ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

# STRATEGIE DI CALCOLO TRA STUDENTI DISCALCULICI E NON

Tesi di Laurea Magistrale in Didattica della Matematica

Relatore:
Prof.ssa
MANUELA FABBRI

Relatore:
Chiar.mo Prof.
PAOLO NEGRINI

Presentata da:
CELESTE FABBRI

I Sessione
Anno Accademico 2015-2016

*Ci sono pittori che dipingono il Sole*
*come una macchia gialla,*
*altri trasformano una macchia gialla*
*nel Sole.*

*Pablo Picasso*

# Indice

**1 Introduzione** **4**

**2 Lo sviluppo delle competenze aritmetiche** **6**

2.1 Sistemi di *start-up* neurocognitivo nell'apprendimento dei numeri e del calcolo . . . . . 6

2.1.1 Sistemi di start-up neurocognitivo . . . . . 6

2.1.2 Il sistema della stima approssimativa del numero . . . . . 7

2.1.3 Il sistema di individuazione degli oggetti multipli . . . . . 8

2.1.4 Il ruolo dell'ANS e dell'OTS nell'acquisizione dei simboli numerici 9

**3 Lo sviluppo delle abilità di calcolo** **14**

3.1 La visione neuropsicologica e neuroscientifica critica verso le teorie modulari rigide . . . . . 14

3.2 La rappresentazione del numero ed il calcolo . . . . . 15

3.3 Le proprietà della rappresentazione dei numeri . . . . . 16

3.4 Evidenze neuroanatomiche della rappresentazione del numero . . . . . 17

3.5 Ipotesi sullo sviluppo del calcolo . . . . . 18

3.6 Il sistema Attentivo Esecutivo . . . . . 22

3.7 L'apprendimento del calcolo e le funzioni esecutive . . . . . 23

**4 La discalculia Evolutiva** **24**

4.1 Abilità quantitative primarie e normale sviluppo dell'aritmetica . . . . . 25

4.2 La discalculia e sue conseguenze . . . . . 26

4.3 Strumenti di valutazione e trattamento . . . . . 28

4.4 Disturbi nella soluzione dei problemi matematici . . . . . 31

4.5 Percorso diagnostico nella discalculia evolutiva . . . . . 33

4.5.1 La richiesta di consulenza ed il colloquio clinico/anamnestico . . . 33

4.5.2 La diagnosi . . . . . 34

**5 Strategie di calcolo nella scuola secondaria** **36**

5.1 Ricerca alla scuola secondaria di primo grado . . . . . 37

5.1.1 Area del numero . . . . . 37
5.1.2 Area del calcolo . . . . . 38
5.1.3 Principali differenze tra i ragazzi DSA e quelli non clinici . . . . . 39

**6 Sperimentazione didattica in una scuola secondaria di secondo grado ed elaborazione dei dati raccolti 41**
6.1 PARTE A . . . . . 43
6.1.1 Esercizio 1 . . . . . 43
6.1.2 Esercizio 2 . . . . . 60
6.1.3 Esercizio 3 . . . . . 65
6.1.4 Esercizio 4 . . . . . 71
6.1.5 Esercizio 5 . . . . . 75
6.1.6 Esercizio 6 . . . . . 79
6.2 PARTE B . . . . . 83
6.2.1 Esercizio 1 . . . . . 83
6.2.2 Esercizio 2 . . . . . 88
6.2.3 Esercizio 3 . . . . . 95
6.2.4 Esercizio 4 . . . . . 98
6.3 Conclusioni . . . . . 104

**7 Appendici 111**
7.1 L'architettura della memoria . . . . . 111
7.2 LEGGE 8 ottobre 2010, n. 170 . . . . . 113
7.3 Decreto Ministeriale 5669 del 12 luglio 2011 . . . . . 118

# Capitolo 1

# Introduzione

Nel seguente elaborato sono stati studiati i circuiti neurali addetti all'elaborazione matematica, a partire da quelli di start-up neurocognitivo per l'apprendimento del numero e del calcolo, capacità che sembrano risultare innate e già presenti fin dalla nascita. Sono stati individuati come protagonisti il *sistema della stima approssimativa del numero* o *ANS*, addetto a rappresentare la cardinalità di un insieme in modo lineare ma compresso, ed il *sistema di individuazione degli oggetti multipli* o *OTS*, essenziale per visualizzare gli oggetti di un insieme come entità separate, che però, ha una capacità limitata a 3 o 4 oggetti per volta. Per confermare l'utilizzo di questi due sistemi sono state indagate le evidenze comportamentali e di neuroimmagini relative ad ognuno, rivelando un ruolo prioritario dell'ANS rispetto all'OTS. Le difficoltà relative all'apprendimento matematico, spesso, sono dovute alla difficile interazione tra i vari sistemi e le loro sottocomponenti che vengono continuamente riprogrammate dall'esecutivo centrale durante le attività più complicate.
Per la costruzione e lo sviluppo del calcolo nelle sue forme più elevate, in generale, occorrono alcune abilità di base come il concetto di corrispondenza biunivoca, l'ordinamento di un insieme ed i concetti di maggioranza, di raddoppio e di dimezzamento, per mezzo dei quali è possibile scomporre ogni operazione in una serie di operazioni molto più semplici. Un ruolo fondamentale di controllo su queste abilità è assicurato dal Sistema Attentivo Esecutivo, che presiede tutte le attività neurali e coordina le funzioni esecutive che cooperano nel processo di *problem solving*.
I ragazzi che mostrano deficit altamente specifici in una o più capacità matematiche di base vengono definiti *discalculici* e sono caratterizzati da circuiti cerebrali dell'emisfero sinistro deficitari, che portano all'incapacità di comprendere i concetti base delle operazioni ed a difficoltà notevoli nell'impostare e autosupervisionare una strategia vincente che possa portare alla corretta risoluzione di un esercizio. La diagnosi non è sempre facile, poichè il numero di diagnosi tardive è ancora molto elevato e scarseggia la presenza di test adeguati agli anni di scolarità più alti; per cercare di migliorare questa situazione, sono state emanate la legge 170 del 2010 ed il decreto ministeriale 5669 del

2011 per favorire la diagnosi precoce del disturbo. Bisogna prestare attenzione anche alla comorbilità con altri disturbi specifici dell'apprendimento, in quanto si è dimostrato che circa il 60% dei ragazzi dislessici presentano anche discalculia, pertanto sono necessari test completi e ben strutturati che coinvolgano i vari sistemi implicati.
In realtà i ragazzi ad avere un rapporto conflittuale con la matematica sono molti di più dei ragazzi discalculici; a tal proposito ho svolto una sperimentazione didattica in 10 classi di una scuola secondaria di secondo grado a forte presenza di materie scientifiche, per verificare se i ragazzi (del primo e secondo anno) avessero o meno appreso i concetti di base della scuola secondaria di primo grado, ed eventualmente di individuare le maggiori problematiche incontrate. A conferma delle medie nazionali o mondiali, i dati ottenuti non sono confortanti, neanche negli esercizi dove è stato permesso loro l'utilizzo della calcolatrice, lasciando dedurre che, forse, il problema principale risiede negli errori di concetto piuttosto che in quelli di calcolo.

# Capitolo 2

# Lo sviluppo delle competenze aritmetiche

## 2.1 Sistemi di *start-up* neurocognitivo nell'apprendimento dei numeri e del calcolo

L'attribuzione di un significato reale a dei simboli arbitrari come numeri o parole è un processo molto complesso che mette le radici nei primi mesi di vita di ogni bambino. Nel caso dei numeri è stato intuito che questo processo si basi su due diversi sistemi preverbali addetti alla quantificazione degli insiemi di oggetti concreti, che tutti i bambini possiedono ed adoperano in maniere differenti:

- il **sistema della numerosità approssimativa** o **ANS** (acronimo dell'inglese *approximate number system*)
- il **sistema di individuazione di oggetti multipli** o **OTS** (da *multiple object tracking system*)

Questi due sistemi si basano su circuiti neurali parzialmente separabili e, pertanto, maturano seguendo traiettorie di sviluppo distinte e sono caratterizzati da specifici limiti computazionali. Analizzando i dati ad oggi disponibili, è possibile sostenere che l'ANS abbia un ruolo fondatore e cruciale nell'apprendimento di concetti numerici astratti e del calcolo verbale/simbolico.

### 2.1.1 Sistemi di start-up neurocognitivo

Alcune teorie sullo sviluppo cognitivo asseriscono che l'acquisizione di competenze cognitive complesse si basi su un insieme limitato di sistemi di *conoscenze di base*, cioè su alcune rappresentazioni dominio-specifiche precoci, forse addirittura **innate**, che guidano l'apprendimento durante lo sviluppo, limitandolo per certi versi.

Questa idea si concilia bene con la proposta che l'apprendimento consista in una parziale riconversione, detta *riciclaggio corticale*, di un numero limitato di circuiti cerebrali, che inizialmente vengono utilizzati per sostenere funzioni cognitive semplici (come il riconoscimento di oggetti o la quantificazione di insiemi), ma sufficientemente plastici da poter cambiare il loro schema di calcolo, in modo da poter supportare nuove capacità (come la lettura o il calcolo aritmetico). Combinando questi due concetti si ottiene la definizione della nozione di "sistema di start-up neurocognitivo".

### 2.1.2 Il sistema della stima approssimativa del numero

Il numero approssimativo degli oggetti che compongono un insieme è una caratteristica del mondo sensoriale, esattamente come la loro forma o la loro dimensione e, come tale, molte specie animali sono in grado di estrarlo spontaneamente. Non è difficile capire l'importanza evolutiva della propensione al numero ed al calcolo nel mondo animale, infatti questa può essere cruciale nella ricerca di cibo o nella messa in atto di strategie riproduttive. Queste rappresentazioni numeriche in animali non umani, anche se non sono accurate, possono essere combinate in modo da eseguire operazioni più o meno complesse, come il confronto tra insiemi o l'addizione/sottrazione tra oggetti simili.
Anche negli esseri umani avviene una codifica spontanea del numero approssimativo, che si può riscontrare fin dalle prime ore di vita. In questo caso avviene sia se gli elementi provengono da modalità sensoriali uguali che diverse: ad esempio, neonati di poche ore, abituati ad ascoltare per alcuni minuti sequenze di un determinato numero di suoni (esempio 5 suoni), successivamente guardano più a lungo insiemi di oggetti presentati visivamente che corrispondono numericamente ai suoni precedentemente uditi (esempio 5 pallini) rispetto ad insiemi che numericamente non corrispondono. Questo suggerisce la presenza di un sistema molto precoce, l'ANS appunto.
L'ANS ha due caratteristiche:

1. rappresenta la cardinalità o numerosità di un insieme, cioè la proprietà che si riferisce al numero approssimativo degli elementi dell'insieme stesso.

2. rappresente la numerosità in modo non lineare ma compresso, cioè grandi numerosità vengono rappresentate in modo molto meno preciso rispetto a quelle piccole.

A causa della seconda caratteristica dell'ANS due insiemi sono discriminabili solo se differiscono di un determinato rapporto numerico minimo, seguendo la *legge di Weber.*
La legge di Weber è una relazione psicofisica che descrive il rapporto tra la grandezza fisica e la grandezza percepita di uno stimolo. Essa afferma che la soglia di discriminazione (anche definita *minima differenza percepibile*) tra due stimoli aumenta in modo lineare con l'intensità degli stimoli stessi:

$$Dp = K \cdot \frac{Ds}{S} \tag{2.1}$$

Dp = minima differenza percepibile
Ds = differenza fisica
S = intensità dello stimolo
La legge di Weber (dimostrata da Fechner nel 1860) si può spiegare postulando una relazione logaritmica tra lo stimolo reale (come il numero di oggetti di un insieme) e la sua rappresentazione interna (come la rappresentazione della numerosità dell'insieme).
L'acuità dell'ANS non è costante, varia da individuo a individuo e con l'età, aumentando da 1:3 alla nascita a 7:8 a circa 20 anni di età.

### 2.1.3 Il sistema di individuazione degli oggetti multipli

L'OTS è il sistema grazie al quale gli oggetti vengono rappresentati come entità separate che possono essere monitorate nel tempo e nello spazio. I principi su cui si basa sono diversi tra cui quello di *coesione spazio-temporale* ( $\Rightarrow$ gli oggetti si muovono come entità rigide), quello di *continuità* ( $\Rightarrow$ gli oggetti si muovono seguendo percorsi senza ostacoli) e quello di *contatto* ( $\Rightarrow$ gli oggetti non interagiscono a distanza). Questi principi consentono ai neonati umani, ed in genere animali, di percepire i contorni degli oggetti, prevedere spostamenti ed il percorso seguito.
Una caratteristica importante di questo sistema è il fatto che esso sia limitato a 3-4 unità: possiamo portare l'attenzione su non più di 3 o 4 oggetti per volta. Questa proprietà è stata confermata utilizzando diversi test, come compiti di memoria a breve termine, in cui si è potuto notare che singole caratteristiche (colore, forma, ...) di un piccolo e limitato gruppo di oggetti possono essere accuratamente conservate in memoria solo quando il numero di oggetti non è troppo elevato (*SPAN di memoria visuo-spaziale a breve termine*), oppure tramite il monitoraggio di oggetti multipli (MOT), in base al quale solo un limitato numero di 3 o 4 elementi in movimento possono essere controllati contemporaneamente (*SPAN di monitoraggio di oggetti multipli*).
Anche nei compiti di enumerazione è evidente l'esistenza dell'OTS: siamo in grado di determinare la numerosità di piccoli gruppetti di 3 o 4 elementi con precisione molto elevata e ad alta velocità. Questo fenomeno è chiamato *subitizzazione* e avviene anche quando gli insiemi sono presentati per breve tempo o mascherati visivamente. Per gruppi con più di 3 o 4 elementi l'enumerazione è possibile solo utilizzando il conteggio, tramite il quale si ottiene una quantificazione esatta della numerosità, oppure si effettua una stima approssimativa, che riflette le proprietà computazionali dell'ANS.
Anche l'OTS è variabile da individuo a individuo ed è soggetto a maturazione: il limite di capacità dell'OTS si sviluppa rapidamente nel corso del primo anno di vita, passando da un singolo oggetto a circa 6 mesi, a 3-4 già a 12 mesi.

### 2.1.4 Il ruolo dell'ANS e dell'OTS nell'acquisizione dei simboli numerici

Durante l'apprendimento i numeri interi positivi, intesi come simboli che descrivono quantità numeriche esatte, acquisiscono significato grazie alla messa in corrispondenza dei simboli numerici (ad esempio la parola "tre" o la cifra "3") con le rappresentazioni delle quantità già presenti nella mente del bambino. Ma qual è il ruolo vero e proprio dei due sistemi?

**Evidenze a favore di un ruolo fondamentale dell'ANS nell'apprendimento dei simboli numerici**

- *EVIDENZE COMPORTAMENTALI*
  Non appena i bambini iniziano ad apprendere il significato dei numeri sembrano comparire le prime tracce delle caratteristiche dell'ANS: è stato dimostrato che bambini della scuola dell'infanzia (4-5 anni) che non sono ancora a conoscenza delle procedure del calcolo esatto con numeri a più cifre, riescono a risolvere operazioni aritmetiche con numeri a due cifre, utilizzando in modo spontaneo il loro senso della quantità approssimativa. Inoltre si è notato che la loro prestazione in compiti di confronto di numerosità concrete è correlata con la loro conoscenza e padronanza dei simboli numerici, nonchè con le loro prestazioni matematiche a scuola alcuni mesi dopo. Tale correlazione è indipendente dalle loro capacità di lettura o dalla loro intelligenza generale. Crescendo, i bambini imparano procedure di calcolo esatto e a risolvere compiti numerici simbolici con alta precisione; tuttavia tracce dell'ANS si possono rilevare anche tra gli adulti, che ad esempio fanno meno errori e sono più veloci a confrontare due numeri con rapporto tra di loro elevato.
- *EVIDENZE DI NEUROIMMAGINI*
  Ulteriori prove del fatto che i simboli numerici vengano appresi facendo riferimento a rappresentazioni approssimative della numerosità pre-esistenti, provengono da ricerche sulle neuroimmagini che mostrano l'invarianza dell'attivazione alla quantità numerica della corteccia parietale in relazione alla modalità di presentazione dello stimolo. In primo luogo, l'attività metabolica ed elettrica delle regioni cerebrali parietali viene modulata dagli effetti di distanza e di grandezza numerica, sia per quanto riguarda i numeri arabi che per quantità numeriche concrete. In secondo luogo, l'attività che dipende dalla quantità numerica è indipendente dalla modalità, simbolica o non simbolica, con cui si sceglie di presentare lo stimolo: la risposta parietale ad un cambiamento di numero è proporzionale al rapporto tra

le due quantità numeriche presentate anche se in modalità diverse l'una dall'altra. È interessante notare che, però, questo effetto non è completamente bidirezionale: l'adattamento a quantità concrete si estende alle cifre arabe, mentre il contrario non si verifica. Questo suggerisce che il codice per le quantità nella corteccia parietale al quale attingono i numeri simbolici sia più preciso rispetto a quello al quale fanno riferimento le quantità non simboliche, nonostante anche per i numeri simbolici la codifica rimanga parzialmente approssimativa e compressa.

- *RELAZIONE TRA LA TRAIETTORIA DI SVILUPPO DELL'ANS E LE PRIME TAPPE DELL'ACQUISIZIONE DEI SIMBOLI NUMERICI*
  Una caratteristica che può sorprendere molti è che l'acquisizione lessicale nel dominio dei numeri si tratta di un processo estremamente lento. I bambini piccoli, attorno ai 2 anni, capiscono che i numeri sono delle parole che si riferiscono a quantità concrete e a circa 4 anni iniziano a comprendere i principi di conteggio; nel frattempo imparano ad associare i numeri da 1 a 4 alla relativa cardinalità in modo sequenziale, e, prima di passare alla comprensione del numero successivo, a volte possono passare anche 6 mesi. Alcuni sostengono che le cause di questa lentezza siano da ricercare nella necessità di dover conciliare due insiemi tra loro incompatibili: l'ANS, che rappresenta in modo approssimativo la cardinalità di un insieme, e l'OTS, con capacità 3-4 elementi, che supporta l'identificazione di oggetti e fornisce, in maniera indiretta, la nozione di cardinalità esatta. Altri ritengono che l'acquisizione lessicale si basi unicamente sul sistema di identificazione degli oggetti (OTS) senza il minimo contributo da parte dell'ANS ed attribuiscono la serialità e la lentezza di questo processo al fatto che i bambini debbano apprendere la funzione successore e ciò risulta abbastanza difficoltoso. Un ultimo punto di vista, particolarmente interessante, è che due caratteristiche dell'ANS possono da sole spiegare il processo di acquisizione lessicale dei numeri da 1 a 4 nei bambini: innanzitutto, l'ANS non si limita alla rappresentazione di grandi numerosità, ma si estende a tutte le numerosità, ed in secondo luogo, grazie alle sue proprietà weberiane ed in virtù del fatto che la precisione con cui rappresenta la numerosità aumenti durante lo sviluppo, l'ANS rappresenta le quantità numeriche piccole con estrema precisione nel corso del primo anno di vita. Per poter avere una rappresentazione della numerosità di un insieme di $N$ elementi, condizione necessaria per l'acquisizione del significato del termine lessicale usato per denotare $N$, è necessario poter discriminare con elevata accuratezza insiemi di $N$ elementi da insiemi numericamente adiacenti (di $N-1$ e $N+1$ elementi). Quindi, i bambini potranno capire il significato della parola "quattro" solo quando saranno in grado di distinguere con accuratezza un insieme di quattro elementi da insiemi di tre e di cinque elementi (ciò si verifica attorno al terzo anno di vita).

- *L'ANS E LA DISCALCULIA EVOLUTIVA*
  L'ipotesi che l'ANS sia un sistema di start-up nell'apprendimento dei numeri e del conteggio dovrebbe, a questo punto, avere come tesi che una debolezza iniziale dell'ANS dovrebbe generare difficoltà nell'acquisizione del significato dei numeri, del conteggio e del calcolo. Una supposizione a tal proposito è che i bambini con discalculia dovrebbero mostrare un alterato sviluppo dell'ANS. Questa previsione ha avuto di recente conferma grazie ad una ricerca in cui sono stati studiati bambini discalculici di età compresa tra 8 e 12 anni, diagnosticati tali da una batteria standardizzata (BDE). Le prestazioni di questo gruppo di bambini sono poi state confrontate con quelle di un altro gruppo di bambini non discalculici della stessa età e con QI equivalente e con un gruppo di bambini della scuola dell'infanzia. L'acuità dell'ANS del primo gruppo è risultata compromessa rispetto al gruppo di pari età, quantificabile come un ritardo di almeno 5 anni.
  Coerentemente con le conoscenze riguardanti le basi neurali dell'ANS, la discalculia è stata associata ad una diminuzione del solco intraparietale durante compiti di confronto tra quantità concrete e di calcolo aritmetico, e ad alterazioni anatomiche di questa regione cerebrale. Tuttavia è tutt'oggi difficoltoso stabilire se queste alterazioni siano la causa o la conseguenza della discalculia e del mancato apprendimento dei numeri simbolici e del calcolo.

**Evidenze a favore (e non) di un ruolo fondamentale dell'OTS nell'apprendimento dei simboli numerici**
Alcune teorie propongono l'OTS come sistema fondamentale nell'acquisizione dei numeri simbolici perchè, innanzitutto, fornisce il concetto di numero esatto e permette la comprensione della funzione successore tra numeri adiacenti.

- *TRACCE DELLE CARATTERISTICHE DELL'OTS NELLA RAPPRESENTAZIONE DI SIMBOLI NUMERICI*
  Il vincolo strutturale più significativo dell'OTS è che esso si limita a piccoli gruppi di elementi. La prova di un ruolo importante dell'OTS nell'apprendimento dei numeri è che, all'inizio, i bambini imparano i numeri fino a 4 e solo successivamente comprendono i principi del conteggio, estendendo, quindi, la loro conoscenza ad insiemi più grandi. Quando i principi di conteggio sono stati acquisiti, tuttavia, le tracce dell'OTS per quanto riguarda i numeri simbolici sembrano scomparire. Al contrario, tra le peculiarità dell'elaborazione dei numeri ci sono gli effetti di distanza e grandezza numerica, che, combinati tra loro, costituiscono l'effetto di rapporto e che sfruttano una rappresentazione del numero come quantità analogica su un continuo logaritmico, aspetti tipici dell'ANS non dell'OTS. Perdipiù non vi

è alcuna prova di neuroimaging in bambini o adulti che mostri attivazione specifica di numeri simbolici che rifletta una discontinuità intorno alle regioni corticali precedentemente associate all'OTS. I dati degli studi neuropsicologici non sono più incoraggianti: la discalculia non è sistematicamente (e nemmeno spesso) associata a disturbi legati al monitoraggio di oggetti multipli.

- *RELAZIONE TRA LA TRAIETTORIA DI SVILUPPO DELL'OTS E LE PRIME TAPPE DELL'ACQUISIZIONE DEI SIMBOLI NUMERICI*
  La capacità dell'OTS, ovvero il numero di oggetti che si possono identificare in parallelo, si sviluppa molto rapidamente durante il primo anno di vita di ogni bambino: in media i neonati raggiungono la capacità di un adulto di monitorare 3-4 oggetti contemporaneamente già attorno ai 12 mesi. Questo vuol dire che entro il primo anno di vita i bambini possiedono già 3 o 4 *puntatori attentivi*[1] che possono essere utilizzati per discriminare insiemi da 1 a 3 o 4 elementi. In linea con questa caratteristica, se l'acquisizione lessicale nei bambini piccoli si sviluppasse realmente a partire dall'OTS, questi dovrebbero essere in grado di apprendere il significato delle parole "uno", "due", "tre" e forse "quattro" in contemporanea e con poco sforzo. Invece, come è già stato evidenziato, l'acquisizione lessicale dei i primi numeri è un processo terribilmente lento e rigorosamente seriale. L'ipotesi che questa serialità nell'acquisizione del significato dei numeri sia causata dalla corrispondente serialità del conteggio verbale non è affatto convincente; in effetti i numeri come sequenza sono acquisiti molto prima della consapevolezza del loro significato: la maggior parte dei bambini che dimostrano di comprendere solo il significato della parola "uno", possono già essere in grado di recitare la sequenza dei numeri fino a 10, ma senza capirne il significato. Inoltre vi sono prove del fatto che in bambini o neonati l'OTS possa addirittura distogliere l'attenzione dalla numerosità dell'insieme come totalità, infatti nel sistema OTS gli oggetti sono rappresentati come individui singoli con determinate caratteristiche e quando i bambini elaborano piccoli gruppi di questi oggetti, spesso prestano più attenzione a queste caratteristiche piuttosto che alla numerosità. Per tutte queste motivazioni risulta difficile immaginare che un sistema che spesso interferisce con i compiti numerici possa essere rilevante nell'apprendimento di rappresentazioni numeriche simboliche ancora più complesse.

- *L'OTS E LA DISCALCULIA EVOLUTIVA*
  Fino ad oggi non sembrano esserci relazioni fra la discalculia ed una eventuale compromissione dell'OTS. Sono state ricercate alterazioni nel subitizing o prove di una ridotta capacità di memoria visuo-spaziale a breve termine: al contrario, la discalculia sembra essere associata a un rallentamento nel conteggio seriale che si

[1] Il puntatore attentivo rappresenta un "cerchio" che focalizza l'attenzione in una determinata regione dello spazio innanzi a noi.

effettua per quantificare insiemi di più di quattro elementi, che quindi non rientrano nel subitizing. Per quanto riguarda la memoria visuo-spaziale a breve termine, alcuni studi hanno riportato alterazioni nella discalculia, ma sono stati utilizzati in genere compiti che non valutano il puro span visuo-spaziale, quanto abilità più complesse come l'elaborazione degli stimoli in sequenza o la coordinazione visuo-motoria, perciò non permettono di trarre conclusioni convincenti sulla relazione tra OTS e discalculia.

Alcune riflessioni conclusive al riguardo di questa argomentazione sono che gli esseri umani possiedono già alla nascita potenti strumenti che permettono di interpretare le quantità numeriche approssimative e le relazioni che intercorrono tra le numerosità. Alcuni dati suggeriscono che l'acquisizione culturale dei simboli che rappresentano le quantità numeriche esatte si basi su questo insieme di intuizioni pre-esistenti, mentre non ci sono dimostrazioni convincenti che supportino l'implicazione del sistema di individuazione di oggetti multipli nell'apprendimento dei simboli per i numeri. Dai dati di neuroimaging si può evincere che le rappresentazioni esatte di numeri emergono attraverso significativi cambiamenti degli schemi di codifica di popolazioni di neuroni della corteccia parietale, che inizialmente codificano approssimativamente la quantità numerica. Studi più attuali sono volti a chiarire il ruolo del linguaggio e delle competenze visuo-spaziali coinvolte durante l'apprendimento dei principi del conteggio e del calcolo semplice, come ad esempio l'attenzione seriale o il puntatore, che servono per instaurare i principi di corrispondenza *uno-a-uno* molto importanti nelle prime tappe dell'apprendimento dell'enumerazione e del calcolo.
Tuttavia, nonostante l'evidenza attuale suggerisca l'ANS come sistema di start-up fondamentale nella costruzione del pensiero numerico simbolico, emerge una forte necessità di dati comportamentali e di neuroimaging atti a descrivere e comprendere i cambiamenti cognitivi e neurali che si verificano nel periodo cruciale durante il quale i bambini acquisiscono i numeri simbolici ed imparano i principi del conteggio. Saranno di capitale importanza studi longitudinali che metteranno in relazione il sistema di quantificazione innata prima, durante e dopo l'acquisizione dei numeri simbolici, con la velocità, la facilità e la precisione di questo apprendimento.
Questo sarà il punto di partenza per nuove scoperte su come gli esseri umani riescano a costruire un insieme singolarmente ricco di rappresentazioni astratte, anche se vincolati dalle limitazioni imposte dall'architettura funzionale del loro cervello.

# Capitolo 3

# Lo sviluppo delle abilità di calcolo

Il Sistema Attentivo Esecutivo possiede un ruolo centrale nell'apprendimento ed in modo specifico nel calcolo, ma prima di parlare di questa sua influenza è necessario delineare le peculiarità dei singoli sistemi e dei processi coinvolti durante l'interazione tra le diverse abilità necessarie a calcolare. In questo capitolo verrà analizzato nel dettaglio il sistema dei numeri, scomponendo tale dominio in diverse sottocomponenti in modo da comprendere le basi fondanti del calcolo. Al termine di questo studio verrà evidenziata l'influenza del Sistema Attentivo Esecutivo sullo sviluppo del calcolo.

## 3.1 La visione neuropsicologica e neuroscientifica critica verso le teorie modulari rigide

Grazie alle conoscenze che ad oggi possediamo, diventa sempre più difficile accettare la definizione di *modulo* per sistemi specifici come il linguaggio, la percezione o quelli ancora più complessi come la lettura, la scrittura ed il calcolo. Tali sistemi non possono assolutamente essere incapsulati e, pur avendo la loro identità precisa, condividono molti servosistemi e sono penetrabili dai processi di *top down*, che intervengono sui moduli come *sistemi centrali o di controllo*, soprattutto sotto spinte motivazionali ed emotive. Le rigidità fodoriane, inesistenti in natura, vengono superate, sostituendo ai moduli i *dominii specifici*, che sono intesi come insiemi di rappresentazioni che fanno da supporto ad una specifica area della conoscenza (come il linguaggio, la lettura o il numero). Pertanto l'elaborazione di informazioni può essere considerata un'attività di dominio specifica, ma non incapsulata. Questa teoria è stata elaborata nel 1992 da Karmiloff-Smith, la quale aggiunge che vi sarebbe una predisposizione innata alla modularizzazione che necessita, però, di particolari input inviati dall'ambiente. È evidente in questa teoria l'influenza del *costruttivismo piagetiano*, secondo cui la presenza di un ambiente stimolante è essenziale per lo sviluppo appieno delle predisposizioni genetiche. La specificità dei dominii garantisce un apprendimento ordinato e non caotico da parte del bambino e la flessibilità del sistema intellettivo viene assicurata dalla possibilità di poter continuamente ridescrivere e riscrivere le rappresentazioni della conoscenza specifica. Avviene quindi una continua condivisione di informazioni, che non può certamente essere garantita da sistemi incapsulati ed indipendenti come i moduli. Nonostante tutto, alcuni aspetti del conteggio possono comunque essere considerati modulari: una volta automatizzato, il contare in avanti risulta essere un esercizio linguistico modulare, ma ripetere gli stessi numeri contando all'indietro diventa un'azione che impegna particolarmente il Sistema Attentivo Esecutivo e, di specifico, rimane solo il dominio entro cui si svolge tale conteggio. Alcune teorie molto recenti (come quella di Benso, 2010), suggeriscono che ci sia un *continuum* tra i moduli ed i sistemi centrali, che permette di eseguire alcune azioni automatizzate in modo appunto modulare ed altre ricorrendo ad un controllo più elevato. Processi complessi come il calcolo, che implicano una grande quantità di competenze differenti, potranno solo essere relativamente automatizzabili in alcuni aspetti, ma mai completamente. Un altro elemento importante da considerare è la componente emotiva: in situazione di routine si può approssimare il lavoro di calcolo come modulare, ma in situazioni di forte stress emotivo i processi centrali monitorizzano, ricontrollano e riprogrammano continuamente i moduli delle competenze di base, a discapito di efficienza e fluidità.

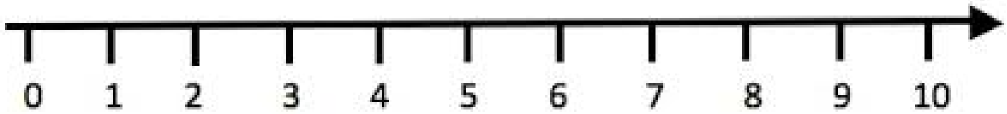
## 3.2 La rappresentazione del numero ed il calcolo

Come è già stato detto nel capitolo precedente, il sistema che concerne la rappresentazione del numero è un sistema precocissimo, che va poi a svilupparsi col tempo. Come prova del fatto che le prime concezioni del numero sono presenti già nei neonati, riportiamo di seguito un paio di esempi dimostrativi: Xu e Spelke, nel 2000, hanno sperimentato la cognizione numerica attraverso il metodo dell'abituazione, mentre Hauser e Wynn, tra il 1992 e il 1996, si sono concentrati sulla consapevolezza di risultati possibili o meno.
Per quanto riguarda il primo esperimento, sono stati mostrati ai neonati dei cartelloni con disegnati dei pallini, variando in ognuno la loro dimensione e disposizione nello spazio, ma mantenendo costante la loro numerosità. Si è notato che, dopo alcune presentazioni, l'infante inizia a disinteressarsi ai cartelloni, ma è sufficiente variare il numero dei pallini per catturarne nuovamente l'attenzione. Questo sembra deporre a favore di una forte predisposizione dominio specifica, sensibile al cambiamento di numerosità nel senso di maggioranza. Nei bambini di 6 mesi, però, la minima differenza percepibile deve avere un rapporto di almeno 1:2 (se, quindi nel primo cartellone sono presenti 5 pallini, allora nel secondo devono essere almeno 10); verso i 9 mesi, invece, riescono già a discriminare differenze con un rapporto di 2:3 (quindi passare da 10 pallini a 15) ed entro l'anno si sviluppa ulteriormente, fino a raggiungere la sensibilità degli adulti ad un rapporto di 7:8.
Ancora più sorprendenti sono gli esperimenti di Hauser, per quanto riguarda gli animali,

e di Wynn sui bambini di 5 mesi che cercano di dimostrare la consapevolezza di essere di fronte a risultati possibili o impossibili di semplici somme o sottrazioni. Ad esempio, venivano mostrati piccoli gruppetti di pupazzi (2 o 3), nascosti successivamente da uno schermo; dopodichè veniva mostrato che uno dei pupazzi veniva tolto (o aggiunto) dal resto del gruppo: se quando lo schermo veniva rimosso, il risultato era coerente con l'azione che il bambino aveva visto, questo guardava i pupazzi per molto meno tempo rispetto a se il risultato non coincideva con quello atteso ($2-1=2$). Un'interessante osservazione è che i bambini erano colpiti soprattutto dall'incongruenza matematica piuttosto che dal fatto che gli oggetti potessero cambiare.
Come afferma Karmiloff-Smith, il dominio dei numeri è specifico, ma non possiede le rigidità modulari applicabili a sistemi molto meno complessi.

## 3.3 Le proprietà della rappresentazione dei numeri

La *linea dei numeri* è una rappresentazione spaziale della disposizione dei numeri: il suo




utilizzo inconscio da parte degli esseri umani è evidente in diversi compiti. Curiosamente, sembra che soltanto il 14% dei soggetti affermi di vedere "realmente" rappresentati nella mente i numeri su questa linea, è più frequente che si riferiscano a colori associati al numero, come i colori che vengono utilizzati nelle scuole primarie per distinguere unità, decine, centinaia, ecc. Tuttavia ci sono diverse evidenze che confermano una larga diffusione del modello visuo-spaziale, come sostegno della linea dei numeri. Uno degli *effetti* che confermano tale ipotesi è l'*effetto distanza*, che si manifasta quando si è più rapidi nel decidere se 10 è più grande di 3 piuttosto che se 7 è maggiore di 5; un altro è l'*effetto grandezza*, che emerge chiaramente quando, a parità di distanza tra i numeri, è più facile decidere il maggiore tra due numeri se nella coppia i due numeri sono piccoli (siamo più rapidi a decidere se 9 è maggiore di 6 rispetto a 59 e 56). Ciò porta, appunto, ad ipotizzare l'esistenza di una rappresentazione spaziale, che aiuti a visualizzare la disposizione dei numeri, la linea dei numeri appunto. Tale linea, però, non è formata da spazi tutti uguali tra i numeri, ma si ipotizza, anche in questo caso, un andamento logaritmico secondo la legge di Weber; per coppie di numeri più grandi, infatti, lo spazio tra i numeri risulta contratto ed è per questo che la decisione per quanto riguarda il maggiore o minore è più difficoltosa.
Uno degli esperimenti che si sono effettuati per provare l'esistenza della linea dei numeri è dato dall'*effetto SNARC*(Spatial Numerical Association of Response Code) eseguito da Dehane, Bossini e Giraux nel 1993. Tale esperimento si basa sull'*effetto di compatibilità*

*spaziale*, dove si dimostra che si è più veloci a rispondere con la mano destra a stimoli che vengono presentati nell'emicampo visivo destro piuttosto che in quello sinistro, e vale lo stesso anche per quanto riguarda il lato sinistro. Equivalentemente, nell'effetto SNARC, i soggetti devono prendere in considerazione le prime quattro cifre dispari (1, 3, 5, 7) e le prime quattro cifre pari (2, 4, 6, 8) ed il loro compito consiste nel rispondere, più velocemente possibile, con la mano sinistra alle cifre dispari e con la destra alle pari. In questo caso, però, le cifre vengono presentate al centro dello schermo, non in un lato, eppure comunque si verifica l'effetto di compatibilità spaziale. Nelle culture dove la linea dei numeri è orientata da sinistra verso destra, cioè nei paesi in cui si insegna a leggere in tale senso, si è osservato che i soggetti sono più veloci a rispondere con la mano destra al numero 8 rispetto al numero 2, in quanto, nella rappresentazione con il numero 5 al centro, l'8 appare a destra e il 2 a sinistra.
L'influenza delle rappresentazioni visuo-spaziali è, perciò, evidente; insieme alle abilità che andremo ad evidenziare successivamente, queste sono i prerequisiti che favoriscono lo sviluppo delle competenze aritmetiche e dei sistemi di calcolo, senza dimenticarci le tabelline ed fatti aritmetici automatizzati, dove è necessario anche il supporto del sistema linguistico.

