il potere assorbente è uguale a 1, la ricerca di tale rapporto costante coincide con la ricerca del potere emissivo specifico, e quindi con la determinazione della densità spettrale di energia. Questo problema teorico ha costituito uno dei principali temi di ricerca della fisica degli ultimi anni del XIX secolo.

3.2 Risultati precedenti

Nella pratica, il corpo nero veniva assimilato ad un recipiente metallico cavo (per il teorema di Kirchhoff, la scelta del materiale era completamente arbitraria), con un minuscolo forellino in una delle pareti. La cavità, che doveva essere mantenuta all'equilibrio termico, era pensata in grado di assorbire tutta la radiazione incidente, la cui via d'accesso era costituita dal foro. Una volta all'interno, la radiazione era riflessa avanti e indietro fra le pareti della cavità fino ad essere assorbita completamente.
Dal punto di vista del modello teorico, l'idea più semplice era quella di immaginare le pareti della cavità come costituite da oscillatori armonici, detti *risonatori*, che mantengono l'equilibrio assorbendo e riemettendo radiazione. In particolare, un oscillatore con

frequenza propria ν_0 assorbe ed emette radiazione di frequenza ν_0. Il corpo nero sarà quindi composto da oscillatori di tutte le possibili frequenze.

Considerato ciò, il primo risultato noto, ottenuto tramite considerazioni di tipo elettromagnetico, era la dipendenza della densità di energia $u(\nu, T)$ dall'energia media $U(\nu)$ dei risonatori di frequenza ν, tramite la relazione [23, pag.126]:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} U(\nu) \tag{3.2}$$

Un altro interessante risultato su cui Planck poteva basare le proprie conoscenze era dovuto a Wilhelm Wien e Friedrich Paschen [15, p.33], i quali nel 1896 avevano proposto, lavorando simultaneamente ed in maniera indipendente, la seguente espressione per la funzione u:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} a e^{\frac{-b\nu}{T}} \tag{3.3}$$

con a e b costanti reali positive. Questa formula, che oggi è chiamata *distribuzione di Wien* o *approssimazione di Wien*, coincide con l'attribuzione del valore $a\nu e^{\frac{-b\nu}{T}}$ all'energia $U(\nu)$; essa era stata proposta come descrizione approssimativa dei dati sperimentali, ma senza giustificazioni teoriche ragionevoli. L'espressione non era inoltre del tutto soddisfacente, per motivi che verranno spiegati in seguito.
É interessante notare che la formula di Paschen e Wien racchiude la più famosa *legge dello spostamento di Wien*, o soltanto *legge di Wien*:

$$T \cdot \lambda_{max} = \text{cost}$$

che afferma che la lunghezza d'onda per cui è massima la radiazione emessa è inversamente proporzionale alla temperatura del corpo; infatti, derivando la funzione $u(\nu, T)$ rispetto a ν, per trovarne i punti stazionari, si ottiene: **(argomento: punti stazionari e derivata del prodotto di due funzioni)**

$$\begin{aligned} \frac{du(\nu, T)}{\mathrm{d}\nu} &= \frac{8\pi}{c^3} a \cdot \left(3\nu^2 e^{\frac{-b\nu}{T}} - \frac{\nu^3 e^{\frac{-b\nu}{T}} b}{T} \right) \\ &= \frac{8\pi}{c^3} a\nu^2 e^{\frac{-b\nu}{T}} \cdot \left(3 - \frac{b\nu}{T} \right) \end{aligned}$$

da cui, studiando il segno della derivata, poiché $a > 0$ e $e^{\frac{-b\nu}{T}} > 0$ $\forall \nu \in \mathbb{R}$, si ha che un punto di massimo relativo è dato dall'equazione:

$$3 - \frac{b\nu}{T} = 0$$

La soluzione è

$$\frac{\nu_{max}}{T} = \frac{3}{b}$$

da cui, essendo $\nu = \frac{c}{\lambda}$:

$$\frac{c}{\lambda_{max} \cdot T} = \frac{3}{b}$$

ovvero

$$\lambda_{max} \cdot T = \frac{c \cdot b}{3} = \text{cost}$$

3.3 Il lavoro di Planck

Il modello iniziale

Il 7 Ottobre 1900 il fisico tedesco Heinrich Rubens incontra Max Planck a Berlino e gli rende noti gli esperimenti svolti insieme al collega Ferdinand Kurlbaum sull'energia di radiazione del corpo nero, compiuti utilizzando materiali come fluorite, salgemma e quarzo; ne emerge il fatto inaspettato che sulle grandi lunghezze d'onda (dell'ordine delle decine di μ), la distribuzione di Wien è in palese disaccordo con i dati sperimentali. La sera dello stesso giorno Planck trova la nuova equazione caratteristica che è alla base delle prime ipotesi di quantizzazione. Come ci è arrivato?

L'idea di Planck, da vero termodinamico qual era, fu quella di concentrare l'attenzione sull'entropia, e di sfruttare il fatto, già conosciuto, che la densità di energia fosse nota dal momento in cui si conosceva l'entropia S di ogni risonatore come funzione della sua energia totale U. Utilizzando un modello che si rivelerà poi non totalmente corretto, Planck esprime quindi in due modi diversi l'incremento infinitesimale di entropia per un sistema di n risonatori identici, ovvero alla stessa fissata frequenza e aventi la stessa energia, ottenendo la relazione: [24, pag.732]

$$f(nU) = \frac{1}{n} f(U) \tag{3.4}$$

con

$$f(U) = -\frac{3}{5}\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}U^2}$$

Differenziando rispetto alla variabile n, si ottiene[2]: **(argomento: notazione alla Leibniz e derivata di una funzione composta)**

$$U\frac{\mathrm{d}f(nU)}{\mathrm{d}(nU)} = -\frac{1}{n^2}f(U) \tag{3.5}$$

Ora, dividendo entrambi i membri per U e sostituendo ad $f(U)$ l'espressione $n \cdot f(nU)$ ottenibile dalla (3.4), si ricava:

$$\frac{\mathrm{d}f(nU)}{\mathrm{d}(nU)} = -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{n}{U} \cdot f(nU)$$

da cui:

$$\frac{\mathrm{d}f(nU)}{f(nU)} = -\frac{\mathrm{d}(nU)}{nU}$$

A questo punto, per semplicità, chiamiamo $nU := x$ ed otteniamo un'equazione differenziale a variabili separabili: **(argomento: equazioni differenziali)**

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{f(x)} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

che possiamo risolvere integrando rispetto ad x:

$$\ln(f(x)) = -\ln(x) + \gamma$$

ovvero

$$\ln(f(x) \cdot x) = \gamma$$

da cui:

$$f(x) \cdot x = e^{\gamma}$$

cioè:

$$f(x) = \frac{\text{cost}}{x}$$

Risostituendo $x = nU$:

$$f(nU) = \frac{\text{cost}}{nU}$$

[2]Si sta differenziando rispetto ad una variabile discreta. Si veda appendice A per una giustificazione.

da cui, riutilizzando la (3.4):

$$f(U) = \frac{\text{cost}}{U}$$

Quindi, poiché $f(U) = -\frac{3}{5}\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}U^2}$, si ha:

$$\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}U^2} = \frac{\alpha}{U} \tag{3.6}$$

con α costante rispetto a n e rispetto a U.

Osservazione 1. La formula (3.6) è in accordo con la legge di distribuzione di Wien. Infatti, combinando l'equazione di Wien (3.3) con la (3.2), si ha:

$$\frac{8\pi}{c^3} a\nu^3 e^{\frac{-b\nu}{T}} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} U(\nu)$$

Dunque

$$U = a\nu e^{\frac{-b\nu}{T}}$$

Fissata una frequenza ν, si ottengono due costanti $c_1 > 0$ e $c_2 < 0$ tali che:

$$\begin{cases} a\nu = c_1 \\ -b\nu = c_2 \end{cases}$$

da cui:

$$U = c_1 e^{\frac{c_2}{T}}$$

ovvero

$$\frac{c_2}{T} = \ln\frac{U}{c_1}$$

cioè

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{c_2}\ln\frac{U}{c_1} \tag{3.7}$$

Ora, poiché per il secondo principio della termodinamica $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}U} = \frac{1}{T}$, si conclude:

$$\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}U^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}U}\frac{1}{T} = \frac{\alpha}{U}$$

con α costante. Dunque la formula trovata da Planck era legata in questo senso all'equazione di Wien.

La nuova ipotesi

I should therefore be permitted to draw your attention to this new formula which I consider to be the simplest possible, apart from Wien's expression, from the point of view of the electromagnetic theory of radiation.
(M.Planck) [15, pag.37]

Poiché la distribuzione di Wien si era dimostrata inefficace nel predire i risultati sperimentali relativi alle emissioni a basse frequenze, Planck si vede costretto a riconoscere qualche mancanza anche nel proprio modello, o a ipotizzare che la fisica classica non fosse sufficiente a descrivere questo tipo di fenomeni. La strada che sceglie è quindi quella di partire da un'ipotesi, la più semplice possibile, che potesse rimettere tutto in carreggiata. Affidiamo la spiegazione di questo passaggio cruciale alle sue stesse parole: "*I have finally started to construct completely arbitrary expressions for the entropy.* [...] *I was especially attracted by one of the expressions thus constructed which is nearly as simple as Wien's expression*" [15, pag.36]. Così corregge la (3.6) con un termine moltiplicativo:

$$\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}U^2} = \frac{\alpha}{U(\beta + U)} \tag{3.8}$$

con β che cresce più velocemente di U, al crescere dalla frequenza ν considerata.
In questo modo, per alte frequenze, si avrà: **(argomento: rapporti asintotici)**

$$\lim_{\nu \to \infty} \left(\frac{\beta + U}{\beta} \right) = \lim_{\nu \to \infty} \left(1 + \frac{U}{\beta} \right) = 1$$

da cui deduciamo $\beta + U \sim \beta$ (rapporto asintotico pari a 1); l'equazione sarà quindi della forma:

$$\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}U^2} = \frac{\alpha}{\beta U} = \frac{\mathrm{cost}}{U}$$

che torna a coincidere con la distribuzione di Wien. A basse frequenze, invece, $\beta + U \sim U$ e l'equazione si ridurrà a

$$\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}U^2} = \frac{\alpha}{U^2}$$

che è la più semplice scrittura che riconduce S a funzione logaritmica di U, come suggerito da considerazioni statistiche precedenti[3], ed è in accordo con i dati sperimentali di

[3] In riferimento alla formula $S = k \ln W$, studiata da Boltzmann.

Rubens e Kurlbaum.
A questo punto occorre reintegrare la (3.8), per calcolare il valore U dell'energia. Poiché si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili, possiamo integrare entrambi i membri: **(argomento: equazioni differenziali e integrazione di funzioni razionali)**

$$\int \frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}U^2} \cdot \mathrm{d}U = \int \frac{\alpha}{U(\beta + U)} \cdot \mathrm{d}U$$

ottenendo, a meno di costanti additive:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}U} = \frac{\alpha}{\beta}(\ln U - \ln(\beta + U)) \tag{3.9}$$

Poiché $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}U} = \frac{1}{T}$, si ha:

$$\frac{1}{T} = \frac{\alpha}{\beta} \ln \frac{U}{\beta + U} \tag{3.10}$$

A questo punto, in linea con il desiderio di recuperare l'equazione di Wien nel caso di alte frequenze, cioè per $\beta + U \sim \beta$, Planck uguaglia la relazione appena trovata a quella di Wien, nella forma della (3.7):

$$\frac{\alpha}{\beta} \ln \frac{U}{\beta + U} = \frac{1}{c_2} \ln \frac{U}{c_1}$$

da cui per analogia, poiché $c_1 = a\nu$ e $c_2 = -b\nu$:

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{c_2} = -\frac{1}{b\nu} \\ \beta + U = c_1 = a\nu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{\beta}{b\nu} \\ \beta \sim \beta + U = a\nu \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{a}{b} \\ \beta = a\nu \end{cases}$$

Dunque, α è una costante di significato universale, mentre β aumenta (in modo direttamente proporzionale) all'aumentare dalla frequenza ν, come da ipotesi. Questi valori ci torneranno utili in seguito.
Tornando alla (3.10), è quindi possibile esplicitare il valore U dell'energia:

$$\ln \frac{U}{\beta + U} = \frac{\beta}{\alpha T}$$

da cui

$$\frac{U}{\beta + U} = e^{\frac{\beta}{\alpha T}}$$

ovvero

$$U = \beta e^{\frac{\beta}{\alpha T}} + U e^{\frac{\beta}{\alpha T}}$$

Raccogliendo:

$$(1 - e^{\frac{\beta}{\alpha T}}) \cdot U = \beta e^{\frac{\beta}{\alpha T}}$$

da cui

$$U = \frac{\beta e^{\frac{\beta}{\alpha T}}}{1 - e^{\frac{\beta}{\alpha T}}} = \frac{1}{\frac{1-e^{\frac{\beta}{\alpha T}}}{\beta e^{\frac{\beta}{\alpha T}}}} = \frac{1}{\frac{1}{\beta e^{\frac{\beta}{\alpha T}}} - \frac{1}{\beta}} = \frac{1}{\frac{1}{\beta}(e^{\frac{-\beta}{\alpha T}} - 1)} = \frac{\beta}{e^{\frac{-\beta}{\alpha T}} - 1}$$

A questo punto, non resta che sostituire il valore appena trovato nella (3.2):

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} U(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{\beta}{e^{\frac{-\beta}{\alpha T}} - 1}$$

Andando a sostituire i valori di α e β ricavati in precedenza:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{a\nu}{e^{\frac{b\nu}{T}} - 1}$$

Da prove sperimentali si ottengono i valori delle due costanti a e b che, ricordiamo, provengono dall'approssimazione di Wien e che risultano essere non molto distanti da quelli che egli utilizzava per descrivere la propria legge:

$$\begin{cases} a = h \\ b = \frac{h}{k} \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} h \simeq 6,626 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s \\ k \simeq\ 1,380 \cdot 10^{-23}\ J \cdot K^{-1} \end{cases}$$

dove h e k prendono rispettivamente il nome di *costante di Planck* e *costante di Boltzmann*. Interessante notare che entrambe queste costanti fanno ivi la loro prima apparizione. Infatti, anche k non era mai stata esplicitata in precedenza: è lo stesso Planck a nominarla in onore di Boltzmann, riconoscendone un legame con gli studi del fisico austriaco, che l'aveva spesso utilizzata senza mai definirla esplicitamente. Abbiamo dunque l'equazione finale:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \tag{3.11}$$

cioè:

$$U(\nu) = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \tag{3.12}$$

Notiamo che, ancora una volta, per alte frequenze, la formula coincide con quella di Wien, poiché:

$$\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \sim e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

e dunque

$$U(\nu) = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \sim h\nu e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

Come vedremo nel paragrafo seguente, Planck riuscì poi a dare una giustificazione teorica alla validità della sua equazione attraverso l'introduzione di un'ipotesi rivoluzionaria: la discretizzazione dell'energia, una grandeza che avrebbe quindi cessato di esistere come quantità di dominio continuo. Il timore e il sentimento di non accettazione di fronte a questa possibilità spinsero i due fisici britannici John Rayleigh e James Jeans a cercare una formula alternativa, che potesse salvare l'idea di energia fino ad allora conosciuta. Attraverso uno studio di tipo classico del problema, essi ottennero quindi l'espressione:

$$U(\nu) = U = kT$$

Alla base di questa relazione c'era il cosidetto *principio di equipartizione dell'energia*, secondo il quale l'energia media degli oscillatori di frequenza ν è una costante che dipende soltanto dalla temperatura T del sistema, e non dalla frequenza considerata. Tale risultato, noto appunto come *legge di Rayleigh-Jeans*, era però in evidente disaccordo con la teoria; infatti avrebbe restituito un'energia totale infinita, poiché: **(argomento: integrali generalizzati)**

$$E = \int_0^\infty u(\nu, T) \cdot \mathrm{d}\nu = \int_0^\infty \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT \cdot \mathrm{d}\nu = +\infty$$

Questo fatto assunse il nome con il quale è ancora largamente conosciuto di *catastrofe dell'ultravioletto*.

Osserviamo come la relazione planckiana, così come la legge di Wien, scongiurino invece il rischio di divergenza "catastrofica". Infatti, nel caso di Planck, l'energia totale può essere calcolata come: **(argomento: integrali generalizzati)**

$$E = \int_0^{\infty} \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \cdot \mathrm{d}\nu$$

e quindi, al limite per $\nu \to +\infty$, l'esponenziale evita la restituzione di un'energia infinita. Un discorso analogo vale per la l'equazione di Wien. **(argomento: integrazione per parti, limiti e ordine degli infiniti)**

Infine, per ottenere una presentazione alternativa della legge di Planck che è spesso presente in letteratura, è possibile effettuare un cambio di variabile **(argomento: integrali per sostituzione)** per ottenere un'espressione analoga in termini di lunghezza d'onda. Infatti, poiché vale la relazione:

$$\nu = \frac{c}{\lambda}$$

si ha:

$$\mathrm{d}\nu = -\frac{c}{\lambda^2} \cdot \mathrm{d}\lambda$$

da cui:

$$E = -\int_{\infty}^{0} \frac{8\pi c^2}{\lambda^2 c^3} \frac{hc}{\lambda(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1)} \frac{c}{\lambda^2} \cdot \mathrm{d}\lambda$$

cioè:

$$E = \int_0^{\infty} \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \cdot \mathrm{d}\lambda \tag{3.13}$$

3.4 L'interpretazione dei risultati

Il problema della radiazione del corpo nero era stato quindi brillantemente superato, ma solamente dal punto di vista della ricerca della legge di emissione. Ciò che mancava era una spiegazione teorica a tale formula, un modello fisico microscopico che ne giustificasse la validità. É questo il problema su cui Planck concentra i propri sforzi per un paio di mesi e del quale annuncia la soluzione il 14 Dicembre 1900, data a cui si fa classicamente risalire l'inizio della meccanica quantistica. Alla base delle considerazioni del fisico tedesco vi è infatti un'idea del tutto rivoluzionaria: che l'energia non assuma valori continui, bensì discreti. Ripercorriamo dunque le principali tappe del ragionamento.