## 3.4 Evidenze neuroanatomiche della rappresentazione del numero

I circuiti neuronali che Dehane e colleghi, nel 2003, isolano come riguardanti il calcolo sono tre:

1. Il **segmento orizzontale del solco intraparietale bilaterale** sembra essere il cuore dell'area che sostiene anatomicamente la rappresentazione e la manipolazione dei numeri. Andando a vedere le relative neuroimmagini si poò osservare che tale area si attiva maggiormente all'aumentare della complessità del compito richiesto (calcolo, confronto, ecc.), indipendentemente dal fatto che i numeri vengano presentati in lettere o in cifre.

2. L'**area parietale superiore bileterale** focalizza l'attenzione sulla sezione della linea dei numeri interpellata nelle specifiche operazioni o manipolazioni sulle dimensioni spaziali.

3. Per quanto riguarda gli aspetti linguistici relativi alle tabelline ed alle operazioni altamente automatizzate, viene attraversato il **giro angolare di sinistra in collegamento con l'area perisilviana di sinistra**, che si attiva, appunto, durante i compiti di ripetizione di parole, fornendo supporto alla memoria lessicale.

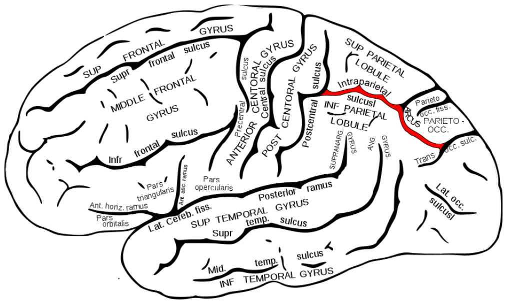



Figura 3.1: Solco intraparietale bilaterale

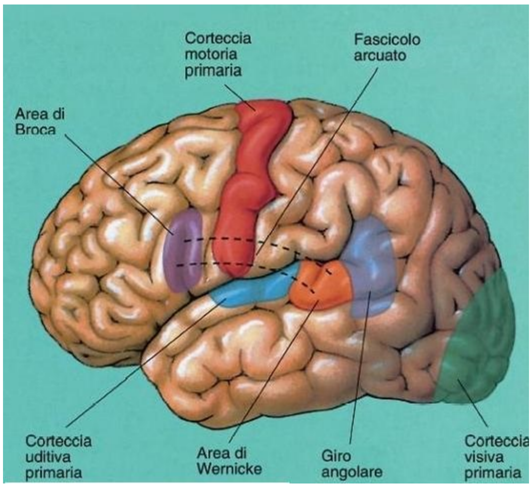
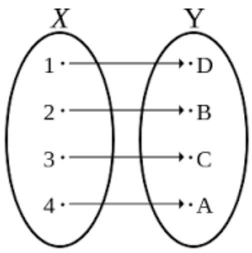



Figura 3.2: Aree perisilviane e giro angolare di sinistra

Queste aree isolate dalle neuroimmagini vengono confermate anche da una serie di studi relativi alla discalculia sulla sindrome di Turner, anomalia cromosomica legata al sesso (femminile, dato dalla coppia cromosomica XX) che si verifica quando manca uno dei due cromosomi X o solo una parte. Una peculiarità di questa sindrome è l'intelligenza nella norma, ma scarse abilità matematiche; i pazienti presentano solchi intraparietali più piccoli e meno simmetrici in entrambi gli emisferi cerebrali e questo conferma la correlazione tra le funzioni cognitive specifiche e le suddette aree.

## 3.5 Ipotesi sullo sviluppo del calcolo

Per costruire le fasi più evolute del calcolo è necessario elencare alcune abilità di base che fanno da perno ai modelli di calcolo. In primis poniamo la *corrispondenza biunivoca* ed il concetto di *maggiornza*: la prima è quella funzione che associa ogni elemento di un insieme ad uno ed un solo elemento di un altro insieme:




per quanto riguarda la seconda abilità, invece, si tratta di riuscire a discriminare quale di due insiemi è più numeroso, capacità che, come abbiamo visto, possiedono già anche i neonati.
Ad uno stadio leggermente superiore andiamo a collocare l'*ordinamento* di un insieme, quindi la disposizione dei suoi elementi in funzione di una certa proprietà, il *contare* e, successivamente, le abilità di *raddoppio* e di *dimezzamento* del numero di elementi di un dato insieme, per poi arrivare ai concetti di *parità* e di *disparità* ed alla *cardinalità* dell'insieme stesso (il numero di elementi). Tutti i processi elencati si fondano su basi linguistiche, su rappresentazioni visuo-spaziali e vengono rielaborati nella *memoria di lavoro*[1]. Tutto ciò viene organizzato e diretto dal Sistema Attentivo Esecutivo. È evidente che l'insieme di tutti questi aspetti delinei un dominio complesso, proprio come lo sono i *moduli di terzo tipo* di Moscovitch e Umiltà[2].
Andiamo ora, un po' più in dettaglio, a spiegare le tappe dello sviluppo delle capacità di calcolo: uno dei passaggi cardine sembra essere l'acquisizione del concetto di *cardinalità*, secondo cui, durante il conteggio, viene applicata ad ogni elemento di un insieme un'etichetta con un numero; l'ultima etichetta applicata rappresenta la cardinalità dell'insieme stesso, cioè la sua quantità numerica. Siano dati due insiemi A e B, allora questi si definiscono *equipotenti* se e solo se fra i loro elementi è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca.

[1]La working memory è un modello che è stato introdotto nel 1974 da A. Baddeley e G. Hitch, durante lo studio dei processi mnestici nell'ambito della psicologia cognitiva. È un sistema preposto all'immagazzinamento temporaneo e alla prima gestione/manipolazione delle informazioni che diventano una sorta di "link" funzionali tra percezione sensoriale ed azione controllata. In appendice riportiamo spiegata in dettaglio l'architettura della memoria di lavoro.

[2]Per classificare gerarchicamente lo sviluppo degli apprendimenti, Moscovitch e Umiltà, nel 1990, hanno elaborato un modello modulare composto da tre tipologie di moduli. I moduli di *primo tipo* sono quelli innati e non manipolabili dall'apprendimento, che costituiscono le fondamenta di sistemi più complessi. I moduli di *secondo tipo* sono formati dall'assemblaggio di moduli di primo tipo; questi moduli attingono inconsciamente da risorse attentive implicite specifiche dal processore centrale[3] e che, una volta automatizzato il modulo, vengono utilizzate come risorse per le applicazioni autonome routinarie. Infine i moduli del *terzo tipo* sono quelli più complessi, formati da un insieme di moduli di secondo tipo. Questi coinvolgono consapevolmente il processore centrale per situazioni particolari e non routinarie.

Gelman e Gallistel sostengono che i prerequisiti necessari per il conteggio siano:

1. il concetto di corrispondenza biunivoca, inizialmente applicato ad insiemi numericamente molto ridotti, per poi svilupparsi;
2. l'ordinamento stabile di un insieme, cioè deve sussistere una corrispondenza biunivoca tra oggetto e nome: il primo si chiama *uno*, il secondo si chiama *due* e così via;
3. l'indifferenza dell'oggetto: non è importante il tipo di oggetto, si possono contare oggetti di ogni tipo;
4. l'indifferenza dell'ordine: non importa da dove iniziamo a contare, possiamo farlo da destra, da sinistra, dal centro, ecc.;
5. la cardinalità: la numerosità o potenza dell'insieme è data solo dall'ultimo termine contato.

È stato dimostrato che le operazioni di somma, moltiplicazione ed addirittura divisione, si possono eseguire con algoritmi elementari che utilizzano le abilità di base precedentemente enunciate (corrispondenza biunivoca, valutazione della maggioranza, capacità di dimezzare, ecc.), semplicemente proiettando il sistema decimale nel sistema binario[4] ed eseguendo semplici movimenti che richiamano algoritmi ben precisi.
Per la ricerca di questi algoritmi di base, F. Benso si è ispirato al *paprio di Rhind*, uno dei più importanti documenti matematici risalenti al Regno dell'Antico Egitto, attualmente collocato al British Museum a Londra.

[4]Il sistema binario permette di scrivere i numeri semplicemente utilizzando due cifre diverse. Il più noto è quello che utilizza l'1 e lo 0 per indicare rispettivamente la presenza o meno della corrispondente potenza di 2, partendo dalla potenza 0-esima, ad esempio $110 = 2^1 + 2^2 = 6$

Sembra risalire al 2000-1800 a.C. ed è noto anche come papiro di Ahmes, dallo scriba che lo trascrisse nel 1650 a.C.. Il papiro è alto circa 30 cm e lungo 5,50 m ed è scritto in *ieratico*, un tipo di scrittura molto complicato che può essere inteso come geroglifico corsivo, utilizzato perolpiù come lingua sacra. Contiene 85 problemi matematici con le relative soluzioni ed alcune tabelle di frazioni ed operazioni di base. Gli egizi utilizzavano un metodo molto singolare per eseguire moltiplicazioni e divisioni:

- Prodotto:

$$\begin{array}{rcl}
19 & \times & 21 \\
1 & \rightarrow & 21 \\
2 & \rightarrow & 42 \\
4 & \rightarrow & 84 \\
8 & \rightarrow & 168 \\
16 & \rightarrow & 336 \\
32 & \rightarrow & 672
\end{array}$$

  Sotto al primo fattore venivano riportate le potenze di due partendo da $2^0$ fino alla potenza uguale o immediatamente successiva al fattore stesso. Sotto al secondo fattore si eseguivano raddoppi successivi dello stesso, che corrispondevano alla sua moltiplicazione per la corrispondente potenza di due. 19 sta tra 16 e 32, quindi si prende la potenza minore del fattore (16) e si scrive il raddoppio corrispondente a parte (336). A questo punto si esegue la sottrazione tra il fattore e la potenza scelta ($19 - 16 = 3$) e si esegue lo stesso procedimento: 3 sta tra 2 e 4, prendiamo la potenza inferiore ed il corrispondente raddoppio (42) e lo scriviamo a parte. E così via fino a che non si arriva ad una potenza di due o ad uno. Nel nostro caso $3 - 2 = 1$ ed il corrispondente raddoppio è 21. A questo punto non rimane che sommare tra loro tutti i raddoppi che sono stati messi da parte per trovare il risultato della moltiplicazione: $336 + 42 + 21 = 399$.

- Divisione: Per quanto riguarda la divisione si esegue un procedimento che si basa sugli stessi principi teorici.

$$\begin{array}{rcl}
1495 & \div & 65 \\
1 & \leftarrow & 65 \\
2 & \leftarrow & 130 \\
4 & \leftarrow & 260 \\
8 & \leftarrow & 520 \\
16 & \leftarrow & 1040 \\
32 & \leftarrow & 2080
\end{array}$$

In questo caso sotto al dividendo si scrivono le potenze di 2 e sotto al divisore i raddoppi dello stesso, fermandosi al primo raddoppio che supera il dividendo. Si considera quello precedente (1040) e si scrive la potenza corrispondente (16) a parte, poi si esegue la sottrazione tra il dividendo e il raddoppio ($1495 - 1040 = 455$). A questo punto si considera il raddoppio immediatamente precedente al risultato della sottrazione (260) e si scrive da parte la corrispondente potenza di 2 (4) e così via finchè il risultato della sottrazione non è 0 oppure un numero inferiore al divisore. Nel nostro caso avremo: $455 - 260 = 195 < 260 \Rightarrow$ si deve scegliere come raddoppio 130 e come potenza 2, dopodichè $195 - 130 = 65 \Rightarrow$ scegliamo come potenza 1. Per trovare il risultato si sommano tutte le potenze scritte a parte e se il risultato della sottrazione non è 0, allora quello è il resto: $16 + 4 + 2 + 1 = 23$ con resto 0.

Questo è un esempio reale di come sia possibile scomporre, attraverso operazioni meno complesse, le operazioni di moltiplicazione e divisione, semplicemente applicando un algoritmo che utilizza le abilità di base che abbiamo elencato all'inizio del capitolo. Si è potuto vedere che alcune di queste competenze sono più facilmente apprese dalle reti neurali, mentre altre sono molto più complesse e difficili da realizzare. Ad esempio, il concetto di maggioranza è molto facile da far apprendere ad una rete neurale, senza la necessità vera e propria di un insegnamento esplicito. Altre abilità sono invece molto più complesse, come la funzione del *pari o dispari*, la quale si basa su altre due funzioni logiche: il connettivo *or* (indicato nelle proposizioni matematiche con $\vee$), che indica "oppure", ed il connettivo *ex or* (indicato con $\wedge$), che indica "e". Per quanto riguarda il connettivo "o" si ha che la composizione di due frasi risulta vera se entrambe le frasi lo sono, mentre per la "e" è sufficiente che una delle due frasi lo sia per rendere vera la composizione. Dato che nel procedimento per stabilire se un numero sia pari o dispari sono implicate entrambe queste due funzioni logiche, è più difficile implementare una rete neurale che automatizzi il procedimento.

## 3.6 Il sistema Attentivo Esecutivo

Già nel 1996, Shallice e Burgeess affermavano che il Sistema Esecutivo fosse multicomponezionale e, quindi, la possibilità che questo si esprimesse tramite diverse *funzioni esecutive*, ovvero con un insieme di processi psicologici necessari per mettere in atto comportamenti adattivi ed orientati verso obiettivi futuri. Quali e quante siano le funzioni esecutive non è possibile stabilirlo, ma in generale ci si riferisce ai concetti di *distraibilità* e di *perseverazione*, che in seguito vengono rinominati *controllo* e *flessibilità* da Baddeley nel 1989. In molti studi vengono anche considerati l'*avvio*, il *sostenere l'attenzione* durante un compito e il *riaggiornamento della memoria di lavoro* (studi di Baddeley, 1996), altri arrivano ad isolare addirittura il *problem solving* come funzione esecutiva ideale (Zelazo e Muller, 2002) ed altri ancora identificheranno addirittura 23 funzioni solo per quanto riguarda l'autoregolazione. In effetti , non è possibile trovare una prova psicometrica che rappresenti appieno una singola funzione esecutiva, in quanto ogni prova sembra contenere almeno le tre funzioni di base (controllo, riaggiornamento della memoria e capacità di passare da un compito ad un altro). Dato che, per l'appunto, non è possibile elencare e distinguere le varie funzioni, si utilizza il termine Sistema Attentivo Esecutivo che racchiude al suo interno tutte le diverse componenti coinvolte nel controllo, nell'attenzione selettiva, nella coordinazione dei compiti concorrenti, nell'abilità di saper attivare selettivamente rappresentazioni temporanee della memoria a lungo termine e nel pianificare e produrre strategie di switch. Il Sistema Attentivo Esecutivo viene a sua volta regolato dal Sistema Attentivo Superiore, che aiuta ad auto-organizzare i processi mentali a seconda dell'emotività e della motivazione del momento.

## 3.7 L'apprendimento del calcolo e le funzioni esecutive

È indubbio che la formazione del modulo del calcolo necessiti di un coinvolgimento del Sistema Attentivo Esecutivo, essendo un modulo del terzo tipo che andrà ad automatizzarsi solo per certi fatti matematici ed algoritmi. Blair e Razza, nel 2007, sostennero che l'apprendimento della matematica sembra essere spiegato dall'azione congiunta delle diverse funzioni esecutive. I diversi aspetti del calcolo pongono richieste differenti all'esecutivo centrale ed alla memoria di lavoro, in particolare al sottosistema esecutivo e fonologico; inoltre è stato dimostrato che il magazzino fonologico gioca un ruolo fondamentale nel momento in cui il calcolo consiste nella memorizzazione temporanea di dati. Bull ed Espy, nel 2006, riescono a mostrare che una buona capacità della memoria di lavoro si rispecchi poi nella minor presenza di eventuali errori di calcolo a mente. I ruoli del controllo esecutivo e della memoria di lavoro vanno, chiaramente, a ricadere sulle capacità matematiche e ad influenzare azioni come il problem solving (elaborazione di una strategia che possa portare alla risoluzione del problema in esame), la comprensione del testo ed, in generale, la complicata procedura della risoluzione del problema, dove è necessario mantenere in memoria dati e procedimenti, integrandoli tra loro. Durante tali procedimenti si è osservato che i soggetti che prediligono strategie di visualizzazione sono più abili ed efficienti nella risoluzione dei problemi.

# Capitolo 4

# La discalculia Evolutiva

La discalculia evolutiva è un disturbo specifico dell'apprendimento (DSA)[1] che interessa la comprensione delle quantità numeriche, il saper riconoscere i simboli e la capacità di eseguire le operazioni aritmetiche di base.

**Definizione 1.** La **discalculia evolutiva** è un deficit altamente specifico e selettivo in una capacità di base per la comprensione dei numeri. Questo deficit determina un'ampia varietà di difficoltà nell'apprendimento dei numeri e dell'aritmetica.

Come abbiamo mostrato nei capitoli precedenti, i bambini possiedono la capacità di rispondere in maniera sensibile alla numerosità già alla nascita; ma allora dove si possono ricercare le cause di questo disturbo?

---

[1] I Disturbi Specifici dell'Apprendimento, o DSA, sono un gruppo eterogeneo di disturbi che si manifestano con significative difficoltà nell'acquisizione e nell'uso di abilità di lettura, scrittura, ragionamento e matematica. Sono duvuti a cause neurobiologiche, cioè a disfunzioni del sistema nervoso centrale. In genere i soggetti con DSA manifestano capacità cognitive nella norma e possibilità di apprendere. La legge n. 170/2010 (riportata per intero in appendice) li definisce come segue:

1. *Dislessia*: difficoltà nell'imparare a leggere, in particolare nella decifrazione dei segni linguistici. Si manifesta con minore correttezza e rapidità nella lettura a voce alta di parole, non-parole e brani.
2. *Disgrafia e disortografia*: la disgrafia fa riferimento al controllo degli aspetti grafici e formali della scrittura manuale; la disortografia riguarda invece l'utilizzo del codice linguistico in fase di scrittura.
3. *Discalculia*: difficoltà negli automatismi del calcolo e dell'elaborazione dei numeri.

## 4.1 Abilità quantitative primarie e normale sviluppo dell'aritmetica

Gli elementi essenziali per l'intelligenza numerica sono i *processi pre-verbali*, per quanto riguarda la rappresentazione del numero, ed i *processi di conteggio*, formati da tutto quell'insieme di processi che consentono di operare sui numeri, tramite delle operazioni aritmetiche.
Il **NUMBER SENSE** è la capacità di comprendere il mondo in termini numerici, innata e condivisa con gli animali. Non c'è una struttura percettiva adibita all'elaborazione delle informazioni numeriche, ma quando vediamo un gruppo possiamo contarne gli elementi o metterli in fila. Ricordiamo gli esperimenti presentati nei capitoli precedenti sulle tecniche di abituazione e di disabituazione, in cui i neonati, guardando cartelloni con disegnati sopra dei pallini, perdono interesse se il numero dei pallini non varia; oppure quelli in cui si è dimostrato che, anche senza eseguire le operazioni vere e proprie, percepiscono la possibilità o meno del risultato di una semplice operazione aritmetica.
$\Rightarrow$ Possedere il concetto di numerisità implica il saper compiere delle operazioni ed avere delle aspettative matematiche. Alcuni effetti derivanti sono:

- **SUBITIZING:** Fenomeno umano ed animale basato sul *number sense*, definito come una immediata comprensione ed identificazione delle numerosità di piccoli gruppi di elementi (al max 4) di una scena visiva, senza la necessità di contare.
- **EFFETTO DISTANZA:** Sistematica diminuzione nella capacità di discriminazione della numerosità al diminuire della distanza tra i numeri, cioè si è più veloci a dire $1 < 4$ piuttosto che $3 < 4$.
- **EFFETTO GRANDEZZA:** a parità di distanza numerica è più facile paragonare due numeri piccolo anzichè due grandi $\Rightarrow$ la performance diminuisce con l'aumentare della grandezza del numero: si è più rapidi nel riconoscere $3 < 4$ piuttosto che $10 < 11$.

Per concludere con quanto riguarda il number sense, alcuni studi sembrano dimostrare che negli animali e nei bambini in età pre-verbale ci sia un modulo deputato al processamento dell'informazione numerica. Questo "senso del numero" ci permette di elaborare immediatamente la grandezza numerica.
Come abbiamo spiegato in modo molto più approfondito nei capitoli precedenti, le abilità quantitative primarie sono:

1. *Numerosità*: abilità a determinare in modo accurato la quantità di un piccolo insieme di oggetti senza contare;
2. *Ordinalità*: conoscenza basilare sui concetti "maggiore di" e "minore di", e successivamente delle relazioni ordinali specifiche;

3. *Conteggio*: nello sviluppo c'è un sistema di conteggio preverbale fino ad un numero di 3 o 4 elementi; con il linguaggio e l'apprendimento di parole-numero, compare una conoscenza culturale in cui queste parole-numero, ordinate serialmente, possono essere usate per contare, misurare e per semplici operazioni aritmetiche.

4. *Aritmetica semplice*: nello sviluppo è presente una notevole sensibilità ad addizionare e sottrarre le quantità degli insiemi piccoli; nella prima infanzia questo sistema sembra essere limitato dentro l'insieme del 2, poi aumenta gradualmente in funzione dell'età.

Come abbiamo detto, l'acquisizione del conteggio verbale va dai 2 ai 6 anni e combina l'azione di processi di conteggio pre-verbali e di quelli verbali; i primi rendono comprensibili i meccanismi di conteggio verbale, permettendone l'apprendimento. I principi su cui si basa il conteggio, come abbiamo già ampiamente spiegato, sono cinque: la corrispondenza biunivoca, l'ordine stabile di un insieme, l'indifferenza all'oggetto e all'ordine e la cardinalità. Durante l'apprendimento di come risolvere semplici problemi, come addizioni, i bambini tipicamente contano entrambi gli addendi, spesso con l'aiuto delle proprie dita, oppure semplicemente a voce alta. Le strategie di conteggio più utilizzate, per quanto riguarda la scuola di primo grado sono due: la procedura MIN e la SUM. La prima induce ad iniziare dal numero più grande, per poi contare tanti numeri quanti l'addendo più piccolo, mentre la seconda fa contare entrambi i numeri partendo da 1 per poi metterli insieme.
Lo sviluppo delle competenze procedurali nei bambini è associata in parte al miglioramento nella comprensione concettuale del conteggio e si riflette in un graduale spostamento dall'uso frequente del conteggio con le dita verso il conteggio verbale. L'utilizzo di queste procedura di conteggio determina anche lo sviluppo delle rappresentazioni mnestiche dei fatti aritmetici di base. Una volta formata, questa rappresentazione nella memoria a lungo termine permette la soluzione dei problemi basati sul recupero diretto dei fatti aritmetici e di decomposizione. Grazie a questo recupero diretto dalla memoria a lungo termine, i bambini possono dare la risposta associata al problema, senza dover per forza contare sulle dita. Con il termine decomposizione si intende la costruzione della risposta a partire dal recupero di risultati parziali: $6 + 7 = 6 + 6 + 1 = 12 + 1 = 13$.

## 4.2 La discalculia e sue conseguenze

La discalculia è la conseguenza di deficit nella capacità innata di cogliere la numerosità. I discalculici hanno difficoltà a capire semplici concetti numerici; mancano di una *concezione intuitiva dei numeri* e hanno problemi ad apprendere i fatti numerici e le procedure.
I discalculici riscontrano difficoltà nell'apprendere e ricordare fatti aritmetici e nell'eseguire procedure di calcolo; si basano, inoltre, maggiormente su strategie immature, come

il contare con le dita della mano per risolvere i problemi. Infine si riscontrano problemi in compiti che richiedono una conoscenza dei concetti di base, in particolar modo quelli che sottintendono la comprensione delle numerosità. Nel 2004 gli esperimenti di Landerl dimostrarono che i bambini discalculici presentano dei deficit nel subitizing e che sono più lenti nel processare i numeri rispetto alle lettere.
I principali problemi riscontrati nei ragazzi discalculici sono:

1. Incapacità di comprendere i concetti di base delle operazioni;
2. Mancato riconoscimento dei simboli numerici;
3. Difficoltà ad attuare le manipolazioni aritmetiche standard;
4. Difficoltà nel comprendere quali numeri sono pertinenti al problema aritmetico che si sta considerando;
5. Difficolà ad allineare correttamente i numeri o ad inserire i decimali ed i simboli durante i calcoli;
6. Non corretta organizzazione spaziale dei calcoli;
7. Perdita dell'effetto distanza;
8. Incapacità di apprendere le tabelline.

L'incidenza della discalculia evolutiva sembra oscillare tra l'1% e il 5% della popolazione, in base alla variabilità abbastanza ampia che è imputabile alle prove ed ai criteri di valutazione usati nelle diverse ricerche.
Il bambino discalculico non raggiunge i livelli di prestazione attesi in relazione all'età, alla scolarizzazione ed all'intelligenza, oltre a manifestare difficoltà evidenti nella carriera scolastica e lavorativa. Si è stimato che basse capacità matematiche hanno un impatto maggiore sul posto di lavoro rispetto a basse capacità linguistiche. La Consensus Conference ha riconosciuto due profili distinti di discalculia: il primo caratterizzato da debolezza nella strutturazione cognitiva degli aspetti di base dell'intelligenza numerica (subitizing, meccanismi di quantificazione, comparazione, *cecità ai numeri*[2]); il secondo profilo, invece, fa riferimento alle procedure esecutive (lettura, scrittura e messa in colonna dei numeri) ed al calcolo.
Andiamo a vedere più in dettaglio gli errori commessi dai ragazzi discalculici:

- **Errori visivi**: I ragazzi con discalculia incontrano difficoltà nel leggere e riconoscere i segni aritmetici (più, meno, per, diviso) e spesso li confondono ($3+3=9$), oppure nel ricordarsi che, nello spostarsi da destra verso sinistra i numeri acquisiscono significati differenti (unità, decine, centinaia, migliaia,..);

[2]La cecità ai numeri è l'incapacità per il soggetto di comprendere le numerisità e di manipolarle.

- **Errori procedurali**: I ragazzi discalculici tendono ad omettere od aggiungere procedure aritmetiche. Quando viene presentato loro un problema, non sanno scegliere quali sono le prime cose che devono fare per eseguire le operazioni del problema (incolonnamento o meno, posizione dei numeri, ...); inoltre, nel momento in cui decidono quale strategia seguire, incontrano difficoltà nelle specifiche procedure dell'operazione ($75 - 6 = 71$);

- **Errori grafomotori**: Quando viene presentato ai ragazzi con discalculia un numero in lettere o verbalmente, questi non riescono la maggior parte delle volte a tradurlo correttamente in cifre (milletredici = 100013);

- **Errori di giudizio**: I ragazzi con discalculia non riescono a capire se il risultato che scrivono sia realmente possibile o no. Spesso si trovano a scrivere un risultato di una sottrazione maggiore del minuendo, oppure scambiando il per con il più il prodotto rimane quasi uguale ai fattori ($34 \times 2 = 36$);

- **Errori di memoria**: Gli studenti discalculici commettono diversi errori nel recupero dei fatti aritmetici in generale, fanno confusione tra le operazioni e, spesso, non riescono a mantenere nella Memoria di Lavoro i risultati parziali di operazioni complesse.

- **Errori di perseverazione**: Il bambino discalculico incontra difficoltà nel cambiare da un compito ad un altro. Spesso non riescono a cambiare la tipologia di ragionamento e perseverano nel ragionamento precedente (ad esempio eseguono due somme anche se la seconda è una sottrazione).

## 4.3 Strumenti di valutazione e trattamento

Il DSM-IV-TR (APA, 2002), in accordo con l'ICD-10 (OMS, 2007), identifica la discalculia come disturbo del calcolo caratterizzato da prestazioni inferiori, rispetto a quanto previsto dall'età cronologica del soggetto, nella capacità di calcolo, misurata con test standardizzati sottoposti a soggetti con normali abilità cognitive e di apprendimento. Viene precisato che questa anomalia debba interferire in modo significativo con l'andamento scolastico e con la vita quotidiana nelle azioni in cui sono necessarie capacità di calcolo; si parla, pertanto, di carenze nelle abilità di base, non di quello che riguarda abilità più specifiche come complesse equazioni o lo studio della trigonometria. Secondo queste indicazioni, i sintomi da osservare per orientarsi all'interno dei disturbi del calcolo sono:

1. Incapacità di comprendere i concetti di base

2. Mancato riconoscimento dei simboli numerici

3. Difficoltà ad incolonnare correttamente i numeri

4. Difficoltà ad organizzare per iscritto il calcolo

5. Incapacità ad apprendere il calcolo a mente

In realtà questi sintomi non sono sufficienti, ma sono da osservare anche:

1. Capacità di contare, anche all'indietro

2. Leggere e scrivere correttamente i numeri

3. Riconoscere le quantità a colpo d'occhio

In Italia le *Raccomandazioni per la pratica clinica definite con il metodo della Consensus Conference* (AID, 2009) ed il documento ISS (2011) distinguono, all'interno dello stesso disturbo della discalculia, due diversi profili, connotati entrambi da debolezza nel calcolo:

- debolezza nella strutturazione cognitiva delle componenti numeriche, cioè negli aspetti di base quali il subitizing, meccanismi di quantificazione, seriazione, comparazione, strategie di calcolo mentale, ecc.

- compromissioni a livello procedurale e di calcolo, cioè nella lettura, scrittura, incolonnamento dei numeri, recupero dei fatti numerici e degli algoritmi di calcolo scritto.

Per la valutazione delle competenze di cognizione numerica si raccomanda di tener conto soprattutto del parametro tempo, in quanto i DSA sono deficit innati e resistenti all'automazione, pertanto anche se i livelli di correttezza possono migliorare, permane in ogni caso una eccessiva lentezza.
L'età minima in cui è possibile eseguire una diagnosi di discalculia coincide con il completamento del terzo anno della scuola primaria; è, però possibile individuare i soggetti a rischio già in età prescolare, tramite la valutazione di eventuali ritardi nell'acquisizione delle abilità di intelligenza numerica. L'attenta analisi delle tipologie di errore e delle modalità di approccio ai quesiti numerici può essere il metodo di discriminazione tra coloro che realmente sono affetti da discalculia e chi semplicemente ha uno scarso rendimento in matematica.
Gli studi generali sul criterio di *discrepanza*, cioè l'eventuale mancata corrispondenza tra la prestazione scientifica delle abilità aritmetiche e quella relativa al QI, dimostrano che non ci sono sostanziali differenze tra bambini discalculici discrepanti e non-discrepanti per quanto riguarda il QI. Inoltre le diagnosi effettuate con il criterio di discrepanza appaiono meno attendibili rispetto a quelle effettuate con i test e le batterie.

***STRUMENTI DI VALUTAZIONE***: Per prove oggettive di valutazione del livello di prestazione per individuare un'eventuale presenza del disturbo del calcolo si possono eseguire i seguenti test:

1. **Prove di I livello** (finalizzate ad uno screening capace di individuare precocemente i soggetti a rischio, fornendo indicazioni globali sulla presenza/assenza di difficoltà di calcolo):

    - *Prove BIN*: Utilizzate in bambini dai 4 ai 6 anni. Forniscono un quadro dei primi apprendimenti matematici dei bambini a sviluppo tipico e possono servire come strumento diagnostico anche per i bambini più grandi che però non hanno ancora raggiunto in maniera solida tali tappe. Sono composte da prove di confronto tra le quantità (dots), prove di comparazione tra i numeri arabi, prove di enumerazione in avanti o indietro, prove di seriazione e completamento di seriazioni, prove di lettura in codice arabo, prove di corrispondenza nome-numero e prove di scrittura dei numeri.
    - *Prova AC-MT*: Per bambini di 6-10 e 11-14 anni. Consente l'accertamento del livello di apprendimento del calcolo tramite operazioni scritte, confronto di grandezza tra i numeri, trasformazione in cifre, ordinamento crescente/decrescente, calcolo a mente, calcolo scritto, enumerazione, dettato di numeri, espressioni e calcolo approssimativo.

2. **Prove di II livello** (prove diagnostiche, permettono cioè la diagnosi di discalculia evolutiva, facendo riferimento ad un modello cognitivo e neuropsicologico):

    - *Test ABCA*: Rivolto ai bambini del terzo-quinto anno di scuola primaria. È basato sul modello di McCloskey per valutare l'accuratezza e la velocità di 5 abilità sottostanti la comprensione del valore quantitativo dei numeri e dei simboli aritmetici (denominazione ed uso dei simboli aritmetici, ordinamento di numeri in ordine crescente e decrescente, uso dei simboli $<, >, =$, confronto visivo e uditivo delle quantità e valore posizionale), 6 abilità sottostanti la produzione dei numeri (enumerazione all'indietro, dettato di numeri, tabelline, conteggio di insiemi, incolonnamento, recupero di combinazioni tra i numeri), prove di calcolo scritto e a mente e prove di approfondimento.
    - *Batteria BDE*: Per la valutazione della discalculia evolutiva, basata sul modello di Dehane. Misura il sistema dei numeri tramite la conoscenza del valore quantitativo dei numeri, le abilità di transcodifica e di conteggio e il sistema del calcolo con prove di calcolo vere e proprie, utilizzo dei fatti aritmetici e delle combinazioni numeriche.

Gli eventuali interventi riabilitativi, proposti per i ragazzi discalculici, cercano di ridurre i deficit nelle attività di calcolo. Si possono utilizzare strumenti *compensativi*, come la calcolatrice, la tavola pitagorica, tavole riassuntive delle formule, linea dei numeri, ecc., oppure strumenti *dispensativi*, come la possibilità di avere tempi più lunghi per lo studio e per le verifiche, compiti a casa ridotti o interrogazioni programmate. È interessante l'utilizzo più recente di software didattici che possono aiutare il ragazzo discalculico a compensare qualche sua difficoltà, ad esempio, **IncolonnAbili** un generatore di strutture per il calcolo in colonna, stampabili come etichette, con semplificazione delle procedure e dei gesti grafo-motori, oppure **EquivalenzeXme** aiuta nella trasformazione da un'unità di misura ad un'altra. Sono entrambi gratuiti.

## 4.4 Disturbi nella soluzione dei problemi matematici

La discalculia, nelle definizioni del DSM, sembra comprendere anche le difficoltà nel ragionamento matematico. Essa può causare difficoltà nel ragionamento, ma i deficit relativi ai fatti numerici ed al calcolo possono essere indipendenti dalla capacità di ragionamento matematico. Le difficoltà nelle soluzione dei problemi trovano una specifica differenziazione lungo il percorso scolastico, in corrispondenza con il variare dei programmi e delle richieste didattiche.
A livello della scuola primaria compariranno difficoltà nella soluzione dei problemi aritmetici, in associazione più o meno forte con problemi di calcolo e con l'introduzione di alcuni concetti e delle operazioni; proseguendo con gli studi, vengono introdotti anche concetti geometrici che, pian piano, rendono più variegata la richiesta cognitiva al bambino, includendo l'utilizzo di rappresentazioni spaziali, la memorizzazione di proprietà e di formule e l'impostazione di un procedimento risolutivo con i calcoli appropriati. Oltre agli algoritmi di base, viene anche richiesta una certa flessibilità ed intuizione per la soluzione dei problemi: è cruciale la continua ristrutturazione dell'interpretazione degli elementi a disposizione ed è fondamentale il processo di *insight*, cioè l'illuminazione improvvisa nella memoria del concetto opportuno. È importante evitare la *fissità funzionale*, cioè la difficoltà ad attribuire agli oggetti matematici conosciuti una funzione differente da quella spiegata; questo processo è alimentato anche dalla tendenza a proporre problemi con risoluzioni standardizzate, in cui è necessario applicare le stesse procedure senza riflettere sul significato.
Una classificazione dei problemi con diversi gradi di difficoltà è stata data da Fuchs&Fuchs nel 2002:

1. Problemi aritmetici semplici: sono problemi con un testo semplice ed essenziale; di solito c'è solo una richiesta e la soluzione si trova svolgendo un'unica operazione.

2. Problemi aritmetici complessi: sono problemi con testo più lungo, ma ancora relativamente breve, che contengono più domande e dei dettagli non necessari per il problema, ma nessun dato irrilevante. La soluzione richiede da 1 a 3 operazioni.

3. Problemi del mondo reale: sono problemi con un testo molto esteso, con dati non essenziali ed elementi numerici irrilevanti. Il numero di operazioni necessarie per la soluzione non è specificato.

La varietà delle possibili risoluzioni, la quantità e la posizione delle informazioni ed il tipico linguaggio matematico, ricco di forme verbali poco utilizzate, contribuiscono ad aumentare le difficoltà che uno studente incontra nel riconoscere un problema nuovo come appartenete ad un problema famigliare per il quale è noto un metodo risolutivo. Tutti i bambini con disabilità specifica in aritmetica e difficoltà nella comprensione mostrano un deficit nella soluzione di almeno due tipologie di problemi.
Le abilità cognitive richieste per la soluzione di un problema sono:

- **Processo di codifica del problema**:
    1. *Traduzione*: Ogni affermazione contenuta nel testo del problema viene trasformata, da parte del ragazzo che deve risolverlo, in una rappresentazione semantica;
    2. *Integrazione*: Il solutore cerca di mettere insieme in una rappresentazione coerente tutte le parti del testo e di individuare le strutture del problema, comprendendo la struttura profonda del testo.
- **Processo di ricerca**:
    1. *Pianificazione*: Una volta compresa la situazione problematica, il solutore deve ricercare nella sua memoria la strada per la soluzione. Il ragazzo deve elaborare una strategia per la soluzione del problema, monitorare il piano elaborato ed eseguire le operazioni necessarie nel momento opportuno. Durante questa fase è necessario che la memoria di lavoro abbia le risorse sufficienti per poter mantenere attiva e facilmente disponibile la struttura delle mete da raggiungere.
    2. *Esecuzione del calcolo*: Tale processo consiste nella realizzazione vera e propria del calcolo, quindi sottintende la conoscenza consolidata degli algoritmi alla base delle diverse operazioni. I buoni solutori, rispetto ai solutori meno abili, possiedono un livello più alto di capacità *metacognitive* che permette loro di analizzare meglio la struttura del compito, di scegliere le strategie migliori e di utilizzare al meglio le proprie risorse cognitive. Questi processi metacognitivi sono: la previsione (prevedere se si è in grado o meno di risolvere il problema), pianificazione (predisporre una strategia di soluzione), monitoraggio (tenere sotto controllo il procedimento) e la valutazione (valutazione della possibilità del risultato).