La prima scelta da effettuare riguarda la grandezza fisica su cui concentrarsi; l'opzione più scontata è considerare l'entropia, dato il ruolo centrale che essa ricopre anche nelle considerazioni precedenti. Per determinarla, occorre però conoscere in quale modo l'energia è distribuita in un certo istante sui vari risonatori. Planck cerca di risolvere il problema introducendo considerazioni di tipo probabilistico, sulla falsa riga di quello che era stato fatto da Boltzmann per interpretare la seconda legge della termodinamica.

Supponiamo quindi che i risonatori alla frequenza ν siano in numero N, quelli alla frequenza ν' in numero N', alla frquenza ν'' in numero N'' e così via, fino a descrivere tutte le possibili frequenze e tutti i risonatori. Ovviamente, data la natura del problema, i numeri N, N', N''... saranno particolarmente alti.
A questo punto, supponiamo che la quantità totale di energia del sistema al tempo t valga E_t. Essa sarà presente in parte nel mezzo (per esempio aria) come radiazione incidente di energia E_1 e in parte nei risonatori come energia di vibrazione E_0, in modo che:

$$E_1 + E_0 = E_t$$

Ora, poiché la distribuzione spettrale dell'energia rappresenta la maniera in cui l'energia totale è suddivisa tra le varie frequenze, occorre determinare il modo in cui essa si ripartisce tra gli oscillatori. Supponiamo[4]:

- energia E per gli N oscillatori a frequenza ν
- energia E' per gli N' oscillatori a frequenza ν'
- energia E'' per gli N'' oscillatori a frequenza ν''
- ...

in modo che:

$$E + E' + E'' + ... = E_0$$

[4]La seguente suddivisione, descritta da Planck in [15, pag.40], sottointende la possibilità per nulla scontata di ripartire l'insieme delle possibili frequenze in un'infinità numerabile di singoletti. Non ha però importanza, ai fini della trattazione, interrogarsi su questo: l'unico dato che ci interessa, infatti, è che, fissata una frequenza ν, esistano N relativi oscillatori nei quali si distribuisca una certa quantità E di energia, il che è certamente vero.

Analizziamo in che modo l'energia E si distribuisce tra gli N oscillatori di frequenza ν. Se essa potesse assumere un range continuo di valori, cioè se si potesse dividerla in parti piccole a piacere, si avrebbero infinite distribuzioni possibili. Ma se ci fosse un limite inferiore a questa suddivisione, cioè se essa fosse in sostanza costituita da un grande numero P di "pacchetti" di una piccolissima quantità ϵ di energia non ulteriormente suddivisibile, in modo che $P \cdot \epsilon = E$, allora le possibili distribuzioni rimarebbero in numero finito. Con le parole dello stesso Planck: "*We consider, however - this is the most essential point of the whole calculation - E to be composed of a well-defined number of equal parts*" [15, pag.40]. Questa è la rivoluzionaria ipotesi di Planck. Essa, in realtà, era già stata utilizzata da Boltzmann per ricavare la distribuzione di energia di un gas all'equilibrio; il fisico austriaco, però, aveva poi concluso portando al limite per $\epsilon \to 0$, riconducendosi quindi ad un dominio continuo. Nel caso di Planck, invece, questo limite non era possibile, in quanto avrebbe ricondotto ad energie infinite.

Dunque occorre determinare in quanti modi un numero $P = \frac{E}{\epsilon}$ di pacchetti di energia ϵ può distribuirsi tra gli N risonatori. Per chiarire le idee, riportiamo un esempio di possibile distribuzione fornito dallo stesso Planck, in cui $N = 10$ e $P = 100$:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	38	11	0	9	2	20	4	4	5

Notiamo che, a priori, è possibile attribuire anche il valore 0 al numero di pacchetti di un singolo oscillatore, e che la somma dei numeri della riga in basso restituisce proprio il totale 100. Ognuno di questi numerosi modi viene chiamato da Planck *complessione*, termine che era già stato utilizzato da Boltzmann per esprimere un concetto simile.
Serve quindi determinare il numero di possibili complessioni, in dipendenza da N e da P. Notiamo che, mentre i pacchetti di energia sono tra loro indistinguibili, gli oscillatori sono distinguibili; dunque una distribuzione con gli stessi valori numerici, ma in cui cambia l'ordine degli elementi della riga in basso, costituisce una complessione diversa rispetto alla precedente. Come effettuare questo calcolo? **(argomento: calcolo combinatorio, permutazioni)**

La situazione corrisponde al classico problema delle *balls into boxes*: in quanti modi posso distribuire P palline in N scatole? É possibile modellizzare la situazione rappresentando, per esempio, le N scatole con $(N-1)$ barrette verticali e le P palline con P asterischi. In questo modo, una qualunque stringa di tutti questi simboli rappresenta una possibile distribuzione. Più precisamente, supponendo per comodità $N = 5$ e $P = 10$, possiamo scrivere una stringa di questo tipo:

$$**\,|\,*\,|\,***\,|\,**|\,**$$

Contando come scatole gli spazi tra due barrette, compresi quelli a sinistra della prima e a destra dell'ultima, questa indica la presenza di 2 palline nella prima scatola, 1 nella seconda, 3 nella terza, ecc. Ovviamente in questo modo è possibile rappresentare anche scatole vuote. Dunque, ogni modo è dato dalle possibili permutazioni di questi $N+P-1$ simboli, che sono:

$$(N+P-1)!$$

A questo punto, poiché permutando tra loro le $N-1$ barrette o le P palline, la complessione non cambia, occorrerà dividere per questi due fattori, ottenendo:

$$\frac{(N+P-1)!}{(N-1)!P!}$$

che coincide con il coefficiente binomiale:

$$\binom{N+P-1}{N-1} = \binom{N+P-1}{P}$$

Dato che N e P sono molto grandi, è possibile approssimare questo numero utilizzando la formula di Stirling, che fornisce una stima di $\ln(x!)$ per $x \to +\infty$: **(argomento: stime asintotiche)**

$$\ln(x!) \sim x \cdot \ln(x) - x$$

Da qui si ricava:

$$x! \sim e^{x\ln(x)-x} = \frac{e^{ln(x)\cdot x}}{e^x} = \frac{x^x}{e^x}$$

Dunque, poiché $N, P >> 1$:

$$\frac{(N+P-1)!}{(N-1)!P!} \sim \frac{(N+P-1)^{N+P-1} \cdot e^{N-1} \cdot e^P}{e^{N+P-1} \cdot (N-1)^{N-1} \cdot P^P} = \frac{(N+P-1)^{N+P-1}}{(N-1)^{N-1} \cdot P^P}$$

Avendo a che fare, come già detto, con numeri molto grandi, possiamo trascurare i termini -1, ottenendo:

$$\frac{(N+P)^{N+P}}{N^N P^P}$$

A questo punto, occorre notare che dividendo E per N, E' per N', E'' per N'' e così via, si ottengono le energie U, U', U''... dei singoli risonatori di ogni gruppo. Quindi:

$$\begin{cases} E = P \cdot \epsilon \\ U = \frac{E}{N} \end{cases} \Rightarrow \quad U = \frac{P \cdot \epsilon}{N} \quad \Rightarrow \quad \frac{P}{N} = \frac{U}{\epsilon}$$

Non rimane che ricavare l'entropia secondo la sua definizione statistica, dovuta allo stesso Boltzmann:

$$S = k \ln W$$

dove k è la costante di Boltzmann e W indica il numero dei possibili modi (microstati) in cui si può realizzare una data configurazione (macrostato). Nel nostro caso i macrostati corrispondono alle possibili distribuzioni energetiche E, E', E''..., mentre i microstati sono dati da tutti i possibili modi in cui ognuno di questi si può realizzare, ovvero dalle possibili complessioni. Dunque, se si vuole calcolare l'entropia S_N degli N risonatori di frequenza ν, corrispondente al macrostato in cui la loro energia totale è pari a $E = P\epsilon$, si avrà:

$$S_N = k \ln \frac{(N+P)^{N+P}}{N^N P^P}$$

Così, dividendo per N, si ottiene l'entropia S di un singolo risonatore:

$$S = \frac{k}{N} \ln \frac{(N+P)^{N+P}}{N^N P^P}$$

Utilizzando le proprietà dei logaritmi:

$$S = k \ln \frac{(N+P)^{1+\frac{P}{N}}}{N P^{\frac{P}{N}}}$$

Poiché, come visto poco sopra, $\frac{P}{N} = \frac{U}{\epsilon}$, si ha:

$$S = k \ln \frac{(N+P)^{1+\frac{U}{\epsilon}}}{N P^{\frac{U}{\epsilon}}}$$

da cui:

$$S = k \ln \frac{(N+P)}{N} \cdot \frac{(N+P)^{\frac{U}{\epsilon}}}{P^{\frac{U}{\epsilon}}} = k \cdot \left(\ln\left(1 + \frac{U}{\epsilon}\right) + \frac{U}{\epsilon} \ln\left(1 + \frac{\epsilon}{U}\right) \right) \tag{3.14}$$

A questo punto ricordiamo che la formula generale di emissione era stata ricavata, nella sezione precedente, come diretta conseguenza dell'equazione (3.9):

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}U} = \frac{\alpha}{\beta}(\ln U - \ln(U+\beta))$$

che coincide, sostituendo i valori α e β ricavati in precedenza, con:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}U} = -\frac{k}{h\nu}(\ln U - \ln(U+h\nu))$$

Dunque non resta che mostrare che se si deriva la (3.14) rispetto ad U si ottiene la medesima equazione. In questo modo saremo riusciti nel prefissato intento di elaborare un modello fisico in grado di dare una spiegazione teorica alla legge di emissione.
Quindi:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}U} &= k \cdot \left(\frac{1}{\epsilon} \frac{1}{1+\frac{U}{\epsilon}} + \frac{1}{\epsilon} \ln\left(1 + \frac{\epsilon}{U}\right) - \frac{U}{\epsilon} \frac{1}{1+\frac{\epsilon}{U}} \frac{\epsilon}{U^2} \right) = \\
&= \frac{k}{\epsilon} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{U}{\epsilon}} + \ln \frac{U+\epsilon}{U} - \frac{1}{1+\frac{U}{\epsilon}} \right) = \\
&= -\frac{k}{\epsilon}(\ln U - \ln(U+\epsilon))
\end{aligned}$$

Le due espressioni coincidono nel caso in cui ϵ, la quantità elementare di energia, sia uguale ad $h\nu$. Tale valore è in linea sia con il dato dimensionale, in quanto $h\nu$ rappresenta un'energia, sia con l'ipotesi di elementarietà del pacchetto, in quanto la costante h rende tale quantità molto piccola. Dunque, ponendo:

$$\epsilon = h\nu$$

il ragionamento è concluso.

Capitolo 4

La quantizzazione di Heisenberg

"The fact that the orbital frequencies of the electrons could not coincide with the frequencies of the radiation emitted by the atom, was felt even by Bohr himself to be an almost intolerable contradiction". (W.Heisenberg) [5, pag.2]

In questo capitolo saranno discusse alcune delle conseguenze storiche della scoperta di Planck, a partire dal modello atomico ipotizzato da Niels Bohr nel 1913. Se ne studierà la struttura, costituita da livelli energetici discreti, e se ne metteranno in luce i limiti. Si esaminerà quindi la condizione di quantizzazione di Sommerfeld del 1916, che generalizza il concetto di quantizzazione per qualunque sistema meccanico periodico utilizzando come nuova grandezza fisica fondamentale l'*azione*. In seguito si ripercorreranno le principali tappe del ragionamento che Heisenberg sviluppa nel lavoro del 1925 [12], per argomentare come la fisica quantistica conduca al superamento della condizione di Sommerfeld e del modello atomico di Bohr. Fra i tanti aspetti che si potevano sottolineare, si è deciso di concentrare l'analisi su un elemento che più di altri evidenzia come la matematica abbia guidato un processo di profondo cambiamento di prospettiva. Ci si focalizzerà infatti sull'utilità di uno strumento matematico come il "prodotto fra tabelle" nel riuscire a formalizzare un modo nuovo di guardare ai processi: da una loro descrizione spaziotemporale concentrata sull'idea intuitiva di traiettoria, a una loro descrizione in termini di "transizione di stati" che faccia riferimento solo a grandezze osservabili. Infine si analizzerà il modo in cui Born e Jordan hanno saputo riconoscere nel lavoro di Heisenberg i collegamenti al calcolo matriciale [27, pag.277], per ottenere

una migliore matematizzazione del modello ed arrivare alla legge di quantizzazione nella forma $qp - pq = i\hbar$.
Anche in questo capitolo, come nel precedente, saranno evidenziati in grassetto gli strumenti matematici coinvolti nella trattazione, al fine di poter essere poi utilizzati in un eventuale approccio di tipo didattico.

4.1 L'atomo di Bohr

Il primo a saper sfruttare in maniera significativa la rivoluzionaria scoperta di Planck fu Niels Bohr, che lavorò nel tentativo di costruire un modello della struttura dell'atomo capace di dar conto dei diversi aspetti dell'evidenza sperimentale che si erano andati ad accumulare nei decenni precedenti.

Nei primissimi anni del XX secolo, infatti, l'atomo era pensato come formato da una carica positiva diffusa, con cariche negative sparse al suo interno. Tale modello, dovuto a Joseph Thomson e detto *a panettone*, aveva visto un netto superamento nel 1911, quando le ricerche di Rutherford avevano svelato la presenza di un nucleo centrale attorno al quale ruotano particelle elementari chiamate elettroni. Questa rivoluzione introdusse però dei gravi problemi di coerenza fisica, legati all'irraggiamento che secondo l'elettromagnetismo classico dovrebbe prodursi a seguito dei movimenti accelerati delle cariche. La grande eredità lasciata da Maxwell era stata infatti la scoperta che delle correnti variabili nel tempo producono onde elettromagnetiche. Ora, prima di Rutherford, questa proprietà non comportava alcun problema di principio, in quanto si ipotizzavano movimenti interni che avessero come conseguenza proprio le frequenze osservate allo spettroscopio; in pratica si assumeva che in ogni atomo le particelle potessero eseguire movimenti di tipo elastico (per esempio oscillazioni lineari) proprio caratterizzati dalle frequenze osservate, sicché il modello era ottenuto a posteriori, sulla base dei dati a disposizione. Ma dopo l'introduzione dell'atomo di Rutherford, la situazione cambiò. Infatti non erano più ipotizzabili moti arbitrari, perché il modello prevedeva un preciso movimento degli elettroni attorno al nucleo, dipendente dalle forze coulombiane di attrazione e repulsione tra le particelle. Il problema stava nel fatto che le righe spettrali osservate non coincidevano con quelle previste dall'elettromagnetismo classico, attribuite al moto accelerato delle cariche.

Lavorando proprio su questa "*intolerable contradiction*", Bohr riuscì a servirsi della discretizzazione dell'energia introdotta da Planck per risolvere il problema, ottenendo una spiegazione anche per altre questioni fondamentali, legate perlopiù alla stabilità delle particelle atomiche. In particolare, egli pensò che, così come gli oscillatori del corpo nero potevano assumere soltanto valori discreti di energia, anche l'elettrone di un atomo poteva ruotare solo su particolari orbite corrispondenti a valori discreti dell'energia di legame col nucleo. Questa ipotesi era in grado di risolvere, tra le altre cose, l'annoso problema dell'interazione dell'atomo con la radiazione elettromagnetica, in particolare l'origine e la distribuzione delle linee spettrali. La supposizione di Bohr, che prende il nome di *legge delle frequenze*, fu la seguente:

La radiazione è emessa o assorbita da un atomo solo quando l'elettrone effettua una "transizione" (salto quantico) tra due livelli energetici.

La frequenza della radiazione emessa o assorbita è quindi legata esclusivamente alla differenza fra le energie dei due livelli che l'elettrone occupa prima e dopo la transizione; in formula [26, pag.136]:

$$\nu_{nm} = \frac{E_n - E_m}{h} \tag{4.1}$$

dove h è la costante di Planck. La conseguenza, decisamente sconcertante dal punto di vista teorico, era che la (4.1) spezzava ogni possibile legame tra la periodicità del moto di rotazione dell'elettrone e la frequenza della radiazione emessa o assorbita. Non c'erano, in altre parole, frequenze del moto di rotazione, o delle sue componenti armoniche lungo un qualsiasi sistema di coordinate del piano di rotazione, che corrispondessero alle frequenze a cui l'atomo è "sensibile". Il modello di Bohr risultava quindi in netta contraddizione sia con la meccanica sia con l'elettrodinamica classiche, poiché da un lato faceva riferimento a concetti classici come le orbite di energia E_n, mentre dall'altro doveva ammettere, contro l'elettromagnetismo classico, che in corrispondenza delle orbite quantizzate non si avesse irraggiamento di energia. Il suo successo era invece dovuto alla straordinaria capacità di spiegare diversi fatti sperimentali: dagli spettri di emissione e assorbimento dell'idrogeno, agli esperimenti di Franck ed Hertz, ai fenomeni di risonanza ottica e di fluorescenza.

A questo punto, per capire i successivi sviluppi del modello di Bohr ed arrivare al fondamentale lavoro di Heisenberg, occorre però fare qualche breve richiamo su alcuni concetti basilari di fisica matematica [1].

4.2 Brevi richiami di fisica matematica

Il *numero dei gradi di libertà* di un sistema meccanico è il numero di variabili indipendenti necessarie e sufficienti a determinarne univocamente la posizione nello spazio. Si indica solitamente con la lettera d. Un sistema di *coordinate generalizzate* è un insieme di coordinate, di numero pari (o superiore) ai gradi di libertà, che determina univocamente lo stato del sistema.