Spesso un fatale antagonista della risoluzione corretta di un problema è l'**ansia matematica**, cioè l'insieme di tutte quelle tensioni ed emozioni che interferiscono con la manipolazione dei numeri. Uno dei fattori all'origine può essere individuato nello stile di insegnamento di alcuni docenti, che pretendono un alto livello di correttezza e competenza, senza però dare un adeguato sostegno in termini di spiegazioni e rinforzo motivazionale. Inoltre, anche la natura della materia non aiuta: in matematica gli errori non si possono mascherare e vengono percepiti come una minaccia alla propria autostima.
Sono stati identificati due tipi di ansia matematica: il primo è l'ansia da apprendimento matematico, data dal pensiero di iniziare una lezione di matematica, guardare il professore che lavora alla lavagna o usare il libro di matematica; il secondo è l'ansia da valutazione matematica, che insorge quando un ragazzo pensa a dover eseguire un compito scritto. L'ansia sembra influenzare il funzionamento della memoria di lavoro nel momento in cui si debbono mantenere temporaneamente in memoria dei risultati parziali di operazioni più complesse. Preoccupazioni e pensieri negativi disperdono energie e risorse mnestiche, che non sono più disponibili per svolgere il compito richiesto. Gli studenti ansiosi sembrano non essere in grado di liberarsi dai pensieri intrusivi e, quindi, sono incapaci di ignorare le informazioni irrilevanti, dimostrando così un meccanismo inibitorio deficitario.

## 4.5 Percorso diagnostico nella discalculia evolutiva

### 4.5.1 La richiesta di consulenza ed il colloquio clinico/anamnestico

I bambini con discalculia spesso dimostrano un completo disinteresse nei confronti della matematica e, dunque, non è semplice individuare le problematiche tipiche del disturbo. Durante il colloquio neurologico si ricerca la presenza di comportamenti significativi in questo campo, cioè se il bambino è in grado o meno di eseguire il conteggio diretto o inverso, di eseguire calcoli a mente, ecc.. Vediamoli in dettaglio:

- *Abilità lessicali*: Si controlla se il bambino sa riconoscere a prima vista i numeri e scriverli. Va verificato se vengono scritti in modo corretto e che errori vengono commessi.

- *Processi semantici o senso del numero*: Si deve verificare se i bambini sono in grado di stimare le grandezze e di riconoscere ad occhio i risultati poco plausibili.

- *Abilità visuo-spaziali*: Nei bambini della scuola primaria o secondaria di primo grado si può osservare l'incolonnamento dei numeri, la capacità di ordinare dal più piccolo al più grande e viceversa e la capacità di svolgere i compiti anche in fogli non quadrettati.

- *Strategie di conteggio*: Si può chiedere ai bambini, durante il colloquio, a che età hanno imparato a contare e se lo facevano in modo corretto, se sono in grado di ordinare i numeri e se sanno inserire il numero mancante in una serie.

- *Padronanza e fluidità con le combinazioni numeriche*: Spesso i genitori indicano una grande difficoltà nell'eseguire i compiti a casa. Si possono osservare i quaderni e verificare come procedono quando vengono lasciati da soli nello svolgimento degli esercizi.

- *Aspetti emotivo-motivazionali*: Si osserva spesso una scarsa motivazione nei confronti della matematica e si è osservato che convinzioni negative interferiscono con il corretto svolgimento del compito.

- *Famigliarità*: È stata dimostrata una possibile trasmissione genetica della discalculia. Nei gemelli la probabilità che entrambi siano discalculici è molto elevata, anche nel caso che fossero eterozigoti.

### 4.5.2 La diagnosi

La diagnosi di discalculia rappresenta il punto di partenza per l'aiuto del bambino con disturbo specifico dell'apprendimento. Cornoldi e Lucangeli (2004) svolsero una serie di ragionamenti utili per l'identificazione della problematica specifica; nel dettaglio, suggeriscono i seguenti livelli su cui approfondire:

- *Livello 1*: Disturbo specifico dell'apprendimento, verifica i criteri di inclusione ed esclusione

- *Livello 2*: Difficoltà concernente solo le abilità aritmetiche o altri aspetti dell'apprendimento come quello visuo-spaziale

- *Livello 3*: Difficoltà concentrata maggiormente sul calcolo e sul problem solving

- *Livello 4*: Difficolà nella conoscenza dei numeri, nell'accuratezza del calcolo scritto e nell'automazione dei calcoli

- *Livello 6*: Sviluppo carente della conoscenza dei numeri e scarsa accuratezza del calcolo, correlata a estrema lentezza dei calcoli.

Dal punto di vista diagnostico è molto frequente la comorbilità con altri DSA; più precisamente la discalculia è in compresenza con la dislessia nel 40% dei soggetti. I bambini con dislessia infatti presentano sistematicamente la difficoltà a rievocare i fatti aritmetici e ad elaborare i numeri. Potrebbe essere il deficit di elaborazione fonologica ad incidere sulla velocità di conteggio e sul recupero dei fatti aritmetici. Tuttavia esistono casi di ragazzi con discalculia e dislessia che presentano una normale capacità di lettura e, indipendentemente dal deficit della memoria a breve termine, può essere compromesso il calcolo verbale e scritto. Dunque la spiegazione della comorbilità tra dislessia e discalculia può essere che esistano due sistemi cognitivi funzionali indipendenti tra loro che non lavorano correttamente.

# Capitolo 5

# Strategie di calcolo nella scuola secondaria

In seguito all'approvazione della legge n. 170 del 2010 sui DSA, le richieste di diagnosi per quanto riguarda la discalculia, sono aumentate esponenzialmente. Le indicazioni del DM 5669 del 12/7/2011 (riportato in appendice) dovrebbero evitare il riconoscimento tardivo di questi disturbi, proponendo delle attività per il riconoscimento precoce dei soggetti a rischio, in modo da limitare il numero dei ragazzi che giungono alla scuola secondaria di secondo grado senza essere ancora stati certificati. In realtà la presenza di richieste di certificazioni tardive per verificare la presenza o meno di un disturbo del calcolo è ancora molto elevata, principalmente perchè le difficoltà in ambito matematico sono tra le più diffuse nella scuola secondaria di secondo grado, anche se soltanto una minima percentuale sarà realmente da attribuire alla discalculia.
Purtroppo il nostro paese, dai recenti risultati del TIMSS, ricerca internazionale che fornisce dati sulle competenze in matematica degli studenti del quarto e quinto anno della scuola secondaria di secondo grado, è risultato essere tra i meno competenti, non solo per quanto riguarda l'Europa, ma a livello mondiale. I risultati non sono migliori nemmeno per l'OCSE PISA, che misura le conoscenze e le competenze degli studenti di 15 anni in diversi campi, come lettura, matematica e scienze. Come è stato detto nel capitolo precedente, è stato riscontrato un alto livello di comorbilità tra dislessia e discalculia, pertanto anche i soggetti dislessici presentano difficoltà nell'ambito del calcolo e del processamento numerico, così l'Istituto Superiore della Sanità, nel 2011, ha sancito che anche per un'ipotesi di dislessia è necessario indagare anche l'area matematica.
Gli strumenti diagnostici ad oggi esistenti per la discalculia sono diversi, ma per la diagnosi nella scuola secondaria di primo livello esiste solo la BDE (Batteria per la Discalculia Evolutiva) e, spesso, se si devono utilizzare degli strumenti non adatti all'età, la prestazione può fornire un falso negativo, cioè un soggetto con disturbo specifico del calcolo può risultarne non affetto dai risultati del test. È pertanto fondamentale elaborare batterie che siano adeguate anche ai successivi anni di scuola secondaria di

secondo livello. Ad oggi stanno entrando nel panorama testistico italiano anche le *MT avanzate*, che servono per la diagnosi della discalculia nel biennio della scuola secondaria di secondo grado.
Solitamente come strumenti compensativi, nel caso della discalculia, vengono indicate la tavola pitagorica e la calcolatrice, ma è evidente che se le abilità di calcolo sono molto compromesse e le tempistiche veramente eccessive, queste possono ridurre lievemente la fatica dello studente ma non aumentare le sue competenze.

## 5.1 Ricerca alla scuola secondaria di primo grado

In una interessante ricerca di Biancardi, Mariani e Pieretti, sono state indagate le abilità matematiche degli alunni della scuola secondaria, al fine di aggiornare le norme esistenti e di rendere più precisi i canoni di valutazione. È stata proposta una BDE ad un gruppo di ragazzi non clinici e ad un gruppo di ragazzi discalculici di sesso misto e di età compresa tra gli 11 ed i 14 anni e si sono ottenuti i seguenti dati, che, a mio parere, ci possono essere utili per capire meglio le differenze sostanziali tra gli uni e gli altri nell'ambito della matematica.

### 5.1.1 Area del numero

Per apprendere le tabelline uno dei prerequisiti necessari è l'abilità di conteggio, implicata anche nelle strategie di scomposizione. Alla scuola secondaria, il tempo di conteggio da 1 a 100 diminuisce progressivamente in relazione all'età, così come il tempo di conteggio all'indietro. Il conteggio in avanti è correlato all'acquisizione della linea dei numeri mentale e dell'ordinalità, concetti che alla scuola secondaria si danno per consolidati, mentre il conteggio all'indietro è correlato con la memoria di lavoro. Quando la differenza tra il tempo impiegato nel conteggio in avanti e quello per il conteggio inverso è molto elevata, si evidenzia una difficoltà nella memoria di lavoro e nella enumerazione inversa, che sono abilità fondamentali per la corretta esecuzione in rapidità delle sottrazioni.
Negli studenti della scuola secondaria, il conteggio in avanti è quasi completamente esente da errori, che invece sono presenti nell'enumerazione all'indietro. Sono da considerare in fascia clinica gli studenti che commettono errori in numero $\geq 8$. Per la scrittura di numeri dettati, invece, sono necessarie buone capacità letterali e sintattiche e sono da considerarsi in fascia clinica gli studenti che commettono almeno 11 errori. La ripetizione dei numeri nei soggetti discalculici faticherà a raggiungere la completa correttezza, ma anche per quanto riguarda i soggetti non clinici si continuano ad incontrare difficolà soprattutto nelle liste con numeri a 6 cifre, anche avanzando con l'età. Ottenere una prestazione scadente a queste prove da' molte informazioni sulla memoria fonologica e di lavoro dell'alunno. Fa parte di quest'area anche il completamento di serie di numeri, che con l'avanzare della scolarità, necessita di meno tempo e la correttezza migliora fino a

raggiungere quasi la soglia degli zero errori. Un criterio di base usato per stabilire se un individuo ha compreso oppure no il significato dei numeri è l'ordinamento di una sequenza in modo crescente oppure decrescente; già Piaget, nel 1952, considerava acquisito il concetto di numero solo quando il bambino riusciva ad ordinare correttamente i numeri che gli venivano sottoposti.

### 5.1.2 Area del calcolo

Per l'applicazione delle procedure matematiche, ha un ruolo fondamentale la memoria a lungo termine ed il suo corretto funzionamento dipende sia dalle conoscenze ed abilità acquisite che dalla memoria di lavoro. Se è la memoria di lavoro ad essere carente, gli errori commessi dal ragazzo sono casuali e non sistematici e tale carenza può anche interferire con l'apprendimento dei fatti aritmetici; mentre in presenza del disturbo specifico del calcolo, gli errori si ripetono sempre nelle stesse strutture e procedure in maniera sistematica.
Per quanto riguarda, appunto, l'area del calcolo, nella BDE sono presenti dei semplici problemini che non prevedono la misura del tempo di elaborazione, ma anche in questo caso è plausibile affermare che il tempo necessario alla risoluzione diminuisca in funzione del grado di scolarizzazione. Durante il test sottoposto dagli studiosi è interessante notare che molti studenti commettono degli errori nella risoluzione delle tabelline, che nella scuola di secondo grado dovrebbero essere ormai consolidate ed automatizzate. In media su 20 tabelline proposte gli studenti compiono 2-3 errori (circa il 10-15%), mentre gli studenti in fascia clinica arrivano ad 8 o più errori ($\geq 40\%$). Un parametro importante che è stato considerato in questo caso è il tempo, perchè si è notato che i ragazzi che hanno difficoltà a recuperare il risultato nella memoria della tabellina presentata, spesso utilizzano strategie alternative, che riescono a svolgere con estrema facilità (il tempo adeguato al recupero di una tabellina dalla memoria è non oltre i 2 secondi). A questo punto mi risulta opportuna una comparazione dei programmi italiani con quelli del Regno Unito: in Inghilterra le tabelline vengono insegnate fino al quinto anno della scuola primaria, mentre in Italia non sono previsti richiami nè il quarto e nè il quinto anno di primaria, in quanto vengono considerate già acquisite. Stando ai risultati di questa ricerca forse risulta opportuno predisporre dei richiami anche durante gli anni successivi al terzo di primaria.
Per quanto riguarda invece prove di somme o sottrazioni, i ragazzi solitamente hanno prestazioni migliori, ma spesso si è notato l'utilizzo di strategie immature come il calcolo con l'ausilio delle dita, che a quest'età non dovrebbe più essere presente. In fascia clinica su 20 operazioni si sono riscontrati almeno 7 errori, mentre gli altri ragazzi, in media, si aggirano attorno ai 2.
Per quanto riguarda le **differenze di genere**, si è notato che la convinzione di alunni ed insegnati che i maschi siano più portati delle femmine per la matematica, sia abbastanza infondata: nonostante la prevalenza dei ragazzi in istituti superiori che prevedono più

matematica, si è riscontrato che i voti migliori sono quelli delle ragazze, ma le prestazioni peggiorano nel momento in cui viene richiesto loro un compito al di fuori della norma. In generale, il test *t di Student* ha evidenziato indipendenza tra risultati e genere; solo nel caso del calcolo a mente dopo la decina le femmine commettono un numero significativo di errori in più, sia per quanto riguarda le sottrazioni che le addizioni.

### 5.1.3 Principali differenze tra i ragazzi DSA e quelli non clinici

Per quanto riguarda l'area del numero, le differenze tra DSA ed il campione di ragazzi non clinici sono evidenti: i DSA impiegano molto più tempo nel conteggio decrescente, con una discrepanza media di quasi un minuto tra la recita dei numeri da 1 a 100 in avanti e la recita all'indietro, e commettono circa il quadruplo di errori in più. Mentre non ci sono differenze sostanziali nella lettura dei numeri a 3 cifre, che insorgono invece per quelli di 4, 5, 6 cifre.
Un simile andamento lo si ritrova per la scrittura dei numeri: nei numeri a 3 cifre l'andamento dei DSA non si discosta particolarmente da quello degli studenti non clinici, cosa che avviene invece per i numeri a più cifre. In questo caso è noto che gli studenti discalculici tendano a commettere più errori di tipo sintattico e lessicale, soprattutto quando i numeri sono fonologicamente plurisillabici, probabilmente per via del deficit della memoria verbale uditiva, che spesso si riscontra negli studenti con DSA.
Nelle prove di codifica semantica, che appesantiscono alquanto la memoria fonologica, le differenze sono significative sia per quanto riguarda le tempistiche che per il numero di errori commessi.
Si è notato, pertanto, che gli studenti con DSA hanno difficoltà in tutta l'area del numero, non soltanto i ragazzi con diagnosi di discalculia, ma anche gli altri, in accordo con le ricerche internazionali che evidenziano la presenza di discalculia nel 60% dei ragazzi dislessici. Le difficoltà di automatizzazione lessicale legate alla dislessia, sembrano ripercuotersi sui processi sottesi all'acquisizione ed alla produzione del numero. Questi risultati rimandano alla centralità del ruolo dell'elaborazione fonologica nella matematica, confermati dal fatto che nei compiti aritmetici vengono utilizzati codici verbali.
I risultati per l'area del calcolo confermano le previsioni, secondo cui gli studenti DSA ottengono prestazioni peggiori sia per quanto riguarda le tabelline scritte in sequenza che in ordine sparso, ma anche nel calcolo a mente sopra e sotto la decina. I tempi di calcolo sono notevolmente dilatati, in quanto la difficoltà di automatizzazione li porta ad impiegare strategie immature, come la riconduzione delle tabelline ad addizioni e le addizioni al conteggio sulle dita. Per questo motivo il tempo risulta essere un parametro molto importante nella diagnosi, infatti i ragazzi discalculici, spesso, riescono a fornire il risultato corretto, ma non riescono a farlo nel tempo a loro disposizione.
Altra problematica evidente è che gli studenti con discalculia non riescono a conservare l'*effetto apprendimento*, cioè la fatica fatta per automatizzare le tabelline risulta completamente inutile dopo il periodo di allenamento, dopo il quale i ragazzi non sono più

in grado di recuperare il risultato.
Andando ad esaminare nello specifico gli errori commessi nelle varie operazioni proposte, si è osservato che i ragazzi con DSA, nelle operazioni di somma, commettono almeno il doppio degli errori rispetto al gruppo dei non clinici, mentre nei prodotti e nelle sottrazioni addirittura triplicano. Le difficoltà incontrate sono molteplici, tra cui aspetti procedurali, riporto e prestito, direzionalità, incolonnamento, ecc.
Infine riportiamo alcune delle conclusioni salienti per tale elaborato. Anche in questo caso sono evidenti le prove scientifiche sull'origine neurobiologica della discalculia. Negli adulti, ad esempio, è stato evidenziato che alcuni danni cerebrali possono compromettere le abilità matematiche: un infarto frontale può far perdere il concetto di numero, lesioni all'area frontale sinistra portano a difficoltà nel calcolo mentale e scritto e lesioni del giro angolare vanno ad inficiare le capacità di lettura e scrittura del numero. La Discalculia Evolutiva non è un disturbo conseguente a traumi cerebrali, ma può riguardare anche'essa soltanto alcune aree in modo selettivo. Non è però pensabile che tutti i ragazzi che presentano difficoltà nell'area matematica presentino un vero e proprio disturbo; per discriminare un profilo di difficoltà da uno con disturbo specifico del calcolo è necessario avere a disposizione gli opportuni strumenti diagnostici con norme adatte ad ogni grado di scolarizzazione. Nel suddetto test, Biancardi, Mariani e Pieretti hanno comunque utilizzato la BDE, tarata per il primo anno di scuola secondaria di primo grado, per tutti i ragazzi partecipanti (appartenenti a tutti e tre gli anni) ed i risultati confermano, in ogni caso, che la compromissione risulta a livello delle abilità di base e non nei calcoli più complessi di algebra, trigonometria, ecc. Pertanto se è presente una grave compromissione di queste abilità di base, la prestazione risulta comunque deficitaria anche se si utilizzano test tarati per ragazzi più piccoli, ma si corre il rischio di non individuare i casi che nel tempo sono riusciti a gestire le proprie difficoltà e che, per così dire, sopravvivono a scuola per merito di strategie compensative. Sono comunque emerse grosse difficoltà anche per quanto riguarda il campione non clinico, che ha mostrato diverse carenze nell'automatizzazione delle tabelline ed in altri fatti numerici che alla scuola secondaria dovrebbero considerarsi consolidati.

# Capitolo 6

# Sperimentazione didattica in una scuola secondaria di secondo grado ed elaborazione dei dati raccolti

Come abbiamo ampiamente spiegato, spesso l'acquisizione dei concetti matematici risulta difficoltosa anche per i soggetti che non presentano dei disturbi specifici del calcolo, non solo per quanto riguarda i concetti più nuovi e complicati, ma anche per quegli argomenti che si considerano ormai consolidati.
A tal proposito ho svolto una sperimentazione didattica in 10 classi di un Istituto Tecnico Industriale Statale della Romagna, 5 appartenenti al primo anno e 5 al secondo anno, proponendo un test ispirato alle prove di II livello per la diagnosi della discalculia *MT-advanced*, scegliendo, in particolare, quelle relative al terzo anno di scuola secondaria di primo grado. Essendo i ragazzi intervistati del primo e secondo anno di scuola secondaria di secondo grado, che perdipiù hanno scelto un istituto con una forte presenza di materie scientifiche, ci si aspetta che, in generale, gli esercizi proposti non debbano essere valutati troppo difficili. Proponendo un test pensato per i ragazzi discalculici, il mio intento era quello, innanzitutto, di verificare se i concetti di base fossero o meno stati appresi e consolidati nei ragazzi non clinici ed, allo stesso tempo, di appurare l'eventuale presenza degli errori tipici nei ragazzi con DSA e di controllare se le strategie proposte loro per aiutarli sono realmente efficaci o meno. Il totale degli iscitti nelle classi è di 229 ragazzi di sesso misto, tra cui 11 sono certificati come DSA. I ragazzi che effettivamente erano presenti durante la sottoposizione del test sono 201 e tra gli assenti non era presente nessun DSA. Possiamo già ricavare un importante dato, cioè la percentuale dei DSA presenti: 11 ragazzi su 229 equivalgono al $4,8\%$, dato abbastanza superiore alla media nazionale, oscillante tra il $3,1\%$ ed il $3,3\%$. A tal proposito, ho potuto osservare in prima persona, durante la ricerca di un istituto adatto alle mie esigenze, che la distribuzione all'interno delle varie scuole dei ragazzi con disturbi specifici dell'apprendimento non sia affatto omogenea. Nel caso specifico, quando sono andata a colloquio con la preside del

Liceo Scientifico di Forlì, mi è stato riferito che in tutta la scuola (istituto con più di 1000 iscritti) sono presenti soltanto 3 DSA. È evidente, quindi, che la sovrabbondanza della percentuale ricavata nel nostro campione, sia anche un indice di prefernza da parte dei DSA nei confronti dell'istituto; mi sembra altresì allarmante il dato del liceo, che evidentemente non sembra proporre programmi adeguati, spaventando i ragazzi con DSA in particolare, che non si sentono adeguati ad intraprendere un simile percorso scolastico.
Tutti i dati raccolti sono perfettamente anonimi, in modo da rispettare la privacy ed incoraggiare gli studenti anche soltanto a tentare una possibile soluzione, ad incolonnare o comunque a scrivere i propri ragionamenti. Nell'intestazione sono stati richiesti soltanto la classe ed il numero di registo, in modo da facilitarne il conteggio e per riuscire ad individuare gli studenti DSA, dei quali mi è stata consegnata una lista, sempre per numero di registro, dalle professoresse delle varie classi.
Il test sottoposto è un test di due facciate: la prima doveva essere eseguita rigorosamente senza calcolatrice e conteneva due operazioni in colonna (una sottrazione ed una combinata, composta da una moltiplicazione ed una divisione), una piccola espressione frazionaria, ordinamento di una serie di numeri, la traduzione in cifre di numeri presentati in lettere ed anche verbalmente ed, infine, un semplice problema; nella seconda facciata era permesso l'uso della calcolatrice, in modo da verificare se questo strumento potesse o meno aiutare, se usato in modo opportuno, la risoluzione degli esercizi. In questa facciata era richiesto di risolvere due problemini, di esegiure operazioni con numeri da tradurre prima in cifre e di ordinare una serie di frazioni dopo aver fatto il denominatore comune.
Per calcolare le tempistiche necessarie allo svolgimento, ho svolto io stessa il test, cronometrando la mia risoluzione; il tempo a me necessario per svolgere tutti gli esercizi in modo corretto è stato di 8 minuti circa, perciò ho stimato che 20 minuti, per i ragazzi, potessero bastare. Prima di consegnare il test è stato detto loro che potevano utilizzare solo 20 minuti, nei quali erano liberi di scegliere quando girare il foglio, ma nel momento in cui lo avessero fatto non potevano più tornare alla parte A per controllare i conti con la calcolatrice. A tal proposito è interessante notare che i ragazzi delle seconde sono riusciti a rimanere dentro ai tempi prestabiliti, mentre quelli di prima hanno avuto bisogno della concessione di 5 minuti in più, in linea con le statistiche secondo cui la velocità aumenta in modo lineare rispetto all'anno di scolarizzazione. In particolare mi è apparso singolare scoprire che i ragazzi bocciati l'anno precedente, in generale, sono più veloci del resto della loro classe nell'ultimare il test, pertanto la velocità sembra essere indipendente da eventuali difficoltà incontrate durante il percorso scolastico ed, invece, essere sensibilmente dipendente dall'età.
Durante l'esecuzione del test, sono stati dati dei feedback di riferimento temporale, a 10, 5 e 2 minuti dalla consegna, in modo che i ragazzi potessero gestirsi al meglio. Nelle prime, dove le lamentele sono state numerose, si è concordato di concedere 5 minuti in più in modo che tutti potessero avere la possibilità di ultimare gli esercizi.
Il test proposto è il seguente:

## 6.1 PARTE A

### 6.1.1 Esercizio 1

Risolvi in colonna le seguenti operazioni:
$4771,001 - 156,66 =$ e $750 \times 21,6 \div 20 =$
Questo esercizio sottintende la capacità di saper incolonnare i numeri, anche se non hanno la stessa quantità di decimali, sia nelle sottrazioni che nelle moltiplicazioni. È necessario che lo studente sia a conoscenza del fatto che, se i numeri sono decimali, l'incolonnamento di sottraendo e minuendo nella sottrazione e quello dei fattori nella moltiplicazione si basa su principi teorici differenti, infatti, per quanto riquarda la differenza, il modo corretto di scrivere i due numeri è quello di partire dal collocare le virgole una sotto l'altra e, dopodichè scrivere i numeri, eventualmente aggiungendo degli zeri nelle caselle dei decimali vuote, in questo modo:

$$\begin{array}{cccccccccc} 4 & 7 & 7 & 1 & , & 0 & 0 & 1 & - \\ . & 1 & 5 & 6 & , & 6 & 6 & 0 & = \end{array}$$

Per la moltiplicazione, invece, non serve partire collocando la virgola, ma si devono scrivere entrambi i numeri uno sotto l'altro, avendo cura soltanto di allineare le cifre a destra come se non avessero la virgola; poi si esegue la moltiplicazione normalmente e la virgola si sposta solo nel risultato, di tante caselle quante la somma dei decimali dei due fattori:

$$\begin{array}{cccc} 7 & 5 & 0 & \times \\ 2 & 1, & 6 & = \end{array}$$

Per quanto riguarda la divisione successiva, in realtà bastava accorgersi che il risultato, 16200, si può dividere per 10, esattamente come il divisore, quindi la divisione $16200 \div 20$ è uguale ad eseguire la divisione $1620 \div 2$, che si può risolvere molto semplicemente a mente, oppure impostando una frazione e semplificando:

$$\frac{1620 \div 2}{2 \div 2} = \frac{810}{1} = 810 \tag{6.1}$$

Andiamo a vedere più in dettaglio i risultati ottenuti in questo esercizio dai ragazzi. Per maggiore chiarezza, suddividiamo i risultati in tre grafici, ognuno relativo ad una operazione.

CLASSE : ........................................ NUMERO DI REGISTRO : ......................

**PARTE A - VIETATO L'USO DELLA CALCOLATRICE**

- Risolvi in colonna le seguenti operazioni:

  4771,001 – 156,66 =                750 x 21,6 : 20 =

- $\left[\left(3-\frac{12}{5}\right)\times\left(2+\frac{1}{3}\right)\right]^{-2} \div \frac{14}{10} =$

- Metti in ordine decrescente i seguenti numeri:

$\sqrt{49}$ ; $15^0$ ; $-\frac{18}{7}$ ; 7,003 ; $7^{-2}$ :

- Scrivi in cifre i seguenti numeri espressi in lettere:

4 centesimi + 7 decine + 1 centinaio + 9 decimi + 0 unità :

Undicimilacinquecentotre :

Tremilionisettecentomilatredici :

- Risolvi il seguente problemino:

Un negozio di pattini in un giorno ha venduto 20 paia di pattini. Il giorno successivo ne vende i tre quinti in meno. Quanti singoli pattini sono stati venduti il secondo giorno?

- **Qui sotto scrivi i due numeri che ti verranno dettati:**

**PARTE B:** **E' PERMESSO L'USO DELLA CALCOLATRICE**

- Metti in ordine crescente le seguenti frazioni dopo averle trasformate in frazioni equivalenti con lo stesso denominatore:

$\frac{3}{8}$ ; $-\frac{7}{9}$ ; $\frac{41}{36}$ ; $\left(\frac{9}{14}\right)^{-1}$ ; $-\frac{17}{12}$

- Scrivi in cifre i seguenti numeri scritti in lettere poi esegui le operazioni scritte sotto:
  a) Undicimilasettecentodue
  b) Milledieci
  c) Sette decimi
  d) Quattromilioniventisettemilanove
  e) Tredicimilaottocentootto

  a + e =

  b x c =

  b x c + d =

  d - ( a + b + e ) : c =

- Risolvi i due seguenti problemini:

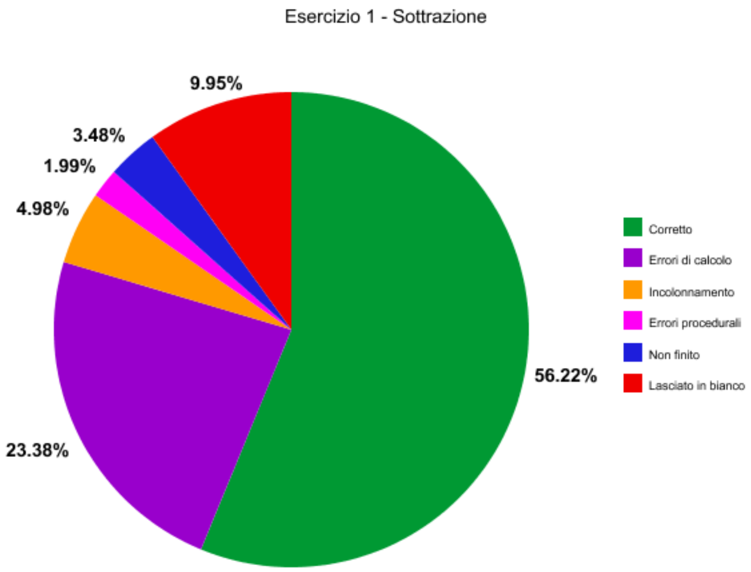
Hai due damigiane a disposizione, ciascuna contenente 34,5 litri di vino. Ogni bottiglia può contenere 75 cl di vino. Quante bottiglie puoi riempire con le due damigiane a disposizione?

Francesco vuole acquistare un nuovo televisore che costa 789 euro. Sfogliando un volantino trova proprio quel televisore scontato del 19%. Si ricorda di avere anche un buono del valore di quarantacinque euro e 86 centesimi da spendere in quel negozio. Alla fine Francesco quanto pagherà il suo televisore nuovo? Avendo un budget totale di 600 euro riesce ad acquistare anche un DVD da 15 euro?

**Sottrazione**

| Correzione | numero studenti | Percentuale sul totale |
|---|---|---|
| Corretto | 113 | 56,22% |
| Errori di calcolo | 47 | 23,38% |
| Incolonnamento | 10 | 4,98% |
| Errori procedurali | 4 | 1.99% |
| Esercizio non finito | 7 | 3,48% |
| Esercizio lasciato in bianco | 20 | 9,95% |

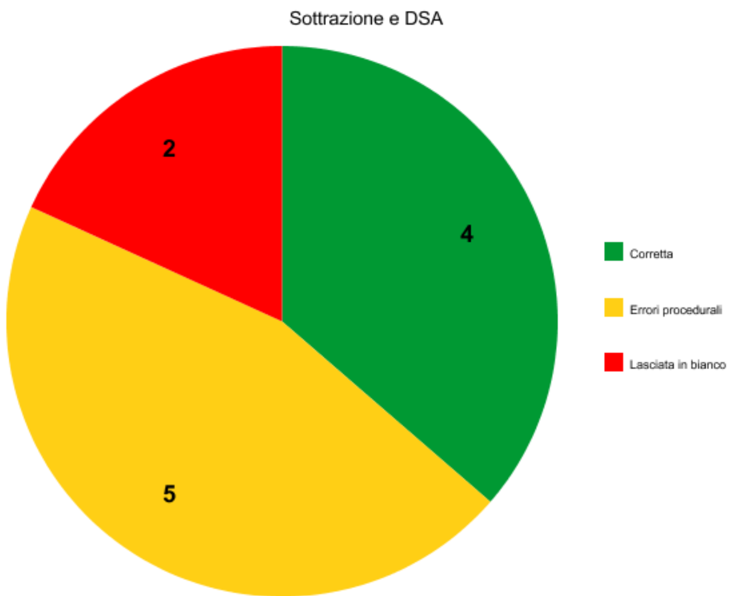
Per meglio visualizzare la situazione inseriamo anche un diagramma a torta, che ci permette di analizzare i risultati anche con un veloce colpo d'occhio:




.

Oltre la metà dei ragazzi è riuscita ad eseguire la prima sottrazione senza commettere errori, incolonnando correttamente i due numeri con decimali. È importante notare che meno del 5% degli intervistati non riesce ad incolonnare l'operazione, compiendo errori di allineamento o di aggiunta di zeri. Infine circa il 10% giudica di non riuscire nemmeno ad iniziare un simile esercizio e lo lascia completamente in bianco. Faccio notare che sono stati considerati esercizi lasciati in bianco soltanto quegli esercizi che non sono stati minimiamente toccati dallo studente; quelli incolonnati ma non completati sono comunque stati conteggiati nella categoria degli esercizi non finiti. Diamo, infine, un'ultima precisazione, in modo da esplicitare cosa si è inteso con errori procedurali: questa tipologia è

stata adottata per quei ragazzi che confondono durante lo svolgimento dell'operazione la procedura da eseguire, ad esempio confondono il $-$ con il $+$, oppure eseguono contemporaneamente entrambe le operazioni.
È evidente che non soltanto i ragazzi discalculici incontrino difficoltà, anche notevoli, nell'esecuzione di operazioni considerate ormai consolidate al livello di scolarità analizzato. Nonostante il ridotto campione statistico per quanto riguarda i ragazzi con DSA, possiamo cercare di effettuare qualche considerazione, aiutandoci con il seguente grafico:




.

Ritenendo che non fosse opportuno parlare di percentuali, trattandosi di un campione di 11 ragazzi (troppo esiguo per considerazioni statistiche), ho preferito inserire il numero esatto degli appartenenti ad ogni regione colorata. Si può notare che quasi la totalità dei ragazzi tenta almeno di risolvere l'operazione e circa la metà riesce addirittura a risolverla senza errori. All'interno degli errori procedurali si è riscontrata una forte presenza di difficoltà nell'incolonnare i numeri e nello scegliere quale operazione sia da eseguire. I ragazzi con discalculia, inoltre, tendono a mescolare le procedure all'interno dell'esecuzione di una stessa operazione ed anche in questo caso, spesso, il risultato è dato in parte sommando ed in parte sottraendo i due numeri dati nel testo.
Riporto di seguito un esempio di sottrazione corretta ed alcuni degli errori commessi più di frequente sia dai ragazzi con DSA che senza.
Come spiegato all'inizio della sezione, il giusto incolonnamento per la sottrazione avviene posizionando le virgole una sotto l'altra, per poi aggiungere gli zeri in corrispondenza dei decimali che non vengono esplicitamente scritti nel testo. In questo caso è necessario "*prendere in prestito*" 3 volte per poter eseguire la sottrazione, cioè, siccome $0 - 6$ non

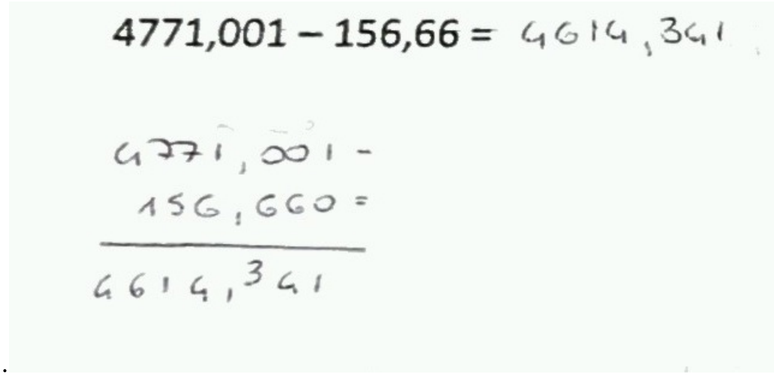



Figura 6.1: Sottrazione corretta

si può fare in $\mathbb{N}$, bisogna trasformare uno dei decimi a disposizione in 10 centesimi, ma anche i decimi sono 0, per cui bisogna fare lo stesso ragionamento con le unità e poi con le decine, finchè non si riescono a trasformare tutti i termini del minuendo in termini maggiori o uguali dei corrispondenti del sottraendo. Una volta "trasformato" il numero seguendo questa procedura si può eseguire la sottrazione normalmente.

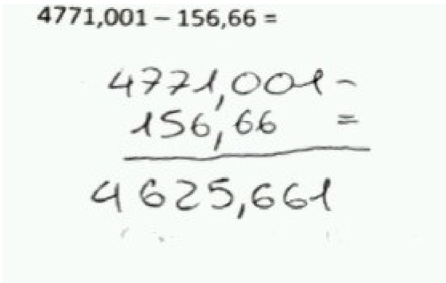



Figura 6.2: Confusione tra le operazioni

Il ragazzo in questione incolonna alla perfezione i due numeri riportati nel testo, ma nel momento di eseguire l'operazione si trova a mescolare procedure ed ordine: per quanto riguarda i decimali, si può notare che, invece di essere sottratti, vengono sommati tra di loro; le unità vengono invertite, quindi l'unità del minuendo viene sottratta dall'unità del sottraendo ed infine con migliaia, centinaia e decine esegue l'operazione corretta. La mia personale opinione, in questo caso, è che lo studente, nel momento in cui si trova davanti ad un compito che non riesce a svolgere, oppure su cui ha dei dubbi, voglia comunque cercare di rispondere. Questo caso si può collegare alle problematiche relative alle clausole del contratto didattico, secondo cui l'insegnante si aspetta che l'alunno sia in grado di risolvere un simile esercizio, pertanto lo studente si sente in dovere di svolgerlo; nell'ottica di idee del ragazzo, scrivere qualcosa è meglio che lasciarlo in bianco ed, anche se il procedimento non è quello corretto, si sente di aver "deluso" di meno l'insegnate.

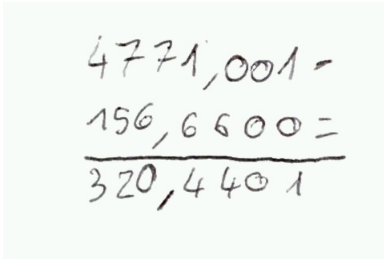



Figura 6.3: Errore di incolonnamento

Uno dei più singolari errori di incolonnamento che ho incontrato durante la correzione dei test è stato proprio questo. Il ragazzo, invece di incolonnare partendo dalla virgola, oppure allineando i due numeri a destra (errore tra i più frequenti della categoria "incolonnamento"), parte scrivendo entrambi i numeri allineati a sinistra, per poi aggiungere due zeri a destra come suggerito dall'algoritmo per svolgere l'operazione. Il calcolo successivo, basandosi sull'incolonnamento eseguito dal ragazzo risulta corretto e senza errori di calcolo, ma tale errore rende vana l'attenzione e la correttezza nell'esecuzione, fornendo il risultato sbagliato.

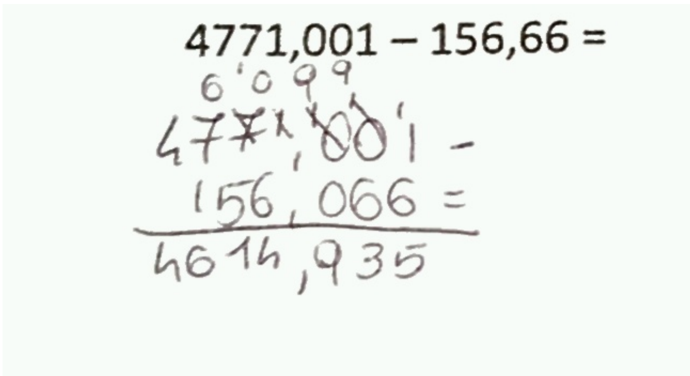
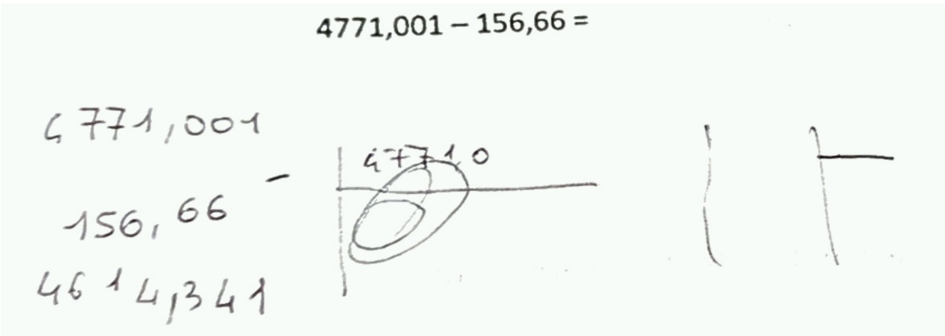



Figura 6.4: Errore di concetto

Un ultimo errore, piuttosto interessante per quanto riguarda l'incolonnamento della sottrazione, è proprio quello riportato nella figura sopra. Il ragazzo in questo caso, probabilmente, si ricordava di dover aggiungere uno zero in modo da rendere il numero dei decimali del minuendo equivalente a quello del sottraendo, ma aggiungendolo in questo modo modifica il valore dei decimali successivi che diventano centesimi e millesimi anzichè decimi e centesimi. Il ragazzo non si rende conto di modificare il numero inserendo uno zero tra la virgola ed il primo decimale, cosa che invece non succede aggiungendo uno zero dopo l'ultimo decimale. Un simile errore mi fa pensare che lo studente non abbia ben chiaro neanche il concetto dei numeri razionali o reali assoluti, poichè dovrebbe essere consolidato il fatto che, spostando i numeri da destra verso sinistra o viceversa, ne venga

modificato il valore (avrebbe dovuto pensare anche soltanto al fatto che $0,6 \neq 0,06$ ma $0,6 = 0,60$).
Per quanto riguarda i ragazzi discalculici, riportiamo di seguito un paio di errori particolarmente significativi che possono aiutarci a comprendere meglio le difficoltà che si trovano ad affrontare durante lo svolgimento degli esercizi:



.

Figura 6.5: Confusione tra le operazioni

Nel caso dei ragazzi discalculici gli errori relativi alla confusione tra le operazioni sono ben diversi rispetto a quelli riportati per i ragazzi non clinici. In questo caso, lo studente non riesce ad individuare la strategia giusta da seguire: procedendo per tentativi, cerca di incolonnare una divisione in cui il minuendo diventa il divisore ed il sottraendo il dividendo, pertanto inverte anche l'ordine di presentazione dei termini. Dopo aver cancellato più volte e ritentato un possibile incolonnamento, riesce ad ottenere il risultato corretto senza esplicitare però i calcoli, il chè, purtroppo, mi lascia un po' interdetta sull'autonomia della risoluzione.

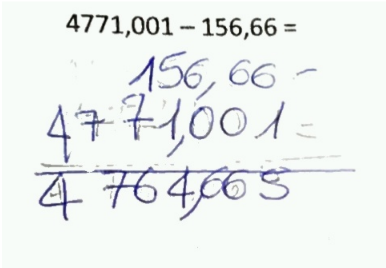



Figura 6.6: Errore di incolonnamento

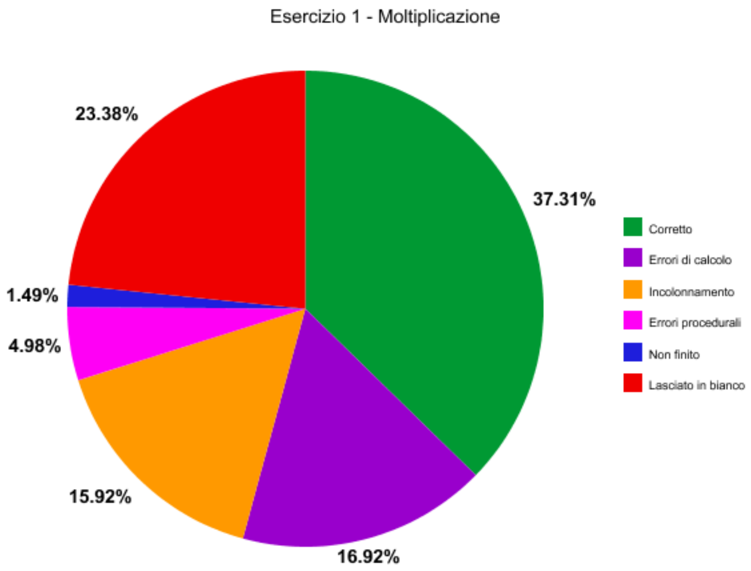
Anche nel caso degli errori di incolonnamento i ragazzi discalculici si distinguono dagli altri. In questo caso lo studente denota una estrema insicurezza eseguendo più volte l'operazione a matita, nonostante le mie intimazioni di usare la penna. Si possono comunque notare, sotto all'operazione scritta a penna, diversi incolonnamenti cancellati, per poi scegliere quello che secondo il ragazzo sembrava essere il più giusto, nel quale i termini vengono scambiati ed allineati a destra senza l'aggiunta dello zero.

### Moltiplicazione e divisione

Per quanto riguarda la correzione della seconda parte dell'esercizio, ho preferito tenere separate le due operazioini in modo da capire meglio dove risiedessero le difficolà. Per la moltiplicazione si sono ottenuti i seguenti risultati:

| Correzione | numero studenti | Percentuale sul totale |
|---|---|---|
| Corretto | 75 | 37,31% |
| Errori di calcolo | 34 | 16,92% |
| Incolonnamento | 32 | 15,92% |
| Errori procedurali | 10 | 4,98% |
| Esercizio non finito | 3 | 1,49% |
| Esercizio lasciato in bianco | 47 | 23,38% |

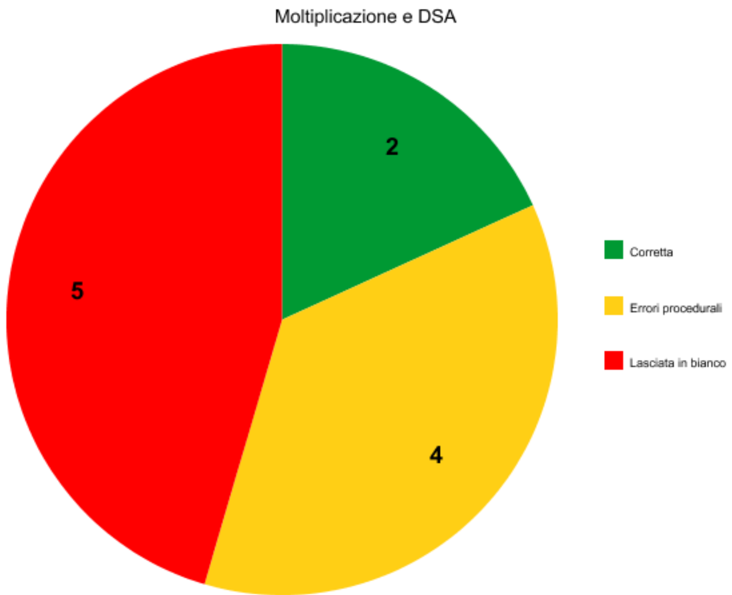
Anche in questo caso, lasciamoci aiutare da un diagramma a torta per capire meglio la stratificazione degli studenti nei confronti di questa operazione:




.

Si può notare che la percentuale di esercizi corretti diminuisce drasticamente rispetto alla sottrazione, perdendo quasi 20 punti percentuali; tale fatto non è sicuramente da imputare agli errori di calcolo, che diminuiscono, lasciando intendere che le tabelline siano state automatizzate meglio rispetto alle sottrazioni. Gli errori di incolonnamento, al contrario, triplicano, lasciando sottintendere che i principi teorici della moltiplicazione con decimali siano molto meno chiari rispetto a quelli della sottrazione. Dato allarmante è che quasi il 25% dei ragazzi abbia ritenuto di non riuscire neanche ad iniziare un simile esercizio, lasciandolo completamente in bianco. Tra gli errori procedurali sono stati catalogati gli errori nello spostare la virgola nel risultato oppure gli errori di incolonnamento delle moltiplicazioni intermedie, dove è necessario aggiungere zeri a destra nel momento in cui ci si sposta da decimi a unità a decine.

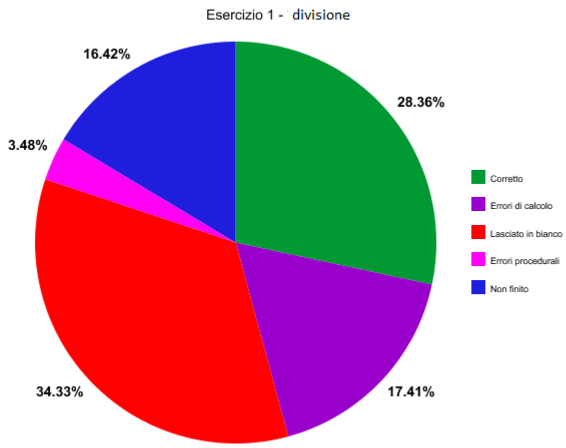
Purtoppo la situazione peggiora anche per i ragazzi con DSA:




.

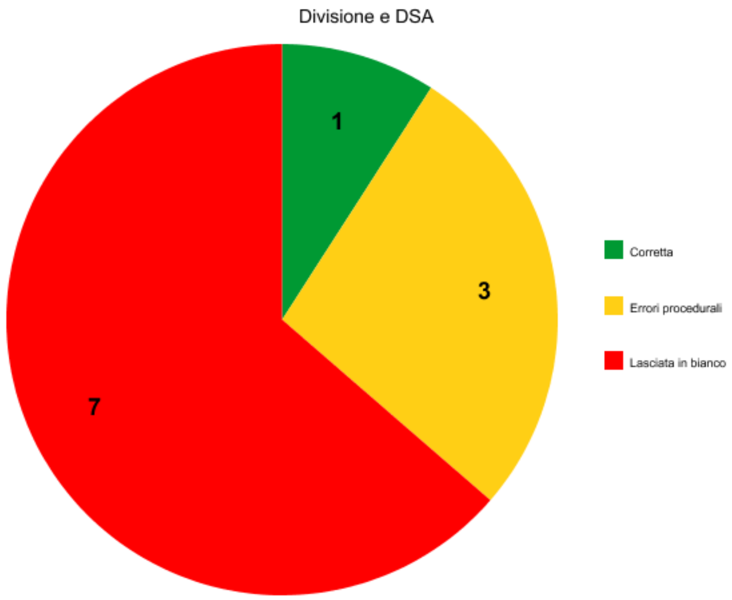
Solo due di loro riescono ad ottenere il risultato corretto ed, anche qui, la metà non tenta nemmeno di risolverla, reputando l'operazione troppo complessa persino da incolonnare. Da notare che, anche per quanto riguarda i DSA, sono stati considerati esercizi lasciati in bianco soltanto gli esercizi non toccati dai ragazzi, mentre negli errori procedurali sono stati inseriti tutti quegli errori in generale che portano ad un risultato non esatto, senza andare a specificare se si tratti di incolonnamento o calcolo, in modo da non complicare la situazione più del necessario. Reputo importante osservare che, in questo caso, tutti gli studenti che hanno provato a risolvere l'operazione, sono anche arrivati alla fine, fornendo un risultato più o meno esatto che fosse; nessuno dei ragazzi DSA ha iniziato l'operazione per poi non portarla a termine.
La situazione precipita ulteriormente quando si va ad affrontare la divisione. Gli errori commessi nella precedente moltiplicazione si ripercuotono sull'operazione, che può diventare anche molto più complicata di quanto non fosse in realtà.

| Correzione | numero studenti | Percentuale sul totale |
|---|---|---|
| Corretto | 57 | 28,36% |
| Errori di calcolo | 35 | 17,41% |
| Errori procedurali | 7 | 3,48% |
| Esercizio non finito | 33 | 16,42% |
| Esercizio lasciato in bianco | 69 | 34,33% |




La percentuale di esercizi corretti scende ulteriormente a sotto il 30%, mentre sale esponenzialmente la quantità degli esercizi iniziati ma non finiti. Circa il 35% dei ragazzi ritiene di non riuscire neanche ad incolonnare l'operazione, mentre la percentuale degli errori di calcolo commessi rimane quasi invariata rispetto a quella della moltiplicazione. Faccio notare che la percentuale degli esercizi lasciati in bianco sommata a quella degli esercizi non portati a termine, arriva da sola a superare il 50%.

Putroppo non rimaniamo sorpresi dei risultati ottenuti dai ragazzi DSA:




.

Soltanto uno dei ragazzi con DSA del campione riesce a portare a termine l'operazione ottenendo in risultato corretto, mentre addirittura 7 di loro giudica di non riuscire nemmeno ad iniziarla.
Nel mio test ho voluto appositamente inserire anche una divisione, nonostante nelle batterie per la discalculia vengano fortemente sconsigliate, in quanto di solito mostrano un livello di automatizzazione bassissimo ed il ragazzo discalculico non riesce a trovare un modo per portarla a termine. Non essendo indirizzato solo ai ragazzi con DSA, ho voluto inserirla per verificare se le prestazioni deludenti riguardassero soltanto la difficoltà degli studenti discalculici nell'automatizzazione di tale procedimento, oppure fossero un risultato generale nei confronti della divisione. Dai risultati mi sembra evidente che le problematiche relative alla divisione riguardino tutti gli studenti, non solo quelli con disturbi specifici del calcolo.
In questa seconda parte dell'esercizio sono state accettate e particolarmente apprezzate anche risoluzioni diverse da quella proposta; ne riportiamo alcune di seguito, insieme agli errori più frequenti: l'immagine seguente è un esempio di risoluzione corretta con la strategia suggerita da me; di seguito, invece, riporto due risoluzioni altrettanto interessanti che sono state elaborate dai ragazzi:

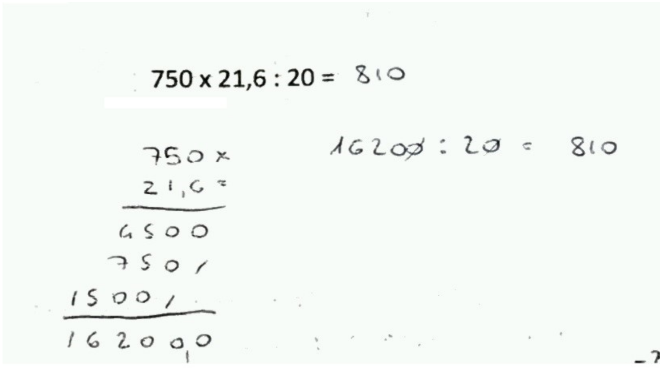



Figura 6.7: Esercizio corretto

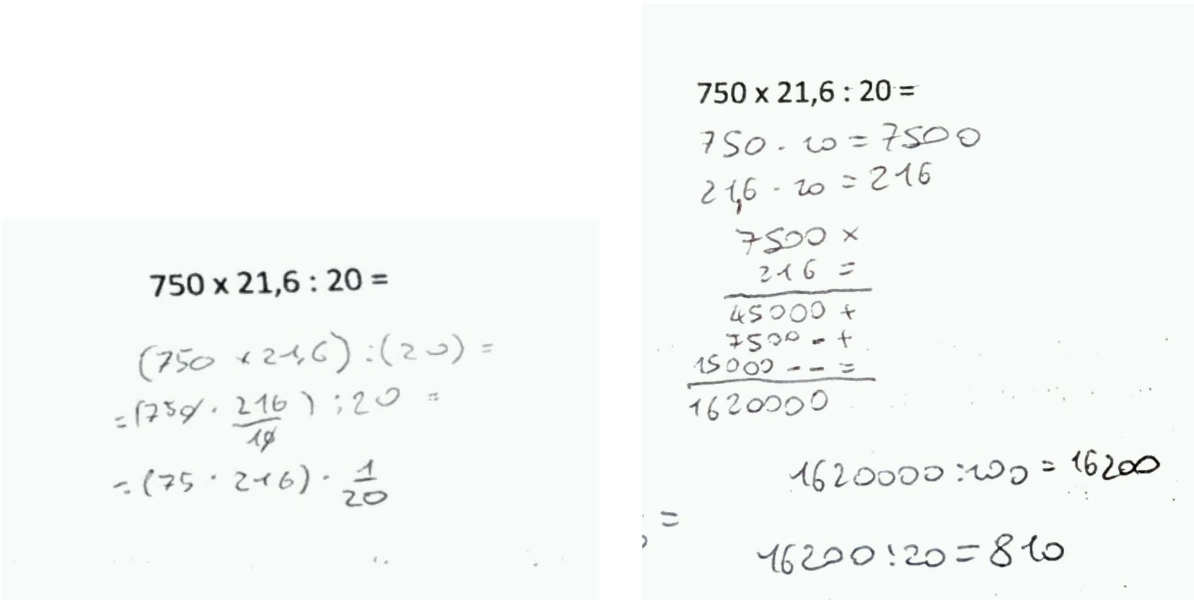



Figura 6.8: Strategie risolutive alternative.

Nella prima risoluzione il ragazzo trasforma il numero decimale $21,6$ nella sua frazione generatrice $\frac{216}{10}$ e risolve l'esercizio come se fosse una espressione numerica frazionaria. Nonostante non porti a termine l'esercizio ho ritenuto importante inserire questo esempio, per mostrare come è stato evitato il problema della fissità funzionale che spesso ci induce a ragionare sempre nello stesso modo e seguendo meccanicanicamente determinati passaggi. Il ragazzo in questione, probabilmente, non sapendo svolgere l'operazione in colonna, ha aggirato l'ostacolo impostando una risoluzione alternativa che si basasse su dei concetti a lui molto più chiari.
Nella seconda risoluzione, invece, il ragazzo elude il problema dei decimali moltiplicando entrambi i fattori per 10, in modo da ottenere due numeri senza la virgola, ed esegue la moltiplicazione correttamente con i due fattori che ha ottenuto. Dopodichè, avendo moltiplicato per 100 per eliminare la virgola, divide il risultato per 100 in modo da ottenere il risultato corretto per la moltiplicazione iniziale. Infine la divisione la esegue a mente.

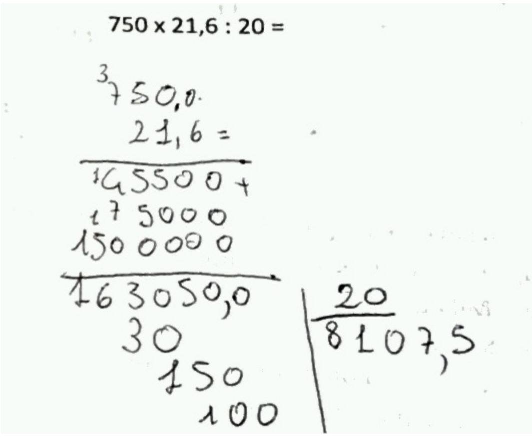



Figura 6.9: Errore procedurale

In questo caso lo studente incolonna la moltiplicazione come se fosse stata una sottrazione o addizione, quindi allineando le virgole una sotto l'altra; se nel risultato la virgola fosse stata spostata verso sinistra di due postazioni (uguale alla somma del numero di decimali dei due fattori), il risultato sarebbe stato corretto, chiaramente senza considerare gli eventuali errori di calcolo che correlano l'operazione.

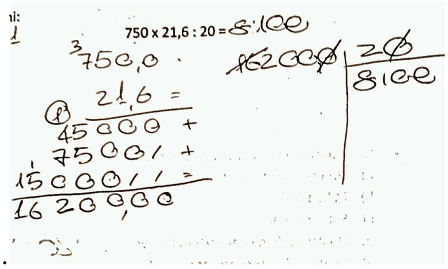



Figura 6.10: Errore procedurale

Un errore molto frequente per la divisione è stato quello di non riposizionare la virgola nel risultato. La maggior parte dei ragazzi che hanno scritto il dividendo con dei decimali, non è poi riuscita a risolvere correttamente la divisione, in quanto nel momento in cui si oltrepassano le unità verso destra, bisogna inserire la virgola anche nel quoziente. In questo caso particolare, il ragazzo semplifica uno zero sia nel divisore che nel dividendo, ma due zeri con valore differente: uno ha valore dei decimi, l'altro delle unità, così il numero ottenuto risulta errato.
Di seguito riporto un paio di errori commessi dai ragazzi discalculici, che come abbiamo potuto osservare per la precedente parte dell'esercizio, sono molto differenti rispetto a quelli dei ragazzi non clinici.

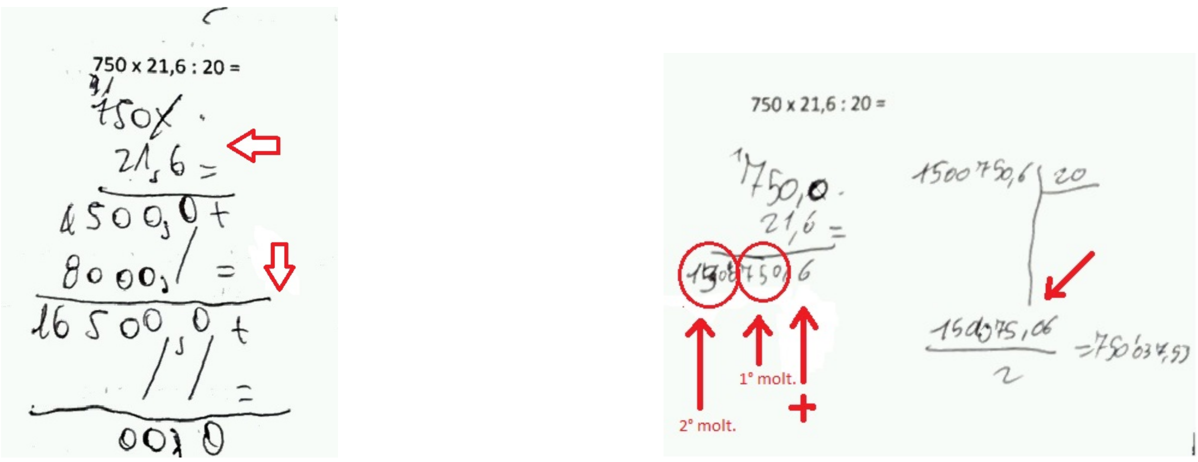



Figura 6.11: Errori compiuti dai ragazzi discalculici

Dalla prima immagine si può notare innanzitutto un incolonnamento non corretto che addirittura pone il numero dopo la virgola sotto all'operatore di moltiplicazione; è presente una linea orizzontale in più del necessario come se volesse prima sommare le due moltiplicazioni parziali ottenute e solo in un secondo momento eseguire l'ultima, sommandola

al risultato. Aldilà degli errori di calcolo, non riesce a portare a termine l'operazione e si ferma prima della terza moltiplicazione parziale.
Nella seconda immagine è molto singolare il risultato ottenuto nella moltiplicazione, in cui i numeri decimali vengono sommati tra di loro, poi viene eseguita la moltiplicazione parziale $750 \times 1$ ed il risultato scritto prima della virgola, infine il ragazzo esegue la seconda moltiplicazione parziale $750 \times 2$ ed il risultato (1500) lo scrive attaccato al risultato ottenuto fino a quel momento. Dopodichè, incolonna la divisione, ma reputandosi più abile a risolvere una frazione, decide di passare a questa strategia, decidendo di dividere entrambi i termini per 10. A questo punto esegue la divisione in modo corretto con il risultato che aveva ottenuto per la moltiplicazione.

In conclusione, riporto alcune considerazioni generali sull'andamento di questo particolare esercizio: sicuramente l'obbligo di non utilizzare la calcolatrice per delle simili operazioni ha spiazzato i ragazzi, che nella scuola secondaria di secondo grado (e a volte anche in quella di primo grado), sono abituati ad utilizzare a scapito del calcolo a mente o in colonna. Tali procedure, se perfettamente consolidate nella memoria, possono essere recuperate in qualsiasi momento, ma spesso le basi non sono abbastanza solide da permetterlo. La sottrazione è stata quella affrontata con meno problemi, forse perchè è una delle prime ad essere insegnata e, pertanto, risiede nella memoria a lungo termine da più tempo e viene ripetuta più volte nei ripassi delle operazioni successive. Per quanto riguarda la moltiplicazione, penso che il problema principale sia proprio stato il trovarsi di fronte ad un fattore decimale, operazione che probabilmente non viene più eseguita in colonna dai primi anni della scuola secondaria di primo grado. L'abitudine di svolgere simili calcoli con la calcolatrice ha probabilmente scoraggiato gli studenti, che non si sono soffermati troppo a ragionarci sopra e hanno affrontato l'esercizio con superficialità, che si è ripercossa sulla successiva divisione unita alle difficoltà specifiche di questa. Basandomi sulla mia personale esperienza scolastica, posso affermare che la divisione sia un po' il tallone d'Achille della scuola primaria; solo a me sono state spiegate tre procedure risolutive diverse e proiettando tale situazione sui ragazzi con una scarsa passione per la matematica e con attitudini nella media, sicuramente questo può portare ad una notevole confusione nella mente del ragazzo.

### 6.1.2 Esercizio 2

Risolvi la seguente espressione:

$$\left[\left(3-\frac{12}{5}\right)\times\left(2+\frac{1}{3}\right)\right]^{-2}\div\frac{14}{10}= \tag{6.2}$$

I principi teorici su cui si basa tale esercizio sono molteplici: il primo passaggio da eseguire è trasformare le frazioni dentro le parentesi in frazioni equivalenti con il denominatore comune. Nella prima parentesi l'm.c.m. tra 5 e 1 è 5 e quello tra 3 e 1 è 3, $\Rightarrow$ l'equazione diventa:

$$\left[\left(\frac{15-12}{5}\right)\times\left(\frac{6+1}{3}\right)\right]^{-2}\div\frac{14}{10}= \tag{6.3}$$

Per eseguire il denominatore comune, bisogna trovare l'm.c.m. tra i denominatori e successivamente prendere ogni frazione, dividere l'm.c.m. per il denominatore e moltiplicare il risultato per il numeratore. Dopodichè si eseguono le somme e la moltiplicazione fra parentesi ottenendo:

$$\left[\frac{3}{5}\times\frac{7}{3}\right]^{-2}\times\frac{14}{10}=\left[\frac{7}{5}\right]^{-2}\div\frac{14}{10}= \tag{6.4}$$

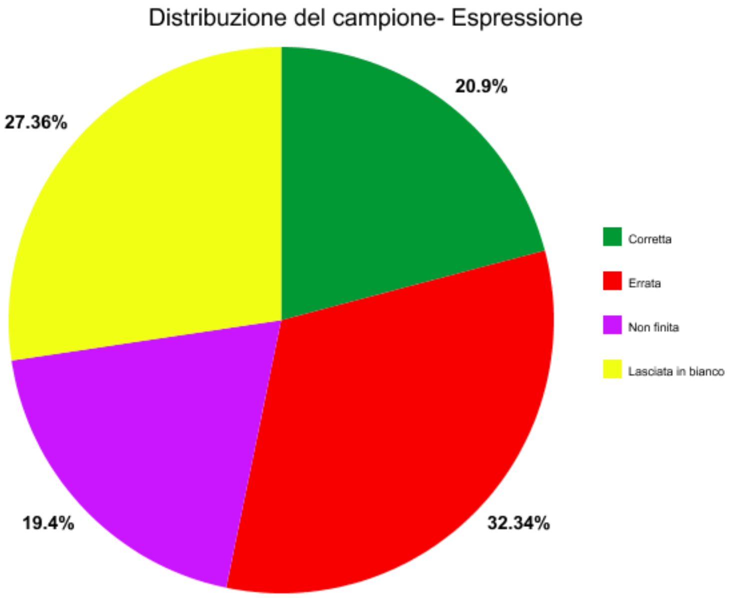
Ora si può eseguire la potenza negativa, che agisce ribaltando la frazione ed elevandola poi alla seconda; si può anche semplificare la frazione $\frac{14}{10}$ per 2 ottenendo $\frac{7}{5}$:

$$\frac{25}{49}\div\frac{7}{5} \tag{6.5}$$

A questo punto bisogna prestare particolare attenzione all'operatore diviso, che per essere eseguito deve essere trasformato in per e la frazione ribaltata. Se così non fosse, le due frazioni potrebbero essere semplificate a croce con la regola della moltiplicazione, ma dovendo ribaltare il risultato corretto risulta essere $\dfrac{125}{343}$.
Vediamo i risultati del campione analizzato:

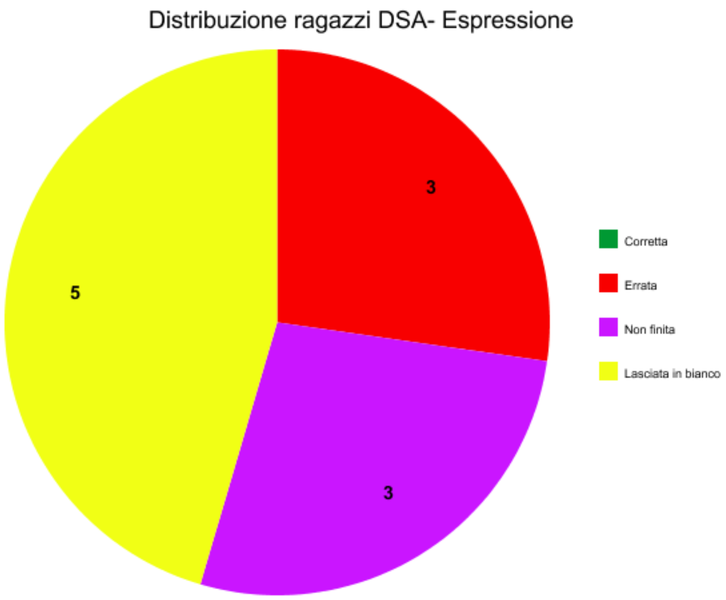
| Correzione | Numero studenti | Percentuale sul totale |
|---|---|---|
| Corretto | 42 | 20,9% |
| Errato | 65 | 32,34% |
| Non finito | 39 | 19,4% |
| Lasciato in bianco | 55 | 27,36% |

Lasciamoci aiutare, anche in questo caso, dai diagrammi a torta per inquadrare meglio la situazione:




Questo esercizio doveva risultare, a mio avviso, piuttosto semplice per i ragazzi intervistati, in quanto freschi di ripasso dell'argomento e abituati a lavorare con le frazioni; in realtà i risultati non sono stati dei più soddisfacenti, in quanto soltanto il 20% è riuscito ad eseguirlo correttamente. Sono stati considerati esercizi non finiti soltanto gli esercizi corretti, che però si interrompono prima del risultato: molti ragazzi sono arrivati fino alla moltiplicazione finale, ma non l'hanno risolta, oppure, arrivati alla potenza negativa e non sapendo come eseguirla, si fermano e passano all'esercizio successivo. Altri, invece, accorgendosi che ribaltando la divisione non si può più semplificare a croce, cancellano il passaggio e semplificano, oppure, addirittura, semplificano numeratore con numeratore e denominatore con denominatore. Ho preferito non distinguere in questo caso le tipologie di errore, ma i più comuni sono stati il non ribaltamento della divisione, l'esecuzione della potenza negativa ed in generale errori di precedenza fra le operazioni. Quasi il 30% dei ragazzi reputa di non essere in grado nemmeno di iniziare tale esercizio e passa

direttamente al successivo.
Per quanto riguarda questo esercizio, la situazione dei ragazzi DSA è delle peggiori:




Nessuno dei ragazzi riesce a portare a termine l'esercizio in modo corretto e soltanto 3 di loro iniziano l'esercizio, ma si fermano prima di concluderlo, eseguendo fino a quel momento dei passaggi corretti; in 5 reputano addirittua di non essere in grado di iniziarlo, mentre i rimanemti commettono diverse tipologie di errori che li portano al risultato sbagliato.

Andiamo a vedere gli errori più significativi e frequenti commessi sia dai ragazzi con DSA che senza:

- $\left[\left(3-\frac{12}{5}\right)\times\left(2+\frac{1}{3}\right)\right]^{-2}\div\frac{14}{10}=$

$$\left[\left(\frac{\cancel{3}}{5}\right)\times\left(\frac{7}{\cancel{3}}\right)\right]^{-2}\cdot\frac{10}{14}=\left[\frac{7}{5}\right]^{-2}\cdot\frac{10}{14}=$$

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{2}\cdot\frac{10}{14}=\frac{25}{49}\cdot\frac{10}{14}=$$

In questo caso il ragazzo esegue tutti i passaggi correttamente, ma arrivato al punto di moltiplicare le due frazioni si ferma senza neanche semplificare la seconda frazione, non accorgendosi in questo modo che la moltiplicazione da eseguire era semplicemente data da $\left(\frac{5}{7}\right)^2\times\frac{5}{7}$, che, utilizzando le proprietà delle potenze risulta essere $\left(\frac{5}{7}\right)^3$. Faccio notare che questo tipo di ragionamento non è stato fatto da nessuno dei ragazzi intervistati, nonostante le potenze potessero risultare un buon metodo alternativo per risolvere l'esercizio.