Per fare un banale esempio, la posizione di un punto nel piano può essere descritta dalle coordinate spaziali classiche (x, y), così come da quelle polari (ρ, θ). Se si vuole descrivere un moto, queste variabili avranno una dipendenza dal tempo, ovvero $(x, y) = (x(t), y(t))$ e $(\rho, \theta) = (\rho(t), \theta(t))$. **(argomento: sistemi di coordinate)**

Il vettore delle coordinate generalizzate si indica solitamente con la lettera q e si scrive:

$$q = (q_1, q_2, ..., q_d)$$

La sua derivata rispetto alla variabile temporale si denota invece usualmente con $\dot{q}$, cioè:

$$\dot{q} = \left(\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t}, ..., \frac{\mathrm{d}q_d}{\mathrm{d}t}\right) = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_d)$$

Nel caso di un sistema dinamico che non presenti vincoli dipendenti dal tempo, si definisce infine *Hamiltoniana* di tale sistema la funzione delle due variabili q e p (con $p := m\dot{q}$ quantità di moto) che ne esprime l'energia totale. Il suo valore sarà quindi dato dalla somma fra l'energia cinetica T e quella potenziale V. In simboli:

$$H(p, q) = T + V = E$$

L'Hamiltoniana è quindi una funzione che caratterizza la dinamica di un sistema fisico. Vediamola attraverso un esempio che ci interessa particolarmente: il caso dell'oscillatore armonico.

Esempio 1. (L'oscillatore armonico)
Consideriamo il caso di un punto materiale di massa m che si muova di moto armonico unidimensionale. Per descriverlo è quindi sufficiente una coordinata q, che sarà quella spaziale. In questo modo $\dot{q}$, derivata di q rispetto al tempo, non sarà altro che la velocità del punto. L'energia cinetica diventa allora:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$$

L'energia potenziale, invece, dipende solamente dalla posizione e non dalla velocità. In particolare:

$$V(q) = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \tag{4.2}$$

dove ω è costante ed indica la frequenza angolare dell'oscillatore ($\omega = 2\pi\nu$). Di conseguenza, poiché non ci sono vincoli dipendenti dal tempo, l'Hamiltoniana assume la forma:

$$H = E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + V(q) = \frac{1}{2}m\frac{p^2}{q^2} + V(q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

Osserviamo che se si fissa un livello energetico costante E, considerando che l'energia potenziale è sempre minore di quella totale, si ha:

$$V(q) < E$$

da cui, utilizzando la (4.2) e notando che le quantità in gioco sono tutte positive:

$$q^2 < \frac{2E}{m\omega^2}$$

Se ne deduce che il moto $q(t)$ dell'oscillatore avviene tra due posizioni $q_-(E)$ e $q_+(E)$, dette *punti di inversione*, tali che:

$$\begin{cases} q_-(E) = -\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \\ q_+(E) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \end{cases} \tag{4.3}$$

4.3 Tra Planck e Heisenberg: Sommerfeld

La ricerca sul modello di Bohr continuò per più di un decennio. I suoi obiettivi caratterizzavano una tipica fase di transizione in cui le conoscenze classiche erano integrate da opportune ipotesi di quantizzazione, che ne modificavano la struttura. Si cercava infatti di limitare il più possibile la portata delle ipotesi di quantizzazione, applicandole ad un modello che preservasse aspetti essenziali della meccanica e dell'elettrodinamica classiche. Per esempio, l'elettrone dell'atomo di idrogeno non poteva che essere attratto da una forza coulombiana diretta verso il nucleo e proporzionale a $\frac{e^2}{r^2}$, con e carica dell'elettrone ed r uguale alla distanza tra elettrone e nucleo. Come si è detto, trattandosi di una forza di tipo newtoniano, la conclusione più ovvia era che l'elettrone si comportasse in modo "kepleriano", compiendo orbite ellittiche attorno al nucleo a ciascuna delle quali doveva essere attribuito un momento angolare costante. La quantizzazione dell'energia descritta da Bohr esprimeva semplicemente il fatto che, per l'atomo di idrogeno, tra tutte le orbite meccanicamente possibili erano ammesse solo quelle cui corrispondevano determinati valori dell'energia. Essa riduceva quindi drasticamente la molteplicità infinitamente continua delle orbite ammissibili in linea di principio in base al modello classico. In termini analitici, questa assunzione prese, nel 1915, la forma della cosiddetta *regola di quantizzazione di Sommerfeld*, che si poggiava essenzialmente sulla meccanica analitica nella formulazione hamiltoniana. La condizione di quantizzazione era infatti la seguente:

$$I := \oint p \cdot \mathrm{d}q = nh$$

dove il simbolo $\oint$ indica la *circuitazione*, ovvero l'integrale lungo una curva chiusa, mentre $n \in \mathbb{N}$. La grandezza I prende il nome di *azione* del sistema. Questa condizione è però evidentemente valida solo per quei sistemi meccanici per cui ha senso parlare di moto lungo una curva chiusa, cioè per i cosiddetti *sistemi periodici*, come ad esempio l'oscillatore armonico. Notiamo che la relazione, che si propone come necessaria e sufficiente alla descrizione delle grandezze quantizzate di un sistema meccanico, è in sostanza una condizione sull'azione; è la discretizzazione di questa grandezza che provoca quella di altre come, per esempio, l'energia. Vediamolo nel dettaglio, limitandoci al caso dell'oscillatore armonico.

Come già visto nella sezione precedente, l'Hamiltoniana di un oscillatore armonico vale:

$$H(p,q) = E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

Applichiamo la condizione di Sommerfeld:

$$\oint p \cdot \mathrm{d}q = nh$$

Affinché il moto avvenga lungo una linea chiusa, è necessario fissare un livello energetico E che comporti, come visto al termine dell'esempio precedente, un moto periodico tra le due posizioni $q_-(E)$ e $q_+(E)$. Ricordiamo quindi che:

$$q_-(E) = -\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \qquad \text{mentre} \qquad q_+(E) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$$

Per quanto riguarda la coordinata p, essendo $E = \frac{p^2}{2m} + V(q)$, si ha invece:

$$p = \pm\sqrt{2m(E - V(q)}$$

Ora, poiché il moto è periodico nell'intervallo di estremi $q_\pm(E)$, il punto materiale si muoverà da q_- a q_+ con un segno della radice, e con il segno opposto nel tornare indietro, sicché:

$$\oint p \cdot \mathrm{d}q = 2\int_{q_-(E)}^{q_+(E)} \sqrt{2m(E - V(q)} \cdot \mathrm{d}q$$

Di conseguenza, l'equazione da cui si vuole ricavare l'energia E è la seguente:

$$2\int_{-\frac{\sqrt{2E}}{\sqrt{m}\omega}}^{\frac{\sqrt{2E}}{\sqrt{m}\omega}} \sqrt{2m(E - V(q)} \cdot \mathrm{d}q = nh$$

Operando la sostituzione $u = \frac{\sqrt{m}\omega}{\sqrt{2E}}q$ e sapendo che $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2} \cdot du = \frac{\pi}{2}$, si trova:

$$\frac{2\pi E}{\omega} = nh$$

da cui si ricava la quantizzazione dell'energia:

$$E = n\hbar\omega$$

dove $\hbar = \frac{h}{2\pi}$. Notiamo che, poiché la frequenza angolare ω è legata alla frequenza ν dalla relazione $\omega = 2\pi\nu$, si ritrova proprio:

$$E = nh\nu$$

che coincide meravigliosamente con l'energia ricavata da Planck attraverso il modello microscopico delle complessioni, in quanto l'energia di ogni oscillatore era la somma di un certo numero (per forza naturale) di pacchetti di energia $h\nu$.

Abbiamo quindi visto come la condizione postulata da Sommerfeld, apparentemente scollegata dalla scoperta di Planck, ne costituisca in realtà una generalizzazione. È interessante notare come il legame sia in verità ancora più profondo, dal momento che la funzione densità[1] $u(\nu, T)$ è ricavibile in maniera ancora più diretta dalla condizione di quantizzazione, evitando il ricorso esplicito alla teoria delle complessioni e al calcolo combinatorio. La dimostrazione si trova in appendice B.

Le condizioni di Sommerfeld trovarono un'immediata conferma nello studio degli spettri, in particolare nel già noto effetto Zeeman, che mostrava una moltiplicazione ("splittamento") delle righe quando il gas incandescente era immerso in un campo magnetico uniforme diretto in una determinata direzione. Ogni singola riga si sdoppiava in due o più righe, ma lo spettro continuava ad essere discreto. Non si può fare a meno di sottolineare, infine, quanto il contributo di Sommerfeld e la focalizzazione sull'azione abbiano permesso di ottenere, oltre al numero n riconducibile all'energia, altri numeri quantici, quali l ed m, legati rispettivamente al quadrato del modulo del momento angolare e alla componente L_z del momento angolare lungo un asse.

4.4 Il lavoro di Heisenberg

Come già accennato, la condizione di quantizzazione di Sommerfeld era valida solo per sistemi periodici; la preoccupazione di Heisenberg è quindi quella di trovare una relazione ancora più generale, che sia valida per un sistema meccanico qualunque. Ma non era questo l'unico problema da superare: la ragione principale dell'insufficienza della teoria di Bohr-Sommerfeld, secondo Heisenberg, oltre ai già accennati elementi contraddittori nei confronti dell'elettromagnetismo classico, è il fatto che essa tratti quantità che eludono completamente l'osservazione [4, pag.168]. Così, la teoria parla dell'orbita e della velocità di un elettrone attorno al nucleo, senza prendere in considerazione il fatto che

[1] Da pagina 20, capitolo 3 di questa tesi.

non possiamo determinare la posizione dell'elettrone in un atomo senza frantumare con ciò stesso l'intero atomo. Infatti, per definire la posizione dell'elettrone con una qualche precisione entro l'atomo (il cui diametro è dell'ordine di grandezza di pochi ångström), dobbiamo osservare l'atomo con luci di lunghezza d'onda nettamente più piccola del diametro dell'atomo, cioè dobbiamo irradiarlo con raggi X estremamente duri e con raggi γ, e ciò ne modificherebbe la struttura. Quindi, secondo Heisenberg, la teoria di Bohr cade perché le idee fondamentali su cui è basata (il modello orbitale, la validità delle leggi classiche del moto, e così via) non possono essere controllate: "*In this situation it seems sensible to discard all hope of observing hitherto unobservable quantities, such as the position and period of electron, and to concede that the partial agreement of the quantum rules with experience is more or less fortuitous. Instead it seems more reasonable to try to establish a theoretical quantum mechanics, but in which only relations between observable quantities occur*"[27, pag.262]. Secondo il fisico tedesco, la teoria precedente si muove quindi in una regione di là dall'esperienza e non dobbiamo perciò sorprenderci se, costruita com'è su un fondamento di ipotesi che non possono essere provate sperimentalmente, fallisce in parte in quelle conseguenze che possono essere sottoposte alla prova dell'esperienza.

Heisenberg si mette così al lavoro, finché il 29 luglio 1925, dopo quella che egli stesso chiama *un'improvvisa illuminazione*, riesce nel suo intento di fabbricare una meccanica quantistica. Ed è proprio il punto di partenza a costituire la chiave del ragionamento: occorre svincolarsi da concetti come la legge oraria o la traiettoria dell'elettrone, che come visto restituiscono risultati contradditori, per concentrarsi solamente sulle quantità osservabili, cioè sulle righe spettrali di emissione dell'atomo, ricordando però che queste non si riferiscono a stati bensì a transizioni tra stati. Come riportano anche Fedak e Prentis [10], è questa constatazione che conduce Heisenberg a reinterpretare la meccanica classica, a partire dal significato di posizione. Il ragionamento parte dall'analisi di un sistema periodico classico. Il vettore delle coordinate generalizzate q era determinato da una una serie di Fourier del tipo:

$$q(t, n) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} a_\alpha(n) e^{i\alpha\omega(n)t}$$

dove n indica lo stato stazionario considerato e $a_\alpha(n) \in \mathbb{R}$ **(argomento: numeri complessi in forma esponenziale e funzioni periodiche)**. La serie viene da Heisenberg modificata per inserire la sua nuova osservabile: la transizione da uno stato all'altro. Come scrivono Fedak e Prentis: "*Motivated by this principle, Heisenberg replaced the classical component* $a(n)e^{i\alpha\omega(n)t}$ *by the transition component* $a(n, n-\alpha)e^{i\omega(n,n-\alpha)t}$. *We could say that the Fourier harmonic is replaced by a "Heisenberg harmonic""*.

L'aspetto più ingegnoso sta però nell'osservare che la serie, benché sia significativa in meccanica classica, non ha nessun significato come sommatoria di "processi di transizione". Heisenberg, quindi, assume che la posizione debba essere rappresentata da un insieme contenente le osservabili:

$$q(t) = q_{n,n-\alpha}(t) = a(n, n-\alpha)e^{i\omega(n,n-\alpha)t}$$

Per il lavoro di Heisenberg è stato fondamentale il cosiddetto *principio di Rydberg-Ritz*, datato 1908. Esso afferma che se vengono osservate due righe con certe frequenze, allora è possibile osservare anche la riga con la frequenza somma. Matematizzando la questione, il principio ci dice che in generale, la frequenza angolare ω_{nm} di ogni riga spettrale è individuata da due numeri naturali[2] m ed n tali che:

$$\omega_{nm} = \omega_{nk} + \omega_{km}$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Questa relazione, consistente con la regola (4.1) di Bohr riguardante le transizioni, guida Heisenberg nell'introduzione di una nuova struttura algebrica della fisica quantistica. Dunque, poiché ad ogni frequenza è associata una riga spettrale, e ad ogni riga una transizione tra due stati, le ampiezze di transizione $a_\alpha(n, n-\alpha)$ saranno individuate da due numeri n ed $m = n - \alpha$. Se quindi consideriamo tutte le possibili righe spettrali del sistema, disponiamo di una tabella infinita di ampiezze, ciascuna delle quali occupa il posto che si trova all'n-esima riga ed m-esima colonna della griglia **(argomento: schematizzazione di dati)**. Dunque Heisenberg non fa altro che ammettere che il sistema in studio sia rappresentato, nella sua totalità, dall'insieme di tutte le righe spettrali con le corrispondenti frequenze ed ampiezze di transizione. A questo punto, la

[2] Anche se in generale ognuno di questi due numeri può dipendere da un insieme di più numeri.

reinterpretazione della meccanica classica si va a scontrare con il problema di definire la moltiplicazione tra queste "tabelle", visto che la grandezza $q^2(t)$ è, per esempio, fondamentale per la definizione dell'energia di un oscillatore anarmonico. In altre parole se alla grandezza $q(t)$ è associata la tabella q_{nm} quale tabella dobbiamo associare alla grandezza $q^2(t)$? E' qui che il risultato di Rydberg-Ritz svolge un ruolo fondamentale. Vediamo i passaggi nel dettaglio. Consideriamo solamente la fase temporale di un generico elemento $q_{nm}(t)$, ovvero la sua parte dipendendente dal tempo, che corrisponde a $e^{i\omega_{nm}t}$. Applicando il principio di Rydberg-Ritz al prodotto tra le fasi temporali di due elementi q_{nk} e q_{km}, si ha: **(argomento: l'esponenziale come funzione di isomorfismo tra i gruppi $(\mathbb{R},+)$ e $(\mathbb{R}^+,\cdot)$)**

$$e^{i\omega_{nk}t}e^{i\omega_{km}t} = e^{i(\omega_{nk}+\omega_{km})t} = e^{i\omega_{nm}t} \tag{4.4}$$

A questo punto Heisenberg esprime una richiesta, motivata da considerazioni di tipo teorico [5, pag.17]: che la fase temporale di ogni elemento $q^2_{nm}(t)$ sia la stessa dell'elemento $q_{nm}(t)$. Così impone:

$$q^2_{nm}(t) = \sum_k q_{nk}(t)q_{km}(t) \tag{4.5}$$

Infatti, in questo modo:

$$q^2_{nm}(t) = \sum_k a_{nk}e^{i\omega_{nk}t} \cdot a_{km}e^{i\omega_{km}t} = \sum_k a_{nk} \cdot a_{km} \cdot e^{i\omega_{nk}t} \cdot e^{i\omega_{km}t}$$

Utilizzando la (4.4):

$$q^2_{nm}(t) = \sum_k a_{nk} \cdot a_{km} \cdot e^{i\omega_{nm}t}$$

A questo punto l'esponenziale si può portare fuori dalla sommatoria, poiché non dipende più da k, ottenendo:

$$q^2_{nm}(t) = e^{i\omega_{nm}t}\Big(\sum_k a_{nk} \cdot a_{km}\Big)$$

In conclusione, la fase temporale $e^{i\omega_{nm}t}$ di $q^2_{nm}(t)$ coincide esattamente con quella di $q_{nm}(t)$, come da richiesta.

È a partire da questo impianto teorico, attraverso una serie di altri calcoli e considerazioni, che Heisenberg arriva infine alla propria legge di quantizzazione, relativa al moto di un punto materiale di massa m:

$$2m\sum_{k=0}^{\infty}(|q_{n+k,n}|^2\omega_{n+k,n}-|q_{n,n-k}|^2\omega_{n,n-k})=\hbar$$

Questa formula è nota come *regola di quantizzazione di Heisenberg* e costituisce, come egli stesso afferma, una "reinterpretazione" della condizione di Sommerfeld.

Per concludere, merita sottolineatura un fatto di cui Heisenberg si accorse fin da subito: il "prodotto tra tabelle", che aveva definito tramite la (4.5), non era commutativo. Ciò significa che, prese due tabelle qualunque A e B, si ha in generale:

$$AB-BA\neq 0$$

Questa osservazione, lasciata cadere dal fisico tedesco, verrà poi portata a compimento da Born-Jordan e Dirac, e sarà il punto chiave del principio di indeterminazione.