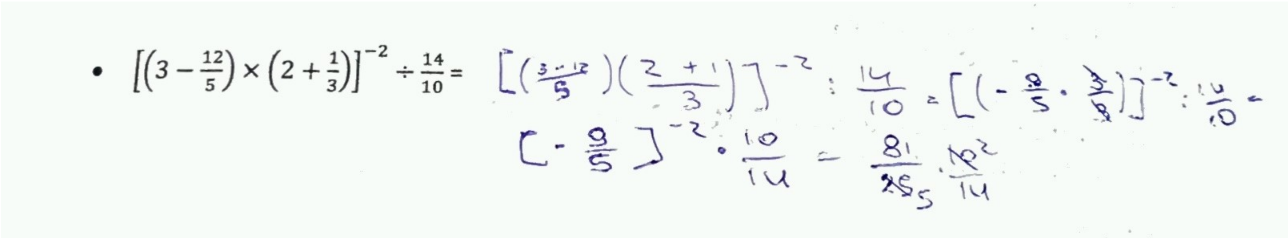
$$\left[\left(3-\frac{12}{5}\right)\times\left(2+\frac{1}{3}\right)\right]^{-2}\div\frac{14}{10}=$$

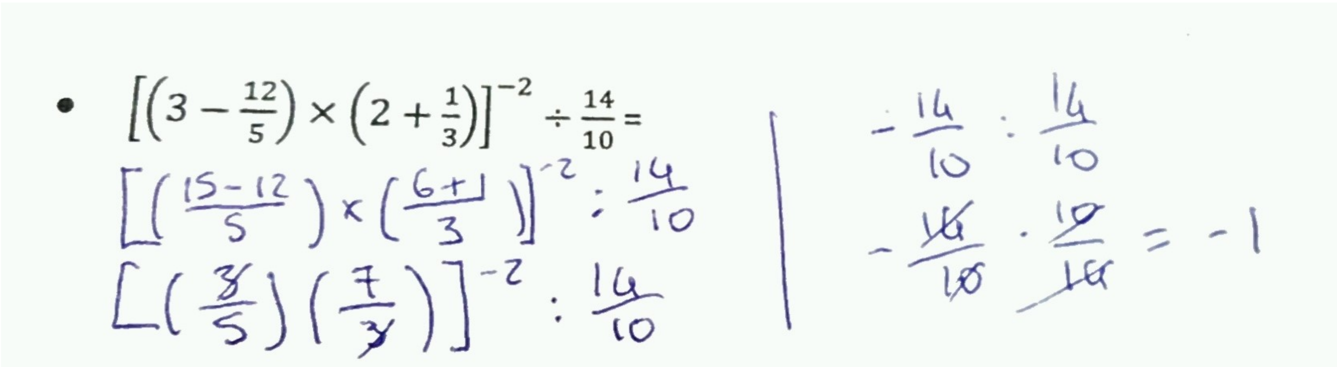
$$\left[\left(\frac{15-12}{5}\right)\times\left(\frac{6+1}{3}\right)\right]^{-2}:\frac{14}{10}$$

$$\left[\frac{\cancel{3}}{5}\cdot\frac{7}{\cancel{3}}\right]^{-2}:\frac{14}{10}=\left(\frac{5}{7}\right)^{2}:\frac{14}{10}=\frac{25}{49}\cdot\frac{10}{14}\quad\frac{\cancel{49}^{\,7}}{\cancel{25}_{\,5}}\cdot\frac{\cancel{10}^{\,2}}{\cancel{14}_{\,2}}=\frac{\cancel{14}^{\,7}}{\cancel{10}_{\,5}}=\frac{7}{5}\qquad 10\times$$

Uno dei casi a cui mi riferivo sopra è proprio questo: i ragazzi, abituati a dover semplificare e ad operazioni appositamente progettate affinchè si possano semplificare, pensano di aver sbagliato qualcosa se si accorgono che prima di ribaltare potevano farlo e dopo no, quindi, spesso, tornano indietro e fanno in modo che la moltiplicazione si possa semplificare a croce, nonostante non sia così.

Altro errore, fortunatamente meno comune, è l'incapacità di eseguire il denominatore comune, trasformando le frazioni in frazioni equivalenti con lo stesso denominatore:




Questo è, invece, un grave errore di concetto della potenza negativa: oltre a non ribaltare la base, il ragazzo porta il meno dell'esponente davanti, rendendo la base negativa e dopodichè esegue la potenza, non elevando numeratore e denominatore, ma moltiplicandoli per l'esponente. Il ragazzo ha gravi carenze da questo punto di vista, poichè se anche avesse portato il meno davanti alla base, si sarebbe dovuto accorgere che qualsiasi numero elevato al quadrato è positivo, pertanto ottenere un risultato negativo è assolutamente impossibile.
Tra gli scarsi risultati dei ragazzi discalculici, mi è sembrato oppurtuno presentare le due seguenti risoluzioni:

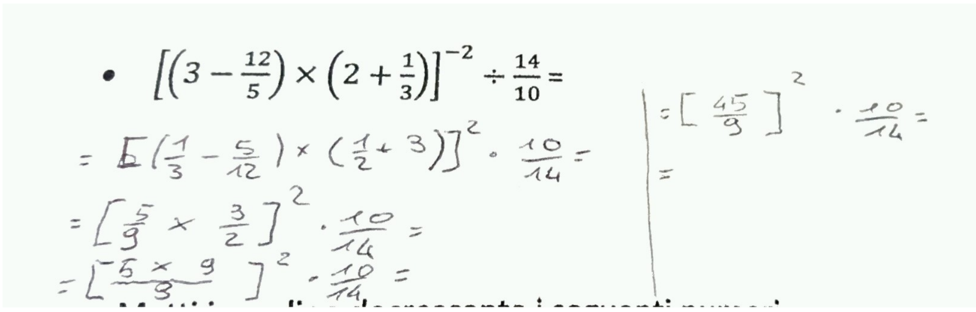



Figura 6.12: Figura 1

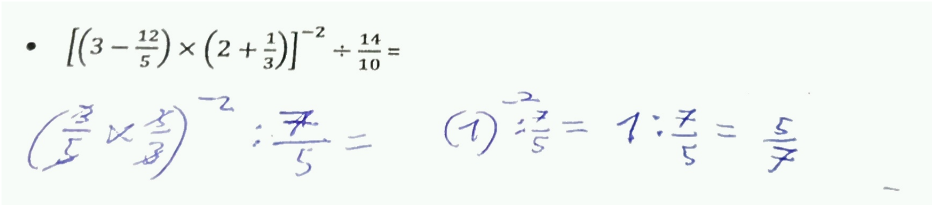



Figura 6.13: Figura 2

Nella prima figura il ragazzo sa che la potenza negativa implica il ribaltamento della base, ma non considera le precedenze tra le operazioni: ribaltare il risultato di un'operazione è differente dal ribaltare i singoli termini dell'operazione e successivamente eseguirla. Basti pensare anche soltanto a $(1+2)^{-1} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$ se, invece ribaltassimo prima di eseguire l'opeazione otterremmo $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ e $\frac{1}{3} \neq \frac{3}{2}$ .
Nella seconda figura, invece, è chiara la presenza di un errore di perseverazione del segno: siccome nella prima parentesi si deve eseguire il meno, il ragazzo lo esegue anche nella seconda, non accorgendosi che in realtà l'operatore è cambiato e si dovrebbe eseguire una addizione.

In conclusione a questo esercizio posso affermare che i rusultati ottenuti sono sicuramente molto più deludenti di quanto mi aspettassi. La scarsa percentuale di esercizi risolti correttamente mi ha lasciata un po' perplessa, in quanto questo argomento viene affrontato alla scuola secondaria di primo grado ed, in seguito, ripreso in quella di secondo grado, ed anche nel momento in cui si passa ad argomenti più difficili, le procedure ed i principi teorici di base sono gli stessi, pertanto dovrebbero risultare ben consolidati ed ormai automatizzati. Neanche per quanto riguarda i ragazzi DSA mi sarei aspettata simili risultati. In questo caso, probabilmente il problema risiede nella loro impossibilità di conservare l'effetto apprendimento, cioè tutti gli sforzi fatti per imparare le procedure ed i principi su cui si basano le espressioni numeriche fratte, vengono poi vanificati nel momento in cui si passa ad un argomento successivo. La loro incapacità a trasportare i principi teorici ed adattarli all'argomento successivo è stata determinante nella risoluzione di tale esercizio.

### 6.1.3 Esercizio 3

Metti in ordine decrescente i seguenti numeri:

$$\sqrt{49} \qquad ; \qquad 15^0 \qquad ; \qquad -\frac{18}{7} \qquad ; \qquad 7,003 \qquad ; \qquad 7^{-2}$$

Per risolvere l'esercizio non sono, in effetti, necessari molti calcoli, basta accorgersi che i numeri presentati, escluso il numero negativo si possono confrontere a due a due. Essendo $-\frac{18}{7}$ l'unico numero negativo, non importa seper il suo esatto valore, sarà comunque sicuramente il più piccolo. Dopodichè si può iniziare a risolvere la radice ($\sqrt{49} = 7$) e le potenze ($7^{-2} = \frac{1}{49}$ e $15^0 = 1$). Ora è sufficiente confrontare il 7 con il $7,003$ e l'1 con la frazione $\frac{1}{49}$:

- $1 > \frac{1}{49}$
- $7,003 > 7$

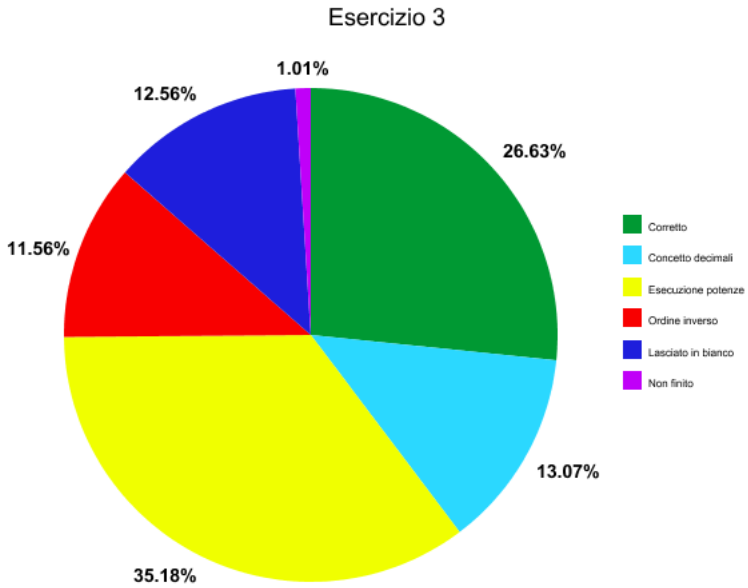
Ora non rimane che ricordarsi che l'ordine richiesto e l'ordine DECRESCENTE, quindi bisogna partire dal numero più grande di tutti per arrivare a quello più piccolo, in questo modo:

$$7,003 > 7 > 1 > \frac{1}{49} > -\frac{18}{7} \Rightarrow \text{l'ordine è}$$
$$7,003 \quad ; \quad \sqrt{49} \quad ; \quad 15^0 \quad ; \quad 7^{-2} \quad ; \quad -\frac{18}{7}$$

I risultati ottenuti dai ragazzi sono i seguenti:

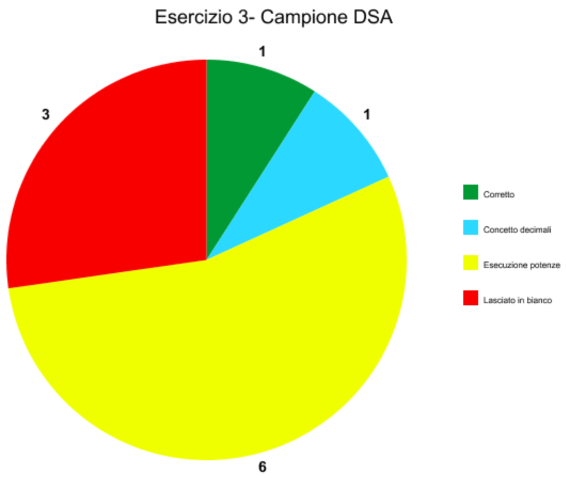
| Correzione | Numero studenti | Percentuale sul totale |
|---|---|---|
| Corretto | 53 | 26,63% |
| Errato concetto decimali | 26 | 13,07% |
| Errata risoluzione potenze | 70 | 35,18% |
| Ordine inverso | 23 | 11,56% |
| Non finito | 2 | 1,01% |
| Lasciato in bianco | 25 | 12,56% |

Ed il corrispondente grafico a torta:




I risultati ottenuti non sono per nulla confortanti, in quanto solo poco più di un quarto dei ragazzi è riuscito ad ordinare correttamente i cinque numeri proposti. È stato contato sotto la voce di errore di concetto riguardante i numeri decimali, soltanto l'errore nello stabilire se $7,003$ è o meno maggiore di 7 (al contrario di quanto mi aspettassi, ben il 13% dei raggazzi intervistati non è in grado di stabilirlo correttamente), mentre tra gli errori riguardanti la risoluzione delle potenze sono stati conteggiate tutte le potenze presenti, compresa anche la radice che si può intendere come $49^{\frac{1}{2}}$. A mio avviso, ho reputato strano che più del 10% dei ragazzi non abbia neanche tentato una risoluzione, essendo concetti che, arrivati al loro grado di scolarità, dovrebbero considerarsi ormai ben consolitati (come l'esecuzione dalla radice di un "quadrato perfetto").
In questo esercizio i ragazzi discalculici hanno avuto molteplici difficoltà, in primis poichè per loro non è semplice comprendere le numerosità ed ordinare i numeri, ed in secondo luogo, spesso, questi numeri non erano espressi in forma esplicita, ma sottoforma di potenze. Nonostante ciò quasi tutti hanno almeno provato a risolvere o ad impostare i calcoli per cercare una soluzione, quindi il numero degli esercizi lasciati in bianco non è fortemente influenzato dai ragazzi con DSA, ma quasi completamente attribuibile ai ragazzi non clinici.

I risultati ottenuti sono i seguenti:




In generale, come abbiamo notato anche nell'esercizio precedente, l'esecuzione delle potenze con esponente negativo crea molti problemi ai ragazzi, nonostante vengano affrontate fin dalla scuola secondaria di primo grado, riprese successivamente più volte e mai abbandonate. In questo esercizio anche la potenza "alla zero" ha dato origine a diverse soluzioni errate, tra cui $15^0 = 0$ oppure $15^0 = 15$. Riporto di seguito alcuni degli errori di cui vi parlavo:

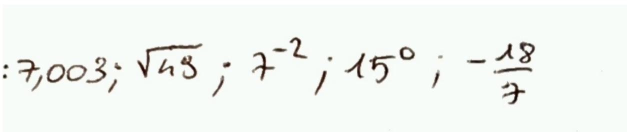


Figura 6.14: Errore potenza $15^0$

In questo caso il ragazzo, come spiegato sopra, invece di considerare $15^0 = 1$ mette in ordine come se fosse uguale a 0.

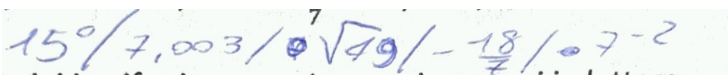


Figura 6.15: Errore potenze

Questo ragazzo, invece, sbaglia entrambe le potenze, in quanto mette $15^0$ come primo numero, quindi lo considera uguale a 15, e $7^{-2}$ come ultimo numero, pertanto a mio parere lo considera uguale a $-49$.

Per quanto riguarda l'errore spiegato prima di decisione del maggiore tra 7 e $7,003$, riporto il seguente esempio:

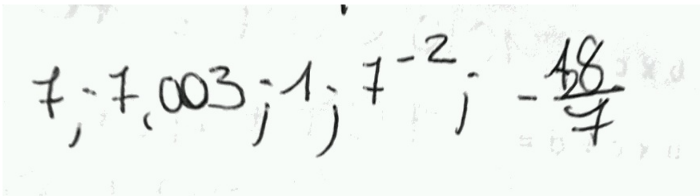


Figura 6.16: Errore concetto dei numeri decimali

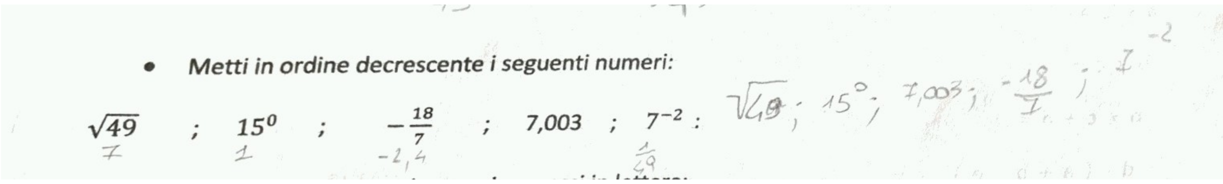



Figura 6.17: Errore potenze

Invece, la risoluzione sopra mi è sembrata particolarmente significativa, in quanto il ragazzo esegue le operazioni in maniera corretta sotto alla lista dei numeri presentata, poi però non li ordina in modo esatto, come se i calcoli eseguiti fino a quel momento non fossero serviti a nulla.
Uno degli errori più frequenti, che ho catalogato come errore di esecuzione delle potenze è il seguente:

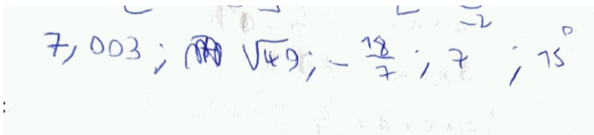
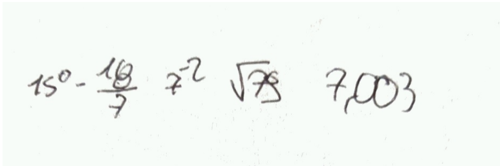
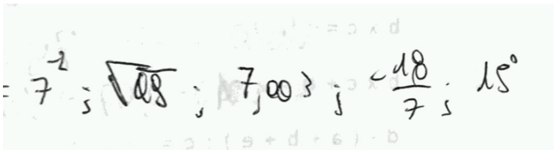


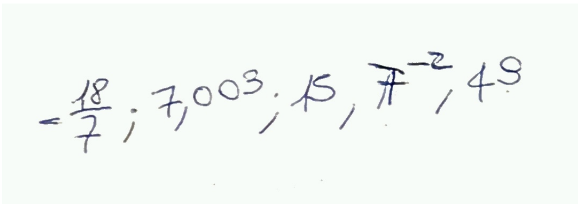
Figura 6.18: Ordine più frequente tra quelli errati

Mi risulta difficoltoso spiegare questa particolare disposizione e mi è sembrato strano che sia stata quella prescelta da molti ragazzi; probabilmente la potenza negativa ha trasformato, come riportato negli esempi sopra, la base in un numero negativo, ma per giustificare il posizionamento del $15^0$ come numero più piccolo non ho trovato spiegazioni convincenti. Forse, non sapendo di preciso quale fosse il suo risultato, ma sembrando ad occhio più piccolo di $7^{-2}$, si sono convinti a porlo come numero più piccolo di tutti.
I ragazzi discalculici non sembra che abbiano seguito un qualche criterio o risoluzione particolare e che non siano caduti nelle misconcezioni più classiche come, appunto, la

potenza negativa che da' un risultato negativo oppure la potenza 0 che restituisce 0. Sembra quasi che i numeri siano stati posti in ordine ad occhio, spesso sbagliando anche la trascrizione dei numeri stessi. Di seguito riporto tre esempi significativi a tal proposito:







In questo esercizio mi aspettavo un risultato simile per i ragazzi DSA, poichè, non avendo un preciso algoritmo da seguire, o dei calcoli che potessero aiutare a semplificare la situazione, ci si doveva basare solo sulle proprie conoscenze dei numeri e sul concetto di maggioranza o minoranza, spiegato ampiamente nella parte teorica, che implica l'utilizzo di circuiti neurali risultati deficitari nelle neuroimmagini dei ragazzi con disturbo specifico del calcolo.
In realtà anche i ragazzi non clinici hanno dimostrato di non avere una profonda conoscenza dei principi teorici necessari per lo svolgimento dell'esercizio, e, soprattutto, cosa per me sconcertante, è il non aver chiaro il fatto che i decimali presenti dopo la virgola aumentino il valore dell'unità. Forse è necessario soffermarsi più a lungo sulla distribuzione sulla linea dei numeri, in modo da avere più chiaro l'ordinamento dei numeri reali.

### 6.1.4 Esercizio 4

Scrivi in cifre i seguenti numeri espressi in lettere:

a. 4 centesimi + 7 decine + 1 centinaio + 9 decimi + 0 unità =

b. Undicimilacinquecentotre :

c. Tremilionisettecentomilatredici :

Per risolvere questo esercizio è solo necesserio conoscere il valore attribuito ad ogni cifra, che dipende dalla posizione assunta all'interno del numero. Per scrivere correttamente i numeri riportati sopra, bisogna avere ben presente la seguente tabella:

| MILIARDI | | | MILIONI | | | MIGLIAIA | | | UNITA' | | | | DECIMALI | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| h | da | u | h | da | u | h | da | u | h | da | u | , | d | c | m |

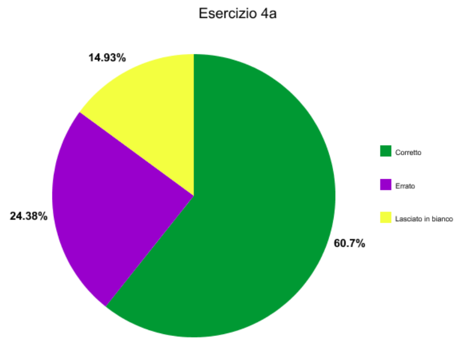
Un numero, se viene spostato da un riquadro ad un altro, acquista un valore differente: se lo si sposta di una casella più a sinistra deve essere moltiplicato per 10, se lo si sposta verso destra deve essere diviso per 10.
I tre numeri scritti nella consegna, pertanto sono i seguenti:

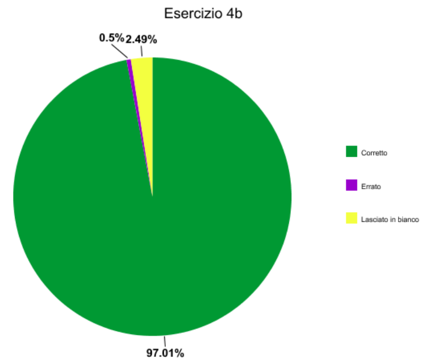
a. $170,94$

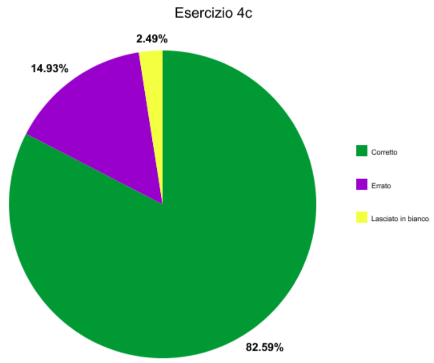
b. $11'503$

c. $3'700'013$

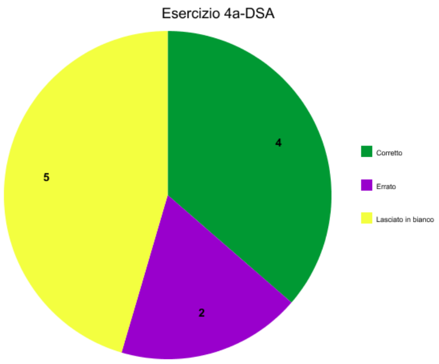
Affinchè il paragone possa risultare più agevole, i risultati di questo esercizio li riporto nei seguenti tre grafici a torta affiancati:

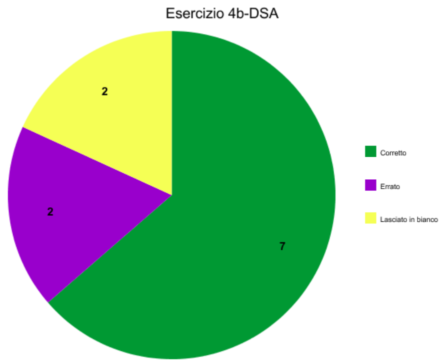


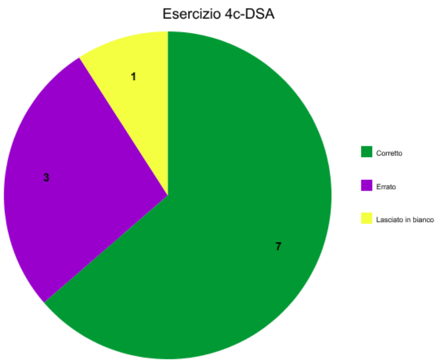




Per quanto rigurda i risultati del campione generale mi posso ritenere piuttosto soddisfatta, in quanto in tutte e tre le traduzioni dei numeri si è arrivati almeno al 60% di correttezza, fino ad arrivare ad oltre il 97% dell'esercizio 4b. La maggior parte dei problemi si è riscontrata nela parte a dell'esercizio, probabilmente perchè i ragazzi non sono abituati a chiamare ogni cifra di un numero con il proprio nome, ma si utilizza il "nome" del numero completo che risulta assemblando le varie cifre. Si è ottenuta una percentuale abbastanza consistente di errore anche nella parte c dell'esercizio, in cui è risultato difficile per i ragazzi inserire il corretto numero di zeri.
Anche il campione dei ragazzi con DSA ha conseguito dei buoni risultati: il numero di ragazzi che sono riusciti a tradurre correttamente i numeri ha superato la metà sia nella parte b che c:




Si può notare che quasi tutti i ragazzi hanno almeno provato a scrivere i numeri, a parte nell'esercizio 4a, in cui il numero era presentato sotto una tipologia completamente diversa dal solito e da quello che si può ritrovare nella vita reale di tutti i giorni.
Di seguito riporto alcuni degli errori più comuni o più interessanti ritrovati tra i risultati raccolti:

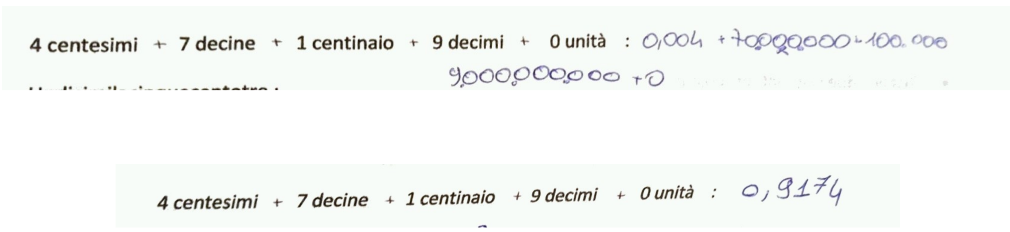



Figura 6.19: Errori più frequenti Esercizio 4a

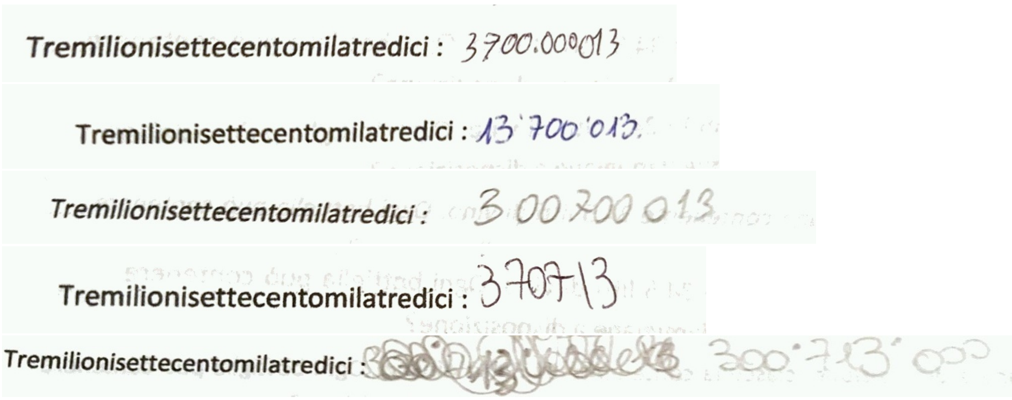
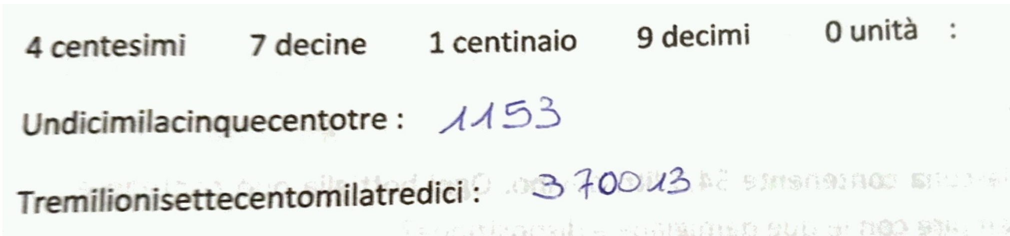
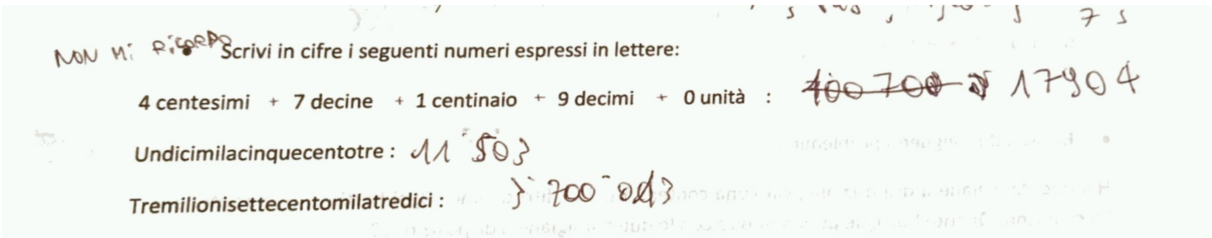



Figura 6.20: Errori più frequenti Esercizio 4c

In questo caso gli errori dei ragazzi con discalculia non si differenziano così tanto dagli errori commessi dai ragazzi non clinici, infatti:

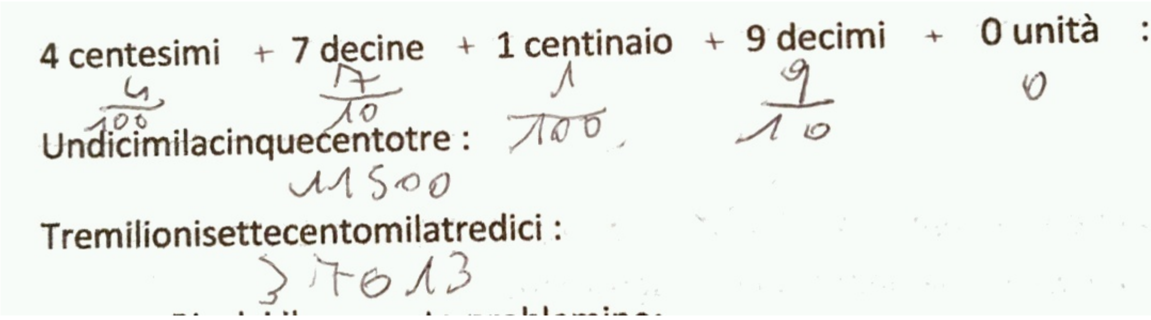



In questo primo caso risulta semplicemente evidente l'incapacità del ragazzo ad inserire gli zeri all'interno di un numero per lasciare libere le caselle della tabella sopra non occupare da altri numeri. Come notato, però anche i ragazzi non clinici hanno spesso delle difficoltà con il sistema posizionale decimale.




Questo ragazzo, addirittura, per giustificare la non correttezza della parte a dell'esercizio scrive che non ricorda come si fa e nella scrittura omette la virgola ed inverte le unità ed i decimi; dopodichè, tra le varie incertezze che contraddistinguono i ragazzi discalculici, riesce a scrivere correttamente gli altri due numeri.
Infine ho ritenuto interessante riportare l'immagine di un esercizio svolto da un ragazzo

discalculico che non è assolutamente riuscito a sanare le proprie difficoltà su questo argomento:


4 centesimi + 7 decine + 1 centinaio + 9 decimi + 0 unità :

$\frac{4}{100}$ $\frac{7}{10}$ $\frac{1}{100}$ $\frac{9}{10}$ 0

Undicimilacinquecentotre : 11500

Tremilionisettecentomilatredici : 37013

L'unica parte relativamente corretta è la b, in cui scrive il numero giusto a meno delle unità; nella parte a scrive sia le centinaia che le decine come frazioni, rispettivamente con denominatore 100 e 10, sbagliando pertanto il valore delle singole cifre; infine, nella parte c non riesce ad inserire il corretto numero di zeri (l'ordine delle cifre risulta esatto, ma la mancanza degli zeri modifica il valore del numero complessivo).

Nel complesso mi posso ritenere soddisfatta della prestazione dei ragazzi al riguardo della traduzione dei numeri da lettere in cifre, viste le alte percentuali di correttezza. Probabilmente, questo argomento, avendo anche un riscontro tangibile nella vita di tutti i giorni, viene reputato più utile e, quindi, risulta più semplice eseguirlo correttamente. Basti pensare a quante volte, accendendo il televisore, ci si trovi di fronte a simili cifre, che pertanto vengono rievocate più e più volte nella memoria, permettendone una migliore elaborazione.

### 6.1.5 Esercizio 5

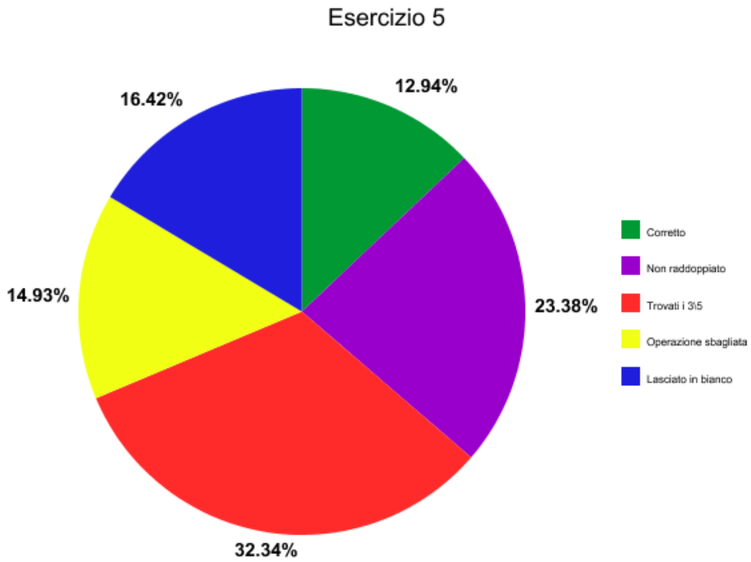
Risolvi il seguente problema:
Un negozio di pattini in un giorno ha venduto 20 paia di pattini. Il giorno successivo ne vende i tre quinti in meno. Quanti singoli pattini sono stati venduti il secondo giorno?
Propongo due risoluzioni equivalenti che sono state adottate entrambe dai ragazzi:

- $20 \times 2 = 40$ singoli pattini
  $40 \times \frac{3}{5} = 24$ pattini venduti in meno
  $40 - 24 = 16$ pattini venduti il secondo giorno

- $20 \times \frac{3}{5} = 12$ paia di pattini vedute in meno
  $20 - 12 = 8$ paia di pattini vendute il secondo giorno
  $8 \times 2 = 16$ singoli pattini venduti il secondo giorno

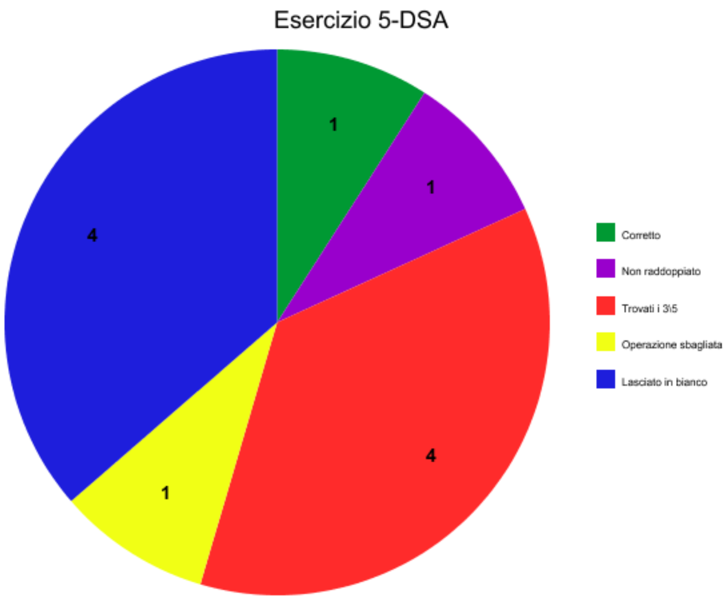
I risultati sono stati molto più deludenti di quanto potessi aspettarmi, sia per via della disattenzione e superficialità con cui viene letto il testo, sia per via di gravi errori di concetto, come sottrarre $\frac{3}{5}$ a 20. Vediamoli in dettaglio:

| Correzione | Numero studenti | Percentuale sul totale |
|---|---|---|
| Corretto | 26 | 12,94% |
| Operazione sbagiata | 30 | 14,93% |
| Trovare le paia | 47 | 23,38% |
| Trovati i $\frac{3}{5}$ | 65 | 32,34% |
| Lasciato in bianco | 33 | 16,42% |

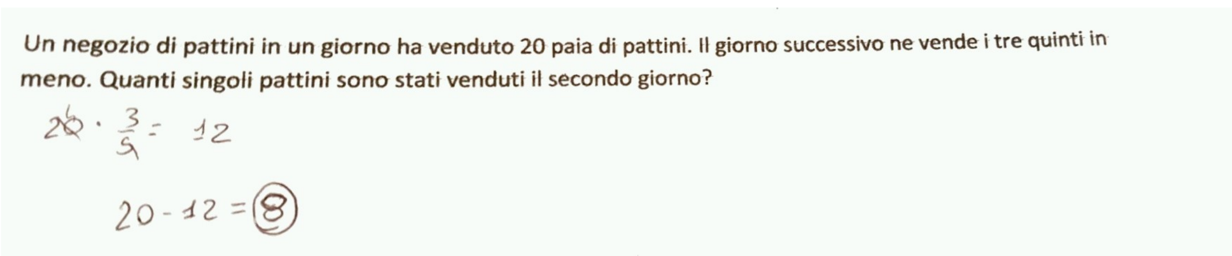



È allarmante, a mio avviso, che soltanto il 13% dei ragazzi sia stato in grado di risolvere tale problema in modo completamente corretto. In ogni caso, sommandola con la percentuale dei ragazzi che comunque hanno eseguito correttanete il ragionamento, ma per disattenzione nella lettura del testo non hanno trovato i pattini singoli ma solo le paia, non si raggiunge nemmeno il 30%. Più del 60% ha completamente sbagliato il ragionamento, o sbagliando l'operazione da svolgere (il 15% dei ragazzi ha sottratto $\frac{3}{5}$ a 20), oppure limitandosi a trovare i $\frac{3}{5}$ di 20 (o di 40), ma senza poi sottrarli al totale.