4.5 Da tabelle a matrici: Born e Jordan

"And one morning, about the 10 July 1925, I suddenly saw light: Heisenberg's symbolic multiplication was nothing but the matrix calculus, well known to me since my student days from the lectures of Rosanes in Breslau". (M.Born) [21, pag.9]

Analizziamo ora l'evoluzione della condizione di quantizzazione di Heisenberg operata da Born e Jordan. Nell'introduzione all'articolo "*On Quantum Mechanics*"[27, pag.277], datato 27 settembre 1925, i due scienziati scrivono: "*The mathematical basis of Heisenberg's treatment is the law of multiplication of quantum-theoretical quantities, which he derived from an ingenious consideration of correspondence arguments. The development of this formalism, which we give here, is based upon the fact that this rule of multiplication is none other than the well-known mathematical rule of matrix multiplication. [...] The mathematical method of treatment inherent in the new quantum mechanics is thereby characterized through the employment of matrix analysis in place of the usual number analysis*".

A questo punto occorre notare che, sebbene si abbiano tracce dell'utilizzo di tabelle di numeri sin da qualche secolo prima della nascita di Cristo, il termine "matrice" fa la sua comparsa nel 1848, per opera dell'avvocato e matematico inglese Sylvester. Dieci anni dopo, Arthur Cayley fornisce le prime definizioni di operazioni con le matrici, compresi il prodotto e l'inversione. Ci sono quindi circa 70 anni tra il lavoro di Heisenberg e la nascita del calcolo matriciale. Risulta dunque strano che il fisico tedesco non disponesse delle basi matematiche in questione; può essere che non ne fosse venuto a conoscenza perché impegnato in studi di altro genere.

Il primo capitolo dell'opera di Born e Jordan costituisce allora una vera e propria guida all'algebra delle matrici. In esso troviamo: la definizione di matrice, l'uguaglianza e la somma di matrici, il prodotto righe per colonne, l'associatività e la distributività, la non commutatività del prodotto (di fondamentale importanza), le definizioni di matrice identità, di inversa e di traccia di una matrice.

Inizia poi il lavoro vero e prorio. Si parte dalla condizione di Sommerfeld, per introdurre così il "nuovo" formalismo. Alla luce di esso vengono rivistate le principali formule di Heisenberg, con lo scopo di ottenere vantaggi sia formali che teorici. In particolare:

- la regola di moltiplicazione, di cui abbiamo già ampiamente discusso, diventa un prodotto righe per colonne;
- la funzione delta di Kronecker, che Heisenberg spesso usa nei propri conti, assume la nuova forma di matrice identità;
- la teoria delle matrici autoaggiunte, come quelle utilizzate da Heisenberg, si inserisce semplificando notevolmente i calcoli.

Grazie a queste considerazioni, Born e Jordan arrivano infine alla relazione:

$$\sum_k (q_{nk}p_{kn} - p_{nk}q_{kn}) = i\hbar$$

che fornisce tutte le relazioni che costituiscono la parte diagonale (elementi nn) dell'espressione matriciale:

$$qp - pq = i\hbar \tag{4.6}$$

È proprio questa la nota regola di commutazione per gli operatori p e q, alla quale Born e Jordan arrivano al termine del loro lavoro. C'è da notare che, sebbene l'uguaglianza nasca come relativa ai soli elementi della diagonale, essa ha in realtà un valore generale: infatti si riesce a dimostrare che i restanti elementi della matrice $qp - pq$ sono tutti nulli; ciò implica che la scrittura $i\hbar$ della (4.6) va intesa in senso matriciale come $i\hbar 1$, dove 1 indica l'operatore identità.
Inoltre, essendo il termine $i\hbar$ diverso da zero, possiamo considerare l'uguaglianza come un'espressione della non commutatività del prodotto tra matrici.

Come anticipato a pagina 44, le due matrici p e q hanno in realtà infiniti elementi, cioè, sono operatori su spazi vettoriali infinito dimensionali. Infatti, per matrici quadrate di ordine N, vale la seguente proprietà:

$$Tr(AB) = Tr(BA)$$

dove Tr indica la traccia di una matrice. Applicata alla (4.6), essa resituirebbe:

$$0 = Tr(qp) - Tr(pq) = Tr(qp - pq) = Tr(i\hbar) = Ni\hbar$$

che è evidentemente assurdo. La (4.6) è quindi in sè un inisieme di infinite relazioni; tale fatto ci può provocare meraviglia, se confrontato con la compattezza della notazione.

Come nel caso di Planck, anche la grande rivoluzione dovuta all'introduzione della meccanica matriciale di Heisenberg, Born e Jordan si è aperta con un problema fenomenologico (l'interpretazione degli spettri atomici) e, di fatto, ha le sue basi in un "azzardo" matematico. Tale azzardo, in entrambi i casi, si manifesta come una modifica della struttura formale nota, solo successivamente reinterpretata. Questi due passaggi sono spesso citati nella didattica della fisica ma mai sviscerati veramente. Mostrare, almeno ai futuri insegnanti, quei punti precisi in cui l'azzardo nella struttura matematica si colloca è, invece, culturalmente molto significativo anche per evidenziare esempi di come la creatività e l'intuizione scientifiche entrino nel processo di costruzione delle teorie e come le nuove visioni del mondo nascano.

Capitolo 5

Per lavorare in classe

Le facciate seguenti contengono alcune schede per una possibile esercitazione da proporre in classe, relativa agli argomenti matematici del quinto anno di liceo scientifico. Tali temi sono affrontati all'interno di un cammino di fisica che ripercorre le tappe fondamentali per la scoperta da parte di Planck della legge di emissione del corpo nero, sulla falsa riga di quanto visto nel capitolo 3 di questa tesi. Alle schede per gli studenti è affiancata una guida per l'insegnante, che mette in evidenza gli specifici argomenti che ciascun esercizio coinvolge e fornisce, per ognuno di essi, soluzioni dettagliate. In particolare i problemi proposti sono divisi in due parti: la prima riguarda gli argomenti classici dell'analisi di quinta liceo (limiti, derivate, integrali ed equazioni differenziali), mentre la seconda si concentra su problemi di calcolo combinatorio.

Le schede sono state utilizzate il giorno 23 Maggio 2016 all'interno di un'attività di cooperative learning a cui hanno partecipato gli studenti del corso in Didattica della Fisica dell'Università di Bologna, sotto la supervisione della professoressa Olivia Levrini. Lo scopo dell'attività era quello di introdurre il tema della radiazione di copro nero, e quindi della nascita della meccanica quantistica, attraverso cinque chiavi di lettura: linguistica, epistemologica, storiografica, analogica e, appunto, matematica.

LA MATEMATICA DEL CORPO NERO

A cavallo del 1900, l’attenzione di fisici importanti di tutta Europa era indirizzata ad un problema fondamentale: determinare una legge che descrivesse la densità di energia della radiazione emessa da un corpo nero a temperatura costante, cioè da un corpo in grado di assorbire tutta la radiazione ad esso incidente, senza rifletterla. Il problema è stato oggetto di riflessioni, tentativi e dibattiti che hanno portato al modello di Planck. Il tutorial, seguendo un ordine logico e non cronologico, è finalizzato a mettere in evidenza le peculiarità matematiche del modello di Planck, anche a confronto con altri modelli, basati su diverse ipotesi fisiche.

1- La legge di Rayleigh-Jeans

Un’ipotesi dovuta ai fisici britannici Rayleigh e Jeans prevedeva la seguente *funzione densità*:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT$$

In questa formula, e anche nel seguito, υ rappresenta una frequenza d’onda elettromagnetica, T la temperatura del corpo, c la velocità della luce nel vuoto e k la costante di Boltzmann.
In generale, l’energia totale si ottiene mediante la relazione:

$$E = \int_0^{+\infty} u(\nu, T)\, d\upsilon$$

Dimostra che la legge di Rayleigh-Jeans non può essere accettabile, in quanto restituisce un’energia infinita.

2- La distribuzione di Wien

La proposta dei tedeschi Wien e Paschen fu invece la seguente:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} a e^{-\frac{b\upsilon}{T}}$$

con a e b costanti positive. Questa funzione non pone il problema della divergenza all’infinito, ma è in accordo con i dati sperimentali solo per alte frequenze. Perché possiamo concludere che l’energia complessiva in questo caso è finita? Fornisci una dimostrazione.

3- La legge dello spostamento di Wien

La *legge dello spostamento* di Wien afferma che la lunghezza d'onda λ_0 per cui è massima l'energia di radiazione emessa è inversamente proporzionale alla temperatura del corpo.
Utilizzando la densità di energia dell'esercizio precedente, verifica questa affermazione, ricordando che frequenza e lunghezza d'onda sono legate dalla relazione $\upsilon = \frac{c}{\lambda}$.

4- La distribuzione di Planck

La funzione densità proposta da Planck si rifà ad un vero e proprio modello della cavità di corpo nero: un insieme di n identici oscillatori armonici, detti risonatori, che assorbono ed emettono radiazione della stessa frequenza con cui oscillano. Calcolando l'incremento di entropia sia con considerazioni di tipo sia statistico che elettromagnetico, Planck trova la seguente relazione:

$$f(nU) = \frac{1}{n} f(U)$$

in cui U indica l'energia del singolo risonatore, mentre la funzione $f(U) = -\frac{3}{5}\frac{d^2S}{dU^2}$ coinvolge l'entropia S del singolo risonatore. A partire da tale relazione, arriva a dimostrare che $f(U)$, cioè la derivata seconda dell'entropia rispetto all'energia interna, è inversamente proporzionale a U: la stessa relazione si può ottenere a partire dalla distribuzione di Wien e convince Planck della - almeno parziale - validità di tale distribuzione. Prova a ricostruire i passaggi della dimostrazione, seguendo le indicazioni. Differenziando rispetto ad n, si ottiene:

Sostituendo ad $f(U)$ l'espressione che è possibile ricavare dalla prima equazione di questo esercizio, si arriva ad un'equazione differenziale a variabili separabili. Risolvila e dimostra che essa ha come conseguenza l'esistenza di una costante α tale che:

$$\frac{d^2S}{dU^2} = \frac{\alpha}{U}$$

5- L'ipotesi cruciale

La funzione di densità proposta da Planck è coerente con la legge di Wien e pone quindi lo stesso problema di aderenza ai dati sperimentali. Planck decide dunque di modificarla, introducendo un termine β direttamente proporzionale alla frequenza υ. Cercando di mantenere la semplicità della formula, desidera da un lato recuperare l'equazione di Wien relativamente alle alte frequenze (cioè per β grande), mentre per basse frequenze (β piccolo) decide di farsi guidare dall'idea, motivata da considerazioni di tipo statistico, che S dipenda in modo logaritmico da U. Tra le seguenti leggi, tutte ottenibili con semplici modifiche della formula determinata nell'esercizio precedente, quella proposta da Planck è la D). Prova a spiegare, alla luce delle considerazioni appena fatte, per quale motivo è preferibile alle altre.

$A)\ \frac{d^2S}{dU^2} = \frac{\alpha(\beta+U)}{U}$ $\qquad C)\ \frac{d^2S}{dU^2} = \frac{\alpha}{U\beta}$

$B)\ \frac{d^2S}{dU^2} = \frac{\alpha\beta}{U^2}$ $\qquad D)\ \frac{d^2S}{dU^2} = \frac{\alpha}{U(\beta+U)}$

6- La Planckiana

Sapendo che:

$$\frac{dS}{dU} = \frac{1}{T}$$

determina, a partire dalla relazione corretta tra quelle proposte nell'esercizio precedente, il valore dell'energia U di un singolo risonatore.

Le costanti α e β che compaiono nella formula furono determinate per via sperimentale: $\alpha = -k$ e $\beta = h\upsilon$, dove k e h sono rispettivamente le costanti di Boltzmann e Planck. Sostituisci tali costanti all'energia ricavata nell'esercizio precedenze e utilizza la formula generale $u(\nu,T) = \frac{8\pi\upsilon^2}{c^3}U$ per ottenere l'espressione della densità secondo il modello sviluppato da Planck.

7- La legge di Stefan-Boltzmann

La legge di Stefan-Boltzmann afferma che ogni corpo alla temperatura T emette un'energia totale proporzionale alla quarta potenza della sua temperatura. Dimostra questa affermazione, utilizzando la densità di energia trovata da Planck e sapendo che:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$$

8- Le complessioni

Il modello matematico, per avere una valenza interpretativa, deve essere messo in relazione con un modello fisico microscopico che ne confermi la validità. Per fare questo, Planck si concentrò sullo studio dell'entropia del sistema, in particolare sui modi in cui l'energia può distribuirsi sui vari risonatori.

Supponiamo che il corpo nero sia costituito da N risonatori di frequenza υ ed energia E, N' di frequenza υ' ed energia E', N'' di frequenza υ'' ed energia E'', e così via. Se l'energia E fosse una quantità continua, essa potrebbe distribuirsi tra gli N risonatori in infiniti modi. Ma se fosse costituita da un elevatissimo numero P di "pacchetti" di energia ε non ulteriormente suddivisibile – e qui sta l'ipotesi veramente rivoluzionaria di Planck – in modo che $P\varepsilon = E$, allora le possibili distribuzioni sarebbero in numero finito.

Dimostra che il numero dei possibili modi (*complessioni*) in cui i P pacchetti possono distribuirsi tra gli N risonatori è dato da:

$$\frac{(N + P - 1)!}{(N - 1)!\, P!}$$

Nota: considera i risonatori *distinguibili,* mentre i pacchetti sono *indistinguibili.* Inoltre è contemplata la possibilità che un risonatore abbia energia zero.

9- Un esempio

Supponiamo che un sistema sia costituito da 3 risonatori con energia totale $E = 6\epsilon$. Si avranno 7 possibili distribuzioni (macrostati):

A) 1 risonatore con energia 6ϵ; 2 risonatori con energia 0
B) 1 risonatore con energia 5ϵ; 1 risonatore con energia ϵ; 1 risonatore con energia 0
C) 1 risonatore con energia 4ϵ; 1 risonatore con energia 2ϵ; 1 risonatore con energia 0
D) 1 risonatore con energia 4ϵ; 2 risonatori con energia ϵ
E) 2 risonatori con energia 3ϵ; 1 risonatore con energia 0
F) 1 risonatore con energia 3ϵ; 1 risonatore con energia 2ϵ; 1 risonatore con energia ϵ
G) 2 risonatori con energia 2ϵ;

Considera ciascuna distribuzione. Quanti sono i modi (complessioni/microstati) in cui si può realizzare?

Se si indica con N il numero totale dei risonatori e con N_k il numero dei risonatori con energia $k\varepsilon$, qual è la generica formula che definisce il numero delle complessioni di ogni macrostato?

Verifica che la somma dei microstati calcolati in questo esempio coincide con il valore ottenuto sostituendo i valori opportuni nella formula proposta al punto 9.

LA MATEMATICA DEL CORPO NERO

Guida per l'insegnante

A cavallo del 1900, l'attenzione dei fisici di tutta Europa era indirizzata ad un problema fondamentale: determinare una legge che descrivesse la densità di energia della radiazione emessa da un corpo nero a temperatura T, cioè da una cavità ideale con un minuscolo foro sulle pareti in grado di assorbire tutta la radiazione ad essa incidente, senza rifletterla.

1- La legge di Rayleigh-Jeans [integrali generalizzati]

$$E = \int_0^{+\infty} u(\nu, T)\, d\upsilon = \int_0^{+\infty} \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT\, d\upsilon = \frac{8\pi kT}{c^3} \int_0^{+\infty} \upsilon^2\, d\upsilon = \frac{8\pi kT}{c^3} \left[\frac{\upsilon^3}{3}\right]_0^{+\infty} = +\infty$$

2- La distribuzione di Wien [integrazione per parti, ordine degli infiniti]

$$E = \int_0^{+\infty} u(\nu, T)\, d\upsilon = \int_0^{+\infty} \frac{8\pi\nu^3}{c^3} a e^{-\frac{b\upsilon}{T}}\, d\upsilon = \frac{8\pi a}{c^3} \int_0^{+\infty} \upsilon^3\, e^{-\frac{b\upsilon}{T}}\, d\upsilon = \frac{8\pi a}{c^3} \int_0^{+\infty} \upsilon^3\, e^{-\gamma\upsilon}\, d\upsilon$$

Integrando per parti tre volte si arriva alla soluzione:

$$E = -\frac{48\pi a}{\gamma^4 c^3} \left[e^{-\gamma\upsilon}\right]_0^{+\infty} = \frac{48\pi a}{\gamma^4 c^3}$$

3- La legge dello spostamento di Wien [punti stazionari, derivata del prodotto di funzioni]

$$\frac{du(\upsilon, T)}{d\upsilon} = \frac{8\pi}{c^3} a\upsilon^2 e^{-\frac{b\upsilon}{T}} \left(3 - \frac{b\upsilon}{T}\right)$$

Dunque si ha un punto di massimo in $\upsilon_0 = \frac{3T}{b}$, da cui:

$$\lambda_0 T = \frac{cb}{3}$$

4- Il primo modello di Planck [notazione alla Liebniz, derivata di una funzione composta, equazioni differenziali]

Differenziando rispetto ad n, si ottiene:

$$U \frac{df(nU)}{d(nU)} = -\frac{1}{n^2} f(U)$$

Successivamente:

$$f'(nU) = -\frac{1}{n^2}\frac{n}{U}f(nU) \Rightarrow \frac{f'(nU)}{f(nU)} = -\frac{1}{nU} \Rightarrow \ln f(nU) = -\ln nU + \gamma \Rightarrow f(nU) = \frac{e^\gamma}{nU}$$

Risostituendo ad $f(nU)$ l'espressione $\frac{1}{n}f(U)$, si ottiene $f(U) = \frac{e^\gamma}{U}$ che implica:

$$\frac{d^2S}{dU^2} = \frac{\alpha}{U}$$

con α costante.

5- L'ipotesi cruciale [integrali elementari]
La scelta migliore è la D.
Infatti la A non soddisfa il requisito di restituire un'entropia che sia funzione logaritmica di U, così come la C. La B, invece, non rimanda a Wien nel caso di alte frequenze, poiché l'energia al denominatore mantiene grado due.

6- La determinazione di U [equazioni differenziali, integrazione di funzioni razionali]
Integrando la relazione D) rispetto alla variabile U, si ottiene:

$$\frac{1}{T} = \frac{\alpha}{\beta}\ln\frac{U}{\beta + U}$$

da cui:

$$U = \frac{\beta}{e^{-\frac{\beta}{\alpha T}} - 1}$$

L'espressione che si ottiene è quindi:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\upsilon}{e^{\frac{h\upsilon}{kT}} - 1}$$

7- La legge di Stefan-Boltzmann [integrali per sostituzione]

$$E = \int_0^{+\infty} \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\upsilon}{e^{\frac{h\upsilon}{kT}} - 1}\,d\upsilon$$

Sostituendo $\frac{h\upsilon}{kT} \coloneqq x$, si ha $dx = \frac{h}{kT}\,d\upsilon$, cioè $d\upsilon = \frac{kT}{h}dx$, da cui:

$$E = \int_0^{+\infty} \frac{8\pi k^4T^4}{c^3h^3}\frac{x^3}{e^x - 1}\,dx = \frac{8\pi k^4T^4}{c^3h^3}\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{e^x - 1}\,dx = \frac{8\pi^5k^4}{15c^3h^3}\,T^4$$

8- Le complessioni [calcolo combinatorio, permutazioni]
Il problema è analogo a quello delle *ball into boxes*: in quanti modi posso distribuire P palline in N scatole? Se, per esempio, schematizziamo le scatole con $(N-1)$ barrette verticali e le palline con P asterischi, ogni successione di questi simboli indicherà una possibile distribuzione. Per esempio la stringa **|*|***|**|** corrisponde a 2 palline nella prima scatola, 1 nella seconda, e così via. Dunque la possibili permutazioni di questi simboli sono $(N+P-1)!$. Poiché, per ogni sequenza, lo scambio reciproco di barrette o di asterischi non altera la complessione in esame, occorrerà dividere per questi due fattori, ottenendo:

$$\frac{(N+P-1)!}{(N-1)!\,P!}$$

9- Un esempio [calcolo combinatorio]
I possibili microstati sono:

A) 3 (600; 060; 006)
B) 6 (510; 501; 150; 105; 051; 015)
C) 6 (420; 402; 240; 204; 042; 024)
D) 3 (411; 141; 114)
E) 3 (330; 303; 033)
F) 6 (321; 312; 231; 213; 132; 123)
G) 1 (222)

La formula generica è:

$$\frac{N!}{N_0!\,N_1!\,N_2!\,\cdots N_P!}$$

Infatti ogni permutazione dei risonatori restituisce una diversa complessione, ma se due o più risonatori hanno lo stesso valore energetico il loro scambio non altera il microstato, dunque occorre dividere per questi possibili scambi.
Infine:

$$\frac{(N+P-1)!}{(N-1)!\,P!} = \frac{7!}{3!\,4!} = 35$$

$$3+6+6+3+3+6+1 = 35$$

Capitolo 6

Il confronto con le Indicazioni Nazionali

Lo scopo di questo capitolo è quello di verificare a livello istituzionale la rilevanza per la formazione di uno studente liceale dei temi proposti, attraverso un confronto con le Indicazioni Nazionali per il Liceo Scientifico, in relazione alle disicipline Matematica e Fisica. Sono state individuate due macro-categorie all'interno delle quali si inserisce il lavoro, a loro volta divise in sotto-categorie:

- **Rilevanza formativa in senso trasversale:** divisa in interdisciplinarietà e modellizzazione.
- **Rilevanza rispetto ai metodi e ai contenuti:** divisa in calcolo infinitesimale, equazioni differenziali, calcolo combinatorio, calcolo matriciale, numeri complessi, termodinamica e meccanica quantistica.

Per ognuna di esse, vengono riportati alcuni riferimenti testuali, con la segnalazione della loro posizione all'interno delle Indicazioni[1]: la sigla LGC indica il paragrafo "Linee Generali e Competenze"; all'interno degli "Obiettivi Specifici di Apprendimento" si distingue invece tra PB, per il Primo Biennio, SB per il Secondo Biennio e QA per il Quinto Anno; dopo il trattino, la lettera M o F indica se la citazione proviene dalla sezione di matematica o da quella di fisica. Per ciascun riferimento, è poi presente una breve spiegazione

[1] In appendice C si trovano le pagine delle Indicazioni da cui sono stati tratti i riferimenti.

del modo in cui quel preciso contenuto si lega ad una specifica parte del lavoro di tesi. Al termine del capitolo, due ulteriori citazioni saranno dedicate al tema della collaborazione scuola-università.

6.1 Rilevanza formativa in senso trasversale

INTERDISCIPLINARIETÀ

(LGC - M) "*Al termine del percorso del liceo lo studente conoscerà i concetti e i metodi elementari della matematica, sia interni alla disciplina in sé considerata, sia rilevanti per la descrizione e la previsione di fenomeni, in particolare del mondo fisico*".

Il tema dell'utilizzo dei concetti e dei metodi matematici all'interno del mondo fisico costituisce in modo evidente il nucleo centrale di questo lavoro di tesi. In particolare, il problema della *descrizione* dei fenomeni è proprio quello di fronte al quale si ritrova Heisenberg, nel dover scegliere le grandezze fisiche da prendere in considerazione per lo studio dei sistemi meccanici e in particolare dell'atomo. In questo contesto, emerge con forza l'importanza dell'uso degli strumenti matematici, sia in senso "debole", tramite la semplice formalizzazione di idee come il principio di Rydberg-Ritz, sia in modo più caratterizzante, come si è visto nel caso dell'algebra matriciale. Il tema della *previsione* dei fenomeni è invece strettamente legato al lavoro di Planck: il confronto con i risultati sperimentali è infatti un'imprescindibile costante del lavoro del fisico tedesco, dalla quale nasce lo stesso problema della ricerca di una funzione che soddisfacesse i dati empirici e con la quale Planck deve necessariamente confrontarsi per validare il carattere predittivo della propria legge.

(LGC - M) "*Di qui i gruppi di concetti e metodi che saranno obiettivo dello studio: [...] 3) gli strumenti matematici di base per lo studio dei fenomeni fisici*".

Fra essi, si è visto in particolare come il calcolo differenziale, combinatorio e matriciale abbiano giocato un ruolo decisivo all'interno di tutta la trattazione. Per l'ultimo, è interessante notare il carattere di novità portato dall'introduzione dell'algebra delle matrici nel mondo fisico e come questo tipo di approccio sia tuttora largamente utilizzato nel campo della meccanica quantistica.

(LGC - M) "*Questa articolazione di temi e di approcci costituirà la base per istituire collegamenti e confronti concettuali e di metodo con altre discipline come la fisica*".

Analizzando due processi di modellizzazione matematica in fisica moderna, come quelli di Planck e Heisenberg, si ha l'occasione di entrare nel merito del modo in cui la matematica viene utilizzata in ambito fisico, mostrando molteplici varietà di metodi. Ma il confronto tra gli aspetti concettuali o metodologici non è interessante solamente dal punto di vista di un paragone tra matematica e fisica, bensì anche all'interno della stessa disciplina. Per esempio, è proprio con Planck che si assiste ad un mutamento nel modo di elaborare teorie fisiche, che caratterizzerà poi buona parte del XX secolo, a cominciare dalla relatività ristretta: l'introduzione di una o più ipotesi, come la quantizzazione dell'energia nel caso di Planck o l'invarianza della velocità della luce e delle leggi fisiche rispetto al sistema di riferimento per Einstein, che si pongono alla base del ragionamento come assunzioni che non necessitano di dimostrazione, in quanto trattate come postulati. Questo consente di aprire il tema del confronto tra i metodi della matematica e della fisica in relazione, ad esempio, ai postulati. Nell'ambito matematico la consapevolezza della necessità di fissare alcuni assiomi o postulati[2] si esprime già negli *Elementi* di Euclide, ma assume una rilevanza enorme proprio nel periodo storico in cui lavorano Planck e Heisenberg, quando la nascita delle geometrie non euclidee rende evidente e non semplice da accettare il fatto che nuovi postulati creano nuovi "mondi", coerenti tanto quanto quelli a cui si era abituati e, per giunta, più potenti nella descrizione di fenomeni fisici. [29]

(QA – M) "*Lo studente proseguirà lo studio delle funzioni fondamentali dell'analisi anche attraverso esempi tratti dalla fisica o da altre discipline*".

[2] La parola *postulato* e la parola *assioma* sono spesso usate come sinonimi, ma hanno sfumature di significato diverse, che vale la pena sottolineare. In particolare, la distinzione fra assiomi e postulati che ha assunto il maggiore rilievo nella tradizione scolastica, e che si riallaccia ad Aristotele, è la seguente: gli assiomi sono verità evidenti di per sè, mentre i postulati devono essere riconosciuti sulla base di intuizioni o di esperienze, ovvero ammessi provvisoriamente in vista delle conseguenze che ne derivato.

Come visto nel primo capitolo di questa tesi, spesso allo studente risulta particolarmente difficile utilizzare i procedimenti classici della matematica all'interno di un'altra disciplina come la fisica. Le schede del capitolo 5, che certamente fanno riferimento ad alcune funzioni fondamentali dell'analisi come esponenziali e logaritmi, costituiscono un valido esercizio di allenamento all'interdisciplinarietà tra le due materie. Si sottolinea quindi l'importanza del porre problemi di questo tipo, per un adeguato percorso di acquisizione di competenze, perché molto spesso gli studenti possono avere appreso metodi di calcolo all'interno di particolari contesti ma non essere in grado di "trasportare" la propria conoscenza al di fuori dell'ambito specifico in cui l'hanno conosciuta.

MODELLIZZAZIONE

(LGC - M) "*Di qui i gruppi di concetti e metodi che saranno obiettivo dello studio: [...] 5) il concetto di modello matematico e un'idea chiara della differenza tra la visione della matematizzazione caratteristica della fisica classica (corrispondenza univoca tra matematica e natura) e quello della modellistica (possibilità di rappresentare la stessa classe di fenomeni mediante differenti approcci)*".

Il passaggio dalla matematizzazione in senso classico alla modellistica moderna si rivela in maniera evidente nella vicenda Bohr-Heisenberg: il vasto problema con il quale i due fisici si confrontano non ha infatti una sola possibilità interpretativa, ma molteplici, e sarà proprio uno dei passaggi caratteristici della modellizzazione matematica, ovvero la scelta delle variabili da prendere in considerazione, a fare la differenza per il successo di un approccio piuttosto che dell'altro. Bohr sceglie infatti di ragionare su variabili cinematiche, giungendo però ad un'incoerenza nel modello; Heisenberg si accorge invece di dover focalizzare l'attenzione sulle quantità osservabili, e quindi sugli spettri, arrivando così a descrivere il fenomeno in maniera efficace.
Un altro esempio dell'importanza della fase di scelta delle variabili per la modelizzazione arriva da Sommerfeld, che capisce come la variabile da prendere in esame come origine della quantizzazione non è l'energia, bensì l'azione.

(LGC - M) "*Al termine del percorso didattico lo studente avrà approfondito i procedi-*

menti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, formalizzazioni) e conoscerà le metodologie di base per la costruzione di un modello matematico di un insieme di fenomeni".

Le metodologie per la costruzione di un modello matematico non sono sempre le stesse, ma, a seconda dei casi, possono assumere sfumature differenti. Per esempio, il processo di modellizzazione che si è visto coinvolgere il lavoro di Heisenberg ha caratteristiche molto diverse da quello di Planck: nel primo caso, infatti, il ruolo chiave è stato giocato dalle variabili scelte per la descrizione del fenomeno, come già ampiamente discusso; nel secondo caso, invece, l'aspetto caratterizzante è stato quello di un continuo confronto tra matematica e fisica, tra congetture e risultati sperimentali, affinché la forma del modello matematico stesso fosse in qualche modo plasmata dal confronto con il problema reale.

(LGC - F) "*In particolare, lo studente avrà acquisito le seguenti competenze: [...] formalizzare un problema di fisica e applicare gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la sua risoluzione*".

L'importanza del processo di modellizzazione di un fenomeno fisico, in particolare della fase di formalizzazione matematica, ha un duplice valore: il primo è quello di fornire la traduzione simbolica di un concetto che in precedenza poteva risultare più farraginoso, il secondo è che quella traduzione simbolica può essere manipolata con le regole del suo specifico linguaggio per ottenere altre verità, che magari non potevano essere dedotte dal mondo reale in maniera diretta. È chiaramente il caso di Heisenberg, il quale introduce le tabelle come puro tentativo di formalizzazione di un certo fenomeno fisico, per poi accorgersi solo in un secondo momento, attraverso un ragionamento meramente matematico, della non commutatività del loro prodotto, ed aprire quindi la strada ad un principio di indeterminazione che sarebbe stato difficile ricavare dalla semplice esperienza.

(PB – M) "*[Lo studente] approfondirà inoltre la comprensione del ruolo fondamentale che i concetti dell'algebra vettoriale e matriciale hanno nella fisica*".

Uno di questi ruoli fondamentali è evidentemente giocato dall'algebra matriciale all'interno della modellizzazione dei sistemi meccanici attuata da Heisenberg.

(SB – M) "*[Lo studente] studierà la probabilità condizionata e composta, la formula di Bayes e le sue applicazioni, nonché gli elementi di base del calcolo combinatorio. In relazione con le nuove conoscenze acquisite approfondirà il concetto di modello matematico*".

L'interpretazione microscopica che Planck sceglie di dare alla propria legge di emissione è un perfetto esempio di calcolo combinatorio applicato ai processi di modellizzazione.

6.2 Rilevanza rispetto ai metodi e ai contenuti

CALCOLO INFINITESIMALE

Alcuni dei prossimi riferimenti saranno commentati a gruppi, in quanto relativi a contenuti simili o conglobabili. I commenti saranno quindi riferiti a tutte le citazioni che si trovano prima di essi che risultano prive di spiegazione.

(LGC - M) "*Di qui i gruppi di concetti e metodi che saranno obiettivo dello studio: [...] 2) le nozioni elementari del calcolo differenziale e integrale 3) gli strumenti matematici di base per lo studio dei fenomeni fisici, con particolare riguardo al calcolo vettoriale e alle equazioni differenziali*".

(LGC - M) "*Tali capacità operative saranno particolarmente accentuate nel percorso del liceo scientifico, con particolare riguardo per quel riguarda la conoscenza del calcolo infinitesimale e dei metodi probabilistici di base*".

(SB - M) "*In questa occasione lo studente studierà la formalizzazione dei numeri reali anche come introduzione alla problematica dell'infinito matematico*".

(QA – M) "*[Lo studente] acquisirà il concetto di limite di una successione e di una funzione e apprenderà a calcolare i limiti in casi semplici. Lo studente acquisirà i principali* *concetti del calcolo infinitesimale, in particolare la continuità, la derivabilità e l'integrabilità*".

(QA – M) "*Non sarà richiesto un particolare addestramento alle tecniche di calcolo, che si limiterà alla capacità di derivare le funzioni già note, semplici prodotti, quozienti e composizioni di funzioni, le funzioni razionali e alla capacità di integrare funzioni polinomiali intere e altre funzioni elementari*".

(QA – M) "*Si tratterà soprattutto di comprendere il ruolo del calcolo infinitesimale in quanto strumento concettuale fondamentale nella descrizione e nella modellizzazione di fenomeni fisici o di altra natura. Inoltre, lo studente acquisirà familiarità con l'idea generale di ottimizzazione e con le sue applicazioni in numerosi ambiti*".

Limiti, derivate, integrali e ottimizzazione sono gli strumenti fondamentali che hanno accompagnato Planck nel suo percorso. In particolare, sia all'interno di tutto il capitolo sul corpo nero, sia nelle relative schede, si utilizza una vasta serie di strumenti matematici legati al calcolo infinitesimale, tra cui: integrali generalizzati, integrazione per parti, ordine degli infiniti, studio dei punti stazionari, derivata del prodotto di funzioni, notazione alla Leibniz, derivazione di una funzione composta, integrazione di funzioni razionali e integrazione per sostituzione. Una descrizione a parte merita il tema della continuità, che sarà analizzato con i prossimi riferimenti.

(QA – M) "*Lo studente acquisirà i principali concetti del calcolo infinitesimale, in particolare la continuità, la derivabilità e l'integrabilità*".

(SB – F) "*Lo studente potrà così vedere come il paradigma newtoniano sia in grado di connettere l'ambito microscopico a quello macroscopico*".

Il rapporto tra discreto e continuo matematico, riconducibile alla relazione tra la realtà microscopica e quella macroscopica, è uno dei temi di fondo di questo lavoro di tesi. Viene affrontato in maniera esplicita nell'appendice A, quando si analizza la possibilità di estendere ai reali positivi un'uguaglianza valida su un dominio naturale. È poi prepotentemente sotteso al lavoro di Planck, che deve conciliare una descrizione macroscopica e continua della realtà con una microscopica e discreta. È interessante notare, in questo senso, come matematica continua/discreta e modello continuo/discreto debbano perennemente venirsi incontro ed essere l'un l'altro compatibili, per fornire una descrizione omogenea e coerente della teoria.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

(LGC - M) "*Di qui i gruppi di concetti e metodi che saranno obiettivo dello studio: [...] 3) gli strumenti matematici di base per lo studio dei fenomeni fisici, con particolare riguardo al calcolo vettoriale e alle equazioni differenziali*".

(QA – M) "*Altro importante tema di studio sarà il concetto di equazione differenziale, cosa si intenda con le sue soluzioni e le loro principali proprietà, nonché alcuni esempi importanti e significativi di equazioni differenziali*".