I ragazzi con DSA in questo esercizio non hanno fatto altro che confermare la loro indecisione sulle operazioni e quasi la metà di loro non ha neanche iniziato l'esercizio:



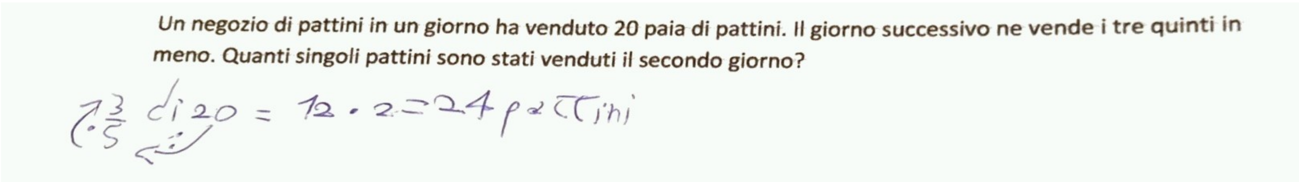

Ho cercato di catalogare gli errori commessi anche dai ragazzi discalculici nelle stesse categorie dei ragazzi non clinici, in modo da poter confrontare meglio i due campioni. Molti dei ragazzi riescono a trovare i tre quinti, ma soltanto uno di loro riesce a risolvere correttamente l'esercizio.
Per riuscire a capire meglio le classi in cui sono, da me, stati catalogati gli errori, vi riporto i seguenti esempi:


Un negozio di pattini in un giorno ha venduto 20 paia di pattini. Il giorno successivo ne vende i tre quinti in meno. Quanti singoli pattini sono stati venduti il secondo giorno?

$\cancel{20}^{4} \cdot \frac{3}{\cancel{5}} = 12$

$20 - 12 = 8$

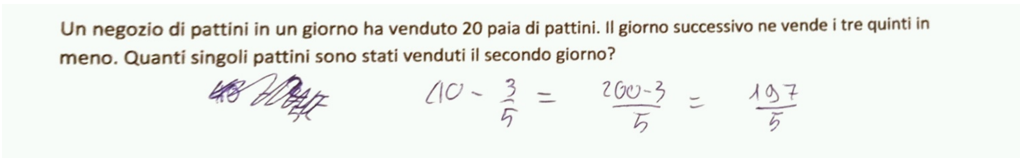
Figura 6.21: Trovate le paia di pattini, non i singoli pattini.



Un negozio di pattini in un giorno ha venduto 20 paia di pattini. Il giorno successivo ne vende i tre quinti in meno. Quanti singoli pattini sono stati venduti il secondo giorno?

$\frac{3}{5}$ di 20 = 12 · 2 = 24 pattini

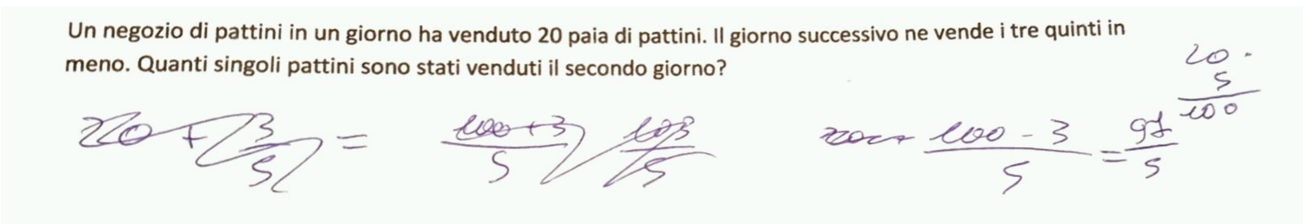
Figura 6.22: Trovati i $\frac{3}{5}$.



Un negozio di pattini in un giorno ha venduto 20 paia di pattini. Il giorno successivo ne vende i tre quinti in meno. Quanti singoli pattini sono stati venduti il secondo giorno?

$40 - \frac{3}{5} = \frac{200-3}{5} = \frac{197}{5}$

Figura 6.23: Operazione sbagliata.

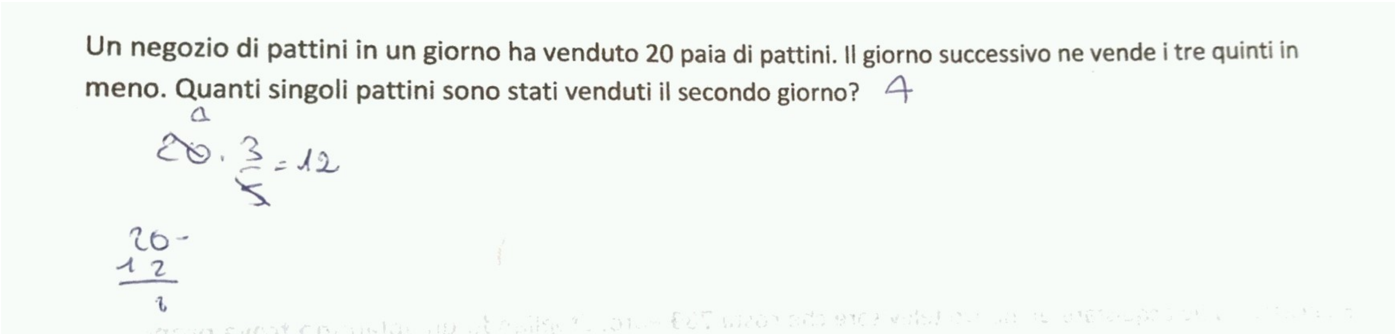


Un negozio di pattini in un giorno ha venduto 20 paia di pattini. Il giorno successivo ne vende i tre quinti in meno. Quanti singoli pattini sono stati venduti il secondo giorno?

$\frac{100-3}{5} = \frac{97}{5}$

Figura 6.24: Ragazzino discalculico-Indecisione tra le operazioni.

Infine, riporto questo singolare errore di un ragazzo non clinico, che però non deve avere troppo chiaro il concetto di paia:


Un negozio di pattini in un giorno ha venduto 20 paia di pattini. Il giorno successivo ne vende i tre quinti in meno. Quanti singoli pattini sono stati venduti il secondo giorno? 4

$20 \cdot \frac{3}{5} = 12$

$20 - 12$

Il ragazzo esegue tutti i conti correttamente, ma invece di moltiplicare il risultato per 2, dato che in ogni paia sono contenuti due pattini, lo divide, ottenendo come risultato 4. Probabilmente il ragazzo o ha interpretato male il testo dell'esercizio, scambiando i termini del problema (le paia sono i pattini ed i singoli pattini le paia), ipotesi per me poco plausibile, oppure non sa che in ogni paia sono contenuti due oggetti, quindi avendo il numero delle paia si deve moltiplicare per 2 per ottenere il numero dei singoli oggetti. Altra ipotesi, forse quella che preferisco, è che il problema sia di concetto sui principi teorici della divisione e della moltiplicazione; probabilmente, non avendoli ben chiari, non sa scegliere adeguatamente l'operazione necessaria.

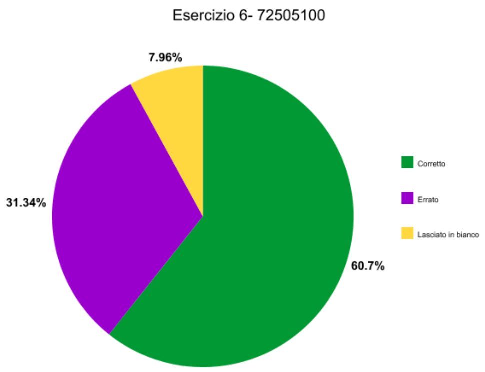
### 6.1.6 Esercizio 6

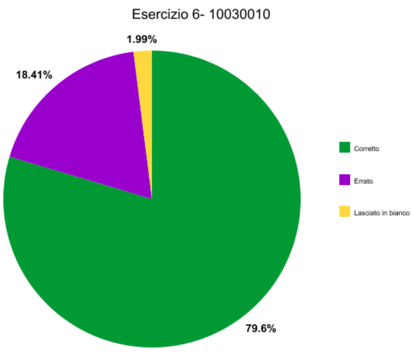
L'esercizio 6 riguarda soltanto la trascrizione di due numeri presentati in modalità verbale al termine di entrambe le facciate del test o, comunque, al termine del tempo a disposizione. I numeri sono stati detti una sola volta, senza ripeterli per nessun motivo. Prima di dettarli è stata richiamata l'attenzione dei ragazzi, spiegato loro che i numeri non sarebbero stati ripetuti ed atteso il silenzio. I numeri sono stati dettati scandendo bene le "parole", in quanto numeri fonologicamente plurisillabici, e ad una velocità contenuta. Prima di dettare il secondo numero ho atteso che tutti i ragazzi avessero terminato di scrivere il primo, richiamato nuovamente l'attenzione ed aspettato il silenzio. I due numeri dettati sono:

- Settantaduemilionicinquecentocinquemilacento : $72'505'100$
- Diecimilioni trentamiladieci : $10'030'010$

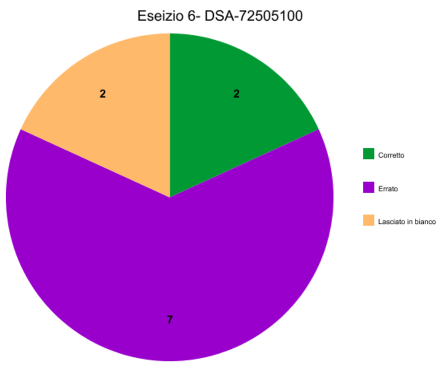
I principi teorici su cui si basa l'esercizio sono gli stessi dell'esercizio 4: per scrivere correttamente i numeri bisogna avere ben presente che il sistema decimale è un sistema

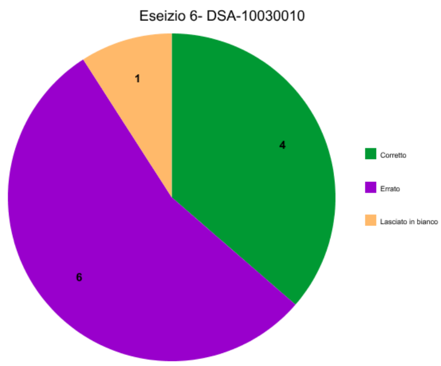
posizionale che segue la tabella presentata nell'esercizio 4. Ogni numero in ogni casella della tabella ha un determinato valore, che decuplica se spostato verso sinistra e viene diviso per 10 se spostato verso destra.
I risultati ottenuti dai ragazzi, anche in questo caso preferisco riportarli soltanto in due diagrammi a torta affiancati in modo da poterli comparare al meglio:




In entrambi i casi i ragazzi hanno superato il 50% di correttezza: per il primo numero si sono riscontrati però più errori rispetto al secondo, che è risultato scritto esattamente nell'80% dei casi. Il primo numero, probabilmente, contenendo più cifre differenti si è rivelato più difficile da elaborare rispetto al secondo, palindromo, quindi simmetrico e contenente dei numeri ripetuti.
La presentazione in modatlità verbale, in ogni caso, è risultata più difficoltosa rispetto alla modalità scritta, in cui i ragazzi hanno ottenuto risultati molto migliori.
Per i ragazzi con DSA la situazione peggiora notevolmente:




Purtroppo le difficoltà degli studenti discalculici, quando i numeri vengono presentati in modalità verbale, si amplificano notevolmente e soltanto 2 su 11 per il primo numero e 3 su 11 per il secondo riescono a tradurre il numero correttamente. In generale, comunque,

provano a scriverlo, desistendo soltanto in 2 e in 1, rispettivamente per il primo e per il secondo numero. Anche in questo caso il primo numero presentato risulta più difficile da scrivere rispetto al secondo: soltanto due ragazzi riescono a tradurlo correttamente, mentre l'altro ben in 4.
Sia per i ragazzi discalculici che non, il reale problema è stato l'inserimento degli zeri nella giusta posizione ed in numero corretto. Riporto di seguito alcuni degli errori più significativi di entrambe le categorie:

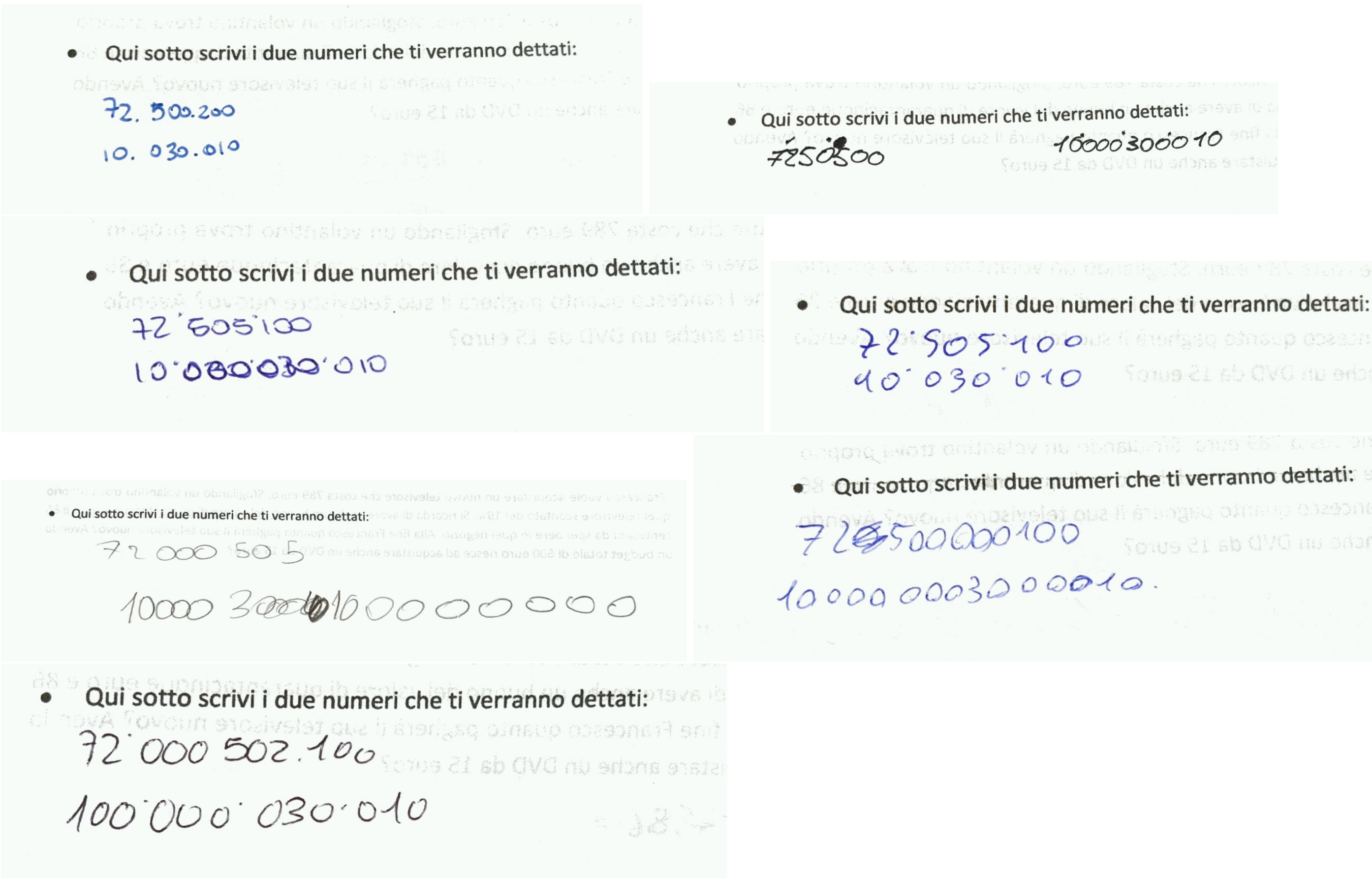



Figura 6.25: Esempi di errori nei ragazzi non clinici.

Anche in questo esercizio, come nei precedenti, i ragazzi discalculici si contraddistinguono per la loro insicurezza nella scrittura del numero, che spesso viene cancellato e riscritto più volte. In generale vengono individuate le cifre da trascrivere sul foglio, ma non sono in grado di posizionarle in modo corretto e con il giusto numero di zeri nella corretta posizione:

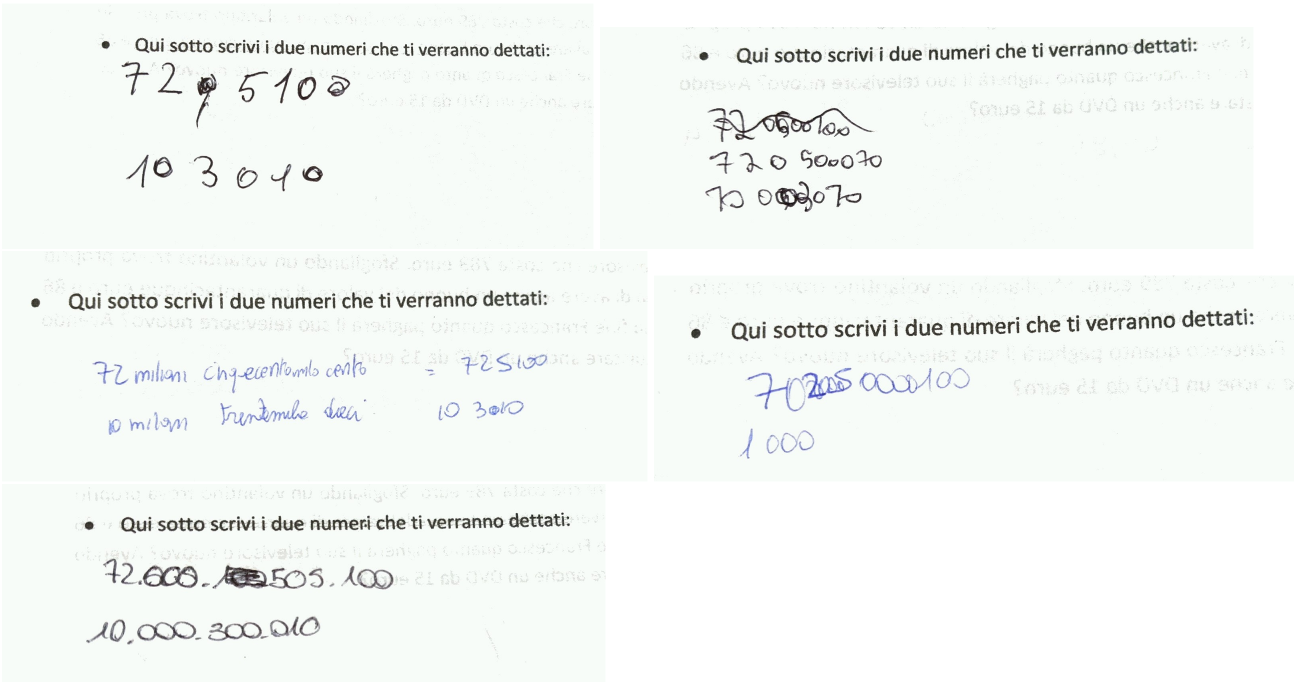



Figura 6.26: Esempi di errori nei ragazzi discalculici.

Anche in questo caso, come nell'esercizio 4, i risultati sono stati piuttosto soddisfacenti, in quanto non è raro udire numeri simili nella vita reale e forse i ragazzi sono più avvezzi a maneggiarli. I risultati positivi sono, comunque, stati leggermente inferiori probabilmente in quanto nella modalità scritta il ragazzo aveva molto più tempo per elaborare il risultato corretto e ragionarci sopra, mentre in questo caso ogni numero è stato ripetuto una volta sola e la confusione e la scrittura possono aver disturbato e distorto l'elaborazione nella memoria a breve termine dello stimolo.

## 6.2 PARTE B

Nella seconda parte del test, come detto nell'introduzione, i ragazzi potevano utilizzare la calcolatrice, in modo da cercare di stabilire se le prestazioni, grazie all'ausilio di questo strumento, possano realmente migliorare, oppure il problema non siano i conti a mente, bensì la strategia utilizzata di problem solving. Gli esercizi riprendono a grandi linee gli stessi principi teorici degli esercizi proposti nella parte A, in modo che il confronto potesse essere fatto con criterio sugli stessi argomenti, non su argomenti differenti, il chè avrebbe potuto portare a conclusioni errate o risultati distorti dalla diversa preparazione dei ragazzi su alcuni argomenti nei confronti di altri.

### 6.2.1 Esercizio 1

Metti in ordine crescente le seguenti frazioni dopo averle trasformate in frazioni equivalenti con lo stesso denominatore:

$$\tfrac{3}{8} \quad ; \quad -\tfrac{7}{9} \quad ; \quad \tfrac{41}{36} \quad ; \quad \left(\tfrac{9}{14}\right)^{-1} \quad ; \quad -\tfrac{17}{12}$$

Dopo aver eseguito la potenza negativa, $\left(\frac{9}{14}\right)^{-1}$ diventa $\frac{14}{9}$, pertanto l'm.c.m. per eseguire il denominatore comune deve essere cercato tra i multipli comuni di 8, 9, 36 e 12. Per trovarlo, è necessario prima scomporre in fattori primi questi numeri:

- $8 = 2^3$
- $9 = 3^2$
- $36 = 2^2 \times 3^2$
- $12 = 2^2 \times 3$

Per eseguire l'm.c.m. si devono prendere tutti i fattori presenti nelle scomposizioni, comuni e non, con l'esponente maggiore, pertanto l'$m.c.m.\{8, 9, 36, 12\} = 2^3 \times 3^2 = 8 \times 9 = 72$.
Le frazioni diventano:

- $\dfrac{3}{8} = \dfrac{3 \times 9}{8 \times 9} = \dfrac{27}{72}$
- $-\dfrac{7}{9} = -\dfrac{7 \times 8}{9 \times 8} = -\dfrac{56}{72}$
- $\dfrac{41}{36} = \dfrac{41 \times 2}{36 \times 2} = \dfrac{82}{72}$

- $\frac{14}{9} = \frac{14 \times 8}{9 \times 8} = \frac{112}{72}$
- $-\frac{17}{12} = -\frac{17 \times 3}{12 \times 3} = -\frac{102}{72}$

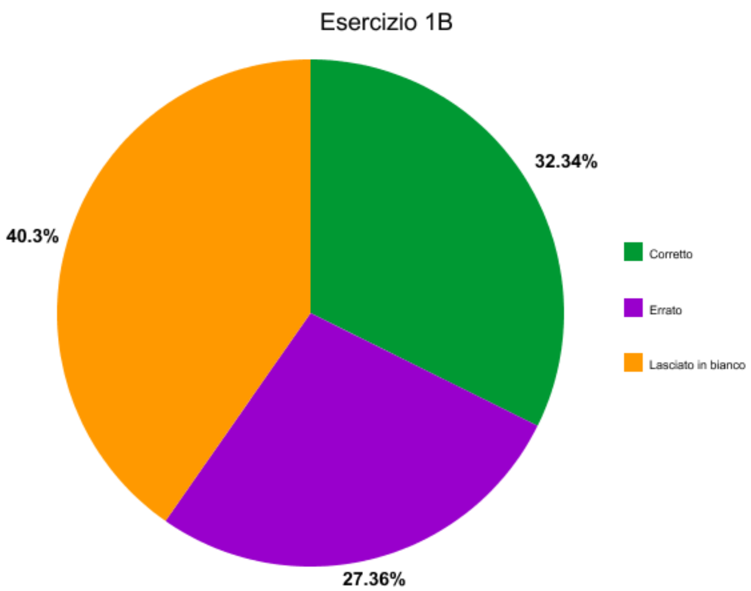
Quindi la corretta disposizione delle frazioni è:

$$-\frac{17}{12} \quad ; \quad -\frac{7}{9} \quad ; \quad \frac{3}{8} \quad ; \quad \frac{41}{36} \quad ; \quad \frac{14}{9}$$

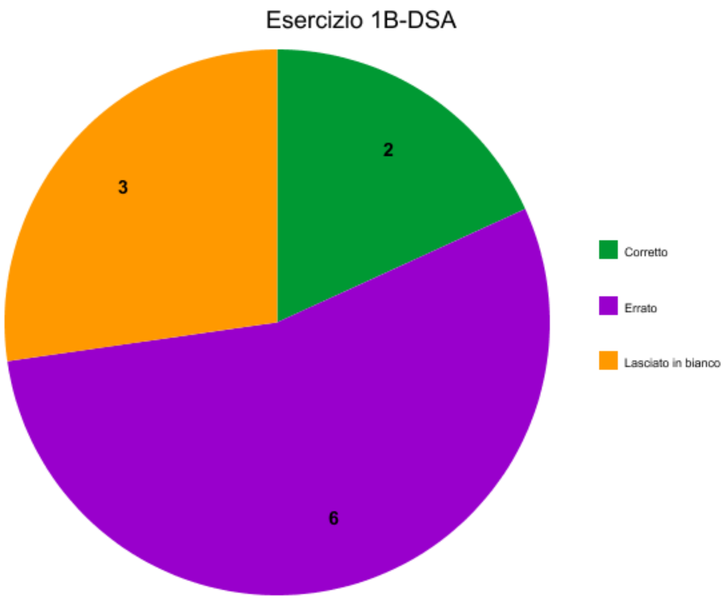
Nonostante avessero a disposizione la calcolatrice gli errori sono stati molteplici, tra cui il denominatore comune, il concetto di numero negativo e di ordine dei numeri negativi, ma vediamo i risultati nello specifico:

| Correzione | Numero studenti | percentuale sul totale |
|---|---|---|
| Corretto | 65 | 32,34% |
| Errato | 55 | 27,36% |
| Lasciato in bianco | 81 | 40,3% |

Il corrispondente grafico a torta è:




I ragazzi DSA, purtroppo, hanno desistito per la maggior parte e hanno lasciato in 6 l'esercizio in bianco; soltanto 2 ragazzi sono riusciti ad ordinare correttamente le frazioni proposte.




I risultati ottenuti si possono andare a confrontare con quelli dell'esercizio 3A, che si basa sugli stessi principi teorici. La prestazione, in effetti, risulta leggermente migliore di quanto ottenuto nella parte A senza la calcolatrice, ma non così sensibilmente da far pensare che l'utilizzo della calcolatrice possa risolvere i problemi, la percentuale, infatti aumenta dal 26,63% al 32,34%, pertanto le difficoltà non erano dovute solo al calcolo a mente. È interessante osservare che nel 3A, al contrario, molti meno studenti hanno lasciato in bianco l'esercizio (12,5%), mentre nel 2b la percentuale si alza notevolmente, raggiungendo il 40%, il chè mi fa pensare che il problema principale incontrato dai ragazzi sia stata l'esecuzione di frazioni equivalenti con un denominatore comune, esercizio che, sotto altre forme, svolgono quasi ogni giorno. Probabilmente, l'inserimento da parte mia della terminologia *frazione equivalente* (usata alla scuola secondaria di primo grado e ripresa marginalmente in quella di secondo) ha spiazzato gli studenti tanto da indurli a desistere senza neanche provare.

Vediamo alcuni esempi di errori commessi dai ragazzi:

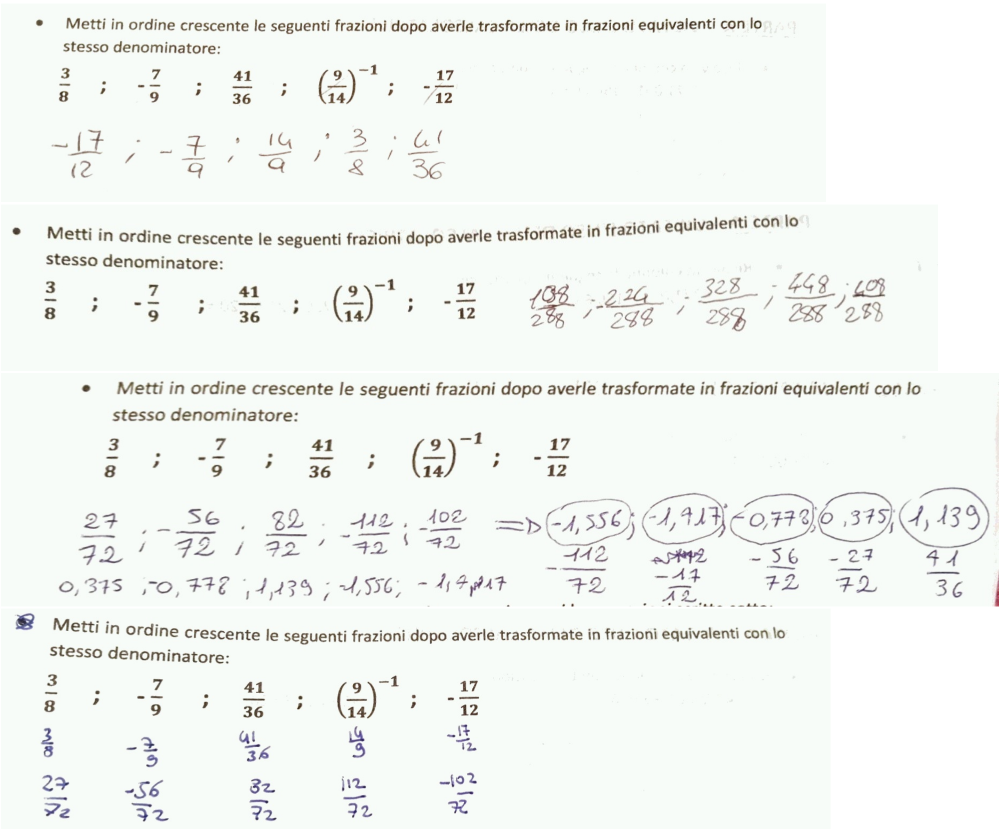



Figura 6.27: Esempi di errori nei ragazzi non clinici.

In generale, gli errori più frequenti del campione non clinico sono stati l'esecuzione errata della potenza negativa, in cui persiste la misconcezione che generi un numero negativo, l'ordinamento dei numeri negativi che, spesso, vengono posizionati semplicemente considerando il loro valore assoluto ed, infine, l'esecuzione del denominatore comune, senza stabilire l'ordine.

Tra i vari svolgimenti dei ragazzi discalculici, ho deciso di riportare i seguenti:

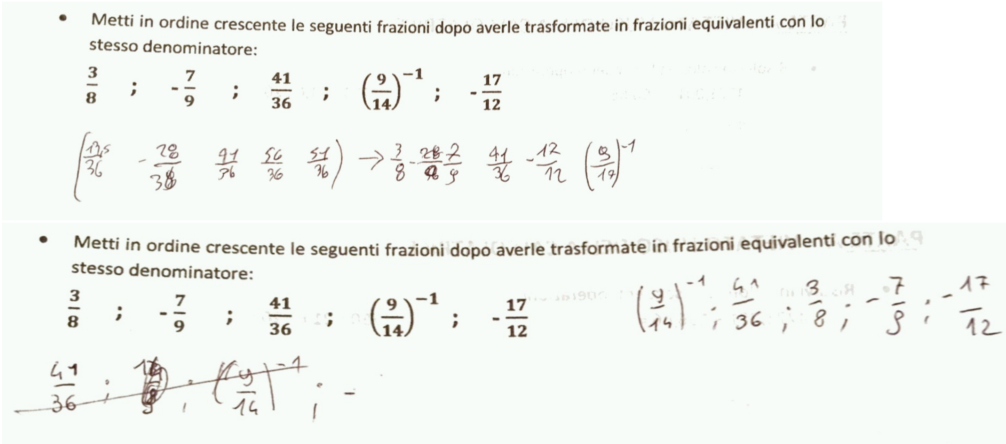



Figura 6.28: Esempi di errori nei ragazzi discalculici.

Nella prima immagine il ragazzo, oltre a sbagliare il denominatore comune, mette in ordine i numeri senza un criterio, mescolando numeri positivi e negativi; nella seconda immagine, invece, si può notare la sempre presente indecisione che li porta a scrivere, poi cancellare e successivamente, riscrivere. Nel caso specifico il ragazzo sbaglia anche l'ordine, posizionandoli al contrario.

In generale mi aspettavo un miglioramento più netto con l'utilizzo della calcolatrice; per quanto riguarda questa tipologia di esercizi tale strumento non è determinante quanto la scarsa conoscenza dei principi teorici o gli errori generati da misconcezioni che risultano ben consolidate nei ragazzi e difficili da modificare. Putroppo se le basi su cui si fondano gli esercizi non sono ben chiare e solide, la calcolatrice non può risultare il mezzo risolutivo di tutti i problemi.

### 6.2.2 Esercizio 2

Scrivi in cifre i seguenti numeri scritti in lettere e poi esegui le operazioni scritte sotto:

a. Undicimilasettecentodue

b. Milledieci

c. Sette decimi

d. Quattromilioniventisettemilanove

e. Tredicimilaottocentootto

- $a + e =$
- $b \times c =$
- $b \times c + d =$
- $d - (a + b + e) : c =$

La corretta risoluzione dell'esercizio è la seguente:

a. Undicimilasettecentodue : 11702

b. Milledieci : 1010

c. Sette decimi : 0,7

d. Quattromilioniventisettemilanove : 4027009

e. Tredicimilaottocentootto : 13808

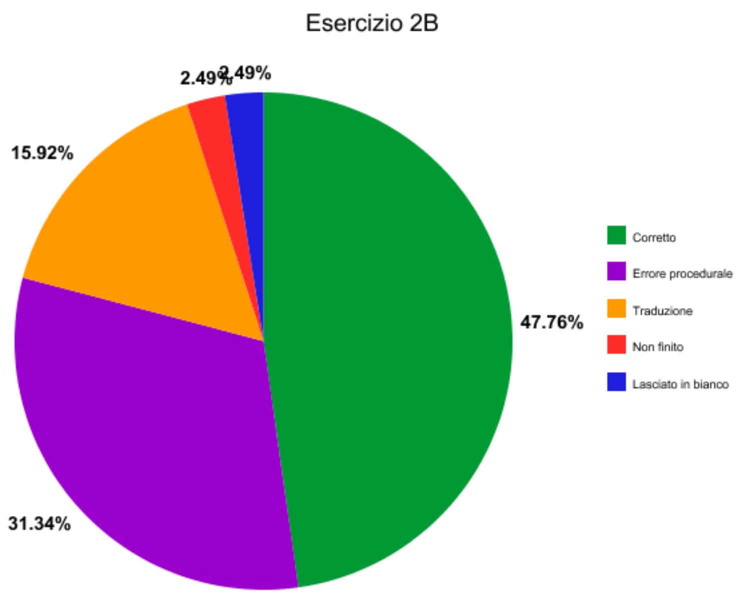
- $a + e = 25510$
- $b \times c = 707$
- $b \times c + d = 4027716$
- $d - (a + b + e) : c = 3989123,286$

Non occorrono particolari principi teorici aggiuntivi per la risoluzione di questo esercizio, se non la conoscenza delle precedenze tra le operazioni: la moltiplicazione e la divisione, se non sono presenti parentesi, vanno eseguite prima di addizione e sottrazione, altrimenti si segue l'ordine dettato dalle prentesi.
La maggior parte dei ragazzi ha tradotto correttamente i numeri in cifre, ma nel quarto

punto i ragazzi hanno avuto grosse difficoltà nel rispettare le precedenze, nonostante potessero inserire tutte le espressioncine direttamente nella calcolatrice, che avrebbe restituito loro il risultato esatto.
Vediamo comunque i risultati ottenuti dal campione catalogati nella seguente tabella:

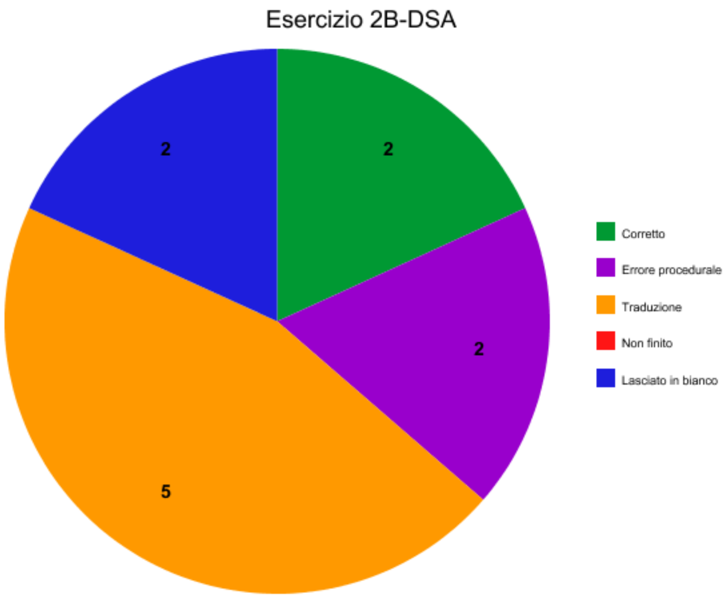
| Correzione | Numero studenti | percentuale sul totale |
|---|---|---|
| Corretto | 96 | 47,76% |
| Errore di procedura | 63 | 31,34% |
| Errore di traduzione | 32 | 15,92% |
| Non finito | 5 | 2,49% |
| Lasciato in bianco | 5 | 2,49% |

Il corrispondente diagramma a torta è il seguente:

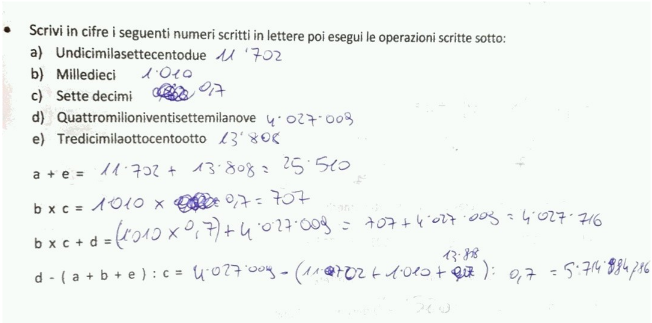



Quasi il 50% dei ragazzi esegue tutto l'esercizio in maniera corretta e soltanto il 16% sbaglia i risultati per un errore di traduzione dei numeri da lettere in cifre. La maggior parte degli errori sono stati catalogati come procedurali, cioè errori nello svolgimwnto vero e proprio dell'espressione. A parte qualche errore di calcolo o di scrittura del numero nella calcolatrice, l'errore più frequente è stato quello di non rispettare le precedenze delle operazioni e delle parentesi.
Per il campione DSA la traduzione dei numeri in cifre ha giocato un ruolo fondamentale nella risoluzione dell'esercizio: degli 11 ragazzi appartenenti a questa categoria addirittura 5 sbagliano la scrittura dei numeri, inficiando la correttezza dell'esercizio. Soltanto

due di loro riescono a portare a termine tutte le richieste in modo esatto ed altrettanti lasciano in bianco l'esercizio. Vediamo meglio la situazione riassunta nel seguente diagramma:




In questo particolare esercizio, la calcolatrice è piuttosto utile ai ragazzi per l'esecuzione corretta dei calcoli che, altrimenti, sarebbero risultati parecchio più complicati da eseguire in colonna ed avrebbero richiesto molto più tempo. L'influenza della errata trascrizione dei numeri ha un ruolo di punta nel campione dei ragazzi con DSA, ma non troppo rilevante nel campione generale, aggirandosi attorno al 15%. È risultata molto notevole, al contrario, la percentuale degli errori procedurali, che pone un importante interrogativo sulla reale automatizzazione delle precedenze. A tal proposito, l'errore più frequente è stato il seguente:



- Scrivi in cifre i seguenti numeri scritti in lettere poi esegui le operazioni scritte sotto:

a) Undicimilasettecentodue 11'702
b) Milledieci 1·010
c) Sette decimi 0,7
d) Quattromilioniventisettemilanove 4·027·009
e) Tredicimilaottocentootto 13'808

a + e = 11·702 + 13·808 = 25·510

b x c = 1·010 x 0,7 = 707

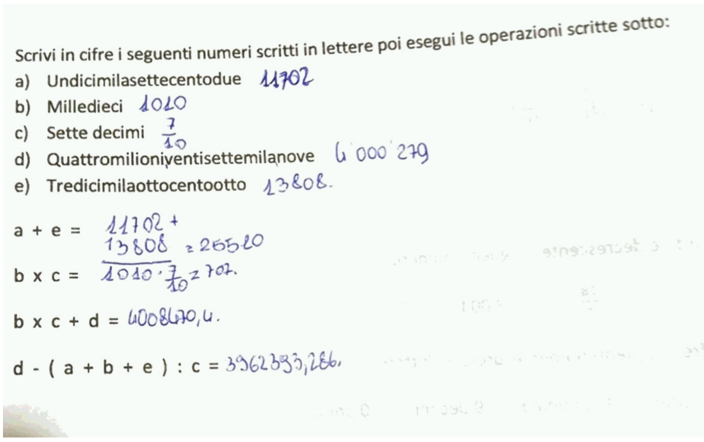
b x c + d = (1010 x 0,7) + 4·027·009 = 707 + 4·027·009 = 4·027·716

d - ( a + b + e ) : c = 4·027·009 - (11·702 + 1·010 + 13·808): 0,7 = 5·714·884,716

In questo caso tutti i punti sono corretti, a parte l'ultimo. L'errore commesso è il seguente:

$$[d-(a+b+e)]:c$$

cioè, invece di eseguire la somma $a+b+e$, di dividerla per c ed il risultato sottrarlo a d, lasciano la divisione come ultima operazione da eseguire.
Altri errori sono stati:



Scrivi in cifre i seguenti numeri scritti in lettere poi esegui le operazioni scritte sotto:

a) Undicimilasettecentodue 11702
b) Milledieci 1010
c) Sette decimi $\frac{7}{10}$
d) Quattromilioniventisettemilanove 4 000 279
e) Tredicimilaottocentootto 13808.