Il tema delle equazioni differenziali, presente sia in Planck nei primi passi della derivazione della sua formula, sia in Heisenberg come equazione dell'oscillatore armonico, merita un discorso a parte. Infatti, il legame tra questo strumento matematico e la fisica quantistica non è di tipo solamente utilitario, nel senso che il primo serve alla seconda, ma decisamente più profondo: la scoperta del principio di indeterminazione ha stabilito che non è possibile determinare simultaneamente e con precisione velocità e posizione di una certa particella; ma se si pensa ad un *problema di Cauchy* che voglia descrivere un moto particellare, velocità e posizione sarebbero proprio i dati iniziali necessari a determinarne univocamente la soluzione. In questo senso, il principio di indeterminazione costituisce un nuovo ostacolo di tipo teorico alla risoluzione, in ambito fisico, di un tale problema di Cauchy.

CALCOLO COMBINATORIO

(LGC - M) "*Di qui i gruppi di concetti e metodi che saranno obiettivo dello studio: [...] 4) la conoscenza elementare di alcuni sviluppi della matematica moderna, in particolare* *degli elementi del calcolo delle probabilità*".

(LGC - M) "*Tali capacità operative saranno particolarmente accentuate nel percorso del liceo scientifico, con particolare riguardo per quel riguarda la conoscenza del calcolo infinitesimale e dei metodi probabilistici di base*".

(SB – M) "*[Lo studente] studierà la probabilità condizionata e composta, la formula di Bayes e le sue applicazioni, nonché gli elementi di base del calcolo combinatorio*".

Il calcolo combinatorio è lo strumento che permette a Planck di sviluppare il modello fisico che darà una giustificazione microscopica alla legge di emissione del corpo nero. Infatti è grazie alla teoria delle complessioni, che necessita dello studio del numero di possibili distribuzioni dei pacchetti di energia sui risonatori, e quindi di nozioni come permutazioni e combinazioni, che il fisico tedesco riesce a fornire una spiegazione teorica all'equazione che aveva ricavato.

CALCOLO MATRICIALE

(PB – M) "*[Lo studente] studierà i concetti di vettore, di dipendenza e indipendenza lineare, di prodotto scalare e vettoriale nel piano e nello spazio nonché gli elementi del calcolo matriciale*".

Il calcolo matriciale è uno strumento fondamentale nella formalizzazione dell'intuizione di Heisenberg, in quanto consente a Born e Jordan di mettere in relazione le "tabelle" relative alla transizione tra stati con una teoria matematica già in parte sviluppata, che consente di operare con tali tabelle a livello formale. **NUMERI COMPLESSI**

(SB – M) "*Saranno studiate la definizione e le proprietà di calcolo dei numeri complessi, nella forma algebrica, geometrica e trigonometrica*"

Heisenberg fa uso della teoria dei numeri complessi per esprimere le soluzioni dell'equazione differenziale che descrive un oscillatore anarmonico.

TERMODINAMICA
(SB – F) "*Lo studio dei principi della termodinamica permetterà allo studente di generalizzare la legge di conservazione dell'energia e di comprendere i limiti intrinseci alle trasformazioni tra forme di energia, anche nelle loro implicazioni tecnologiche, in termini quantitativi e matematicamente formalizzati*".

Il secondo principio della termodinamica viene più volte utilizzato da Planck, per passare da una formulazione in termini di entropia ed energia ad una in termini di temperatura.

MECCANICA QUANTISTICA
(QA – F) "*L'affermarsi del modello del quanto di luce potrà essere introdotto attraverso lo studio della radiazione termica e dell'ipotesi di Planck e sarà sviluppato [...] con la discussione delle teorie e dei risultati sperimentali che evidenziano la presenza di livelli energetici discreti nell'atomo*".

(QA – F) "*L'evidenza sperimentale della natura ondulatoria della materia, postulata da De Broglie, ed il principio di indeterminazione potrebbero concludere il percorso in modo significativo*".

Lo studio del problema della radiazione di corpo nero da parte di Planck, che ha portato alla prima ipotesi di quantizzazione, e l'analisi delle considerazioni che hanno condotto Heisenberg ad enunciare il proprio principio di indeterminazione costituiscono il nucleo centrale di questa tesi.

Un'ultima osservazione riguarda la rilevanza di questo lavoro di tesi per la collaborazione scuola-università. Esso nasce infatti all'interno del gruppo di ricerca in didattica della fisica dell'Università di Bologna, coordinato dalla professoressa Olivia Levrini. Il prossimo anno accademico e scolastico il materiale prodotto dal gruppo diventerà un'attività di laboratorio per professori della scuola secondaria, inserito all'interno del Piano Lauree Scientifiche. Anche questo aspetto è in linea con le Indicazioni Nazionali, con particolare riferimento ai seguenti punti:

(LGC – F) "*La libertà, la competenza e la sensibilità dell'insegnante – che valuterà di volta in volta il percorso didattico più adeguato alla singola classe – svolgeranno un ruolo fondamentale [...] nel promuovere collaborazioni tra la sua Istituzione scolastica e Università*".

(QA – F) "*La dimensione sperimentale potrà essere ulteriormente approfondita con attività da svolgersi non solo nel laboratorio didattico della scuola, ma anche presso laboratori di Università ed enti di ricerca, aderendo anche a progetti di orientamento*".

Capitolo 7

Una risposta ad alcune esigenze di modellizzazione e insegnamento

Nel capitolo verranno analizzati i modi in cui questo lavoro di tesi tenta di rispondere ad alcune esigenze di modellizzazione e di proporre un in tipo di insegnamento che supera alcuni ostacoli della didattica tradizionale. La prima parte nasce dal confronto con gli insegnanti della scuola secondaria, all'interno della tesi di dottorato dell'Università degli Studi di Padova dal titolo "Lo sviluppo della competenze di modellizzazione matematica nella scuola secondaria di secondo grado"[6], mentre la seconda si costituisce in rapporto ad un articolo di ricerca di Mario Camoglio (2004) dal titolo "Insegnare e apprendere con il Portfolio"[7]. Dalla trattazione emergerà come questa tesi costituisca, in molte delle sue parti e con una buona varietà di modi, una valida risposta alle esigenze presentate.

7.1 I suggerimenti degli insegnanti

Nella tesi di dottorato che è stata presa in analisi, sono riportati alcuni suggerimenti proposti dagli insegnanti al fine di promuovere la modellizzazione in classe. Questo lavoro di tesi pare venire incontro e dare sostanza a molti di essi; per questo motivo si vedranno alcune delle indicazioni, accompagnate dalla spiegazione del modo in cui si riscontra una risposta al bisogno da esse espresso all'interno di questo lavoro.

Inserire la modellizzazione nella didattica quotidiana.

Un modo per inserire la modellizzazione nella pratica quotidiana potrebbe essere quello di trattare gli argomenti in modo da entrare nel presente storico della questione in esame, assumendo il punto di vista di chi si è veramente trovato a dover affrontare l'argomento. Per esempio, per parlare del principio di indeterminazione di Heisenberg, si potrebbe seguire la traccia proposta da questa tesi. Nella trattazione, infatti, lo studente può immedesimarsi nella situazione, in quanto portato ad esaminare nei dettagli il problema che si presenta e ad ipotizzare insieme all'insegnante e ai compagni una sua soluzione, fino a poter apprezzare la portata innovativa della proposta del fisico tedesco. Questo avrebbe come necessaria conseguenza la messa in atto di fasi analoghe a quelle proposte da Blum[1] per il ciclo della modellizzazione. In particolare: :

- *Real Situtation.* Qual è il contesto? La condizione di quantizzazione di Sommerfeld ha un carattere troppo poco generale e il modello atomico di Bohr presenta contraddizioni interne legate alla mancanza di riscontri con la teoria elettromagnetica; inoltre esso tratta quantità che eludono completamente l'osservazione.

- *Situation Model.* Su quale problema occorre quindi concentrarsi? Bisogna rivedere la maniera in cui si descrive il sistema in esame.

- *Real Model.* In che modo? Svincolandosi da concetti come la legge oraria o la traiettoria dell'elettrone, che restituiscono risultati contraddittori, per concentrarsi solamente sulle quantità osservabili, cioè sulle righe spettrali di emissione.

- *Mathematical Model.* Come si traduce matematicamente? Partendo dalla descrizione matematica, in termini di transizione fra stati e attraverso tabelle, delle righe degli spettri di emissione. Occorre poi passare alla formalizzazione del principio di Rydberg-Ritz attraverso l'espressione $\omega_{nm} = \omega_{nk} + \omega_{km}$ e riconoscere in essa la formula del prodotto righe per colonne.

- *Mathematical Results.* Qual è il risultato? Ciò che si ottiene è $pq - qp = i\hbar$, da cui seguirà $\Delta q \cdot \Delta p \neq 0$ e in particolare $\Delta q \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$.

- *Real Results.* La nuova condizione di quantizzazione ha una validità più generale e supera il problema delle quantità non osservabili, provenendo in maniera diretta

[1] Pagina 15, capitolo 2 di questa tesi.

da osservazioni sperimentali. Inoltre l'equazione $\Delta q \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ è interpretabile come una limitazione inattesa alla possibilità di determinare simultaneamente velocità e posizione di una particella.

Chiaramente gli studenti non sono chiamati a portare avanti da soli un ragionamento di questo tipo, ma è auspicabile che sia l'insegnante a guidare la classe attraverso i passaggi più critici.

Cominciare la lezione o introdurre un argomento con le attività.

L'attività proposta nel capitolo 5 è un ottimo modo di introdurre l'argomento della quantizzazione dell'energia attraverso un percorso logico-matematico che stimoli lo studente ad interrogarsi in prima persona sulla questione e a mettere in campo le proprie conoscenze per la risoluzione dei problemi che si presentano.

Promuovere il ragionamento matematico congetturale.

Il tema della congettura è presente in Planck nel momento in cui cerca di dare una spiegazione teorica e microscopica alla sua legge di emissione. La discretizzazione dell'energia non è infatti né un qualcosa che il fisico tedesco deduce da prove sperimentali, né un teorema che è possibile dimostrare su basi puramente teoriche. Quella che Planck fa è invece una vera e propria congettura: egli ipotizza infatti che sia vero che l'energia si distribuisce in pacchetti discreti, per evitare la suddivisibilità di tale energia in un numero infinito di modi; ma la sua è solamente un'ipotesi, che ha la fortuna di non sembrare mai smentita. Il ragionamento congetturale non è così comune nella pratica didattica quotidiana, per questo l'esempio portato da Planck costituisce un buon modo di avvicinarsi a questo tipo di procedimento matematico.

Promuovere la competenza nell'uso degli strumenti matematici.

Anche per la promozione di competenze nell'uso degli strumenti matematici, può essere utile l'attività proposta nel capitolo 5. Tramite essa è infatti possibile fare esercizio su alcuni argomenti matematici fondamentali, in particolare riguardati l'analisi e il calcolo combinatorio, quali: gli integrali generalizzati, l'integrazione per parti, l'ordine degli infiniti, lo studio dei punti stazionari, la derivata del prodotto di funzioni, la notazione alla Leibniz, la derivazione di una funzione composta, l'integrazione di funzioni razionali, l'integrazione per sostituzione, le equazioni differenziali, il calcolo delle permutazioni e delle combinazioni. Questi argomenti vengono spesso visti come fini a sè stessi, ma in un contesto di modellizzazione di un problema fisico, possono trovare la loro naturale applicabilità e stimolare l'interesse degli studenti verso il loro studio.

Abituare gli studenti a costruire formule.

Lo studio delle possibili forme in cui modificare l'equazione $\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}U^2} = \frac{\alpha}{U}$ per ottenere la nuova e cruciale formula dalla quale Planck deriva la sua equazione è il nucleo dell'esercizio 5 dell'attività sul corpo nero. Tale esercizio è didatticamente molto interessante, perché porta lo studente ad ottenere una formula che non è "calata dall'alto", quasi come un qualcosa di magico, me è ottenuta in prima persona attraverso un lavoro di studio delle possibili forme alternative e delle caratteristiche strutturali più inclini al significato che essa deve avere. L'analisi del processo che porta alla scelta e alla elaborazione di una formula può avere come effetto un maggiore coinvolgimento dello studente. Come è noto, la partecipazione e la motivazione sono elementi che possono favorire un apprendimento non volatile o effimero, ma duraturo e significativo per lo studente.

7.2 L'insegnamento: muro o ponte?

Mario Comoglio (2004), nel suo "Insegnare e apprendere con il Portfolio"[7], presenta le differenze fra due concezioni dell'insegnamento scolastico che si possono trovare nei comportamenti dei docenti in aula: *l'insegnamento-muro*, che si fonda su una sequenza lineare e gerarchica di trasmissione delle informazioni nell'unica direzione insegnante-studente, e *l'insegnamento ponte*, che si basa su un flusso circolare di passaggi reciproci di conoscenza ed idee fra alunni e docente; il concetto può essere sintetizzato in una tabella, che sarà utilizzata come strumento di analisi dell'attività sul copo nero proposta nel capitolo 5.

IL MURO	*IL PONTE*
La conoscenza come prodotto predefinito, materia inerte	La conoscenza come processo elaborativo, materia viva
La conoscenza viene frammentata in parti per facilitare l'assimilazione	La conoscenza viene vista nelle sue reciproche relazioni
Lo studente riproduce la conoscenza	Lo studente partecipa al processo di costruzione della conoscenza
Organizzato intorno a contenuti	Organizzato intorno a problemi
Usa il libro come strumento principale	Usa fonti e materiali diversi

Dalla tabella, risultano evidenti gli svantaggi di un insegnamento di tipo "muro" rispetto ad uno tipo "ponte"; il secondo, infatti, costituisce un superamento di alcune gravi discontinuità del primo nel rapporto tra insegnamento e ambiente esterno (come per esempio il fatto che la scuola coltivi un linguaggio che lavora sui simboli, mentre fuori dalla scuola la mente è sempre direttamente alle prese con oggetti e situazioni), creando costanti collegamenti tra mondo reale e conoscenza scolastica, tra saperi pratici e teorici. In questa prospettiva, il lavoro scolastico diventa un'opportunità per imparare ad osservare la realtà e a comprenderla in modo più profondo.
Le schede sul corpo nero paiono inserirsi proprio all'interno di un'ottica di questo tipo, in cui la conoscenza (in questo caso gli elementi di meccanica quantistica) non viene consegnata come prodotto fatto e finito, ma è lo studente stesso a collaborare in maniera attiva alla sua costruzione, attraverso un processo di elaborazione e messa in campo delle proprie conoscenze che rende, in un certo senso, la materia viva. Inoltre i contenuti non sono presentati a compartimenti stagni, ma vengono discussi tramite le loro reciproche relazioni, in una linea di continuità che rende il percorso fortemente collegato. Un altro punto di forza dell'attività che si ricava dalla tabella è l'organizzazione della conoscenza per problemi, anziché per contenuti: ogni esercizio rappresenta un problema che va risolto, in cui si deve trovare la giusta via per superare una determinata situazione e progredire nella conoscenza. Infine, si può notare che lo strumento utilizzato per il ragionamento non è costituito da un libro di testo, ma da un pacchetto di schede pensate apposta, che richiamano direttamente gli scritti dell'autore; questo può aiutare gli studenti a sentirsi più partecipi del lavoro e più vicini alle fonti primarie della conoscenza.

Appendice A

Dal discreto al continuo: un caso specifico

La seguente appendice ci mostra la possibilità di estendere una particolare relazione di tipo discreto ad una di tipo continuo, in modo da poter agire su essa con un'operazione di derivazione. In particolare, si vuole dare una giustificazione formale al passaggio dalla (3.4) alla (3.5) di pagina 23.

L'espressione inziale, di cui si vorrebbero derivare rispetto ad n entrambi i membri, è la seguente:

$$n \cdot f(nU) = f(U) \tag{A.1}$$

Poiché $n \in \mathbb{N}$, non è possibile differenziare in modo classico; infatti servirebbe che ogni punto del dominio fosse punto di accumulazione.

Vediamo allora se è possibile dedurre che la relazione:

$$x \cdot f(xU) = f(U) \tag{A.2}$$

vale $\forall x \in \mathbb{R}^+$, in modo da poter poi agevolmente derivare rispetto alla variabile reale x. Per fare ciò, iniziamo dimostrando l'uguaglianza nel caso di una variabile razionale, cioè verficando che $\forall r \in \mathbb{Q}^+$ si ha:

$$r \cdot f(rU) = f(U) \tag{A.3}$$

ovvero che $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall q \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$, vale:

$$\frac{p}{q} \cdot f\Big(\frac{p}{q} \cdot U\Big) = f(U)$$

Dunque, per cominciare, notiamo che:

$$p \cdot f\Big(\frac{p}{q} \cdot U\Big) = p \cdot f\Big(p \cdot \frac{1}{q}U\Big) = f\Big(\frac{1}{q}U\Big)$$

D'altra parte:

$$q \cdot f(U) = q \cdot f\Big(q \cdot \frac{1}{q}U\Big) = f\Big(\frac{1}{q}U\Big)$$

Di conseguenza, poiché entrambe le espressioni sono uguali ad $f(\frac{1}{q}U)$, si avrà:

$$p \cdot f\Big(\frac{p}{q} \cdot U\Big) = q \cdot f(U)$$

da cui:

$$\frac{p}{q} \cdot f\Big(\frac{p}{q} \cdot U\Big) = f(U)$$

che prova la tesi.

Dunque abbiamo dimostrato la (A.3). Per passare alla (A.2), occorre innanzitutto osservare che la funzione $g(x) := x \cdot f(xU)$ è continua, perché composizione di funzioni continue. Inoltre, per (A.3), essa coincide con $f(U)$, che non dipende da x, $\forall x \in \mathbb{Q}^+$. Dunque g è una funzione continua e costante su un sottoinsieme denso del dominio, pertanto costante su tutto il dominio, cioè:

$$x \cdot f(xU) = f(U) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

e ciò conclude la dimostrazione.

Appendice B

La Planckiana come conseguenza della condizione di Sommerfeld

Abbiamo visto come a partire dalla condizione di Sommerfeld, si possa ottenere la quantizzazione dell'energia a cui Planck arriva tramite il modello delle complessioni. Mostriamo ora come la denistà di energia sia direttamente ricavabile dalla condizione di quantizzazione, evitando il ricorso esplicito al calcolo combinatorio.

Richiamiamo quindi un risultato di meccanica statistica dovuto a Boltzmann [11, p.65], che afferma che l'energia media U di un qualunque sistema meccanico è data dalla seguente relazione, che coinvolge la cosiddetta *funzione di ripartizione* Z:

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z(\beta) \qquad \text{con} \qquad Z(\beta) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\beta H(p,q)} \cdot \mathrm{d}p \cdot \mathrm{d}q$$

e $\beta = \frac{1}{kT}$. Nel caso dell'oscillatore armonico, ricordiamo che:

$$H(p,q) = E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$$

Per prima cosa si va allora a calcolare $Z(\beta)$, tenendo conto che l'energia del singolo oscillatore non è più continua. Operiamo quindi un cambiamento di variabili:

$$\begin{cases} q = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m}\omega} y \\ p = \sqrt{2m} x \end{cases}$$

da cui:

$$E = x^2 + y^2$$

e

$$\mathrm{d}p \cdot \mathrm{d}q = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m\omega}} \sqrt{2m} \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y = \frac{2}{\omega} \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y$$

Quindi:

$$Z(\beta) = \frac{2}{\omega} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\beta E} \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y$$

Passando alle coordinate polari:

$$Z(\beta) = \frac{2}{\omega} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\beta\rho^2} \rho \cdot \mathrm{d}\rho \cdot \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} \frac{2}{\omega} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\beta\rho^2} \cdot \mathrm{d}(\rho^2) \cdot \mathrm{d}\theta$$

Poiché $\omega = 2\pi\nu$, si ha:

$$Z(\beta) = 2\pi \frac{1}{\omega} \int_0^{+\infty} e^{-\beta\rho^2} \cdot \mathrm{d}(\rho^2) = \frac{1}{\nu} \int_0^{+\infty} e^{-\beta\rho^2} \cdot \mathrm{d}(\rho^2)$$

Con questi cambiamenti di variabile, ρ^2 denota l'energia del sistema; poiché essa assume solo valori discreti del tipo $E = nh\nu$, l'integrale rispetto a ρ^2 si riduce ad una sommatoria:

$$Z(\beta) = \frac{1}{\nu} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\beta nh\nu} = \frac{1}{\nu} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-\beta h\nu})^n = \frac{1}{\nu} \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}}$$

in quanto serie geometrica di ragione < 1.

A questo punto, non resta che calcolare U:

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z(\beta) = -\frac{Z'(\beta)}{Z(\beta)} = (1 - e^{-\beta h\nu}) \cdot \frac{h\nu e^{-\beta h\nu}}{(1 - e^{-\beta h\nu})^2} = \frac{h\nu e^{-\beta h\nu}}{1 - e^{-\beta h\nu}} = \frac{h\nu}{e^{-\beta h\nu} - 1}$$

Infine, inserendo questo valore nella già nota (3.2):

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} U(\nu)$$

si ottiene la relazione finale di Planck:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

che conclude l'appendice.

Appendice C

Le Indicazioni Nazionali

Sono riportate in seguito, in forma integrale, le Indicazioni Nazionali per il Liceo Scientifico riguardanti le due discipline di Matematica e Fisica.

MATEMATICA

LINEE GENERALI E COMPETENZE

Al termine del percorso del liceo scientifico lo studente conoscerà i concetti e i metodi elementari della matematica, sia interni alla disciplina in sé considerata, sia rilevanti per la descrizione e la previsione di fenomeni, in particolare del mondo fisico. Egli saprà inquadrare le varie teorie matematiche studiate nel contesto storico entro cui si sono sviluppate e ne comprenderà il significato concettuale.

Lo studente avrà acquisito una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico. In particolare, avrà acquisito il senso e la portata dei tre principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico: la matematica nella civiltà greca, il calcolo infinitesimale che nasce con la rivoluzione scientifica del Seicento e che porta alla matematizzazione del mondo fisico, la svolta che prende le mosse dal razionalismo illuministico e che conduce alla formazione della matematica moderna e a un nuovo processo di matematizzazione che investe nuovi campi (tecnologia, scienze sociali, economiche, biologiche) e che ha cambiato il volto della conoscenza scientifica.

Di qui i gruppi di concetti e metodi che saranno obiettivo dello studio:

1) gli elementi della geometria euclidea del piano e dello spazio entro cui prendono forma

i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, assiomatizzazioni);
2) gli elementi del calcolo algebrico, gli elementi della geometria analitica cartesiana, una buona conoscenza delle funzioni elementari dell'analisi, le nozioni elementari del calcolo differenziale e integrale;
3) gli strumenti matematici di base per lo studio dei fenomeni fisici, con particolare riguardo al calcolo vettoriale e alle equazioni differenziali, in particolare l'equazione di Newton e le sue applicazioni elementari;
4) la conoscenza elementare di alcuni sviluppi della matematica moderna, in particolare degli elementi del calcolo delle probabilità e dell'analisi statistica;
5) il concetto di modello matematico e un'idea chiara della differenza tra la visione della matematizzazione caratteristica della fisica classica (corrispondenza univoca tra matematica e natura) e quello della modellistica (possibilità di rappresentare la stessa classe di fenomeni mediante differenti approcci);
6) costruzione e analisi di semplici modelli matematici di classi di fenomeni, anche utilizzando strumenti informatici per la descrizione e il calcolo;
7) una chiara visione delle caratteristiche dell'approccio assiomatico nella sua forma moderna e delle sue specificità rispetto all'approccio assiomatico della geometria euclidea classica;
8) una conoscenza del principio di induzione matematica e la capacità di saperlo applicare, avendo inoltre un'idea chiara del significato filosofico di questo principio ("invarianza delle leggi del pensiero"), della sua diversità con l'induzione fisica ("invarianza delle leggi dei fenomeni") e di come esso costituisca un esempio elementare del carattere non strettamente deduttivo del ragionamento matematico.
Questa articolazione di temi e di approcci costituirà la base per istituire collegamenti e confronti concettuali e di metodo con altre discipline come la fisica, le scienze naturali e sociali, la filosofia e la storia.
Al termine del percorso didattico lo studente avrà approfondito i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, formalizzazioni), conoscerà le metodologie di base per la costruzione di un modello matematico di un insieme di fenomeni, saprà applicare quanto appreso per la soluzione di problemi,

anche utilizzando strumenti informatici di rappresentazione geometrica e di calcolo. Tali capacità operative saranno particolarmente accentuate nel percorso del liceo scientifico, con particolare riguardo per quel che riguarda la conoscenza del calcolo infinitesimale e dei metodi probabilistici di base.
Gli strumenti informatici oggi disponibili offrono contesti idonei per rappresentare e manipolare oggetti matematici. L'insegnamento della matematica offre numerose occasioni per acquisire familiarità con tali strumenti e per comprenderne il valore metodologico. Il percorso, quando ciò si rivelerà opportuno, favorirà l'uso di questi strumenti, anche in vista del loro uso per il trattamento dei dati nelle altre discipline scientifiche. L'uso degli strumenti informatici è una risorsa importante che sarà introdotta in modo critico, senza creare l'illusione che essa sia un mezzo automatico di risoluzione di problemi e senza compromettere la necessaria acquisizione di capacità di calcolo mentale.
L'ampio spettro dei contenuti che saranno affrontati dallo studente richiederà che l'insegnante sia consapevole della necessità di un buon impiego del tempo disponibile. Ferma restando l'importanza dell'acquisizione delle tecniche, verranno evitate dispersioni in tecnicismi ripetitivi o casistiche sterili che non contribuiscono in modo significativo alla comprensione dei problemi.
L'approfondimento degli aspetti tecnici, sebbene maggiore nel liceo scientifico che in altri licei, non perderà mai di vista l'obiettivo della comprensione in profondità degli aspetti concettuali della disciplina. L'indicazione principale è: pochi concetti e metodi fondamentali, acquisiti in profondità.

OBIETTIVI SPECIFICI DI APPRENDIMENTO

PRIMO BIENNIO

Aritmetica e algebra

Il primo biennio sarà dedicato al passaggio dal calcolo aritmetico a quello algebrico. Lo studente svilupperà le sue capacità nel calcolo (mentale, con carta e penna, mediante strumenti) con i numeri interi, con i numeri razionali sia nella scrittura come frazione che nella rappresentazione decimale. In questo contesto saranno studiate le proprietà delle operazioni. Lo studio dell'algoritmo euclideo per la determinazione del MCD permetterà

di approfondire la conoscenza della struttura dei numeri interi e di un esempio importante di procedimento algoritmico. Lo studente acquisirà una conoscenza intuitiva dei numeri reali, con particolare riferimento alla loro rappresentazione geometrica su una retta. La dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ e di altri numeri sarà un'importante occasione di approfondimento concettuale. Lo studio dei numeri irrazionali e delle espressioni in cui essi compaiono fornirà un esempio significativo di applicazione del calcolo algebrico e un'occasione per affrontare il tema dell'approssimazione. L'acquisizione dei metodi di calcolo dei radicali non sarà accompagnata da eccessivi tecnicismi manipolatori.
Lo studente apprenderà gli elementi di base del calcolo letterale, le proprietà dei polinomi e le operazioni tra di essi. Saprà fattorizzare semplici polinomi, saprà eseguire semplici casi di divisione con resto fra due polinomi, e ne approfondirà l'analogia con la divisione fra numeri interi. Anche in questo l'acquisizione della capacità calcolistica non comporterà tecnicismi eccessivi.
Lo studente acquisirà la capacità di eseguire calcoli con le espressioni letterali sia per rappresentare un problema (mediante un'equazione, disequazioni o sistemi) e risolverlo, sia per dimostrare risultati generali, in particolare in aritmetica.
Studierà i concetti di vettore, di dipendenza e indipendenza lineare, di prodotto scalare e vettoriale nel piano e nello spazio nonché gli elementi del calcolo matriciale. Approfondirà inoltre la comprensione del ruolo fondamentale che i concetti dell'algebra vettoriale e matriciale hanno nella fisica.

Geometria
Il primo biennio avrà come obiettivo la conoscenza dei fondamenti della geometria euclidea del piano. Verrà chiarita l'importanza e il significato dei concetti di postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione, con particolare riguardo al fatto che, a partire dagli Elementi di Euclide, essi hanno permeato lo sviluppo della matematica occidentale. In coerenza con il modo con cui si è presentato storicamente, l'approccio euclideo non sarà ridotto a una formulazione puramente assiomatica.
Al teorema di Pitagora sarà dedicata una particolare attenzione affinché ne siano compresi sia gli aspetti geometrici che le implicazioni nella teoria dei numeri (introduzione dei numeri irrazionali) insistendo soprattutto sugli aspetti concettuali.

Lo studente acquisirà la conoscenza delle principali trasformazioni geometriche (traslazioni, rotazioni, simmetrie, similitudini con particolare riguardo al teorema di Talete) e sarà in grado di riconoscere le principali proprietà invarianti. Inoltre studierà le proprietà fondamentali della circonferenza.
La realizzazione di costruzioni geometriche elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali (in particolare la riga e compasso, sottolineando il significato storico di questa metodologia nella geometria euclidea), sia mediante programmi informatici di geometria.
Lo studente apprenderà a far uso del metodo delle coordinate cartesiane, in una prima fase limitandosi alla rappresentazione di punti, rette e fasci di rette nel piano e di proprietà come il parallelismo e la perpendicolarità. Lo studio delle funzioni quadratiche si accompagnerà alla rappresentazione geometrica delle coniche nel piano cartesiano. L'intervento dell'algebra nella rappresentazione degli oggetti geometrici non sarà disgiunto dall'approfondimento della portata concettuale e tecnica di questa branca della matematica.
Saranno inoltre studiate le funzioni circolari e le loro proprietà e relazioni elementari, i teoremi che permettono la risoluzione dei triangoli e il loro uso nell'ambito di altre discipline, in particolare nella fisica.

Relazioni e funzioni

Obiettivo di studio sarà il linguaggio degli insiemi e delle funzioni (dominio, composizione, inversa, ecc.), anche per costruire semplici rappresentazioni di fenomeni e come primo passo all'introduzione del concetto di modello matematico. In particolare, lo studente apprenderà a descrivere un problema con un'equazione, una disequazione o un sistema di equazioni o disequazioni; a ottenere informazioni e ricavare le soluzioni di un modello matematico di fenomeni, anche in contesti di ricerca operativa o di teoria delle decisioni.
Lo studio delle funzioni del tipo $f(x) = ax + b$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ e la rappresentazione delle rette e delle parabole nel piano cartesiano consentiranno di acquisire i concetti di soluzione delle equazioni di primo e secondo grado in una incognita, delle disequazioni associate e dei sistemi di equazioni lineari in due incognite, nonché le tecniche per la loro risoluzione grafica e algebrica.

Lo studente studierà le funzioni $f(x) = |x|$, $f(x) = \frac{a}{x}$, le funzioni lineari a tratti, le funzioni circolari sia in un contesto strettamente matematico sia in funzione della rappresentazione e soluzione di problemi applicativi. Apprenderà gli elementi della teoria della proporzionalità diretta e inversa. Il contemporaneo studio della fisica offrirà esempi di funzioni che saranno oggetto di una specifica trattazione matematica, e i risultati di questa trattazione serviranno ad approfondire la comprensione dei fenomeni fisici e delle relative teorie.
Lo studente sarà in grado di passare agevolmente da un registro di rappresentazione a un altro (numerico, grafico, funzionale), anche utilizzando strumenti informatici per la rappresentazione dei dati.

Dati e previsioni
Lo studente sarà in grado di rappresentare e analizzare in diversi modi (anche utilizzando strumenti informatici) un insieme di dati, scegliendo le rappresentazioni più idonee. Saprà distinguere tra caratteri qualitativi, quantitativi discreti e quantitativi continui, operare con distribuzioni di frequenze e rappresentarle. Saranno studiate le definizioni e le proprietà dei valori medi e delle misure di variabilità, nonché l'uso strumenti di calcolo (calcolatrice, foglio di calcolo) per analizzare raccolte di dati e serie statistiche. Lo studio sarà svolto il più possibile in collegamento con le altre discipline anche in ambiti entro cui i dati siano raccolti direttamente dagli studenti.
Lo studente sarà in grado di ricavare semplici inferenze dai diagrammi statistici. Egli apprenderà la nozione di probabilità, con esempi tratti da contesti classici e con l'introduzione di nozioni di statistica.
Sarà approfondito in modo rigoroso il concetto di modello matematico, distinguendone la specificità concettuale e metodica rispetto all'approccio della fisica classica.

Elementi di informatica
Lo studente diverrà familiare con gli strumenti informatici, al fine precipuo di rappresentare e manipolare oggetti matematici e studierà le modalità di rappresentazione dei dati elementari testuali e multimediali.
Un tema fondamentale di studio sarà il concetto di algoritmo e l'elaborazione di strate-

gie di risoluzioni algoritmiche nel caso di problemi semplici e di facile modellizzazione; e, inoltre, il concetto di funzione calcolabile e di calcolabilità e alcuni semplici esempi relativi.

SECONDO BIENNIO

Aritmetica e algebra

Lo studio della circonferenza e del cerchio, del numero π, e di contesti in cui compaiono crescite esponenziali con il numero e, permetteranno di approfondire la conoscenza dei numeri reali, con riguardo alla tematica dei numeri trascendenti. In questa occasione lo studente studierà la formalizzazione dei numeri reali anche come introduzione alla problematica dell'infinito matematico (e alle sue connessioni con il pensiero filosofico). Sarà anche affrontato il tema del calcolo approssimato, sia dal punto di vista teorico sia mediante l'uso di strumenti di calcolo.
Saranno studiate la definizione e le proprietà di calcolo dei numeri complessi, nella forma algebrica, geometrica e trigonometrica.

Geometria

Le sezioni coniche saranno studiate sia da un punto di vista geometrico sintetico che analitico. Inoltre, lo studente approfondirà la comprensione della specificità dei due approcci (sintetico e analitico) allo studio della geometria.
Studierà le proprietà della circonferenza e del cerchio e il problema della determinazione dell'area del cerchio, nonché la nozione di luogo geometrico, con alcuni esempi significativi.
Lo studio della geometria proseguirà con l'estensione allo spazio di alcuni dei temi della geometria piana, anche al fine di sviluppare l'intuizione geometrica. In particolare, saranno studiate le posizioni reciproche di rette e piani nello spazio, il parallelismo e la perpendicolarità, nonché le proprietà dei principali solidi geometrici (in particolare dei poliedri e dei solidi di rotazione).

Relazioni e funzioni

Un tema di studio sarà il problema del numero delle soluzioni delle equazioni polino-

miali. Lo studente acquisirà la conoscenza di semplici esempi di successioni numeriche, anche definite per ricorrenza, e saprà trattare situazioni in cui si presentano progressioni aritmetiche e geometriche.
Approfondirà lo studio delle funzioni elementari dell'analisi e, in particolare, delle funzioni esponenziale e logaritmo. Sarà in grado di costruire semplici modelli di crescita o decrescita esponenziale, nonché di andamenti periodici, anche in rapporto con lo studio delle altre discipline; tutto ciò sia in un contesto discreto sia continuo.
Infine, lo studente apprenderà ad analizzare sia graficamente che analiticamente le principali funzioni e saprà operare su funzioni composte e inverse. Un tema importante di studio sarà il concetto di velocità di variazione di un processo rappresentato mediante una funzione.

Dati e previsioni

Lo studente, in ambiti via via più complessi, il cui studio sarà sviluppato il più possibile in collegamento con le altre discipline e in cui i dati potranno essere raccolti direttamente dagli studenti, apprenderà a far uso delle distribuzioni doppie condizionate e marginali, dei concetti di deviazione standard, dipendenza, correlazione e regressione, e di campione.
Studierà la probabilità condizionata e composta, la formula di Bayes e le sue applicazioni, nonché gli elementi di base del calcolo combinatorio.
In relazione con le nuove conoscenze acquisite approfondirà il concetto di modello matematico.