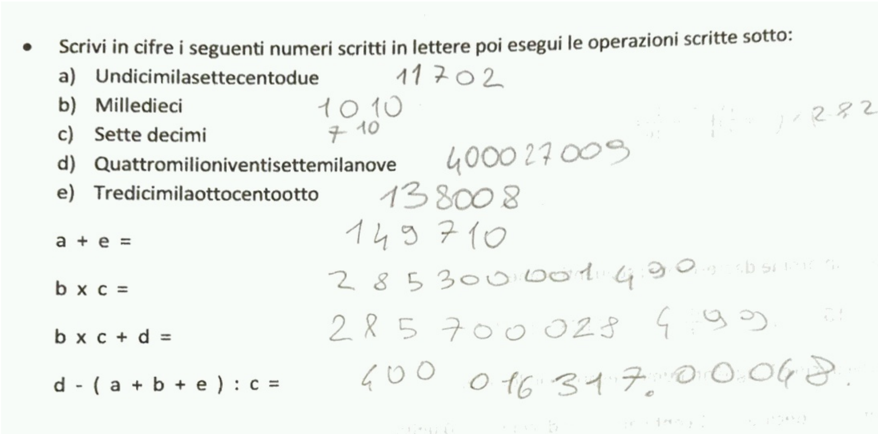
a + e = 11702 + 13808 = 25510

b x c = 1010 · $\frac{7}{10}$ = 707.

b x c + d = 4008670,4.

d - ( a + b + e ) : c = 3962393,286.

Figura 6.29: Errore di traduzione dei numeri1.



- Scrivi in cifre i seguenti numeri scritti in lettere poi esegui le operazioni scritte sotto:
  a) Undicimilasettecentodue 11702
  b) Milledieci 1010
  c) Sette decimi 7 10
  d) Quattromilioniventisettemilanove 400027009
  e) Tredicimilaottocentootto 138008

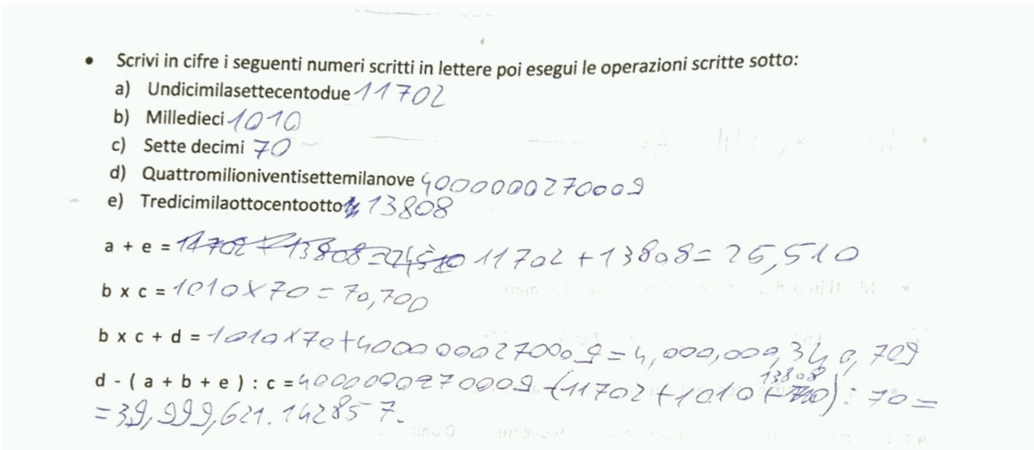
  a + e = 149710

  b x c = 285300001490

  b x c + d = 285700028490

  d - ( a + b + e ) : c = 400 016317.00048.

Figura 6.30: Errore di traduzione dei numeri2.



- Scrivi in cifre i seguenti numeri scritti in lettere poi esegui le operazioni scritte sotto:
  a) Undicimilasettecentodue 11702
  b) Milledieci 1010
  c) Sette decimi 70
  d) Quattromilioniventisettemilanove 4000000270009
  e) Tredicimilaottocentootto 13808

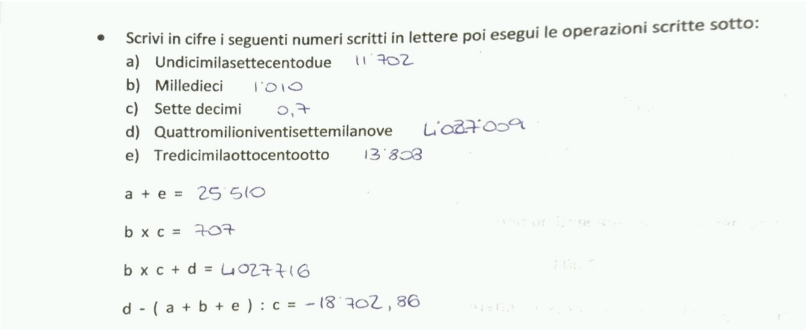
  a + e = ~~11702+13808=24510~~ 11702+13808=25,510

  b x c = 1010x70=70,700

  b x c + d = 1010x70+4000000027000 9=4,000,000,340,709

  d - ( a + b + e ) : c = 4000000270009-(11702+1010+13808):70=
  =39,999,621.142857.

Figura 6.31: Errore di traduzione dei numeri3.



- Scrivi in cifre i seguenti numeri scritti in lettere poi esegui le operazioni scritte sotto:
  a) Undicimilasettecentodue 11'702
  b) Milledieci 1'010
  c) Sette decimi 0,7
  d) Quattromilioniventisettemilanove 4'027'009
  e) Tredicimilaottocentootto 13'808

a + e = 25'510

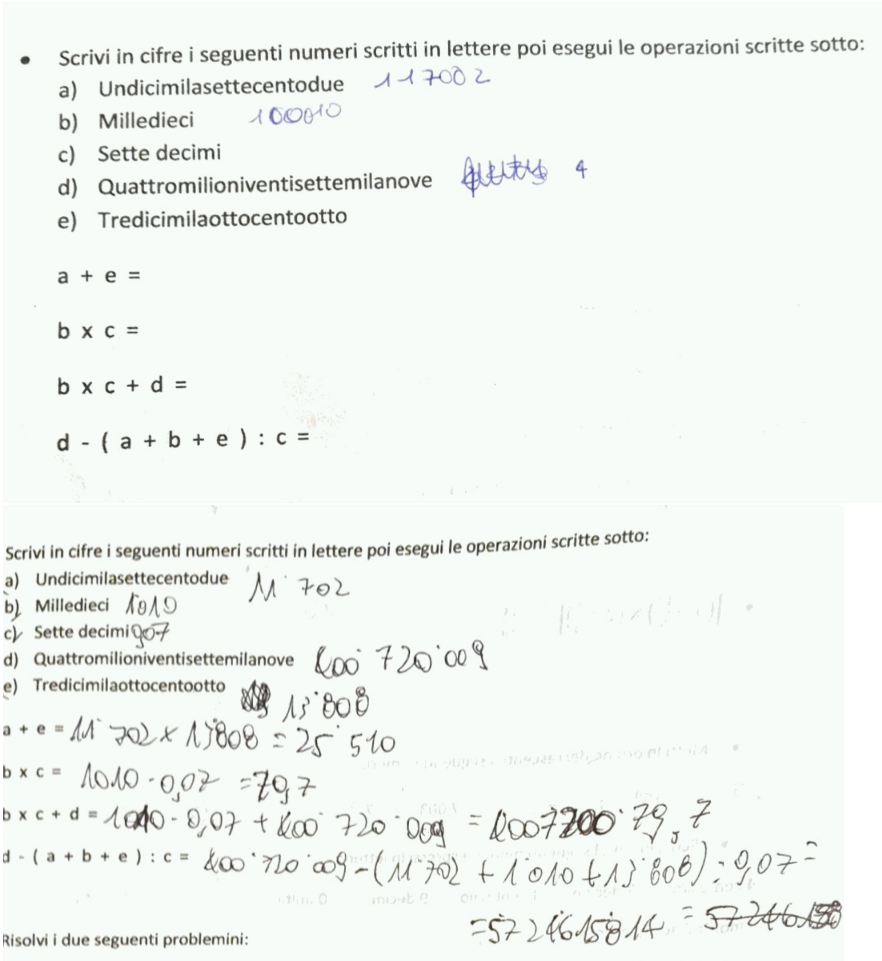
b x c = 707

b x c + d = 4027716

d - ( a + b + e ) : c = -18'702,86

Figura 6.32: Errore di precedenza.

In generale questi quattro esercizi sono tutti sbagliati perchè, a monte, sono presenti degli errori di traduzione. I due numeri che sono risultati più difficoltosi da scrivere sono stati la c e la d, come si può notare anche dagli esempi riportati sopra.
Per il campione DSA riporto di seguito un paio di esempi che mostrano in modo esaustivo le difficoltà da loro incontrate:



- Scrivi in cifre i seguenti numeri scritti in lettere poi esegui le operazioni scritte sotto:
  - a) Undicimilasettecentodue 117002
  - b) Milledieci 100010
  - c) Sette decimi
  - d) Quattromilioniventisettemilanove 4
  - e) Tredicimilaottocentootto

  a + e =

  b x c =

  b x c + d =

  d - ( a + b + e ) : c =

Scrivi in cifre i seguenti numeri scritti in lettere poi esegui le operazioni scritte sotto:

a) Undicimilasettecentodue 11˙702
b) Milledieci 1010
c) Sette decimi 0,07
d) Quattromilioniventisettemilanove 400˙720˙009
e) Tredicimilaottocentootto 13˙808
a + e = 11˙702 + 13˙808 = 25˙510
b x c = 1010 · 0,07 = 79,7
b x c + d = 1010 · 0,07 + 400˙720˙009 = 4007200˙79,7
d - ( a + b + e ) : c = 400˙720˙009 - (11˙702 + 1˙010 + 13˙808) : 0,07 =
= 5724615814 = ~~57246150~~

Risolvi i due seguenti problemini:

Figura 6.33: Esempi di errori nei ragazzi DSA.

Nella prima immagine si può ritrovare una estrema incapacità a scrivere i numeri presentati e , conseguentemente, non è in grado di risolvere l'esercizio; nella seconda immagine, oltre all'incapacità di tradurre in cifre i numeri, è evidente l'insicurezza del ragazzo, che anche in questo caso cancella spesso e scrive con tratto poco deciso.

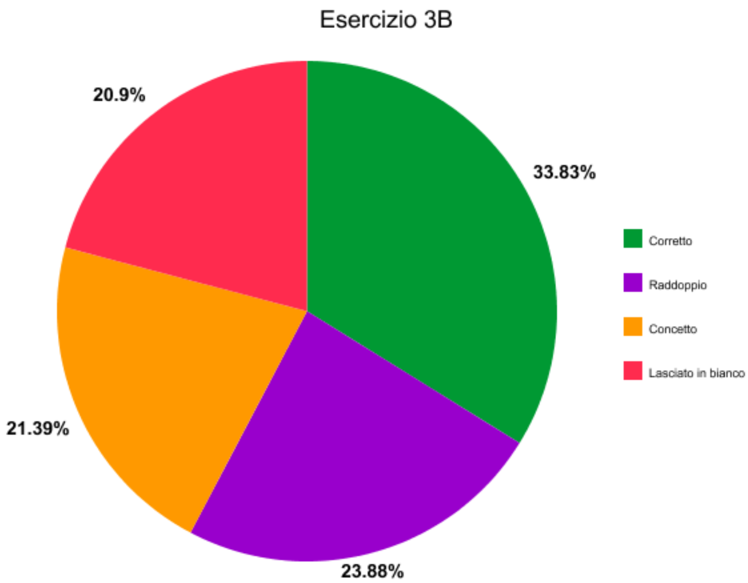
In questo esercizio l'uso della calcolatrice è stato determinante: nel momento in cui la traduzione in cifre dei numeri in modalità scritta risultava corretta, è stata utile per risolvere i calcoli esattamente per il 50% del totale del campione. Oltre agli errori procedurali di cui abbiamo parlato sopra, non si sono riscontrati errori di calcolo, pertanto la calcolatrice ha sicuramente aiutato i ragazzi a completare l'esercizio, risparmiando tempo e senza commettere errori. Posso affermare che, per quanto riguarda questo esercizio, la presenza della calcolatrice sia stata determinate per la buona riuscita dell'esercizio.

### 6.2.3 Esercizio 3

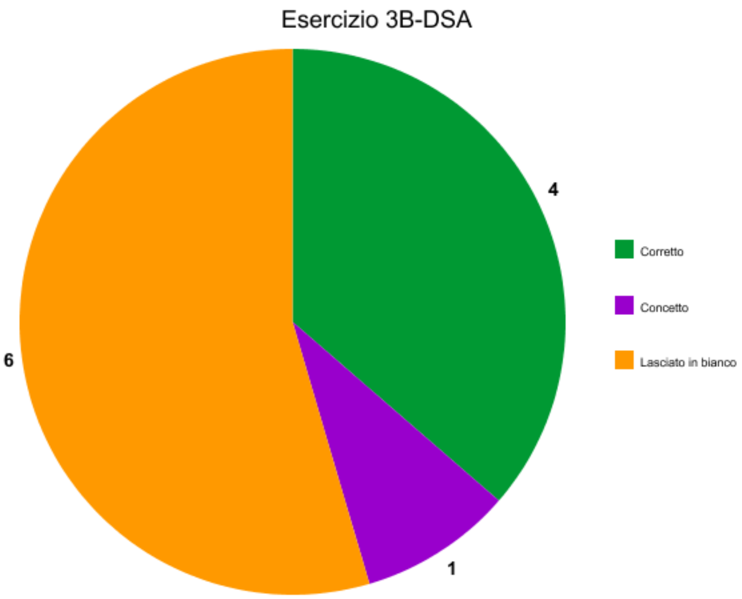
Risolvi il seguente problema:
Hai due damigiane a disposizione, ciascuna contenente 34,5 litri di vino. Ogni bottiglia può contenere 75 cl di vino. Quante bottiglie puoi riempire con le due damigiane a disposizione?
Per risolvere questo esercizio, il principale ostacolo è la conversione dell'unità di misura, cioè passare dai centilitri ai litri o viceversa: per trasformare i cl in L si deve dividere il numero per 100, se invece si vogliono trasformare i L in cl si deve moltiplicare per 100.
Ho scelto di trasformare i cl in litri, pertanto la risoluzione dell'esercizio è la seguente:
$34,5 \times 2 = 69$ Litri di vino in due damigiane
$69 : 0,75 = 92$ Bottiglie riempite
Era necessario prestare attenzione al testo poichè i dati riferivano la presenza di due damigiane e, pertanto, per trovare il vino complessivo bisogna prima moltiplicare per due il contenuto di una damigiana. Per fare in modo che i ragazzi avessero più possibilità di accorgersene ho inserito tale dato due volte: una nel testo ed una nella domanda; ma, come vedremo, ciò non è servito a molto.
I risultati ottenuti dai ragazzi sono i seguenti:

| Correzione | Numero studenti | percentuale sul totale |
|---|---|---|
| Corretto | 68 | 33,83% |
| No raddoppio | 48 | 23,88% |
| Errore di concetto | 43 | 21,39% |
| Lasciato in bianco | 42 | 20,9% |

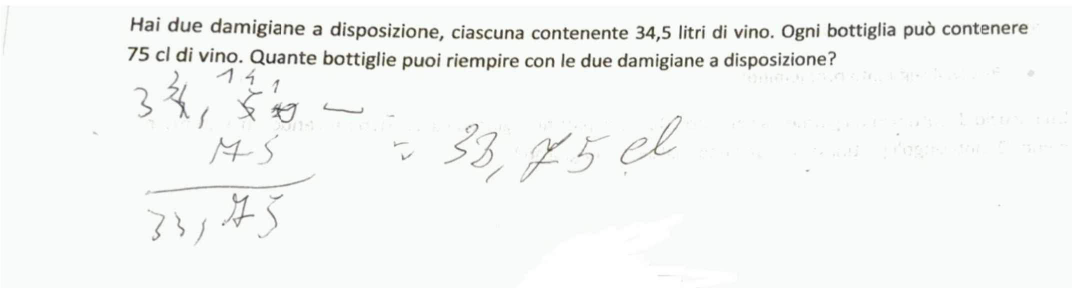
Ed il corrispondente grafico a torta è:




La percentuale delle risposte corrette all'esercizio non è delle migliori, infatti supera di poco il 30%, ma se la uniamo alla percentuale dei ragazzi che si sono dimenticati solo di raddoppiare il risultato, le cose migliorano notevolmente. L'errore di raddoppio è stato conteggiato a parte, in quanto i ragazzi, probabilmente indotti dalla fretta, non sbagliano completamente il procedimento, ma leggono con superficialità il testo e non eseguono l'ultimo passaggio. Tra gli errori di concetto sono stati catalogati sia gli errori dovuti all'utilizzo errato dell'operazione centrale del problema, sia gli errori dovuti ad una sbagliata conversione di unità di misura. La percentuale di questi errori risulta essere abbastanza alta per un simile problema e, soprattutto, dovuta ad errori di conversione che nelle classi intervistate dovrebbe essere fortemente consolidata, visto il notevole numero di ore anche di chimica e fisica.
Il campione dei ragazzi DSA ha un duplice comportamento nei confronti di questo esercizio:

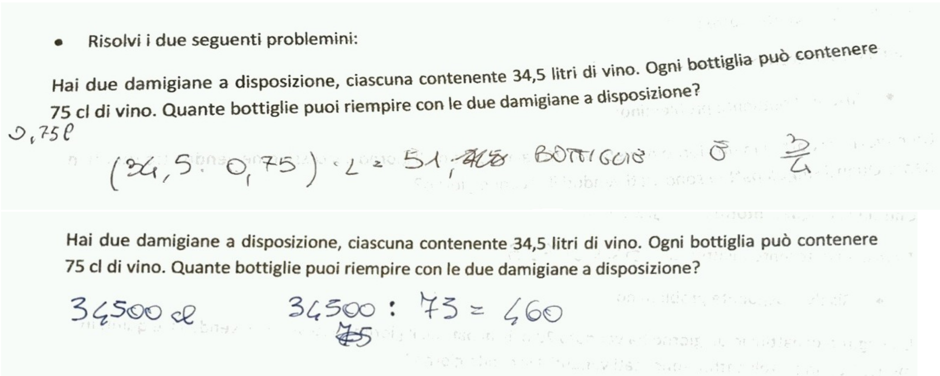



La maggior parte dei ragazzi lascia in bianco l'esercizio, soltanto in 5 lo provano a risolvere e di questi soltanto 1 lo sbaglia. Purtroppo lo scarso interesse, da parte dei ragazzi discalculici, nei confronti di questo esercizio non ci ha permesso di fornire una grande quantità di dati rilevanti per la sperimentazione. Riporto comunque l'immagine della risoluzione del ragazzo che ha sbagliato il procedimento risolutivo:




Il ragazzo discalculico, oltre a non raddoppiare la quantità totale del vino, sbaglia operazione, impostando una sottrazione in colonna anzichè una divisione.

Gli errori più frequenti che sono stati commessi, invece, dal campione non clinico sono i seguenti:



- Risolvi i due seguenti problemini:

Hai due damigiane a disposizione, ciascuna contenente 34,5 litri di vino. Ogni bottiglia può contenere 75 cl di vino. Quante bottiglie puoi riempire con le due damigiane a disposizione?

0,75 l

(34,5 · 0,75) · 2 = 51,~~468~~ BOTTIGLIE

Hai due damigiane a disposizione, ciascuna contenente 34,5 litri di vino. Ogni bottiglia può contenere 75 cl di vino. Quante bottiglie puoi riempire con le due damigiane a disposizione?

34500 cl    34500 : 75 = 460

Figura 6.34: Esempi di errori del campione non clinico.

In queste due immagini ho riportato gli errori più frequenti che ho trovato nei test: nella prima immagine c'è l'utilizzo della moltiplicazione anzichè la divisione, mentre nella seconda un tipico errore di conversione.

Questo esercizio presentava diverse difficoltà per i ragazzi, come la necessità di leggere attentamente il testo, per accorgersi della necessità di raddoppiare la quantità totale di vino, ed essere a conoscenza del fattore di conversione da litri a centilitri o viceversa. Per questi motivi, in realtà, la calcolatrice non è servita ai ragazzi a farli raggiungere delle elevate prestazioni, poichè all'interno di essa non risiedono i principi teorici necessari. Per utilizzarla al meglio bisogna, infatti, conoscere ed avere ben consolidati i principi su cui si basano gli esercizi, per poi lasciare a lei i calcoli per noi più difficili.

### 6.2.4 Esercizio 4

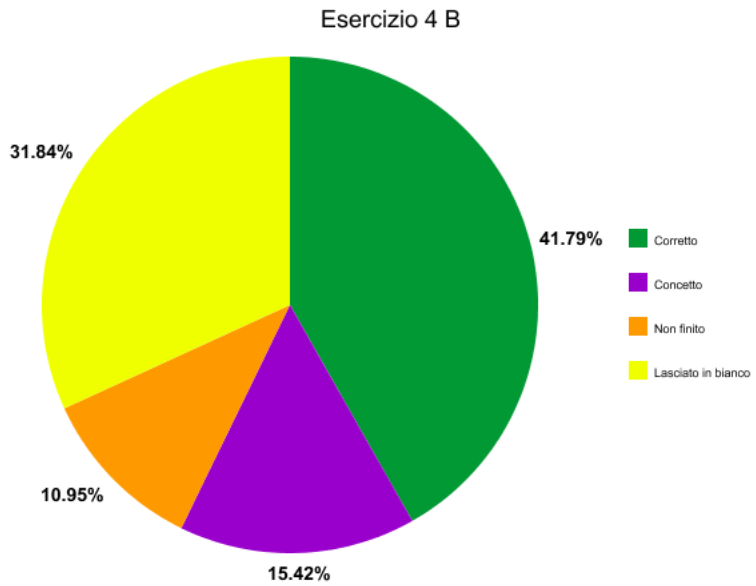
Francesco vuole acquistare un nuovo televisore che costa 789 euro. Sfogliando un volantino trova proprio quel televisore scontato del 19%. Si ricorda di avere anche un buono del valore di quarantacinque euro e 86 centesimi da spendere in quel negozio. Alla fine Francesco quanto pagherà il suo televisore nuovo? Avendo un budget totale di 600 euro riesce ad acquistare anche un DVD da 15 euro?
Per risolverla, in primis, bisogna sapere come si calcola uno sconto, impostando una proporzione oppure moltiplicando il totale per il tasso di sconto fratto 100. Dopodichè è semplicemente necessario eseguire delle sottrazioni con la calcolatrice e stabilire se il

totale, con il DVD, rientra nei 600 euro di budget.
I calcoli da eseguire sono i seguenti:
$789 \times \frac{19}{100} = 149,91$ Euro da scontare
$789 - 149,91 = 639,09$ Prezzo scontato
$639,09 - 45,86 = 593,23$ Prezzo meno il buono
$593,93 + 15 = 608,23$ totale con il DVD
$608,23 > 600$ Il DVD non rientra nel budget.

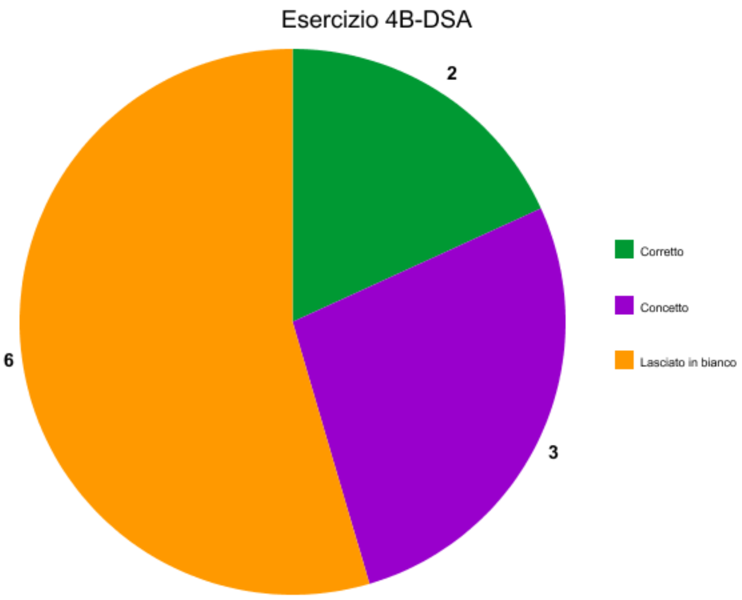
In questo esercizio ho cercato di ricreare una scena di vita reale che potesse interessare anche ai ragazzi, per vedere se, applicando la matematica alla vita quotidiana, i ragazzi incontrano più o meno difficoltà.
Andiamo subito a vedere i risultati ottenuti dal campione riportati in tabella:

| Correzione | Numero studenti | percentuale sul totale |
|---|---|---|
| Corretto | 84 | 41,79% |
| Errore di concetto | 64 | 15,42% |
| Non finito | 22 | 10,95% |
| Lasciato in bianco | 64 | 31,84% |

Il corrispondente diagramma a torta, anche questa volta ci aiuta ad inquadrare meglio al situazione:




Nel complesso mi sarei aspettata una percentuale maggiore di esercizi corretti, in quanto le nozioni richieste sono argomenti della vita di tutti i giorni e, soprattutto, sono contestualizzate in una situazione realistica. Al contrario delle mie previsioni, la percentuale di correttezza risulta arrivare soltanto al 40% circa, mentre gli errori effettivamente commessi raggiungono soltanto il 15%. La percentuale di esercizi non svolti è molto alta, ma essendo l'ultimo esercizio, può aver giocato a suo sfavore anche il tempo, in quanto al termine di quanto stabilito i ragazzi sono stati obbligati a consegnare subito. Ricordo che, anche in questo caso, sono stati reputati non finiti soltanto gli esercizi completamente corretti fino al punto in cui il ragazzo si è fermato, quindi, in una visione ottimistica della situazione, anche questi, se avessero avuto più tempo, sarebbero riusciti a completare l'esercizio.
La situazione per i ragazzi DSA, anche in questo caso non migliora:




Soltanto due ragazzi con DSA riescono ad eseguire l'esercizio in modo corretto, mentre 3 provano ma sbagliano. I rimanenti sei lasciano l'esercizio in bianco.
Le tipologie di errori non sono state molteplici, in realtà si possono riassumere in errori di calcolo della percentuale di sconto, errori di calcolo dello sconto totale ed errori nell'utilizzo della cifra totale a cui applicare lo sconto. Vediamo di seguito alcuni esempi:

Francesco vuole acquistare un nuovo televisore che costa 789 euro. Sfogliando un volantino trova proprio quel televisore scontato del 19%. Si ricorda di avere anche un buono del valore di quarantacinque euro e 86 centesimi da spendere in quel negozio. Alla fine Francesco quanto pagherà il suo televisore nuovo? Avendo un budget totale di 600 euro riesce ad acquistare anche un DVD da 15 euro?

780 19% 45,86€ F=600

-45,86 = 104,05€

~~[illegible]~~ (780·19):100 = 149,91 ~~[illegible]~~

600-104,05=495,95 € SI RIESCE A COMPRARE ANCHE IL CD

495,95-15= 480,95€

Francesco vuole acquistare un nuovo televisore che costa 789 euro. Sfogliando un volantino trova proprio quel televisore scontato del 19%. Si ricorda di avere anche un buono del valore di quarantacinque euro e 86 centesimi da spendere in quel negozio. Alla fine Francesco quanto pagherà il suo televisore nuovo? Avendo un budget totale di 600 euro riesce ad acquistare anche un DVD da 15 euro?

600:100 : x : 19 = 114

600 - 114 = 486

Francesco vuole acquistare un nuovo televisore che costa 789 euro. Sfogliando un volantino trova proprio quel televisore scontato del 19%. Si ricorda di avere anche un buono del valore di quarantacinque euro e 86 centesimi da spendere in quel negozio. Alla fine Francesco quanto pagherà il suo televisore nuovo? Avendo un budget totale di 600 euro riesce ad acquistare anche un DVD da 15 euro?

789 : 100 × 19 = 149,91 € con sconto

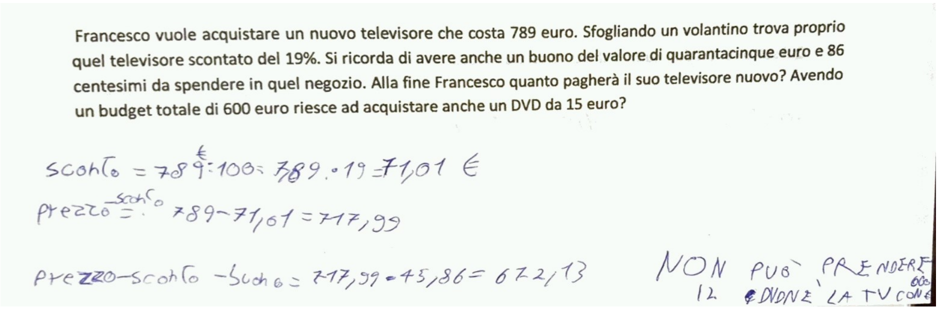
149,91 − 45,86 = 104,05 € ~~[illegible]~~ televisore

600−104,05 = 495,95 € rimanenti

(495,95−15 = 480,95 € rimasti dopo la spesa)

Sì, riesce ad acquistare anche il CD

Nella prima immagine il ragazzo utilizza il budget come totale, togliendo a questo i soldi da scontare; nella seconda immagine si può notare che non è in grado di impostare una proporzione ed, infine, nel terzo caso toglie il buono dai soldi che devono essere scontati, invece di sommarlo.
Di seguito riporto anche l'unico esempio di ragazzo discalculico degno di nota:


Francesco vuole acquistare un nuovo televisore che costa 789 euro. Sfogliando un volantino trova proprio quel televisore scontato del 19%. Si ricorda di avere anche un buono del valore di quarantacinque euro e 86 centesimi da spendere in quel negozio. Alla fine Francesco quanto pagherà il suo televisore nuovo? Avendo un budget totale di 600 euro riesce ad acquistare anche un DVD da 15 euro?

sconto = 789 € : 100 = 789 · 19 = 71,01 €

prezzo - sconto = 789 - 71,01 = 717,99

prezzo - sconto - buono = 717,99 - 45,86 = 672,13

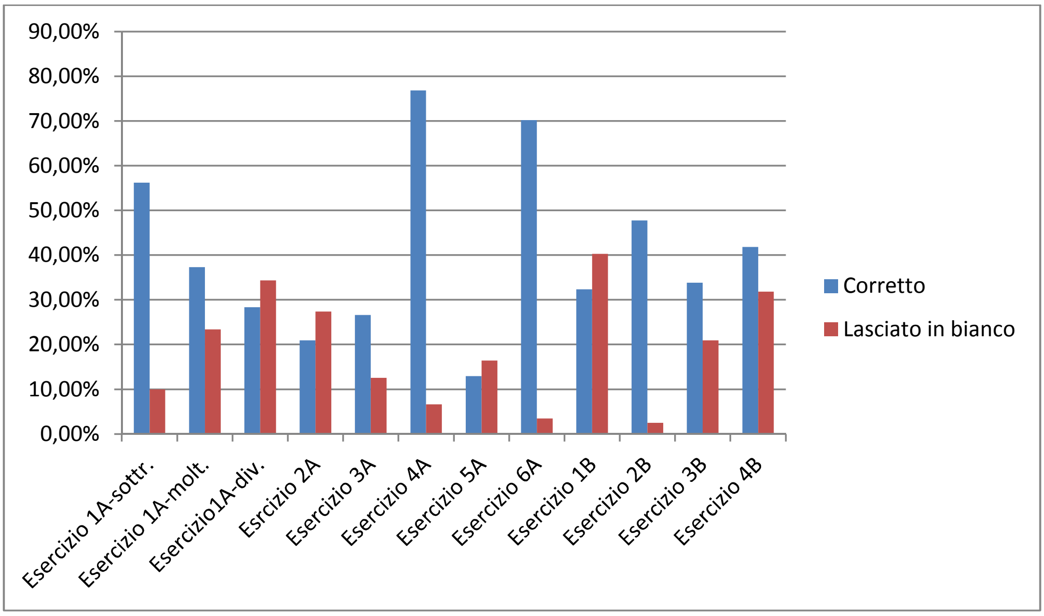
NON PUÒ PRENDERE NÉ IL DVD NÉ LA TV CON 600

Il ragazzo con disturbo specifico del calcolo, in questo caso, calcola la percentuale in modo corretto, ma scrive il risultato sbagliato, dopodichè esegue le sottrazioni richieste ma arriva ad un risultato maggiore del budget. A lato giustifica anche il suo risultato, affermando che Francesco non potrà comprare ne' il televisore ne' il dvd, considerazione parzialmente corretta prendendo in considerazione il risultato ottenuto, in quanto il televisore non può comprarlo, ma il dvd in realtà rientra nel budget.

Nel complesso mi sarei aspettata dei risultati completamente diversi per questo esercizio, anche se credo che il parametro che più ha messo in difficoltà i ragazzi sia stato il tempo ridotto. Purtroppo, non volendo che i ragazzi tornassero indietro a ricorreggere gli esercizi vecchi, una volta finiti tutti gli altri, non ho potuto lasciare loro tutto il tempo di cui necessitavano e questo è andato a discapito dell'ultimo esercizio.

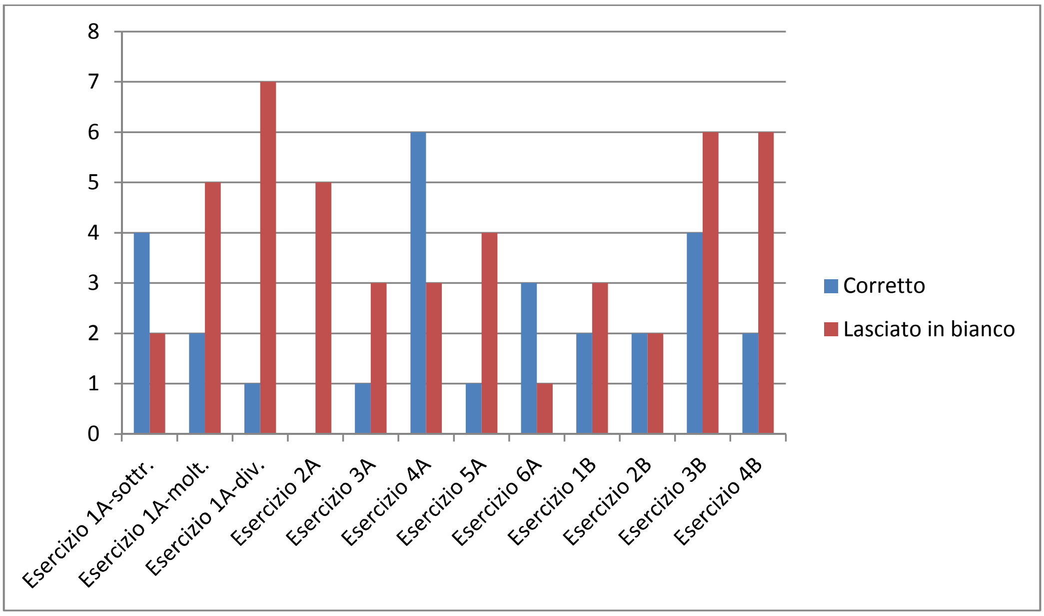
## 6.3 Conclusioni

In conclusione a tale sperimentazione, possiamo trarre alcune considerazioni generali sulle abilità matematiche dei ragazzi italiani della scuola secondaria di secondo grado. I risultati del mio test non smentiscono le classifiche del TIMMS o dell'OCSE PISA, secondo le quali l'Italia si colloca tra gli ultimi paesi per le abilità matematiche dimostrate, sia a livello europeo che mondiale. Vediamo i risultati ottenuti nel seguente istogramma, per confrontare le varie percentuali di correttezza degli esercizi proposti:


90,00%
80,00%
70,00%
60,00%
50,00%
40,00%
30,00%
20,00%
10,00%
0,00%
Esercizio 1A-sottr.
Esercizio 1A-molt.
Esercizio1A-div.
Esrcizio 2A
Esercizio 3A
Esercizio 4A
Esercizio 5A
Esercizio 6A
Esercizio 1B
Esercizio 2B
Esercizio 3B
Esercizio 4B
Corretto
Lasciato in bianco

In effetti, nella maggior parte degli esercizi proposti, la percentuale di correttezza rimane largamente al di sotto del 50%, con un picco in negativo del 13% per l'esercizio 5 della parte A. In questo caso molti dei ragazzi vengono tratti in inganno dall'espressione "i $\frac{3}{5}$ in meno" che traducono con l'operazione di sottrazione, sbagliando il procedimento da attuare (prima bisogna trovare a quanto equivalgono i $\frac{3}{5}$ di 20, poi sottrarre il risultato al totale). Tra gli esercizi che sono stati affrontati al meglio spiccano il 4 ed il 6 della parte A, in cui veniva richiesto di trascrivere dei numeri presentati in modalità scritta o verbale; in particolare, quelli presentati in modalità scritta, hanno raggiunto persino delle percentuali di correttezza al di sopra del 95% (nel grafico ho riportato solo la media dei risultati per i singoli numeri, per rendere più agevole la comprensione dell'istogramma). I numeri presentati in modalità verbale risultano leggermente deficitari rispetto a quelli presentati in modalità scritta, in quanto il loro carattere plurisillabico impegna maggiormente i circuiti neurali addetti all'elaborazione, che subiscono interferenza data dalla contemporaneità delle due azioni da svolgere: ascolto e scrittura del numero.
Sono rimasta particolarmente stupita dalla scarsa abilità di risolvere problemi a sfondo reale, ai quali i ragazzi dovrebbero essere forse più interessati ed avvezzi. Gli esercizi in questione sono il 5A, il 3B ed il 4B, in cui al massimo viene raggiunta la percentuale di correttezza del 40% nell'esercizio 4B, che riguarda una situazione, probabilmente, vissuta almeno una volta da tutti i ragazzi presenti, pertanto la matematizzazione del problema è risultata più agevole. Sono rimasta particolarmente perplessa dal fatto che, in tutti gli esercizi in cui erano presenti potenze negative, i ragazzi hanno dimostrato di incappare ancora nelle diverse misconcezioni dovute all'argomento, come il cambio di segno della base, oppure la moltiplicazione della base per l'esponente, anzichè elevarla.
Ho reputato molto interessante osservare anche le percentuali di esercizi lasciati in bianco, tra cui spiccano la divisione in colonna e l'ordinamento delle frazioni dopo aver eseguito il denominatore comune (esecizi 1A e 1B). Per quanto riguarda la divisione ho individuato tra le cause l'assenza della calcolatrice, che i ragazzi sono abituati ad utilizzare per qualsiasi tipo di conteggio, andando a discapito delle capacità di calcolo a mente, a mio avviso fondamentali anche per la vita di tutti i giorni; basti pensare a controllare un resto nel momento in cui si va a pagare qualsiasi cosa, oppure al classico esempio della cucina, in cui è essenziale saper adattare le ricette al numero di commensali. A tal proposito, in particolare, ritengo necessario osservare che, nell'esercizio 5A, quasi il 20% degli studenti intervistati hanno sbagliato la conversione dell'unità di misura, concetto che viene ripreso più e più volte in diverse materie, fin dalla scuola primaria.
Tornando agli esercizi maggiormente lasciati in bianco, mi sono stupita dell'altissima percentuale riscontrata nell'esercizio 1B, in cui veniva richiesto di ordinare delle frazioni. Confrontandomi con le professoresse dei corsi, prima di sottoporre il test, mi era stata riferita una certa tranquillità in merito, che è totalmente stata smentita dai risultati. Non so quale possa essere stata la causa, ma ben il 40% dei ragazzi si sono completamente astenuti dal provarci, al contrario delle previsioni, soprattutto avendo a disposizione la calcolatrice che avrebbe notevolmente semplificato e velocizzato i calcoli. Forse il mio

utilizzo di terminologie specifiche matematiche ha destato insicurezza nei ragazzi, inducendoli ad abbandonare.
Altra considerazione che possiamo fare è relativa alla reale utilità della calcolatrice. Ho appositamente chiesto ai ragazzi di svolgere una parte con ed una senza, per poter confrontare i risultati ottenuti. In generale, nella parte B, non si è riscontrato un vertiginoso aumento della correttezza degli esercizi, che in media si aggira attorno al 35-40%. Non reputo che tale strumento risulti essenziale per lo svolgimento degli esercizi, in quanto, in ogni caso, se la strategia di problem solving non è adeguata alla risoluzione, non è possibile ottenere il risultato corretto. Mi rendo conto che faciliti notevolmente i calcoli, ma allo stesso tempo degenera l'abilità di calcolo a mente, che, se stimolato ed utilizzato costantemente, può risultare un valido alleato per affrontare la quotidianità. Allo stesso tempo penso che si debbano valutare diversamente eventuali errori di calcolo ed errori di concetto, in modo da spronare i ragazzi a fare a meno della calcolatrice.
Per quanto riguarda gli studenti del campione con DSA, riporto di seguito l'istogramma corrispondente:


8
7
6
5
4
3
2
1
0
Esercizio 1A-sottr.
Esercizio 1A-molt.
Esercizio 1A-div.
Esercizio 2A
Esercizio 3A
Esercizio 4A
Esercizio 5A
Esercizio 6A
Esercizio 1B
Esercizio 2B
Esercizio 3B
Esercizio 4B
Corretto
Lasciato in bianco

Dall'istogramma si può evincere che nella maggior parte dei casi un consistente numero di ragazzi si astiene dall'eseguire gli esercizi ed, in ogni caso, anche tra i ragazzi che provano, in pochi riescono ad arrivare alla soluzione corretta. Il caso più critico è stato quello dell'espressione (esercizio 2A), in cui nessuno dei ragazzi con DSA è riuscito ad arrivare al risultato esatto. Probabilmente la causa scatenante è stata l'incapacità di conservare l'effetto apprendimento, essendo questo uno dei primi argomenti affrontati nel corso della scuola secondaria di secondo grado. Seguono, con un solo ragazzo che riesce a risolvere correttamente l'esercizio, gli esercizi 1A-divisione, 3A (ordinare una serie di numeri) e 5A (problema). L'operazione di divisione viene sempre fortemente sconsigliata nei test per la diagnosi della discalculia, in quanto rappresenta l'operazione che, di solito, genera prestazioni piuttosto deludenti sia dai ragazzi realmente con disturbi specifici del calcolo, sia dai ragazzi non clinici; per quanto riguarda, invece, l'ordinamento della serie di numeri in questione, il risultato conferma ulteriormente l'incapacità dei ragazzi di comprendere le numerosità, in quanto, non essendoci un preciso algoritmo da seguire, si dovevano basare soltanto sulle loro conoscenze del numero. I risultati, in effetti migliorano leggermente nell'esercizio 1B, in cui dovevano eseguire un procedimento ben definito e poi confrontare i numeri, avendo a disposizione anche la calcolatrice. Il problema 5A, invece, è risultato incredibilmente difficoltoso anche per i ragazzi non clinici, pertanto non mi sono stupita del risultato dei ragazzi discalculici.
L'astensione generale presenta dei picchi in corrispondenza degli esercizi 1A-divisione, 3B e 4B (problemi); per quanto riguarda questi ultimi due esercizi, penso che l'estrema lentezza che contraddistingue i ragazzi discalculici, sia stata determinante per il risultato. Probabilmente molti dei ragazzi non sono riusciti a terminare il test nei minuti a loro dispozione e gli esercizi che ne hanno risentito maggiormente sono appunto stati gli ultimi due proposti.
In generale, i risultati ottenuti nella seconda parte del test, non scendono mai al di sotta di una soglia di correttezza di 2 ragazzi su 11, ma senza mai svettare a percentuali più elevate. Anche in questo caso, non so quanto la calcolatrice si possa definire essenziale, poichè le estreme difficoltà nel problem solving dei ragazzi discalcilici vanno a vanificare l'ausilio che ne deriva.
Probabilmente, una preparazione mirata sugli argomenti del test avrebbe migliorato le prestazioni dei ragazzi, ma ne avrebbe invalidato lo scopo di sondare le reali capacità dei ragazzi sulle abilità di base e sulla loro capacità ad utilizzare la matematica nella vita reale. Forse è proprio lo scarso interesse dei ragazzi a portarli a risultati così deludenti anche in scuole, come questa, dove la presenza della matematica è molto forte ed insita in molte altre materie più specifiche. Nonostante la maneggino più volte durante il giorno, spesso anche inconsapevolmente, si ostinano a pensare alla matematica come ad una chimera e partono prevenuti di non riuscire a superare le proprie difficoltà. Spesso, è proprio l'asetticità della materia e lo scarso interesse dei professori a mostrare ai ragazzi esempi in cui la matematica viene utilizzata ed applicata ad oggetti o situazioni che stanno attorno a loro a portarli alla credenza generale che gli argomenti spiegati non

servano a nulla, senza sapere che proprio la matematica è il linguaggio universale più utilizzato nel mondo, sul quale si basano tutte le scienze in modo più o meno evidente.

# Capitolo 7

# Appendici

## 7.1 L'architettura della memoria

La memoria è un insieme di sistemi interconnessi, cioè una struttura composta dall'assemblaggio di singole parti che si differenziano per meccanismi di funzionamento, per la qualità delle informazioni elaborate, per le tappe dello sviluppo e per le aree cerebrali coinvolte. Per quanto riguarda questo elaborato, possiamo suddividerla in tre sistemi principali:

1. **Memoria a breve termine** o (MBT): Trattiene un'informazione soltanto per il tempo necessario al suo utilizzo e consente la sua elaborazione in modo da permetterne il passaggio nella memoria a lungo termine. Ha una capacità limitata e l'indice della sua capacità, cioè il numero di informazioni che può effettivamente contenere, è lo *Span di memoria a breve termine*. Due interessanti effetti al riguardo sono l'*effetto primacy* e l'*effetto recency*, secondo cui vengono ricordate meglio le prime e le ultime informazioni immagazzinate. Il primo sembra avvenire perchè le prime informazioni sono già state elaborate e sono passate nella memoria a lungo termine; mentre il secondo trova spiegazione semplicemente nel fatto che le ultime informazioni sono ancora fresche ed attive nella memoria a breve termine.

2. **Memoria di lavoro**: Chiamata anche Working Memory (o WM). Mantiene temporaneamente un'informazione e la elabora per lo svolgimento dei compiti. È costituita da tre sottocomponenti, coordinate dall'esecutivo o processore centrale che presiede a tutte le operazioni cognitive:

    - Ciclo fonologico: addetto all'elaborazione del materiale verbale;
    - Taccuino visuo-spaziale: per l'acquisizione delle informazioni visive e spaziali;
    - Buffer episodico: magazzino di back-up in grado di favorire la rievocazione seriale, inoltre elabora le informazioni per l'integrazione amodale con il contesto e per il passaggio nella memoria a lungo termine.

3. **Memoria a lungo termine** o (MLT): sistema in cui risiedono le informazioni elaborate che dobbiamo ricordare. È composta da 4 sottosistemi:

    - *Sistema di rappresentazione percettiva*: addetto alla rappresentazione in memoria delle caratteristiche percettive di oggetti e parole. È un sistema presemantico, cioè prescinde dal significato della parola, che opera a livello non consapevole ed in maniera autonoma.
    - *Sistema procedurale*: si occupa dell'immagazzinamento inconsapevole di abilità percettive e motorie. In questo sistema gli apprendimenti sono graduali e si automatizzano solo con la pratica.
    - *Sistema semantico*: contiene la conoscenza generale sul mondo. È un sistema di conoscenza esplicita, in cui la codifica può avvenire sia a livello conscio che inconscio, ma il recupero è soltanto consapevole ed avviene passo dopo passo, dopo l'attivazione di contenuti collegati tra loro.
    - *Sistema episodico*: contiene le rappresentazioni di eventi o di episodi che derivano dall'esperienza diretta di apprendimento del soggetto. È indipendente dal sistema semantico e sta alla base della costruzione della memoria autobiografica. Gli eventi immagazzinati si chiamano *engrammi* e devono essere innescati volontariamente o da qualche correlazione per tornare alla memoria. Tale processo si chiama di *ecforia sinergica*, dove ecforia significa "venire alla luce" e sinergica è "tramite una scintilla". Ogni episodio, dopo esser stato rievocato, viene nuovamente immagazzinato con i nuovi riferimenti e, quindi, continuamente modificato. Il sistema episodico è l'ultimo a svilupparsi.

Nella vita quotidiana, questi quattro sistemi interagiscono tra loro per permetterci di creare il nostro bagaglio culturale in continua evoluzione.

## 7.2 LEGGE 8 ottobre 2010, n. 170

**Nuove norme in materia di disturbi specifici di apprendimento in ambito scolastico.**

**Art. 1**
**Riconoscimento e definizione di dislessia, disgrafia, disortografia e discalculia**

1. La presente legge riconosce la dislessia, la disgrafia, la disortografia e la discalculia quali disturbi specifici di apprendimento, di seguito denominati "DSA", che si manifestano in presenza di capacità cognitive adeguate, in assenza di patologie neurologiche e di deficit sensoriali, ma possono costituire una limitazione importante per alcune attività della vita quotidiana.

2. Ai fini della presente legge, si intende per dislessia un disturbo specifico che si manifesta con una difficoltà nell'imparare a leggere, in particolare nella decifrazione dei segni linguistici, ovvero nella correttezza e nella rapidità della lettura.

3. Ai fini della presente legge, si intende per disgrafia un disturbo specifico di scrittura che si manifesta in difficoltà nella realizzazione grafica.

4. Ai fini della presente legge, si intende per disortografia un disturbo specifico di scrittura che si manifesta in difficoltà nei processi linguistici di transcodifica.

5. Ai fini della presente legge, si intende per discalculia un disturbo specifico che si manifesta con una difficoltà negli automatismi del calcolo e dell'elaborazione dei numeri.

6. La dislessia, la disgrafia, la disortografia e la discalculia possono sussistere separatamente o insieme.

7. Nell'interpretazione delle definizioni di cui ai commi da 2 a 5, si tiene conto dell'evoluzione delle conoscenze scientifiche in materia.

*Avvertenza:*
Il testo delle note qui pubblicato è stato redatto dall'amministrazione competente per materia, ai sensi dell'art. 10, commi 2 e 3, del testo unico delle disposizioni sulle promulgazione delle leggi, sull'emanazione dei decreti del Presidente della Repubblica e sulle pubblicazioni ufficiali della Repubblica italiana, approvato con D.P.R. 28 dicembre 1985, n. 1092, al solo fine di facilitare la lettura delle disposizioni di legge modificate o alle quali è operante il rinvio.
Restano invariati il valore e l'efficacia degli atti legislativi qui trascritti.

**Art. 2**
**Finalità**

La presente legge persegue, per le persone con DSA, le seguenti finalità:

1. garantire il diritto all'istruzione;

2. favorire il successo scolastico, anche attraverso misure didattiche di supporto, garantire una formazione adeguata e promuovere lo sviluppo delle potenzialità;

3. ridurre i disagi relazionali ed emozionali;

4. adottare forme di verifica e di valutazione adeguate alle necessità formative degli studenti;

5. preparare gli insegnanti e sensibilizzare i genitori nei confronti delle problematiche legate ai DSA;

6. favorire la diagnosi precoce e percorsi didattici riabilitativi;

7. incrementare la comunicazione e la collaborazione tra famiglia, scuola e servizi sanitari durante il percorso di istruzione e di formazione;

8. assicurare eguali opportunità di sviluppo delle capacità in ambito sociale e professionale.

**Art. 3**
**Diagnosi**

1. La diagnosi dei DSA è effettuata nell'ambito dei trattamenti specialistici già assicurati dal Servizio sanitario nazionale a legislazione vigente ed è comunicata dalla famiglia alla scuola di appartenenza dello studente. Le regioni nel cui territorio non sia possibile effettuare la diagnosi nell'ambito dei trattamenti specialistici erogati dal Servizio sanitario nazionale possono prevedere, nei limiti delle risorse umane, strumentali e finanziarie disponibili a legislazione vigente, che la medesima diagnosi sia effettuata da specialisti o strutture accreditate.

2. Per gli studenti che, nonostante adeguate attività di recupero didattico mirato, presentano persistenti difficoltà, la scuola trasmette apposita comunicazione alla famiglia.

3. È compito delle scuole di ogni ordine e grado, comprese le scuole dell'infanzia, attivare, previa apposita comunicazione alle famiglie interessate, interventi tempestivi, idonei ad individuare i casi sospetti di DSA degli studenti, sulla base dei protocolli regionali di cui all'articolo 7, comma 1. L'esito di tali attività non costituisce, comunque, una diagnosi di DSA.

**Art. 4**
**Formazione nella scuola**

1. Per gli anni 2010 e 2011, nell'ambito dei programmi di formazione del personale docente e dirigenziale delle scuole di ogni ordine e grado, comprese le scuole dell'infanzia, è assicurata un'adeguata preparazione riguardo alle problematiche relative ai DSA, finalizzata ad acquisire la competenza per individuarne precocemente i segnali e la conseguente capacità di applicare strategie didattiche, metodologiche e valutative adeguate.

2. Per le finalità di cui al comma 1 è autorizzata una spesa pari a un milione di euro per ciascuno degli anni 2010 e 2011. Al relativo onere si provvede mediante corrispondente utilizzo del Fondo di riserva per le autorizzazioni di spesa delle leggi permanenti di natura corrente iscritto nello stato di previsione del Ministero dell'economia e delle finanze, come determinato, dalla Tabella C allegata alla legge 23 dicembre 2009, n. 191.

**Note all'art. 4:**

La legge 23 dicembre 2009, n. 191, (Disposizioni per la formazione del bilancio annuale e pluriennale dello Stato - legge finanziaria 2010) è stata pubblicata nel supplemento ordinario alla Gazzetta Ufficiale n. 302 del 30 dicembre 2009.

**Art. 5**
**Misure educative e didattiche di supporto**

1. Gli studenti con diagnosi di DSA hanno diritto a fruire di appositi provvedimenti dispensativi e compensativi di flessibilità didattica nel corso dei cicli di istruzione e formazione e negli studi universitari.

2. Agli studenti con DSA le istituzioni scolastiche, a valere sulle risorse specifiche e disponibili a legislazione vigente iscritte nello stato di previsione del Ministero dell'istruzione, dell'università e della ricerca, garantiscono:

   - l'uso di una didattica individualizzata e personalizzata, con forme efficaci e flessibili di lavoro scolastico che tengano conto anche di caratteristiche peculiari dei soggetti, quali il bilinguismo, adottando una metodologia e una strategia educativa adeguate;
   - l'introduzione di strumenti compensativi, compresi i mezzi di apprendimento alternativi e le tecnologie informatiche, nonch misure dispensative da alcune prestazioni non essenziali ai fini della qualità dei concetti da apprendere;

- per l’insegnamento delle lingue straniere, l’uso di strumenti compensativi che favoriscano la comunicazione verbale e che assicurino ritmi graduali di apprendimento, prevedendo anche, ove risulti utile, la possibilità dell’esonero.

3. Le misure di cui al comma 2 devono essere sottoposte periodicamente a monitoraggio per valutarne l’efficacia e il raggiungimento degli obiettivi.

4. Agli studenti con DSA sono garantite, durante il percorso di istruzione e di formazione scolastica e universitaria, adeguate forme di verifica e di valutazione, anche per quanto concerne gli esami di Stato e di ammissione all’università nonch gli esami universitari.

**Art. 6**
**Misure per i familiari**

1. I familiari fino al primo grado di studenti del primo ciclo dell’istruzione con DSA impegnati nell’assistenza alle attività scolastiche a casa hanno diritto di usufruire di orari di lavoro flessibili.

2. Le modalità di esercizio del diritto di cui al comma 1 sono determinate dai contratti collettivi nazionali di lavoro dei comparti interessati e non devono comportare nuovi o maggiori oneri a carico della finanza pubblica.

**Art. 7**
**Disposizioni di attuazione**

1. Con decreto del Ministro dell’istruzione, dell’università e della ricerca, di concerto con il Ministro della salute, previa intesa in sede di Conferenza permanente per i rapporti tra lo Stato, le regioni e le province autonome di Trento e di Bolzano, si provvede, entro quattro mesi dalla data di entrata in vigore della presente legge, ad emanare linee guida per la predisposizione di protocolli regionali, da stipulare entro i successivi sei mesi, per le attività di identificazione precoce di cui all’articolo 3, comma 3.

2. Il Ministro dell’istruzione, dell’università e della ricerca, entro quattro mesi dalla data di entrata in vigore della presente legge, con proprio decreto, individua le modalità di formazione dei docenti e dei dirigenti di cui all’articolo 4, le misure educative e didattiche di supporto di cui all’articolo 5, comma 2, nonch le forme di verifica e di valutazione finalizzate ad attuare quanto previsto dall’articolo 5, comma 4.

3. Con decreto del Ministro dell'istruzione, dell'università e della ricerca, da adottare entro due mesi dalla data di entrata in vigore della presente legge, è istituito presso il Ministero dell'istruzione, dell'università e della ricerca un Comitato tecnico-scientifico, composto da esperti di comprovata competenza sui DSA. Il Comitato ha compiti istruttori in ordine alle funzioni che la presente legge attribuisce al Ministero dell'istruzione, dell'università e della ricerca. Ai componenti del Comitato non spetta alcun compenso. Agli eventuali rimborsi di spese si provvede nel limite delle risorse allo scopo disponibili a legislazione vigente iscritte nello stato di previsione del Ministero dell'istruzione, dell'università e della ricerca.

### Art. 8
### Competenze delle regioni a statuto speciale e delle province autonome

1. Sono fatte salve le competenze delle regioni a statuto speciale e delle province autonome di Trento e di Bolzano, in conformità ai rispettivi statuti e alle relative norme di attuazione nonch alle disposizioni del titolo V della parte seconda della Costituzione.

2. Entro tre mesi dalla data di entrata in vigore della presente legge, le regioni a statuto speciale e le province autonome di Trento e di Bolzano provvedono a dare attuazione alle disposizioni della legge stessa.

### Art. 9
### Clausola di invarianza finanziaria

Fatto salvo quanto previsto dall'articolo 4, comma 2, dall'attuazione della presente legge non devono derivare nuovi o maggiori oneri a carico della finanza pubblica. La presente legge, munita del sigillo dello Stato, sarà inserita nella Raccolta ufficiale degli atti normativi della Repubblica italiana. È fatto obbligo a chiunque spetti di osservarla e di farla osservare come legge dello Stato.

## 7.3 Decreto Ministeriale 5669 del 12 luglio 2011

Il Ministero DECRETA:

**Articolo 1**
**Finalità del decreto**

Il presente decreto individua, ai sensi dellart. 7, comma 2, della Legge 170/2010, le modalità di formazione dei docenti e dei dirigenti scolastici, le misure educative e didattiche di supporto utili a sostenere il corretto processo di insegnamento/apprendimento fin dalla scuola dellinfanzia, nonch le forme di verifica e di valutazione per garantire il diritto allo studio degli alunni e degli studenti con diagnosi di Disturbo Specifico di Apprendimento (di seguito DSA), delle scuole di ogni ordine e grado del sistema nazionale di istruzione e nelle università.

**Articolo 2**
**Individuazione di alunni e studenti con DSA**

1. Ai fini di cui al precedente articolo, le istituzioni scolastiche provvedono a segnalare alle famiglie le eventuali evidenze, riscontrate nelle prestazioni quotidiane in classe e persistenti nonostante lapplicazione di adeguate attività di recupero didattico mirato, di un possibile disturbo specifico di apprendimento, al fine di avviare il percorso per la diagnosi ai sensi dellart. 3 della Legge 170/2010.

2. Al fine di garantire agli alunni e agli studenti con disturbi specifici di apprendimento di usufruire delle misure educative e didattiche di supporto di cui allarticolo 5 della Legge 170/2010, gli Uffici Scolastici Regionali attivano tutte le necessarie iniziative e procedure per favorire il rilascio di una certificazione diagnostica dettagliata e tempestiva da parte delle strutture preposte.

3. La certificazione di DSA viene consegnata dalla famiglia ovvero dallo studente di maggiore età alla scuola o alluniversità, che intraprendono le iniziative ad essa conseguenti.

**Articolo 3**
**Linee guida**

Gli Uffici Scolastici Regionali, le Istituzioni scolastiche e gli Atenei, per lattuazione delle disposizioni del presente decreto, tengono conto delle indicazioni contenute nelle allegate Linee guida per il diritto allo studio degli alunni e degli studenti con disturbi specifici di apprendimento, che sono parte integrante del presente decreto.

**Articolo 4**
**Misure educative e didattiche**

1. Le Istituzioni scolastiche, tenendo conto delle indicazioni contenute nelle allegate Linee guida, provvedono ad attuare i necessari interventi pedagogico-didattici per il successo formativo degli alunni e degli studenti con DSA, attivando percorsi di didattica individualizzata e personalizzata e ricorrendo a strumenti compensativi e misure dispensative.

2. I percorsi didattici individualizzati e personalizzati articolano gli obiettivi, compresi comunque allinterno delle indicazioni curricolari nazionali per il primo e per il secondo ciclo, sulla base del livello e delle modalità di apprendimento dellalunno e dello studente con DSA, adottando proposte di insegnamento che tengano conto delle abilità possedute e potenzino anche le funzioni non coinvolte nel disturbo.

3. In unottica di prevenzione dei DSA, gli insegnanti adottano metodologie didattiche adeguate allo sviluppo delle abilità di letto-scrittura e di calcolo, tenendo conto, nel rispetto della libertà dinsegnamento, delle osservazioni di carattere scientifico contenute al riguardo nelle allegate Linee guida

4. Le Istituzioni scolastiche assicurano limpiego degli opportuni strumenti compensativi, curando particolarmente lacquisizione, da parte dellalunno e dello studente, con DSA delle competenze per un efficiente utilizzo degli stessi.

5. Ladozione delle misure dispensative è finalizzata ad evitare situazioni di affaticamento e di disagio in compiti direttamente coinvolti dal disturbo, senza peraltro ridurre il livello degli obiettivi di apprendimento previsti nei percorsi didattici individualizzati e personalizzati.

**Articolo 5**
**Interventi didattici individualizzati e personalizzati**

La scuola garantisce ed esplicita, nei confronti di alunni e studenti con DSA, interventi didattici individualizzati e personalizzati, anche attraverso la redazione di un Piano didattico personalizzato, con lindicazione degli strumenti compensativi e delle misure dispensative adottate.

**Articolo 6**
**Forme di verifica e di valutazione**

1. La valutazione scolastica, periodica e finale, degli alunni e degli studenti con DSA deve essere coerente con gli interventi pedagogico-didattici di cui ai precedenti articoli.

2. Le Istituzioni scolastiche adottano modalità valutative che consentono allalunno o allo studente con DSA di dimostrare effettivamente il livello di apprendimento raggiunto, mediante lapplicazione di misure che determinino le condizioni ottimali per lespletamento della prestazione da valutare - relativamente ai tempi di effettuazione e alle modalità di strutturazione delle prove - riservando particolare attenzione alla padronanza dei contenuti disciplinari, a prescindere dagli aspetti legati allabilità deficitaria.

3. Le Commissioni degli esami di Stato, al termine del primo e del secondo ciclo di istruzione, tengono in debita considerazione le specifiche situazioni soggettive, le modalità didattiche e le forme di valutazione individuate nellambito dei percorsi didattici individualizzati e personalizzati. Sulla base del disturbo specifico, anche in sede di esami di Stato, possono riservare ai candidati tempi più lunghi di quelli ordinari. Le medesime Commissioni assicurano, altresì, lutilizzazione di idonei strumenti compensativi e adottano criteri valutativi attenti soprattutto ai contenuti piuttosto che alla forma, sia nelle prove scritte, anche con riferimento alle prove nazionali INVALSI previste per gli esami di Stato, sia in fase di colloquio.

4. Le Istituzioni scolastiche attuano ogni strategia didattica per consentire ad alunni e studenti con DSA lapprendimento delle lingue straniere. A tal fine valorizzano le modalità attraverso cui il discente meglio può esprimere le sue competenze, privilegiando lespressione orale, nonch ricorrendo agli strumenti compensativi e alle misure dispensative più opportune. Le prove scritte di lingua straniera sono progettate, presentate e valutate secondo modalità compatibili con le difficoltà connesse ai DSA.

5. Fatto salvo quanto definito nel comma precedente, si possono dispensare alunni e studenti dalle prestazioni scritte in lingua straniera in corso danno scolastico e in sede di esami di Stato, nel caso in cui ricorrano tutte le condizioni di seguito elencate:

   - certificazione di DSA attestante la gravità del disturbo e recante esplicita richiesta di dispensa dalle prove scritte;
   - richiesta di dispensa dalle prove scritte di lingua straniera presentata dalla famiglia o dallallievo se maggiorenne;
   - approvazione da parte del consiglio di classe che confermi la dispensa in forma temporanea o permanente, tenendo conto delle valutazioni diagnostiche e sulla base delle risultanze degli interventi di natura pedagogico-didattica, con particolare attenzione ai percorsi di studio in cui linsegnamento della lingua straniera risulti caratterizzante (liceo linguistico, istituto tecnico per il turismo, ecc.).

In sede di esami di Stato, conclusivi del primo e del secondo ciclo di istruzione, modalità e contenuti delle prove orali  sostitutive delle prove scritte  sono stabiliti dalle Commissioni, sulla base della documentazione fornita dai consigli di classe. I candidati con DSA che superano lesame di Stato conseguono il titolo valido per liscrizione alla scuola secondaria di secondo grado ovvero alluniversità.

6. Solo in casi di particolari gravità del disturbo di apprendimento, anche in comorbilità con altri disturbi o patologie, risultanti dal certificato diagnostico, lalunno o lo studente possono  su richiesta delle famiglie e conseguente approvazione del consiglio di classe - essere esonerati dallinsegnamento delle lingue straniere e seguire un percorso didattico differenziato. In sede di esami di Stato, i candidati con DSA che hanno seguito un percorso didattico differenziato e sono stati valutati dal consiglio di classe con lattribuzione di voti e di un credito scolastico relativi unicamente allo svolgimento di tale piano, possono sostenere prove differenziate, coerenti con il percorso svolto, finalizzate solo al rilascio dell'attestazione di cui all'art.13 del D.P.R. n.323/1998.

7. In ambito universitario, gli Atenei assicurano agli studenti con DSA laccoglienza, il tutorato, la mediazione con lorganizzazione didattica e il monitoraggio dellefficacia delle prassi adottate.

8. Per le prove di ammissione ai corsi di laurea e di laurea magistrale programmati a livello nazionale o da parte delle università, sono previsti tempi aggiuntivi, ritenuti congrui in relazione alla tipologia di prova e comunque non superiori al 30% in più rispetto a quelli stabiliti per la generalità degli studenti, assicurando altresì luso degli strumenti compensativi necessari in relazione al tipo di DSA.

9. La valutazione degli esami universitari di profitto è effettuata anche tenendo conto delle indicazioni presenti nelle allegate Linee guida.

**Articolo 7**
**Interventi per la formazione**

1. Le attività di formazione in servizio degli insegnanti e dei dirigenti scolastici, di cui allart. 4 della Legge 170/2010, riguardano in particolare i seguenti ambiti:

   - Legge 8 ottobre 2010, n. 170;
   - delle diverse tipologie di DSA;
   - principali strumenti per lindividuazione precoce del rischio di DSA;
   - strategie educativo-didattiche di potenziamento e di aiuto compensativo;
   - gestione della classe in presenza di alunni con DSA;

- forme adeguate di verifica e di valutazione;
- indicazioni ed esercitazioni concernenti le misure educative e didattiche di cui allart. 4;
- forme di orientamento e di accompagnamento per il prosieguo degli studi in ambito universitario, dellalta formazione e dellistruzione tecnica superiore;
- esperienze di studi di caso di alunni con DSA, per implementare buone pratiche didattiche.

2. Il Ministero predispone appositi piani di formazione - le cui direttive sono riportate nelle allegate Linee guida - anche in convenzione con università, enti di ricerca, società scientifiche, associazioni e servizi sanitari territoriali. In particolare, gli Uffici Scolastici Regionali, fatte salve le convenzioni e le intese già in atto, possono stipulare appositi accordi con le facoltà di Scienze della Formazione, nellambito dellAccordo quadro sottoscritto tra il MIUR e la Conferenza nazionale permanente dei Presidi di Scienze della Formazione, per lattivazione presso le stesse di corsi di perfezionamento o master in didattica e psicopedagogia per i disturbi specifici di apprendimento, rivolti a docenti e dirigenti scolastici delle scuole di ogni ordine e grado.

3. In conformità alle norme sullautonomia delle istituzioni scolastiche, le medesime possono attivare, in base alle necessità ed alle risorse, interventi formativi in materia.

**Art. 8**
**Centri Territoriali di Supporto**

Al fine di garantire lattuazione delle disposizioni contenute nel presente decreto, le Istituzioni scolastiche attivano tutte le necessarie iniziative e misure per assicurare il diritto allo studio degli alunni e degli studenti con DSA. In particolare, le istituzioni scolastiche possono avvalersi del supporto tecnico-scientifico fornito dalla rete predisposta dal MIUR, anche attraverso i Centri Territoriali di Supporto (CTS) istituiti con il progetto Nuove Tecnologie e Disabilità. I CTS possono essere impiegati come centri di consulenza, formazione, collegamento e monitoraggio ed essere interconnessi telematicamente. Gli operatori dei Centri, opportunamente formati, possono a loro volta essere soggetti promotori di azioni di formazione e aggiornamento.

**Art. 9**
**Gruppo di lavoro nazionale**

1. Con successivo decreto del Ministro è istituito un Gruppo di lavoro nazionale con il compito di monitorare lattuazione delle norme della Legge 170/2010 e delle disposizioni contenute nel presente decreto, nonch con compiti di supporto tecnico

allattività di coordinamento delle iniziative in materia di DSA. Il suddetto Gruppo di lavoro avrà anche compiti consultivi e propositivi, con particolare riguardo:

- formulazione di eventuali proposte di revisione delle presenti disposizioni e delle allegate Linee guida, sulla base dei progressi della ricerca scientifica, degli esiti dei monitoraggi e dellevoluzione normativa in materia;
- sperimentazione e innovazione metodologico-didattica e disciplinare.

2. Le funzioni di Presidente del Gruppo di lavoro nazionale sui DSA sono svolte dal Direttore Generale per lo Studente, la Partecipazione, l'Integrazione e la Comunicazione o da un suo delegato.

3. Le funzioni di Segreteria tecnica sono svolte dallUfficio settimo della Direzione Generale sopracitata.

4. Ai membri del Gruppo di lavoro nazionale non spetta alcun compenso.

**Art. 10**
**Disapplicazione di precedenti disposizioni in materia**

Con l'entrata in vigore del presente Decreto si intendono non più applicabili le disposizioni impartite con la Circolare ministeriale n. 28 del 15 marzo 2007 e con la Nota ministeriale n. 4674 del 10 maggio 2007.

Vorrei ringraziare la mia relatrice, la professoressa Manuela Fabbri, che si è mostrata sempre molto entusiasta del mio progetto e mi ha lasciata libera di esprimere la mia passione per la matematica ed i ragazzi, intraprendendo questa sperimentazione didattica, per me molto interessante e stimolante.
Ringrazio tutti quelli che mi hanno sopportata in questi ultimi giorni di delirio, in cui non sono stata sempre simpatica ed, in particolare, la mia mammi ed il mio babbone che hanno sempre creduto in me, a volte più di me stessa. Non avrei mai potuto desiderare di meglio.