QUINTO ANNO

Nell'anno finale lo studente approfondirà la comprensione del metodo assiomatico e la sua utilità concettuale e metodologica anche dal punto di vista della modellizzazione matematica.
Gli esempi verranno tratti dal contesto dell'aritmetica, della geometria euclidea o della probabilità ma è lasciata alla scelta dell'insegnante la decisione di quale settore disciplinare privilegiare allo scopo.

Geometria
L'introduzione delle coordinate cartesiane nello spazio permetterà allo studente di studiare dal punto di vista analitico rette, piani e sfere.

Relazioni e funzioni
Lo studente proseguirà lo studio delle funzioni fondamentali dell'analisi anche attraverso esempi tratti dalla fisica o da altre discipline. Acquisirà il concetto di limite di una successione e di una funzione e apprenderà a calcolare i limiti in casi semplici.
Lo studente acquisirà i principali concetti del calcolo infinitesimale – in particolare la continuità, la derivabilità e l'integrabilità – anche in relazione con le problematiche in cui sono nati (velocità istantanea in meccanica, tangente di una curva, calcolo di aree e volumi). Non sarà richiesto un particolare addestramento alle tecniche del calcolo, che si limiterà alla capacità di derivare le funzioni già note, semplici prodotti, quozienti e composizioni di funzioni, le funzioni razionali e alla capacità di integrare funzioni polinomiali intere e altre funzioni elementari, nonché a determinare aree e volumi in casi semplici. Altro importante tema di studio sarà il concetto di equazione differenziale, cosa si intenda con le sue soluzioni e le loro principali proprietà, nonché alcuni esempi importanti e significativi di equazioni differenziali, con particolare riguardo per l'equazione della dinamica di Newton. Si tratterà soprattutto di comprendere il ruolo del calcolo infinitesimale in quanto strumento concettuale fondamentale nella descrizione e nella modellizzazione di fenomeni fisici o di altra natura. Inoltre, lo studente acquisirà familiarità con l'idea generale di ottimizzazione e con le sue applicazioni in numerosi ambiti.

Dati e previsioni
Lo studente apprenderà le caratteristiche di alcune distribuzioni discrete e continue di probabilità (come la distribuzione binomiale, la distribuzione normale, la distribuzione di Poisson).
In relazione con le nuove conoscenze acquisite, anche nell'ambito delle relazioni della matematica con altre discipline, lo studente approfondirà il concetto di modello matematico e svilupperà la capacità di costruirne e analizzarne esempi.

FISICA

LINEE GENERALI E COMPETENZE

Al termine del percorso liceale lo studente avrà appreso i concetti fondamentali della fisica, le leggi e le teorie che li esplicitano, acquisendo consapevolezza del valore conoscitivo della disciplina e del nesso tra lo sviluppo della conoscenza fisica ed il contesto storico e filosofico in cui essa si è sviluppata.

In particolare, lo studente avrà acquisito le seguenti competenze: osservare e identificare fenomeni; formulare ipotesi esplicative utilizzando modelli, analogie e leggi; formalizzare un problema di fisica e applicare gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la sua risoluzione; fare esperienza e rendere ragione del significato dei vari aspetti del metodo sperimentale, dove l'esperimento è inteso come interrogazione ragionata dei fenomeni naturali, scelta delle variabili significative, raccolta e analisi critica dei dati e dell'affidabilità di un processo di misura, costruzione e/o validazione di modelli; comprendere e valutare le scelte scientifiche e tecnologiche che interessano la società in cui vive.

La libertà, la competenza e la sensibilità dell'insegnante - che valuterà di volta in volta il percorso didattico più adeguato alla singola classe - svolgeranno un ruolo fondamentale nel trovare un raccordo con altri insegnamenti (in particolare con quelli di matematica, scienze, storia e filosofia) e nel promuovere collaborazioni tra la sua Istituzione scolastica e Università, enti di ricerca, musei della scienza e mondo del lavoro, soprattutto a vantaggio degli studenti degli ultimi due anni.

OBIETTIVI SPECIFICI DI APPRENDIMENTO

PRIMO BIENNIO

Nel primo biennio si inizia a costruire il linguaggio della fisica classica (grandezze fisiche scalari e vettoriali e unità di misura), abituando lo studente a semplificare e modellizzare situazioni reali, a risolvere problemi e ad avere consapevolezza critica del proprio operato.

Al tempo stesso gli esperimenti di laboratorio consentiranno di definire con chiarezza il campo di indagine della disciplina e di permettere allo studente di esplorare fenomeni (sviluppare abilità relative alla misura) e di descriverli con un linguaggio adeguato (incertezze, cifre significative, grafici). L'attività sperimentale lo accompagnerà lungo tutto

l'arco del primo biennio, portandolo a una conoscenza sempre più consapevole della disciplina anche mediante la scrittura di relazioni che rielaborino in maniera critica ogni esperimento eseguito.
Attraverso lo studio dell'ottica geometrica, lo studente sarà in grado di interpretare i fenomeni della riflessione e della rifrazione della luce e il funzionamento dei principali strumenti ottici. Lo studio dei fenomeni termici definirà, da un punto di vista macroscopico, le grandezze temperatura e quantità di calore scambiato introducendo il concetto di equilibrio termico e trattando i passaggi di stato.
Lo studio della meccanica riguarderà problemi relativi all'equilibrio dei corpi e dei fluidi; i moti saranno affrontati innanzitutto dal punto di vista cinematico giungendo alla dinamica con una prima esposizione delle leggi di Newton, con particolare attenzione alla seconda legge. Dall'analisi dei fenomeni meccanici, lo studente incomincerà a familiarizzare con i concetti di lavoro ed energia, per arrivare ad una prima trattazione della legge di conservazione dell'energia meccanica totale.
I temi suggeriti saranno sviluppati dall'insegnante secondo modalità e con un ordine coerenti con gli strumenti concettuali e con le conoscenze matematiche già in possesso degli studenti o contestualmente acquisite nel corso parallelo di Matematica (secondo quanto specificato nelle relative Indicazioni). Lo studente potrà così fare esperienza, in forma elementare ma rigorosa, del metodo di indagine specifico della fisica, nei suoi aspetti sperimentali, teorici e linguistici.

SECONDO BIENNIO

Nel secondo biennio il percorso didattico darà maggior rilievo all'impianto teorico (le leggi della fisica) e alla sintesi formale (strumenti e modelli matematici), con l'obiettivo di formulare e risolvere problemi più impegnativi, tratti anche dall'esperienza quotidiana, sottolineando la natura quantitativa e predittiva delle leggi fisiche. Inoltre, l'attività sperimentale consentirà allo studente di discutere e costruire concetti, progettare e condurre osservazioni e misure, confrontare esperimenti e teorie.
Saranno riprese le leggi del moto, affiancandole alla discussione dei sistemi di riferimento inerziali e non inerziali e del principio di relatività di Galilei.
L'approfondimento del principio di conservazione dell'energia meccanica, applicato an-

che al moto dei fluidi e l'affronto degli altri principi di conservazione, permetteranno allo studente di rileggere i fenomeni meccanici mediante grandezze diverse e di estenderne lo studio ai sistemi di corpi. Con lo studio della gravitazione, dalle leggi di Keplero alla sintesi newtoniana, lo studente approfondirà, anche in rapporto con la storia e la filosofia, il dibattito del XVI e XVII secolo sui sistemi cosmologici.
Si completerà lo studio dei fenomeni termici con le leggi dei gas, familiarizzando con la semplificazione concettuale del gas perfetto e con la relativa teoria cinetica; lo studente potrà così vedere come il paradigma newtoniano sia in grado di connettere l'ambito microscopico a quello macroscopico. Lo studio dei principi della termodinamica permetterà allo studente di generalizzare la legge di conservazione dell'energia e di comprendere i limiti intrinseci alle trasformazioni tra forme di energia, anche nelle loro implicazioni tecnologiche, in termini quantitativi e matematicamente formalizzati.
Si inizierà lo studio dei fenomeni ondulatori con le onde meccaniche, introducendone le grandezze caratteristiche e la formalizzazione matematica; si esamineranno i fenomeni relativi alla loro propagazione con particolare attenzione alla sovrapposizione, interferenza e diffrazione. In questo contesto lo studente familiarizzerà con il suono (come esempio di onda meccanica particolarmente significativa) e completerà lo studio della luce con quei fenomeni che ne evidenziano la natura ondulatoria.
Lo studio dei fenomeni elettrici e magnetici permetterà allo studente di esaminare criticamente il concetto di interazione a distanza, già incontrato con la legge di gravitazione universale, e di arrivare al suo superamento mediante l'introduzione di interazioni mediate dal campo elettrico, del quale si darà anche una descrizione in termini di energia e potenziale, e dal campo magnetico.

QUINTO ANNO
Lo studente completerà lo studio dell'elettromagnetismo con l'induzione magnetica e le sue applicazioni, per giungere, privilegiando gli aspetti concettuali, alla sintesi costituita dalle equazioni di Maxwell. Lo studente affronterà anche lo studio delle onde elettromagnetiche, della loro produzione e propagazione, dei loro effetti e delle loro applicazioni nelle varie bande di frequenza.
Il percorso didattico comprenderà le conoscenze sviluppate nel XX secolo relative al mi-

crocosmo e al macrocosmo, accostando le problematiche che storicamente hanno portato ai nuovi concetti di spazio e tempo, massa ed energia. L'insegnante dovrà prestare attenzione a utilizzare un formalismo matematico accessibile agli studenti, ponendo sempre in evidenza i concetti fondanti.
Lo studio della teoria della relatività ristretta di Einstein porterà lo studente a confrontarsi con la simultaneità degli eventi, la dilatazione dei tempi e la contrazione delle lunghezze; l'aver affrontato l'equivalenza massa-energia gli permetterà di sviluppare un'interpretazione energetica dei fenomeni nucleari (radioattività, fissione, fusione).
L'affermarsi del modello del quanto di luce potrà essere introdotto attraverso lo studio della radiazione termica e dell'ipotesi di Planck (affrontati anche solo in modo qualitativo), e sarà sviluppato da un lato con lo studio dell'effetto fotoelettrico e della sua interpretazione da parte di Einstein, e dall'altro lato con la discussione delle teorie e dei risultati sperimentali che evidenziano la presenza di livelli energetici discreti nell'atomo.
L'evidenza sperimentale della natura ondulatoria della materia, postulata da De Broglie, ed il principio di indeterminazione potrebbero concludere il percorso in modo significativo.
La dimensione sperimentale potrà essere ulteriormente approfondita con attività da svolgersi non solo nel laboratorio didattico della scuola, ma anche presso laboratori di Università ed enti di ricerca, aderendo anche a progetti di orientamento.
In quest'ambito, lo studente potrà approfondire tematiche di suo interesse, accostandosi alle scoperte più recenti della fisica (per esempio nel campo dell'astrofisica e della cosmologia, o nel campo della fisica delle particelle) o approfondendo i rapporti tra scienza e tecnologia (per esempio la tematica dell'energia nucleare, per acquisire i termini scientifici utili ad accostare criticamente il dibattito attuale, o dei semiconduttori, per comprendere le tecnologie più attuali anche in relazione a ricadute sul problema delle risorse energetiche, o delle micro- e nanotecnologie per lo sviluppo di nuovi materiali).

Bibliografia

[1] Arnold V.I., *Metodi Matematici della Meccanica Classica*, Editori Riuniti University Press, (2010).

[2] Blum W., Leiss D., *Filling Up - The problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks*, Paper for the CERME4 2005 WG 13 Modelling and Applications, (2005).

[3] Blum W., Galbraith P.L., Henn H.W., Niss M., *Modelling and applications in mathematics education*, Springer, (2007).

[4] Born M., *Fisica Atomica*, Bollati Boringhieri, (1993).

[5] Carati A., Galgani L., *Fondamenti della Fisica: Heisenberg*, Dispense per il corso di Fondamenti della Fisica all'Università di Milano, (A.A. 2014/2015). Ref. online: `http://www.mat.unimi.it/users/carati/didattica/fondamenti/heisenberg.pdf`

[6] Cavalli Bertolucci C., *Lo sviluppo delle competenze di modellizzazione matematica nella scuola secondaria di secondo grado*, Tesi di Dottorato di Ricerca in Scienze Pedagogiche, dell'Educazione e della Formazione presso l'Università degli Studi di Padova, (2015). Ref. online: `http://paduaresearch.cab.unipd.it/7870/1/CavalliBertolucci_Cristina_tesi.pdf`

[7] Comoglio M., *Insegnare e apprendere con il Portfolio*, Fabbri Editore, (2004).

[8] Drago A., *Storiografia del corpo nero: rivisitazione e nuova impostazione*, Atti del XXV Congresso Nazionale di Storia della Fisica e dell'Astronomia a Milano, (2005).

[9] Fabri E., *Matematica e Fisica - Un rapporto complesso*, Bollettino Trimestrale dell'Associazione per l'Insegnamento della Fisica, (2010). Ref. online: `http://www.df.unipi.it/~fabri/sagredo/lezioni/matfis.pdf`

[10] Fedak W.A., Prentis J.J., *The 1925 Born and Jordan paper: "On quantum mechanics"*, Am. J. Phys. - Vol. 77, pp. 128-139 (2009). Ref. online: `http://people.isy.liu.se/icg/jalar/kurser/QF/references/onBornJordan1925.pdf`

[11] Graffi S., *Fondamenti Matematici della Fisica*, Alma Mater Studiorum Università di Bologna, (A.A. 2014/2015). Ref. online: `http://campus.unibo.it/89958/1/FF2012.pdf`

[12] Heisenberg W., *Quantum Theoretical Re-Interpretation of Kinematic and Mechanical Relations*, Z. Phys. - Vol. 33, pp. 879-893, (1925). Ref, online: `http://www.mat.unimi.it/users/galgani/arch/heis25ajp.pdf`

[13] Israel G., *Modelli matematici*, Editori Riuniti, (1986).

[14] Israel G., *Le immagini della matematica come strumento per l'interpretazione della realtà*, L'Educazione Matematica - Anno VIII - Serie II - Vol. 2 - Suppl. 1, pp. 57-82, (1987). Ref. online: `http://www.mat.uniroma3.it/users/primaria/Modelli1.pdf`

[15] Kangro H., *Planck's Original Papers in Quantum Physics*, Taylor and Francis Ltd, (1972).

[16] Karam R., *Introduction of the Thematic Issue on the Interplay of Physics and Mathematics*, Springer, (2015).

[17] Kirchhoff G., *Ueber das Verhältniss zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen der Körper für Wärme and Licht*, Annalen der Physick und Chemie - Vol.109, pp. 275-301, (1860).

[18] Levrini O., *Relatività ristretta e concezioni di spazio*, Giornale di fisica - XL - 4, (1999). Ref. online: `http://www.ud.infn.it/URDF/laurea/idifo1/materiali/g5/1_Levrini_Minkowski1.PDF`

[19] Malgieri L.G.M., *Il problema del corpo nero e l'origine dei quanti*, Tesi di Laurea in Fisica Teorica, Università degli studi di Bari Aldo Moro, (A.A. 2009/2010). Ref. online: `http://beta.fisica.uniba.it/Portals/1/Archivio_tesi/triennale/Malgieri.pdf`

[20] Malinvaud E., *Méthodes statistiques de l'économetrie*, Dunod, (1964).

[21] Mehra J., Rechenberg H., *The Historical Development of Quantum Theory - The Formulation of Matrix Mechanics and Its Modifications*, Springer, (1982)

[22] Mihalas D., Weibel Mihalas B., *Foundations of Radiation Hydrodynamics*, Oxford University Press, (1984).

[23] Paffuti G., *Note sulla nascita della Meccanica Quantistica*, Pisa University Press, (2013).

[24] Planck M., *Entropie und Temperatur strahlender Wärme*, Annalen der Physick - Band 1 - Reihe 306, pp. 719-737, (1900). Ref. online: `http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k15311v/f1.image.langDE`

[25] Redish J., Kuo E., *Language of physics, language of math: Disciplinary culture and dynamic epistemology*, Science and Education - Vol.24, pp. 561-590, (2014). Ref. online: `https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1409/1409.6272.pdf`

[26] Tarsitani C., *Dalla Fisica Classica alla Fisica Quantistica*, Editori Riuniti University Press, (2009).

[27] Van Der Waerden B.L., *Sources of Quantum Mechanichs*, Dover Publications, (1968).

[28] `http://www.treccani.it/enciclopedia/nicolas-bourbaki_(Enciclopedia-Italiana)/`

[29] `http://www.treccani.it/enciclopedia/postulato_(Enciclopedia-Italiana)/`

Ringraziamenti

Il primo ringraziamento va alla mia relatrice, la professoressa Alessia Cattabriga. Con lei si è creata fin da subito una grande intesa e la voglio ringraziare per il tanto tempo che mi ha dedicato. Tutto questo non sarebbe però stato possibile se non avessi incontrato, un giorno di Novembre, Laura. Mi ha salvato dal buio totale che avevo rispetto all'argomento da trattare nella tesi e mi ha fatto conoscere un gruppo di persone squisite sia dal punto di vista della competenza che da quello umano. Per me in questo periodo è stata un punto di riferimento, e per questo la ringrazio. Il terzo ringraziamento è per la professoressa Olivia Levrini, che mette tutta sè stessa per la buona riuscita del lavoro del gruppo di ricerca e che ringrazio per avere seguito con interesse anche la mia tesi. Due ringraziamenti speciali vanno al professor Giorgio Bolondi, per avere incoraggiato e seguito questo lavoro, se pur non in veste ufficiale, e al professor Giovanni Cupini, per il grosso aiuto nell'elaborazione dell'appendice A.
Detto questo, le sette pagine di ringraziamenti della triennale penso siano entrate nella storia, e ho deciso che rimarranno lì. Quest'anno mi limiterò quindi a ringraziare genericamente tutti: le mie due famiglie, i miei amici, i parenti e tutte le persone a cui voglio e che mi vogliono bene. È un ringraziamento triste? Probabilmente sì.
Ciao a tutti e grazie di essere qui!